Equilibri general i benestar

PID_00245339

Martí Oliva Furés

Amb la col·laboració de
Maria Llop Llop

Temps mínim previst de lectura i comprensió: **5 hores**

Universitat
Oberta
de Catalunya

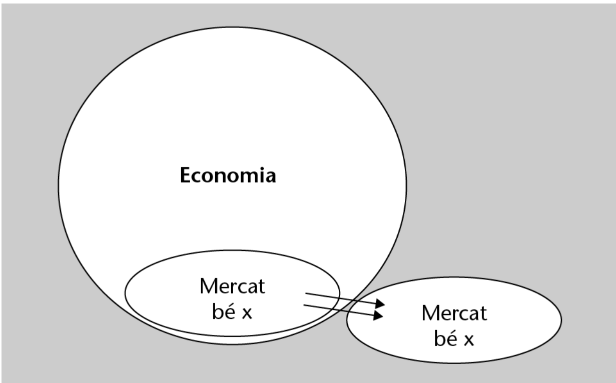
Índex

Introducció

Generalment, l'anàlisi microeconòmica dels mercats segueix una òptica d'**equilibri parcial**, a partir de la qual un producte és estudiat aïlladament respecte de la resta de productes i mercats. Així doncs, l'equilibri parcial analitza casos individualitzats com si fossin parcel·les independents, tal com il·lustra el gràfic 1.

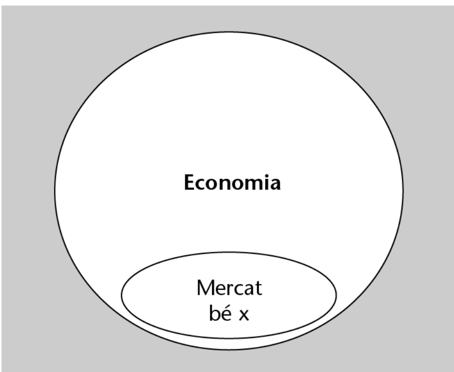
En conseqüència, l'anàlisi parcial d'un mercat específic fa abstracció de les connexions amb els altres mercats i pren en consideració el producte individualment i separadament de la resta d'agents. El resultat d'aquest enfocament d'equilibri parcial és que únicament s'estableixen els efectes que es desencadenen en un mercat concret de manera directa.

Gràfic 1. Representació del mercat del bé X en l'equilibri parcial



Cal tenir present, però, que en una economia hi ha una estreta interrelació entre els agents i els mercats, i això fa que el que ocorre en un d'aquests individualment acabi desencadenant també efectes en la resta. Per tal de disposar d'una imatge més acurada del sistema econòmic, l'anàlisi de l'equilibri general reflecteix aquesta interdependència i capta les relacions que hi ha entre cada mercat individual i els altres agents. Això proporciona una visió més precisa que la corresponent a un estudi individualitzat, i fa possible una anàlisi més completa i rigorosa del sistema econòmic.

Gràfic 2. Representació del mercat del bé X en l'equilibri general



L'anàlisi de l'equilibri general posa de manifest els mecanismes d'interrelació dels agents i reflecteix la integració i interdependència econòmica. Sota aquesta visió, es determinen els preus que garanteixen l'equilibri simultani a tots els mercats. L'avantatge d'usar aquest enfocament és que permet captar no només els efectes concrets sobre un àmbit econòmic particular, sinó que a més permet determinar aquells efectes que, indirectament, es desencadenen sobre el conjunt de l'economia.

Per exemple, sembla lògic preguntar-se com una reforma fiscal o un canvi en la renda dels individus, o una alteració en un preu determinat, es materialitzaran sobre els preus de tots els béns, sobre el benestar dels agents o sobre els nivells de producció. L'anàlisi econòmica (parcial) dels mercats identifica els efectes més immediats d'aquests canvis d'escenari econòmic, però prescindeix d'altres impactes que, indirectament, es transmeten igualment en una economia. Si es desitja captar tant els efectes directes com els que es produeixen indirectament, és necessari emprar una anàlisi d'equilibri general que sigui capaç de captar la interdependència econòmica i les connexions entre agents i mercats.

Malgrat que l'equilibri general proporciona una visió més acurada sobre el funcionament d'una economia, també n'augmenta la complexitat a l'hora de representar-la. Per això, el contingut que s'exposa en el mòdul està limitat al cas de mercats competitius i a un nombre reduït d'agents. Aquesta simplificació facilita la comprensió dels mecanismes d'equilibri general i permet entendre les implicacions que es deriven de les connexions econòmiques. Un altre model simplificat d'equilibri general és el d'una economia d'intercanvi pur, en la qual a partir d'una producció preestablerta es determinen unes dotacions inicials dels individus que s'usen per a l'intercanvi.

L'equilibri general dóna opció a adoptar una perspectiva normativa, és a dir, fa possible l'establiment de recomanacions en relació amb quin hauria de ser el funcionament de l'economia. Aquesta anàlisi normativa d'equilibri general aporta una informació que resulta d'utilitat per a la política econòmica.

Objectius

Els objectius d'aquest mòdul són els següents:

1. Delimitar l'anàlisi positiva, que es preocupa del funcionament del sistema econòmic i l'anàlisi normativa, que parteix de judicis de valor i se centra en com hauria de ser aquest funcionament.

2. Presentar models simples d'equilibri general que aborden l'assoliment simultani de l'equilibri en el conjunt de mercats competitius d'una economia i són la base per a entendre el funcionament d'una economia de mercat.

3. Mostrar aplicacions dels models d'equilibri general a l'estudi de contextos econòmics incerts.

4. Diferenciar eficiència i equitat en l'assignació de recursos en l'anàlisi normativa i presentar el criteri bàsic per a jutjar l'eficiència d'un sistema econòmic, que és el criteri de Pareto, basat en la unanimitat. Per a propòsits de política econòmica aquest criteri es reforça usant el criteri de compensació o de Kaldor.

5. Estudiar l'asseveració d'Adam Smith que indica que un sistema amb agents que persegueixen el seu interès personal i en el qual béns i recursos s'assignen mitjançant mercats competitius genera una assignació eficient i, per tant, promou el benestar social. És a dir, estudiar com agents egoistes actuen en el benestar de la comunitat sense ser-ne conscients.

6. Mostrar sota quines condicions el mecanisme de mercat, un sistema amb tots els mercats competitius, permet separar els problemes d'eficiència i distribució.

7. Introduir les funcions de benestar social que incorporen criteris tant d'eficiència com d'equitat.

1. Intercanvi

El model bàsic d'equilibri general suposa una economia d'intercanvi molt simplificada, amb dos consumidors, a (Abel) i b (Bernat), i dos béns, 1 i 2. El consumidor genèric el representarem amb la lletra h i la mercaderia genèrica amb la i. És a dir, d'una banda, $h = a, b$ i, de l'altra, $i = 1, 2$. Els resultats es poden generalitzar a més individus i mercaderies.

Cada consumidor pot intercanviar les quantitats dels diversos béns de què disposa mitjançant mercats competitius. Per exemple, un consumidor pot tenir un munt de pomes i poques peres. Aleshores, pot aconseguir més peres si les intercanvia per unes quantes pomes.

Procés de negociació

Amb només dos agents, suposar que intercanvien en mercats sense afectar els preus és poc realista, ja que probablement els intercanvis estarien guiats per un procés de negociació. Es justifica pel fet que considerar només dos individus és una simplificació.

Hi ha un mercat competitiu per a cada bé, és a dir, tants mercats competitius com mercaderies hi hagi. Aleshores, hi ha dos mercats en el model simple que desenvolupem i un vector de dos preus, $\mathbf{p} = [p_1, p_2]$, que serien n mercats i n preus en el cas general de n béns. El preu d'una mercaderia s'expressa en una unitat de compte, per exemple, en euros, que només serveix per a facilitar intercanvis i no té cap valor com a bé de consum.

Un cistell o una combinació de l'agent h és un vector $\mathbf{x}_h = (x_{1h}, x_{2h})$ que mostra les quantitats que obté el consumidor h dels dos béns, 1 i 2. En l'expressió anterior $x_{ih} \geq 0$ és la quantitat del bé i que consumeix el consumidor h.

Procés de negociació

Aleshores, $\mathbf{x}_h$ és un vector de dues dimensions que té com a components nombres reals no negatius, $\mathbf{x}_h \in \Re_+^2$.

Cada consumidor h es caracteritza pel següent:

- La dotació o el cistell (o combinació de béns) inicial, que és el vector de quantitats de béns de què disposa inicialment.

$$\mathbf{w}_h = (w_{1h}, w_{2h}),\ h = a, b.$$

  El símbol w_{ih} fa referència a la quantitat de la mercaderia i inicialment en mans del consumidor h, $w_{ih} \geq 0$, $i = 1, 2$.

- Les preferències, representades per una funció d'utilitat continua $u_h(\mathbf{x}_h)$: $\Re_+^2 \rightarrow \Re_+$, en què $\mathbf{x}_h = (x_{1h}, x_{2h})$ és el cistell de consum de l'agent h.

Preferències

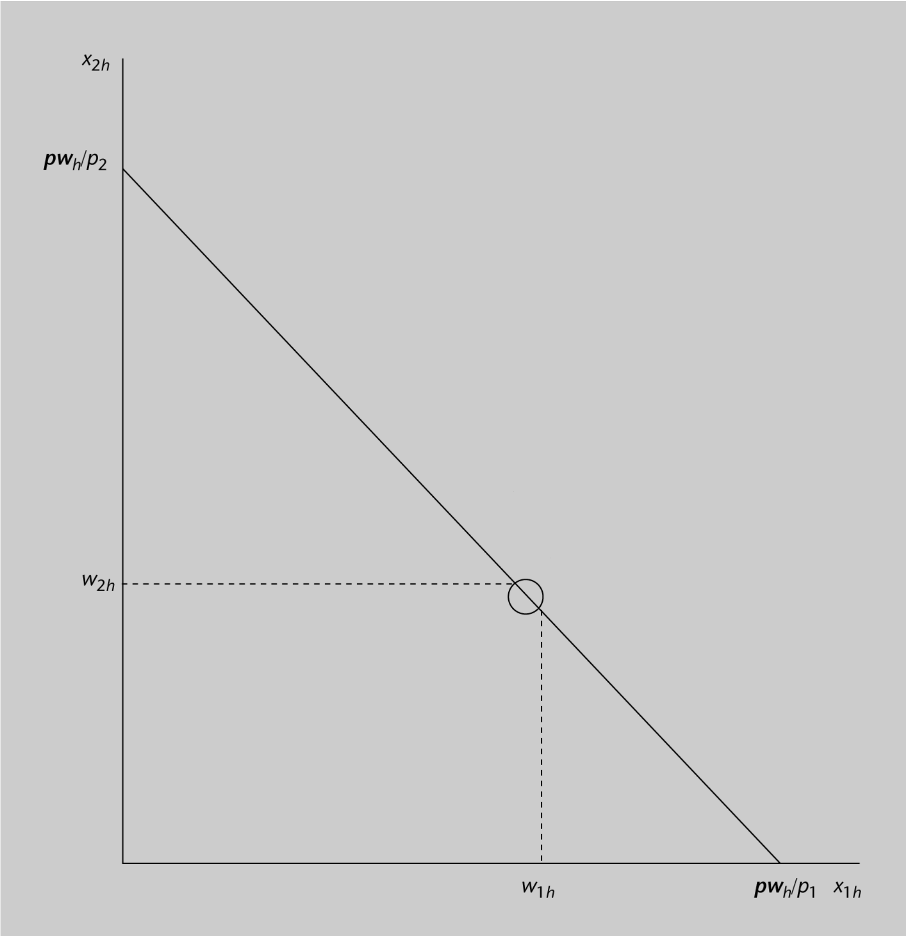
Les preferències es suposaran regulars, és a dir, monòtones i convexes (en sentit estricte per les dues característiques). La monotonicitat significa que la utilitat marginal de qualsevol bé és positiva, $\frac{\partial u_h}{\partial x_{ih}} > 0$ i la convexitat, que les corbes d'indiferència són estrictament convexes.

1.1. Funcions de demanda

Un individu h comença amb una dotació $\mathbf{w}_h$ i intenta consumir un cistell $\mathbf{x}_h$, que es deriva de la maximització de la utilitat. Tot individu és preuacceptant i pot modificar el cistell inicial $\mathbf{w}_h$ mitjançant la compra i la venda en mercats competitius. La restricció pressupostària del consumidor h expressa que la despesa no pot superar el valor de la seva dotació, $p_1x_{1h} + p_2x_{2h} \leq p_1w_{1h} + p_1w_{1h}$ o, en notació vectorial, $\mathbf{px}_h \leq \mathbf{pw}_h$.

La restricció pressupostària $p_1x_{1h} + p_2x_{2h} \leq p_1w_{1h} + p_1w_{1h}$ mostra que el valor del cistell que consumeixi el consumidor h (la quantitat que vol de cada bé pel seu preu) no pot superar el valor del cistell que té inicialment (quantitat de cada bé en la dotació pel preu del bé).

Gràfic 3. Recta pressupostària

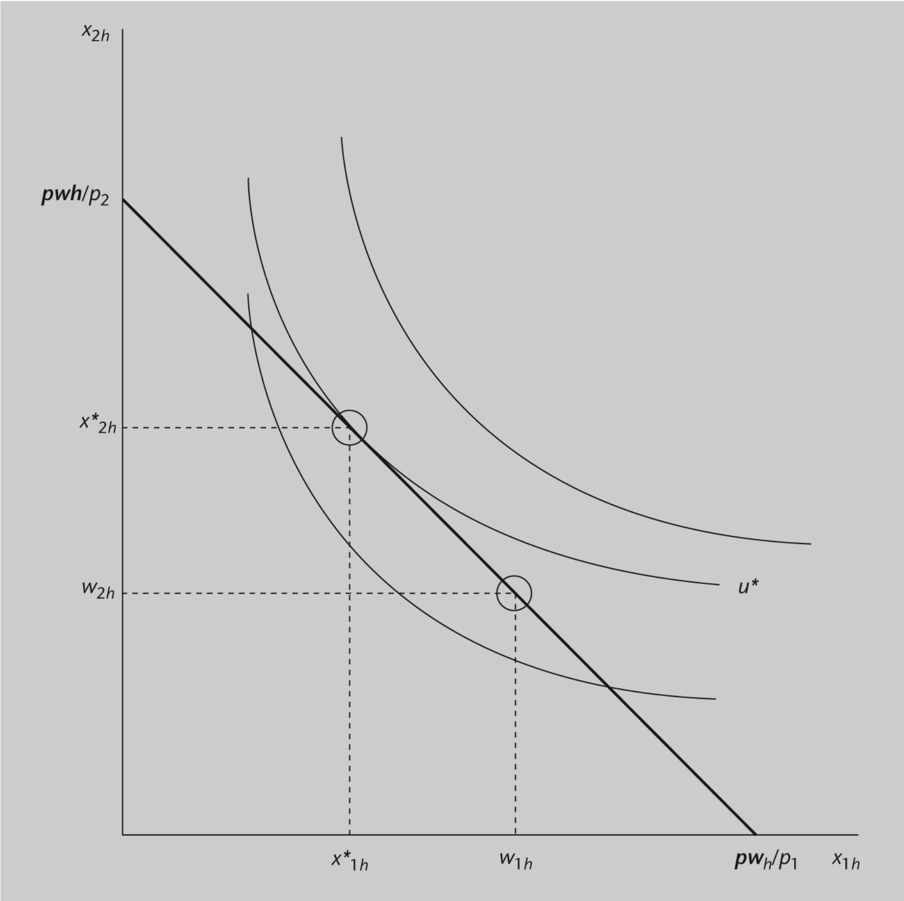


La dotació és un punt de la recta de balanç, ja que és un cistell assequible. El consumidor, si vol, pot consumir la dotació. El consumidor h determina les quantitats a consumir a partir del problema d'optimització, que consisteix a maximitzar la seva utilitat subjecte a la restricció pressupostària a què fa front, que expressa que la despesa no pot superar el valor del seu patrimoni, $\mathbf{px}_h \leq \mathbf{pw}_h$. Com que la utilitat és creixent en les quantitats consumides dels diversos béns, el conjunt rellevant de la restricció pressupostària és el límit superior, la recta de balanç o recta pressupostària. El problema d'optimització de l'agent en una economia d'intercanvi és, per tant, el següent:

$$\underset{\mathbf{x}_h}{\text{Màx.}}\ u_h(\mathbf{x}_h) \text{ subjecte a } \mathbf{px}_h = \mathbf{pw}_h.$$

Gràficament, el consumidor selecciona el cistell de la recta de balanç situat en la corba d'indiferència més allunyada de l'origen.

Gràfic 4. Cistella òptima



Assumint un òptim interior, d'acord amb el que hem vist en l'anàlisi del comportament del consumidor, la solució $\boldsymbol{x^*}_h$ es caracteritza per dues condicions:

1) Tangència de corba d'indiferència amb recta de balanç, RMS = p_1/p_2. Com que l'RMS iguala el quocient d'utilitats marginals, ocorre el següent:

$$\frac{\partial u_h(\mathbf{x}_h^*)/\partial x_{1h}}{\partial u_h(\mathbf{x}_h^*)/\partial x_{2h}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

2) L'òptim verifica la restricció, és a dir, compleix l'equació de la recta de balanç, $\mathbf{px^*}_h = \mathbf{pw}_h$.

Si es resol el sistema de dues equacions amb dues incògnites, s'obtenen quantitats òptimes dels dos béns en funció dels paràmetres del problema, preus i dotació inicial de h. Aquesta solució es coneix com a *vector de demandes de consum* o *brutes* per a l'agent h:

$$\boldsymbol{x^*}_h = \mathbf{x}_h(\mathbf{p}, \mathbf{w}_h) = (x_{1h}(\mathbf{p}, \mathbf{w}_h), x_{2h}(\mathbf{p}, \mathbf{w}_h)).$$

Exemple

El consumidor h té una dotació $\mathbf{w}_h = (w_{1h}, w_{2h})$ amb $w_{ih} > 0$ i unes preferències donades per la funció d'utilitat Cobb-Douglas, $u_h = x_{1h}\,x_{2h}$. Les seves demandes de consum o brutes han de complir el següent:

1) Condició de tangència, $x_{2h}/x_{1h} = p_1/p_2$.
2) L'equació de la recta pressupostària, $p_1x_{1h} + p_2x_{2h} = p_1w_{1h} + p_2w_{2h}$.

Si aquest sistema es resol per a les dues incògnites, s'obté el següent:

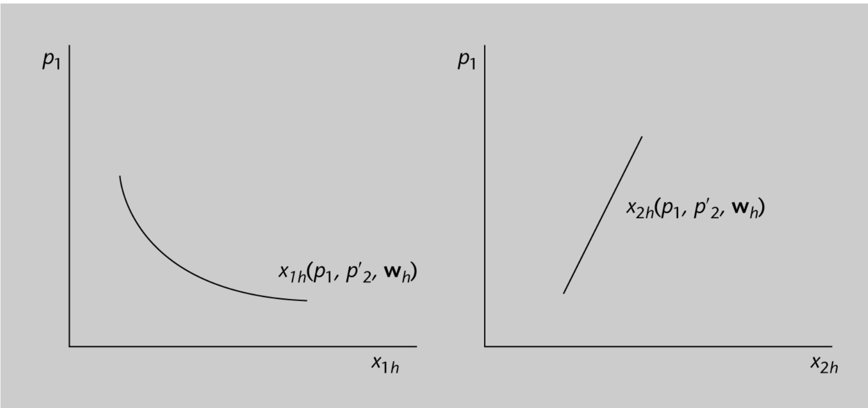
$$x_{ih} = p_1w_{1h} + p_2w_{2h}/2p_i \qquad i = 1, 2.$$

Aleshores, si la dotació inicial de a és $\mathbf{w}_a = (w_{1a}, w_{2a}) = (32, 4)$ i la de b val $\mathbf{w}_b = (w_{1b}, w_{2b}) =$ $= (8, 16)$, les demandes són, respectivament, les següents:

$$x^*_{1a} = 16 + \frac{2\,p_2}{p_1} \qquad x^*_{2a} = \frac{16\,p_1}{p_2} + 2.$$
$$x^*_{1b} = 4 + \frac{8\,p_2}{p_1} \qquad x^*_{2b} = \frac{4\,p_1}{p_2} + 8.$$

Per a qualsevol dels dos consumidors, quan augmenta p_1 baixa la demanda del bé 1 (la corba de demanda del bé 1 té pendent negatiu) i augmenta la del bé 2 (els béns son substitutius bruts). Així, els gràfics de les demandes del bé 1 i el bé 2 respecte de p_1, si es manté fix p_2 (en el nivell p'_2, per exemple) del consumidor h són les següents:

Gràfic 5. Demandes individuals dels béns 1 i 2 respecte a p_1



Quan puja p_2, les demandes s'alteren en sentit oposat: la corba de demanda del bé 2 té pendent negatiu i els béns són substitutius bruts (si augmenta p_2 baixa x^*_{2h} i augmenta x^*_{1h}).

1.2. Preus relatius

Les demandes de consum són homogènies de grau zero en els preus. Si tots els preus es multipliquen per la mateixa constant positiva $t > 0$, les demandes no s'alteren, és a dir, es multipliquen per $t^0 = 1$.

$$x_{ih}(t\mathbf{p}, \mathbf{w}_h) = x_{ih}(\mathbf{p}, \mathbf{w}_h) \qquad i = 1, 2.$$

Aquesta propietat es deu al fet que si tots els preus es multipliquen per una constant $t > 0$, la recta de balanç no s'altera. Gràficament, observem que les interseccions amb els eixos no varien quan augmenta el valor de la dotació en la mateixa proporció que els preus:

$$(tp_1w_{1h} + tp_2w_{2h})/tp_i = (p_1w_{1h} + p_2w_{2h})/p_i \qquad i = 1, 2.$$

En conseqüència, si la recta pressupostària no canvia, tampoc canvia la solució, el vector de demandes de consum, $\mathbf{x}^*_h$. Aleshores, si fem $t = 1/p_2$ i definim $p = p_1/p_2$ o quocient de preus del bé 1 dividit pel del bé 2, la recta pressupostària passa a expressar-se de la manera següent:

$$px_{1h} + x_{2h} = pw_{1h} + w_{2h}.$$

Amb aquests preus, el bé 2 és numerari, té un preu igual a 1, i el preu del bé 1, p, és el preu relatiu del bé 1 en termes del 2, la quantitat del bé 2 que s'intercanvia per una unitat del bé 1.

Exemple

Per exemple, si el bé 1 són pomes, amb $p_1 = 60$ cèntims/poma, el bé 2, són peres, amb un preu de $p_2 = 20$ cèntims/pera, tenim que $p_1/p_2 = 3$ peres s'intercanvien per una poma. Si les peres s'usen com a unitat de mesura, de manera que el preu de les pomes s'expressa en nombre de peres, el preu de les pomes és 3.

Fer servir el bé 2 com a numerari simplifica l'exposició i emfatitza que en una economia amb dos béns, de fet, un bé s'intercanvia per l'altre. D'altra banda, no afectarà l'anàlisi, ja que, per la propietat d'homogeneïtat de grau 0 de les funcions de demanda de consum, aquestes funcions no s'alteren després de redefinir els preus i fixar, així, el preu del bé 2 igual a 1:

$$x_{ih}(p, \mathbf{w}_h) = x_{ih}(\mathbf{p}, \mathbf{w}_h) \qquad i = 1, 2.$$

Exemple

Si les demandes de dos béns, 1 i 2, per part de dos agents, a i b, amb els preus fixats en euros, són les següents:

$$x^*_{ia} = 32\ p_1 + 4\ p2/2p_i \quad x^*_{ib} = 8\ p_1 + 16\ p_2/2p_i \qquad i = 1, 2.$$

Aquestes demandes no s'alteren si el bé 2 es fa servir com a numerari, i el preu del bé 1 s'expressa en funció del preu relatiu $p = p_1/p_2$:

$$x^*_{1a} = 16 + 2/p \qquad x^*_{2a} = 16p + 2 \qquad x^*_{1b} = 4 + 8/p \qquad x^*_{2b} = 4p + 8.$$

Per a qualsevol consumidor, quan p augmenta, el preu del bé 1 usant el 2 com a numerari (i, per tant, pujar p_1 respecte a p_2), baixa x^*_{1h} (la corba de demanda del bé 1 té pendent negatiu) i augmenta x^*_{2h} (els béns són substitutius bruts).

1.3. Funcions de demanda transaccionals

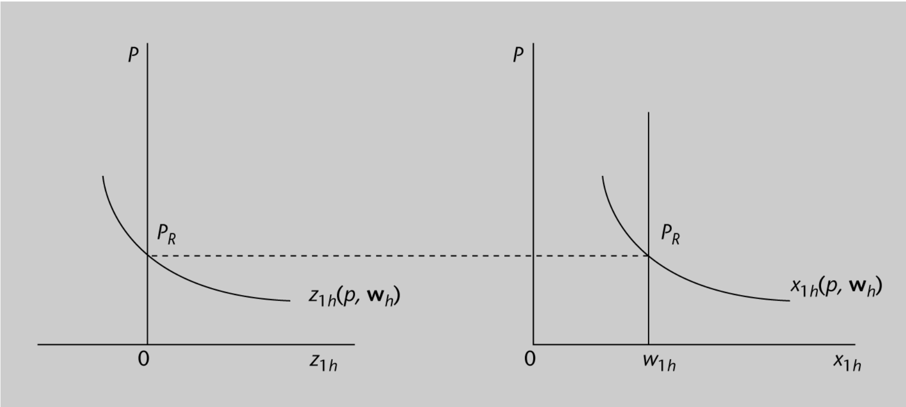
Si un agent té 10 pomes i en vol 20, i pot comprar i vendre les que vulgui al preu de mercat, només n'ha d'adquirir 10 més, no fa falta que en vengui 10 i en compri 20. La demanda transaccional o neta o funció d'excés del bé i per part de l'agent h és la quantitat del bé que vol intercanviar a cada preu. És a dir, és la seva demanda de consum de la mercaderia i menys la quantitat que inicialment posseeix del bé esmentat:

$$z_{ih}(p, \mathbf{w}_h) = x_{ih}(p, \mathbf{w}_h) - w_{ih} \qquad i = 1, 2, \quad h = a, b.$$

El preu de reserva de l'agent h per al bé 1 és el preu p_R al qual no vol intercanviar. És a dir, el preu per al qual la seva demanda transaccional del bé 1 és zero.

En el gràfic 6 hem representat una demanda transaccional del bé 1 ben comportada, amb pendent negatiu. Pel preu p_R, l'agent h no vol intercanviar, sinó que el cistell òptim coincideix amb la seva dotació. Per preus més baixos vol comprar més bé 1 del que té. Per preus més alts, vol vendre bé 1 i consumir menys d'aquesta mercaderia de la que hi ha a la seva dotació.

Gràfic 6. Demandes individuals del bé 1, transaccional i de consum



1.4. Funcions d'excés de demanda agregat

La funció d'excés de demanda o d'excés de demanda agregat o de mercat del bé i és la suma de les demandes transaccionals de tots els agents per al bé esmentat. Per tant, iguala la suma de les seves demandes de consum menys les seves dotacions per al bé i:

$$z_i(p) = z_{ia}(p, \mathbf{w}_a) + z_{ib}(p, \mathbf{w}_b) = x_i(p, \mathbf{w}) - w_i \qquad i = 1, 2.$$

En aquest cas, $x_i(p, \mathbf{w})$ és la demanda de consum agregada del bé i w_i és la quantitat total que hi ha d'aquest bé:

$$x_i(p, \mathbf{w}) = x_{ia}(p, \mathbf{w}_a) + x_{ib}(p, \mathbf{w}_b) \qquad w_i = w_{ia} + w_{ib} \qquad i = 1, 2.$$

La funció d'excés de demanda agregat dependrà de les dotacions del bé i de tots els individus. Per tal de facilitar la notació, però, l'expressem només en funció del preu relatiu p.

La llei de Walras estableix que la suma dels valors d'excessos de demanda per a tot $p > 0$ i per a tots els béns sempre serà zero:

$$pz_1(p) + z_2(p) = 0.$$

La demostració de la llei de Walras parteix del fet que la recta pressupostària del consumidor h, la restricció que el consumidor acara en seleccionar el cistell de consum, s'ha de complir sempre. En particular, l'ha de verificar el cistell òptim, el vector de demandes de consum:

$$p(x^*_{1h} - w_{1h}) + (x^*_{2h} - w_{2h}) = 0.$$

És a dir, per a qualsevol consumidor h, el valor de la demanda transaccional del bé 1 més el valor de la demanda transaccional del bé 2 ha de ser igual a 0.

$$pz_{1h}(p) + z_{2h}(p) = 0.$$

Per a tot h, la suma ha de ser nul·la:

$$pz_{1a}(p) + pz_{1b}(p) + z_{2a}(p) + z_{2ba}(p) = 0.$$

En conseqüència, per definició de l'excés de demanda agregat de qualsevol bé tenim el següent:

$$pz_1(p) + z_2(p) = 0.$$

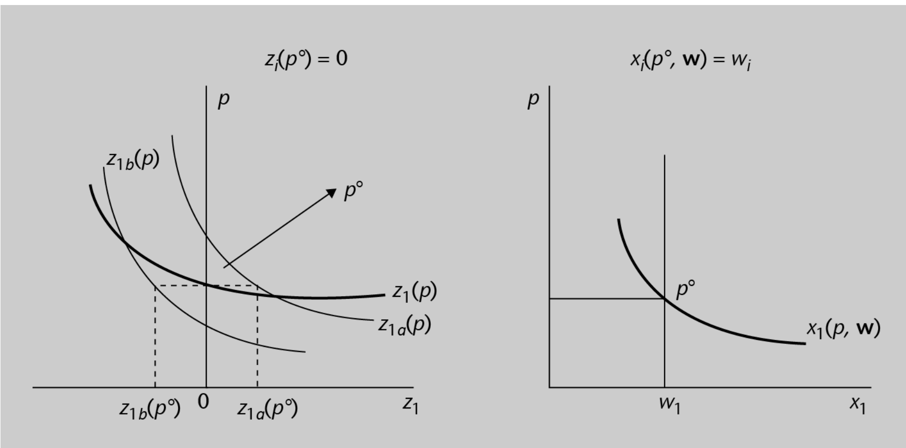
1.5. Equilibri general competitiu

L'equilibri walrasià o equilibri general competitiu és un concepte d'equilibri que aplica el conjunt de mercats de l'economia. Abans de definir-lo, observem el següent:

- Si $z_i(p) > 0$ per al preu relatiu $p > 0$, hi ha excés de demanda del bé i.
- Si $z_i(p) < 0$ per al preu $p > 0$, hi ha excés de demanda negatiu, o excés d'oferta, del bé i.

Aleshores, el mercat del bé i estarà en equilibri per un preu relatiu $p° > 0$ si l'excés de demanda agregat és nul, és a dir, si la demanda agregada del bé i iguala la suma de dotacions del bé esmentat, ocorre el següent:

Gràfic 7. Equilibri en el mercat del bé 1



Al preu $p°$ la demanda neta del bé 1 de a iguala la demanda neta negativa o oferta neta del mateix bé per part de b, $z_{1a}(p°) = -z_{1b}(p°)$.

La llei de Walras implica que si el mercat del bé 1 està en equilibri, també ho estarà el del bé 2:

$$z_1(p°) = 0 \qquad\qquad z_2(p°) = 0.$$

Això es pot comprovar a partir de la llei de Walras:

$$pz_1(p) = z_2(p).$$

Per tant, si al preu $p > 0$ hi ha excés de demanda agregat del bé 1, $z_1(p) > 0$, hi haurà excés de demanda negatiu, o excés d'oferta, del bé 2, $z_2(p) < 0$. Si al preu $p > 0$ hi ha excés d'oferta en el mercat del bé 1, hi haurà excés de demanda en el del bé 2. Finalment, si al preu $p° > 0$ el mercat del bé 1 està en equilibri, $z_1(p°) = 0$, també ho estarà el del bé 2, $z_2(p°) = 0$. En cas de n béns, si $n - 1$ mercats estan en equilibri, també ho estarà el mercat restant, n.

En resum, un equilibri general competitiu o equilibri walrasià és un preu relatiu $p° > 0$ i un llistat de quantitats consumides dels dos béns per part dels dos agents $(x^0_{1a}, x^0_{2a}, x^0_{1b}, x^0_{2b})$, amb $x°_{ih} \geq 0$, $i = 1, 2$, $h = a, b$, que compleixen el següent:

1) Optimització: donat $p° > 0$, el cistell $\boldsymbol{x}°_h = (x^0_{1h}, x^0_{2h})$ és el que vol consumir l'agent h. És a dir, és el cistell que s'obté si se substitueix el preu relatiu $p°$ en les demandes de l'individu (que sorgeixen de maximitzar la seva funció d'utilitat subjecte a la recta pressupostària):

$$\boldsymbol{x}°_h = \mathbf{x}_h(p°, \mathbf{w}_h) = [\, x_{1h}(p°, \mathbf{w}_h), x_{1h}(p°, \mathbf{w}_h)].$$

2) Buidatge de mercats: el preu relatiu $p°$ iguala demanda i oferta en els dos mercats, és a dir, genera un excés de demanda agregat nul en tots dos, $z_1(p°) = 0$, $z_2(p°) = 0$.

L'equilibri walrasià només permet determinar els preus relatius d'equilibri. No es pot resoldre per als preus absoluts. Si els preus dels béns es fixen per una unitat purament comptable, que no reporta utilitat, en euros, diguem, l'equilibri walrasià no troba els preus en euros de tots els béns. Tanmateix, si el preu relatiu d'una poma envers d'una pera és de 1 i cada pera val 0,5 **€**, aleshores cada poma valdrà 0,5 **€**. En conseqüència, en el cas de 2 béns, només es resol per un preu relatiu, i en el cas general de n béns, l'equilibri walrasià determina $n - 1$ preus relatius.

Exemple

Les dotacions de dos agents, a i b, de dos béns, 1 i 2, són $w_a = (w_{1a}, w_{2a}) = (32, 4)$, $w_b = (w_{1b}, w_{2b}) = (8, 16)$. D'altra banda, si el bé 2 és numerari, les seves demandes valen el següent:

$$x^*_{1a} = 16 + 2/p \qquad x^*_{2a} = 16p + 2 \qquad x^*_{1b} = 4 + 8/p \qquad x^*_{2b} = 4p + 8.$$

Aleshores, les demandes transaccionals s'obtenen restant de cada demanda de consum la dotació corresponent:

$$z^*_{1a} = x^*_{1a} - w_{1a} = 2/p - 16 \qquad z^*_{2a} = x^*_{2a} - w_{2a} = 16p - 2.$$
$$z^*_{1b} = x^*_{1b} - w_{1b} = 8/p - 4 \qquad z^*_{2b} = x^*_{2b} - w_{2b} = 4p - 8.$$

Els preus de reserva dels agents per al bé 1 són els següents:

$$z^*_{1a} = 2/p_{Ra} - 16 = 0 \rightarrow p_{Ra} = 1/8 \qquad z^*_{1b} = 8/p_{Rb} - 4 = 0 \rightarrow p_{Rb} = 2.$$

La funció d'excés de demanda agregat del bé 1 s'obté mitjançant la suma de les demandes transaccionals del bé 1 per a tots els agents de l'economia:

$$z_1(p) = 10/p - 20.$$

De la mateixa manera, tenim que l'excés de demanda agregat del bé 2 és $z_2(p) = 20p - 10$.

El preu d'equilibri anul·la l'excés de demanda agregat del bé 1, $z_1(p°) = 10/p° - 20 = 0$, i, per tant, val $p° = 1/2$.

Per tal de trobar el preu relatiu d'equilibri, n'hi ha prou usant una de les dues funcions d'excés de demana agregada. Per exemple, la del mercat 1. Aquest preu també buida el mercat 2, és a dir, l'excés de demanda agregat del bé 2 també és zero per a aquest preu, $z_2(p°) = 20p° - 10 = 0$ per a $p° = 1/2$.

A fi d'obtenir les quantitats consumides pels dos agents a aquest preu d'equilibri, el preu se substitueix en les funcions de demanda de consum o brutes de totes dues persones:

$$x°_{1a} = x°_{1b} = 20 \qquad x°_{2a} = x°_{2b} = 10.$$

1.6. Aplicació

En un camp de concentració alemany durant la Segona Guerra Mundial, els presoners anglesos i francesos rebien racions individuals, que podien intercanviar, per la qual cosa el model d'intercanvi pur capta els trets fonamentals de la seva economia. En aquestes dotacions hi havia, entre d'altres, una quantitat de te i una altra de cafè, béns que denominarem, respectivament, bé 1 i bé 2. Els francesos preferien cafè i els anglesos, te. Suposem que hi ha 100 presos anglesos i 100 presos francesos. Les preferències de cada anglès es poden representar mitjançant la funció d'utilitat $u_a = x_{1a}^2 x_{2a}$ i les de cada francès, mitjançant $u_b = x_{1b} x_{2b}^2$. La dotació de cada pres és $(w_{1i}, w_{2i}) = (9, 9)$, $i = a, b$.

L'existència d'un mercat en què els presos intercanviarien te (bé 1) per cafè (bé 2) es pot justificar si es troba, per a un francès (b) i per a un anglès (a), l'RMS avaluada en la dotació inicial:

$$\mathrm{RMS}_a\,(x_{1a}, x_{2a}) = \frac{\dfrac{\partial u_a}{\partial x_{1a}}}{\dfrac{\partial u_a}{\partial x_{2a}}} = \frac{2x_{1a}x_{2a}}{x_{1a}^2} = \frac{2x_{2a}}{x_{1a}} \rightarrow \mathrm{RMS}_a\,(w_{1a}, w_{2a}) = \frac{2w_{2a}}{w_{1a}} = \frac{18}{9} = 2\,.$$

$$\mathrm{RMS}_b\,(x_{1b}, x_{2b}) = \frac{\dfrac{\partial u_b}{\partial x_{1b}}}{\dfrac{\partial u_b}{\partial x_{2b}}} = \frac{x_{2b}^2}{x_{1b}2x_{2b}} = \frac{x_{2b}}{2x_{1b}} \rightarrow \mathrm{RMS}_b\,(w_{1b}, w_{2b}) = \frac{w_{2b}}{2w_{1b}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}\,.$$

Per tant, en la dotació inicial, la valoració de l'última unitat de te per a un anglès són dues unitats de cafè, mentre que per a un francès la valoració de l'última unitat de te és mitja unitat de cafè. Aquesta diferència en les valoracions marginals mostra una voluntat d'intercanvi per ambdues parts: per al cistell inicial, un francès valora més el cafè i un anglès, el te.

Atès que en el camp hi ha el mateix nombre d'anglesos que de francesos, el preu relatiu d'equilibri del te respecte del cafè, si els agents són preuacceptants, el podem determinar a partir de les demandes transaccionals d'un anglès i d'un francès. Si els agents es comporten de manera competitiva, les demandes estan maximitzant la utilitat subjecte a la restricció pressupostària de cada agent. Si el bé 2, cafè, es considera numerari, aquesta restricció és per a l'agent $h = a, b$:

$$p \cdot x_{1h} + x_{2h} = p \cdot w_{1h} + w_{2h}.$$

El problema de maximització de l'agent a és, per tant, el següent:

$$\text{Màx. } u_a = x_{1a}{}^2 \cdot x_{2a} \quad \text{subjecte a} \quad p \cdot x_{1a} + x_{2a} = p\ \ 9 + 9.$$

La cistella que soluciona aquest problema d'optimització compleix el sistema de dues equacions:

$$\text{RMS}_a\,(x_{1a}, x_{2a}) = p \qquad px_{1a} + x_{2a} = p\, w_{1a} + w_{2a}.$$

Si tenim present com és la funció d'utilitat i les dotacions de l'individu a, trobem el següent:

$$\frac{2x_{2a}}{x_{1a}} = p \qquad px_{1a} + x_{2a} = p\ \ 9 + 9.$$

Si resolem aquest sistema, obtenim les demandes de l'agent a:

$$x_{1a} = 6 + \frac{6}{p} \quad \text{i} \quad x_{2a} = 3p + 3.$$

Si fem el mateix per a l'agent b, n'obtenim les demandes:

$$x_{1b} = 3 + \frac{3}{p} \quad \text{i} \quad x_{2b} = 6 + 6p.$$

Les funcions d'excés de demanda individuals del bé 1 s'obtenen a partir de restar de les demandes de consum de te les dotacions inicials respectives. La funció d'excés de demanda agregada del bé 1 d'excés de demanda agregat del bé 1 (per a un francès i un anglès):

$$z_1(p) = \frac{9}{p} - 9\ .$$

En equilibri, la demanda total iguala l'oferta total o la funció d'excés de demanda és nul·la, $z_1(p°) = 0$. El preu d'equilibri és, per tant, $p° = 1$.

Si comprovem la llei de Walras, assegurem que els càlculs han estat correctes. La llei de Walras assegura que si el mercat del bé 1 està en equilibri, també ho estarà el del bé 2. Si se substitueix $p° = 1$ en la funció d'excés de demanda del bé 2, es comprova que, efectivament, es verifica, $z_2(p°) = 0$.

Si se substitueix el preu relatiu d'equilibri, $p°$, en les demandes individuals, es troben les quantitats consumides pels dos agents en equilibri:

$$x_{1a}° = 12 \qquad x_{2a}° = 6 \qquad x_{1b}° = 6 \qquad x_{2b}° = 12.$$

En equilibri competitiu, els agents igualen la seva RMS a un mateix preu relatiu d'equilibri. Per tant, les RMS dels agents s'igualen entre elles: la valoració de l'última unitat de te d'un anglès coincideix amb la d'un francès. En altres paraules, la valoració de l'última unitat de te en termes de cafè és la mateixa per a un francès i per a un anglès: no hi ha voluntat de fer més intercanvis. Encara que per a la dotació inicial, per una unitat més de te, un anglès estava disposat a pagar més (a renunciar a més cafè) que un francès, en equilibri competitiu, tots dos estan disposats a pagar el mateix preu per l'última unitat de te.

$$\text{RMS}_a\,(x_{1a}°, x_{2a}) = \frac{2x_{2a}°}{x_{1a}°} = \frac{12}{12} = 1 \qquad \text{RMS}_b\,(x_{1b}°, x_{2b}°) = \frac{x_{2b}°}{2x_{1b}°} = \frac{12}{12} = 1\,.$$

2. Economia del benestar

L'economia normativa té dos vessants, eficiència i equitat. L'**eficiència econòmica** fa referència a l'assignació òptima dels recursos disponibles, mentre que l'**equitat** se centra en la distribució de la riquesa. De l'anàlisi normativa sorgeixen propostes de política econòmica per a una millor assignació dels recursos que hi ha i per a fer front a la desigualtat social.

L'equitat depèn de judicis de valor dels membres de la societat. D'altra banda, el concepte fonamental d'eficiència que s'usa en economia és el d'optimitat paretiana o eficiència en el sentit de Pareto*.

*** Vilfredo Pareto, sociòleg i economista italià del segle XIX**

El criteri de Pareto estableix que una millora paretiana és un canvi social que beneficia almenys una persona i no perjudica a ningú. Un estat social és òptim en el sentit de Pareto si no és possible cap millora paretiana. Pel que fa a l'avaluació dels beneficis individuals, aquests beneficis depenen de les preferències de l'individu, ja que Pareto considera que és la persona mateixa qui sap més bé les necessitats que té i què la beneficia.

Aleshores, segons aquest criteri, convindrà fer una reassignació determinada de recursos si ningú s'hi oposa i algú o alguns hi estan a favor. El criteri, per tant, es basa en la unanimitat.

> Per exemple, convindrà dedicar els recursos a fer una carretera si ningú hi està en contra i, almenys una persona hi està a favor. El criteri, doncs, afavoreix la inacció: no s'hauria de fer la carretera si perjudica un individu encara que benefici la resta de la societat.

Per aquest motiu, per a propòsits de política s'usa sovint el criteri de Kaldor, que manté que convé un canvi en l'assignació de recursos si els que guanyen poden compensar els que perden i encara hi guanyen. Només cal que la compensació sigui hipotètica, no és necessari que es dugui a terme, de manera que el criteri de Kaldor només ofereix una millora paretiana potencial, no pas real (com seria el cas si la compensació es fes efectiva).

2.1. Eficiència econòmica en cas d'economies d'intercanvi

En aquest punt analitzarem l'eficiència en el sentit de Pareto en el model de canvi pur amb els dos béns, 1 i 2, i els dos consumidors, *a* i *b*, que hem introduït per tal d'estudiar l'equilibri general.

Una assignació és un parell de cistells de consum $\boldsymbol{x}_a$ i $\boldsymbol{x}_b$ en què $\boldsymbol{x}_h = (x_{1h}, x_{2h})$ és un cistell de consum de l'individu h. Una assignació és factible si la quantitat total consumida de cada bé iguala la quantitat total disponible, $\boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{x}_b = \boldsymbol{w}$:

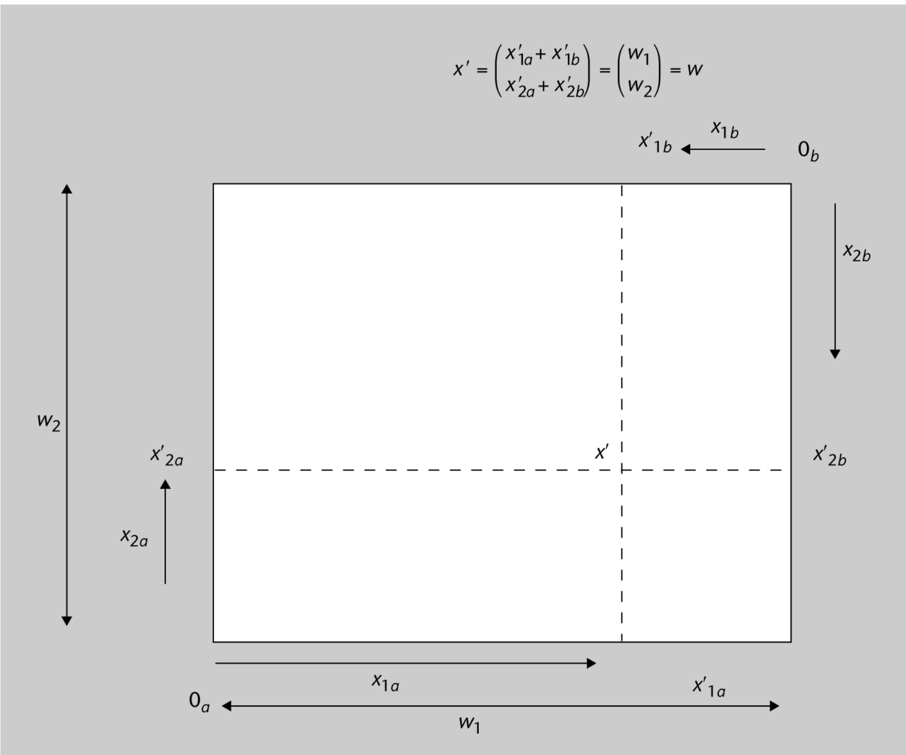
$$x_{1a} + x_{1b} = w_1$$
$$x_{2a} + x_{2b} = w_2$$

És a dir, per al bé 1, la quantitat consumida pel consumidor a i el b ha de ser igual a la quantitat disponible del bé 1. Passa el mateix amb el bé 2.

El conjunt d'assignacions factibles $\boldsymbol{X_f} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{x}_b = \boldsymbol{w}\}$ es representa gràficament mitjançant l'anomenada *caixa d'Edgeworth*, en honor a Francis Y. Edgeworth (1845-1926), economista anglès que va ser el primer a usar aquest instrument analític. A la caixa d'Edgeworth, el consum per part de a del bé 1 i del bé 2 es mesura de la manera usual. El vèrtex inferior esquerre de la caixa, 0_a, representa el consum nul d'ambdós béns per part del consumidor a. El consum de a del bé 1 es representa en forma ascendent en l'eix d'abscisses d'esquerra a dreta i el del bé 2 es representa en l'eix d'ordenades de baix a dalt. Per al consumidor b, l'origen de coordenades, el consum nul d'ambdós béns, se situa en el vèrtex superior dret de la caixa, 0_b, i el sentit en què augmenta el seu consum de cada bé s'inverteix respecte dels de a. Per tant, per al consumidor b, a partir del vèrtex superior dret, el consum del bé 1 augmenta cap a l'esquerra a l'eix horitzontal i el del bé 2 augmenta cap a baix sobre l'eix vertical.

Cada punt de la caixa mostra, per tant, el consum dels dos béns per part d'ambdós agents. Per exemple, l'assignació $\boldsymbol{x}'$ és una assignació factible, ja que és un punt de la caixa. Els consums de a i b dels dos béns són els que mostra el gràfic 8.

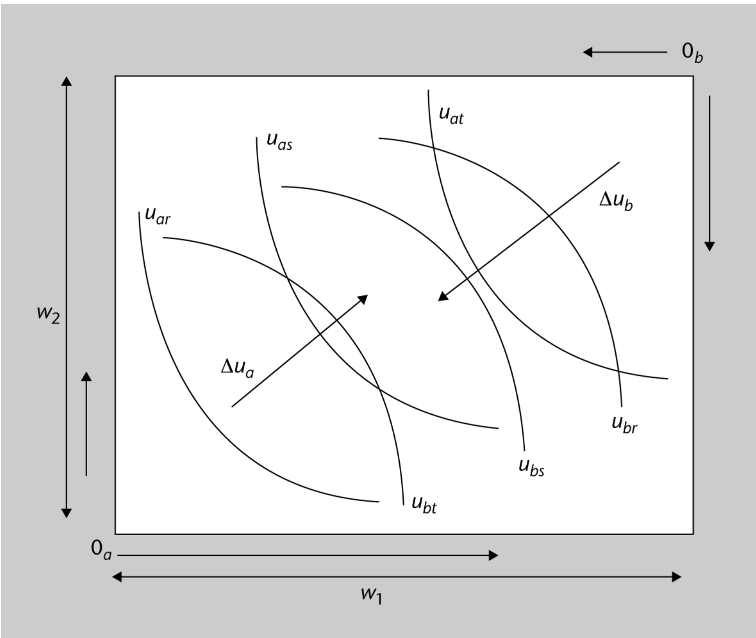
Gràfic 8. Assignacions factibles i caixa d'Edgeworth



La longitud dels eixos horitzontals mostra la quantitat total del bé 1 que hi ha a l'economia i la dels eixos verticals representa la dotació que hi ha del bé 2. Per tant, els orígens de coordenades expressen assignacions factibles en què un consumidor consumeix la totalitat d'ambdós béns i l'altre no consumeix res.

El consumidor h, per $h = a, b$, té preferències definides sobre cistells d'ambdós béns, $\boldsymbol{x}_h = (x_{1h}, x_{2h})$, que se suposaran regulars, monòtones i convexes (en sentit estricte per les dues característiques) definides per la funció d'utilitat $u_h(\boldsymbol{x}_h)$ i representades gràficament per un conjunt de corbes d'indiferència. Les corbes d'indiferència de a més allunyades de l'origen de coordenades 0_a mostren nivells d'utilitat més alts per a a en incorporar quantitats més grans de béns per a aquest agent. De la mateixa manera, corbes d'indiferència de b més allunyades de l'origen de coordenades 0_b mostren nivells d'utilitat més alts per a l'individu b en incloure quantitats més grans de béns per a b.

Gràfic 9. Preferències dels dos individus a la caixa d'Edgeworth



Ara podem interpretar l'eficiència paretiana en el context d'una economia d'intercanvi. En una economia amb dos béns, disponibles en les quantitats w_1 i w_2, i dos agents, a i b, amb preferències $u_a(\boldsymbol{x}_a)$ i $u_b(\boldsymbol{x}_b)$, una assignació $\boldsymbol{x}^e = (x^e{}_{1a}, x^e{}_{2a}, x^e{}_{1b}, x^e{}_{2b})$ serà òptima en el sentit de Pareto si no hi ha cap altra assignació $\boldsymbol{x}' = (x'_{1a}, x'_{2a}, x'_{1b}, x'_{2b})$ que compleixi el següent:

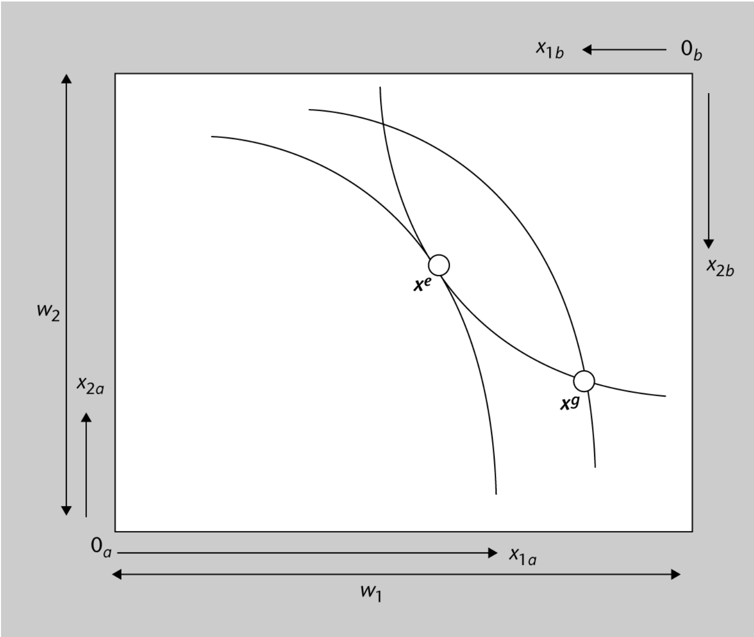
El superíndex *e* denota eficient.

$$u_a(x'_{1a}, x'_{2a}) \geq u_a(x^e{}_{1a}, x^e{}_{2a}) \qquad u_b(x'_{1b}, x'_{2b}) \geq u_b(x^e{}_{1b}, x^e{}_{2b}).$$

En aquest cas, almenys una de les desigualtats és estricta.

En paraules, una assignació $\boldsymbol{x}^e$ serà eficient en el sentit de Pareto si no hi ha cap altra assignació $\boldsymbol{x}'$ en què cap agent empitjori i, almenys un dels agents millori.

Gràfic 10. Assignació eficient i assignació ineficient



Així, en el gràfic 10, l'assignació $\boldsymbol{x}^g$ en què es tallen les corbes d'indiferència dels individus no es eficient, ja que les assignacions a la lent que defineixen les corbes d'indiferència donen més utilitat a ambdós agents o a un dels agents sense baixar la de l'altre. Per contra, l'assignació $\boldsymbol{x}^e$, per la qual les corbes d'indiferència són tangents, si és eficient, qualsevol altre punt millora el benestar d'un individu però empitjora el de l'altre. És a dir, partint d'aquest punt, si es reassignen les quantitats de béns entre els dos agents per tal d'augmentar la utilitat d'un d'ells, per força baixa la de l'altre.

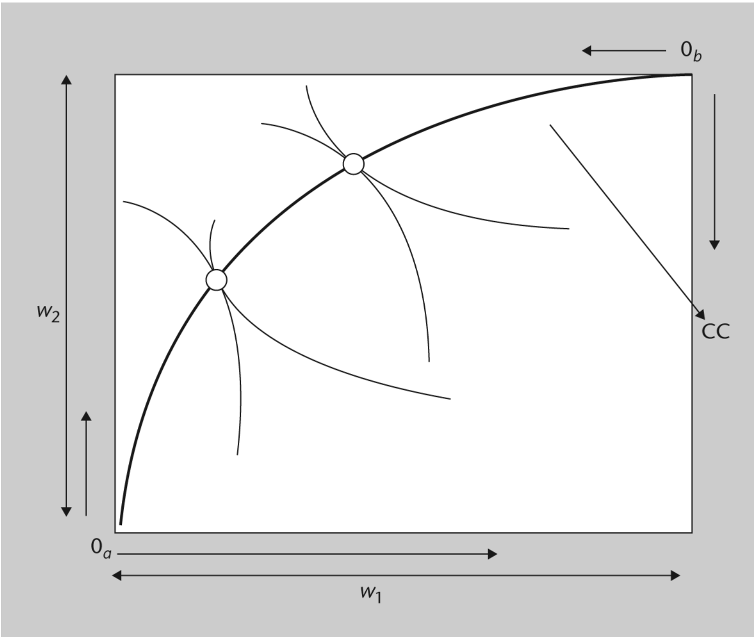
Qualsevol assignació eficient $\boldsymbol{x}^e$ maximitza la utilitat d'una persona i manté fix el nivell d'utilitat de l'altra, subjecte a les restriccions de factibilitat o viabilitat, que compleixen tots els punts de la caixa d'Edgeworth:

$$\underset{x_{1a},\, x_{2a}}{\text{Màx.}}\ u_a(\boldsymbol{x}_a) \qquad \text{subjecte a } u_b(\boldsymbol{x}_b) \geq u^e{}_b;\ \mathbf{x}_a + \mathbf{x}_b = \mathbf{w}_a + \mathbf{w}_b.$$

En aquest cas, $u^e{}_b$ és el nivell d'utilitat prefixat de b. Notem que, donada una corba d'indiferència de b, la corba d'indiferència de a més allunyada de l'origen 0_a i que, per tant, maximitza la utilitat d'aquest individu, serà tangent a la corba d'indiferència predeterminada de b. Si es varia el nivell d'utilitat prefixat de b, es genera tot el conjunt d'assignacions eficients.

El conjunt d'òptims de Pareto o d'assignacions eficients d'una economia d'intercanvi es coneix com a *corba de contracte* o *conjunt de Pareto*. És la corba CC del gràfic 11. La corba de contracte té la propietat geomètrica que les corbes d'indiferència d'ambdós agents són tangents. És a dir, és el conjunt de punts de la caixa d'Edgeworth que compleixen $RMS_a = RMS_b$. La forma de la corba de contracte depèn de les funcions d'utilitat dels agents: pot ser lineal, còncava, etc. D'altra banda, les dimensions de la caixa influeixen en el pendent de la CC en cada punt.

Gràfic 11. Corba de contracte o conjunt de Pareto



La corba de contracte evidencia una funció entre x_{2a} i x_{1a}, que expressem com a $x_{2a} = f_C(x_{1a})$. Inclou cistells de a que pertanyen a assignacions factibles ($0 \leq x_{1a} \leq w_1$) i pels quals les corbes d'indiferència dels dos agents són tangents ($RMS_a = RMS_b$). Les quantitats corresponents de b s'obtenen per diferència respecte de les quantitats totals de cada bé, $(w_1 - x_{1a}, w_2 - x_{2a})$. L'expressió analítica de la corba de contracte és, per tant, la següent:

$$x_{2a} = f_C(x_{1a}) \text{ per } 0 \leq x_{1a} \leq w_1.$$

Exemple

Si en una economia de canvi pur amb dos béns, 1 i 2, dels quals hi ha disponibles les quantitats $w_1 = 40$, $w_2 = 20$, i dos agents, a i b, que tenen funcions d'utilitat $u_h = x_{1h}\,x_{2h}$, $h = a, b$.

El conjunt d'assignacions factibles el determinen les dues equacions següents:

$$x_{1a} + x_{1b} = 40.$$
$$x_{2a} + x_{2b} = 20.$$
$$x_{ih} \geq 0,\ i = 1, 2,\ h = a, b.$$

És a dir, per a cada bé, el total consumit ha de ser igual a la dotació total. D'altra banda, cap agent pot consumir una quantitat negativa de cap bé.

La caixa d'Edgeworth és un rectangle amb costats de longitud 40 i 20.

La corba de contracte (CC) és el conjunt d'assignacions eficients d'una economia d'intercanvi que verifiquen el següent:

1) $RMS_a = RMS_b$, que per a aquestes funcions d'utilitat val $\frac{x_{2a}}{x_{1a}} = \frac{x_{2b}}{x_{1b}}$.

2) Tots els punts de la CC són a la caixa:

$$x_{1a} = w_1 - x_{1b}.$$
$$x_{2a} = w_2 - x_{2b}.$$

De 1) i 2):

$$\frac{x_{2a}}{x_{1a}} = \frac{w_2 - x_{2b}}{w_1 - x_{1b}}.$$

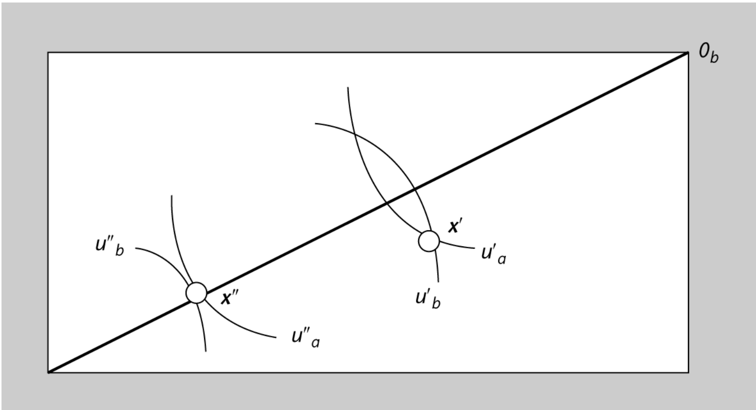
És a dir, l'expressió de la CC, definida per l'origen de coordenades de l'agent a, és la següent:

$$x_{2a} = (w_2/w_1)\, x_{1a} \text{ per } 0 \le x_{1a} \le w_1.$$

o com $w_1 = 40$, $w_2 = 20$, $x_{2a} = (1/2)\, x_{1a}$ per $0 \le x_{1a} \le w_1$.

És una recta de pendent 1/2 que passa per l'origen de coordenades.

Gràfic 12. Corba de contracte, eficiència i equitat



L'assignació $\boldsymbol{x}'$ per la qual $\boldsymbol{x}'_a = (24, 8)$ i $\boldsymbol{x}'_b = (16, 12)$ és factible, ja que les quantitats consumides de cada bé sumen les disponibilitats totals de l'economia. Tanmateix, no és eficient, perquè no verifica l'equació de la corba de contracte, $x_{2a}/x_{1a} = 1/3 \neq 1/2$, cosa que assenyala que per a aquesta assignació es tallen les corbes d'indiferència dels agents.

D'altra banda, l'assignació $\boldsymbol{x}''$ amb components $\boldsymbol{x}''_a = (8, 4)$ i $\boldsymbol{x}''_b = (32, 16)$ és factible, ja que les quantitats consumides de cada bé sumen la totalitat disponible. Igualment, és òptima en el sentit de Pareto perquè compleix l'equació de la corba de contracte, $x_{2a}/x_{1a} = 1/2$, cosa que mostra que les corbes d'indiferència dels agents són tangents en aquesta assignació.

Tot i això, $\boldsymbol{x}'$ és força més equitativa que $\boldsymbol{x}''$. Eficiència i equitat són vessants diferents de la problemàtica del benestar social.

2.2. Els teoremes fonamentals de l'economia del benestar

En una economia competitiva d'intercanvi, cada individu comença amb una dotació inicial que intercanvia segons les seves preferències. L'anàlisi de benestar permet avaluar l'eficiència del mecanisme competitiu. En altres termes, respondrà a la qüestió de si l'equilibri walrasià resultant és òptim de Pareto.

També ens permetrà resoldre la pregunta contrària, si donada una assignació eficient en el sentit Pareto, hi ha un preu relatiu (un conjunt de preus en el cas general de n béns) pel qual aquesta assignació és un equilibri walrasià. Examinarem aquestes dues preguntes mitjançant dos agents, a i b, i dos productes, 1 i 2.

Primer teorema fonamental de l'economia del benestar: Si el parell $(\boldsymbol{x}°, p°)$, que consisteix en una assignació $\boldsymbol{x}°$ i un preu relatiu $p°$, és un equilibri walrasià, aleshores l'assignació $\boldsymbol{x}°$ és eficient en sentit de Pareto.

Per tal de comprovar el teorema, notem en començar que l'equilibri walrasià d'una economia d'intercanvi es pot representar a la caixa d'Edgeworth. És a dir, es pot mostrar gràficament el preu relatiu d'equilibri $p°$ i l'assignació d'equilibri competitiu $\boldsymbol{x}°$.

Així, si $(\boldsymbol{x}°, p°)$, amb $\boldsymbol{x}° = (\boldsymbol{x}°_a, \boldsymbol{x}°_b)$, és un equilibri general competitiu, $\boldsymbol{x}°_h$ maximitza la utilitat del consumidor h. $p°$ es considera donat i aquest preu buida els mercats. Per tant, l'assignació final $\boldsymbol{x}°$ és factible, és un punt de la caixa d'Edgeworth. El preu relatiu d'equilibri $p°$ defineix el pendent, en valor absolut, de les rectes de balanç dels agents. Com que la caixa d'Edgerworth incorpora informació dels dos agents, $p°$ és un sola recta pressupostària, que passa per la dotació $\mathbf{w}$ i per l'assignació d'equilibri competitiu $\boldsymbol{x}°$, en complir totes dues assignacions la restricció pressupostària de cada agent.

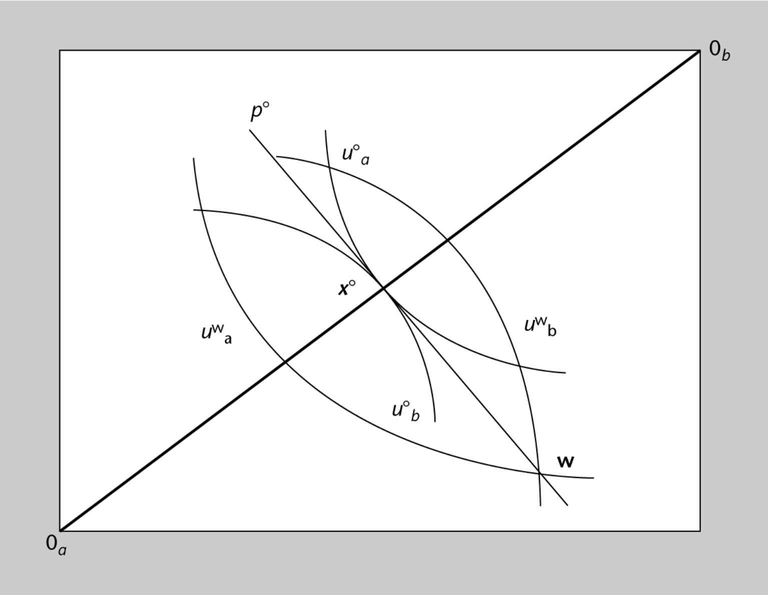
A més, com que $\boldsymbol{x}°_h$ maximitza la utilitat del consumidor h donat $p°$, el cistell $\boldsymbol{x}°_h$ és un punt de tangència de la corba d'indiferència més allunyada i de la recta de balanç de pendent, en valor absolut, $p°$, $\text{RMS}_h(\boldsymbol{x}°_h) = p°$. En conseqüència, com que per a l'assignació $\boldsymbol{x}°$ una corba d'indiferència de cada agent és tangent a la recta de balanç de pendent $p°$, les corbes d'indiferència dels dos agents són tangents en $\boldsymbol{x}°$:

$$\text{RMS}_a(\boldsymbol{x}°_a) = p° = \text{RMS}_b(\boldsymbol{x}°_b).$$

Finalment, com que en l'assignació $\boldsymbol{x}°$ els agents maximitzen les seves utilitats respectives, ambdós agents han d'obtenir més utilitat (corbes d'indiferència més altes) que en la dotació inicial. Aleshores, l'assignació d'equilibri competitiu és un punt de la corba de contracte, entre les corbes d'indiferència dels agents que passen per la dotació inicial.

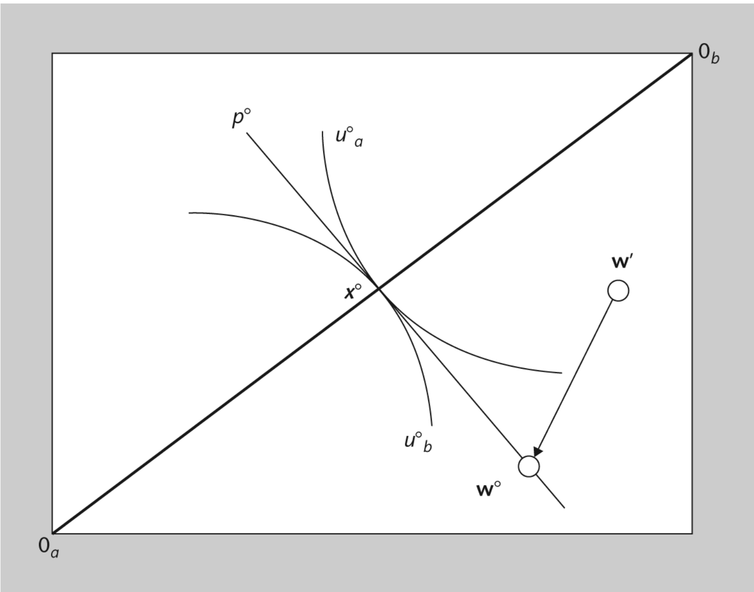
Aquest teorema també s'anomena *teorema de la mà invisible d'Adam Smith*, ja que concorda amb la seva observació que en una economia competitiva, en què les decisions dels agents són independents, hi ha una mà invisible que guia la societat i fa que cadascú, perseguint el propi interès, contribueixi, sense proposar-s'ho, al benestar comú.

Gràfic 13. Primer teorema fonamental de l'economia del benestar



Segon teorema fonamental de l'economia del benestar: Si els agents tenen preferències convexes, hi haurà un preu relatiu (un conjunt de preus en cas de *n* béns) $p°$ pel qual una assignació eficient serà una assignació d'equilibri per a unes dotacions apropiades.

Gràfic 14. Segon teorema fonamental de l'economia del benestar

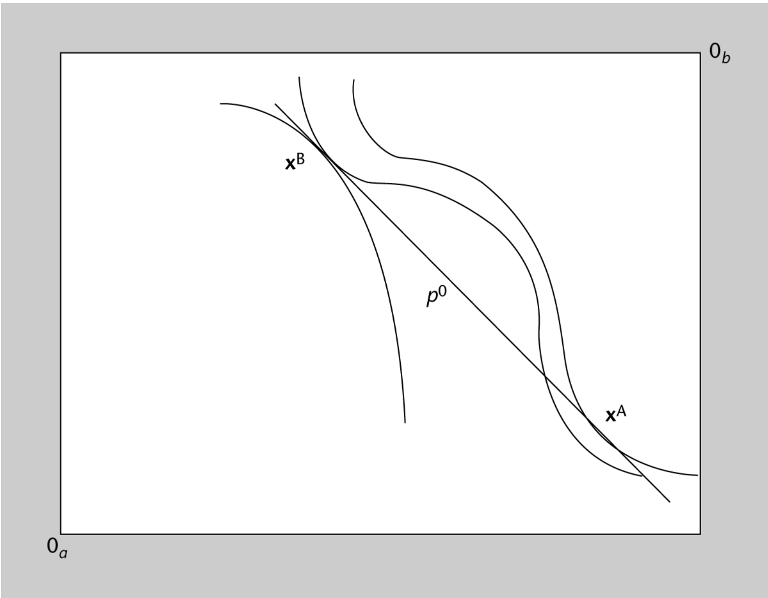


Si $\boldsymbol{x}°$ és una assignació òptima de Pareto qualsevol, $\text{RMS}_a(\boldsymbol{x}°_a) = \text{RMS}_b(\boldsymbol{x}°_b)$, de manera que les corbes d'indiferència tenen un pendent en l'assignació $\boldsymbol{x}°$ que defineix un preu relatiu $p°$. Qualsevol assignació $\mathbf{w}°$ sobre la recta pressupostària de pendent $p°$ conduiria a un equilibri competitiu a $\boldsymbol{x}°$.

El segon teorema fonamental de l'economia del benestar estableix que eficiència i distribució es poden separar. Si $\mathbf{w}'$ mostra la dotació dels agents i $\boldsymbol{x}°$ és una assignació eficient que es considera desitjable, per exemple, per consideracions d'equitat, aquesta assignació es pot aconseguir redistribuint la riquesa inicial a qualsevol assignació sobre la recta de balanç $p°$ i deixant que el sistema de mercats competitius actuï.

Si les preferències no són convexes, el teorema deixa de complir-se, ja que encara que hi ha una corba d'indiferència de cada agent amb el mateix pendent que defineix un preu relatiu $p°$, aquest pendent comú no s'obté en la mateixa assignació, $RMS_a(\mathbf{x}^{\mathbf{B}}_a) = RMS_b(\mathbf{x}^{\mathbf{A}}_b) = p°$. Aleshores, l'agent a intercanviaria les quantitats corresponents a l'assignació $\mathbf{x}^{\mathbf{A}}$, que és la preferida de a, i l'agent b intercanviaria les quantitats corresponents a $\mathbf{x}^{\mathbf{B}}$, de manera que els mercats no es buidarien i no hi hauria equilibri.

Gràfic 15. El segon teorema en cas de preferències no convexes



3. Risc, eficiència i equilibri general

L'anàlisi d'eficiència i equilibri general es pot aplicar a contextos en què hi ha incertesa, amb algunes particularitats. Per tal de representar la incertesa, s'utilitza el concepte d'estats del món o de la naturalesa. Un estat del món es caracteritza per la realització excloent d'una incertesa. Per exemple, l'estat del món 1 pot consistir en el fet que demà plogui i l'estat del món 2, en el fet que demà no plogui. Igualment, l'estat 1 podria consistir a tenir un accident demà i l'estat 2 podria consistir a no tenir-ne cap. Cada estat del món s'associa a una probabilitat, que és la creença de l'individu afectat per la incertesa que esdevingui l'estat del món considerat. D'altra banda, els béns són contingents o condicionals a l'estat que acabi esdevenint. En l'estat 2, en què no hi ha cap accident, la riquesa és diferent que en l'estat 1, en què sí que es pateix l'accident. Un equilibri general competitiu amb mercaderies contingents s'anomena *equilibri Arrow-Debreu*.

Considerarem dos estats del món, 1 i 2, exhaustius i mútuament excloents, com els que hem esmentat, és a dir, tenir un accident o no, que plogui o no, etc. El grau de creença que atorga l'agent h a l'estat i = 1, 2, el representarem mitjançant la probabilitat $\pi_{ih} \geq 0$, amb $\pi_{1h} + \pi_{2h} = 1$.

La probabilitat de ploure més la de no ploure ha de ser 1, ja que o passa una cosa o passa l'altra.

Suposarem que l'agent h té en compte un únic bé físic, $\mathbf{x}_h$, el seu consum o la seva riquesa (ens limitarem a models estàtics en què la riquesa es consumeix totalment) i, per tant, hi haurà tants béns contingents com estats del món, x_{ih}, i = 1, 2, amb $x_i \in \Re_+$, riquesa en l'estat 1 i riquesa en l'estat 2.

Les decisions s'han d'anticipar a l'efectuació de la incertesa i, per tant, les preferències han de captar aquesta incertesa. Són preferències *ex ante*, definides sobre alternatives aleatòries. Una alternativa aleatòria de l'agent h mostra la seva riquesa en diversos estats del món i les probabilitats corresponents, $\mathbf{x}_h = (x_{1h}, x_{2h}; \pi_{1h}, \pi_{2h})$. Per tal de modelar el comportament racional davant de situacions incertes, farem servir la utilitat esperada. La utilitat esperada per a h de l'alternativa aleatòria x_h és el valor esperat de la utilitat dels diferents resultats:

$$E_{\pi h}\, u_h(\mathbf{x}_h) = \pi_{1h}\, u_h(x_{1h}) + \pi_{2h}\, u_h(x_{2h}).$$

En aquest cas, $u_h(x_{ih})$ és la utilitat, coneguda com a *von Neumann i Morgenstern* (vNM) o *Bernouilli*, que obté l'individu h en l'estat del món i. D'altra banda, $E_{\pi h}$ és l'operador valor esperat segons les probabilitats que atorga h. L'expressió mostra que el decisor valora una alternativa aleatòria. Per això determina la utilitat de vNM dels diferents resultats que la componen, pondera cada utilitat per la probabilitat corresponent i suma les utilitats de vNM ponderades per a tots els resultats possibles.

3.1. Actituds davant el risc

La disposició a córrer riscos varia d'una persona a l'altra. S'acostuma a diferenciar entre tres grups d'individus: els que tenen aversió al risc, els neutrals i els amants del risc. La utilitat esperada permet captar els diferents tipus d'actituds envers del risc dels individus. Considerem l'alternativa aleatòria $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2; \pi, 1 - \pi)$, que té un valor esperat:

> **Nota**
>
> En aquest apartat (i en el següent) ens referirem a un agent genèric i, per a simplificar la notació, no inclourem el símbol *h* d'agent.

$$E_\pi(\boldsymbol{x}) = \pi\, x_1 + (1 - \pi)\, x_2.$$

La utilitat esperada d'aquesta alternativa és la següent:

$$E_\pi\, u(\boldsymbol{x}) = \pi\, u(x_1) + (1 - \pi)\, u(x_2).$$

Per a una persona que té aversió al risc, la utilitat del valor esperat és més gran que la utilitat esperada, és a dir, davant dues alternatives, una de certa i una altra d'aleatòria amb dos (o més) resultats i unes probabilitats π, totes dues amb igual valor esperat, una persona amb aversió al risc verifica el següent:

$$u[E_\pi(\boldsymbol{x})] > E_\pi\, u(\boldsymbol{x}).$$

Aquesta desigualtat es compleix si la funció d'utilitat von Neumann i Morgenstern (vNM) $u(x_i)$ és còncava (estrictament), per exemple, $u(x_i) = x_i^{1/2}$.

Contràriament, els amants del risc o propensos al risc prefereixen la renda incerta a una renda segura d'igual valor esperat. Si la funció d'utilitat de vNM u és convexa estrictament, per exemple, $u(x_i) = x_i^2$, el decisor és propens al risc.

En la posició intermèdia hi ha les persones neutrals al risc, que són indiferents a una renda segura o a una renda incerta amb igual valor esperat. Si u és lineal, per exemple, $u(x_i) = x_i$, el decisor és neutral al risc, ja que no té en compte la variabilitat dels resultats.

Per exemple, suposem que a un agent amb una riquesa de 17 (en milers d'euros) se li proposa un joc d'atzar amb què pot guanyar 8 (milers d'euros) si, en llançar una moneda enlaire, surt cara o perdre la mateixa quantitat si surt creu. Aquesta loteria és un joc just, ja que té un valor esperat de 0. El valor esperat de la riquesa és igual a 17, la riquesa si no es juga, és la següent:

$$E_\pi(\boldsymbol{x}) = (1/2)\, 9 + (1/2)\, 25 = 17.$$

Si l'agent té una funció d'utilitat de vNM estrictament còncava, com ara $u(x_i) = x_i^{1/2}$, prefereix no jugar, la riquesa present certa serà la següent:

$$u[E_\pi(\boldsymbol{x})] = \sqrt{17} > E_\pi\, u(\boldsymbol{x}) = (1/2)\, 3 + (1/2)\, 5 = 4.$$

Si l'agent té una funció d'utilitat de vNM estrictament convexa, com $u(x_i) = x_i^2$, prefereix jugar, l'alternativa aleatòria és la següent:

$$u[E_\pi(\boldsymbol{x})] = 17^2 = 289 < E_\pi\, u(\boldsymbol{x}) = (1/2)\, 81 + (1/2)\, 625 = 353.$$

Si l'agent té una funció d'utilitat de vNM lineal, $u(x_i) = x_i$, és indiferent a jugar o no, a l'alternativa aleatòria i a la riquesa certa. Ocorre el següent:

$$u[E_\pi(\boldsymbol{x})] = 17 = E_\pi\, u(\boldsymbol{x}) = (1/2)\, 9 + (1/2)\, 25 = 17.$$

Per a una persona amb aversió al risc, $u[E_\pi(\boldsymbol{x})] > E_\pi\, u(\boldsymbol{x})$, la utilitat del valor esperat és més gran que la utilitat esperada.

Per a un amant del risc, $u[E_\pi(\boldsymbol{x})] < E_\pi u(\boldsymbol{x})$, la utilitat del valor esperat és més petita que la utilitat esperada.

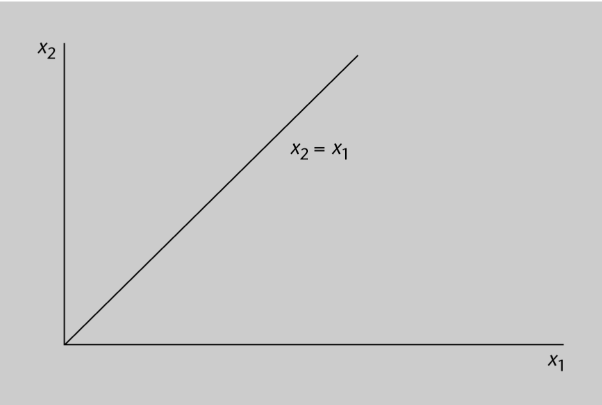
Per a una persona neutral al risc, $u[E_\pi(\boldsymbol{x})] = E_\pi\, u(\boldsymbol{x})$, la utilitat del valor esperat és igual que la utilitat esperada.

3.2. Preferències en l'espai de consums contingents

Les preferències dels agents sobre consums contingents, essent consum contingent el consum condicionat al fet que s'esdevingui una incertesa determinada, si només hi ha dos estats del món, 1 i 2 amb consums, x_1 i x_2, respectivament, es poden representar gràficament mitjançant l'aparell de corbes d'indiferència.

En l'espai $\Re^2_+$ de consums contingents, una línia de pendent 1 que surt de l'origen mostra tots els parells (x_1, x_2) que verifiquen $x_1 = x_2$, és a dir, certesa en el consum. És la línia de certesa.

Gràfic 16. Conjunt de consums individuals contingents



Com és habitual, suposarem que les preferències de l'agent s'adeqüen a la utilitat esperada, $E_\pi\, u(\boldsymbol{x}) = \pi_1\, u(x_1) + \pi_2\, u(x_2)$ que vol més consum a menys en qualsevol estat, $u'(x_i) > 0$, i té aversió al risc, $u''(x_i) < 0$.

Una corba d'indiferència mostrarà totes les combinacions de consums contingents que donen una utilitat esperada donada i entre els quals el consumidor és indiferent.

$$E_\pi\, u(\boldsymbol{x}) = \pi_1\, u(x_1) + \pi_2\, u(x_2) = Eu.$$

Com que les utilitats marginals són positives, les corbes d'indiferència tenen pendent negatiu. El pendent en qualsevol punt $\boldsymbol{x}°$, canviat de signe, és la relació marginal de substitució o taxa marginal de substitució entre el consum en ambdós estats en $\boldsymbol{x}°$: el ritme en què l'individu està disposat a substituir consum en l'estat 1 en lloc de consum en l'estat 2 mantenint la utilitat esperada constant:

$$-\frac{dx_2}{dx_1}(x) = \text{RMS}(x) = \frac{\pi_1 u'(x_1)}{\pi_2 u'(x_2)}.$$

Per tal de saber si la corba d'indiferència serà còncava o convexa, prendrem com a referència el cas que l'individu fos neutral al risc. Aleshores, la seva utilitat de vNM seria lineal i la utilitat esperada coincidiria amb el valor esperat:

$$E_\pi(\boldsymbol{x}) = \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 = E\mathbf{x}.$$

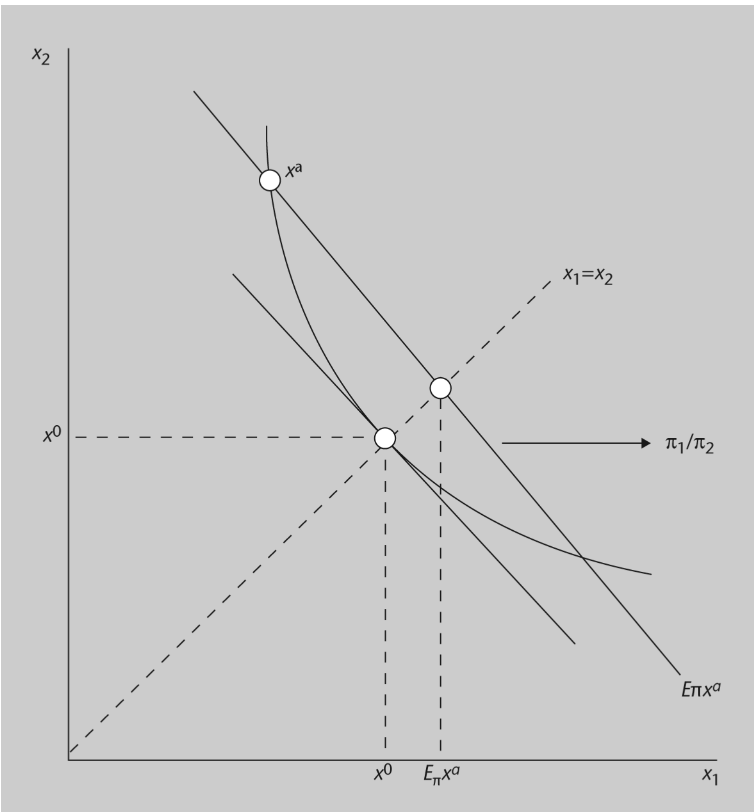
D'aquesta manera, com que les utilitat marginals són iguals a 1, l'RMS és constant i igual al quocient de probabilitats.

$$-\frac{dx_2}{dx_1}(x) = \text{RMS}(x) = \frac{\pi_1}{\pi_2}.$$

És a dir, una corba d'indiferència en l'espai de consum contingent per a una persona neutral al risc és lineal. Per tant, la corba d'indiferència per a una persona amb aversió al risc ha de ser convexa, ja que és indiferent a una alternativa aleatòria $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}}$ o a una de certa x° amb menys valor esperat. Aquesta afirmació es pot comprovar si es torna a diferenciar dx_2/dx_1 de x_1. S'observa que $u''(x_i) < 0$ per a una persona que té aversió al risc:

$$-\frac{d^2x_2}{dx_1^2}(x) = -\frac{d\text{RMS}(x)}{dx_1} > 0.$$

Gràfic 17. Aversió al risc i prima de risc



La quantitat $x°$ és l'equivalent cert de l'alternativa aleatòria x^a, ja que dóna, amb certesa, una utilitat igual a la utilitat esperada de l'alternativa aleatòria:

$$u(x°) = E_\pi\, u(\boldsymbol{x^a}).$$

Una persona que té aversió al risc prefereix una renda segura a una renda arriscada amb igual valor esperat:

$$u(E_\pi\, \mathbf{x^a}) > E_\pi\, u(\boldsymbol{x^a}).$$

La diferència $k = E_\pi \boldsymbol{x^a} - x°$ és la quantitat màxima per la qual l'agent acceptaria reduir el valor esperat obtingut amb certesa $E_\pi \boldsymbol{x^a}$ per tal d'evitar l'alternativa aleatòria $\boldsymbol{x^a}$, ja que és la quantitat que faria indiferents totes dues alternatives:

$$u(E_\pi\, \mathbf{x^a} - k) = E_\pi\, u(\mathbf{x}^{\boldsymbol{a}}).$$

La quantitat k és una mesura del grau d'aversió al risc de l'agent i es coneix com a *prima de risc* (concepte diferent al de *prima d'assegurances*).

Exemple

Un agent té una riquesa aleatòria $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) = (16, 4)$ que depèn de quin dels dos estats del món, 1 i 2, amb probabilitats respectives $\pi = 1/2$ i $1 - \pi = 1/2$, succeeix. El valor esperat de la riquesa val, per tant, el següent:

$$E_p\, \boldsymbol{x} = (1/2)\ 16 + (1/2)\ 4 = 8 + 2 = 10.$$

Si les preferències de l'agent s'adeqüen a la utilitat esperada amb funció d'utilitat von Neumann i Morgenstern $u(x_i) = x_i^{1/2}$, la utilitat esperada de a és la següent:

$$E_p\, u(\boldsymbol{x}) = \pi\, x_1^{1/2} + (1 - \pi)\, x_2^{1/2} = (1/2)\ 4 + (1/2)\ 2 = 3.$$

En conseqüència, k, la prima de risc de a, la quantitat màxima per la qual l'agent accepta reduir el valor esperat de la seva riquesa aleatòria per tal d'evitar el risc, val el següent:

$$E_p\, u(\boldsymbol{x}) = u(E_p\, \boldsymbol{x} - k) \rightarrow 3 = (10 - k)^{1/2} \rightarrow k = 10 - 9 = 1.$$

3.3. Assignació eficient del risc en una economia d'intercanvi

Considerem una economia d'intercanvi amb dos agents, dos pagesos que cultiven productes diferents. L'agent a (Abel) té cultius que necessiten poca aigua i el b (Bernat) es dedica a cultivar béns que en necessiten força. Si plou poc, la riquesa de a serà alta i la de b baixa. Si plou molt, la distribució de la riquesa canviarà. Només hi ha dos estats del món, 1, plou poc, i 2, plou molt.

Atesa l'asimetria de la situació, en lloc d'assegurar les collites amb una companyia d'assegurances, els pagesos decideixen assegurar-se entre ells. Amb aquesta finalitat, intercanvien riquesa contingent. Hi ha molts pagesos idèntics a cadascun dels descrits, de manera que hi ha mercats competitius en què intercanvien la riquesa contingent.

Es tracta, per tant, d'una economia d'intercanvi en què cada agent té una riquesa inicial incerta que depèn de l'estat del món que succeeix, $w_a = (w_{1a}, w_{2a})$,

$w_b = (w_{1b}, w_{2b})$. Cada individu h té definides preferències per al consum (o riquesa final) en ambdós estats, 1 i 2, segons la utilitat esperada:

$$E_{ph}\, u_h(\mathbf{x}_h) = \pi_h\, u_h(x_{1h}) + (1 - \pi_h)\, u_h(x_{2h}) \quad x_{ih} \geq 0 \quad i = 1, 2 \quad h = a, b.$$

En aquesta expressió, $\pi_h \geq 0$ és la probabilitat o grau de creença que assigna l'agent h al fet que succeeixi l'estat del món 1.

Analitzar l'assignació eficient de riscos en aquesta economia equival a determinar el conjunt de consums contingents eficients. Com que es tracta d'una economia d'intercanvi, l'anàlisi de l'assignació eficient de riscos utilitzarà com a eina gràfica la caixa d'Edgeworth. Mostrarem que la forma de la corba de contracte en l'espai de consums contingents dependrà de la distribució de la riquesa en ambdós estats i de les probabilitats que els agents assignin als diferents estats.

Només es pot garantir l'assegurança completa (cada agent se situa sobre la línia de certesa) si els agents tenen aversió al risc o un agent té aversió al risc i l'altre hi és neutral, no hi ha risc social i els agents assignen les mateixes probabilitats als diferents estats.

1) Absència de risc social i probabilitats subjectives iguals

Suposarem que la distribució de la riquesa inicial contingent a l'estat del món 2 és l'oposada de la distribució de la riquesa condicional a l'estat 1, $w_{1a} = w_{2b}$, $w_{2a} = w_{1b}$. Per tal de simplificar els gràfics, suposarem, en particular, que $\mathbf{w}_a = (1, 0)$, $\mathbf{w}_b = (0, 1)$. Aleshores, la riquesa agregada val 1 independentment de l'estat del món que succeeixi:

$$\mathbf{w}_a + \mathbf{w}_b = (1, 1).$$

L'estat del món només determina quin consumidor obté la riquesa inicial positiva, la dotació igual a 1, del bé de consum. El risc agregat, el risc per al conjunt de consumidors, és nul, $w_1 = w_2 = 1$.

Si tots dos consumidors tenen les mateixes probabilitats subjectives, és a dir, tots dos creuen que s'esdevindrà l'estat del món 1, $\pi_a = \pi_b = \pi$, i, per tant, l'estat 2, l'RMS_h del consumidor h per al cistell x es podrà escriure de la manera següent:

$$\text{RMS}_h(\text{x}_h) = \frac{\pi u'_h(x_{1h})}{(1-\pi)u'_h(x_{2h})}.$$

Sobre la corba de contracte, les corbes d'indiferència dels agents són tangents, $\text{RMS}_a(\mathbf{x}_a) = \text{RMS}_b(\mathbf{x}_b)$. D'aquesta manera, per tal de simplificar, s'escriurà de la manera següent:

$$\frac{u_a'(x_{1a})}{u_a'(x_{2a})} = \frac{u_b'(1 - x_{1a})}{u_b'(1 - x_{2a})}.$$

Aquesta igualtat es compleix sobre la línia de certesa, $x_{2a} = x_{1a}$.

Per tant, la corba de contracte (CC) té l'expressió següent:

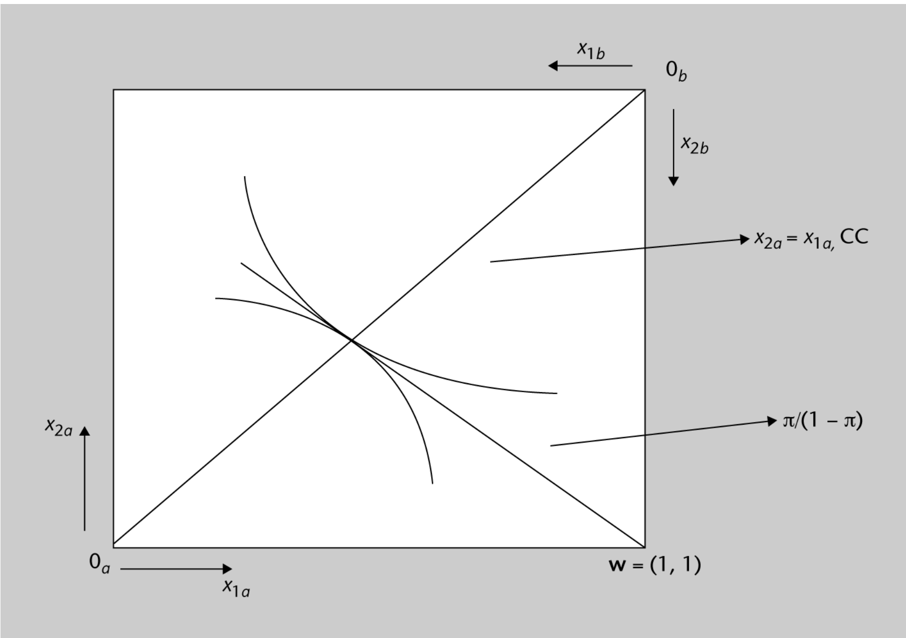
$$x_{2a} = x_{1a} \qquad \text{per } 0 \leq x_{1a} \leq 1.$$

D'altra banda, el pendent, en valor absolut, d'una corba d'indiferència sobre la línia de certesa val el següent:

$$\text{RMS}_h(\text{x}_\text{h}) = \frac{\pi u_h'(x_{1h})}{(1 - \pi) u_h'(x_{1h})} = \frac{\pi}{(1 - \pi)}.$$

D'acord amb el primer teorema fonamental de l'economia del benestar, seria el preu relatiu d'equilibri competitiu del consum en l'estat 1 envers el consum en l'estat 2, que suposem que és numerari, com de costum, $p° = \pi/(1 - \pi)$.

Gràfic 18. Equilibri, absència de risc social i iguals probabilitats subjectives



L'assignació $x°$ d'equilibri Arrow-Debreu s'aconsegueix mitjançant la substitució del preu d'equilibri en la restricció pressupostària de *a*:

$$px_{1a} + x_{2a} = pw_{1a} + w_{2a} \rightarrow p°x_{1a} + x_{2a} = p°.$$

Tenint en compte que l'assignació s'ha de situar sobre la corba de contracte, $x_{2a} = x_{1a}$, s'obté el següent:

$$x°_{1a} = x°_{2a} = p°/(1 + p°).$$

Per diferència envers de la dotació total:

$$x°_{1b} = x°_{2b} = 1/(1 + p°).$$

Per exemple, si $\pi = 0{,}8$, tenim que $p° = 4$. Aleshores, ocorre el següent:

$$x°_{1a} = x°_{2a} = 4/5 \qquad x°_{1b} = x°_{2b} = 1/5.$$

Com que l'estat 1 és més probable, el preu relatiu és superior a 1 (una unitat de consum contingent a l'estat 1 val més que una unitat de consum contingent a l'estat 2), de manera que l'agent amb una dotació alta en l'estat 1, més probable, té una dotació més valuosa i acaba consumint més.

La corba de contracte continuaria coincidint amb la línia de certesa encara que l'agent *b*, en lloc de tenir aversió al risc, hi fos neutral, amb $u_b(x_{ib}) = x_{ib}$. Observem que el fet que les corbes d'indiferència de *b* ara siguin lineals, amb pendent en valor absolut igual al quocient de probabilitats, no altera els resultats.

2) Absència de risc agregat i probabilitats subjectives diferents

Si les creences que esdevingui l'estat del món 1 són diferents entre consumidors, això afectarà la corba de contracte. Per tal de comprovar-ho, suposem, per exemple, que la probabilitat que *a* atorga a l'estat 1 és més petita que la que li atorga *b*, $\pi_a < \pi_b$. És a dir, seria el següent:

$$\frac{\pi_a}{1-\pi_a} < \frac{\pi_b}{1-\pi_b} \, .$$

Tenint en compte aquesta desigualtat en l'equació de la corba de contracte, en què les corbes d'indiferència dels individus són tangents, ocorre el següent:

$$\frac{\pi_a u'_a(x_{1a})}{(1-\pi_a)u'(x_{2a})} = \frac{\pi_b u'_b(w_1 - x_{1a})}{(1-\pi_b)u'_b(w_2 - x_{2a})} \, .$$

Obtenim el següent:

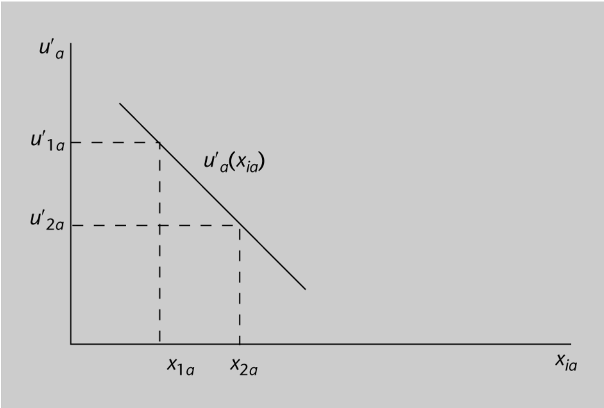
$$\frac{u'_a(x_{1a})}{u'_a(x_{2a})} > \frac{u'_b(1-x_{1a})}{u'_b(1-x_{2a})} \, .$$

Atès que els agents tenen aversió al risc, $u''_h < 0$, la desigualtat precedent implica el següent:

$$x_{1a} < x_{2a}.$$

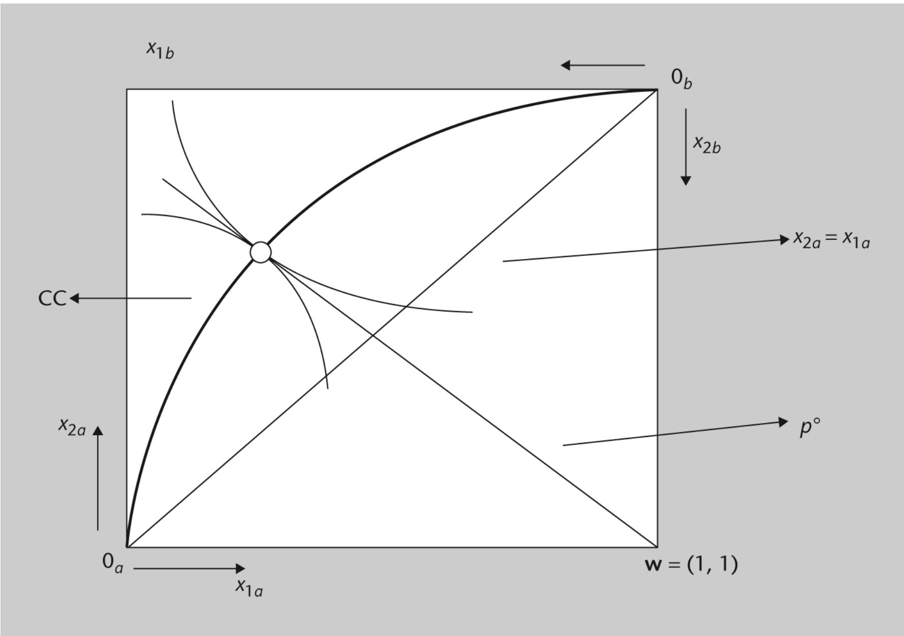
Això és cert, ja que $u''_h < 0$ mostra que la utilitat marginal és decreixent:

Gràfic 19. Aversió al risc i utilitat marginal



En conseqüència, la corba de contracte és estrictament còncava, de manera que el consum òptim de l'agent *b* és més gran en l'estat 1, ja que creu que aquest estat és més probable del que creu l'agent *a*.

Gràfic 20. Equilibri, absència de risc social i probabilitats subjectives diferents



Observem que les conclusions pel que fa a la forma còncava de la corba de contracte es mantenen si l'agent *b*, en lloc de tenir aversió al risc, hi és neutral, amb $u_b(x_{ib}) = x_{ib}$.

3) Existència de risc social i probabilitats subjectives iguals

En aquest cas, suposem que la riquesa inicial de l'agent *b* no està afectada per l'estat del món que esdevingui, $\mathbf{w}_a = (1, 0)$, $\mathbf{w}_b = (1, 1)$, de manera que la riquesa agregada canvia segons l'estat del món i hi ha risc social:

$$\mathbf{w}_a + \mathbf{w}_b = (2, 1).$$

Ara hi ha una línia de certesa diferent per a cada agent. Sobre la línia de certesa de l'agent h, $x_{2h} = x_{1h}$, el pendent de les corbes d'indiferència de h val, en valor absolut, $\pi/(1 - \pi)$. Aleshores, les corbes d'indiferència dels dos agents no poden ser tangents sobre les línies de certesa, ja que cada agent té la seva pròpia línia de certesa. Només poden ser tangents entre les dues línies de certesa en què els dos agents consumeixen més en l'estat en què la riquesa agregada és més abundant, $x_{1a} > x_{2a}$ i $x_{1b} > x_{2b}$. Com que $u''_h < 0$, la utilitat marginal de h és decreixent, en tenir h aversió al risc, implica el següent:

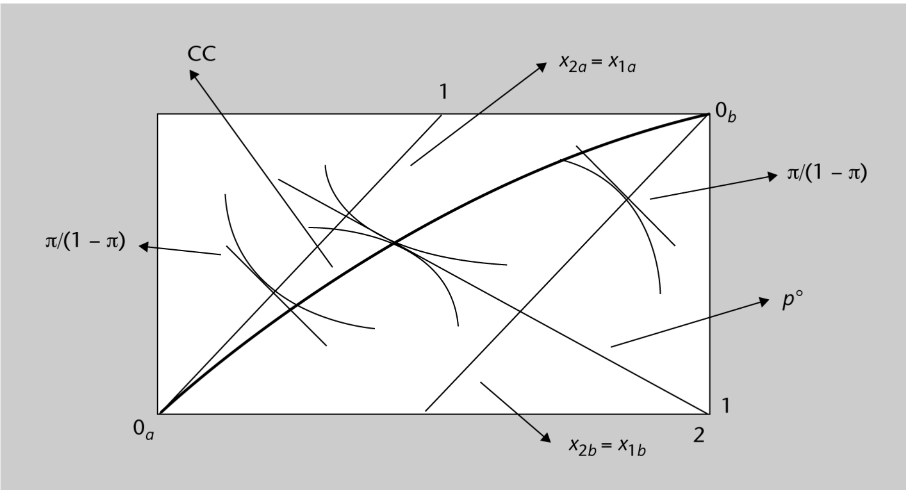
$$\frac{u'_a(x_{1a})}{u'_a(x_{2a})} = \frac{u'_b(2 - x_{1a})}{u'_b(1 - x_{2a})} < 1 .$$

Això constata que en equilibri general competitiu els dos agents consumeixen més quan la riquesa és més alta:

$$p^\circ = \frac{\pi u'_a(x_{1a})}{(1-\pi)u'_a(x_{2a})} = \frac{\pi u'_b(2 - x_{1a})}{(1-\pi)u'_b(1 - x_{2a})} < \frac{\pi}{1-\pi} .$$

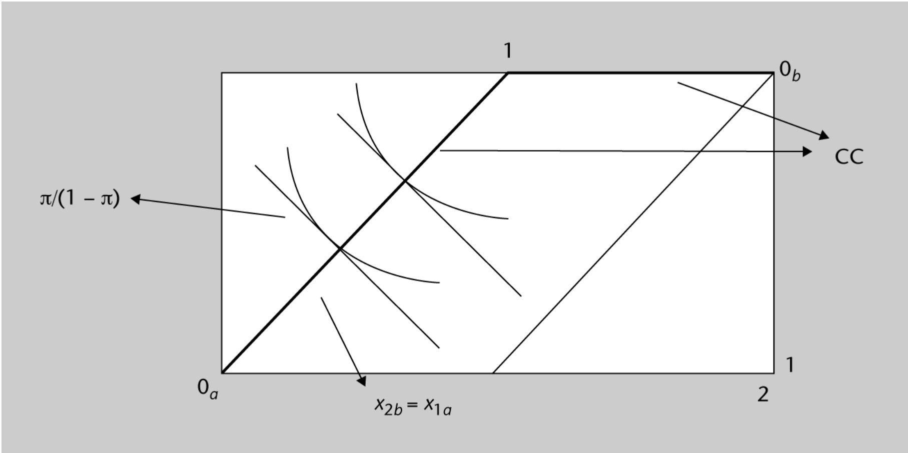
Notem que, en el cas particular en què $\pi = 1/2$ i els dos estats tenen la mateixa probabilitat, el preu relatiu d'equilibri del consum contingent a l'estat 1 envers l'estat 2 és menor que 1, $p^\circ < 1$. Això mostra, com sembla lògic, que el consum contingent és menys valuós en l'estat en què és més abundant.

Gràfic 21. Equilibri, risc social, iguals probabilitats subjectives i aversió al risc



Si l'agent b, en lloc de tenir aversió al risc, hi és neutral, amb $u_b(x_{ib}) = x_{ib}$, l'aspecte de la corba de contracte es diferent, com segueix de la inspecció gràfica de la caixa d'Edgeworth. Com que les corbes d'indiferència de b són lineals, amb pendent d'acord amb el quocient de probabilitats, són tangents a les de a sobre la línia de certesa de a. Per tant, la corba de contracte coincideix amb la línia de certesa de a. Però només fins al punt 1. A partir d'aquest punt, b no té prou recursos per a seguir assegurant totalment a en l'estat 2 i les assignacions són de cantó. La CC o conjunt de Pareto coincideix amb l'eix d'abscisses de b, des del punt 1 fins a 0_b.

Gràfic 22. Equilibri amb neutralitat al risc, risc social i iguals probabilitats



4) Existència de risc social i probabilitats subjectives diferents

Si b és neutral al risc, a hi té aversió i tots dos tenen creences diferents, el pendent de les corbes d'indiferència de b no pot coincidir amb el pendent de les de a sobre la línia de certesa d'aquest últim. És a dir, a diferència del cas anterior, ja no hi ha un conjunt d'assignacions en què b assegura totalment a.

Si b també té aversió al risc, la igualtat d'RMS que defineix la corba de contracte mostra el següent:

$$\frac{\pi_a u_a'(x_{1a})}{(1-\pi_a)u_a'(x_{2a})} = \frac{\pi_b u_b'(2-x_{1a})}{(1-\pi_b)u_b'(1-x_{2a})} .$$

Aquesta expressió tampoc genera una corba de contracte lineal de pendent 1 hi hagi o no risc agregat. Observem que la corba de b no pot coincidir amb la línia de certesa de a, que té l'expressió $x_{2a} = x_{1a}$, per $0 \leq x_{1a} \leq w_1$, ja que les creences són diferents i les funcions d'utilitat (atesa l'aversió al risc) són estrictament còncaves. D'aquesta manera, les utilitats marginals baixen quan els seus arguments augmenten. Per tant, en equilibri general competitiu, ambdós agents suporten risc.

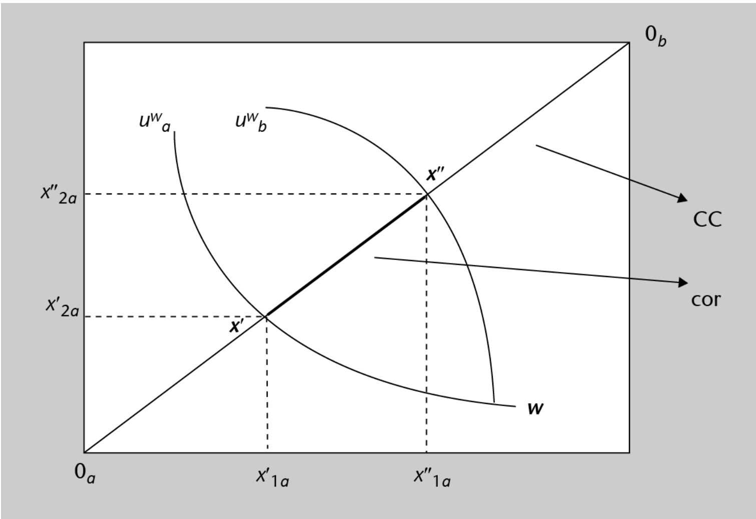
4. El cor d'una economia d'intercanvi

L'equilibri general competitiu considera entorns amb agents atomístics, cadascun amb poc pes en relació amb el conjunt de l'economia. Per aquest motiu, considera els preus com a dades, com a paràmetres fora de la seva influència.

En economies amb pocs agents, però, el supòsit de comportament competitiu sembla poc raonable. És més plausible que l'intercanvi s'estructuri a partir d'un procés de negociació que mitjançant un comportament preuacceptant.

Suposem que hi ha una economia d'intercanvi amb dos béns, 1 i 2 i dos agents, *a* i *b*. Cada agent té una dotació $\mathbf{w}_a = (w_{1a}, w_{2a})$, $\mathbf{w}_b = (w_{1b}, w_{2b})$. Si les corbes d'indiferència, una de cada agent, es tallen per aquesta assignació inicial *w*, tal com mostren les corbes $u^w{}_a$ i $u^w{}_b$, els agents poden aconseguir més benestar mitjançant l'intercanvi de quantitats de béns entre ells. En el gràfic, *a* augmentaria el benestar pujant la quantitat de bé 1 a canvi de bé 2, mentre que *b* obtindria més utilitat amb més bé 2 i menys mercaderia 1. És a dir, els agents tenen incentius per a negociar i intercanviar. Partint de la dotació **w**, per mitjà de la negociació poden aconseguir cistells dins la lent que formen les corbes d'indiferència $u^w{}_a$ i $u^w{}_b$ i que, per tant, generen més benestar per als agents.

Gràfic 23. Nucli d'una economia d'intercanvi



Quin és el resultat raonable d'un procés de negociació? El concepte de *cor* o *nucli** intenta respondre a aquesta pregunta i proposa que el resultat final d'una negociació s'ha de fonamentar en dos punts:

* ***core*** **en anglès i** ***cor*** **o** ***nucli*** **en català**

1) Ha de ser **eficient**. L'assignació final s'ha de situar sobre la corba de contracte. Altrament, les corbes d'indiferència s'interceptarien i es podria augmentar el benestar dels dos agents (o augmentar el benestar d'un agent sense baixar el de l'altre) canviant a assignacions dins la lent, per la qual cosa les parts tindrien incentius a seguir intercanviant. En altres paraules, intercanviarien fins que exhaurissin els guanys potencials del comerç.

2) A més, cap agent acceptarà com a resultat final d'una negociació una assignació que li suposi una utilitat inferior que la dotació inicial.

El *cor* és, per tant, el tram de la corba de contracte situat entre les dues corbes d'indiferència, una de cada agent, corresponents a la dotació inicial. En el gràfic, és el tram de la corba de contracte entre els punts $\boldsymbol{x}'$ i $\boldsymbol{x}''$, que apareix remarcat.

El cor o nucli es presenta, usualment, com un concepte de solució per a jocs amb infraestructura cooperativa, en què les parts poden arribar a acords vinculants. Els processos de negociació, que porten a pactes que obliguen les parts, reuneixen les característiques per a ser modelats amb jocs d'aquest tipus. En l'àmbit dels jocs amb infraestructura cooperativa, el cor es defineix com el conjunt d'assignacions que no poden ser rebutjades (o bloquejades) per cap coalició d'agents, en el sentit que cap coalició les pot millorar. En el context d'intercanvi amb dos individus, hi ha tres coalicions possibles, les dues formades per cada agent en solitari i la conformada pels dos individus.

Aleshores, les assignacions fora de la lent formada per les corbes u_{a0} i u_{b0} serien rebutjades per coalicions d'un sol agent, perquè cada agent obté més utilitat en la dotació inicial. Les assignacions dintre de la lent, però no en la corba de contracte serien rebutjades per la coalició dels dos agents, perquè una coalició dels dos agents seleccionaria assignacions sobre la corba de contracte i milloraria la seva situació. En conseqüència, com ja hem deduït anteriorment, el cor és el segment de la corba de contracte entre u_{a0} i u_{b0}.

Exemple

Una economia de canvi pur amb dos béns, 1 i 2, i dos agents, *a* i *b*, amb dotacions $\mathbf{w}_a = (w_{1a}, w_{2a}) = (32, 4)$, $\mathbf{w}_b = (w_{1b}, w_{2b}) = (8, 16)$ i funcions d'utilitat $u_h = x_{1h}\ x_{2h}$, $h = a, b$, té una corba de contracte que és una recta de pendent 1/2 que passa per l'origen de coordenades:

$$x_{2a} = (1/2)\ x_{1a} \quad \text{per } 0 \leq x_{1a} \leq w_1.$$

El cor o nucli és el segment de la corba de contracte situat entre els punts $\boldsymbol{x}'$ i $\boldsymbol{x}''$:

1) Punt $\boldsymbol{x}'$. Intersecció de la CC i la corba d'indiferència de $u^w{}_a$ de *a*, que verifica el següent:

- L'agent *a* es manté amb la utilitat inicial, $u^w{}_a = w_{1a}\ w_{2a} = 32 * 4 = 128 = x'_{1a}\ \ x'_{2a}$.
- L'equació de la corba de contracte $x'_{2a} = x'_{1a}/2$.

És a dir, $128 = 2x'_{2a}\ \ x'_{2a}$.

Igualment, els valors que satisfan les dues equacions són els següents:

$$x'_{1a} = 16 \qquad x'_{2a} = 8.$$

2) Punt $\boldsymbol{x}''$. Intersecció de la CC i la corba d'indiferència de $u^{w}{}_{b}$ de b, que compleix el següent:

- L'agent b es manté amb la utilitat inicial, $u^{w}{}_{b} = w_{1b}\, w_{2b} = 8 * 16 = 128 = x''_{1b}\ x''_{2b}$.
- L'equació de la corba de contracte, que expressem per a b, $(w_2 - x''_{2b})2 = (w_1 - x''_{1b})$.

És a dir, $40 - 2x''_{2b} = 40 - x''_{1b} \rightarrow 2x''_{2b} = x''_{1b}$.

Els valors que resolen el sistema de dues equacions són els següents:

$$x''_{1b} = 16 \qquad x''_{2b} = 8.$$

Si s'expressa per a és el següent:

$$x''_{1a} = w_1 - x''_{1b} = 24 \qquad x''_{2b} = w_2 - x''_{2b} = 12.$$

En conseqüència, de 1) i 2), el cor o nucli verifica el següent:

$$x_{2a} = x_{1a} \qquad \text{per } 16 \leq x_{1a} \leq 24.$$

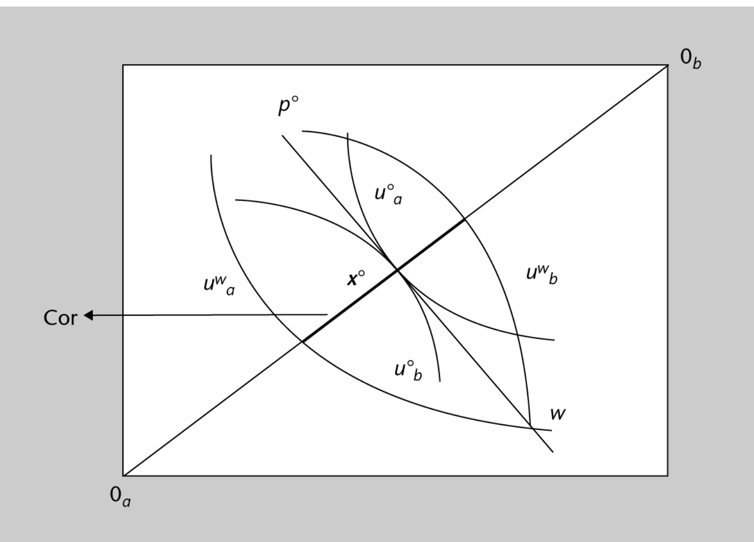
Per a aquest mateix exemple, en treballar l'equilibri general competitiu, hem trobat que l'equilibri walrasià estava conformat pel preu relatiu d'equilibri $p° = 1/2$ i pels cistells $x°_{1a} = x°_{1b} = 20$ i $x°_{2a} = x°_{2b} = 10$. És a dir, l'assignació d'equilibri general competitiu és un punt del cor. En el següent punt, desenvolupem aquest resultat.

4.1. L'equilibri competitiu i el cor d'una economia d'intercanvi

El primer teorema fonamental de l'economia del benestar ha mostrat que l'equilibri walrasià d'una economia d'intercanvi es pot representar a la caixa d'Edgeworth. És a dir, es pot expressar gràficament el preu relatiu d'equilibri $p°$ i l'assignació d'equilibri competitiu $\boldsymbol{x}°$.

Hem comprovat que l'assignació d'equilibri competitiu és eficient i, en particular, és un punt de la corba de contracte, entre les corbes d'indiferència dels agents que passen per la dotació inicial. Per tant, com que el cor d'una economia d'intercanvi és el segment de la corba de contracte entre les corbes d'indiferència dels agents que inclouen la dotació inicial, es conclou que l'assignació d'equilibri competitiu és un punt del cor d'una economia d'intercanvi.

Gràfic 24. Equilibri competitiu i nucli



Per tal d'explicar intuïtivament la relació que hi ha entre el cor d'una economia d'intercanvi i l'equilibri walrasià, considerem una economia d'intercanvi amb dos béns, 1 i 2, i dos agents, *a* i *b*. Si s'augmenta progressivament el nombre d'agents, amb repliques dels dos tipus que hi ha, *a* i *b*, creixen les opcions d'intercanvi per a cada agent, tant del tipus *a* com del tipus *b*, de manera que ambdós poden obtenir corbes d'indiferència cada cop més allunyades de la que conté la dotació inicial. Aleshores, el cor es va reduint progressivament i, en el límit, per un gran nombre d'agents (que justifiquen un comportament preuacceptant) s'obté l'equilibri competitiu.

4.2. Eficiència, equilibri walrasià i preferències quasilineals

L'equilibri general competitiu presenta unes quantes particularitats si les preferències són quasilineals. Ho veurem amb un exercici.

Considerem una economia d'intercanvi pur en què els agents tenen funcions d'utilitat quasilineals $u_a = 2x_{1a}^{1/2} + x_{2a}$, $u_b = x_{1b}^{1/2} + x_{2b}$ i dotacions $(w_{1a} + w_{1b}, w_{2a} + w_{2b}) =$ $= (4 + 16, 16 + 4) = (20, 20)$. Es demana el següent:

a) Quina és l'expressió de la corba de contracte?
b) És eficient l'assignació inicial? Per què?
c) Determineu el cor o nucli de l'economia.
d) Trobeu l'equilibri walrasià, considerant numerari el bé 2.
e) Mostreu que l'assignació d'equilibri competitiu és en el cor.

a) Per a les funcions d'utilitat quasilineals, la utilitat marginal del bé 2 val 1. Per tant, l'RMS, el pendent, en valor absolut, de la corba d'indiferència en qualsevol punt depèn només de la quantitat consumida del bé 1. Les corbes d'indiferència són translacions verticals les unes de les altres.

L'expressió de la corba de contracte s'obté igualant les RMS dels dos agents:

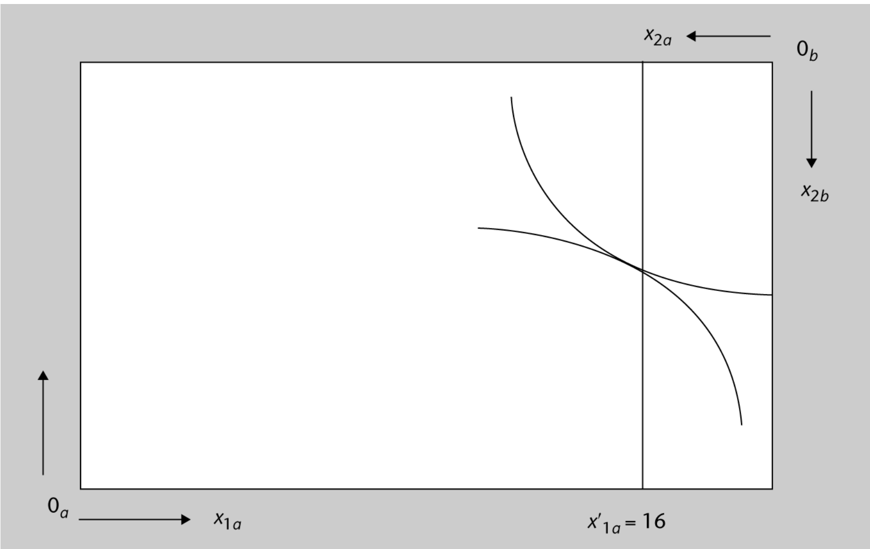
$$\text{RMS}_a = \text{RMS}_b \qquad x_{1a}^{-1/2} = (1/2)\, x_{1b}^{-1/2} \qquad 2^{-2}\, x_{1a} = w_1 - x_{1a}.$$

És a dir, la corba de contracte val el següent:

$$x^c_{1a} = 16 \qquad \text{per } 0 \le x_{2a} \le 20.$$

Com que les RMS no depenen de la quantitat de bé 2, la corba de contracte tampoc en depèn. El conjunt de Pareto és una línia vertical en $x^c_{1a} = 16$. Hi ha un sol nivell eficient del bé 1.

Gràfic 25. Corba de contracte amb preferències quasilineals



b) L'assignació inicial no és eficient, ja que $w_{1a} = 4 \neq 16$.

c) El cor o nucli és el segment de la corba de contracte situat entre els punts $\boldsymbol{x}'$ i $\boldsymbol{x}''$:

Punt $\boldsymbol{x}'$. Intersecció de la CC i la corba d'indiferència de $u^w{}_a$ de *a*, que verifica el següent:

- L'agent *a* es manté amb la utilitat inicial, $u^w{}_a = 20 = 2x'_{1a}{}^{1/2} + x'_{2a}$.
- L'equació de la corba de contracte $x'_{1a} = 16$.

És a dir, $x'_{2a} = 12$.

Punt $\boldsymbol{x}''$. Intersecció de la CC i la corba d'indiferència de $u^w{}_b$ de *b*, que compleix el següent:

- L'agent *b* es manté amb la utilitat inicial, $u^w{}_b = 8 = x''_{1b}{}^{1/2} + x''_{2b}$, que podem expressar en termes de *a* de la manera següent:

$$8 = (w_1 - x''_{1a})^{1/2} + (w_2 - x''_{2a}).$$

- L'equació de la corba de contracte, $x''_{1a} = 16$.

Si es resol, $x''_{2a} = 14$.

En conseqüència, el cor o nucli val el següent:

$$x^c{}_{1a} = 16 \qquad \text{per } 12 \leq x_{2a} \leq 14.$$

d) L'equilibri walrasià pressuposa que els agents són preuacceptants i determinen les demandes de consum a partir de la maximització de la utilitat subjecte a la recta pressupostària. Les demandes de l'individu *h* (és a dir, el seu cistell òptim en funció dels paràmetres, preus i dotació) són la solució del sistema de condicions de primer ordre:

- Condició de tangència $\text{RMS}_h = p$.
- El cistell òptim verifica la restricció, $px_{1h} + x_{2h} = p\, w_{1h} + w_{2h}$.

Pel que fa a la primera condició, com que les RMS per a les funcions d'utilitat quasilineals no depenen de la quantitat del bé 2, la condició de tangència tampoc en pot dependre. La condició de tangència expressa la quantitat òptima del bé 1 per *h* en funció de paràmetres i, per tant, és la demanda del bé 1 i de *h*. Si s'expressa la condició de tangència per a cada un dels dos agents, s'obté el següent:

$$p = x_{1a}{}^{-1/2} \qquad p = (1/2)\, x_{1b}{}^{-1/2}.$$

Si s'aïllen, s'obtenen les demandes de consum o brutes:

$$x^*{}_{1a} = p^{-2} \qquad x^*{}_{1b} = (2\,p)^{-2}.$$

La demanda agregada del bé 1 és la següent:

$$x^*{}_1 = 5(2p)^{-2}.$$

La funció d'excés de demanda agregada del bé 1 s'obté restant la suma de dotacions del bé 1:

$$z_1(p) = 5(2p)^{-2} - 20.$$

En equilibri walrasià, la funció d'excés de demanda agregada del bé 1 s'anul·la, de manera que el preu d'equilibri val el següent:

$$p^\circ = 1/4.$$

Les quantitats consumides del bé 1 pels dos agents, substituint en les demandes de consum respectives:

$$x^\circ{}_{1a} = 16 \qquad x^\circ{}_{1b} = 4.$$

Les quantitats del bé 2 consumides per cadascun es troben a partir de les rectes pressupostàries, substituint el preu d'equilibri i les quantitats òptimes del bé 1:

$$p^\circ x^\circ{}_{1h} + x^\circ{}_{2h} = p^\circ w_{1h} + w_{2h}.$$

Així, per a l'agent *a*, seria el següent:

$$(1/4)16 + x^\circ{}_{2a} = (1/4)16 + 16.$$

Si fem el mateix per a b, tenim les quantitats consumides del bé 2 en equilibri competitiu per als dos agents:

$$x^{\circ}_{2a} = 13 \qquad x^{\circ}_{2b} = 7.$$

e) L'assignació d'equilibri competitiu és un punt del cor, ja que en termes de a s'expressa de la manera següent:

$$x^{\circ}_{1a} = 16 \qquad x^{\circ}_{2a} = 13.$$

És un punt del segment que defineix el cor:

$$x^{c}_{1a} = 16 \qquad \text{per } 12 \leq x_{2a} \leq 14.$$

5. Funcions de benestar social

El criteri de Pareto com a criteri normatiu només s'interessa en l'eficiència de les assignacions, però ignora la distribució del benestar i no permet discriminar entre les possibles assignacions òptimes. El criteri de compensació també se centra en eficiència i ignora la distribució. L'ús de funcions de benestar social permet incorporar consideracions distributives en la política econòmica.

Una funció de benestar social (FBS) agrega les funcions d'utilitat individuals. Pondera les utilitats dels diversos individus segons les preferències d'un planificador social. Així, en una societat de dos individus, a i b, amb utilitats $u_a(\mathbf{x}_a)$ i $u_b(\mathbf{x}_b)$, la funció de benestar social, que es coneix com a FBS de Bergson-Samuelson, W: $\Re^2 \rightarrow \Re$, genera una utilitat social a partir de les individuals, $W = W(u_a, u_b)$.

Una FBS pot adoptar diverses formes funcionals, segons les preferències del planificador:

1) FBS utilitarista clàssica o de Bentham, que és la simple suma de les utilitats individuals:

$$W(u_a(\mathbf{x}_a), u_b(\mathbf{x}_b)) = u_a(\mathbf{x}_a) + u_b(\mathbf{x}_b).$$

2) Funció de benestar social suma ponderada de les utilitats individuals, FBSSP, que és una generalització de la funció clàssica de benestar utilitarista:

$$W(u_a(\mathbf{x}_a), u_b(\mathbf{x}_b)) = t_a\, u_a(\mathbf{x}_a) + t_b\, u_b(\mathbf{x}_b), \quad t_h \geq 0,\ h = a, b,\ t_a + t_b = 1.$$

Aquí, el coeficient t_h és el pes, la importància, de la utilitat de cadascun dels agents en el benestar social. Per exemple, si $t_a = 1$ i, per tant, $t_b = 0$, l'agent a és un dictador.

3) FBS de Rawls o funció de benestar minimax, que identifica el benestar social amb el benestar dels més desfavorits:

$$W(u_a(\mathbf{x}_a), u_b(\mathbf{x}_b)) = \text{min.}\ (u_a(\mathbf{x}_a), u_b(\mathbf{x}_b)).$$

Segons el filòsof John Rawls (1971), si els individus no sabessin quin serà el seu paper en la societat, escollirien, entre totes les alternatives socials, la societat en què la persona més desfavorida estigués en la millor situació. En aquesta societat, el benestar social és igual al benestar del membre de la societat més desfavorit. En maximitzar el benestar social, es maximitza el del membre en pitjor situació, de manera que el criteri porta a una societat extremadament igualitària.

5.1. FBS i la condició de Pareto

Qualsevol de les tres FBS introduïdes compleix la condició de Pareto. Una FBS verifica la condició de Pareto si és creixent en la utilitat de cada persona, és a dir, en cada argument de la funció W:

$$\partial W(u_a, u_b)/\partial u_h > 0 \qquad h = a, b.$$

Aleshores, l'FBS seleccionarà assignacions eficients:

> Si l'assignació $\boldsymbol{x^*}$ maximitza una FBS $W(u_a, u_b)$ creixent en cadascun dels seus arguments, aleshores $\boldsymbol{x^*}$ és òptima en sentit de Pareto.

Si $\boldsymbol{x^*} = (\boldsymbol{x^*}_a, \boldsymbol{x^*}_b)$ no fos eficient, es podria apujar la utilitat d'un agent, almenys, sense abaixar la de l'altre, però, aleshores, augmentaria $W(u_a, u_b)$ i, per tant, $\boldsymbol{x^*}$ no maximitzaria l'FBS.

Aquesta proposició implica que maximitzant la suma d'utilitats (cas de l'FBS utilitarista o, en general, una FBS creixent en cadascun dels seus arguments) s'obtindria una assignació eficient, però també inclouria aspectes distributius:

$$\underset{x_{1a},\, x_{2a}}{\text{Màx.}}\ u_a(x_{1a}, x_{2a}) + u_b(x_{1b}, x_{2b}) \qquad \text{subjecte a } x_{1a} + x_{1b} \leq w_1;\ x_{2a} + x_{2b} \leq w_2.$$

Si se substitueixen les restriccions en la funció objectiu, s'obté el següent:

$$\underset{x_{1a},\, x_{2a}}{\text{Màx.}}\ u_a(x_{1a}, x_{2a}) + u_b(w_1 - x_{1a}, w_2 - x_{2a}).$$

Les condicions de primer ordre d'aquest problema d'optimització són les següents:

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial u_a}{\partial x_{1a}} + \dfrac{\partial u_b}{\partial x_{1a}}(-1) = 0 \\ \dfrac{\partial u_a}{\partial x_{2a}} + \dfrac{\partial u_b}{\partial x_{2a}}(-1) = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial u_a}{\partial x_{1a}} = \dfrac{\partial u_b}{\partial x_{1a}} \\ \text{RMS}_a = \text{RMS}_b \end{matrix}\right\}.$$

Les assignacions eficients verifiquen $\text{RMS}_a = \text{RMS}_b$. Si, a més, es vol determinar l'assignació utilitarista que té en compte aspectes distributius i dóna el mateix pes als dos agents, aquesta assignació ha de complir, addicionalment, la igualtat d'utilitats marginals del bé 1 (per exemple) per a tots dos agents:

$$\frac{\partial u_a}{\partial x_{1a}} = \frac{\partial u_b}{\partial x_{1a}}.$$

En el cas particular que les funcions d'utilitat són quasilineals, $u_h = \upsilon_h(x_{1h}) + x_{2h}$, per $h = a$, b, hi ha un sol valor eficient del bé 1, ja que la utilitat marginal del bé 2 és 1:

$$\text{RMS}_a = \text{RMS}_b \qquad \upsilon'_a(x_{1a}) = \upsilon'_b(x_{1b}).$$

A més, en ser igual a 1, la utilitat marginal del bé 2, l'FBS utilitarista es compatible amb qualsevol distribució del bé 2 entre els agents. És a dir, no permet seleccionar una assignació única del conjunt d'assignacions eficients.

6. Eficiència i producció

Aquest apartat desenvolupa un cas particular d'economia amb producció que després generalitzem. Suposem una economia amb dos béns, 1 i 2, i dos consumidors, *a* i *b*, que tenen funcions d'utilitat quasilineals,

$$u_h = \upsilon_h(x_{1h}) + x_{2h} \qquad \text{per } h = a, b.$$

El bé 2 és numerari. Produir la quantitat x_1 del bé 1 té un cost $C(x_1)$ en termes del bé 2, numerari. En l'economia hi ha uns recursos totals, una riquesa, de ω, expressats en unitats del bé 2, que es destinen a aquest bé i a produir el bé 1. És a dir, $C(x_1) + x_2 = \omega$.

Les assignacions eficients es poden determinar maximitzant la suma d'utilitats (d'acord amb una FBS utilitarista), subjecte a la restricció de recursos de l'economia:

$$\underset{x_{1a},\, x_{1b}}{\text{Màx.}}\ u_a + u_b = \upsilon_a(x_{1a}) + x_{2a} + \upsilon_b(x_{1b}) + x_{2b} = \upsilon_a(x_{1a}) + \upsilon_b(x_{1b}) + x_2$$
$$\text{subjecte a } C(x_1) + x_2 = \omega;\ x_1 = x_{1a} + x_{1b}.$$

Si se substitueix la segona restricció en la primera i la primera en la funció objectiu, s'obté el següent:

$$\underset{x_{1a},\, x_{1b}}{\text{Màx.}}\ \upsilon_a(x_{1a}) + \upsilon_b(x_{1b}) + \omega - C(x_{1a} + x_{1b}).$$

Les condicions de primer ordre són les següents:

$$\upsilon'_a(x_{1a}) = C'(x_1) \qquad \upsilon'_b(x_{1b}) = C'(x_1) \qquad \text{amb } x_1 = x_{1a} + x_{1b}.$$

És a dir, per la quantitat eficient del bé 1 s'igualen les valoracions marginals d'aquest bé entre els consumidors i amb el cost marginal de producció per a la societat. La valoració de l'última unitat que consumeix *a* ha de ser igual a la valoració de l'última unitat que consumeix *b* i al cost de producció de l'última unitat per a la societat:

$$\upsilon'_a(x_{1a}) = \upsilon'_b(x_{1b}) = C'(x_1) \qquad \text{amb } x_1 = x_{1a} + x_{1b}.$$

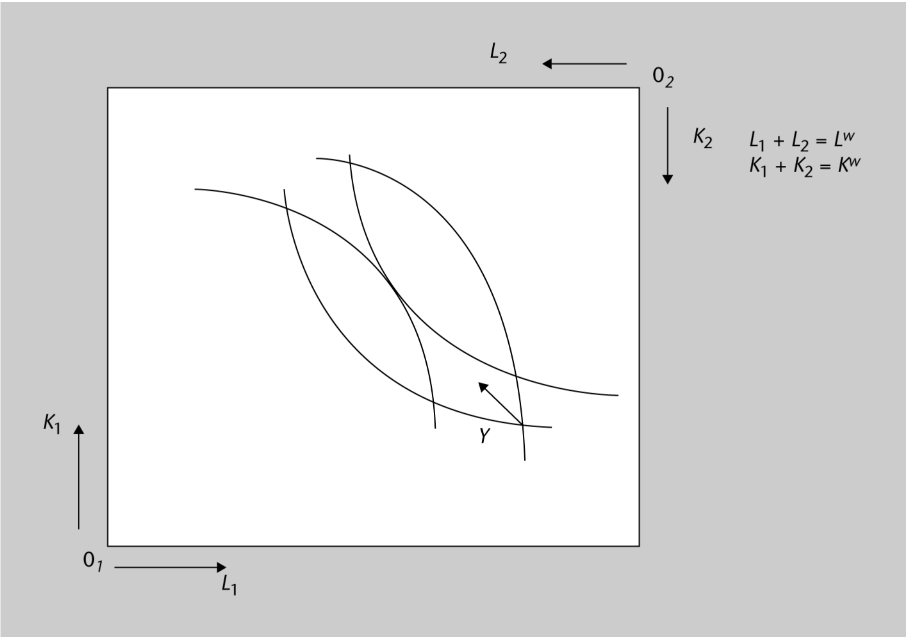
L'expressió $C'(x_1)$ és la relació marginal de transformació del bé 2 en el bé 1, $C'(x_1)$ = RMT, i mostra el ritme o la taxa en què la societat pot transformar el bé 2 en el bé 1 de manera eficient. D'altra banda, si el bé 2 no és numerari, el cost marginal del bé 1 a partir del 2 és el quocient del cost marginal del bé 1 expressat en **€** (la unitat de compte), $c'(x_1)$, dividit pel cost marginal del bé 2, també expressat en **€**, $c'(x_2)$.

Si les funcions d'utilitat no són quasilineals, sinó que adopten la forma general $u_h(x_{1h}, x_{2h})$, $h = a, b$, la utilitat marginal del bé 2 no val 1. D'aquesta manera, la valoració marginal del bé 1 en termes del bé 2 per al consumidor h és l'RMS$_h$:

$$\mathrm{RMS}_h = \frac{\partial u_h / \partial x_{1h}}{\partial u_h / \partial x_{2h}} \cdot$$

Hi ha una altra condició que caracteritza l'eficiència en una economia amb producció i que fa referència a l'ús òptim dels factors productius. Si hi ha dos recursos en l'economia, capital, K, i treball, L, en quantitats K^w i L^w, que s'usen en la producció dels dos béns, 1 i 2, l'eficiència implica que les corbes isoquantes de tots dos béns siguin tangents. Si no, es podria augmentar la producció dels dos béns canviant l'assignació de factors en l'interior de la lent i, per tant, es podria augmentar la utilitat dels dos consumidors alhora o la utilitat d'un consumidor sense baixar la de l'altre.

Gràfic 26. Eficiència en l'assignació de factors



Com que el pendent de la isoquanta és la relació marginal de substitució tècnica (RMST), que expressa el ritme en què el capital es pot substituir per treball, l'eficiència en la producció exigeix les RMST entre les dues indústries s'igualin: $\mathrm{RMST}_1 = \mathrm{RMST}_2$.

Aleshores, les condicions d'eficiència d'una economia amb producció s'enuncien de la manera següent:

Eficiència de la producció:	$\mathrm{RMST}_1 = \mathrm{RMST}_2$.
Eficiència del consum:	$\mathrm{RMS}_a = \mathrm{RMS}_b$.
Eficiència de la combinació de béns:	$\mathrm{RMS}_a = \mathrm{RMT}$.

6.1. L'eficiència del mercat competitiu

El mercat competitiu, en què actuen empreses competitives que fabriquen productes i consumidors competitius que els adquireixen, aconsegueix una assignació eficient per aquests motius:

1) Les empreses competitives de la indústria 1 maximitzen beneficis. Això requereix que minimitzin costos, igualant el pendent d'una isocost, el quocient dels preus del treball i del capital, amb el d'una isoquanta: $w/r = \text{RMST}_1$.

El mateix succeeix en la indústria 2. Atès que els mercats de factors són competitius, les dues indústries acaren els mateixos preus de treball i capital. Per tant, les RMST entre indústries s'igualen:

$$\text{RMST}_1 = w/r = \text{RMST}_2.$$

2) Consumidors preuacceptants decideixen les quantitats òptimes a consumir maximitzant la utilitat, igualant pendents de corba d'indiferència i de recta de balanç. Com que tots acaren el mateix preu relatiu del bé 1 respecte al 2, ocorre el següent:

$$\text{RMS}_a = p = \text{RMS}_b.$$

3) Empreses preuacceptants en els mercats de productes decideixen les quantitats a produir dels dos béns igualant p, el preu del bé 1 en termes del 2 amb el cost marginal del bé 1 en unitats del 2, $C'(x_1)$. Com que aquest cost marginal és l'RMT i els consumidors igualen p amb l'RMS, ocorre el següent:

$$\text{RMS}_h = p = \text{RMT}.$$

6.2. L'economia de Robinson Crusoe

És el model d'economia amb producció més simple. Només hi ha un consumidor, dos productes, 1 i 2, i un factor productiu, el treball, del qual Robinson té una dotació L^w. Les preferències de Robinson vénen donades funció d'utilitat $u = u(x_1, x_2)$, que és creixent en les quantitats consumides dels dos béns. La producció del bé i la dóna la funció de producció $x_i = f_i(L_i)$, en què L_i és la quantitat de treball assignada a la indústria, i $i = 1, 2$, $L_1 + L_2 = L^w$. La funció de producció és creixent i estrictament còncava en el seu argument, $f_i' > 0$, $f_i'' < 0$.

Les condicions d'eficiència s'obtenen, com s'ha vist, maximitzant el benestar social subjecte a la restricció de recursos de la societat. Aquí, el benestar social és el de l'únic membre de la societat.

La restricció de recursos social l'expressem en funció de les quantitats dels dos productes. Com que $x_1 = f_1(L_1)$, aïllant L_1 en funció de x_1, tindrem una funció $L_1 = g_1(x_1)$. Com que f_i és còncava, la seva inversa g_i serà convexa, $g_i'' > 0$.

Si substituïm $L_1 = g_1(x_1)$ en la funció de producció de 2, $x_2 = f_2(L_2) = f_2(L^w - L_1)$, tenim el següent:

$$x_2 = f_2(L^w - g_1(x_1)).$$

Mostra la frontera productiva de l'economia: la quantitat màxima que es pot aconseguir del bé 2 si es produeix la quantitat x_1 del bé 1. Per tal de simplificar la notació, fem el següent:

$$f_2(L^w - g_1(x_1)) = F(x_1).$$

El pendent de la frontera mostra el canvi en x_2 quan augmenta x_1, que és negatiu, ja que la quantitat del bé 2 baixa quan puja x_1, $F'(x_1) < 0$.

Si canviem de signe el pendent, s'interpreta com la quantitat del bé 2 que s'ha de sacrificar per unitat més del bé 1. És a dir, és l'RMT (o el cost marginal del bé 1 en termes del bé 2):

$$\text{RMT} = -F'(x_1).$$

L'assignació eficient ha de verificar el següent:

$$\text{Màx. } u(x_1, x_2) \qquad \text{subjecte a } x_2 = F(x_1).$$

Si substituïm la restricció en la funció objectiu, només hi haurà una variable:

$$\underset{x_1}{\text{Màx.}}\ u(x_1, f_2(L^w - g_1(x_1))).$$

La condició de primer ordre és $\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} F'(x_1) = 0 \rightarrow \text{RMS} = \text{RMT}$, després de reordenar l'equació. Aquesta és la mateixa condició de combinació de béns eficient que ja hem trobat en el model de producció més general.

Es verificarà novament el primer teorema fonamental de l'economia del benestar, ja que en una economia competitiva en què p és el preu relatiu d'equilibri, el consumidor (Robinson com a consumidor) selecciona la combinació de béns igualant RMS = p, i l'empresa (Robinson com a empresari) escolliria la combinació de productes igualant p = RMT. En conseqüència, com que p és el mateix, RMS = RMT.

Resum

L'anàlisi dels mercats individuals (equilibri parcial) prescindeix de la interrelació econòmica inherent a una economia. En aquest mòdul hem ampliat la perspectiva adoptant una visió d'equilibri general, tot considerant les connexions que hi ha entre els diferents agents i mercats.

La representació d'equilibri general queda limitada a un funcionament competitiu i a un nombre reduït del nombre d'agents considerats. També hem presentat una situació d'intercanvi (pur), en què la producció està donada i els individus intercanvien aquesta producció al mercat.

Activitats

1. Sigui una economia d'intercanvi pur amb dos agents acceptants de preu, 1 i 2, que tenen les següents funcions d'utilitat:

$$u_1(x_1,\ y_1) = \ln(2x_1y_1) \text{ i } u_2(x_2,\ y_2) = \sqrt{x_2y_2}.$$

Les dotacions inicials dels béns x i y per a cada agent són:

$$(\bar{x}_1,\ \bar{y}_1) = (15,\ 40) \text{ i } (\bar{x}_2,\ \bar{y}_2) = (30,\ 5).$$

Determina:

a) El conjunt d'assignacions eficients de Pareto d'aquesta economia.
b) Quines són les funcions de demanda dels agents?
c) La relació de preus d'equilibri.
d) Quina és la quantitat consumida per aquests agents en l'equilibri? És aquesta solució eficient en el sentit de Pareto?

2. Sigui una economia d'intercanvi pur amb dos consumidors (A i B) i dues mercaderies (x_1 i x_2). L'individu A té unes dotacions inicials iguals a: $w^A = (2, 0)$. L'individu B té les dotacions: $w^B = (1, 1)$. Les preferències d'ambdós individus estan representades per la següent funció d'utilitat: $U(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$.

a) Troba l'equació que representa totes les assignacions eficients d'aquesta economia (corba de contracte).
b) Dibuixa la corba de contracte dins de la capsa d'Edgeworth i indica on es troben les dotacions inicials. És la dotació inicial una assignació eficient?
c) Calcula l'equilibri competitiu d'aquesta economia. Quina és la relació de preus a què s'intercanvien els béns en l'equilibri competitiu?

3. Suposa una economia d'intercanvi pur amb dos individus: en Manel (o individu A) i l'Elisenda (o individu B). En Manel disposa de 6 refrescos i 2 entrepans, pels quals mostra una taxa o relació marginal de substitució (*RMS*) de 3 entrepans per cada refresc. L'Elisenda disposa de 2 refrescs i 4 entrepans amb una taxa marginal de substitució d'1 entrepà per cada beguda refrescant. Representa a la capsa d'Edgeworth aquesta dotació inicial dels recursos. Es tracta d'una situació eficient? Explica per què.

Exercicis d'autoavaluació

1. Considereu una economia d' intercanvi pur en què els agents tenen funcions d'utilitat $u_a = x_{1a}\, x_{2a}^2$, $u_b = x_{1b}^2\, x_{2b}$ i dotacions $(w_{1a} + w_{1b},\ w_{2a} + w_{2b}) = (9 + 12,\ 3 + 6) = (21,\ 9)$.
a) Quina és l'expressió de la corba de contracte?
b) És eficient l'assignació inicial? Per què?
c) Determineu el cor o nucli de l'economia.
d) Trobeu l'equilibri walrasià.
e) Mostreu que l'assignació d'equilibri competitiu és eficient. Aquesta assignació està situada en el cor de l'economia o no?

2. En una economia de canvi pur, sense producció, amb dos béns, 1 i 2, i dos agents, a i b, que tenen funcions d'utilitat $u_a = 8x_{1a} - x_{1a}^2/2 + x_{2a}$, $u_b = 6x_{1b} - x_{1b}^2/2 + x_{2b}$, es demana el següent:
a) Trobeu la corba de contracte.
b) Si els agents són preuacceptants i les dotacions inicials són $(w_{1a} + w_{1b},\ w_{2a} + w_{2b}) = (8 + 2,\ 2 + 8) = (10,\ 10)$, determineu el preu relatiu d'equilibri i les quantitats consumides dels dos béns pels dos agents.
c) Mostreu que l'assignació d'equilibri competitiu és un punt de la corba de contracte.

3. En una economia de canvi pur amb 2 béns, 1 i 2, en què el bé 2 és numerari, i quatre agents, a, b, c, d.
a) a té una dotació inicial (200, 0) i sempre consumeix les mateixes quantitats d'ambdós béns.
b) b té una dotació inicial (0, 400) i no consumeix mai el bé 2.
c) c té una dotació inicial (200, 600) i sempre gasta el mateix en el bé 1 que en el 2.
d) d té una dotació inicial (600, 600) i sempre gasta el doble en el bé 1 que en el 2.
e) Determineu el preu relatiu d'equilibri.

4. Quina afirmació és vertadera? En una economia d'intercanvi pur (és a dir, sense producció), amb dos béns, 1 i 2, i dos agents, a i b, una assignació $\boldsymbol{x} = (x_{1a},\ x_{2a},\ x_{1b},\ x_{2b})$ és òptima (o eficient) en el sentit de Pareto –OP– si no hi ha cap altra assignació $\mathbf{x}' = (x'_{1a}, x'_{2a}, x'_{1b}, x'_{2b})$ que compleix el següent:

$$u_a(x'_{1a}, x'_{2a}) \geq u_a(x_{1a}, x_{2a}) \qquad u_b(x'_{1b}, x'_{2b}) \geq u_b(x_{1b}, x_{2b}).$$

En aquest cas, almenys una de les desigualtats és estricta. Aleshores, és òptima en el sentit de Pareto una situació en què ocorre el següent:
a) És possible augmentar el benestar dels dos consumidors alhora.
b) Es pot augmentar el benestar d'un consumidor sense baixar el benestar de l'altre.
c) Es maximitza la suma de les utilitats dels consumidors.
d) Es maximitza la diferència de les utilitats dels consumidors.

5. Quines afirmacions són vertaderes? En una economia d'intercanvi pur (és a dir, sense producció), amb dos béns, 1 i 2, i dos agents, a (Abel) i b (Bernat), amb dotacions inicials, $\mathbf{w}_a = (w_{1a}, w_{2a}) = (16, 4)$, $\mathbf{w}_b = (w_{1b}, w_{2b}) = (4, 16)$, i les preferències següents:

$$u_a(x_{1a}, x_{2a}) = x_{1a}^{1/2} + x_{2a} \quad u_b(x_{1b}, x_{2b}) = x_{1b}^{1/4} + x_{2b} \quad x_{hi} \geq 0;\ h = a, b;\ i = 1, 2.$$

a) En la dotació $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_a, \mathbf{w}_b)$, $\text{RMS}_a(\mathbf{w}_a) < \text{RMS}_b(\mathbf{w}_b)$, de manera que, si poden intercanviar, a procurarà adquirir bé 2 cedint, a canvi, bé 1.
b) La corba de contracte és vertical.
c) La corba de contracte té pendent positiu i finit.
d) L'assignació igualitària, en què els dos agents consumeixen les mateixes quantitats dels dos béns, és eficient.

6. En una economia d'intercanvi pur, dos agents, a (Abel) i b (Bernat), tenen, cadascun, una riquesa incerta que depèn de l'estat del món que acabi succeint, $\mathbf{w}_a = (w_{1a}, w_{2a})$, $\mathbf{w}_b = (w_{1b}, w_{2b})$. Cada individu té definides preferències pel que fa al consum en ambdós estats, 1 i 2, segons la hipòtesi d'utilitat esperada:

$$\pi_h u_h(x_{1h}) + (1 - \pi_h) u_h(x_{2h}) \quad w_i \geq x_{ih} \geq 0 \qquad i = 1, 2, \quad h = a, b.$$

En l'expressió precedent, $\pi_h \geq 0$, $h = a, b$, és la probabilitat o grau de creença que assigna l'agent h al fet que succeeixi l'estat del món 1. Aleshores, quina afirmació de les següents és la falsa?
a) Si els agents tenen aversió al risc, tenen les mateixes creences pel que fa als estats del món que poden esdevenir i no hi ha risc agregat, la corba de contracte coincideix amb la diagonal de la caixa d'Edgeworth i té un pendent igual a 1.
b) Si l'agent a té aversió al risc i el b és neutral al risc, tenen les mateixes creences pel que fa als estats del món que poden esdevenir i hi ha risc agregat, la corba de contracte és una línia recta amb pendent igual a 1.
c) Si els agents tenen aversió al risc, tenen creences diferents pel que fa als estats del món que poden esdevenir i no hi ha risc agregat, la corba de contracte és una línia recta amb pendent igual a 1.
d) Si els agents tenen aversió al risc, tenen creences diferents pel que fa als estats del món que poden esdevenir i hi ha risc agregat, la corba de contracte no és una línia recta amb pendent igual a 1.

7. En una economia hi ha dos estats del món, 1 i 2, amb probabilitats respectives $\pi = 0{,}4$ i $1 - \pi = 0{,}6$, i dos agents, a i b, que tenen, cadascun d'ells, una riquesa aleatòria que no comporta risc social $(w_{1a} + w_{1b}, w_{2a} + w_{2b}) = (4 + 6, 2 + 8) = (10, 10)$. Si les preferències dels agents són $U_a = \pi\, x_{1a}^{1/2} + (1 - \pi)\, x_{2a}^{1/2}$ i $U_b = \pi\, x_{1b} + (1 - \pi)\, x_{2b}$, es demana el següent:
a) Trobeu l'expressió de la corba de contracte.
b) És eficient la situació inicial?
c) Quin és el cor o nucli de l'economia?

8. Robinson pot dedicar els recursos sota el seu control a produir dos béns, 1 i 2. La funció de transformació o corba de possibilitats de producció de Robinson, que mostra la màxima producció del bé 2 per cada nivell factible del bé 1, és $x_1^2/2 + x_2 - 600 = 0$, i la seva funció d'utilitat és $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$.
Determineu el següent:
a) L'òptim de consum-producció de Robinson en l'economia tancada. Quin seria el preu de d'equilibri competitiu en l'economia tancada si el bé 2 és numerari?
b) Si la civilització, en què el preu del bé 1 és $p' = 10$, descobreix Robinson, quins seran els òptims de producció i consum de Robinson en l'economia oberta?
c) Verifiqueu que prefereix la situació amb intercanvi a la situació autàrquica.

Solucionari

Activitats

1.

a) Les assignacions eficients són les que es troben dins de la corba de contracte, és a dir, aquelles assignacions factibles per a les quals la relació marginal de substitució (*RMS*) dels dos agents siguin iguals. Per tant:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \rightarrow y_1 x_2 = y_2 x_1,$$
$$x_1 + x_2 = 45,$$
$$y_1 + y_2 = 45.$$

Unint aquestes condicions obtenim l'equació de la corba de contracte, que recull les assignacions eficients de Pareto:

$$y_i = x_i,\ i = 1,2.$$

b) Per a trobar les funcions de demanda, cada agent *i* resol el següent problema de maximització:

$$\underset{(x_i, y_i)}{Max} \quad u_i(x_i,\ y_i)$$
$$s.a. \quad p_x x_i + p_y y_i = p_x \overline{x}_i + p_y \overline{y}_i$$

Igualant l'*RMS* al quocient de preus, i substituint posteriorment a la restricció pressupostària de cada agent, obtenim les següents funcions de demanda:

$$x_1^D = \frac{15p_x + 40p_y}{2p_x} \qquad y_1^D = \frac{15p_x + 40p_y}{2p_y}$$
$$x_2^D = \frac{30p_x + 5p_y}{2p_x} \qquad y_2^D = \frac{30p_x + 5p_y}{2p_y}$$

c) En l'equilibri, els mercats del bé x i del bé y s'han de buidar. És a dir:

$$x_1^D + x_2^D = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 = 45,$$
$$y_1^D + y_2^D = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 = 45.$$

Substituint les funcions de demanda en una d'aquestes dues equacions, obtenim la relació de preus d'equilibri d'aquesta economia. Per exemple, agafem la primera equació:

$$x_1^D + x_2^D = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 = 45 \rightarrow \frac{15p_x + 40p_y}{2p_x} + \frac{30p_x + 5p_y}{2p_x} = 45.$$

Operant, obtenim la relació de preus d'equilibri:

$$\frac{p_x}{p_y} = 1.$$

A partir de la llei de Walras només podem determinar els preus relatius dels béns. Així, qualsevol parell de preus (p_x, p_y) que compleixi aquesta relació serà un equilibri de l'economia.

d) Per a calcular la quantitat consumida, substituïm la relació de preus d'equilibri $\left(\frac{p_x}{p_y} = 1\right)$ en les funcions de demanda dels agents, i obtenim:

$$x_1^D = \frac{15p_x + 40p_y}{2p_x} = \frac{15p_x + 40p_x}{2p_x} = 27{,}5 \qquad y_1^D = \frac{15p_x + 40p_y}{2p_y} = \frac{15p_y + 40p_y}{2p_y} = 27{,}5$$
$$x_2^D = \frac{30p_x + 5p_y}{2p_x} = \frac{30p_x + 5p_x}{2p_x} = 17{,}5 \qquad y_2^D = \frac{30p_x + 5p_y}{2p_y} = \frac{30p_y + 5p_y}{2p_y} = 17{,}5.$$

A partir del primer teorema de l'economia del benestar, sabem que aquesta solució d'equilibri competitiu és eficiència de Pareto. També podem comprovar que l'anterior assignació pertany a la corba de contracte que hem calculat en el primer apartat.

2.

a) La corba de contracte representa assignacions de béns que compleixen dos requisits:

- L'assignació de béns és factible (condició 1).
- Les corbes d'indiferència dels dos consumidors són tangents (condició 2).

La condició 1 equival al fet que la suma de les dotacions inicials individuals és la suma de les dotacions totals en l'economia:

$$x_1^A + x_1^B = 2 + 1 = 3,$$
$$x_2^A + x_2^B = 0 + 1 = 1.$$

Pel que fa a la condició 2, calculem la relació marginal de substitució de l'individu A:

$$RMS^A(x_1, x_2) = \frac{\frac{1}{x_1^A}}{\frac{1}{x_2^A}} = \frac{x_2^A}{x_1^A}$$

I per a l'individu B:

$$RMS^B(x_1, x_2) = \frac{\frac{1}{x_1^B}}{\frac{1}{x_2^B}} = \frac{x_2^B}{x_1^B}.$$

Igualant les taxes marginals de substitució d'ambdós individus obtenim:

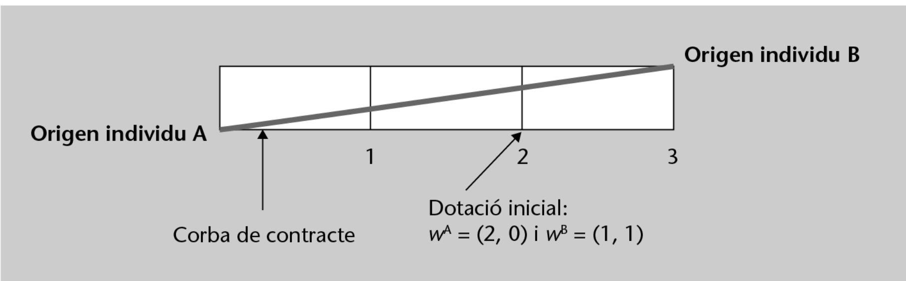
$$\frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{x_2^B}{x_1^B}.$$

I combinant ambdues condicions, obtenim la corba de contracte d'aquesta economia:

$$\frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{x_2^B}{x_1^B},$$
$$x_1^B = 3 - x_1^A,$$
$$x_2^B = 1 - x_2^A.$$
$$\frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{1 - x_2^A}{3 - x_1^A} \rightarrow x_1^A = 3x_2^A,$$

que és l'expressió de la corba de contracte.

b) Sabem que les dotacions totals de l'economia són (3, 1), i per tant, la capsa d'Edgeworth té una dimensió 3 × 1.



El dibuix mostra clarament que la dotació inicial no és una assignació eficient, ja que no és un punt sobre la corba de contracte. Per tant, en aquesta economia hi haurà intercanvi.

c) Per tal de calcular l'equilibri competitiu hem de maximitzar la funció d'utilitat de cada individu subjecte a la seva restricció pressupostària, que es determina tenint en compte les dotacions inicials de cada individu.

Per a l'individu A:

$$\begin{aligned}&\text{Max. } U^A(x_1,\ x_2) = \ln x_1^A + \ln x_2^A \\ &\text{s.a.} \quad p_1 x_1^A + p_2 x_2^A = 2p_1\end{aligned}$$

Sabem que la relació marginal de substitució és igual al pendent p_1/p_2. Per tant:

$$RMS^{\mathrm{A}}(x_1,\ x_2) = \frac{x_2^{\mathrm{A}}}{x_1^{\mathrm{A}}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Substituint aquesta relació en la restricció pressupostària obtenim:

$$2p_1 x_1^{\mathrm{A}} = 2p_1 \Rightarrow x_1^{\mathrm{A}} = 1.$$

Com que la dotació inicial total del bé x_1 és igual a 3, fàcilment podem saber quina és la dotació final de l'individu B pel que fa al bé 1:

$$x_1^{\mathrm{A}} + x_1^{\mathrm{B}} = 3 \Rightarrow x_1^{\mathrm{B}} = 2.$$

D'altra banda, per la corba de contracte sabem que:

$$x_1^{\mathrm{A}} = 3x_2^{\mathrm{A}}.$$

Aleshores:

$$x_2^{\mathrm{A}} = \frac{1}{3} = 0{,}33.$$

I, finalment:

$$x_2^{\mathrm{A}} + x_2^{\mathrm{B}} = 1 \Rightarrow x_2^{\mathrm{B}} = 1 - 0{,}33 = 0{,}66.$$

És a dir:

- L'individu A passa d'una dotació inicial de (2, 0) a (1, 0,33). És a dir, és venedor del bé x_1 i comprador del bé x_2.
- L'individu B passa d'una dotació inicial de (1, 1) a (2, 0,66). De manera que és comprador del bé x_1 i venedor de l'x_2.

A partir de la igualtat entre la taxa marginal de substitució i el quocient de preus, tenim:

$$\frac{x_2^{\mathrm{A}}}{x_1^{\mathrm{A}}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

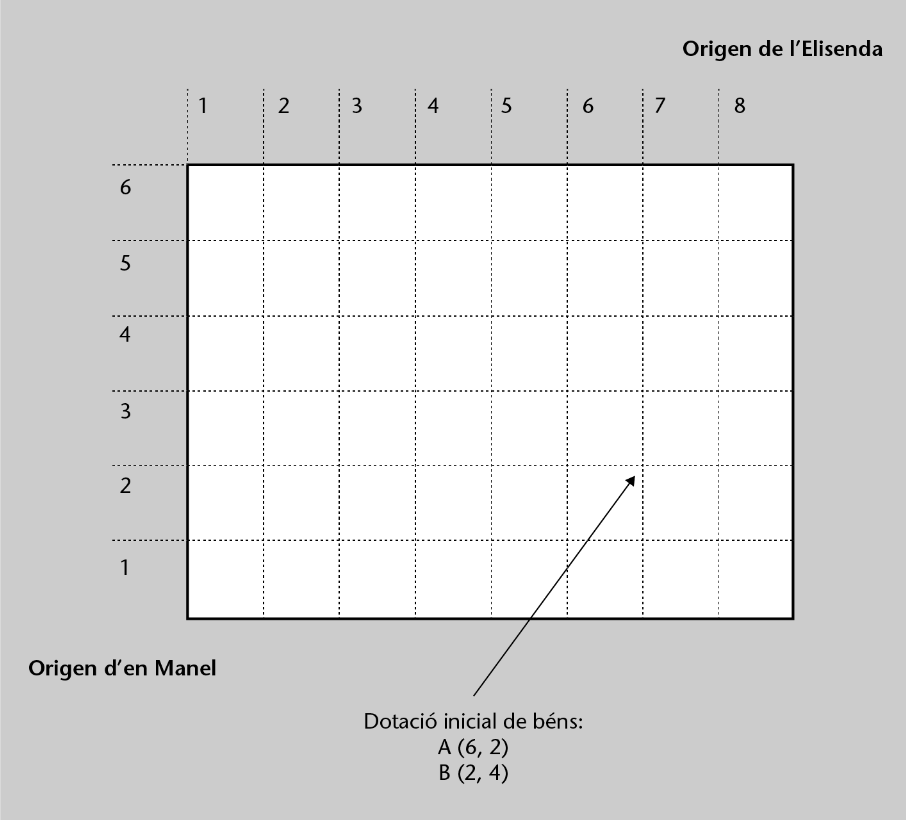
Llavors, la relació de preus (o preus relatius) d'equilibri és igual a:

$$\begin{aligned}&\frac{p_1}{p_2} = \frac{0{,}33}{1} = 0{,}33, \\ &p_1 = 0{,}33p_2.\end{aligned}$$

3. La dotació total de recursos de l'economia serà igual a:

$$\begin{aligned}x_r^{\mathrm{A}} + x_r^{\mathrm{B}} &= 6 + 2 = 8, \\ x_e^{\mathrm{A}} + x_e^{\mathrm{B}} &= 2 + 4 = 6.\end{aligned}$$

Atès que les dotacions totals de l'economia són (8, 6), haurem de dibuixar una capsa d'Edgeworth de dimensió 8 × 6. Situem les dotacions de cada individu dins d'aquesta caixa:



Per tal de determinar si la dotació inicial d'entrepans i refrescos és eficient, cal tenir en compte que les assignacions eficients han de ser factibles (és a dir, cal que siguin dins de la capsa d'Edgeworth) i les corbes d'indiferència dels consumidors han de ser tangents (és a dir, les taxes marginals de substitució dels dos consumidors han de ser iguals).

L'assignació és factible, ja que es troba dins de la capsa d'Edgeworth. Per tal de veure si les corbes d'indiferència d'en Manel i l'Elisenda són tangents, hem d'utilitzar la informació sobre la taxa marginal de substitució. Com que cada individu té una taxa marginal de substitució entre els entrepans i els refrescos diferent, les corbes d'indiferència no són tangents en aquesta combinació. Això fa concloure que no es tracta d'una assignació eficient.

Exercicis d'autoavaluació

1.

a) La corba de contracte és el conjunt de punts de la caixa d'Edgeworth que representen les assignacions eficients. En cas de preferències regulars, com en el cas de les preferències Cobb-Douglas, és el conjunt de punts de tangència de les corbes d'indiferència dels dos agents. Per tant, les assignacions eficients verifiquen el següent:

- L'assignació és factible (és un punt dins la caixa d'Edgeworth):

$$x_{1a} + x_{1b} = 21 \text{ i } x_{2a} + x_{2b} = 9. \quad (1)$$

- La condició de tangència de les corbes d'indiferència:

$$\text{RMS}_a\,(x_{1a}, x_{2a}) = \text{RMS}_b\,(x_{1b}, x_{2b}). \quad (2)$$

És a dir:

$$\text{RMS}_a\,(x_{1a}, x_{2a}) = \frac{\dfrac{\partial u_a}{\partial x_{1a}}}{\dfrac{\partial u_a}{\partial x_{2a}}} = \frac{x_{2a}^{\;2}}{2x_{1a}x_{2a}} = \frac{x_{2a}}{2x_{1a}}, \text{ i } \text{RMS}_b\,(x_{1b}, x_{2b}) = \frac{\dfrac{\partial u_b}{\partial x_{1b}}}{\dfrac{\partial u_b}{\partial x_{2b}}} = \frac{2x_{1b}x_{2b}}{x_{1b}^{\;2}} = \frac{2x_{2b}}{x_{1b}}.$$

Si ho resolem, (2) en el nostre cas és $\dfrac{x_{2a}}{2x_{1a}} = \dfrac{2x_{2b}}{x_{1b}}$.

Tenint en compte (1), la igualtat anterior es pot reescriure d'aquesta manera:

$$\frac{x_{2a}}{2x_{1a}} = \frac{2(9 - x_{2a})}{21 - x_{1a}}.$$

Operant, derivem l'equació de la corba de contracte (CC):

$$x_{2a} = \frac{12x_{1a}}{7 + x_{1a}} \qquad 0 \leq x_{1a} \leq 21.$$

b) La dotació inicial, $\mathbf{w}_a = (9, 3)$ no és eficient, ja que no compleix l'equació de la CC:

$$\frac{12 \times 9}{7 + 9} = 6{,}75 \neq 3\,.$$

c) El cor és el conjunt d'assignacions que no es poden rebutjar –és a dir, millorar– per cap coalició d'agents. Són les assignacions eficients en què cada individu està millor o igual que en la dotació inicial, és a dir, el tram de la corba de contracte situat entre les corbes d'indiferència corresponents a les dotacions inicials.

- Si a es manté amb la utilitat inicial, $u^w{}_a = 9(3)^2 = 81$.
  Equació de la corba d'indiferència de a que passa per la dotació inicial: $x_{1a}\, x_{2a}{}^2 = 81$.
  La cistella que compleix les dues equacions, l'equació de la CC i l'equació $x_{1a}\, x_{2a}{}^2 = 81$, és la següent:

  $$x'_{1a} = 4{,}11 \qquad x'_{2a} = 4{,}44.$$

- Si b es manté en el nivell d'utilitat inicial, $u^w{}_b = 12^2 6 = 864$.
  La corba d'indiferència de b que passa per la dotació inicial és la següent: $x_{1b}{}^2\, x_{2b} = 864$.
  Tenint en compte (1), podem escriure la corba anterior en termes de x_{1a} i x_{2a}:

  $$(21 - x_{1a})^2\, (9 - x_{2a}) = 864.$$

  La cistella que compleix les dues equacions (de la CC i de la corba d'indiferència de b que passa per la dotació inicial) és la següent:

  $$x_{1a} = 5{,}62 \qquad x_{2a} = 5{,}35.$$

  Per tant, el cor o nucli és el següent:

  $$x_{2a} = \frac{12x_{1a}}{7 + x_{1a}} \qquad 4{,}11 \leq x_{1a} \leq 5{,}62.$$

d) Un equilibri competitiu $(x^0_{1a}, x^0_{2a}, x^0_{1b}, x^0_{2a}\ p°)$ verifica que el cistell (x^0_{1h}, x^0_{2h}) és òptim per l'agent h, i la funció d'excés de demanda agregat del bé 1 és nul en el preu relatiu $p°$. A partir de la llei de Walras, sabem que si imposem buidatge en un dels mercats, en l'altre també es compleix.
Trobem les demandes dels agents pel preu relatiu $p = p_1/p_2$ fent servir el bé 2 com a numerari. Pel que fa a l'agent a, la cistella que soluciona el problema d'optimització compleix el següent:

$$\text{RMS}_a\,(x_{1a}, x_{2a}) = p \qquad p x_{1a} + x_{2a} = p\, w_{1a} + w_{2a}.$$

Tenint en compte com és la funció d'utilitat i les dotacions de l'individu a, tenim el següent:

$$\frac{x_{2a}}{2x_{1a}} = p \qquad p x_{1a} + x_{2a} = p\, 9 + 3.$$

Si resolem aquest sistema, obtenim les demandes de l'agent a:

$$x^*{}_{1a} = \frac{3p_1 + p_2}{p_1} \text{ i } x^*{}_{2a} = \frac{6p_1 + 2p_2}{p_2}.$$

Fem el mateix per a l'agent b:

$$\frac{2x_{2b}}{x_{1b}} = p \qquad p x_{1b} + x_{2b} = p\ 12 + 6.$$

Per tant, les demandes de l'agent b són:

$$x^*{}_{1b} = \frac{8p_1 + 4p_2}{p_1} \text{ i } x^*{}_{2b} = \frac{4p_1 + 2p_2}{p_2}\,.$$

La funció d'excés de demanda agregat del bé 1 és $z_1(p) = 3 + \frac{1}{p} + 8 + \frac{4}{p} - 21$.

Pel preu relatiu d'equilibri $p°$ el mercat del bé 1 es buida, $z_1(p°) = 0$.

És a dir, $p° = \frac{1}{2}$

A aquest preu, les quantitats d'equilibri són les següents:

$$x^0_{1a} = 5,\; x^0_{2a} = 5,\; x^0_{1b} = 16,\; x^0_{2b} = 4.$$

e) L'assignació d'equilibri és eficient perquè compleix l'equació de la corba de contracte:

$$\frac{12x^0_{1a}}{7 + x^0_{1a}} = \frac{12 \times 5}{7+5} = 5 = x^0_{2a}\;.$$

L'assignació d'equilibri dóna més utilitat a ambdós agents que la dotació inicial i està sobre la CC. En conseqüència, és un punt del cor.

2.

a) L'equació de la corba de contracte (CC) satisfà el següent: $\text{RMS}_a = \text{RMS}_b \rightarrow 8 - x_{1a} = 6 - w_1 + x_{1a}$ $\rightarrow x^c{}_{1a} = (10 - 6 + 8)/2 = 6$ és una línia vertical situada en $x^c{}_{1a} = 6$.
La dotació inicial, $w_a = (8, 2)$ no és eficient, no compleix l'equació de la CC, ja que $x_{1a} = 6 \neq 8$.

b) Les demandes, si els agents es comporten de manera competitiva, amb $p = p_1/p_2$, s'obtenen de les condicions de primer ordre:

Per a a:	$\text{RMS}_a = p$	$px_{1a} + x_{2a} = p\,8 + 2$.
És a dir:	$x^*{}_{1a} = 8 - p$	$x^*{}_{2a} = 2 + p^2$.
Per a b:	$\text{RMS}_b = p$	$px_{1b} + x_{2b} = p\,2 + 8$.

Si ho resolem, tenim el següent:

$$x^*{}_{1b} = 6 - p \qquad x^*{}_{2b} = 8 - 4p + p^2.$$

La funció d'excés de demanda o de demanda transaccional del bé 1 és $z_1(p) = 14 - 2p - 10$. Pel preu d'equilibri $p°$ es compleix $z_1(p°) = 0$.
Aleshores, el preu d'equilibri és $p° = 2$.
Com a implicació de la llei de Walras, el mercat 2 també ha d'estar en equilibri. Es comprova que per $p^* = 2$, la demanda total del bé 2 és $x°_2 = 6 + 4 = 10$, que iguala l'oferta fixa que hi ha. D'altra banda, les quantitats consumides pels dos agents dels dos béns són les següents:

$$x°_{1a} = 6 \qquad x°_{2a} = 6 \qquad x°_{1b} = 4 \qquad x°_{2b} = 4.$$

c) L'assignació en l'equilibri competitiu és eficient, ja que compleix l'equació de la CC, com es comprova si se substitueix el preu d'equilibri en la demanda del bé 1 per part de a: $x°_{1a} = 6$.
L'assignació d'equilibri dóna més utilitat a ambdós agents que la dotació inicial i està sobre la CC. Per tant, és un punt del cor.

3.

a) Agent a:
Recta de balanç: $p\,x_{1a} + x_{2a} = 200\,p$. Comportament: $x_{1a} = x_{2a}$.
Funcions de demanda de l'agent a: $x^*{}_{1a} = \frac{200p}{1+p}$; $x^*{}_{2a} = \frac{200p}{1+p}$.

b) Agent b:
Recta de balanç: $p\,x_{1b} + x_{2b} = 400$. Comportament: $x_{2b} = 0$.
Funcions de demanda de l'agent b: $x^*{}_{1b} = 400/p_1$; $x^*{}_{2b} = 0$.

c) Agent c:
Recta de balanç: $px_{1c} + x_{2c} = p200 + 600$. Comportament: $px_{1c} = x_{2c}$.
Funcions de demanda de l'agent c: $x^*{}_{1c} = 100 + \frac{300}{p}$; $x^*{}_{2c} = 100p + 300$.

d) Agent *d*:
Recta de balanç: $px_{1d} + x_{2d} = p600 + 600$. Comportament: $px_{1d} = 2x_{2d}$.

Funcions de demanda de l'agent *d*: $x^*_{1d} = 400 + \dfrac{400}{p}$; $x^*_{2d} = 200p + 200$.

Funció d'excés de demanda agregat del bé 1, després de simplificar:

$$z_1(p) = 200p_2 - 600p - 1.100.$$

Pel preu d'equilibri $p°$, es compleix $z_1(p°) = 0$ i, per tant, $p° = 3{,}16$.
Es pot comprovar que també anul·la l'excés de demanda agregat del bé 2, $z_2(p°) = 0$.

4. L'alternativa correcta és la *c*. Les altres són falses.
Que les dues primeres alternatives són incorrectes es desprèn directament de la definició d'eficiència paretiana: ***x*** és OP si no hi ha una altra ***x***', que, sense baixar el benestar de ningú, augmenti, almenys, la utilitat d'un individu. És a dir, ***x*** és OP si canviar a un altra assignació, en què augmenta el benestar d'un agent, implica necessàriament baixar el benestar de l'altre.
L'afirmació *c* és vertadera. Si se sumen membre a membre les desigualtats de la definició d'OP, com que almenys una de les desigualtats és estricta, s'obtindrà una altra desigualtat estricta.
Per tant, si ***x*** és OP, no hi ha cap ***x***' que verifiqui el següent:

$$u_a(x'_{1a}, x'_{2a}) + u_b\,(x'_{1b}, x'_{2b}) > u_a(x_{1a}, x_{2a}) + u_b\,(x_{1b}, x_{2b}).$$

Aleshores, la suma d'utilitats és màxima per a l'assignació ***x***.
L'alternativa *d* és falsa. Si restem membre a membre les desigualtats anteriors, el sentit de la desigualtat resultant pot ser qualsevol. De fet, el criteri paretià no pretén jutjar la desigualtat.

5. L'alternativa *b* és correcta. Les altres són falses.
L'opció *a* és falsa, ja que els valors de les taxes marginals de substitució són les següents:

$$\text{RMS}_a = \frac{x_{1a}^{-1/2}}{2} \qquad \text{RMS}_b = \frac{x_{1b}^{-3/4}}{4}.$$

Avaluades en la dotació donen el següent:

$$\text{RMS}_a(w_a) = 8^{-1} > 12^{-1} = \text{RMS}_b(w_b).$$

Com que en la dotació **w**, *a* valora relativament més el bé 1 que *b*, si poden intercanviar, *a* procuraria augmentar la quantitat de bé 1 cedint, a canvi, bé 2.
L'alternativa *b* és vertadera. La corba de contracte d'una economia de canvi pur és el conjunt d'assignacions eficients en sentit de Pareto. Es pot obtenir si es maximitza la suma de funcions d'utilitat dels agents, $u_a + u_b$, subjecte a les restriccions de factibilitat (per a cada bé, la suma de consums dels dos individus iguala la dotació inicial).

$$\text{Màx. } x_{1a}^{1/2} + x_{2a} + x_{1b}^{1/4} + x_{2b}$$
$$\text{subjecte a } x_{1a} + x_{1b} = w_1;\ x_{2a} + x_{2b} = w_2; \qquad x_{hi} \geq 0;\ h = a, b;\ i = 1, 2.$$

Si substituïm les dues primeres restriccions en la funció objectiu, per tal d'expressar la maximització en termes només de les variables de *a*, que suposem situat en la caixa d'Edgeworth en l'origen de coordenades habitual, el problema esdevé el següent:

$$\underset{x_{1a}}{\text{Màx.}}\ x_{1a}^{1/2} + (w_1 - x_{1a})^{1/4} + w_2 \qquad x_{hi} \geq 0;\ h = a, b;\ i = 1, 2.$$

Aquesta funció és estrictament còncava respecte a x_{1a} i, per tant, la condició de primer ordre és necessària i suficient per a un màxim. La quantitat eficient x_{1a}^* s'obté derivant i igualant a zero:

$$\frac{x_{1a}^{-1/2}}{2} - \frac{(w_1 - x_{1a}^*)^{-3/4}}{4} = 0.$$

És a dir, $\text{RMS}_a\,(x_{1a}^*) = \text{RMS}_b\,(w_1 - x_{1a}^*)$.
Si s'aïlla x_{1a}^* (per prova i error, per exemple, es donen successius valors a x_{1a}^* fins que l'equació es compleix, tenint en compte que $w_1 = 20$), s'obté el següent:

$$x^c_{1a} = 17{,}34.$$

La corba de contracte és una línia recta vertical al nivell $x^c_{1a} = 17{,}34$:

$$\{(x_{1a}, x_{2a}): x^c{}_{1a} = 17{,}34,\ 0 \le x_{2a} \le 20\}.$$

L'alternativa *c* és falsa perquè la *b* és vertadera.
L'alternativa *d* és falsa perquè $x^c{}_{1a} = 17{,}34$ no pertany a cap assignació igualitària.

6. L'alternativa falsa és la *c*. Les altres són vertaderes.
L'opció *a* és vertadera. Es pot comprovar de la definició de corba de contracte com a conjunt de punts de tangència de les corbes d'indiferència dels dos agents, $\text{RMS}_a = \text{RMS}_b$.
Si l'agent té aversió al risc, les seves corbes d'indiferència són estrictament convexes. De l'expressió de la utilitat esperada i tenint en compte que sobre una corba d'indiferència la utilitat esperada és constant, trobem, diferenciant pel que fa a x_{1h}, que la taxa marginal de substitució de l'agent *h* iguala el quocient d'utilitats marginals ponderades per les probabilitats respectives:

$$\text{RMS}_h = \frac{\pi u'(x_{1h})}{(1-\pi)u'(x_{2h})}.$$

Si els agents assignen les mateixes probabilitats als dos estats del món, que hem representat mitjançant π, en igualar RMS les probabilitats es cancel·len i s'obté el següent:

$$\frac{u'(x_{1a})}{u'(x_{2a})} = \frac{u'(x_{1b})}{u'(x_{2b})}.$$

Aquesta igualtat es compleix sobre la línia de certesa, en què $x_{1a} = x_{2a}$, de pendent igual a 1.
L'opció *b* es vertadera. Si l'agent *b* és neutral al risc, les seves corbes d'indiferència són línies rectes amb pendent, en valor absolut, igual al quocient de probabilitats:

$$\text{RMS}_b = \frac{\pi}{(1-\pi)}.$$

Si les taxes marginals de substitució entre agents s'igualen, ocorre el següent:

$$\frac{\pi}{1-\pi} = \frac{\pi u'(x_{1a})}{(1-\pi)u'(x_{2a})}.$$

Es compleix per a $x_{1a} = x_{2a}$, tant si hi ha risc agregat com si no n'hi ha.
Finalment, si les creences són diferents, la igualtat d'RMS genera el següent:

$$\frac{\pi_a u'(x_{1a})}{(1-\pi_a)u'(x_{2a})} = \frac{\pi_b u'(x_{1b})}{(1-\pi_b)u'(x_{2b})}.$$

No és l'expressió d'una corba de contracte lineal amb pendent d'1 tant si hi ha risc agregat com si no n'hi ha. La corba de contracte només és una línia recta de pendent 1 si coincideix amb la línia de certesa de *a*, que té l'expressió $x_{2a} = x_{1a}$, per $0 \le x_{1a} \le w_1$, cosa que en l'equació precedent és impossible que es compleixi perquè les creences són diferents i les funcions d'utilitat (tenint en compte l'aversió al risc) són estrictament còncaves. D'aquesta manera, les utilitats marginals baixen quan els seus arguments augmenten. Aleshores, l'opció *d* és vertadera i l'alternativa falsa és la *c*.

7.

a) L'eficiència *ex ante* requereix l'eliminació de risc. L'assignació serà eficient si les corbes d'indiferència dels agents són tangents:

$$\text{RMS}_a = \frac{\pi u'(x_{1a})}{(1-\pi)u'(x_{2a})} = \frac{0{,}4 x_{1a}^{-1/2}}{0{,}6 x_{2a}^{-1/2}} = \text{RMS}_b = \frac{\pi}{1-\pi} = \frac{0{,}4}{0{,}6}.$$

Això requereix el següent: $x_{2a} = x_{1a}$.
L'expressió de la corba de contracte és, per tant, $x_{2a} = x_{1a}$ per $0 \le x_{1a} \le 10$.

b) Aquesta condició no es dóna en la situació inicial, ja que $w_{2a} < w_{1a}$.

c) L'agent *a* obté en la situació inicial $U_a = 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 2^{1/2}$.
Si en la situació final es manté en aquesta utilitat $U_a = 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 2^{1/2} = x_{1a}{}^{1/2}$.
Per tant, $x'_{1a} = 2{,}72$.
L'agent *b* obté en la situació inicial $U_b = 2{,}4 + 4{,}8 = 7{,}2$.

Si en la situació final es manté en aquesta utilitat $U_b = 7{,}2 = x_{1b}$.
Per tant, $x''_{1a} = 10 - 7{,}2 = 2{,}8$.
És a dir, el cor és el conjunt de punts que verifiquen el següent:

$$x_{2a} = x_{1a} \qquad \text{per } 2{,}72 \le x_{1a} \le 2{,}8.$$

8.

a) El problema de Robinson en autarquia consisteix a trobar la combinació $\boldsymbol{x}$ que maximitzi la seva utilitat subjecte a la restricció que imposa la frontera de producció de l'economia. Aquesta funció de transformació, que mostra la màxima producció del bé 2 per cada nivell factible del bé 1, té pendent negatiu i és estrictament còncava. És a dir:

$$\text{Max. } u(x_1, x_2) = x_1x_2 \qquad \text{subjecte a } x_2 = 600 - x_1^2/2.$$

El cistell òptim queda caracteritzat per les dues condicions de primer ordre següents:

- Condició de tangència entre corba d'indiferència i funció de transformació, RMS = RMT, $x_2/x_1 = x_1$.
  Es a dir, $x_1^2 = x_2$.
- El cistell òptim satisfà la restricció que imposa la funció de transformació, $x_2 = 600 - x_1^2/2$.
  El sistema de dues equacions amb dues incògnites té la solució següent:

$$x_1° = 20 \qquad x_2° = 400.$$

El preu d'equilibri competitiu de l'economia tancada coincidiria amb l'RMS (i amb l'RMT) pel cistell òptim, d'acord amb el primer teorema fonamental de l'economia del benestar:

$$p° = x_1° = 20.$$

b) Per tal de determinar l'òptim en economia oberta, es pot utilitzar un procés d'optimització amb dues etapes:

- En primer lloc, les decisions de producció es prenen de manera que maximitzin la renda de Robinson als preus mundials p'. És com si les adoptés l'empresa Crusoe, SA, preuacceptant i que vol maximitzar el seu benefici:

$$\text{Màx. } p'x_1 + x_2 = 10\, x_1 + x_2 \quad \text{subjecte a } x_2 = 600 - x_1^2/2.$$

Per tal de resoldre el problema, es pot substituir la restricció en la funció objectiu. Alternativament, el problema es pot considerar com obtenir la isobenefici (la recta de pendent -10 en què els beneficis són constants) més alta tangent a la funció de transformació. Les condicions de primer ordre són les següents:

– En l'òptim de producció, la recta isobenefici més allunyada de l'origen és tangent a la corba de transformació: $10 = x_1$.
– L'òptim s'ha de situar sobre la corba de transformació: $x_2 = 600 - x_1^2/2$.

D'aquestes condicions s'obtenen les decisions de producció:

$$x_1° = 10 \qquad x_2° = 550.$$

- En segon lloc, Robinson pren les decisions de consum a partir de maximitzar la utilitat subjecta a la restricció pressupostària. El límit pressupostari que té Robinson per a fer intercanvis és el valor del que ha produït, $px_1 + x_2 = p\ 10 + 550$.
  Si valorem la producció en els preus externs, p', tenim $10\, x_1 + x_2 = 650$.
  Per l'òptim de consum, les condicions de primer ordre són les següents:

– RMS $= p' \to x_2/x_1 = 10$.
– L'òptim de consum s'ha de situar sobre la recta de balanç: $10\, x_1 + x_2 = 650$.

D'aquestes condicions les decisions de consum seran les següents:

$$x_2° = 325 \qquad x_1° = 32{,}5.$$

c) La utilitat que Robinson obté en l'economia oberta és superior que la d'autarquia, ja que:

$$32{,}5 * 325 = 10.562{,}5 > 20 * 400 = 8.000.$$