Les decisions sota condicions d'incertesa

PID_00245338

Joaquim Silvestre i Benach

Amb la col·laboració de
Maria Llop Llop

Temps mínim previst de lectura i comprensió: **4 hores**

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

Com es tria entre un treball que generarà una renda futura fixa certa i un treball que generarà una renda variable incerta? Com un individu escull invertir una quantitat de diners en actius de renda fixa (certa) o bé invertir la mateixa quantitat de diners en actius de renda variable (arriscada)? Per què alguns individus decideixen contractar una assegurança per cobrir un risc i altres individus, davant de la mateixa situació, decideixen no assegurar-lo?

Aquest mòdul tracta aquest tipus de qüestions. En concret, analitzarem la presa de decisions dels agents quan no estan segurs de les conseqüències que tindran aquestes decisions en un moment futur. En general, la incertesa es produeix sempre que la tria present comporta uns resultats que s'acabaran desencadenant en un moment futur i després que s'hagi produït un succés aleatori posterior a la decisió, que acabarà influint sobre els resultats finals.

> Per a posar un exemple, quan els pagesos planegen i sembren la collita no saben com serà la climatologia durant el temps de cultiu, però la seva producció, i per tant també els seus beneficis, depenen en gran mesura del clima que acabi fent.

En un context incert, existeix un risc en el sentit que pot haver-hi més d'un resultat. Per a descriure la incertesa generada pel risc, ens basem en el concepte de **probabilitat**. La probabilitat és un nombre entre 0 i 1 que mesura la possibilitat que succeeixi un esdeveniment factible futur. Un valor 0 significa que el succés mai ocorrerà; un valor 1 significa que el succés ocorrerà amb seguretat, és a dir, amb certesa. En canvi, un valor igual a 0,5 significa que la meitat de les vegades el succés passarà i l'altra meitat de vegades el succés no passarà.

> Per exemple, la probabilitat que una moneda llançada a l'aire caigui de cara o de creu és de 0,5 en cada cas, ja que quan la llancem un nombre molt gran de vegades la meitat d'aquestes vegades probablement sortirà cara i l'altra meitat probablement sortirà creu.

Partirem de la hipòtesi que la probabilitat d'un succés pot estimar-se. Algunes vegades la probabilitat es pot mesurar directament, com en l'exemple de la moneda llançada a l'aire. Altres vegades, però, ens podem aproximar a un valor de probabilitat en funció de l'experiència i de les estadístiques del passat, és a dir, emprant dades reals. Aquest és el cas, per exemple, de la probabilitat que un bebè sigui nen o nena, que està basada en el registre de naixements dels anys anteriors. Finalment, en altres ocasions la probabilitat és subjectiva i es determina per impressions obtingudes en situacions passades similars. Així, la probabilitat d'èxit d'un nou producte llançat al mercat es pot quantificar usant l'experiència de productes similars juntament amb l'ús de conjectures en relació amb successos futurs.

Davant d'una situació incerta, es defineix el **valor monetari esperat** com la suma dels valors monetaris obtinguts amb cada resultat possible multiplicats per la probabilitat d'ocurrència d'aquest resultat. Alhora, en un context incert, la racionalitat dels individus està basada en unes preferències *ex ante*, que es defineixen en funció de perspectives aleatòries amb resultats incerts. Aquesta utilitat *ex ante* d'una determinada opció, l'analitzarem a partir de preferències que satisfan la hipòtesi de la **utilitat esperada**. La utilitat esperada és igual a la suma de la utilitat obtinguda amb cada resultat possible i multiplicada per la probabilitat que cadascun d'aquests resultats acabi succeint.

El valor esperat i la utilitat esperada permeten classificar els individus en tres tipus diferents, que tenen a veure amb la seva actitud davant del risc:

- **Neutralitat davant del risc**. Es dóna quan el consumidor mostra indiferència entre una renda segura i una renda incerta que té el mateix valor esperat. En aquesta situació, la renda té una utilitat marginal constant.

- **Aversió al risc**. Es dóna quan l'individu prefereix una renda segura a una arriscada que tingui el mateix valor esperat. En aquest cas, la utilitat marginal de la renda del consumidor és decreixent.

- **Atracció pel risc**. El consumidor que prefereix una renda arriscada a una renda segura que tingui el mateix valor esperat és amant del risc. Davant d'aquesta situació, la renda de l'individu té una utilitat marginal creixent. L'atracció pel risc és típica de les apostes en loteries o d'algunes activitats delictives dels individus, per exemple defraudar en el pagament d'impostos.

Exemples de decisions sota condicions incertes

Alguns exemples de decisions sota condicions incertes són:

- Decisions d'inversió en actius (físics o financers) arriscats.
- Elecció d'una carrera professional.
- Finançament per a l'obtenció d'una vivenda o altres actius.
- Contractació d'una assegurança.

Objectius

En els materials didàctics d'aquest mòdul hi ha les eines imprescindibles per a assolir els objectius següents:

1. Concloure l'estudi de la racionalitat individual començat en el mòdul «Les preferències del consumidor».

2. En els mòduls «Les decisions de comprar» i «Les decisions de comprar i vendre» s'han estudiat decisions que tenen resultats segurs. En aquest mòdul s'estudien un seguit de decisions, com ara decisions d'inversió en actius arriscats, o decisions sobre assegurança, que els consumidors han de prendre abans que ocorri un esdeveniment aleatori que influeixi en els resultats.

Un objectiu d'aquest mòdul és entendre que les decisions racionals d'un consumidor responen a preferències *ex ante*, és a dir, preferències definides sobre perspectives aleatòries, de resultats incerts. En aquesta assignatura ens limitem a preferències *ex ante* que satisfan la hipòtesi de la «utilitat esperada».

3. Entendre el procés de decisió individual, particularment quan les preferències del consumidor el menen a protegir-se dels riscos en les decisions que ha de prendre en mercats financers i d'assegurances.

Aquest estudi és la base d'anàlisis posteriors, concretament l'anàlisi positiva del funcionament de mercats competitius d'assegurances, l'anàlisi normativa de l'eficiència econòmica dels mercats d'assegurances quan la informació és asimètrica, així com l'estudi, també normatiu, de l'assegurança social en els aspectes d'eficiència *ex ante* i de distribució *ex post*.

4. Familiaritzar-se amb algunes formes funcionals que s'utilitzen amb freqüència en els estudis empírics, per exemple, estudis sobre el funcionament dels mercats financers. Ens referim concretament a les funcions d'utilitat logarítmica, quadràtica, d'aversió al risc absoluta constant, i d'aversió al risc relativa constant.

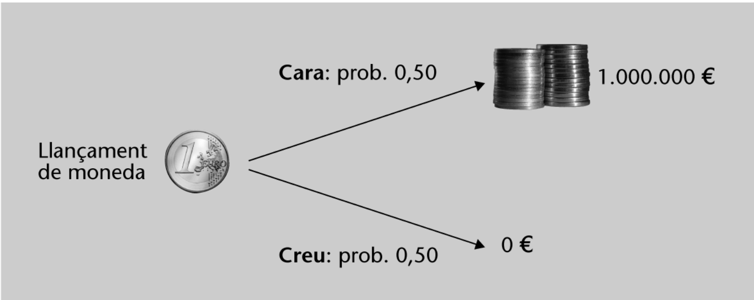
1. El problema de decisió

El gràfic 1 representa un bitllet de loteria hipotètic. Es llança una moneda a l'aire. Si surt cara, el bitllet és guanyador i dóna un milió d'euros. Si surt creu, el bitllet no val res.

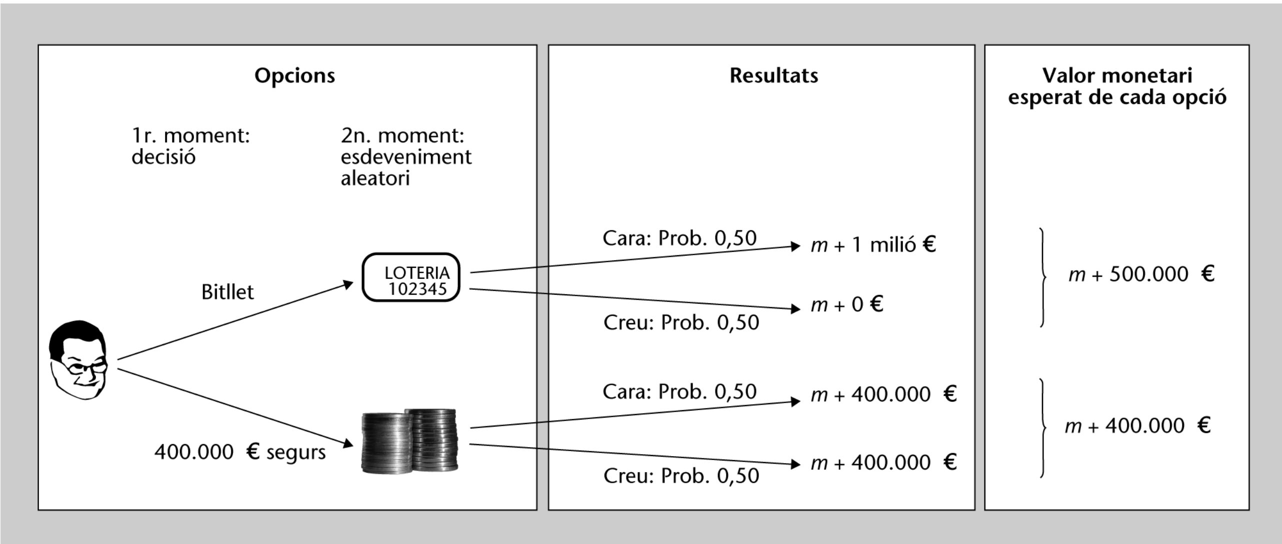
Suposem, però, que hem de triar entre aquest bitllet i 400.000 **€** segurs. Si la nostra riquesa inicial és de *m* **€**, aleshores la nostra riquesa final o **resultat** dependrà de la decisió que prenguem i de l'esdeveniment aleatori. El gràfic 2 representa esquemàticament la nostra decisió entre el bitllet (opció incerta) i 400.000 **€** segurs (opció certa).

La probabilitat que en llançar una moneda a l'aire el resultat sigui cara és $\pi = 0,5$.

Gràfic 1. Un bitllet hipotètic



Gràfic 2. Plantejament d'una decisió sota condicions d'incertesa



Què triaríem?

És important adonar-se que persones racionals diferents poden tenir preferències diferents entre aquestes dues opcions.

2. El valor monetari esperat

Cada opció amb resultats monetaris té el seu **valor (monetari) esperat**. Per tal d'obtenir aquest valor, cada possible quantitat resultant s'ha de multiplicar per la probabilitat que ocorri i, seguidament, aquests termes s'han de sumar algebraicament.

Per al gràfic 1, el valor esperat de l'opció «bitllet» és el següent:

$$0{,}5 \times (m + 1 \text{ milió } €) + 0{,}5 \times m = m + 500.000 \text{ } € \qquad (1)$$

En canvi, el valor esperat de l'opció «400.000 € segurs» és el següent:

$$m + 1 \times 400.000 \text{ € segurs} = m + 400.000 \text{ } €$$

Tal com podem veure, aquest últim és inferior al de l'opció «bitllet».

En general, si una opció incerta dóna k^1 € amb probabilitat π^1, k^2 euros amb probabilitat π^2, ... i k^N euros amb probabilitat π^N, en què $\pi^1 + \pi^2 + ... + \pi^N = 1$, llavors el seu valor esperat es defineix d'aquesta manera:

$$\textbf{valor esperat} = \pi^1 k^1 + \pi^2 k^1 + ... + \pi^N k^N$$

El concepte de *valor esperat* es pot enfocar d'una altra manera.

Considerem el següent joc: llanceu una moneda a l'aire. Guanyeu 1 euro si surt cara, i en perdeu un si surt creu. El valor esperat d'aquest joc és de zero euros (suposem que la moneda és perfecta, és a dir, no té biaix).

La taula següent presenta possibles resultats de repetir el joc un nombre molt alt de vegades:

Repetició hipotètica del joc 1 (cara o creu)

Nombre de tirades	Nombre de cares	Nombre de creus	Raó de cares/ nombre de tirades	Guany total (euros)	Guany mitjà (euros)
1	0	1	0,000	–1	–1
100	54	46	0,540	8	0,08
500	254	246	0,508	8	0,016
1.000	501	499	0,501	2	0,002
5.000	2.516	2.484	0,5032	32	0,0064
10.000	4.979	5.021	0,4979	–42	–0,0042

Font: Warren Weaver (1963). *Lady Luck: The Theory of Probability*. Nova York: Anchor Books.

Quan augmenta el nombre de tirades, el guany monetari mitjà s'aproxima a zero, que és el valor esperat del joc. Observeu que el guany monetari total no s'aproxima a zero. En general, el valor esperat d'una decisió amb resultats monetaris incerts és el límit al qual tendeix el guany monetari mitjà quan el nombre de repeticions tendeix a l'infinit.

Una persona que juga repetidament a un joc amb valor esperat igual a zero pot acabar guanyant o perdent molt en termes absoluts, segons la sort que tingui, però el guany mitjà (és a dir, els guanys dividits pel nombre de repeticions) s'aproxima a zero a mesura que el nombre de repeticions augmenta. La teoria de la decisió sota condicions d'incertesa suposa que el consumidor pot assignar probabilitats als diversos resultats, malgrat que l'experiment aleatori no es pugui repetir. Aquestes probabilitats poden tenir caràcter subjectiu, indicant el grau de confiança que el consumidor té en el fet que es doni un resultat determinat. En altres paraules, no fem distinció entre decisions sota condicions d'incertesa i sota condicions de risc.

3. Les preferències *ex ante* i la utilitat esperada

El consumidor ha de decidir sobre opcions o perspectives aleatòries (que poden donar diverses quantitats de diners), i no pas directament sobre quantitats de diners. Per tant, les decisions sota incertesa d'un consumidor racional s'han de basar en preferències *ex ante*, és a dir, d'abans que la incertesa es resolgui.

Ex post, i en el cas de quantitats de diners, és natural suposar que tot consumidor en prefereix més que menys. Però les preferències *ex ante* són influïdes no solament pels possibles resultats monetaris, sinó també per les probabilitats, i per les actituds personals envers el risc. Per tant, les preferències *ex ante* poden variar de consumidor a consumidor.

3.1. La paradoxa de Sant Petersburg

Tornem al bitllet de loteria del gràfic 1. Podem imaginar-nos sense gaires problemes que, *ex post,* tothom té les mateixes preferències, és a dir, que tothom prefereix 1.000.000 euros a res, però, i *ex ante*? Si el vostre oncle ric us ofereix triar entre el bitllet de loteria i 400.000 euros, en efectiu, bitllo-bitllo, què preferireu? Certament, 400.000 no arriba al valor esperat del bitllet, que és de 500.000 euros, però això no vol pas dir que tota persona racional hagi de preferir el bitllet. Persones racionals diferents poden tenir preferències diferents entre aquestes dues alternatives: l'autor d'aquestes ratlles, personalment, no s'ho pensaria dos cops, preferiria els 400.000 bitllo-bitllo, malgrat que el seu valor esperat és inferior al del bitllet.

Però la idea que una persona triï l'alternativa amb el valor monetari esperat més baix resultava xocant quan, als segles XVII i XVIII, es començava a desenvolupar l'anàlisi de la probabilitat. El punt de referència era sovint el dels jocs d'atzar i es pensava que una persona racional hauria de prendre les seves decisions al llarg del joc amb l'objectiu de maximitzar el valor esperat. Per demostrar la falsedat d'aquest principi, Daniel Bernoulli va publicar l'any 1738 en llatí a la revista de l'acadèmia de les ciències de Sant Petersburg, la paradoxa següent: «Un casino hipotètic us ofereix jugar un cop al joc següent, si pagueu una entrada. Llanceu una moneda: si surt cara s'acaba el joc, i guanyeu 2 euros (menys l'entrada). Si surt creu torneu a tirar: si ara surt cara, s'acaba el joc, i guanyeu $2^2 = 4$ euros. Si torna a sortir creu, tireu de nou; si aleshores surt cara s'acaba el joc i guanyeu $2^3 = 8$ euros. I així successivament: el joc s'acaba en la primera tirada que surt cara, diguem-ne la tirada número n, i el guany (menys l'entrada) és 2^n, on n és la tirada».


Daniel Bernoulli (1700-1782) va ser un important físic, matemàtic i fisiòleg.

Quin és el valor esperat d'aquest joc? Bé, amb probabilitat $\frac{1}{2}$, $n = 1$; amb probabilitat $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, $n = 2$,...

El valor esperat del joc es pot calcular així:

$$-\text{entrada} + \left(\frac{1}{2}\right) 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 2^3 \ldots = \\ = -\text{entrada} + 1 + 1 + 1 \ldots = -\text{entrada} + \infty = \infty \tag{1}$$

Per tant, una persona que maximitzés el valor monetari esperat triaria jugar fos quina fos l'entrada, encara que fos molt alta.

Si la idea d'un nombre infinit de tirades us sembla estranya, modifiqueu el joc de manera que si surt un milió de cares seguides, s'acaba el joc i guanyeu $2^{1.000.000}$ **€**. El valor esperat de l'opció «jugar» seria llavors *m* – entrada + 1.000.000, i si una persona maximitzés el valor monetari esperat triaria jugar si l'entrada fos menor que o igual a 999.000 **€**.

I vós, quina entrada estaríeu disposat a pagar? La majoria de gent, no gaires euros, aproximadament 20 o 30, o potser 100 com a màxim. La paradoxa demostra a bastament que la majoria de persones no maximitzen el valor monetari esperat.

3.2. La funció d'utilitat de von Neumann i Morgenstern, i la utilitat esperada

Daniel Bernoulli va suggerir que, en lloc del valor monetari esperat, el consumidor maximitza les seves preferències *ex ante*, que tenen la forma de la **utilitat esperada**. Cada persona té una funció que assigna a cada possible resultat monetari un nivell d'utilitat. Concretament, Bernoulli va dir que, per a ell, aquesta funció era el logaritme. La utilitat esperada d'una opció és la suma dels nivells d'utilitat de cada resultat possible, cadascun d'ells multiplicat per la probabilitat de la seva ocurrència.

John von Neumann

John von Neumann (1903-1957) fou un important matemàtic. Va ser l'autor, entre altres llibres, de *Theory of Games and Economic Behavior*, en col·laboració amb Oskar Morgenstern.

Per a una decisió com ara la del gràfic 2, i per la funció logaritme suggerida per Bernoulli, la utilitat esperada de l'opció «400.000 **€** segurs» seria ln (*m* + 4.000.000), mentre que la de la opció «bitllet» seria 0,5 ln (*m* + 1.000.000) + 0,5 ln (1.000.000). Si la riquesa inicial fos baixa, diguem 100.000 **€**, llavors triaria l'opció «400.000 **€** segurs», atès que, com podem trobar amb una calculadora, ordinador o taula de logaritmes:

Utilitat esperada de l'opció «400.000 **€** segurs» = ln (800.000) = 13,122 > 12,712 = 0,5 ln(1.100.000) + 0,5 ln(100.000) = utilitat esperada de l'opció «bitllet».

Però si la riquesa inicial fos alta, diguem 1.000.000 €, llavors triaria l'opció «bitllet», atès que

Utilitat esperada de l'opció «400.000 € segurs» = ln(1.400.000) = 14,152 < 14,162 = 0,5 ln(2.000.000) + 0,5 ln(1.000.000) = utilitat esperada de l'opció «bitllet».

El gràfic 3 il·lustra el paper de la utilitat esperada en la decisió del gràfic 2. La funció logaritme proposada per Daniel Bernoulli és evidentment un cas particular. Més generalment, tindrem una funció $u(x)$, on x és un nombre real usualment positiu que indica una quantitat de diner (certa) entesa com la riquesa total, *ex post*, del consumidor, i $x = 0$ correspondria a la misèria absoluta, però sense deutes, i $u(x)$ s'interpreta com la utilitat que la quantitat x reporta al consumidor. Aquesta funció s'anomena *funció d'utilitat de von Neumann i Morgernstern* (*vNM*). Com que la funció de vNM, $u(x)$ té caràcter subjectiu, variarà de consumidor a consumidor.

Recordem que, per al càlcul del valor esperat, primer multipliquem les possibles quantitats de diners per la probabilitat de la seva ocurrència. El procediment és similar per a la utilitat esperada, però en lloc de multiplicar probabilitats per quantitats de diner, les multipliquen per les «utilitats» que les diverses quantitats de diner reporten al consumidor. Concretament, la utilitat *ex ante* de l'opció o perspectiva incerta de tenir la quantitat de diners x^1 amb probabilitat π^1 i x^2 amb probabilitat π^2, on $\pi^1 + \pi^2 = 1$ s'anomena la *utilitat esperada* i es defineix com:

$$\left.\begin{array}{l}\text{utilitat esperada de}\\ x^1 \text{ euros amb prob. } \pi^1 =\\ \text{i } x^2 \text{ euros amb prob. } \pi^2\end{array}\right\} \pi^1 u(x^1) + \pi^2 u(x^2). \tag{2}$$

En una decisió entre diverses opcions, el consumidor tria l'opció amb utilitat esperada més alta ateses les seves preferències *ex ante*, és a dir, atesa la seva funció d'utilitat de vNM.

Insistim un cop més: cal no perdre mai de vista la distinció fonamental entre:

- El **valor esperat** de l'opció incerta, que és la quantitat d'euros $\pi^1 x^1 + \pi^2 x^2$ (com a l'expressió (1), o com l'infinit de la paradoxa de Sant Petersburg), i que és objectiva en la mesura en què les probabilitats ho són, i

- la **utilitat esperada** $\pi^1 u(x^1) + \pi^2 u(x^2)$, expressada per (2), que representa les preferències *ex ante* del consumidor, i és, per tant, subjectiva.

Com que la funció de vNM, $u(x)$ té caràcter subjectiu, variarà de consumidor a consumidor. Com hem vist, Bernoulli va suggerir la funció ln x. Altres funcions de vNM que sovint s'utilitzen per als estudis empírics, juntament amb els seus noms usuals, són:

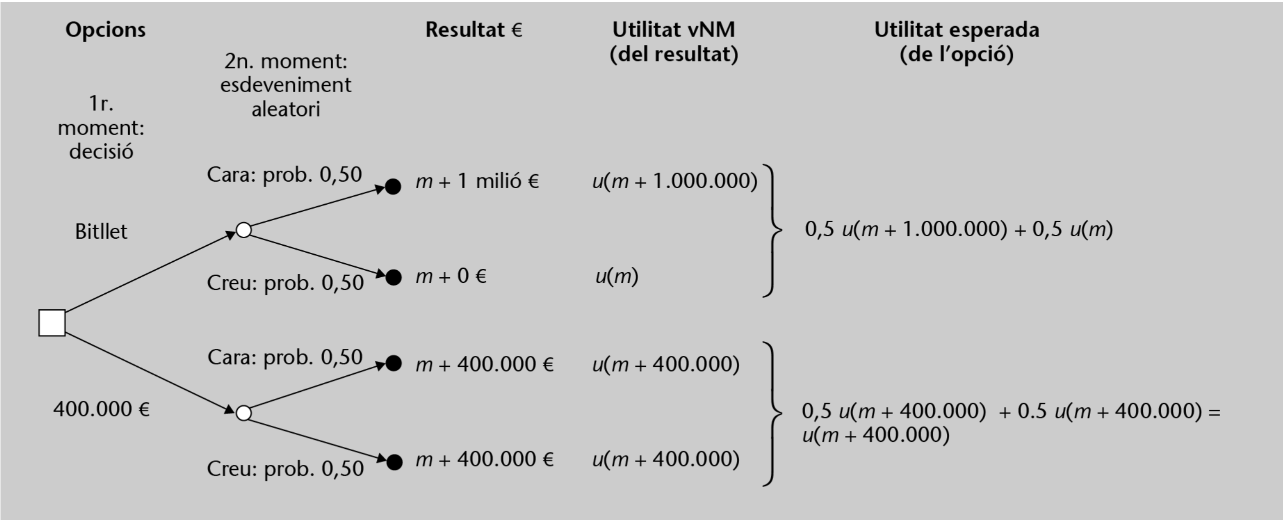
$bx - (1/2)x^2$ (per $x < b$, on $b > 0$, **quadràtica**);

$-e^{-r\,x}$ (per $r > 0$, **aversió al risc absoluta constant**);

$\dfrac{x^{r-1} - 1}{r - 1}$ (per $r > 0$, $r \neq 1$, **aversió al risc relativa constant**).

Cal observar que les preferències *ex ante* definides per cadascuna d'aquestes funcions no canvien si hi afegim una constant o les multipliquem per un coeficient positiu.

Gràfic 3. El consumidor tria l'opció amb utilitat esperada més alta



3.3. L'aversió al risc

Retornem a l'exemple del bitllet de loteria del gràfic 1: segons les preferències de l'autor d'aquestes línies, la utilitat de 500.000 euros bitllo-bitllo és superior (*ex ante*, és a dir, abans que es faci el sorteig) a la del bitllet que dóna 1.000.000 d'euros amb probabilitat 0,50. (Òbviament, la utilitat *ex post* del bitllet depèn de si ha tocat o no: si ha tocat, *ex post* val més de 500.000 euros.)

El valor esperat del bitllet és: 0,5 · 0 + 0,5 · 1.000.000 = 500.000, que òbviament és el mateix que el valor esperat de 500.000 euros segurs. Però el bitllet comporta més risc que 500.000 euros bitllo-bitllo. L'autor d'aquestes ratlles clarament prefereix, *ex ante*, el valor esperat del bitllet al bitllet. L'autor manifesta aversió al risc. Més precisament, diem que un consumidor té **aversió al risc** si, davant una perspectiva aleatòria que dóna x^1 amb probabilitat π^1 i x^2 amb probabilitat π^2, el consumidor prefereix una quantitat segura de diners igual al valor esperat de la perspectiva a la pròpia perspectiva, o, en altres paraules:

Si l'oncle ric us ofereix triar entre aquest bitllet de loteria i 500.000 euros, en efectiu, què preferiríeu?

Aversió al risc: utilitat del valor esperat > utilitat esperada. És a dir:

$$u(\pi^1\, x^1 + \pi^2\, x^2) > \pi^1\, u(x^1) + \pi^2\, u(x^2).$$

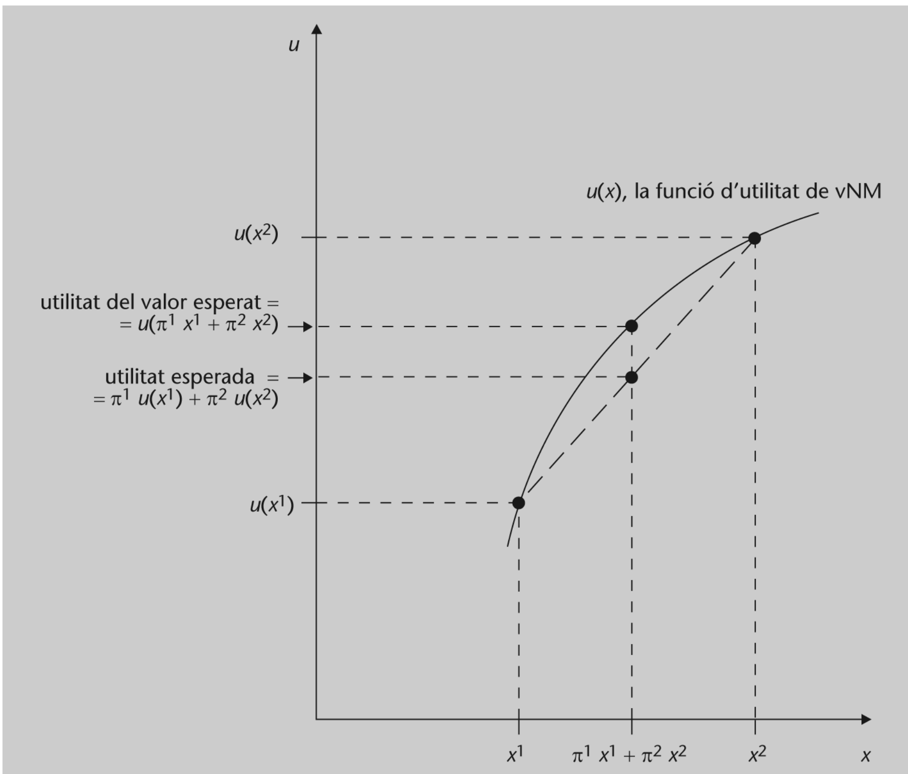
Es pot comprovar, utilitzant la definició de funció estrictament còncava, que l'aversió al risc és equivalent a la concavitat estricta de la funció de vNM, $u(x)$. La utilitat del valor esperat $\pi^1 x^1 + \pi^2 x^2$ d'una perspectiva aleatòria, amb certesa, és superior a la utilitat esperada de la perspectiva aleatòria. El gràfic 4 il·lustra aquesta idea.

Considerem l'opció incerta que dóna x^1 euros amb probabilitat $\pi^1 = 0{,}5$ i x^2 euros amb probabilitat $\pi^2 = 0{,}5$. El valor esperat d'aquesta opció és la quantitat $\pi^1 x^1 + \pi^2 x^2 = 0{,}5\ x^1 + 0{,}5\ x^2$. El representa gràficament el punt del mig de l'interval $[x^1, x^2]$ a l'eix de les abscisses del gràfic 4.

Un cop localitzat el valor esperat $\pi^1 x^1 + \pi^2 x^2$ a l'eix de les abscisses, podem llegir la utilitat de vNM d'aquesta quantitat segura de diners a l'eix de les ordenades. Haurem de traçar una línia vertical fins que topem amb el gràfic de la funció de vNM. El valor corresponent de l'ordenada és $u(\pi^1 x^1 + \pi^2 x^2)$, tal com indica el gràfic.

Quina és, però, la utilitat esperada de l'opció incerta? Amb probabilitat 0,5, el resultat de l'opció serà de x^1 euros, que dóna el nivell d'utilitat $u(x^1)$. D'altra banda, amb probabilitat 0,5, el resultat serà de x^2 euros, que dóna el nivell d'utilitat $u(x^2)$. Per tant, la utilitat esperada de l'opció és $\pi^1 u(x^1) + \pi^2 u(x^2) = 0{,}5\ u(x^1) + 0{,}5\ u(x^2)$, que representa gràficament el punt del mig de l'interval $[u(x^1), u(x^2)]$ l'eix de les ordenades del gràfic 4. És gràficament clar que, atesa la concavitat estricta de la funció de vNM, la utilitat esperada de l'opció incerta és inferior a la utilitat del seu valor esperat.

Gràfic 4. Funció de vNM, *u*(*x*)



Funció de vNM, *u*(*x*)

La concavitat estricta de la funció de vNM, $u(x)$ implica aversió al risc, ja que llavors: utilitat del valor esperat = $u(\pi^1 x^1 + \pi^2 x^2) > \pi^1 u(x^1) + \pi^2 u(x^2)$ = utilitat esperada.

El mateix argument s'aplica a qualsevol probabilitat π^1, amb $\pi^2 = 1 - \pi^1$. El valor monetari esperat és un punt en l'interval $[x^1, x^2]$ en l'eix de les abscisses del gràfic 4. Si tracem una línia vertical fins que topem amb el gràfic de la funció de vNM i llegim el valor de l'ordenada corresponent, trobarem $u(\pi^1 x^1 + \pi^2 x^2)$. Per a la utilitat esperada de l'opció incerta, mirem el punt de trobada de la línia vertical amb el segment que uneix el punt amb coordenades $(x^1, u(x^1))$ amb el punt amb coordenades $(x^2, u(x^2))$. El valor de l'ordenada d'aquest punt d'intersecció ens dóna la utilitat esperada $u(\pi^1 x^1 + \pi^2 x^2)$ de l'opció incerta. Atesa la concavitat estricta de la funció, el segment esmentat sempre estarà per sota del gràfic de la funció de vNM, cosa que implica que la utilitat esperada sempre serà inferior a la utilitat del valor esperat.

Observem que l'aversió al risc no vol dir que el consumidor sempre prefereix una opció certa a una opció incerta. Concretament, pot molt ben ser que prefereixi l'opció incerta si la quantitat d'euros de l'opció certa és prou baixa. Per exemple, abans hem considerat un consumidor amb el logaritme com a funció d'utilitat de vNM, funció que evidentment és estrictament còncava, i que per tant mostra aversió al risc. Hem calculat que, si la seva riquesa inicial és m = 1,000,000 €, llavors prefereix el bitllet de loteria a la quantitat segura de 400.000 €. Però preferirà qualsevol opció certa que doni una quantitat segura superior o igual a 500.000 € al bitllet.

El gràfic 4 suggereix que, com més forta es la curvatura de la funció d'utilitat de vNM, més forta es l'aversió al risc, és a dir, més fàcil és que el consumidor prefereixi una quantitat baixa d'euros al bitllet de loteria. La curvatura té a veure amb la segona derivada $u''(x)$ de la funció $u(x)$. De fet, sovint s'utilitzen les mesures d'aversió al risc següents:

$$\text{Coeficient d'aversió al risc absoluta} = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

$$\text{Coeficient d'aversió al risc relativa} = -x\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Hi ha certa evidència que, per a moltes persones, el coeficient d'aversió al risc absoluta disminueix amb la riquesa total, és a dir, $-\frac{u''(x)}{u'(x)}$ és una funció decreixent de x. Intuïtivament, una persona molt rica pot estar més inclinada a participar en un joc en què es guanyen o es perden 1.000 euros a cara o creu que no pas una persona pobra. Aleshores, la funció quadràtica $bx - (1/2)x^2$ (per $x < b$) no seria la correcta.

En canvi, la funció ln x sí que presenta aquesta característica: com hem calculat abans per a la decisió dels gràfics 2 i 3, el consumidor tria l'opció certa (400.000 € segurs) si la seva riquesa inicial és de 100.000 €, però tria l'opció incerta (bitllet) si la seva riquesa inicial és de 1.000.000 €. Si calculem les derivades de la funció ln x, veiem que el coeficient d'aversió al risc relativa és igual a 1 i, per tant, el d'aversió absoluta disminueix en augmentar x. Quelcom similar ocorre amb la funció $\frac{x^{r-1}-1}{r-1}$, que té un coeficient d'aversió al risc relativa constant i igual a r, cosa que justifica el nom que li hem donat abans.

3.4. Altres actituds envers el risc i les teories conductistes

L'aversió al risc no és l'única actitud possible. Podria ser que una persona només es preocupés del valor esperat, és a dir, que fos indiferent entre perspectives que tenen el mateix valor esperat. Preferiria 500.001 euros al bitllet de loteria del gràfic, però preferiria el bitllet de loteria a 499.999 euros.

Una persona així s'anomena *neutral envers el risc*. La seva funció d'utilitat de vNM seria del tipus següent:

$$u(x) = x,$$

és a dir, una funció lineal (que és a la vegada còncava i convexa, però que no és ni estrictament còncava ni estrictament convexa).

A l'extrem oposat a l'aversió al risc hi tindríem l'atracció al risc. Una persona atreta pel risc preferiria el bitllet del gràfic! a qualsevol quantitat certa de diners no superior a 500.000 €.

Matemàticament, la funció d'utilitat de vNM d'una persona inclinada al risc és estrictament convexa.

Cal observar que, de fet, moltes persones demostren atracció per riscos baixos (per exemple, quan juguen 10 € a la loteria de Nadal que, com gairebé totes les loteries, té un valor esperat negatiu) i, al mateix temps, manifesten aversió a riscos alts (no invertir en uns valors arriscats si el seu rendiment esperat no és molt alt). Aquest comportament s'avé malament amb el model de la utilitat esperada. Ha motivat un seguit de teories alternatives, nascudes en el camp de l'economia o la psicologia, que de vegades s'han anomenat *teories conductistes*. Actualment, d'aquestes teories, la més influent és l'anomenada *teoria de les perspectives*, de Daniel Kahneman i Amos Tversky. En general, l'economia conductista ha evidenciat un seguit de biaixos sistemàtics en el comportament de les persones respecte de la teoria de la utilitat esperada. La utilitat esperada, però, continua essent un punt de referència central en l'anàlisi de les decisions racionals sota condicions d'incertesa. Igualment, el comportament dels agents econòmics en els mercats financers i d'assegurances indica que, generalment, les persones manifesten aversió al risc a l'hora de prendre decisions importants.

Referència bibliogràfica

D. Kahneman i A. Tversky (1979). «Prospect Theory. An analysis of decision under risk». *Econometrica* 47, 263-291; **A. Tversky i D. Kahneman** (1992). «Advances in prospect theory. Cumulative representation of uncertainty». *Journal of Risk and Uncertainty* 5, 297-323.

Daniel Kahneman

Kahneman va ser guardonat amb el premi Nobel d'economia del 2002, sis anys després de la mort del seu col·laborador.

4. L'assegurança

4.1. El contracte d'assegurança

Els exemples de decisions sota condicions d'incertesa que hem vist, com ara l'exemple del bitllet de loteria dels gràfics 1 i 2 i la paradoxa de Sant Petersburg, eren més il·lustratius que no pas realistes. Les decisions sobre la subscripció de contractes d'assegurança són exemples de més importància pràctica. Alguns d'aquests contractes cobreixen els riscos monetaris de danys o les pèrdues per sinistres, com ara incendis, robatoris, accidents, etc. D'altres, com les assegurances sobre la salut, la vida o les pensions de jubilació, cobreixen incerteses sobre la salut, les rendes futures o els anys que queden de vida. Aquestes incerteses inclouen un component monetari.

Per tal de simplificar, primer suposarem que només poden passar dues coses al consumidor:

1) Tenir mala sort i trobar-se en l'estat dolent, els efectes del qual es poden equiparar a una pèrdua monetària de Y **€**.

2) Tenir bona sort i trobar-se en l'estat bo, en què no té cap pèrdua.

Suposem que la probabilitat de trobar-se en l'estat dolent és π.

Els contractes d'assegurança per a la protecció contra aquests riscos prenen la forma següent:

- *Ex ante*, és a dir, abans de saber si l'estat és bo o dolent, l'assegurat paga una prima, P.
- *Ex post* en l'estat dolent la companyia paga una indemnització igual a la cobertura, z. (En l'estat bo no hi ha cap més transferència.)

Considerem un cas senzill de contracte d'assegurança: el consumidor pot triar qualsevol nivell z de cobertura sota la condició que no pot excedir la pèrdua potencial, és a dir, $0 \leq z \leq Y$. D'altra banda, la prima per euro de cobertura o taxa de prima, $\rho = P/z$, està fixada i és constant.

Si el consumidor tria la cobertura z, llavors paga la prima $P = \rho z$. Per tant, si la riquesa inicial del consumidor és m i el consumidor tria la cobertura z, la riquesa *ex post* del consumidor depèn de l'estat de la manera següent:

Franquícia

De vegades, la diferència $Y - z$ s'anomena *franquícia*. Aquí suposem que el consumidor pot elegir franquícia zero i que la prima per euro de cobertura no depèn de la franquícia.

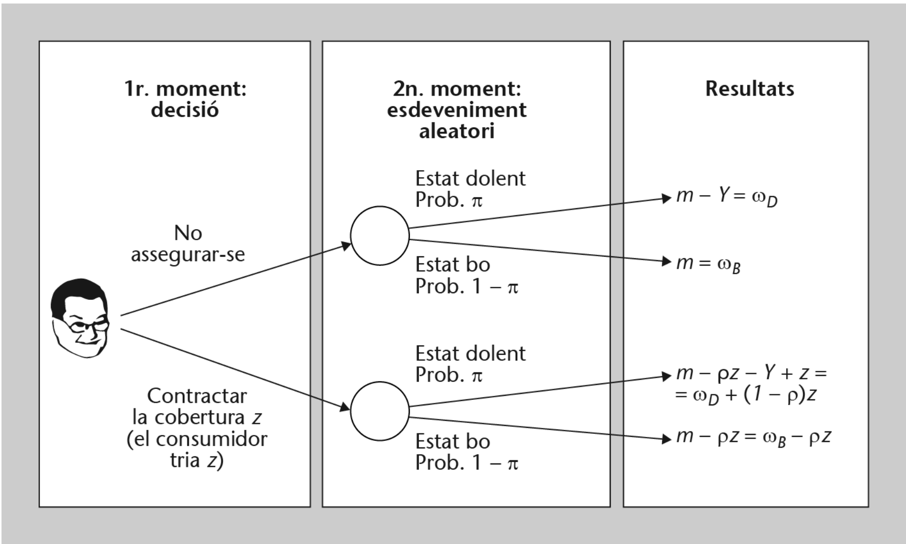
- En l'estat dolent, el consumidor ha pagat la prima ρz, té la pèrdua Y i rep de la companyia d'assegurances una indemnització igual a z, la cobertura contractada. Per tant, la seva riquesa *ex post* és $m - \rho z - Y + z = m - Y + (1 - \rho)z$.

- En l'estat bo és $m - \rho z$.

En els problemes de decisió dels gràfics 2 i 3 el consumidor només tenia dues opcions. Ara té un nombre infinit d'opcions, ja que tria la cobertura z, que pot ser qualsevol quantitat entre zero i Y.

Amb aquest benentès, podem representar els diversos resultats de les decisions del consumidor en el gràfic 5.

Gràfic 5. Els resultats d'una decisió d'assegurança



4.2. La recta pressupostària

Podem dir que, en contractar la cobertura z a la taxa de prima ρ, el consumidor:

- Cobra $(1 - \rho)z$ euros en l'estat dolent.
- Paga ρz en l'estat bo.

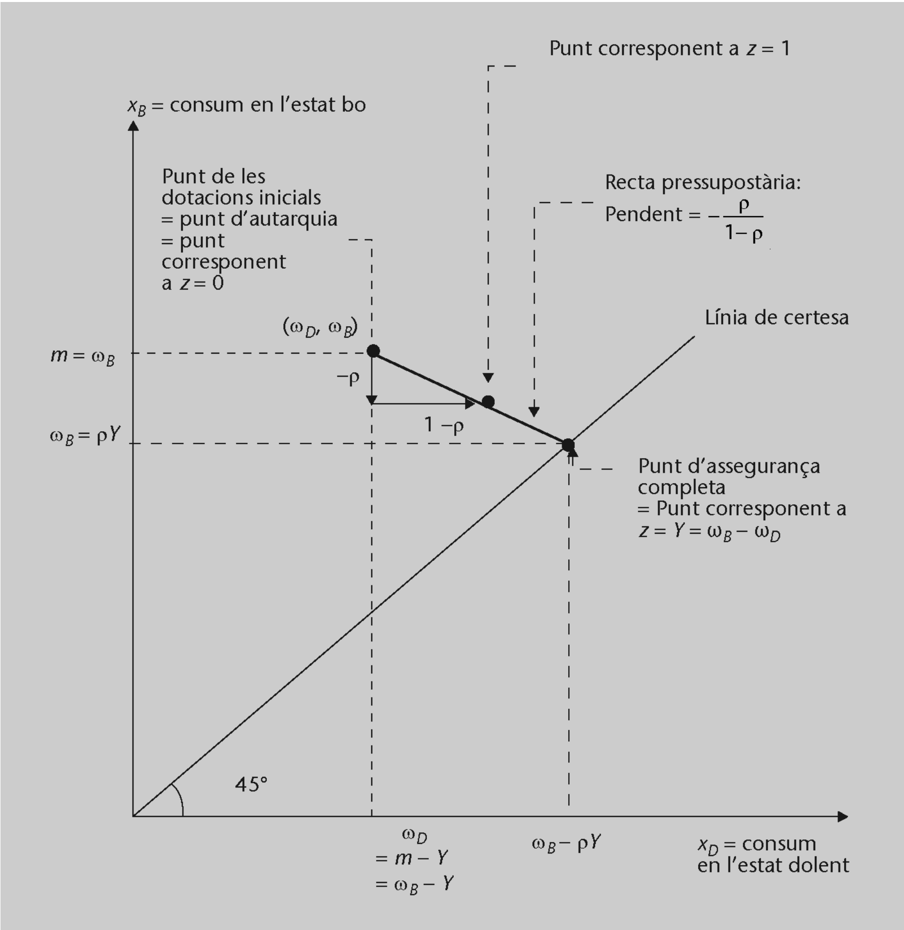
Com més gran és la cobertura z que contracta, més augmenta la seva riquesa en l'estat dolent i més disminueix en l'estat bo. Si identifiquem la riquesa *ex post* en cada estat amb el consum en l'estat, aquesta observació ens duu a considerar el contracte d'assegurança com una compravenda en què el consumidor fa el següent:

- Compra consum en l'estat dolent.
- Ven consum en l'estat bo.

Aleshores, la decisió del consumidor es pot entendre en els termes de les decisions de comprar i vendre estudiades en el mòdul 3, en què hem considerat la metàfora de les pomes i les taronges, i també les aplicacions a l'oferta de treball i a l'estalvi i el manlleu.

Recordem que, en l'aplicació de les decisions intertemporals, enteníem el consum en el present com un bé diferent del consum en el futur. És a dir, un estalviador venia consum present i comprava consum futur, mentre que un manllevador feia l'operació inversa. Paral·lelament, aquí veiem el consum en l'estat dolent com un bé diferent del consum en l'estat bo, i l'assegurat ven el segon bé per tal de comprar el primer. El gràfic 6, en què l'eix de les abscisses indica el consum en l'estat dolent (x_D) i el de les ordenades indica el consum en l'estat bo (x_B), s'assembla al de les pomes i les taronges del mòdul 3.

Gràfic 6. La recta pressupostària



Recta pressupostària

Contràriament al mòdul 3, aquí la recta pressupostària no arriba fins als eixos. Això és degut al fet que z no pot ser més gran que Y (els contractes d'assegurança no permeten la sobreassegurança, per tal d'evitar el risc moral) ni tampoc pot ser negativa (cosa que implicaria que el consumidor pagués la indemnització a la companyia d'assegurances en cas de sinistre).

D'acord amb aquesta visió, adaptem les paraules i la notació del mòdul 3 al problema de l'assegurança. Definim les dotacions inicials de consum en cada estat de la manera següent (vegeu el gràfic 6):

- Dotació inicial en l'estat dolent: $\omega_D = m - Y$.
- Dotació inicial en l'estat bo: $\omega_B = m$.

Com en el mòdul 3, el punt (ω_D, ω_B) és el punt inicial *ex ante*, és a dir, el que correspon a l'autarquia del consumidor, en què el consumidor no participa en el mercat d'assegurances. El consumidor sempre té aquesta opció, que equival a triar la cobertura $z = 0$. Aleshores, consumeix $x_D = \omega_D$ en l'estat dolent i $x_B = \omega_B$ en l'estat bo. (Vegeu el gràfic 6).

Si, en canvi, el consumidor participa en el mercat d'assegurances i tria la cobertura d'un euro ($z = 1$), ocorre el següent:

- Compra $(1 - \rho)$ unitats de consum en l'estat dolent.
- Ven ρ unitats de consum en l'estat bo.

En el gràfic 6, aquesta operació significa moure's ρ unitats cap avall i $(1 - \rho)$ unitats cap a la dreta respecte del punt de les dotacions inicials. Se segueix, per tant, una línia amb pendent:

$$-\frac{\rho}{1-\rho}. \tag{3}$$

Si la cobertura escollida z és la magnitud Y de la pèrdua, passa el que es mostra a continuació:

- El consum en l'estat dolent:

$$x_D = m - \rho Y - Y + Y = \omega_D + (1-\rho)Y = \omega_B - Y + (1-\rho)Y = \omega_B - \rho Y.$$

- El consum en l'estat bo:

$$x_B = m - \rho Y = \omega_B - \rho Y.$$

És a dir, *ex post*, el consum és el mateix, independentment de l'estat. En aquest cas, podem dir que la situació és la següent:

- El consumidor s'assegura totalment.
- El consum del consumidor és cert (és a dir, no és incert).
- El consumidor no assumeix cap risc.

Aquest és el cas d'assegurança completa. (Vegeu el gràfic 6).

Observem, de passada, que tots els punts de la recta de 45° del gràfic 6 tenen la propietat que $x_D = x_B$, cosa que justifica que l'anomenem *línia de certesa*.

Més generalment, i com veiem en el gràfic 6, el consumidor pot escollir qualsevol nivell de cobertura z entre zero i Y. Per tant, els consums en els dos estats depenen de z de la manera següent:

- Consum en l'estat dolent: $x_D = m - \rho z - Y + z = \omega_D + (1 - \rho)z$.
- Consum en l'estat bo: $x_B = m - \rho z = \omega_B - \rho z$.

Si eliminem z d'aquestes dues igualtats, podem escriure el consum en l'estat bo com a funció del consum en l'estat dolent, cosa que ens dóna l'equació de la recta que, en el gràfic 6, uneix el punt de les dotacions inicials amb el d'assegurança completa:

$$x_B = \omega_B - \rho\frac{-\omega_D + x_D}{1-\rho} = \omega_B + \frac{\rho}{1-\rho}\omega_D - \frac{\rho}{1-\rho}x_D.$$

El pendent d'aquesta recta és $-\frac{\rho}{1-\rho}$ d'acord amb (3). Aquesta igualtat ens dóna la recta pressupostària del consumidor, que podem reescriure de manera més similar a la del mòdul 3. Per exemple:

$$\frac{\rho}{1-\rho}x_D + x_B = \frac{\rho}{1-\rho}\omega_D + \omega_B .$$

Això ens permet interpretar $\frac{\rho}{1-\rho}$ com el preu del consum en l'estat dolent relatiu al de l'estat bo.

4.3. La igualació actuarial

Si la taxa de prima és ρ i el consumidor contracta la cobertura z, llavors amb probabilitat π el consumidor acabarà en l'estat dolent, de manera que cobrarà $(1 - \rho)z$. D'altra banda, amb probabilitat $(1 - \pi)$ acabarà en l'estat bo i pagarà $\pi\rho z$. Per tant, el **valor (monetari) esperat del contracte** és el següent:

$$\pi(1 - \rho)z - (1 - \pi)\rho z = (\pi - \rho)z.$$

Vist des del punt de vista de l'empresa asseguradora, $-(\pi - \rho)z$ és el **benefici esperat** que genera el contracte.

Diem que el contracte d'assegurança està **actuarialment igualat** (o actuarialment equilibrat) si el seu valor esperat és zero, és a dir, si és el següent:

$$\rho = \pi.$$

En altres paraules, un contracte d'assegurança està actuarialment igualat si la taxa de prima de cobertura és igual a la probabilitat de l'esdeveniment assegurat. En aquest cas, de l'expressió (3) obtenim que el pendent de la recta de balanç és el següent:

$$-\frac{\rho}{1-\rho} = -\frac{\pi}{1-\pi}.$$

Es pot argumentar que, si hi ha prou competència i llibertat d'entrada en el sector de les empreses d'assegurances, aleshores, en equilibri, el benefici esperat de cada empresa és zero i, en conseqüència, els contractes d'assegurances estan actuarialment igualats. A la vida real, però, les empreses sovint obtenen beneficis positius, cosa que, en termes esperats, equival a contractes d'assegurances que tenen valor esperat negatiu per al consumidor, és a dir, pels quals $\rho > \pi$.

Llavors diem que el contracte és **actuarialment desfavorable** per al consumidor (que és l'altra cara de la moneda del benefici esperat positiu per a l'empresa asseguradora). En aquest cas, el valor absolut del pendent de la recta de balanç satisfà la desigualtat:

$$\frac{\rho}{1-\rho} > \frac{\pi}{1-\pi}.$$

4.4. Les corbes d'indiferència

El consumidor té preferències *ex ante* definides sobre possibles nivells de consum (o de riquesa) segons els estats. Sota el supòsit de la utilitat esperada, i recordant que $u(x)$ denota la funció d'utilitat de vNM del consumidor, i que la probabilitat de l'estat dolent és π, la utilitat *ex ante* de l'opció de consumir x_D en l'estat dolent i x_B en l'estat bo, és la següent:

$$\pi\, u(x_D) + (1 - \pi)\, u(x_B).$$

Per tant, les corbes d'indiferència *ex ante* en el pla (x_D, x_B) estan determinades per equacions de la forma.

Funcions d'utilitat de vNM

Aquesta formulació segueix el supòsit que tots els efectes de l'estat dolent sobre el benestar de la persona es poden reduir a pèrdues monetàries. El model es pot fàcilment generalitzar a dues funcions d'utilitat de vNM, una per a cada estat, en què la mateixa renda monetària té efectes diferents sobre el benestar de la persona depenent, per exemple, de si està sana o malalta.

$$\pi\, u(x_D) + (1 - \pi)\, u(x_B) = \text{constant}.$$

Si diferenciem implícitament aquesta igualtat, trobem que el pendent de la corba d'indiferència *ex ante* en un punt determinat és el següent:

$$\frac{dx_B}{dx_D} = -\frac{\pi u'(x_D)}{(1-\pi)u'(x_B)}.$$

Aquesta expressió reflecteix la idea, estudiada en el mòdul 1, que el pendent de la corba d'indiferència, o el seu valor absolut, la taxa marginal de substitució, el determina el quocient de les utilitats marginals.

Observem que, en qualsevol punt de la recta de certesa, $x_D = x_B$ i, per tant, $u'(x_D) = u'(x_B)$. D'aquesta manera, obtenim el següent:

Vegeu el gràfic 7.

> El pendent $\frac{dx_B}{dx_D}$ d'una corba d'indiferència en qualsevol punt de la recta de certesa és aquest:
>
> $$-\frac{\pi}{1-\pi}.$$

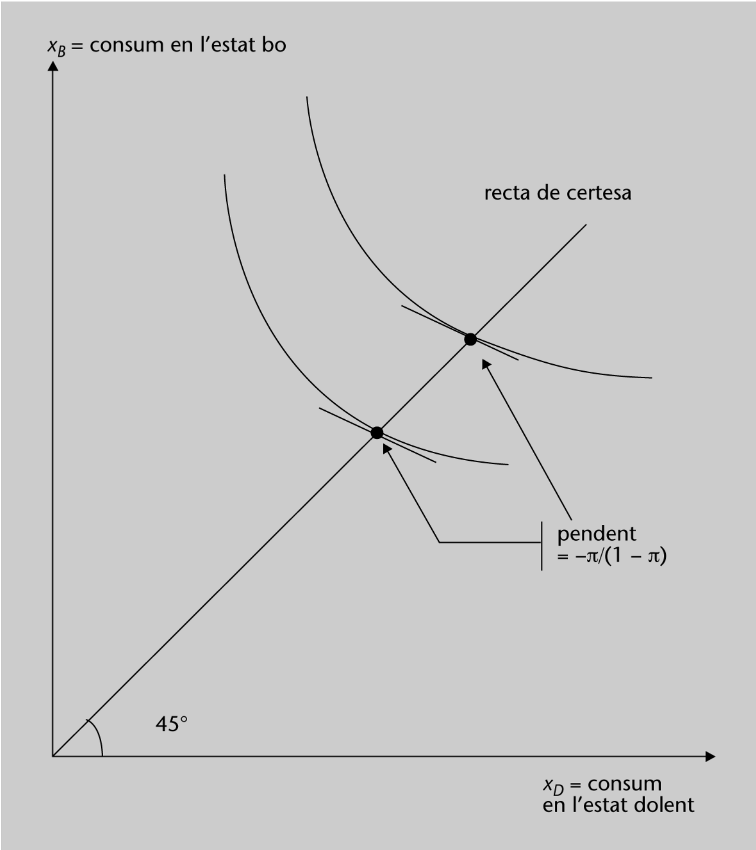
Consumidor neutral respecte al risc

Si, contràriament, el consumidor fos neutral respecte del risc, llavors les corbes d'indiferència serien línies rectes paral·leles de pendent

$$-\frac{\pi}{1-\pi}.$$

No és difícil comprovar que, si el consumidor sent aversió al risc i, per tant, la seva funció d'utilitat de vNM és estrictament còncava, les seves corbes d'indiferència presenten la curvatura que s'indica en el gràfic 7.

Gràfic 7. Corbes d'indiferència d'un consumidor amb aversió al risc



4.5. La decisió d'assegurança

Com en els mòduls 2 i 3, el consumidor tria el punt més bo segons les seves preferències en la seva recta pressupostària. Això equival a trobar el punt de la recta de balanç que té la corba d'indiferència més alta.

La resposta és diferent en funció de si el contracte d'assegurança està actuarialment igualat o no. Comencem pel cas en què sí que ho està, és a dir, la taxa de prima ρ és igual a la probabilitat π de l'estat dolent. En conseqüència, ocorre el següent:

$$\text{pendent de la recta pressupostària} = -\frac{\rho}{1-\rho} = -\frac{\pi}{1-\pi} =$$
$$= \text{pendent de la corba d'indiferència en el punt d'assegurança completa.}$$

Això és degut al fet que el punt d'assegurança completa és a la recta de certesa, en què el pendent de la corba d'indiferència sempre és $-\frac{\pi}{1-\pi}$. Per tant, en el punt d'assegurança completa, la corba d'indiferència és tangent a la recta pressupostària. El consumidor hi ateny la corba d'indiferència més alta dins de la recta pressupostària. Per tant, és el punt triat pel consumidor amb aversió al risc. A tall de resum, podríem dir el següent:

Vegeu el gràfic 8.

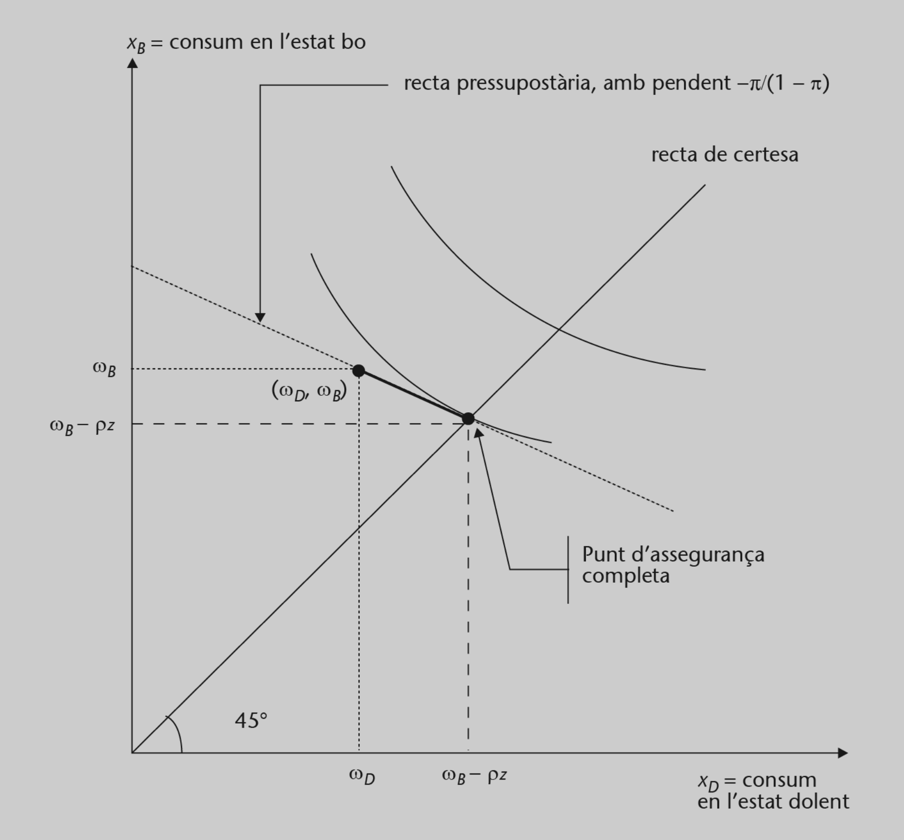
Un consumidor amb aversió al risc que pot optar per un contracte d'assegurança actuarialment igualat tria l'assegurança completa.

Contracte actuarialment igualat

Mentre el contracte sigui actuarialment igualat, un consumidor neutral respecte del risc seria indiferent entre assegurar-se totalment o parcialment o bé no assegurar-se. Un consumidor atret pel risc no s'asseguraria en aquest cas.

En altres paraules, en aquest cas, el consumidor decideix no assumir cap risc: tot el risc queda assumit per la companyia d'assegurances.

Gràfic 8. Assegurança completa quan el contracte està actuarialment igualat



Però si el contracte és actuarialment desfavorable pel consumidor, llavors $\rho > \pi$. Per tant, en valors absoluts, ocorre el següent:

$$|\text{pendent de la recta pressupostària}| = \frac{\rho}{1-\rho} > \frac{\pi}{1-\pi} =$$
$$= |\text{pendent de la corba d'indiferència al punt d'assegurança completa}|$$

És a dir, en el punt d'assegurança completa la corba d'indiferència té menys pendent que la recta pressupostària. Per tant, hi ha punts a l'esquerra del punt d'assegurança completa amb corbes d'indiferència més altes. Podem concloure el següent:

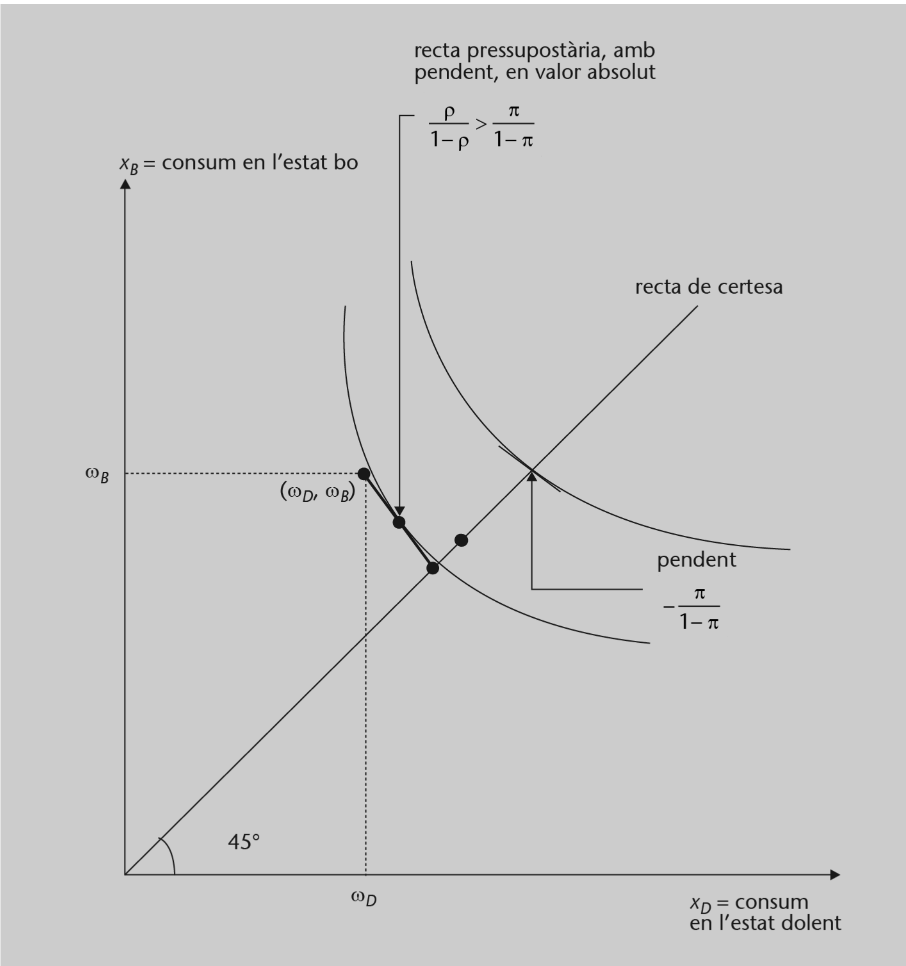
Un consumidor amb aversió al risc que afronta un contracte d'assegurança que li és actuarialment desfavorable **no** tria l'assegurança completa.

En altres paraules, el consumidor sempre assumeix un cert risc si el contracte li és actuarialment desfavorable. A primera vista, aquest resultat pot sorprendre, atesa la seva validesa general, fins i tot quan el consumidor té una aversió molt forta al risc i quan el contracte no és gaire desfavorable des del punt de vista actuarial.

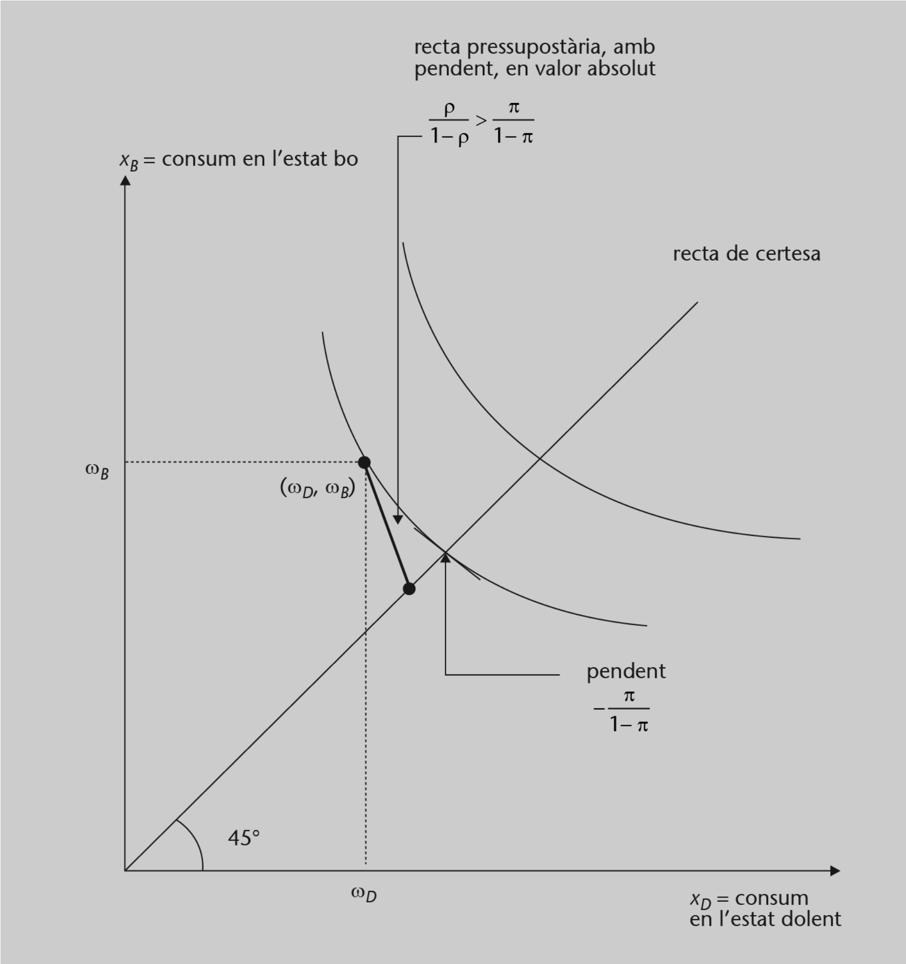
Depenent de quina sigui la seva aversió al risc i la magnitud relativa de ρ respecte de π, pot ser que el consumidor s'asseguri parcialment o bé triï el punt d'autarquia i assumeixi tot el risc.

El gràfic 9 il·lustra l'assegurança parcial i es dóna la tangència d'una corba d'indiferència en un punt en què la cobertura z és positiva, però inferior a la pèrdua Y. Aleshores, el consumidor assumeix una part del risc. La decisió autàrquica l'il·lustra el gràfic 10, en què en tots els punts de la recta pressupostària a la dreta d'ω, la corba d'indiferència corresponent és més plana que la recta pressupostària. Pot ser que això ocorri fins i tot en el punt (ω_D, ω_B), però la restricció $z \geq 0$ impedeix que el consumidor se situï a l'esquerra d'aquest punt. Llavors, el consumidor tria $z = 0$ i assumeix tot el risc.

Gràfic 9. Assegurança parcial quan el contracte és actuarialment desfavorable



Gràfic 10. Autarquia sota contracte actuarialment desfavorable



5. Les inversions

5.1. El rendiment d’un actiu

Un altre tipus de risc monetari s’associa amb inversions financeres, com ara accions que cotitzen en borsa, fons d’inversió, finançament d’una empresa familiar, etc. Les inversions poden diferir en característiques importants, com ara el rendiment esperat, el risc, la liquiditat, el tractament fiscal... Ens centrarem en el rendiment esperat i la incertesa, i farem abstracció de les altres característiques.

Cada cop hi ha més persones que prefereixen invertir el seus diners en accions que cotitzar en borsa

El **rendiment*** d’un actiu en un període determinat és la suma de dos components:

*** El rendiment de vegades s’anomena *rendibilitat*.**

1) La **renda percebuda** (neta), que són les quantitats que percep el propietari de l’actiu en concepte d’interessos, en el cas de comptes d’estalvi, obligacions, títols del tresor, etc., o bé els dividends, en el cas de les accions.

2) La **plusvàlua**, que és el preu de mercat de l’actiu al final del període menys el preu que tenia al començament del període. La plusvàlua es materialitza quan es ven l’actiu, però tant si es ven com si no, s’ha d’incloure en el càlcul econòmic del rendiment.

La **taxa de rendiment** (anual) d’un actiu es defineix així:

$$\text{Taxa de rendiment (anual)} = \frac{\text{rendiment anual}}{\begin{array}{c}\text{preu de mercat de l'actiu}\\ \text{al començament de l'any}\end{array}}.$$

Per exemple, si compreu 1.000 euros d’accions, que generen anualment 150 euros i que es cotitzen a 1.200 euros al cap de l’any, el rendiment anual d’aquest actiu és 150 + 200 = 350, i la taxa de rendiment és $\frac{350}{1.000} = 35\%$.

Actius físics

Els conceptes de rendiment, de renda i de plusvàlua també s’apliquen als actius físics, com ara un pis de lloguer (la renda anual neta del qual és la suma dels lloguers mensuals menys les despeses), un lingot d’or, un solar a l’Eixample, una ampolla de *grand cru* de Bordeus, o un gravat de Joan Miró. Els quatre últims no generen rendes anuals (deixant de banda el plaer de contemplar el gravat): el seu rendiment es basa exclusivament en les plusvàlues.

5.2. Risc i rendiment

Però els rendiments de les accions són incerts i diverses taxes són, *a priori*, possibles. Suposem que el consumidor pot assignar probabilitats subjectives a les diverses taxes de rendiment imaginables.

Comencem estudiant un problema d'inversió que complementa l'anàlisi de l'assegurança. Suposem que el mercat ofereix dos, i només dos, actius.

- Un **actiu segur**, el rendiment del qual és cert.
- Un **actiu arriscat**, el rendiment del qual és incert.

El cas més simple és el de dos estats: l'estat bo, on l'actiu arriscat té una taxa de rendiment alta, i l'estat dolent, on és baixa. La taxa de **rendiment esperat** de l'actiu incert es defineix com la taxa alta multiplicada per la probabilitat de l'estat bo més la baixa multiplicada per la probabilitat de l'estat dolent.

El mercat d'actius permet que el consumidor distribueixi *ex ante* la seva riquesa entre els dos actius. Aquesta decisió, que s'anomena *decisió de cartera d'actius,* es pot analitzar de manera paral·lela a l'assegurança de la secció anterior. L'anàlisi duu al resultat següent:

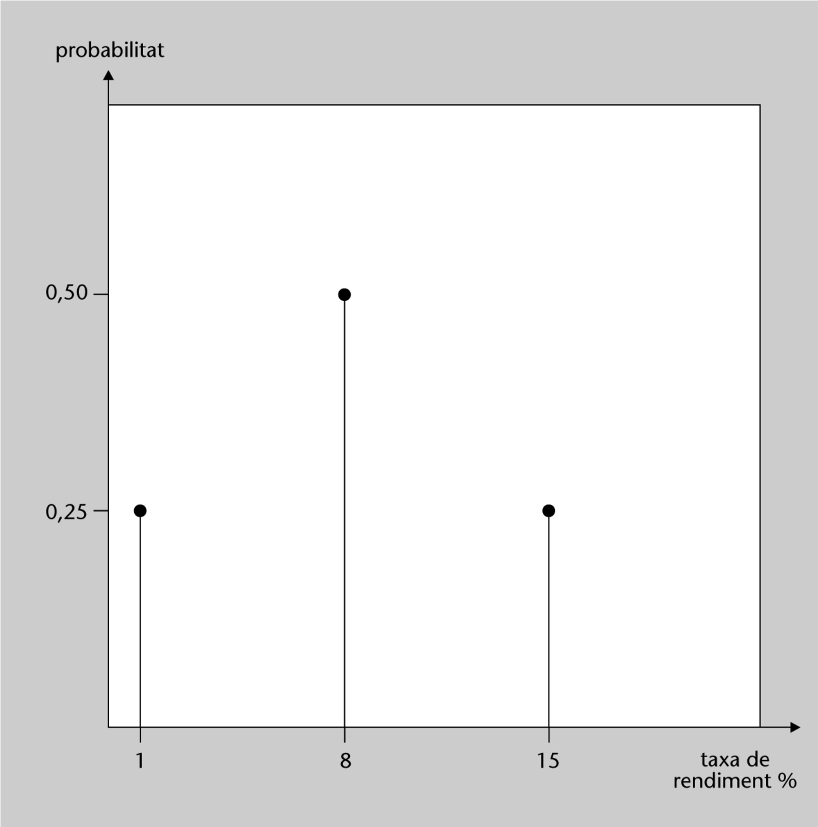
Un consumidor amb aversió al risc que afronta una decisió de cartera on l'actiu arriscat ofereix una taxa de rendiment esperat superior al de l'actiu cert tria una quantitat positiva de l'actiu arriscat.

El raonament és paral·lel al del gràfic 9 del cas de l'assegurança, on la desigualtat actuarial induïa el consumidor a assumir un cert risc. Aquí, el fet que l'actiu arriscat ofereixi un rendiment superior a l'actiu segur hi té el mateix paper.

Més generalment, quan un actiu presenta més risc que un altre, el consumidor el demanarà només si la seva taxa de rendiment esperat és superior. Aquest és un fet general, que es compleix també en el cas de diversos actius arriscats. Considerem els rendiments de les accions de les empreses hipotètiques següents. Per a simplificar, suposem que no hi ha inflació, que una unitat de consum costa un euro, i que una acció de cadascuna de les empreses costa també un euro. Ara entenem que el nombre d'estats és superior a dos.

Actiu 1. Accions de Fustes El Gegant del Pi, SA.

Gràfic 11. Distribució de probabilitat de les taxes de rendiment: El Gegant del Pi, SA



- Taxa de rendiment de l'1% amb probabilitat 0,25.
- Taxa de rendiment del 8% amb probabilitat 0,50.
- Taxa de rendiment del 15% amb probabilitat 0,25.

El gràfic 11 il·lustra, amb punts, la densitat de probabilitat del rendiment d'aquestes accions.

Repasseu, si cal, el concepte de densitat de probabilitat a l'assignatura *Estadística I.*

Quina és la taxa de rendiment esperat? És la mitjana d'aquesta distribució i es pot calcular de la manera següent:

$$0{,}25 \cdot 1\% = 0{,}25\%$$
$$0{,}5 \cdot 8\% = 4\%$$
$$0{,}25 \cdot 15\% = 3{,}75\%$$

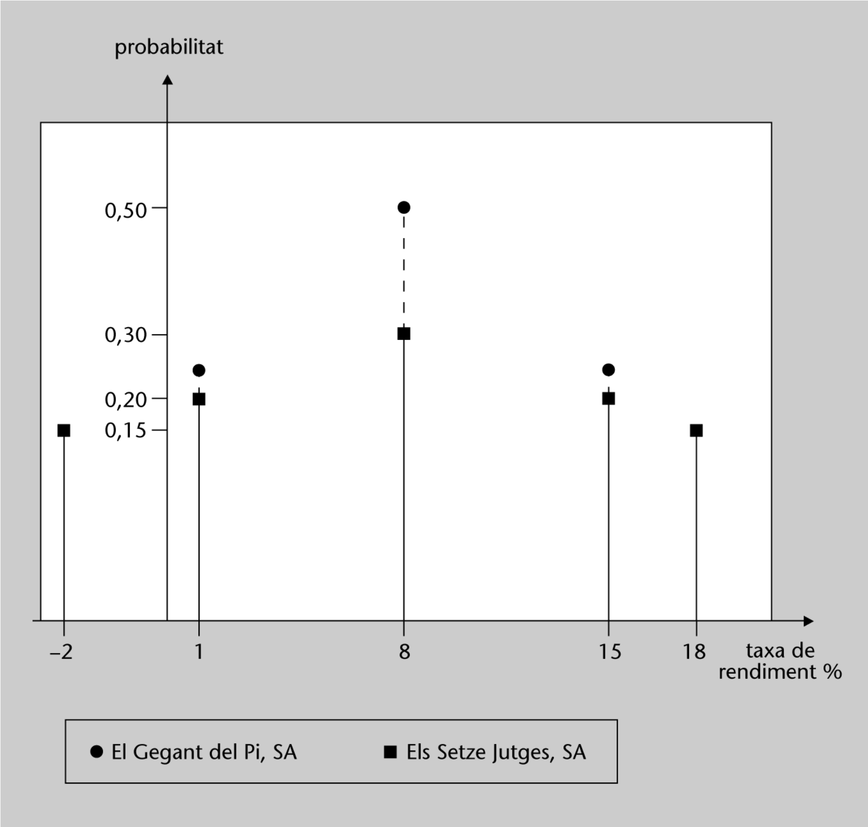
Taxa de rendiment esperat: suma = 8%

Actiu 2. Accions d'Aliments Els Setze Jutges, SA.

- Taxa de rendiment de –2% amb probabilitat 0,15.
- Taxa de rendiment de l'1% amb probabilitat 0,20.
- Taxa de rendiment del 8% amb probabilitat 0,30.
- Taxa de rendiment del 15% amb probabilitat 0,20.
- Taxa de rendiment del 18% amb probabilitat 0,15.

El gràfic 12 representa, amb quadrats, la densitat de probabilitat del rendiment d'aquestes accions, i la sobreposa al gràfic anterior, cercles, que corresponia a l'empresa El Gegant del Pi.

Gràfic 12. Distribució de probabilitat de les taxes de rendiment



El rendiment esperat de les accions dels Jutges és el mateix que les del Gegant, com es pot calcular de la manera següent:

$$0{,}15 \cdot -2\% = -0{,}3\%$$
$$0{,}20 \cdot 1\% = 0{,}2\%$$
$$0{,}3 \cdot 8\% = 2{,}4\%$$
$$0{,}2 \cdot 15\% = 3\%$$
$$0{,}15 \cdot 18\% = 2{,}7\%$$

Taxa de rendiment esperat: 8%

Activitat

1. Què preferiríeu, que el vostre oncle ric us regalés pel vostre aniversari 100 euros en accions del Gegant o 100 euros en accions dels Jutges? Penseu-hi una mica abans que continueu.

Les accions del Gegant i les dels Setze Jutges tenen la mateixa taxa de rendiment esperat, però les dels Jutges són més arriscades: les probabilitats de resultats dolents, i també les de resultats molt bons, són més altes per als Setze Jutges que per al Gegant.

És possible demostrar que qualsevol consumidor que tingui aversió al risc preferirà tenir a la butxaca 100 accions del Gegant que no pas 100 accions dels Jutges.

Aquí ens limitarem a una il·lustració numèrica. Suposem que la funció d'utilitat de vNM del consumidor és: $u(x) = \ln x$, i, per simplificar, que la riquesa inicial del consumidor és zero, de manera que x les 100 accions del Gegant, al cap de l'any, rendeixen:

101 unitats de consum amb probabilitat 0,25,

108 unitats de consum amb probabilitat 0,50,
115 unitats de consum amb probabilitat 0,25,

amb utilitat esperada:

$$
\begin{aligned}
&0,25 \times \ln(101) + 0,50 \times \ln(108) + 0,25 \times \ln(115) \\
&= 0,25 \times 4,6151 + 0,50 \times 4,6821 + 0,25 \times 4,7449 \\
&= 1,1538 + 2,3410 + 1,1862 \\
&= 4,681.
\end{aligned}
$$

En canvi, 100 accions dels Setze Jutges rendeixen:

98 unitats de consum amb probabilitat 0,15,
101 unitats de consum amb probabilitat 0,20,
108 unitats de consum amb probabilitat 0,30,
115 unitats de consum amb probabilitat 0,20,
118 unitats de consum amb probabilitat 0,15,

amb utilitat esperada:

$$
\begin{aligned}
&0,15 \times \ln(98) + 0,20 \times \ln(101) + 0,30 \times \ln(108) + 0,20 \times \ln(115) + 0,15 \times \ln(118) \\
&= 0,15 \times 4,5850 + 0,20 \times 4,6151 + 0,30 \times 4.6821 + 0,20 \times 4,745 + 0,15 \times 4,7707 \\
&= 0,6877 + 0,9320 + 1,14046 + 0,9490 + 0,7156 \\
&= 4,6779 \\
&< 4,681.
\end{aligned}
$$

Per tant, aquest consumidor prefereix, *ex ante,* 100 accions del Gegant a 100 accions dels Jutges. De fet, és possible demostrar que qualsevol consumidor amb funció d'utilitat de vNM estrictament còncava també preferirà les accions del Gegant.

En general, els mercats financers reflecteixen una actitud d'aversió al risc per part dels seus participants, i, per tant, actius més arriscats han de donar, en contrapartida, un rendiment esperat més alt. A l'exemple del Gegant i dels Jutges, les taxes de rendiment esperat són les mateixes, malgrat les diferències de risc: aquesta situació no és estable, ja que induiria a vendre les accions dels Jutges i a comprar les accions del Gegant. La baixa resultant de la cotització de les accions dels Jutges faria augmentar el seu rendiment fins que la diferència entre els rendiments compensés, en l'opinió dels participants, el risc addicional. Aquesta diferència compensadora s'anomena *prima de risc.*

5.3. La diversificació

La discussió del risc i el rendiment de les accions de Fustes El Gegant del Pi, SA, i d'Aliments Els Setze Jutges, SA ha ignorat la possible correlació entre els rendiments dels actius diferents, i la possibilitat de reduir el risc diversificant la cartera de valors. En realitat, si els rendiments dels actius diferents no tenen una correlació positiva i perfecta, en principi és possible reduir el risc total de la cartera si s'inverteix en un seguit de valors diversos en lloc de «posar tots els ous en el mateix cistell».

El cas ideal és el de la correlació negativa perfecta, en què el coeficient de correlació entre els rendiments dels dos actius és –1.

Repasseu, si cal, els conceptes de correlació i correlació negativa perfecta a l'assignatura *Estadística I*.

Exemples

Considerem l'exemple hipotètic següent:

1) L'empresa El Paraigua de la Dama, SA, ven, a més a més de paraigües, abrics i robes impermeables. El seu rendiment depèn del nombre de dies de pluja que hi ha al llarg de l'any:

- Si plou 30 dies o més, la taxa de rendiment és del 20% i 100 euros invertits en les seves accions es converteixen en 120 euros.
- Si plou menys de 30 dies, el rendiment és de –10% i una inversió de 100 euros en retorna tan sols 90.

Si la probabilitat de 30 dies de pluja o més és de 0,50, llavors la taxa de rendiment esperat d'una inversió en accions de la Dama és del 5%, inversió que presenta un cert risc.

2) Suposem que hi ha una altra empresa, per exemple, El Biquini Atòmic, SA, que és més rendible quan fa més sol. En concret, la taxa de rendiment és aquesta:

- Del 20% (una inversió de 100 euros en retorna 120), si plou durant menys de 30 dies al llarg de l'any.
- Del –10% si plou durant més de 30 dies (una inversió de 100 euros en retorna 90).

Per tant, les inversions en accions del Biquini també ofereixen una taxa de rendiment esperat del 5%, amb un cert risc.

Mai no plou a gust de tothom...

Però en aquest cas la diversificació de la cartera permet eliminar totalment el risc, sense disminuir-ne el rendiment. En lloc d'invertir 100 euros en la Dama o en el Biquini, invertim-ne 50 a cada empresa. En anys de pluja, acabem amb 60 euros, per part de la Dama, i amb 45, per part del Biquini, un total de 105 euros. En anys de sol, també acabem amb 105 euros. Tant si plou com si fa sol el rendiment és del 5%. Una cartera diversificada ha eliminat totalment el risc, sense reducció en el rendiment esperat.

A la pràctica, però, les coses no són tant senzilles, ja que els rendiments de les diverses empreses tendeixen a pujar i baixar amb el cicle econòmic. Amb tot, la diversificació de la cartera en valors d'empreses en sectors i fins i tot en països diferents certament permet reduir el risc.

Resum

En aquest mòdul hem analitzat la presa de decisions del consumidor quan el futur té risc, és a dir, és incert. Per a descriure aquest comportament, la racionalitat dels individus es redefineix a partir d'una utilitat *ex ante* basada en el concepte d'utilitat esperada. La utilitat esperada és la utilitat mitjana de tots els resultats possibles. La forma de la funció d'utilitat revela l'actitud d'un individu davant del risc.

La neutralitat davant del risc es dóna quan una persona es preocupa només per la seva riquesa esperada i no li importa quin sigui el risc. En aquesta situació, la funció d'utilitat de la riquesa és lineal.

L'aversió al risc es dóna quan l'individu prefereix una quantitat segura de diners equivalent al valor esperat que el mateix valor esperat. En aquest cas, la funció d'utilitat de la riquesa és estrictament còncava, la qual cosa indica que com més ràpidament disminueix la utilitat marginal de la riquesa d'una persona, més li desagrada el risc.

L'atracció pel risc consisteix a preferir una renda arriscada davant d'una renda segura que té el mateix valor esperat. Una funció d'utilitat estrictament convexa reflecteix aquesta situació.

També hem vist que l'adquisició d'assegurances és una manera de reduir el risc. El concepte d'aversió al risc explica que alguns individus estiguin disposats a pagar per tal de tenir un risc més baix.

Activitats

1. En Tomàs és un estudiant d'Economia que acaba els seus estudis el proper mes. Aquest noi acaba de rebre dues ofertes de treball: una de l'empresa S i una altra de l'empresa R. Acceptar el treball de l'empresa S és una opció segura, en el sentit que li permetrà obtenir uns ingressos nets durant la seva vida de euros. En canvi, acceptar el treball de l'empresa R és una opció arriscada. Si tot va bé, aconseguirà una bona posició que li permetrà obtenir uns ingressos nets durant la seva vida de euros, però amb una probabilitat del no tindrà èxit a l'empresa R, i llavors acabarà ocupant un treball regular que li permetrà rebre uns ingressos nets durant la seva vida de euros. Si en Tomàs té unes preferències representades per una funció d'utilitat Von Neumann-Morgenstern $u(w) = w^{1/2}$, essent w els ingressos nets obtinguts durant tota la vida, ¿quina oferta de treball triarà suposant que no tindrà cap altra font d'ingressos?

2. Un pagès del Baix Empordà té una plantació de mongetes de la qual obté la seva únic font d'ingressos. Les seves preferències estan representades per la funció d'utilitat Von Neumann-Morgenstern $u(w) = w^{1/2}$, on w denota la riquesa del pagès. Si no gela, aquesta riquesa és de 2.500 unitats monetàries i si gela perd tota la collita, i, per tant, la seva riquesa és 0. La probabilitat que geli és del 10%. El pagès considera la possibilitat d'assegurar completament la collita. En cas de fer-ho, el cost de l'assegurança és de 900 unitats monetàries.

a) Quin és el valor esperat de la riquesa en cadascuna de les alternatives següents: assegurar la collita o no fer-ho?
b) Quina alternativa és millor per al pagès?
c) Interpreta els resultats obtinguts.

3. Els ingressos de la Sara per al proper any són incerts. Amb una probabilitat del 60% obtindrà 16.000 euros i amb una probabilitat del 40% obtindrà 25.000 euros. Si aquesta dona té unes preferències que es poden representar mitjançant una funció d'utilitat Von Neumann-Morgenstern: $u(w) = \left(\frac{w}{1.000}\right)^{1/2}$, on w representa els ingressos, determina:

a) Quins són els ingressos esperats i la corresponent utilitat esperada de la Sara?
b) Quin nivell d'ingressos obtingut amb certesa deixaria indiferent la Sara respecte de la situació en què els ingressos fossin incerts?

4. Posem que en Joan és un inversor que disposa de 1.000 euros i desitja invertir-los en els següents dos actius: un actiu segur i un actiu arriscat. L'actiu segur té una remuneració del 10%, mentre que la rendibilitat neta de l'actiu arriscat serà, alternativament, 20% o 5%, amb unes probabilitats iguals a $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$, respectivament. Imagina que en Joan té aversió al risc amb una funció d'utilitat Von Neumann-Morgenstern logarítmica: $u(w) = \ln(w)$.

a) Determina la cartera òptima d'en Joan suposant que no pot endeutar-se en l'actiu arriscat, però que ho pot fer en l'actiu lliure de risc.
b) Interpreta els resultats obtinguts.

5. La Marina disposa de 10.000 euros i es planteja invertir la meitat d'aquests diners en una de les alternatives següents:

- un actiu lliure de risc amb una rendibilitat segura del 10%, o bé
- un préstec concedit a la seva germana Berta perquè munti un negoci. La Berta es compromet a tornar la quantitat prestada al cap d'un any més els interessos corresponents, a un tipus d'interès del 150%.

Suposem que la Marina creu que amb una probabilitat del 50% el negoci de la seva germana no tindrà èxit i que la Berta no podrà tornar-li res i que, amb una probabilitat del 50%, la Berta podrà pagar la quantitat compromesa.

a) Quina alternativa d'inversió preferirà la Marina si és una noia neutral davant del risc?
b) Quina alternativa d'inversió preferirà la Marina si té aversió al risc i té una funció d'utilitat Von Neumann-Morgenstern logarítmica: $u(w) = \ln(w)$, essent w la riquesa de la qual disposa?

Exercicis d'autoavaluació

1. Pep Xiruca, que té aversió al risc, s'ha arreglat una vella cabana al costat d'un riuet dels Pirineus. El lloc és esplèndid, però hi ha el perill que, amb una riuada forta, la cabana s'inundi i li facin falta 10.000 euros per a arreglar els desperfectes. La probabilitat que hi hagi una riuada és 0,1.

a) Indiqueu la recta pressupostària d'en Xiruca si tingués accés a una assegurança contra riuades actuarialment igualada. Quin és el pendent de la recta? Triaria en Xiruca la cobertura màxima de 10.000 euros?
b) L'única companyia d'assegurances que li ofereix un contracte per a assegurar la cabana li demana una prima de mig euro per cada euro de cobertura. Quina és ara la recta pressupostària d'en Xiruca? Quin és el pendent de la recta? Triaria en Xiruca la cobertura màxima de 10.000 euros?

2. Comproveu gràficament i analíticament que les funcions següents són estrictament còncaves:
a) $u^1(x) = \ln(x + a)$ (per a $x > -a$)
b) $u^2(x) = a + bx - \frac{1}{2}x^2$ (per a $x < b$, quadràtica)
c) $u^3(x) = a - b\,e^{-rx}$ (per a $r > 0$, aversió absoluta al risc constant)
d) $u^4(x) = a - bx^{-r+1}$ (per a $r > 1$, aversió relativa al risc constant)

3. Comproveu que l'aversió absoluta al risc creix amb x quan la funció d'utilitat de vNM és la quadràtica.

4. Comproveu que les etiquetes «aversió absoluta al risc constant» i «aversió relativa al risc constant» descriuen correctament les funcions corresponents de l'exercici 2 c i d, respectivament.

5. Quin és el coeficient d'aversió relativa al risc quan la funció d'utilitat de vNM és $\ln(x)$?

6. Samantha Buridà necessita una feineta per als propers tres mesos. Li han ofert tocar el piano en un cafè de Casablanca. La feina li reportaria 200.000 euros nets si tot va bé, però amb probabilitat 0,2 la feina no durarà més d'una setmana. En aquest cas el guany net serien uns minsos 2.000 euros. Alternativament, podria anar a pescar congres a l'Escala. Si tenia sort i aconseguia una bona pesca, el guany net seria de 40.000 euros; amb mala sort, només de 20.000 euros. En la pesca, tant és probable tenir bona com mala sort. Samantha no sap què fer, si anar a Casablanca o a l'Escala. Quan hi parleu, descobriu que la seva funció d'utilitat de vNM, aplicable a aquesta decisió, és:

$$v(x) = 40 - \frac{40.000}{x},$$

on x denota els ingressos en euros. Com la podeu ajudar a prendre una decisió racional?

Solucionari

Activitats

1. Per a poder determinar quina oferta de treball triarà aquest estudiant, calculem la utilitat esperada associada a cada opció.

Empresa	Utilitat esperada
Treball de l'empresa S	$(160.000)^{1/2} = 400$
Treball de l'empresa R	$0,7(640.000)^{1/2} + 0,3(90.000)^{1/2} = 650$

Atès que la utilitat esperada associada al treball de l'empresa R és superior que la que s'obté del corresponent a l'empresa S, l'estudiant triarà l'oferta de treball de l'empresa R.

2.

a) Hi ha dos possibles estats de la naturalesa: que geli o que no geli. La taula següent mostra la riquesa final depenent de la decisió adoptada i de l'estat de la naturalesa:

Opcions	Gela (probabilitat = 10%)	No gela (probabilitat = 90%)
Assegurar	2.500 – 900 = 1.600	2.500 – 900 = 1.600
No assegurar	0	2.500

Si el pagès assegura la collita ha de suportar un cost de 90; per tant, obté una riquesa de 2.500 – 900 = 1.600, independentment del temps que faci. Com que el valor esperat d'una constant sempre és igual a ella mateixa, podem deduir directament que el valor esperat d'assegurar la plantació és igual a 1.600. Si no assegura la collita, el valor esperat és:

$$0,1(0) + 0,9(2.500) = 2.250 \text{ unitats monetàries,}$$

i els ingressos esperats de no assegurar la collita són superiors als ingressos esperats d'assegurar-la.

b) Utilitzant la informació de la taula del punt anterior, la utilitat esperada del pagès si decideix cobrir el risc de gelada (és a dir, assegurar la collita) és igual a:

$$0,1(1.600)^{1/2} + 0,9(1.600)^{1/2} = (1.600)^{1/2} = 40,$$

mentre que si decideix no cobrir el risc la utilitat esperada és:

$$0,1(0)^{1/2} + 0,9(2.500)^{1/2} = (1.600)^{1/2} = 45.$$

Per tant, no assegurar la collita és la millor alternativa.

c) Segons la funció d'utilitat del pagès, és un individu amb aversió al risc, però, malgrat això, prefereix l'alternativa més arriscada. Això s'explica perquè el cost d'assegurar la plantació és tan alt que fa que prefereixi assumir el risc.

3.

a) Els ingressos esperats de la Sara responen al càlcul següent:

$$0,6(16.000) + 0,4(25.000) = 19.600 \text{ euros,}$$

i la seva utilitat esperada és:

$$0,6(16)^{1/2} + 0,4(25)^{1/2} = 4,4.$$

b) Per a calcular el nivell d'ingressos certs que deixa la Sara indiferent entre rebre aquesta quantitat de diners i la situació arriscada, plantegem la següent igualtat:

$$\left(\frac{w}{1.000}\right)^{1/2} = 4,4.$$

És a dir, la utilitat de l'opció segura ha de ser igual a la utilitat esperada de la situació arriscada. Operant a l'anterior igualtat, obtenim que aquest nivell d'ingressos és igual a: w = 19.360 euros.

4.

a) Indiquem amb S la quantitat de diners que en Joan invertirà en l'actiu arriscat. El fet que no pugui endeutar-se en l'actiu arriscat, però que ho pugui fer en l'actiu lliure de risc, implica que $S \geq 0$. A continuació, es mostra la riquesa final d'aquest inversor en cada situació possible:

$$1/3: S(1 + 20\%) + (1.000 - S)(1 + 10\%) = 1.100 + 0{,}1S$$

$$2/3: S(1 + 5\%) + (1.000 - S)(1 + 10\%) = 1.100 + 0{,}05S$$

El problema d'en Joan consisteix a seleccionar la quantitat de diners S que soluciona el següent problema d'optimització:

$$\max_{S\geq 0} \frac{1}{3}\ln(1.100 + 0{,}1S) + \frac{2}{3}\ln(1.100 - 0{,}05S).$$

La condició de primer ordre d'aquest problema és:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.100 + 0{,}1S}\right)(0{,}1) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1.100 - 0{,}05S}\right)(-0{,}05) = 0.$$

Resolent aquesta equació obtenim que $S^* = 0$.

Per a comprovar la condició de segon ordre, calculem la segona derivada de la funció objectiu:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{(1.100 + 0{,}1S)^2}\right)(0{,}1)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{(1.100 - 0{,}05S)^2}\right)(-0{,}05)^2 < 0.$$

Per tant, la funció objectiu és estrictament còncava i, en conseqüència, la condició de primer ordre és necessària i suficient per a estar davant d'un màxim. Per això, $S^* = 0$. Així doncs, la cartera òptima d'en Joan consisteix a no invertir res en l'actiu arriscat i invertir 1.000 euros en l'actiu lliure de risc.

b) La rendibilitat esperada de l'actiu arriscat ve donada per:

$$\frac{1}{3}(20\%) + \frac{2}{3}(5\%) = 10\%.$$

Llavors en Joan, que és un inversor amb aversió al risc, s'enfronta a un actiu arriscat que li proporciona la mateixa rendibilitat esperada que l'actiu lliure de risc. Per això, tria no invertir gens en l'actiu arriscat.

5.

a) La taula següent mostra la riquesa final de la Marina corresponent a les dues alternatives d'inversió, i en funció de l'estat de la naturalesa:

Opcions	El negoci de la Berta té èxit (probabilitat = 50%)	El negoci de la Berta fracassa (probabilitat = 50%)
Actiu lliure de risc	5.000 + 5.000(1 + 10%) = 10.500	5.000 + 5.000(1 + 10%) = 10.500
Negoci de la Berta	5.000 + 5.000(1 + 150%) = 17.500	5.000

Així, la utilitat esperada de la Marina si inverteix en l'actiu segur ve donada per:

$$0{,}5(10.500) + 0{,}5(10.500) = 10.500,$$

mentre que la utilitat esperada si inverteix en el negoci de la seva germana Berta ve donada per:

$$0{,}5(17.500) + 0{,}5(5.000) = 11.250.$$

Per tant, la Marina prefereix invertir la meitat dels seus diners en el negoci de la seva germana.

b) Si la funció d'utilitat Von Neumann-Morgenstern $u(w) = \ln(w)$ representa les preferències de la Marina, la utilitat esperada d'invertir en l'actiu segur ve donada per:

$$0{,}5 \ln(10.500) + 0{,}5 \ln(10.500) = 4{,}0211,$$

mentre que la utilitat esperada en cas d'invertir en el negoci de la Berta ve donada per:

$$0{,}5 \ln(17.500) + 0{,}5 \ln(5.000) = 4{,}1321.$$

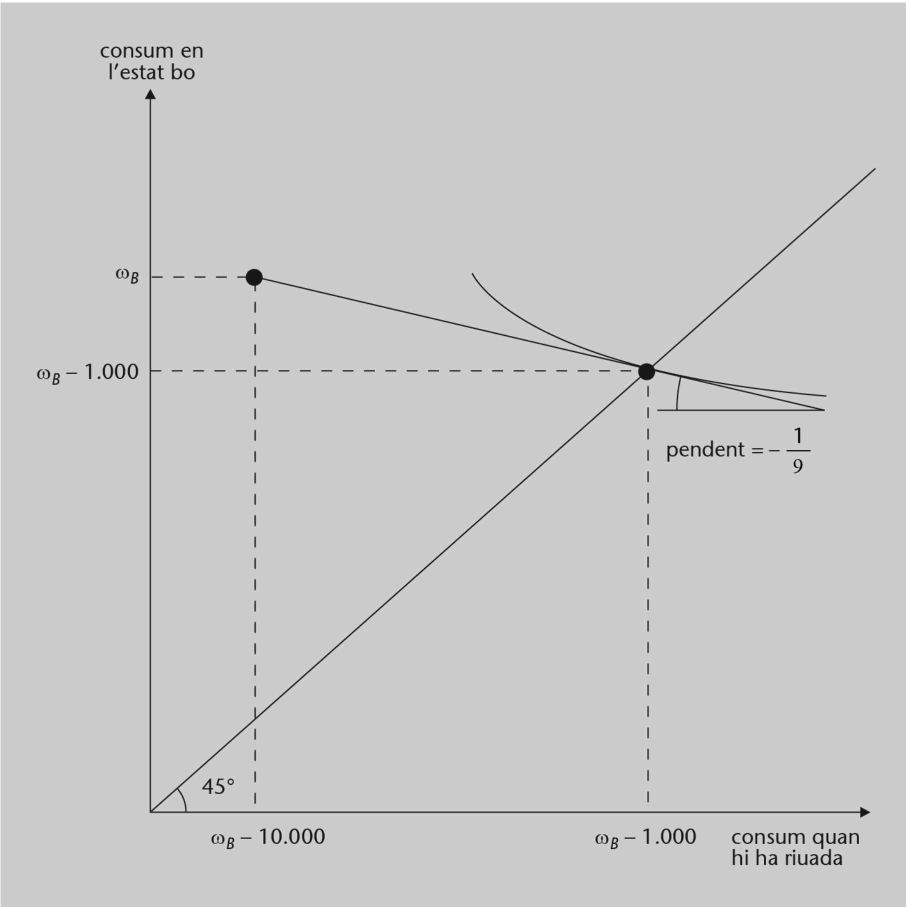
En aquest cas, la Marina prefereix invertir la meitat de la seva riquesa en el negoci de la seva germana.

Exercicis d'autoavaluació

1.

a)

Gràfic 13. Un consumidor amb aversió al risc tria cobertura completa quan la prima de l'assegurança està actuarialment igualada



La dotació d'en Xiruca en l'estat bo, quan no hi ha riuada, és ω_B. En l'estat dolent, quanhi ha riuada, la dotació és ω_B – 10.000. La cobertura màxima de l'assegurança és igual a la pèrdua, és a dir, 10.000 euros.
Si l'assegurança està actuarialment igualada, llavors la prima ρ és igual a la probabilitat que hi hagi riuada, $\pi = 0{,}1$. Per tant, el pendent de la recta pressupostària és:

$$\left(-\frac{\pi}{1-\pi}\right) = -\frac{0{,}1}{0{,}9} = -\frac{1}{9}.$$

Quan les quantitats en l'estat bo i en l'estat dolent són (x_B, x_D), la utilitat esperada és:

$$\pi \cdot u(x_D) + (1 - \pi) \cdot u(x_B).$$

Per tant, el pendent de la corba d'indiferència en el punt (x_B, x_D) és:

$$\frac{dx_B}{dx_D} = -\frac{\pi}{1-\pi} \cdot \frac{u'(x_D)}{u'(x_B)} = -\frac{1}{9}\frac{u'(x_D)}{u'(x_B)}.$$

La condició de tangència, per tant, és la següent:

$$\frac{1}{9}\frac{u'(x_D)}{u'(x_B)} = -\frac{1}{9}.$$

Això implica que $x_D = x_B$ i que, per tant, en Xiruca tria la cobertura completa.

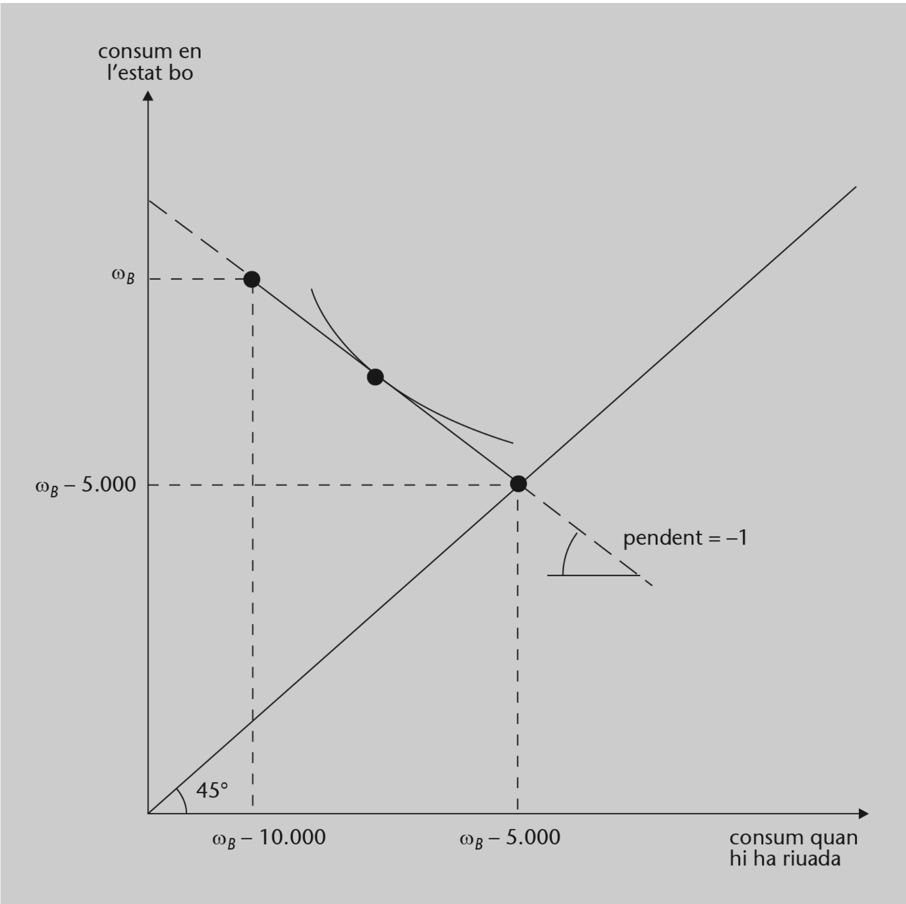
b) Ara la prima no està actuarialment igualada. Si en Xiruca assegura la cabana per una cobertura de z euros, acabarà amb un nivell de consum de ω_B – 0,5 z si no hi ha riuada, i de ω_B – 10.000 – 0,5 · $z + z$ si n'hi ha. El pendent de la recta pressupostària és ara:

$$\left(-\frac{\rho}{1-\rho}\right) = -\frac{0{,}5}{0{,}5} = -1.$$

on ρ és la prima per euro. Com que $|-1| > \left|-\frac{1}{9}\right|$, la corba d'indiferència en el punt triat és tangent a la recta pressupostària a l'esquerra de la cobertura màxima. Xiruca no assegurarà la cabana totalment. Fins i tot podria ocórrer que en Xiruca no assegurés la cabana.

Vegeu el gràfic 14.

Gràfic 14. Cobertura parcial quan la prima de l'assegurança no està actuarialment igualada



2. Analíticament, hem de comprovar que la segona derivada és estrictament negativa, així doncs:

Vegeu el gràfic 15.

a) $\dfrac{\partial u^1(x)}{\partial x} = \dfrac{1}{x+a} > 0;\quad \dfrac{\partial^2 u^2(x)}{\partial x^2} = \dfrac{-1}{(x+a)^2} < 0.$

Vegeu el gràfic 16.

b) $\dfrac{\partial u^2(x)}{\partial x} = b - x > 0;\quad \dfrac{\partial^2 u^2(x)}{\partial x^2} = -1 < 0.$

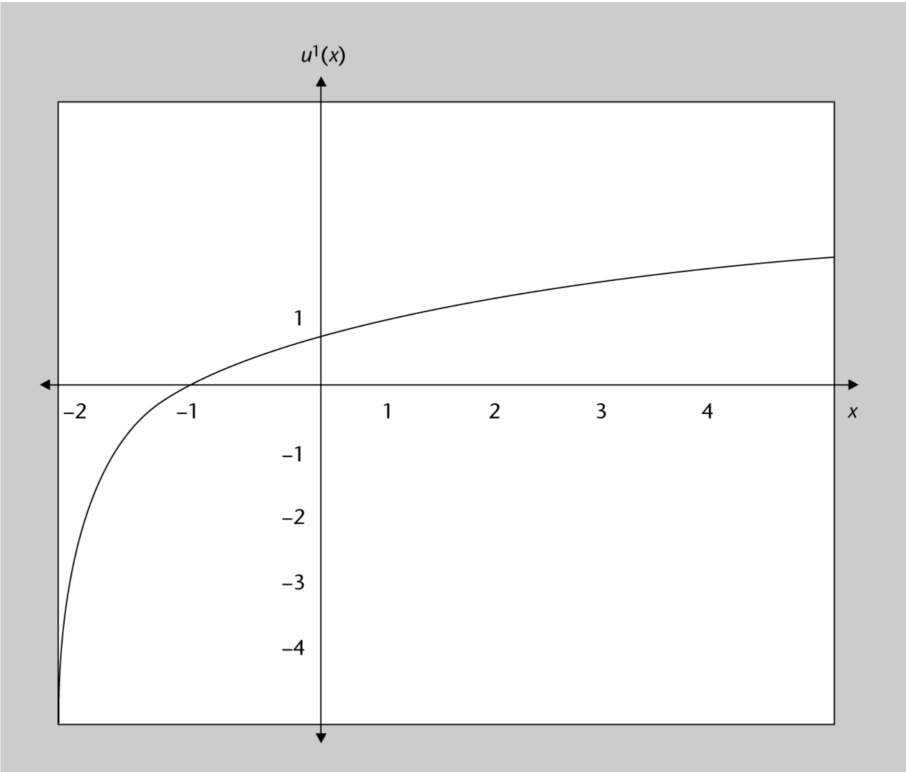
c) $\dfrac{\partial u^3(x)}{\partial x} = r \cdot b \cdot e^{-rx} > 0; \quad \dfrac{\partial^2 u^3(x)}{\partial x^2} = -r^2 \cdot b \cdot e^{-rx} < 0.$

Vegeu el gràfic 17.

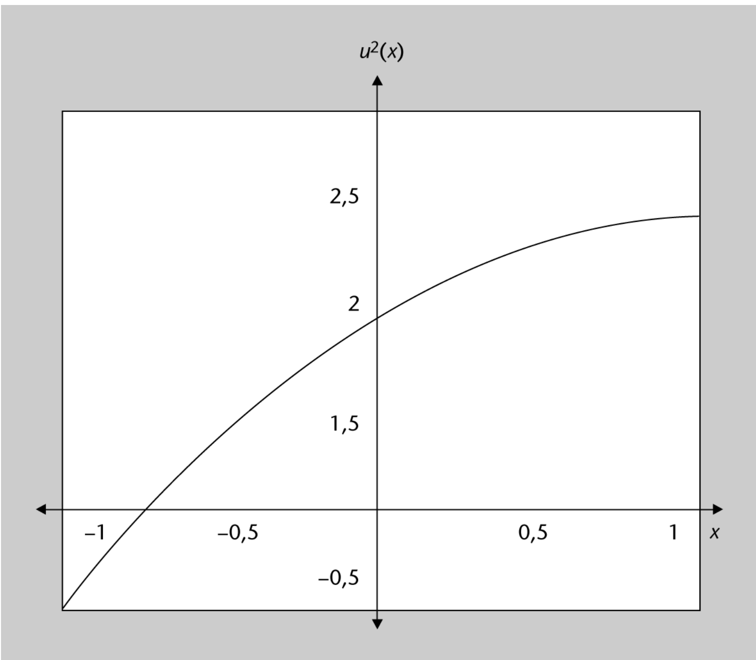
d) $\dfrac{\partial u^4(x)}{\partial x} = -b \cdot (-r+1) \cdot x^{-r} > 0; \quad \dfrac{\partial^2 u^4(x)}{\partial x^2} = b \cdot r \cdot (-r+1) \cdot x^{-r-1} < 0.$

Vegeu el gràfic 18.

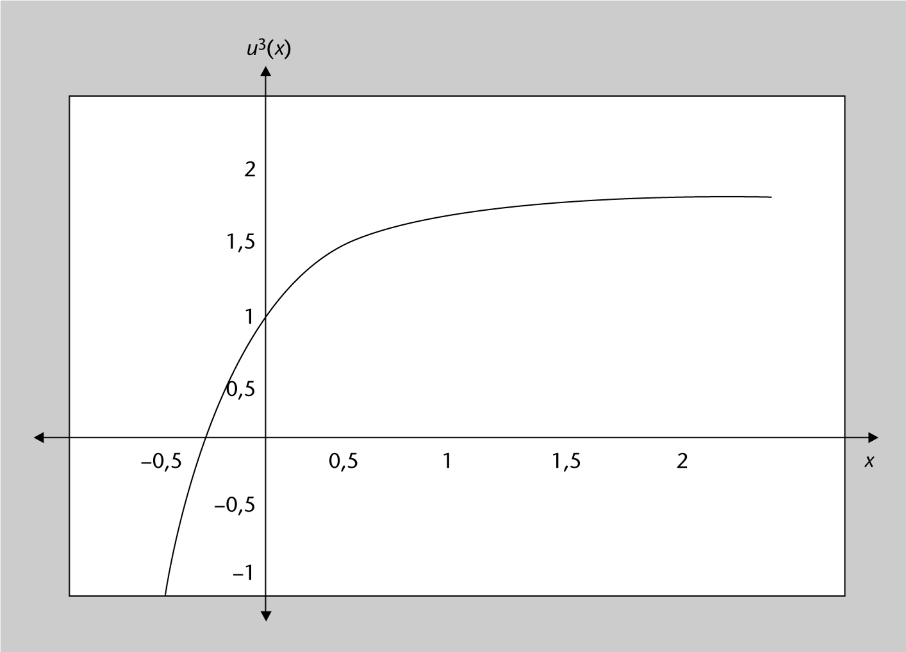
Gràfic 15. Gràfic de la funció d'utilitat de vNM $u^1(x) = \ln(x + a)$, $(a = 2)$



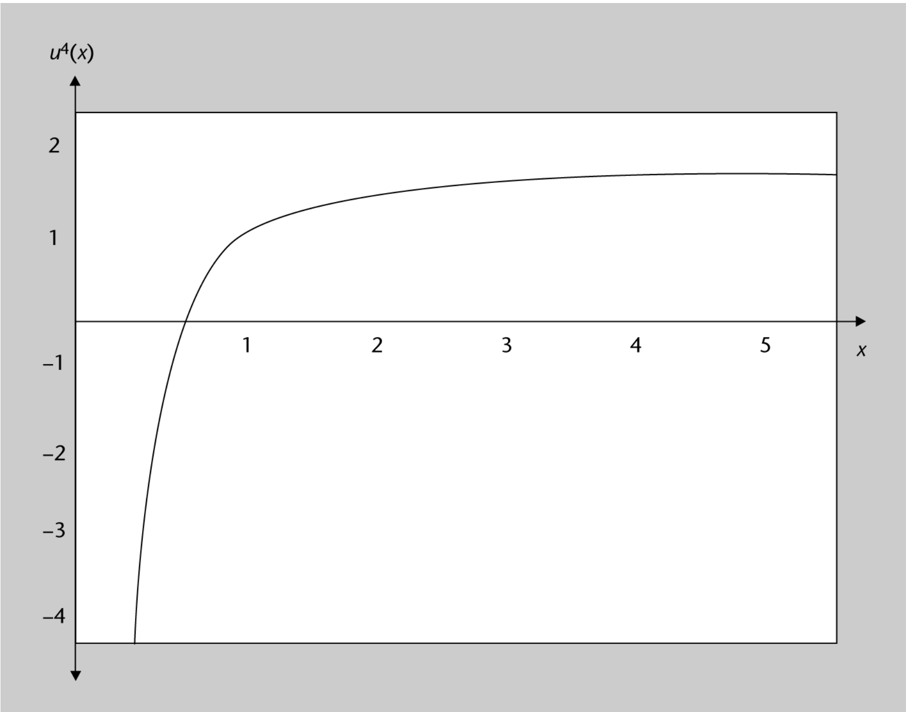
Gràfic 16. Gràfic de la funció d'utilitat de vNM $u^2(x) = a + bx - \dfrac{1}{2} bx^2$, $(a = 2,\ b = 1)$



Gràfic 17. Gràfic de la funció d'utilitat de vNM $u^3(x) = a - b\,e^{-rx}$, ($a = 2$, $b = 1$, $r = 3$)



Gràfic 18. Gràfic de la funció d'utilitat de vNM $u^4(x) = a - bx^{-r-1}$, ($a = 2$, $b = 1$, $r = 3$)



3. El coeficient d'aversió absoluta al risc és $-\dfrac{u''(x)}{u'(x)}$. En el cas de la funció d'utilitat quadràtica $u(x) = a + bx - \dfrac{1}{2}x^2$, tenim que $-\dfrac{u''(x)}{u'(x)} = -\dfrac{-1}{b-x} = \dfrac{1}{b-x}$. Per tant:

$$\frac{\mathrm{d}\left(-\dfrac{u''(x)}{u'(x)}\right)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{(b-x)^2} > 0.$$

En aquest cas, l'aversió al risc absoluta augmenta amb la riquesa. Aquesta és una característica no especialment realista.

4. Comprovem que $-\frac{u^{3''}(x)}{u^{3'}(x)}$ i $-x\,\frac{u^{4''}(x)}{u^{4'}(x)}$ són constants. Efectivament:

- $-\frac{u^{3''}(x)}{u^{3'}(x)} = -\frac{-r^2 \cdot b \cdot e^{-rx}}{r \cdot b \cdot e^{-rx}} = r.$
- $-x\frac{u^{4''}(x)}{u^{4'}(x)} = -x\frac{b \cdot r \cdot (-r+1)\,x^{-r-1}}{-b \cdot (-r+1)\,x^{-r}} = r.$

5. El coeficient d'aversió al risc relativa és $-x\,\frac{u''(x)}{u'(x)}$. Per tant, en el cas en què $u^1(x) = \ln(x + a)$

tenim que $-x\,\frac{u''(x)}{u'(x)} = -x\frac{\frac{-1}{(x+a)^2}}{\frac{1}{x+a}} = \frac{x}{x+a}$; si a és 0, $u(x) = \ln(x)$. Llavors el coeficient és constant i és igual a 1.

6. La utilitat esperada de l'opció Casablanca és:

$$0{,}8 \cdot u(200.000) + 0{,}2 \cdot u(2.000) = 0{,}8 \cdot 39{,}8 + 0{,}2 \cdot 20 = 35{,}84.$$

La utilitat esperada de l'Escala és:

$$0{,}5 \cdot u(40.000) + 0{,}5 \cdot u(20.000) = 0{,}5 \cdot 39 + 0{,}5 \cdot 38 = 38{,}5.$$

La utilitat esperada de l'Escala, en conseqüència, és superior. Aconselleu a la Samantha que vagi a l'Escala.