
Béns públics i externalitats

PID_00245340

Martí Oliva Furés

Amb la col·laboració de
Maria Llop Llop

Temps mínim previst de lectura i comprensió: **5 hores**



Universitat
Oberta
de Catalunya

Índex

Introducció	5
Objectius	8
1. Béns públics i absència de rivalitat en el consum	9
2. L'assignació d'un bé públic divisible	11
2.1. El subministrament eficient d'un bé públic divisible	11
2.2. Provisió privada d'un bé públic divisible	14
3. Mecanismes de decisió de béns públics. La solució de Lindahl	18
3.1. El problema del polissó	22
4. L'assignació d'un bé públic indivisible	23
4.1. Provisió eficient d'un bé públic indivisible	23
4.2. Provisió privada d'un bé públic indivisible	24
4.3. El finançament amb contribucions voluntàries d'un bé públic indivisible	25
4.4. Mecanismes de revelació de preferències	27
5. Externalitats: el problema	30
5.1. Assignació eficient de recursos en presència d'externalitats	30
5.2. Solucions a la problemàtica de les externalitats	32
6. El teorema de Coase	36
7. Externalitats mútues	39
8. La tragèdia dels béns comunals	41
Resum	43
Activitats	45
Exercicis d'autoavaluació	46
Solucionari	48

Introducció

Els béns públics i les externalitats es consideren una errada del mercat, atès que davant d'aquestes situacions el funcionament del mercat competitiu no proveeix una assignació eficient. En particular, en presència de béns públics i externalitats no s'assoleix una assignació òptima en el sentit de Pareto.

Un **bé públic pur** és un bé o servei cada unitat del qual pot ser consumida per més d'una persona a la vegada i de l'ús o consum del qual ningú no pot ser exclòs. Més concretament, diem que un bé públic pur té un consum no rival, la qual cosa significa que la quantitat disponible per a un individu no es veu reduïda per la quantitat de consum que fan els altres individus. I a més, un bé públic pur té un consum no exclòs, la qual cosa vol dir que ningú pot ser privat de gaudir del bé o servei.

Un **bé privat** és un bé o servei cada unitat del qual és consumida per un sol individu. El consum dels béns privats es caracteritza per la rivalitat, en el sentit que el consum d'un individu només es pot fer en detriment del consum de qualsevol altre individu, i per la capacitat d'exclusió, en el sentit que mitjançant l'adquisició del bé s'exclou qualsevol altre consumidor del seu ús.

Molts béns de l'economia se situen a mig camí entre els béns públics purs i els béns privats, i s'anomenen **béns mixtos**. Els béns mixtos compleixen una de les característiques que es donen en els béns públics purs (no-rivalitat del consum i no-exclòsibilitat), però no totes dues. Aquest seria el cas, per exemple, de béns que estan subjectes a congestió, com ara una carretera en què hi hagués molt trànsit en hores punta; compliria la no-exclòsibilitat, però en el seu ús hi hauria en certa mesura rivalitat. Una situació de béns mixtos també pot ser deguda a un ús indegut dels usuaris, que pot portar a un esgotament d'aquests béns. Aquesta és la situació coneguda com «la tragèdia dels béns comunals», que es produeix en determinats recursos naturals d'accés lliure. Els béns mixtos s'anomenen generalment béns públics.

La combinació d'aquestes característiques pel que fa la consum dels béns dona lloc a la tipologia de la taula 1.

Taula 1. Tipus de béns segons les característiques del consum

	Consum no rival	Consum rival
Consum no exclòs	Béns públics purs <ul style="list-style-type: none"> • Defensa • Sanejament públic • Recerca científica 	Béns comunals <ul style="list-style-type: none"> • Bolets del bosc • Recursos pesquers • Carrer congestionat
Consum exclòs	Béns convertibles en escassos <ul style="list-style-type: none"> • Televisió de pagament • Aplicacions per a telèfons intel·ligents 	Béns privats <ul style="list-style-type: none"> • Cafè amb llet • Abric

Béns públics purs

Exemples de béns públics purs són el sistema de defensa d'un Estat o l'enllumenat públic d'una ciutat.

Béns comunals

Per exemple, són béns comunals la quantitat disponible de pesca o una espècie animal en perill d'extinció a causa d'una cacera excessiva.

Els béns de la primera fila de la taula (béns públics purs i béns comunals) donen lloc a una assignació ineficient del sistema de mercat. Aquesta ineficiència està basada en el fet que quan un bé té un consum no excluïble presenta el **problema del polissó** o del parasitarisme (*free-rider*, en anglès). Així, atès que els individus actuen en el seu propi interès i no poden ser exclosos de l'ús d'un bé d'aquest tipus, no tenen incentius per a pagar i «viatgen gratis».

El problema del polissó fa que el mercat no proveeixi un nivell eficient de producció dels béns no excluïbles. Una conseqüència de la manca d'incentius per a pagar per aquests béns és que cap agent estaria disposat a produir-los. Conseqüentment, en una economia de mercat sense cap intervenció les quantitats d'aquests béns serien ineficientment baixes.

A la taula 1 apareix una altra categoria de béns amb problemes d'eficiència, que són els béns de consum no rival i excluïble potencialment convertibles en escassos, com per exemple les televisions de pagament. En aquest cas, la no rivalitat en el consum fa que el cost marginal d'oferir una unitat addicional del bé o servei tendeixi a zero. Com que el preu que es cobra per aquests béns és superior a zero, és a dir, superior al seu cost marginal, el consum d'aquests béns serà menor que la quantitat òptima socialment.

Així, els únics béns que poden ser produïts i consumits eficientment són els béns privats, amb consum rival i excluïble. Aquesta categoria apareix representada en el quadrant inferior dret de la taula 1.

Per tal de solucionar les ineficiències que porten associats els béns públics, aquests béns o serveis se subministren mitjançant sistemes alternatius al mecanisme de mercat. En algunes situacions, la provisió es fa amb contribucions voluntàries dels agents privats, com és el cas de les donacions per a finançar la recerca científica. Els béns públics generalment són proveïts pel Govern i, en aquesta situació, es paguen mitjançant impostos dels contribuents.

Les **externalitats** o efectes externs són una conseqüència del funcionament del mercat que no es té en compte adequadament. Més concretament, es produeixen externalitats quan uns agents imposen costos o proporcionen beneficis a altres agents però, en canvi, no tenen incentiu econòmic per a considerar aquests costos o beneficis d'una manera acurada. En el primer cas, quan s'imposen costos o perjudicis, estem davant d'una situació d'**externalitats negatives**. En el segon cas, quan s'imposen beneficis o avantatges, estem davant d'**externalitats positives**.

Una altra classificació distingeix entre les externalitats ocasionades per la producció i les externalitats ocasionades pel consum. Les **externalitats de producció** recauen sobre els agents productors com a resultat d'altres activitats, que al seu torn poden ser de producció o de consum. Una situació d'aquest estil es donaria en un camp de golf que es rega amb aigua d'un riu on vessen re-

sidus empreses del sector químic. En canvi, les **externalitats de consum** recauen sobre els particulars, com a resultat d'altres activitats de consum o de producció. Per exemple, es dona una externalitat de consum en un pis d'estudiants on viu un fumador i aquest perjudica la resta de companys.

Tant si es tracta d'externalitats positives com negatives, d'externalitats de producció o de consum, la solució que aporta el mecanisme de mercat no és eficient. Això es deu al fet que els agents decisors no tenen en compte els efectes externs (positius o negatius) ocasionats sobre altres agents. Per a fer front a aquest problema, hi ha diferents instruments de política pública capaços de redreçar la situació cap a l'òptim social.

El cas probablement més important d'externalitat negativa és el de la contaminació, en totes les seves formes (de l'aire, hídrica, acústica, visual, etc.). Els darrers anys, la contaminació de l'aire ha esdevingut un problema de primera magnitud a tot el món, com a conseqüència del procés de canvi climàtic.

Davant de l'externalitat (negativa) de la contaminació, el cost marginal social de la producció contaminant és més elevat que el cost marginal privat, per la qual cosa la quantitat de producció és superior a la que seria socialment òptima. Per tal de reconduir aquesta situació, el sector públic pot implementar instruments de política econòmica que apropin (augmentin) els costos privats als costos socials. Aquests instruments tenen com a finalitat aconseguir que els agents que generen l'externalitat l'acabin internalitzant en el mecanisme de determinació dels preus. Entre aquests instruments hi ha els impostos sobre emissions, els drets d'emissions negociables o bé els controls directes d'emissions. Una solució privada a les externalitats negatives consisteix en la possibilitat que el Govern estableixi clarament els drets de propietat i en garanteixi el compliment.

Una externalitat positiva és una errada de mercat perquè la quantitat de bé proveïda privadament és subòptima. Això és degut al fet que el benefici marginal social és superior al benefici marginal privat, per la qual cosa els mecanismes de mercat tendiran a oferir una quantitat inferior a l'òptima. Per exemple, aquesta és la situació creada en el sistema educatiu. Els beneficis que els individus observen privadament són menors que els beneficis de què gaudeix el conjunt de la societat quan augmenta el nivell mitjà d'educació. La solució a aquesta situació consisteix a concedir subvencions públiques que permetin aproximar el benefici privat al benefici públic, de manera que es tendeixi a augmentar el nivell educatiu i apropar-lo al nivell òptim socialment.

Objectius

En els materials didàctics d'aquest mòdul hi ha les eines per a assolir els objectius següents:

- 1.** Delimitar béns públics i externalitats a partir de les seves característiques.
- 2.** Determinar les condicions per l'eficiència en l'assignació de recursos en presència de béns públics i mostrar que el mercat no genera aquesta assignació eficient.
- 3.** Establir mecanismes per a revelar les preferències individuals per un bé públic i per a generar l'assignació eficient del bé esmentat.
- 4.** Presentar diferents tipus d'externalitats i mostrar que el mercat no condueix a una assignació òptima de recursos en presència d'externalitats.
- 5.** Expressar les diferents solucions a disposició del sector públic, les guies de política econòmica, per a fer front al problema de les externalitats i generar una assignació eficient dels recursos.

1. Béns públics i absència de rivalitat en el consum

L'anàlisi econòmica se centra en els anomenats *béns privats*, que comparteixen dues característiques:

1) **Mostren rivalitat en el consum o en la producció.** Són béns rivals. El consum o l'ús en la producció d'una unitat determinada de la mercaderia impedeix la utilització de la mateixa unitat per un altre agent. Dos consumidors no poden consumir la mateixa poma alhora o dos productors no poden fer servir simultàniament la mateixa unitat de treball.

2) **Són exclouïbles.** És possible evitar que qualsevol consumidor o productor consumeixi o utilitzi en la producció una unitat donada de la mercaderia. Aleshores, es pot racionar l'ús dels béns mitjançant preus: obtenen el bé els que estan disposats a pagar-lo i qui no paga queda exclòs de gaudir dels beneficis que brinda el bé.

Els béns que no tenen la primera propietat presenten **absència de rivalitat**, són béns no rivals. Dos o més consumidors poden consumir la mateixa unitat de policia o d'enllumenat públic alhora. Que una persona consumeixi una determinada quantitat de defensa nacional no impedeix que una altra persona ho pugui fer. L'absència de rivalitat en el consum es presenta quan el cost marginal de subministrar el bé a una altra persona és nul o molt baix.

Per als béns que no mostren la segona característica el **principi d'exclusió no funciona**. És impossible o molt costós racionar l'ús d'aquests béns mitjançant preus. Per exemple, és inviable impedir que una persona es beneficiï de la defensa nacional. Com que les persones saben que és impossible o molt costós que se les exclouï del consum, són reticents a declarar els beneficis que obtenen dels béns públics i eviten participar voluntàriament en el finançament. És el denominat **problema del polissó**. També se'l coneix amb el nom de **free rider**, **viatger sense bitllet** o **paràsit**. Aleshores, per tal d'assegurar la provisió del bé públic, sovint s'ha de recórrer als impostos com a manera de finançament.

Un bé és públic per les seves característiques de no-rivalitat i no-exclouïbilitat, independentment de qui el proveeixi. En altres paraules, un bé públic pot estar subministrat pel sector públic o pel sector privat, com el cas de la televisió. No perquè sigui el sector públic qui proveeixi certs béns són necessàriament públics. Algunes fàbriques de cotxes han estat propietat del sector públic i els cotxes són béns privats.

La taula següent presenta la classificació dels béns segons els criteris de rivalitat i possibilitat d'exclusió: béns públics purs o externalitats públiques, béns

Exemples d'absència de rivalitat

Les mercaderies següents són exemples d'absència de rivalitat en el consum: contaminació, defensa nacional, justícia, parcs, ones de ràdio o televisió, fars, sistema de navegació GPS, previsió meteorològica, carreteres no congestionades, museus amb pocs visitants i teatres, sales de cinema i espectacles en general, sense gaire audiència.


que són no rivals, però excloïbles, i que es coneixen com a *béns públics impurs* o *béns de club* (un *club* és una agrupació voluntària on els membres deriven beneficis de compartir un bé que té beneficis excloïbles); externalitats privades i, finalment, béns privats.

	Excloïble	No excloïble
Rival	Bé privat: pa, sabates.	Externalitat privada: carretera congestionada, pesca.
No rival	Bé públic impur o bé de club: teatre, cinema, seients d'avió, piscina pública, si no estan plens.	Bé públic, externalitat pública: defensa pública, contaminació, enllumenat públic.

Exemples

Com a exemples, assenyalem que la defensa nacional és un bé públic pur, ja que no hi ha manera d'excloure ningú dels beneficis d'evitar atacs d'altres països. D'altra banda, quan el sistema de defensa nacional està en funcionament, el cost marginal associat al fet que una persona addicional en gaudeixi és zero. Una cosa similar ocorre amb els beneficis d'una campanya de vacunació, que redueix les possibilitats de contraure la malaltia a tota la població.

Una platja, un parc o una carretera congestionats són rivals, però no excloïbles (l'exclusió pot ser viable, però és costosa: restringir l'accés a parcs d'ús públic implicaria col·locar un enreixat i vigilància en tot el perímetre i, possiblement, un procés polític desgastant). En un parc, l'exclusió és viable, però costosa. Seria el cas de restringir. Tanmateix, quan la carretera està congestionada, el bé esdevé rival. És a dir, el fet que hi circuli un cotxe addicional implica que el temps que tots els cotxes que ja eren a la carretera triguen a recórrer una distància determinada augmenta, de manera que també augmenta el cost marginal. Un teatre, un cinema o un seient d'un avió que no presenten congestió són no rivals i excloïbles. En una autopista no congestionada, el cost marginal associat al fet que hi circuli un cotxe de més és nul (és no rival). Tanmateix, és viable excloure del consum qui no pagui mitjançant un peatge (és excloïble).

Si hi ha exclusió (es pot excloure les persones de consumir el bé) i rivalitat en el consum (no es pot proporcionar un altre bé amb un cost marginal nul, ja que el consum d'una persona redueix la quantitat de bé que queda per a les altres), ens situem en l'àmbit de béns privats. 

2. L'assignació d'un bé públic divisible

En l'anàlisi dels béns públics ens centrarem en els purs, tot i que alguns dels resultats també es podran aplicar als béns públics impurs. En aquesta secció analitzarem la problemàtica d'un bé públic. La quantia d'aquest bé pot variar contínuament. El pressupost de la defensa nacional o de la policia i la despesa en enllumenat públic són exemples de béns públics d'aquest tipus.

Considerem el cas senzill d'una economia amb només dos béns: un de privat, que és numerari (és a dir, es fa servir com a unitat de compte a l'hora de fer intercanvis), i un altre de públic. Aleshores, determinem el nivell òptim des de la perspectiva social del bé públic. Com a criteri de benestar social, fem servir el criteri habitual d'optimitat paretiana adaptat al cas d'un bé públic divisible. Seguidament, comparem la quantitat eficient de bé públic amb la que generaria el lliure mercat, que típicament serà inferior. La ineficiència del mercat en el subministrament del bé públic fonamenta la intervenció del sector públic en la provisió del bé.

2.1. El subministrament eficient d'un bé públic divisible

Suposem que hi ha una societat amb dos béns, un de públic i un de privat, que és numerari, i dos agents, a (Abel) i b (Bernat), amb nivells de riquesa inicial w_a i w_b . x_a i x_b són el consum del bé privat de cada persona. La quantitat del bé públic (que es pot mesurar en euros) es representa mitjançant q . $C(q)$ és el cost que té en termes de la quantitat de bé privat a què es renuncia. La restricció de recursos social expressa que les despeses dels dos agents en el bé privat i el bé públic iguala la seva riquesa inicial total:

$$x_a + x_b + C(q) = w_a + w_b = w.$$

Pel que fa a les preferències dels agents $u_j(q, x_j)$, $j = a, b$, se suposa que són regulars, és a dir, monòtones i convexes, totes dues en sentit estRICTE.

Les quantitats socialment eficients dels diversos béns (un bé privat i un bé públic en aquest cas) han de maximitzar la suma d'utilitats dels consumidors subjecte a la restricció de recursos social:

$$\text{Màx.}_{q,x} u_a(q, x_a) + u_b(q, x_b) \quad \text{subjecte a } x_a + x_b + C(q) = w.$$

Si substituïm la restricció ($w - x_a - C(q) = x_b$) en la funció objectiu, reduïm el nombre de variables respecte a les que es maximitza:

$$\text{Màx.}_{q, x_a} u_a(q, x_a) + u_b(q, w - x_a - C(q)).$$

Les condicions de primer ordre d'aquest problema d'optimització són les següents:

$$\frac{\partial u_a}{\partial x_a} + \frac{\partial u_b}{\partial x_b}(-1) = 0.$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial q} + \frac{\partial u_b}{\partial x_b}(-1) \frac{dC(q)}{dq} + \frac{\partial u_b}{\partial q} = 0.$$

Simplificant, expressa la condició que ha de verificar el nivell òptim en sentit de Pareto de bé públic:

$$\frac{\partial u_a / \partial q}{\partial u_a / \partial x_a} + \frac{\partial u_b / \partial q}{\partial u_b / \partial x_b} = \frac{dC(q)}{dq}.$$

La condició de Samuelson de provisió eficient d'un bé públic estableix que la suma de les taxes marginals de substitució entre el bé públic i el bé privat per a tots els individus ha de ser igual al ritme o taxa en què la societat pot transformar el bé privat en bé públic:

$$RMSq x_a + RMSq x_b = RMTq x.$$

En l'expressió precedent hem tingut en compte que $C'(q) = RMTq x$, el cost marginal de proveir el bé públic expressat en termes de la quantitat de bé privat a què es renuncia, és la relació marginal de transformació del bé privat en bé públic.

Si les preferències dels agents són quasilineals, $u_j(q, x_j) = v_j(q) + x_j$, en què $v_j'(q) > 0$, $v_j''(q) < 0$, la condició de Samuelson diu que la suma de valoracions marginals del bé públic (o de disposicions marginals a pagar pel bé públic) de tots els individus ha d'igualar el seu cost marginal de provisió:

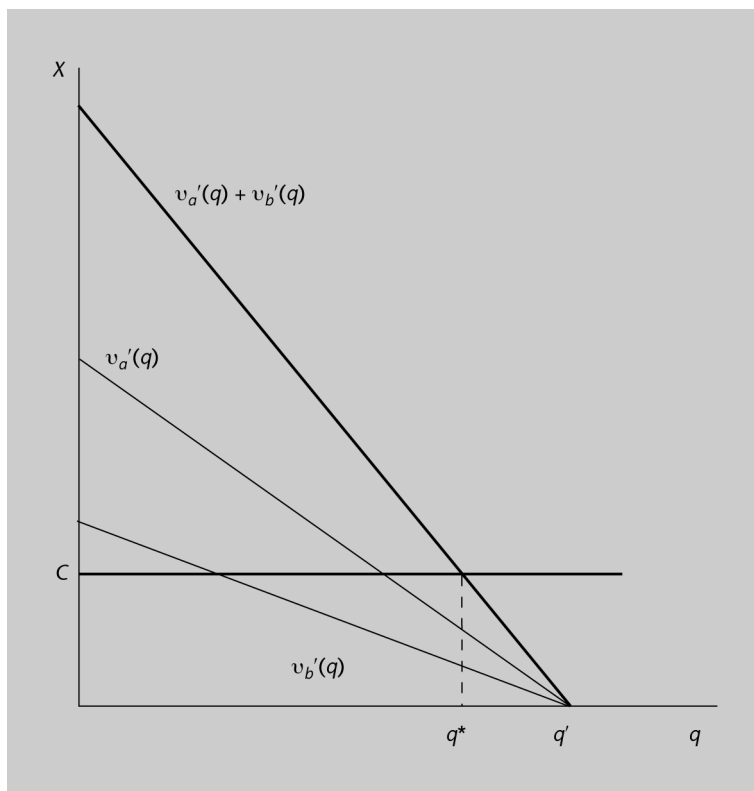
$$v_a'(q) + v_b'(q) = C'(q).$$

Si suposem que el cost marginal de producció del bé públic en termes del bé privat és constant, $C'(q) = c$, i que les preferències dels agents són quasilineals, la condició d'eficiència del bé públic es mostra gràficament en la gràfic 1. Com que el bé privat és numerari, és la variable en què s'expressen preus, costos i apareix en l'eix d'ordenades.

La corba $v_j'(q)$ mostra la demanda inversa de la persona j pel bé públic, és a dir, la quantitat màxima de bé privat a què està disposat a renunciar j per cada unitat addicional de bé públic. Per la quantitat q' de bé públic, la valoració marginal tant de a com de b és zero. Per quantitats inferiors de bé públic, $0 < q < q'$, la valoració de a supera la de b . La valoració marginal de la societat (el que està disposada a pagar per l'última unitat de bé públic) és la suma de les valoracions

marginals individuals, ja que cada unitat es consumeix pels dos agents alhora (els dos agents han de consumir la mateixa quantitat del bé públic). Gràficament, per tal de generar la valoració marginal social, les corbes $v_j'(q)$ s'hi afegeixen verticalment. La provisió eficient del bé públic, q^* , s'obté en el punt d'intersecció del cost marginal social amb la valoració marginal social.

Gràfic 1. Provisió eficient d'un bé públic



La condició de provisió eficient d'un bé públic és diferent a la condició d'eficiència quan només es consideren béns privats. Si x i y representen les quantitats de dos béns privats, el primer dels quals és numerari, les quantitats socialment òptimes verifiquen que el cost marginal del bé y en termes del x ha de ser igual a l'RMS de cada persona separadament:

$$\text{RMS}_{y_a} x_a = \text{RMS}_{y_b} x_b = C'(y_a + y_b).$$

Individus diferents consumeixen, en general, quantitats diferents dels béns privats. Tanmateix, per tal que l'assignació sigui eficient, tots han de valorar igualment l'última unitat de bé. En el cas d'un bé públic, tots els individus han de consumir la mateixa quantitat del bé, però poden valorar de manera diferent l'última unitat.

Si l'Abel consumeix dues pomes i en Bernat en consumeix una, i cadascú paga el seu preu de mercat de 0,20 €, per exemple, l'Abel (que paga 0,40 €) valora la segona poma igual que en Bernat valora la primera, en 0,20 €. Tanmateix, tots dos consumeixen la mateixa quantitat de Guàrdia Urbana (com ara la quantitat eficient q^* del gràfic 1), encara que a està disposat a pagar més que no pas b per l'última unitat d'aquest bé públic.

2.2. Provisió privada d'un bé públic divisible

La condició d'eficiència mostra la quantitat socialment òptima de bé públic que s'ha de produir. Aleshores, la qüestió que sorgeix és qui ha de gestionar la provisió del bé. El bé públic es proporciona en quantitats iguals a tots els agents i sembla natural establir contribucions dels ciutadans a fi de finançar aquest bé. L'assignació dels béns públics s'acostuma a decidir per mitjà del procés polític i incorpora algun tipus de votació entre els individus. Tanmateix, si es deixa a la voluntat dels individus finançar els béns públics, sembla probable que es generi una quantitat de bé públic força inferior a la quantitat òptima.

Mostrarem la ineficiència de la provisió privada amb un model amb dos individus, a i b , i dos béns, un bé privat i un bé públic. Un mecanisme senzill per a decidir la provisió privada d'un bé públic divisible consisteix en un sistema de contribucions voluntàries o subscripcions. Segons aquest sistema, cada individu j , per $j = a, b$, declara la seva contribució voluntària, $g_j \geq 0$, és a dir, la quantitat que està disposat a aportar per tal de finançar el bé públic. Com que suposem que el bé privat és numerari, la contribució mostra la quantitat de bé privat a què es renuncia per tal de finançar el bé públic. La recta pressupostària de l'individu j expressa que pot gastar-se la riquesa inicial w_j , sia en el bé privat, x_j , o en la contribució voluntària al bé públic, g_j :

$$x_j + g_j = w_j \quad j = a, b.$$

La quantitat del bé públic que es proveeix depèn de la suma de contribucions voluntàries o subscripcions dels dos agents, $g_a + g_b$, i de la tecnologia de producció del bé públic a partir del bé privat. Tal com hem fet en l'apartat anterior, considerarem que el cost marginal de producció del bé públic en termes del bé privat és constant, $C(q) = cq$. Si aquest cost es finança amb contribucions voluntàries, tenim el següent:

$$C(q) = cq = g_a + g_b.$$

La quantitat de bé públic com a funció de les contribucions voluntàries serà, per tant, la que es mostra a continuació:

$$q = \frac{g_a + g_b}{c}.$$

A fi de simplificar, suposarem que les preferències dels agents són quasilineals, $v_j(q) + x_j$, amb $v_j'(q) > 0$, $v_j''(q) < 0$, i que la valoració marginal del bé públic és més gran per part de l'agent a que per part de l'agent b , $v_a'(q) > v_b'(q)$.

En la provisió privada, els individus decideixen les contribucions de manera independent. És a dir, cadascú considera donada la contribució de l'altre agent i determina la seva contribució òptima resolent el següent:

$$\begin{array}{l} \text{Màx. } v_j(q) + x_j, \\ x_j, g_j \end{array} \quad \text{subjecte a } x_j + g_j = w_j; \quad q = \frac{g_a + g_b}{c}; \quad x_j, g_j \geq 0; \quad j = a, b.$$

Si substituïm les dues restriccions en la funció objectiu, aquest problema es pot reexpressar com si fos un programa en dues etapes. Primer es pot determinar la quantitat de bé públic òptim per l'agent i després es pot decidir la contribució a efectuar, donada la subscripció de l'altra persona.

1) Quantitat òptima de bé públic a escala individual:

Per a l'individu a , que considera donada la contribució de b , g_b , la quantitat òptima de bé públic satisfà el següent:

$$\begin{array}{l} \text{Màx. } v_a(q) + w_a - cq + g_b, \\ q \end{array}$$

Com que $v_a(q)$ és estrictament còncava, la condició de primer ordre és necessària i suficient per a un màxim. Si es deriva i s'igualava a zero, s'obté la quantitat òptima de bé públic per a a , q_a° , que iguala la seva valoració marginal (la seva demanda inversa), $v_a'(q)$, amb el cost marginal de producció per a la societat de c :

$$v_a'(q_a^\circ) = c.$$

Anàlogament, per a l'individu b , que considera donada la contribució de a , g_a , la quantitat òptima de bé públic resol el següent:

$$\begin{array}{l} \text{Màx. } v_b(q) + w_b - cq + g_a, \\ q \end{array}$$

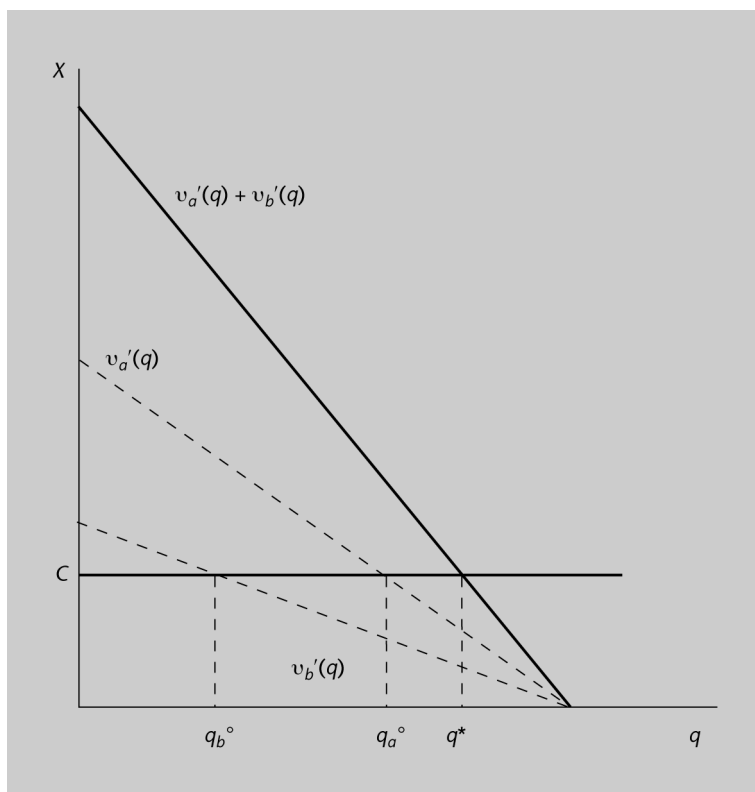
D'aquesta manera, la quantitat òptima de bé públic per a tots dos, q_b° , iguala la seva demanda inversa amb el cost social marginal:

$$v_b'(q_b^\circ) = c.$$

Qualsevol d'aquestes quantitats òptimes individuals de bé públic és inferior a la quantitat eficient des del punt de vista de la societat, ja que la demanda inversa social s'obté sumant verticalment les individuals i, per tant, està per sobre d'aquestes, $q_a^\circ < q^*$, $q_b^\circ < q^*$.

Si els individus prenen les decisions de manera independent, no tenen en compte els beneficis que els altres obtenen del bé públic i només valoren el benefici particular. Aleshores, el mercat genera una quantitat subòptima de bé públic.

Gràfic 2. Provisió privada d'un bé públic



2) Contribució voluntària individual:

Ara resol·dem la segona etapa per a cada persona. És a dir, la contribució voluntària òptima per a a i b . Com que un bé públic és no rival i no exclouïble, tothom en pot gaudir de la mateixa quantitat, sigui quina sigui la contribució que hi aportï. Aleshores, la contribució òptima de cada agent dependrà de les decisions de l'altre. Es tracta, per tant, d'una situació d'interdependència estratègica en què els jugadors prenen les decisions de manera independent, però són conscients de la interacció que hi ha entre ells.

El joc d'estratègia de les contribucions voluntàries té infraestructura no cooperativa: abans d'iniciar el joc, els agents no poden establir pactes vinculants que limiti la seva selecció d'estratègies, és a dir, que els obligui a efectuar contribucions determinades. El concepte de solució habitual per a aquests jocs d'estratègia amb infraestructura no cooperativa és l'equilibri de Nash, en què l'elecció de cada persona és òptima tenint en compte la de l'altra. En un equilibri de Nash en contribucions, cada agent selecciona la seva contribució òptima, considerant invariant, és a dir, donada, la contribució de l'altre individu i les contribucions són compatibles.

Com que a és qui més valora el bé públic, és conscient d'aquest fet i tenint en compte que les contribucions es decideixen de manera independent, si vol gaudir de la quantitat de bé públic q_a^o haurà d'aportar la contribució necessària:

$$g_a^o = q_a^o / c.$$

Tanmateix, la quantitat de bé públic q_a° també està disponible per a b i excedeix la seva quantitat òptima, de manera que no té incentius a cap contribució addicional. Obtindrà més utilitat si dedica tota la riquesa al bé privat:

$$q_b^\circ = 0.$$

El parell d'estratègies $(g_a^\circ = q_a^\circ/c, g_b^\circ = 0)$, conforma un equilibri de Nash de contribucions voluntàries. La contribució de a és òptima per a a donada la contribució de b , i la de b és òptima per a b donada la subscripció de a .

Com que el consumidor a no pot evitar que el b s'aprofiti de la seva provisió de bé públic, apareix el problema del polissó: sense fer cap aportació al finançament del bé públic, l'agent b gaudeix dels beneficis que se'n deriven. Si estenem el model present a fi d'incloure-hi més consumidors, podem constatar que només el consumidor amb el major benefici marginal del bé públic contribueix a finançar-lo; la resta no hi contribueix gens.

Els béns públics constitueixen una **errada de mercat**, ja que els mercats els proveeixen en una quantitat molt inferior a la quantitat socialment òptima. Per les característiques d'absència de rivalitat en el consum i no-exclusió, la provisió privada dóna lloc a una quantitat subòptima de bé públic i, per tant, constitueix una de les justificacions per a la intervenció de l'estat en l'economia.

Exemple

Suposem que les funcions d'utilitat dels dos agents són les següents:

$$\begin{aligned} u_a(q, x_a) &= v_a(q) + x_a = 2q^{1/2} + x_a \\ u_b(q, x_b) &= v_b(q) + x_b = q^{1/2} + x_b \end{aligned}$$

Cada agent té una riquesa de $w_j = 10$ i el cost marginal social val $c = 1/2$.

Aleshores, l'òptim privat verifica el següent:

$$v_a'(q_a^\circ) = c \leftrightarrow q_a^\circ = c^{-2} \leftrightarrow q_a^\circ = 4.$$

Les contribucions dels agents serien les següents:

$$g_a^\circ = q_a^\circ/c = 8, \quad g_b^\circ = 0.$$

La quantitat de bé privat consumida per cada agent seria la següent:

$$x_a^\circ = w_a - g_a^\circ = 2, \quad x_b^\circ = w_b - g_b^\circ = 10.$$

La quantitat òptima de bé públic és força superior, tal com mostra la condició de Samuelson:

$$v_a'(q^*) + v_b'(q^*) = c \leftrightarrow q^* = 9.$$

3. Mecanismes de decisió de béns públics. La solució de Lindahl

Les decisions de subministrament i finançament d'un bé públic es prenen mitjançant el procés polític. L'estat pot desenvolupar un sistema de preus que generi l'assignació eficient de bé públic? Erik Lindahl, un economista suec, va respondre afirmativament a aquesta pregunta l'any 1919.

Suposem que hi ha una economia amb dos agents, $j = a, b$, que tenen preferències quasilineals, per tal de simplificar, i un bé públic divisible del qual s'ha de decidir la quantitat, que té un cost, en termes del bé privat, $C(q)$. L'aportació de Lindahl consisteix a suposar, també, que el cost del bé públic es distribuirà en la proporció p : $(1 - p)$ entre els dos agents.

L'agent 1, que té una riquesa w_a en termes de bé privat, numerari, considera donat p , soluciona el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Màx. } v_a(q) + x_1 & \\ q, x_a & \text{subjecte a } pC(q) + x_a = w_a. \end{array}$$

Això es simplifica de la manera següent:

$$\begin{array}{l} \text{Màx. } v_a(q) + w_a - pC(q). \\ q \end{array}$$

La condició de primer ordre és aquesta:

$$p = \frac{v_a'(q)}{C'(q)}.$$

Similarment, per a l'agent b , la condició és la següent:

$$1 - p = \frac{v_b'(q)}{C'(q)}.$$

Si es resol aquest sistema de dues equacions, s'obtenen els valors de les dues incògnites, p^* , la fracció del cost del bé públic que paga l'agent a (1, per tant, $1 - p^*$, que paga l'individu b) i q^* , la quantitat de bé públic.

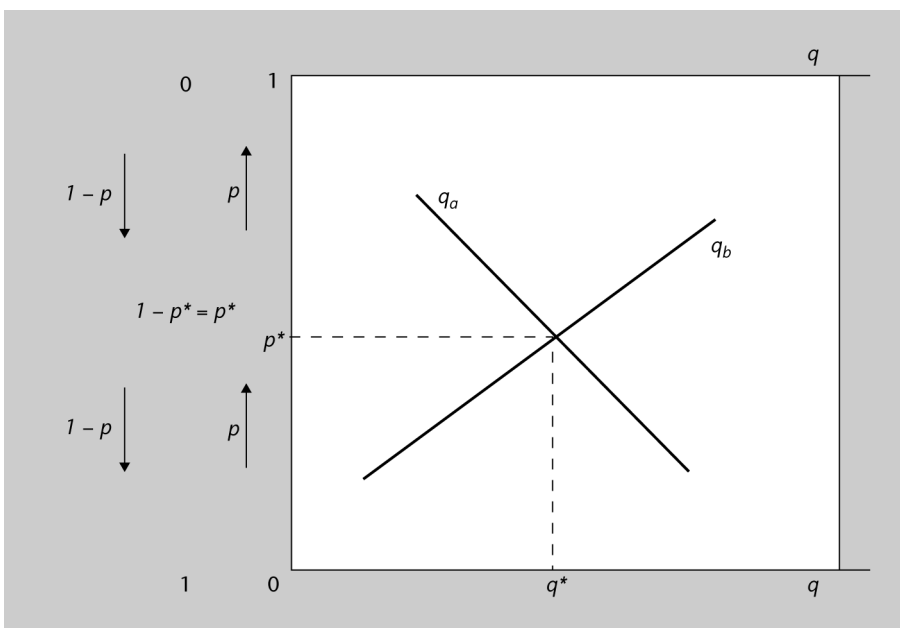
La solució es pot interpretar gràficament, si s'aprecia que en la condició de primer ordre del primer agent, p té un paper similar al preu d'un bé privat, ja que es pot interpretar com el preu pel qual el bé públic es ven a 1. De la mateixa manera, $1 - p$ és el preu pel qual el bé públic es ven a l'individu 2.

Aleshores, donat p , l'agent a demana una certa quantitat de bé públic, i, donat $1 - p$, l'agent b demana la quantitat que vol de bé públic. Les dues condicions de primer ordre es poden interpretar com dues funcions de demanda inverses (preu en funció de quantitat), una per a cada agent. Si q s'aïlla en cada funció, s'obtenen les funcions de demanda individuals del bé públic:

$$q_a = q_a(p) \quad q_b = q_b(1 - p).$$

En el gràfic 3 s'ha dibuixat de la manera usual la demanda q_a , però pel que fa a la q_b , s'han invertit els eixos, de manera que l'origen de coordenades és en l'extrem superior esquerre, i el preu corresponent, $1 - p$, es mesura de dalt cap a baix.

Gràfic 3. Solució de Lindahl



Quan p , la proporció del cost del bé públic que paga a , és baix, l'agent a demana molt q , mentre que el b en demanda molt poc. Amb preferències quasilineals (o, en general, amb preferències regulars), a mesura que p augmenta, q_a baixa i q_b augmenta, de manera que hi haurà un cert p^* :

$$q_a(p^*) = q_b(1 - p^*) = q^*.$$

Aquesta és la solució requerida: la solució de Lindahl determina simultàniament la quantitat òptima de bé públic i la fracció del cost que paga cada agent. La decisió pel que fa a la quantitat de bé públic és unànime.

D'altra banda, la solució de Lindahl és una solució òptima de Pareto. És a dir, genera la quantitat eficient de bé públic:

$$p + (1 - p) = \frac{v_a'(q)}{C'(q)} + \frac{v_b'(q)}{C'(q)} \rightarrow v_a'(q) + v_b'(q) = C'(q).$$

És, per al cas de preferències quasilineals, la condició de Samuelson de provisió eficient d'un bé públic:

$$\text{RMS}q x_a + \text{RMS}q x_b = C'(q).$$

Exemple 1

La solució de Lindahl també és aplicable a altres preferències regulars, monòtones i convexes, diferents de les quasilineals. Només s'han de substituir les valoracions marginals del bé públic per les RMS corresponents. És a dir, l'equilibri de Lindahl es troba mitjançant la resolució del sistema de dues equacions per a les dues incògnites, p i q :

$$p = \frac{\partial u_a / \partial q}{\partial u_a / \partial x_a} \frac{1}{C'(q)} \quad 1 - p = \frac{\partial u_b / \partial q}{\partial u_b / \partial x_b} \frac{1}{C'(q)}.$$

Com a exercici numèric, suposem que $u_j = qx_j$, per $j = a, b$, i que $C(q) = cq$.

La fracció del cost que paga l'agent maximitza la seva utilitat subjecte a la recta pressupostària:

$$\begin{array}{ll} \text{Màx. } u_j = qx_j & \\ qx_j & \text{subjecte a } pcq + x_j = w_j; q, x_j > 0 \text{ per } j = a, b. \end{array}$$

Si substituïm la restricció en la funció objectiu, el problema es reexpressa com a seleccionar la quantitat de bé públic q que resolgui el següent:

$$\text{Màx. } u_j = q(w_j - pcq) \quad w_j/pc > q > 0, \quad \text{per } j = a, b.$$

Per al cas de l'agent a :

$$\text{Màx. } u_a = w_a q - pcq^2, \quad w_a/pc > q > 0,$$

si es resol aquest problema d'optimització, s'obté la demanda de bé públic per part de a :

$$q_a = \frac{w_a}{2pc}.$$

De la mateixa manera, podem demostrar que la demanda de bé públic per part de b val el següent:

$$q_b = \frac{w_b}{2(1-p)c}.$$

La solució de Lindahl requereix un p^* que iguali ambdues demandes:

$$q_a(p^*) = q_b(1 - p^*) = q^*.$$

S'iguali $w_a/2pc = w_b/2(1-p)c$, de manera que si resollem per a p , obtenim el següent:

$$p^* = \frac{w_a}{w_a + w_b} \text{ i, per tant, } 1 - p^* = \frac{w_b}{w_a + w_b}.$$

Les fraccions del cost que paga cada agent són proporcionals a la riquesa inicial de cada individu en relació amb la riquesa total.

La quantitat de bé públic es troba si se substitueix en la demanda de a el «preu» p^* (o en la de b el «preu» $1 - p^*$):

$$q^* = \frac{w_a + w_b}{2}.$$

La contribució que paga cada agent és el producte de participació de l'agent en la despesa per la quantitat de bé públic:

$$p^* q^* = \frac{W_a}{2}, \quad (1 - p^*) q^* = \frac{W_b}{2}.$$

Per aquestes preferències cada agent paga, pel finançament del bé públic, una fracció, la meitat, de la seva riquesa inicial. Per tant, cada individu destina al bé privat la mateixa quantitat de riquesa que ha dedicat al bé públic:

$$x_a^* = \frac{W_a}{2}, \quad x_b^* = \frac{W_b}{2}.$$

Exemple 2

Per les preferències quasilineals, $u_j(q, x_j) = v_j(q) + x_j$, $j = a, b$, i amb $C(q) = cq$, es mostra que en l'equilibri de Lindahl el quocient de contribucions iguala el de valoracions marginals, de manera que la contribució està d'acord amb la valoració marginal del bé públic.

En aquest cas, les condicions de primer ordre dels individus estableixen el següent:

$$pc = v_a'(q), \quad (1 - p)c = v_b'(q).$$

L'equilibri de Lindahl és un parell (q^*, p^*) , que verifica, per a a i b , el següent:

$$p^*c = v_a'(q^*), \quad (1 - p^*)c = v_b'(q^*).$$

Per tant, tenim el següent:

$$\frac{\text{Contribució d}'a}{\text{Contribució de } b} = \frac{p^* cq^*}{(1 - p^*)cq^*} = \frac{v_a'(q^*)q^*}{v_b'(q^*)q^*} = \frac{v_a'(q^*)}{v_b'(q^*)}.$$

Exemple 3

Considerem que hi ha una societat amb N_R persones riques i N_P persones pobres, totes amb preferències quasilineals pel que fa als dos béns de l'economia, un bé públic (l'enllumenat dels carrers, per exemple) i un bé privat, que és numerari. La valoració marginal del bé públic per part de qualsevol ric val $v_R'(q)$ i la de qualsevol pobre és $v_P'(q)$. El cost marginal del bé públic (en termes de quantitat del bé privat que s'ha de sacrificar per unitat addicional del bé públic) és constant i igual a c . La societat ha de determinar la quantitat de bé públic i com s'ha de distribuir el cost entre rics i pobres. Es pot visualitzar un parlament amb un representant de cada classe social en què es debaten aquests aspectes. Inicialment, acorden que els rics pagaran una proporció p_R del cost i els pobres la fracció restant, $p_P = 1 - p_R$.

El cost que ha de suportar un ric serà pcq/N_R . Com que p es considera donat, el cost marginal valdrà pc/N_R . La quantitat òptima de bé públic per a un ric en funció de p iguala el benefici marginal que li genera el bé públic amb el seu cost marginal:

$$v_R'(q) = p_R c / N_R.$$

La demanda (inversa) dels rics val el següent:

$$p_R = v_R'(q) N_R / c.$$

De la mateixa manera, la dels pobres és la següent:

$$1 - p_R = v_P'(q) N_P / c.$$

L'equilibri de Lindahl és el parell (q^*, p^*) que satisfà simultàniament totes dues equacions. Obtindrem valors concrets si especifiquem funcions d'utilitat i valors per als paràmetres del problema, N_R , N_P i c .

Així, suposem $v_R'(q) = 10q^{-1} > 0$, $v_P'(q) = q^{-1} > 0$, $c = 4$, $N_R = 10$, $N_P = 100$.

Aleshores, tindrem el següent:

$$\begin{aligned} p_R &= v_R'(q) N_R / c = 25q^{-1} & p_P &= 1 - p_R = v_P'(q) N_P / c = 25q^{-1}. \\ p_R^* &= p_P^* = 1/2 & q^* &= 50 \end{aligned}$$

3.1. El problema del polissó

El mecanisme de Lindahl és vulnerable a la manipulació. Proposa que els individus, o els representants de conjunts d'individus, declarin en el parlament les seves preferències pel bé públic, és a dir, les seves corbes de demanda del bé públic. Tanmateix, una vegada ofert el bé públic, ningú queda exclòs dels serveis que se'n deriven. Si s'ofereixen els serveis de la policia en una ciutat, tothom en pot gaudir. Per tant, cada persona tindrà un incentiu a pagar al menys possible. Els individus subvelaran les seves preferències pel que fa al bé públic en qüestió i confiaran en les aportacions dels altres. És a dir, expressaran unes demandes pel bé públic inferiors a les reals.

4. L'assignació d'un bé públic indivisible

En ocasions, els béns públics es consumeixen en quantitats discretes, com ara una, dues o cap carreteres entre dues poblacions, i la decisió que fa referència al bé públic pren la forma de proveir-lo o no. És a dir, fer o no fer la carretera o el pont o bé asfaltar o no un carrer. Suposem el cas senzill d'una societat amb dues persones, a i b , i dos béns, un de públic i un de privat, que és un bé numerari (és a dir, s'utilitza com a unitat de compte), perfectament divisible i que podem considerar com la despesa en consum privat. Tots dos agents viuen en una illa i avaluen la conveniència de construir un pont que els uneixi a la península propera. Com que tots dos faran servir el pont, es preveu un sistema de contribucions voluntàries per a finançar-lo. En aquest sistema, cada agent declara la quantitat g_j que vol pagar per la construcció de la infraestructura i que és la contribució voluntària o subscripció de l'individu j .

El pont només es construirà si les contribucions superen el cost c del pont. La quantitat de bé públic és, per tant, una variable discreta que pren un dels dos valors possibles:

$$q = \begin{cases} 1, & \text{si } g_a + g_b \geq c \\ 0, & \text{si } g_a + g_b < c \end{cases}.$$

Atès que l'individu j té una dotació de bé privat, w_j , si decideix contribuir en la quantitat g_j per la construcció del bé públic, li quedarà pel consum de bé privat la quantitat $x_j = w_j - g_j$.

La utilitat de i , $u_i(q, x_i)$, se suposa que és estrictament creixent en la quantitat de bé públic i de bé privat. D'aquesta manera, i té més utilitat amb pont que sense pont, donada la mateixa quantitat de bé privat, $u_i(1, x_i) > u_i(0, x_i)$, i el benestar de j augmenta amb la quantitat de bé privat, $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} > 0$.

Aleshores, a cada individu li interessa contribuir al menys possible, però que la infraestructura es construeixi.

4.1. Provisió eficient d'un bé públic indivisible

Quan convé a la societat la construcció del pont?

Per tal de respondre aquesta pregunta, comencem definint el preu de reserva r_j , que és el màxim que està disposat a pagar i perquè el pont es construeixi:

$$u_i(1, w_i - r_j) = u_i(0, w_i).$$

A l'agent i li és indiferent que es faci la infraestructura i que la quantitat disponible per al bé privat baixi en la quantitat r_j o que el pont no es faci i mantingui la riquesa personal inicial.

Serà òptim en sentit de Pareto edificar el pont si hi ha, almenys, un parell de contribucions g_a i g_b , amb $g_j < r_j$, que compleixen $g_a + g_b \geq c$. En aquest cas, la utilitat d'ambdós individus és més gran si contribueixen al projecte i s'edifica el pont que no pas si no hi contribueixen i no es construeix:

$$u_j(1, w_j - g_j) > u_j(0, w_j), \quad j = a, b.$$

Per tant, construir el pont és una millora paretiana si la suma de les disposicions a pagar pel bé públic excedeix el cost de proveir-lo:

$$r_a + r_b > g_a + g_b \geq c.$$


És a dir:


$$r_a + r_b > c.$$

La condició d'eficiència és diferent que en el cas d'un bé privat.

Per exemple, un automòbil és un bé privat indivisible. Si en la societat hi ha dos béns, automòbils i despesa en la resta de béns privats, les quantitats que consumeix l'agent i les podem representar mitjançant la variable discreta y_j , que pot prendre valors 0 o 1, en el cas de l'automòbil, i mitjançant la variable contínua x_j , pel que fa a la despesa de consum restant. La utilitat de j serà $u_j(y_j, x_j)$, que suposem creixent en ambdós arguments. Si produir un automòbil té un cost de c i el preu de reserva de j és r_j , val la pena proveir un automòbil per a j , si $r_j > c$, $j = a, b$, ja que, aleshores, si l'automòbil es construeix, la utilitat de j augmenta sense baixar la de ningú:

$$u_j(1, w_j - c) > u_j(1, w_j - r_j) = u_j(0, w_j).$$

És a dir, pel que fa a un bé privat, si un sol individu està disposat a pagar el cost de producció és eficient proveir-lo, $r_j > c$, $j = a, b$. 

Per a un bé públic, la condició és més feble: convé socialment la provisió del bé públic si la suma de les disposicions a pagar supera el cost de provisió. 

4.2. Provisió privada d'un bé públic indivisible


El mercat privat és un mecanisme adequat per a la provisió de béns públics que varien en quantitats discretes? La discussió del cas continu, en què el mercat no proporciona la quantitat eficient del bé públic divisible, ja suggereix que el sistema de mercat no garantirà la provisió d'un bé públic indivisible quan és eficient fer-ho.

En el sistema de mercat, cada individu decideix de manera independent la quantitat que vol dels diversos béns i en paga els preus corresponents. Per tal d'analitzar si el mercat privat és un mecanisme efectiu per a proveir un bé públic pur, suposarem que cada agent decideix de manera independent comprar

o no el bé públic (se'n poden comprar dos alhora) i ens centrarem en el cas particular en què $r_j = 10$ per $j = a, b$ i $c = 10$, de manera que la suma de disposicions a pagar supera el cost de la producció.

Es poden representar les estratègies i els pagaments dels agents en una matriu senzilla de teoria de jocs d'estratègia. Si el consumidor a compra el bé, rep 10 € de beneficis, però ha de pagar 10 € per a aquests beneficis. Si el consumidor a compra, però el b se n'absté, aquest últim rep 10 € de manera gratuïta. El consumidor b és un polissó, un *free rider*, un viatger sense bitllet o un paràsit de l'agent a . Tanmateix, com que el bé públic és un bé públic pur, cap agent pot fer que un altre no el consumeixi.

	Comprar	No comprar
Comprar	0, 0	0, 10
No comprar	10, 0	0, 0

Cada jugador té una estratègia feblement dominant que és no comprar, de manera que l'equilibri de Nash del joc és (no comprar, no comprar). Llavors, el resultat és que el bé no és proveït en absolut, tot i que seria eficient fer-ho. Això il·lustra que no podem esperar que decisions independents, com les que fonamenten el mecanisme de mercat, garanteixen la provisió d'un bé públic que milloraria el benestar social. 

4.3. El finançament amb contribucions voluntàries d'un bé públic indivisible

En el marc estudiat de dos béns, un de públic i un de privat, numerari, i dos individus, el sistema de contribucions voluntàries o subscripcions proposa que cada individu j , per $j = a, b$, declara la seva contribució voluntària, $g_j \geq 0$. És a dir, la quantitat que està disposat a aportar per tal de finançar el bé públic indivisible. El bé públic només es proveeix si la suma de subscripcions supera el cost de producció del bé públic en termes del privat, $g_a + g_b \geq c$. Aleshores, el mecanisme de subscripcions, en què cada individu decideix simultàniament i independentment de l'altre la seva subscripció, genera una assignació eficient del bé públic?

Per tal de respondre a la qüestió, suposarem, com fins ara, preferències quasi-lineals amb u_j creixent en x_j i més gran si es disposa de bé públic que si no. També suposarem que el preu de reserva del bé públic per a cada individu està per sota del cost de provisió (remarcant el caràcter públic del bé), $r_j < c$, $j = a, b$, però que, tenint en compte la societat dels dos individus en conjunt, és eficient proporcionar el bé públic, $r_a + r_b > c$.

El sistema de contribucions voluntàries defineix una situació d'interdependència estratègica, en què l'acció de cada agent afecta els resultats de l'altre i

ambdós agents són conscients d'aquesta interacció. L'equilibri de Nash proporciona la solució raonable a situacions d'interdependència estratègica com aquesta. En un equilibri de Nash en subscripcions cada agent decideix la seva contribució òptima, considerant donada la de l'altre. És a dir, un equilibri de Nash en subscripcions és un parell de subscripcions, una per a cada agent, (g_a^*, g_b^*) , que verifiquen que cada agent reacciona de manera òptima a la subscripció prevista de l'altre. D'aquesta manera, les contribucions voluntàries són mútuament consistents en termes de respostes òptimes:

$$\begin{aligned} u_a(g_a^*, g_b^*) &\geq u_a(g_a, g_b^*) & \forall g_a \Leftrightarrow g_a^* = R_a(g_b^*). \\ u_b(g_a^*, g_b^*) &\geq u_b(g_a^*, g_b) & \forall g_b \Leftrightarrow g_b^* = R_b(g_a^*). \end{aligned}$$

Atès que a creu que b seleccionarà g_b^* , la seva resposta òptima és g_a^* : obté més utilitat si fa servir g_a^* que qualsevol altra estratègia. Anàlogament per b .

El joc d'estratègia presentat té un equilibri de Nash ineficient i un conjunt d'equilibris de Nash eficient.

L'equilibri ineficient és el parell de contribucions voluntàries $(g_a^* = 0, g_b^* = 0)$, mútuament consistents en termes de respostes òptimes i que no permeten finançar el bé públic, que és socialment eficient proveir. Com que a no finançarà la totalitat del bé públic perquè té un preu de reserva inferior al cost, si a creu que b farà una contribució nul·la, el millor que pot fer és fer també una contribució nul·la.

Cadascun del conjunt d'equilibris eficients incorpora un parell de subscripcions estrictament positives que verifiquen el següent:


$$g_a^* + g_b^* = c \quad \text{per } g_a^* \in (c - r_b, r_a), g_b^* \in (c - r_a, r_b).$$

És a dir, si a preveu que b farà una subscripció positiva $g_b^* > 0$, que compleix $r_a + g_b^* > c$, li convé contribuir en la quantitat $g_a^* = c - g_b^*$, ja que li permet completar el finançament del bé públic i pagar menys que el seu preu de reserva.

Anàlogament, si b creu que la contribució de a compleix $r_b + g_a^* > c$, la seva resposta òptima és contribuir amb la diferència, $g_b^* = c - g_a^*$, i assegurar la provisió del bé públic. Aquí, la subscripció de a és superior al mínim que indueix la contribució de b .

Qualsevol equilibri eficient requereix que cap dels dos agents faci una contribució voluntària massa petita, però sovint els equilibris són esbiaixats en el sentit que un dels agents s'aprofita d'una contribució més alta de l'altre.

Per exemple, essent ε un nombre positiu proper a 0 en l'equilibri $(g_a^* = r_a - \varepsilon, g_b^* = c - r_a + \varepsilon)$ la subscripció de a està molt a prop de la seva valoració del bé públic i la del b molt allunyada, de manera que podem considerar b un paràsit de a .

Cadascun d'aquests equilibris és una solució raonable de la situació d'interdependència estratègica que defineix el mecanisme de contribucions voluntàries per tal de finançar un bé públic indivisible. 

4.4. Mecanismes de revelació de preferències

Si els individus revelen correctament les seves preferències per un bé públic, la societat pot determinar si val la pena proveir-lo i la quantitat a cobrar a cada persona pel bé. Tanmateix, quan es requereix als individus revelar les seves preferències pel bé públic, el plantejament de la qüestió sovint dóna incentius a les persones a no declarar les valoracions veritables. Així, suposem que la contribució que s'imposarà a cada individu està en proporció a la seva valoració manifestada pel bé públic. En aquest cas, si cada individu considera que la contribució dels altres és suficient per a proporcionar el bé, tendirà a subestimar la seva valoració dels beneficis que li ocasiona el bé públic, amb la finalitat de limitar la seva contribució. D'altra banda, si es coneixen per endavant les contribucions individuals en cas de proveir un bé públic, qualsevol individu a qui beneficiï tindrà incentius a exagerar la seva valoració, a fi de garantir la presència del bé, sense haver de suportar cap cost addicional.

Per tal de resoldre aquest problema, s'han suggerit mecanismes per a revelar les demandes, com ara el de Groves-Clarke, que pren aquest nom dels economistes que el van proposar. Aquest mecanisme parteix del benefici net que obté una persona i d'un bé públic, que es defineix com la diferència entre la seva valoració, r_i , i la participació en el cost del bé públic que li han assignat les autoritats, c_i :

$$v_i = r_i - c_i.$$

Aleshores, d'acord amb el que hem vist en analitzar la provisió eficient d'un bé públic indivisible, si hi ha n membres en aquesta economia, serà eficient proveir el bé públic si es compleix el següent:

$$\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n (r_i - c_i) > 0.$$

Un mecanisme simple per tal de saber si convé socialment la provisió del bé públic consistiria a demanar a cadascun dels n membres que declari el benefici net. Tanmateix, acabem d'assenyalar que aquest mecanisme no dóna incentius correctes als agents perquè declarin honestament els beneficis nets que obtenen del bé. Com que la participació en el cost ja està fixada, qualsevol individu que tingui un benefici net positiu l'exagerarà per tal d'assegurar la provisió del bé públic.

El mecanisme de Groves-Clarke corregeix aquest problema d'incentius a partir dels passos següents:

Exemple

Com a exemple de la participació en el cost d'una obra pública, si l'ajuntament d'una localitat estudia asfaltar un carrer, pot atribuir un cost a cada veí en funció d'una estimació del benefici que el veí obté de l'asfaltatge.

- 1) Cada agent declara el benefici net que obté del bé públic. La declaració no necessàriament ha de ser honesta. La denotem mitjançant β_i , $i = 1, 2, \dots, n$.
- 2) El bé públic es proveeix si $\sum_i \beta_i > 0$ i no es proporciona si $\sum_i \beta_i \leq 0$.
- 3) Cada agent fa front a una transferència igual a la suma de la resta de declaracions, $\tau_i = \sum_{j \neq i} \beta_j$, en cas que el bé públic se subministri. Si aquesta suma és positiva, l'agent i la cobra i si és negativa, la paga.

Amb aquest mecanisme, cada agent té incentius a declarar honestament el benefici net que li genera el bé públic. Declarar el veritable benefici net és una estratègia (feblement) dominant. Ho comprovem a continuació.

El benefici total de l'agent i és el següent:

$$B_i = \begin{cases} v_i + \tau_i & \text{si } \beta_i + \tau_i > 0 \\ 0 & \text{si } \beta_i + \tau_i \leq 0 \end{cases}$$

Podem distingir els casos següents:

- $\tau_j > 0$. Hi ha dues possibilitats segons la valoració de i :
 - $v_j > 0$. Si declara el benefici net veritable v_j o un benefici superior $\beta_i^+ > v_j$, obté la quantitat positiva $v_j + \tau_j > 0$. Si declara $\beta_j^- < v_j$ pot ser que el bé públic no es proveeixi i obtingui 0.
 - $v_j \leq 0$. Si declara v_j obté $v_j + \tau_j$ si $v_j + \tau_j > 0$ o 0 si $v_j + \tau_j \leq 0$. Notem que si a l'agent i no li interessa el bé públic i s'acaba proveint, i rep una transferència compensatòria. Declarant β_j^- no afectaria el benefici total si $v_j + \tau_j \leq 0$, però podria ocasionar un benefici total nul si el bé no es proveeix en lloc de $v_j + \tau_j > 0$. Declarant β_i^+ no afectaria el benefici total si $v_j + \tau_j > 0$, però podria ocasionar un benefici total negatiu $v_j + \tau_j \leq 0$ si el bé es proveeix quan no és eficient fer-ho.
- $\tau_j \leq 0$. Novament, hi ha dues possibilitats:
 - $v_j \leq 0$. Si declara el benefici net veritable v_j o un benefici net inferior β_j^- obté 0. Declarant $\beta_i^+ > v_j$ pot ser que el bé públic es proveeixi i obtingui $v_j + \tau_j \leq 0$.
 - $v_j > 0$. Si declara v_j obté $v_j + \tau_j$ si $v_j + \tau_j > 0$ o 0 si $v_j + \tau_j \leq 0$. Observem que si l'agent i altera la decisió social i fa que el bé públic se subministri, ha de pagar una transferència compensatòria τ_j . Declarar β_j^- no afecta el benefici total si $v_j + \tau_j \leq 0$, però podria ocasionar un benefici total nul si el bé no es proveeix en lloc de $v_j + \tau_j > 0$. Declarant β_i^+ no afectaria el benefici total si $v_j + \tau_j > 0$, però podria ocasionar un benefici total negatiu $v_j + \tau_j \leq 0$ si el bé es proveeix quan no és eficient fer-ho.

En conseqüència, declarar el veritable benefici net del bé públic, v_j , és una estratègia feblement dominant: mai no genera un resultat inferior a les altres estratègies (β_i^+ , β_j^-) i en alguns casos ocasiona resultats millors. El mecanisme modifica els beneficis totals de cada agent, de manera que cada individu passa a afrontar el problema de decisió social i té incentius a revelar les seves preferències correctament. Com a inconvenient es pot comentar que les transferències poden ser grans i que, per tant, pot ser molt costós induir els agents a dir la veritat.


Exemple

Una comunitat de quatre propietaris avalua la conveniència d'instal·lar una taula de ping-pong al pati de la comunitat. La taula té un cost de 100 € i es proposa una distribució inicial del finançament igualitària de 25 € per propietari. Alguns propietaris s'oposen a la compra en aquestes condicions i suggereixen decidir l'adquisició de la taula i el repartiment del cost entre els propietaris a partir del mecanisme de Groves-Clarke. Atès que la sèrie de beneficis nets que genera la taula és $-5, -5, -10, 25$, què proposaria aquest mecanisme?

Per tal de trobar-ne la solució, partim del fet que declarar la valoració autèntica és un estratègia dominant en el mecanisme de Groves-Clarke. La suma de beneficis nets és positiva i val 5. Per tant, cal comprar la taula. Pel que fa al finançament, el primer propietari afronta una transferència de $\tau_a = -5 - 10 + 25 = 10$, que, com que es positiva, li suposa un cobrament. El segon propietari cobra la mateixa quantitat, ja que el seu benefici net és el mateix, $\tau_b = 10$. El tercer propietari també té un benefici net inicial negatiu i, per tant, també cobraria, però una quantitat més alta, ja que se l'ha de compensar més, $\tau_3 = -5 - 5 + 25 = 15$. El quart propietari és el responsable que la decisió social passi de no comprar a comprar, cosa que fa que usualment se'l denomini *individu pivot*, i ha de pagar una transferència als altres membres, que els compensi el canvi de la decisió social, d'import $\tau_4 = -5 - 5 - 10 = -20$.

Observem que la suma de transferències positives excedeix en 15 la transferència negativa, cosa que vol dir que s'ha de fer ús de la caixa de la comunitat per tal de completar els pagaments. Resumint pagaments i cobraments, els diversos propietaris, del primer a l'últim, pagarien per la taula, 15, 15, 10, 45. Els 15 restants fins a arribar als 100 que costa la taula, els aportaria la caixa de la comunitat, que es finança a partir de les quotes dels propietaris, que no tenen relació amb la compra de la taula.

En conseqüència, les transferències entre els membres no es cancel·len i s'ha de recórrer a la caixa comuna per la compra el bé. Si no hi ha diners a la caixa, no es compraria un bé que milloraria el benestar de la comunitat.

Resumint, hi ha mecanismes perquè els individus revelin voluntàriament la seva demanda, però tenen costos associats i, per tant, comporten reduccions d'eficiència. Sovint, els incentius privats impliquen pèrdues d'eficiència per a la societat. 

5. Externalitats: el problema

Una externalitat es defineix com una acció d'un individu o empresa que n'afecta un altre.

L'externalitat és **negativa** quan l'acció té efectes negatius en el segon agent. Per exemple, si el veí posa música a volum alt a les tres de la matinada, si la persona de la taula del costat fuma o si una empresa de tints llança residus tòxics al riu. L'externalitat és **positiva** si l'efecte sobre el segon agent és beneficiós, com ara un jardí de flors bonic o una façana modernista restaurada que la gent que passa pel carrer pot contemplar o quan una persona es vacuna i així redueix les possibilitats de contagi. Es pot dir el mateix de l'educació, les economies d'aglomeració o els sistemes de comunicació (externalitat de xarxa), que també donen lloc a un **efecte extern positiu en el consum**.

També podem distingir entre les externalitats de consum i de producció. Hi ha una **externalitat de consum** quan el consum d'una persona es veu afectat directament per la producció o el consum d'un altre agent econòmic: una empresa química que contamina l'aigua de consum, un consumidor que fuma, etc. Hi ha una **externalitat de producció** quan les possibilitats de producció d'una empresa es veuen afectades per les activitats d'altres empreses o altres consumidors. Així, si una gran empresa de la indústria demana més mà d'obra i fa pujar els sous, això crea una externalitat negativa en la producció d'una petita empresa que utilitza mà d'obra. Passa el mateix amb l'empresa de tints que contamina l'aigua del riu que usa una empresa de cervesa. El cas dels apicultors i dels pagesos que tenen arbres fruiters és un cas típic d'externalitat mútua en la producció.

5.1. Assignació eficient de recursos en presència d'externalitats

Quan hi ha efectes externs, el consum o la producció s'allunyen de l'òptim social, és a dir, de l'assignació eficient dels recursos, ja que qui pren la decisió no té en compte els efectes que la seva activitat té sobre els altres. Com que hi ha diversos casos d'externalitats, hi haurà diversos models. El principi general és que l'òptim social s'aconsegueix a partir de la maximització de la suma de beneficis, o utilitats, per a tots els agents implicats subjecte a la restricció de recursos social corresponent. Aleshores, la condició de primer ordre per a la quantitat eficient en sentit de Pareto d'un bé, quan hi ha efectes externs, pren la forma següent:

$$\text{Benefici marginal social del bé} = \text{Cost marginal social del bé o} \\ \text{valoració marginal social del bé} = \text{Cost marginal social del bé}$$

Exemple 1. Externalitat de consum

L'individu a viu en un apartament d'un bloc de pisos i li agrada tocar la guitarra. x_{1a} representa la quantitat d'hores que a toca la guitarra. Si no toqués gens la guitarra, podria treballar més temps i obtindria 100 € de bé 2, que es un bé numerari que representa la despesa en la resta de béns. Per cada hora que toca la guitarra renuncia a 10 € de bé 2. Les possibilitats de canviar hores de guitarra per bé numerari les recull, per tant, la corba de transformació entre 1 i 2:

$$x_{2a} = 100 - 10x_{1a}.$$

Les preferències de a pels dos béns, 1 i 2, les mostra la funció d'utilitat quasilineal:

$$u_a = 20x_{1a} - x_{1a}^2 + x_{2a}.$$

Al veí, l'individu b , que viu a l'apartament del costat li molesta el soroll de la guitarra de a , tal com expressa la seva funció d'utilitat:

$$u_b = 80 - 5x_{1a}.$$

En aquest cas, 80 és la quantitat de numerari que consumeix bé. En la funció d'utilitat de b apareix la variable x_{1a} que no controla b , sinó a i per això hi ha aquest subíndex.

L'òptim privat es el que decidiria l'agent a . Maximitzaria la seva funció d'utilitat subjecte a la restricció de recursos que acara (que és la social, ja que no hi ha més costos, a part de l'externalitat, de tocar la guitarra). Si substituïm la restricció en la funció objectiu, aleshores el problema és el següent:

$$\begin{aligned} \text{Màx. } & u_a = 20x_{1a} - x_{1a}^2 + 100 - 10x_{1a}. \\ & x_{1a} \end{aligned}$$

Per tant, l'òptim privat val $x_{1a}^\circ = 5$.

L'òptim social té en compte el benestar de tots els agents, és a dir, maximitza la suma d'utilitats dels implicats, subjecte a la restricció de recursos social:

$$\begin{aligned} \text{Màx. } & u_a + u_b = 5x_{1a} - x_{1a}^2 + 180. \\ & x_{1a} \end{aligned}$$

En conseqüència, l'òptim social val $x_{1a}^\circ = 2,5$.

L'activitat de a molesta b , però, tal com mostra l'òptim privat, a no té en compte aquest efecte extern. El benestar social exigeix considerar aquest efecte nociu que a imposa a b .

Veiem que, en cas d'externalitats, la condició d'eficiència és similar a la que hem vist en el cas dels béns públics. Si a fuma i és al costat de b , de fet a i b consumeixen tabac. Amb una funció de costos de l'externalitat en termes del bé 2 numerari donada per $C(x_{1a})$, en què la quantitat total del bé 1 la decideix a , i preferències quasilineals, tant pel que fa a l'agent a , $u_a = v_a(x_{1a}) + x_{2a}$, com pel que fa al b , $u_b = v_b(x_{1a}) + x_{2b}$, la condició d'eficiència esdevé la següent:

$$v_a'(x_{1a}) + v_b'(x_{1a}) = C'(x_{1a}).$$

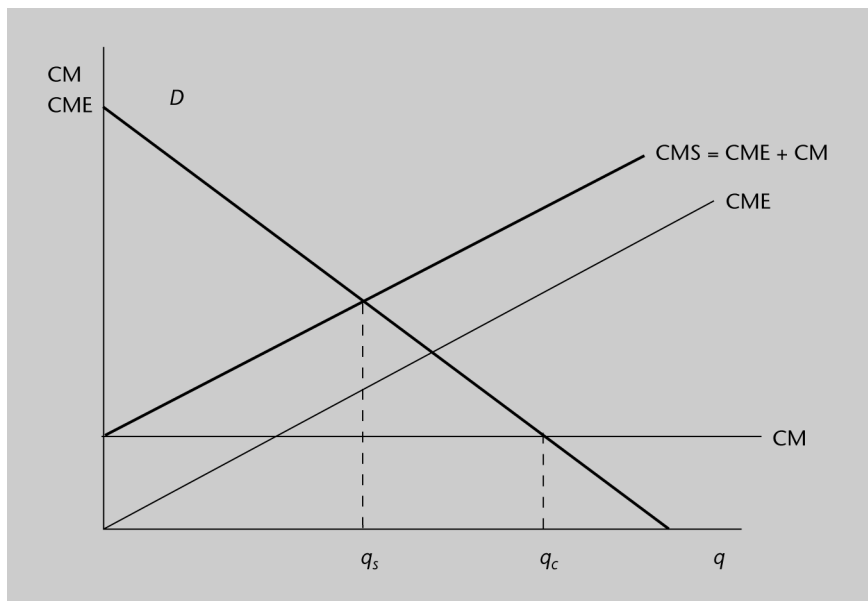
En general, aquesta condició s'expressa com a $RMS_a + RMS_b = RMT$.

Exemple 2. Externalitat de producció

Suposem que hi ha una indústria química de tints que és perfectament competitiva. Les empreses de la indústria afronten una corba de cost marginal constant, de manera que la corba d'oferta de la indústria és horitzontal, en el nivell CM. La indústria aboca residus contaminants en un llac i maten els peixos. Per tant, cada unitat de producció genera contaminació. El dany causat per cada unitat addicional de contaminació (matant els peixos) el representa la corba de cost marginal de l'externalitat (CME).

En aquesta indústria, la corba de CM mostra el cost marginal privat. Si no es regula, les empreses de la indústria només consideraran aquests costos a l'hora de decidir el nivell òptim de producció, perquè no tenen en compte els efectes sobre els peixos i la pesca. La producció competitiva s'obté en la intersecció de l'oferta i la demanda de la indústria, en q_c .

Gràfic 4. Externalitat de producció



Tanmateix, tots dos, tant les empreses en la indústria de colorants químics com els pescadors que depenen del llac per a la seva subsistència, integren la societat. El cost marginal social (CMS) és, per tant, la suma (vertical) de CM i CME. Des del punt de vista de la societat, s'ha tenir en compte tant el cost de producció com el cost negatiu de la contaminació. La corba de CMS està per sobre de la corba de CM, i la quantitat de tints socialment òptima serà q_s , que és inferior a q_c . Així, si hi ha una externalitat negativa, el nivell de producció determinat pel mercat, que només considera el cost privat, serà més alt que el nivell socialment òptim de producció. De la mateixa manera, si hi ha una externalitat positiva, el nivell de producció determinat per consideracions només de cost privat serà inferior al nivell socialment òptim.

Notem, però, que el resultat socialment òptim quan hi ha una externalitat negativa no és zero. L'assoliment d'un nivell zero de contaminació requeriria el tancament de la indústria química de tints, que no és una opció atractiva des del punt de vista de la societat.

Així, si la corba de demanda inversa és $p = 20 - q$, el cost marginal privat (la corba d'oferta de la indústria) val $CM = 2$ i el cost marginal de l'externalitat és $CME = 2q$, tindrem que, com que la indústria és competitiva, la solució de mercat es troba per la producció que verifica $20 - q = 2$, és a dir, $q_c = 18$, amb $p_c = CM = 2$.

Per tal d'obtenir la solució socialment òptima, sumem $CMS = CM + CME = 2 + 2q$. Si igualem la demanda, que mostra el benefici marginal social, amb el cost marginal social, $2 + 2q = 20 - q$, aconseguim la solució eficient, $q_s = 6$, $p_s = 14$.

5.2. Solucions a la problemàtica de les externalitats

S'han proposat quatre tipus de solucions per tal de fer front a les externalitats. En l'exposició continuarem considerant el cas típic d'una externalitat negativa.

1) Establiment de normes

En l'exemple de l'externalitat de consum, l'ajuntament pot establir regles que impedeixin l'abús de sorolls. Difícilment, però, tindrà informació per a determinar que el nivell eficient és de 2,5 hores de soroll.

En el cas de l'externalitat de producció, si el govern coneix els efectes exactes de l'externalitat, podria demanar a la indústria contaminant que produeixi la

quantitat correcta d'*output*. En cas contrari, pot fixar els nivells legals de contaminació. Així, pot posar un límit del 12 en el nivell de contaminació de la indústria. El problema que hi ha amb aquesta solució és doble. En primer lloc, el govern o l'organisme regulador sovint no té prou informació i, en segon lloc, s'ignoren els costos de l'aplicació de límits. Si una indústria emet fum i les empreses han de reduir les emissions de fum a partir de la col·locació de filtres a les xemeneies, aquest cost s'ha de tenir en compte.

2) Impostos de Pigou

Una segona solució consisteix a aplicar impostos, que si van dirigits a controlar una externalitat s'anomenen *impostos pigovians*. En el cas de l'externalitat de consum, s'hauria de fixar un impost de 5 per hora de soroll, és a dir $5x_{1a}$, de manera que el cost per part del generador de l'externalitat passa a ser de $15x_{1a}$ i la funció a optimitzar a fi de determinar l'òptim privat esdevé la següent:

$$u_a = 20x_{1a} - x_{1a}^2 + 100 - 15x_{1a}.$$

Si es maximitza respecte a x_{1a} , s'obté la solució socialment òptima, $x_{1a}^\circ = 2,5$.

En el cas de l'externalitat de producció, s'hauria de fixar un impost a la producció perquè l'augment del preu reflecteixi el cost de la contaminació. Suposem que el govern cobra un impost al consum de 12 € per unitat d'*output* als productors. Aleshores, $CM = 2 + 12 = 14$, de manera que $20 - q = 14$ es compleix per $q = 6$. És a dir, el mercat assoleix el nivell socialment òptim de contaminació.

Un altre exemple d'un impost de Pigou seria una taxa a cobrar als automobilistes per les emissions contaminants del seu vehicle. Els vehicles poden ser objecte d'inspeccions anuals a fi d'estimar la probable emissió de gasos durant l'any i els ajuntaments poden imposar taxes als conductors, sobre la base de la quantitat estimada de contaminació pel funcionament del vehicle. Amb aquest mecanisme, les persones suporten el cost veritable de la contaminació que origina el seu vehicle. En el cas d'una externalitat positiva, el remei és un subsidi en lloc d'un impost.

3) Creació de mercats

El problema de les externalitats és que no hi ha drets de propietat establerts ni mercat per a determinats productes. La contaminació és un resultat del procés de producció (com ho són els tints), però no hi ha cap mercat per a la contaminació (no és un bé, sinó un «mal») i no té preu. En el cas dels tints, les empreses són les proveïdores de contaminació. Els consumidors i altres empreses, que també poden estar negativament afectades per la contaminació, són els compradors potencials que, com que la contaminació és un mal, només el compraran si se'ls paga per comprar-lo: el preu d'un «mal» serà negatiu. Vegem-ne un exemple.

Exemple

Suposem que hi ha dues empreses. L'empresa 1 opera en un mercat perfectament competitiu i produeix un *output* x que imposa un cost $E(x)$ en l'empresa 2. Els beneficis de les dues empreses són els següents:

$$p_a = px - C(x) \quad \text{i} \quad p_b = -E(x).$$

Suposem que $C'(x) > 0$, $E'(x) > 0$, $C''(x) > 0$ i $E''(x) > 0$. Consideracions de rendibilitat privada de l'empresa 1 la portaran a produir x° tal que $p = C''(x^\circ)$. Des del punt de vista social, els costos de l'externalitat s'han de tenir en compte i el nivell socialment òptim de la producció, x^* , s'obté maximitzant $\pi_s = px - C(x) - E(x)$. La condició de primer ordre és $p = C'(x^*) + E'(x^*)$, en què l'expressió en la part dreta representa el cost social marginal.

Ara suposem que hi ha un mercat per a la contaminació, en què el preu per unitat de contaminació es r . x_a representarà la quantitat de contaminació que l'empresa 1 vol vendre i x_b , la quantitat de contaminació que l'empresa 2 vol comprar. Aleshores, els beneficis són els següents:

$$p_a = px_a + rx_a - C(x_a) \quad \text{i} \quad p_b = -rx_b - E(x_b).$$

Les condicions de primer ordre són les següents:

$$p + r - C'(x_a) = 0 \quad \text{i} \quad -r - E'(x_b) = 0.$$

Quan demanda i oferta de contaminació s'iguallen, es compleix que $x_a = x_b = x^*$, que verifica la condició d'optimitat social:

$$p = C'(x^*) + E'(x^*).$$

Aquesta solució requereix uns quants comentaris. Com que $E'(x) > 0$, tenim $r < 0$: el preu de la contaminació és negatiu. En segon lloc, perquè hi hagi un mercat de contaminació, hi ha d'haver drets de propietat establerts sobre la contaminació. O l'empresa contaminant ha de tenir dret a contaminar o l'empresa contaminada ha de tenir dret a un aire net i una aigua neta. La tercera cosa és que els mercats, per a determinats tipus de contaminació poden ser molt estrets, amb molt pocs agents en el mercat. Quan la música del veí molesta, el mercat només consta de dos agents. En aquest cas, en lloc d'un mercat competitiu hi haurà una negociació entre agents i es partirà del fet que es pot fer soroll en unes hores, però no en unes altres.

Per tal de crear mercats d'externalitats, s'han d'assignar permisos per a contaminar. Als contaminants se'ls assigna una quota per a les emissions de substàncies contaminants. Si les incompleixen, s'imposen multes o sancions. D'altra banda, si una empresa contamina per sota de les seva quota, pot vendre la diferència a altres empreses en el mercat. Així, per exemple, si la quota de l'empresa és de 86 tones d'emissions d'òxid de nitrogen en un any i, en realitat, només n'emet 80, pot vendre el dret a emetre 6 tones d'òxid de nitrogen a altres empreses. Les empreses poden comparar el preu de mercat del permís d'emissions amb el cost de reduir les emissions i decidir la millor alternativa. Les empreses que poden reduir les emissions de manera més barata vendran permisos a empreses que no ho poden fer. El mateix tipus de mecanisme s'ha desenvolupat per a les nacions. D'aquesta manera, s'han donat quotes als diversos països que es poden utilitzar o es poden vendre. El problema és el joc d'interessos perquè el sistema funcioni de manera efectiva, que requereix un seguit de compromisos polítics.

4) Internalització

Aquesta solució només és vàlida entre empreses. Si l'empresa química dels tints també és propietària del llac contaminat per l'abocament de residus industrials, no hi ha externalitat. L'externalitat s'ha interioritzat, en el sentit que l'empresa contaminant té en compte el cost de la contaminació. Seleccionarà x per tal de maximitzar el benefici que ara s'ha convertit en $px - C(x) - E(x)$, de manera que produirà el nivell de producció socialment eficient.

6. El teorema de Coase

Suposem que no hi ha costos de transacció, en el sentit que les parts afectades per una externalitat poden negociar sense cap cost.

El teorema de Coase afirma que si no hi ha costos de transacció, s'obtéindrà un resultat eficient com a resultat de la negociació dels agents afectats per l'externalitat, no importa com s'assignen els drets de propietat inicial sobre les variables que creen l'efecte extern.

La idea de Coase és simple. Suposem que l'empresa contaminant té el dret a contaminar. Aleshores, l'agent que pateix els efectes de la contaminació tindrà un incentiu a pagar per tal de limitar-la. El contaminant acceptarà aquesta oferta, sempre que el guany superi la pèrdua per reduir la producció. La reducció del benefici de l'empresa contaminant per unitat de producte val $p - C'(x)$. L'augment de benefici de l'empresa contaminada per unitat en què baixa l'*output* del contaminant és $E'(x)$. L'empresa contaminada pot pagar a l'empresa que contamina perquè baixi unitats addicionals de producció, sempre que es compleixi $E'(x) > p - C'(x)$. L'empresa es detindrà en el punt en què $E'(x) = p - C'(x)$, que és la condició per la quantitat socialment òptima de contaminació.

Exemple 1

L'empresa 1 és un monopoli que afronta una demanda inversa $p = 8 - x$. L'empresa només té costos fixos, de manera que els costos marginals són nuls i $CME = x$. El monopoli, en l'òptim privat, en decidir independentment el nivell d'*output*, produirà 4 unitats de producte. Si l'empresa 2, que pateix la contaminació, vol que la 1 redueixi la producció (i la contaminació) en una unitat, estarà disposada a pagar fins a 4, mentre que la reducció en el benefici de la 1 serà de 1. Per tant, les empreses haurien d'arribar a un acord sobre la reducció. La negociació s'atura quan $x = 3$. Per tal de reduir una unitat de x més, el màxim que pot pagar 2 és de 3, que és exactament igual a la reducció del benefici marginal de l'empresa 1. Per tant, es produirà la quantitat socialment òptima de x , que és $x^* = 3$.

x	Ingressos px	Benefici marginal	CME
0	0		
1	7	7	1
2	12	5	2
3	15	3	3
4	16	1	4
5	15	-1	5

Ara suposem que l'empresa contaminada té el dret a un aire net. Llavors, en lloc de no produir res, a l'empresa contaminant li interessa oferir a l'empresa contaminada una suma de diners a canvi del dret a contaminar (o per tal d'impedir que vagi als tribunals). Per cada unitat addicional de contaminació, l'empresa 1 calcularà l'augment de beneficis

derivats de la producció associada, de manera que pot presentar ofertes atractives a la 2 per tal de poder contaminar. Així, a fi de produir la primera unitat, l'empresa contaminant estaria disposada a pagar fins a 7 i l'empresa contaminada exigiria, almenys, 1, de manera que agents racionals haurien d'arribar a un acord. El procés continuaria en unitats addicionals. L'empresa contaminada continuarà acceptant sempre que el pagament la compensi adequadament pel cost addicional de la contaminació. El resultat final del procés serà, novament, el nivell socialment òptim de contaminació $x^* = 3$.

Per descomptat, mentre que el resultat d'eficiència és el mateix en ambdós casos, les conseqüències de la distribució són molt diferents. En un cas, l'empresa contaminada paga l'empresa que contamina i, en l'altre, qui paga és el contaminant.

El teorema de Coase depèn de l'absència de costos de transacció, és a dir, de qualsevol cost de la negociació. Si els costos de negociació (formar una associació dels agents implicats, dur a terme les negociacions, redactar i signar el contracte, vigilar que es compleixi) són importants, els beneficis derivats de la negociació poden ser neutralitzats completament, de manera que no s'assolirà el resultat socialment òptim.

Exemple 2

Suposem que hi ha una societat de dos agents, a i b , i dos béns, 1 i 2. 1 és tabac i 2 és un bé numerari que representa la despesa en els altres béns. A l'agent b li molesta el fum del tabac i, d'aquí, el consum de tabac per part de a . Les funcions d'utilitat dels dos agents són $u_a = v_a(x_{1a}) + x_{2a} = 20x_{1a} - x_{1a}^2 + x_{2a}$, $u_b = v_b(x_{1a}) + x_{2b} = -4x_{1a} + x_{2b}$. La riquesa de a en termes de numerari és de w_{2a} i per cada unitat de tabac consumida, es redueix en 6 unitats, $C'(x_{1a}) = 6$, de manera que l'expressió de la corba de transformació $x_{2a} = w_{2a} - 6x_{1a}$.

Si no hi ha drets establerts sobre l'aire (o si l'agent a té dret a fumar i hi ha costos de transacció que impedeixen la negociació), l'agent a decideix la quantitat a fumar a partir de la maximització de la funció d'utilitat subjecte a la restricció de recursos que acara:

$$\text{Màx. } 20x_{1a} - x_{1a}^2 + w_{2a} - 6x_{1a}$$

Iguala el benefici marginal que li proporciona el bé 1, és a dir, la valoració marginal del bé 1 amb el cost marginal d'aquest bé:

$$v_a'(x_{1a}) = C'(x_{1a}) \rightarrow 20 - 2x_{1a} = 6.$$

La solució privada, en què cada agent decideix les quantitats dels béns a consumir independentment del que faci l'altre agent, el porten a consumir el següent:

$$x_{1a}^o = 7 \text{ cigars/dia.}$$

L'agent a exerceix una externalitat negativa sobre el b , a qui molesta el fum del tabac.

L'òptim social s'obté a partir de maximitzar la suma d'utilitat de tots els implicats subjecte a la restricció de recursos que acaren i, per tant, iguala la suma de valoracions marginals del bé 1 amb el cost marginal del bé 1 en termes del bé 2.

$$v_a'(x_{1a}) + v_b'(x_{1a}) = C'(x_{1a}) \rightarrow 20 - 2x_{1a} - 4 = 6.$$

Mostra que l'òptim social és inferior al privat:

$$x_{1a}^* = 5 \text{ cigars/dia.}$$

L'òptim s'aconseguirà a partir de la negociació si hi ha definits drets de propietat i no hi ha costos de transacció, de manera que els agents poden negociar sense costos de cap mena. Les valoracions marginals per la persona a dels cigars 1, 2, ..., 5, 6 i 7 netes del cost marginal, valen, respectivament, $20 - 6 - 2(1) = 12$, 10, 8, 6, 4, 2 i 0. D'altra banda, la valoració marginal de b de cada cigar que fuma a és $v_b'(x_{1a}) = -4$.

Si poden negociar i b té dret a l'aire net, a b li interessa, en comptes de no fumar, oferir una quantitat per a fer-ho. Per la primera unitat està disposat a pagar fins a 12 i b en requereix, almenys, 4, cosa que fa que hi hagi marge de sobres per a l'acord i, si no hi haguessin costos de transacció, és a dir costos de negociar, agents racionals hi arribarien. El procés continuaria amb les unitats següents, mentre la quantitat que a estigués disposat a pagar excedís la requerida per b , és a dir, s'aturaria en la unitat 5. En aquest punt, el que vol pagar a iguala el mínim que sol·licita b , que són 4 unitats de numerari. Per tant, s'obté la solució eficient de $x_{1a}^* = 5$ cigars/dia.

Si a té dret a fumar i no hi ha costos de negociar, els dos individus poden aconseguir més utilitat que en la solució privada: a partir del consum de 7 cigars, a sol·licitaria, almenys, 0 per a reduir-lo en una unitat, mentre que b estaria disposat a pagar fins a 4 perquè ho fes. També hi hauria acord per tal de reduir el consum en una unitat més, de 6 a 5, ja que 2 és inferior a 4. La reducció del consum s'acaba en el cinquè cigar. En aquest moment, el que està disposat a pagar b s'igualava amb el que demana a i, per tant, s'obté, de nou, la solució Pareto òptima de $x_{1a}^* = 5$ cigars/dia.

El resultat eficient que s'obté de la negociació dels agents en absència de costos de transacció serà únic, sigui quina sigui la distribució de drets de propietat, si les preferències dels agents per l'externalitat no depenen de la seva riquesa.

Si hi ha costos de transacció, és a dir costos de negociar, per exemple, perquè els individus tenen informació incompleta dels guanys de l'altre en cas d'intercanvi, no es pot garantir que arribin a un acord. En aquestes circumstàncies, la solució eficient es podria aconseguir amb un impost de Pigou per cigar consumit.

Amb un impost de t per unitat a maximitzaria el següent:

$$\begin{aligned} \text{Màx. } & 20x_{1a} - x_{1a}^2 - t x_{1a} + w_{2a} - 6x_{1a} \\ & x_{1a} \end{aligned}$$

La condició de primer ordre mostra que l'impost ha de fer internalitzar els efectes externs derivats del consum de tabac, és a dir, ha de reduir el benefici marginal privat i aconseguir que s'iguali benefici marginal social amb cost marginal social.

$$20 - 2x_{1a} - t = 6.$$

L'impost pigovià, t^* , verificaria aquesta equació per la quantitat socialment eficient, $x_{1a}^* = 5$. És a dir:

$$t^* = 4.$$

7. Externalitats mútues

Les situacions en què dos o més agents exerceixen efectes externs simètrics entre ells presenten peculiaritats interessants i són la base de les economies de xarxa: en les descàrregues d'arxius a Internet, com més individus hi ha interconnectats i més arxius es baixen, més faciliten les descàrregues dels altres. L'anàlisi de les externalitats mútues, però, el desenvoluparem des d'un exemple més senzill, l'excés de velocitat, que té alguna similitud amb el tabac. Produeix benestar a qui corre o fuma, però perjudica qui fa l'acció i altres individus.

Considerem dos agents, a i b , que han de decidir la velocitat a què condueixen. A l'individu j , $j = a, b$, seleccionar la velocitat x_j li genera un benestar $x_j^{1/2}$, que és creixent amb la velocitat. A més de la velocitat, l'altre bé d'aquesta economia és un bé numerari, amb preu igual a 1, que representa la despesa en els altres béns i j en consumeix z_j . La utilitat de j varia linealment amb z_j , de manera que la seva funció d'utilitat és la següent:

$$u_j = x_j^{1/2} + z_j \quad x_j, z_j \geq 0.$$

Com més corrin, més probable és que tinguin un accident que els involucri tots dos. La freqüència amb què cada individu té accidents, $g(x_a, x_b)$, augmenta quan augmenta la velocitat i suposarem que val $g(x_a, x_b) = k^{-1}(x_a + x_b) < 1$, en què k és una constant. La despesa de cada agent en accidents és igual a la freqüència amb què els té pel cost unitari, $p > 0$. La renda de l'individu j és $m_j > 0$ (prou gran per a pagar costos d'accidents i les multes).

Iniciem l'anàlisi amb la solució privada, que parteix de la restricció pressupostària de a , que diu que la suma de despeses en els dos béns ha de ser igual a la renda, $p g(x_a, x_b) + z_a = m_a$. Si se substitueix en la funció d'utilitat de a , es pot expressar de la manera següent:

$$u_a = x_a^{1/2} + m_a - p(x_a + x_b) k^{-1}.$$

L'òptim privat s'obté de la condició de primer ordre d'aquest problema,

$$2^{-1} x_a^{-1/2} - p k^{-1} = 0.$$

Si aïllem, obtenim el següent:

$$x_a^* = \left(\frac{k}{2p} \right)^2.$$

Cada agent té incentius a conduir massa ràpid des de l'òptica social, tal com es comprova si resollem el problema de la societat, sumem les funcions d'utilitat dels dos agents i maximitzem respecte a x_a i x_b :

$$\text{Màx.}_{x_a, x_b} x_a^{1/2} + x_b^{1/2} + m - 2p(x_a + x_b)k^{-1} \quad \text{en què } m = m_a + m_b.$$

Les condicions de primer ordre són les mateixes per als dos agents, ja que el problema és simètric:

$$2^{-1} x_a^{-1/2} - 2p k^{-1} = 0.$$

$$2^{-1} x_b^{-1/2} - 2p k^{-1} = 0.$$

Per a qualsevol agent, per exemple per a l'agent a , l'òptim social és inferior al privat:

$$x_a^\circ = \left(\frac{k}{4p} \right)^2.$$

Com que l'agent a ignora el cost que imposa sobre el b , escollirà una velocitat massa alta, $x_a^* > x_a^\circ$.

Si es sanciona l'agent h amb la quantitat t en cas d'accident, per tal que coincidissin costos privats i socials i internalitzés l'externalitat, la multa òptima hauria d'aconseguir que el cost unitari total, que suportés l'individu per accident, $t + p$, fos igual al cost unitari que imposa a la societat, $2p$. Aleshores, la multa òptima seria de $t = p$, per als dos agents. Destaca el fet que si s'apliquen multes òptimes, els costos totals que suporten els agents en cas d'accident són $4p$, que és el doble del cost de l'accident.

8. La tragèdia dels béns comuns

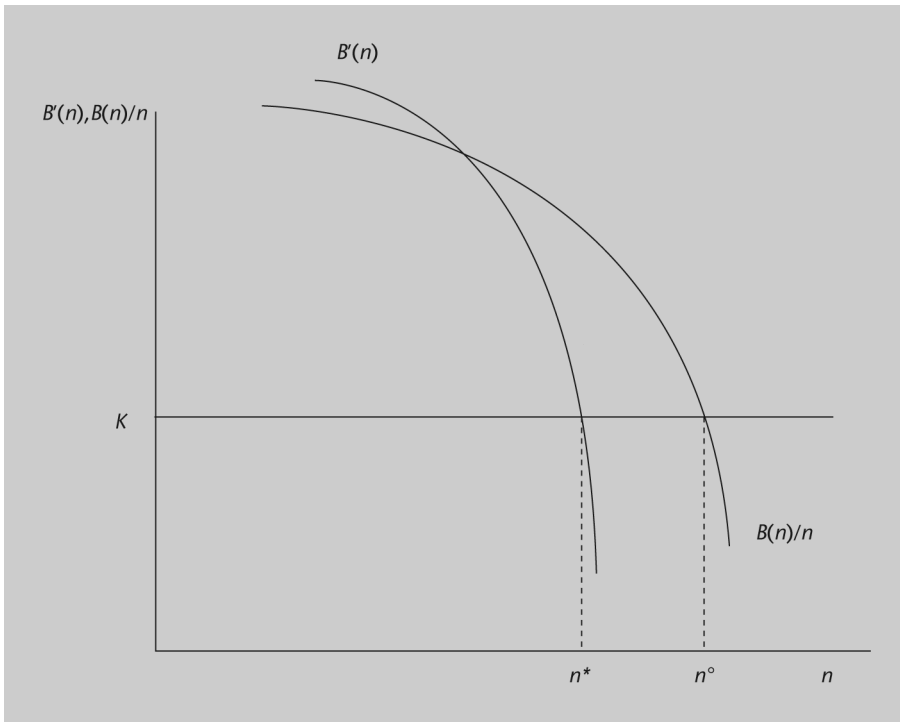
La tragèdia dels béns comuns posa en relleu les conseqüències de drets de propietat mal definits. Suposem que un poble té un camp en què tots els habitants pasturen les seves vaques. El cost de la compra d'una vaca és k €. El nombre de vaques és n i $B(n)$ és el valor total de producció de llet de les vaques quan pasturen n vaques al camp. Suposem que $B'(n) > 0$, però $B''(n) < 0$. Cada vaca addicional redueix l'herba disponible per a les altres vaques i, per tant, el rendiment lleter mitjà. És a dir, $B(n)/n$ disminueix a mesura que augmenta n .

Propietat privada. Si el camp és propietat d'un sol pagès, comprarà vaques per a maximitzar el benefici $\pi_S = B(n) - kn$. La condició de primer ordre és $B'(n^*) = k$. Per a la solució n^* , el valor del producte marginal del factor s'equipara amb el cost del factor.

Propietat comunal. Ara suposem que el camp es propietat comunal. Per a qualsevol n , el valor de la producció de llet per vaca és $B(n)/n$. Cada granger compararà aquest rendiment amb el preu de les vaques, k . Suposem que hi ha n vaques al camp. El pagès que contempla la pastura d'una vaca addicional, compararà $B(n+1)/(n+1)$ amb k , i portarà a pasturar la vaca, si $B(n+1)/(n+1) > k$. Així, s'afegiran vaques al camp fins que $B(n^o)/n^o = k$, és a dir, fins que l'entrada d'una vaca nova generi beneficis zero.

Quina relació té la solució si la propietat és comunal amb la trobada quan l'àrea de pastura té un sol propietari? Això ho mostra el gràfic 5. Hem suposat que $d[B(n)/n]/dn < 0$, de manera que $B'(n) - B(n)/n < 0$ i, per tant, $n^o > n^*$. En conseqüència, el nombre de vaques que pasturen al camp és més gran quan hi ha propietat comunal del camp de pastura que no pas quan el camp és de propietat privada. Aquest excés de vaques té un efecte extern negatiu sobre la producció de llet. No obstant això, quan la terra és de propietat comunal, els pagesos no tenen en compte aquesta externalitat negativa i portaran a pasturar massa vaques. Tendències similars s'observen en la utilització de tots els recursos de propietat comunal. L'excés de pesca n'és un bon exemple.

Gràfic 5. Tragèdia dels béns comunals



Resum

En aquest mòdul hem vist dues situacions en les quals el mecanisme de mercat falla i no aporta una solució eficient en el sentit de Pareto: els béns públics i les externalitats.

Els béns públics purs tenen un consum no rival i no excludible. La no-rivalitat significa que el consum d'una persona no redueix la quantitat disponible per a les altres persones. La no-excludibilitat significa que ningú no pot ser privat del consum d'un bé.

L'existència de no-excludibilitat en els béns públics purs dona lloc al problema del paràsit, que consisteix en l'absència d'incentius per a pagar pels béns públics, perquè el pagament no afecta la quantitat disponible per a consumir-los. A més, aquest problema es veu reforçat perquè en els béns públics purs l'individu pot aprofitar-se sempre d'aquests béns gràcies a la no-excludibilitat. Això fa que l'escala de provisió d'un bé públic pur sigui massa petita si la seva oferta es deixa a la iniciativa privada.

Les solucions als problemes generats pels béns públics consisteixen en la provisió pública, que es finança amb la recaptació impositiva. Alternativament, també es poden establir alguns mecanismes privats per a proveir béns públics, com per exemple les contribucions voluntàries dels individus per a finançar alguns béns públics.

Una externalitat és la situació en què hi ha un cost o benefici derivats d'una transacció econòmica, que recau sobre agents tercers i que no són tinguts en compte pels que intervenen en la transacció. Quan es genera un cost parlem d'externalitats negatives, mentre que quan es genera un benefici parlem d'externalitats positives.

Quan hi ha externalitats negatives, com és el cas de la contaminació, l'assignació del mercat no és eficient, perquè els costos socials són superiors als costos privats. Com a resultat, la producció és massa elevada en comparació amb la situació òptima socialment i, en conseqüència, també ho és la contaminació que se'n deriva. En aquesta situació, l'eficiència en l'assignació requereix una reducció de l'escala de producció perquè sigui finalment inferior a la que produiria el mercat en absència d'intervenció. Aquesta disminució de la producció es pot aconseguir a partir d'impostos, drets d'emissions negociables o controls directes (de contaminació) aplicats en els processos productius pel sector públic. Com a mesures alternatives de caràcter privat, les externalitats negatives també es poden corregir o mitigar establint i garantint els drets de propietat.

Pel que fa a les externalitats positives, l'assignació del mercat és ineficient perquè els beneficis privats són inferiors als beneficis socials. Això fa que el mercat proveeixi una quantitat inferior a l'òptima socialment. La solució requereix augmentar la producció concedint subvencions correctores als consumidors.

Activitats

1. Sigui un municipi on el nombre de persones riques (N_R) és de 15, mentre que el de persones pobres (N_P) és de 30. En aquest municipi es proposa construir un local social de mida y , amb una funció de costos $C(y) = ty = 10y$. La valoració de les persones pobres del nou local és de $V_P(y) = 2y^2$ mentre que les riques valoren la nova seu social en $V_R(y) = y^2$.

Determina quina és la proporció del cost total que pagarien els rics per a construir el local en l'equilibri de Lindhal.

2. Considera una economia amb dues mercaderies: un bé públic i un bé numerari que s'usa com a *input* per a produir el bé públic. El preu del numerari és igual a 1 i la funció de cost de produir el bé públic és $C(x) = x$. En aquesta economia hi ha dos consumidors amb unes preferències representades per les següents funcions d'utilitat:

$$U_1 = 2\sqrt{x} + m_1$$

$$U_2 = 4\sqrt{x} + m_2$$

on x i m són la quantitat de bé públic i la quantitat de numerari consumida pel consumidor i , respectivament.

a) Calcula la quantitat eficient de bé públic segons la condició de Samuelson.
b) Troba els preus personalitzats de bé públic d'acord amb l'equilibri de Lindahl. Comprova que les aportacions dels dos consumidors s'igualen al cost marginal del bé públic, tal com s'estableix a l'equilibri de Lindahl.

3. La demanda diària per a entrar en un bosc a buscar bolets respon a l'expressió: $P = 400 - 0,1Q$. La quantitat de persones que diàriament poden entrar i que permet l'eliminació espontània dels danys causats a l'ecosistema és de 500 persones. Analitza cadascuna de les següents situacions:

a) El propietari del bosc cobra als seus clients 300 euros cada dia per accedir-hi.
b) El propietari del bosc cobra als seus clients 300 euros cada dia i a més recapta per a l'ajuntament d'aquell municipi 75 euros en concepte de taxes.
c) El propietari del bosc es queixa de la taxa, perquè no li permet obtenir els mateixos ingressos que abans. Quina taxa permetria maximitzar el nombre de boletaires sense posar el perill la capacitat de regeneració del bosc?

4. Considera un bé de consum que té una producció contaminant, de tal manera que per cada unitat produïda del bé, es genera 1 kg d'emissions contaminants. Aquesta contaminació afecta negativament el benestar de tots els ciutadans. El cost estimat de l'externalitat negativa és de 5 euros per kg d'emissions. El cost privat de les empreses que produeixen el bé (sense tenir en compte l'externalitat) determina la funció d'oferta de mercat: $P = Q/4$. La demanda de mercat d'aquest producte respon a l'expressió: $P = 180 - Q$.

a) Representa gràficament i calcula l'equilibri competitiu que s'obté del mercat quan no hi ha cap intervenció.
b) Calcula i representa al mateix gràfic l'assignació eficient, és a dir, la quantitat socialment òptima (aquella quantitat que té en compte no només el cost privat de producció sinó també el cost social ocasionat per la contaminació).
c) L'Estat intervé en el mercat per a corregir l'externalitat mitjançant un impost sobre la quantitat produïda del bé (o impost pigovià). Quin és l'impost per unitat de producte que permet assolir una assignació eficient (és a dir, el nivell socialment òptim de producció)? Quin preu pagaran els compradors? Quin preu net obtindran els venedors?

5. L'any 2005, després de l'entrada en vigor del protocol de Kyoto, en el qual es van establir límits a les emissions de gasos d'efecte hivernacle que podien emetre les empreses i els països, va començar a funcionar un «mercat d'emissions». Els detractors d'aquest mercat de permisos d'emissió consideren injust l'establiment i la venda de drets de contaminació, perquè permet a les empreses obtenir un ingrés monetari de la seva contribució a la contaminació ambiental. Els defensors, per la seva banda, diuen que és una manera de fer que les empreses contaminants tinguin en compte els costos de les seves emissions. Quin és l'argument econòmic en què es basa l'opinió dels defensors d'aquests permisos negociables?

6. Dues empreses estan situades en el curs d'un mateix riu. Al capdamunt, hi ha una empresa que produeix acer (x_a) amb una funció de costos: $C(x_a) = 6x_a^2$. A la part baixa, hi ha un camp de golf que utilitza l'aigua del riu per a regar i vendre entrades (x_c) amb una funció de costos igual a: $C(x_c) = 2x_c^2 + 3x_c$. Respon a les següents qüestions:

- a) Per què en aquesta situació hi ha efectes externs negatius? Qui els imposa a qui?
- b) Suposa que els preus de mercat de l'acer i d'accés al camp de golf són, respectivament, p_a i p_c . Calcula les decisions d'oferta de les empreses suposant que el mercat és competitiu. Calcula també l'oferta de les empreses en cas d'arribar a un acord de maximització conjunta de beneficis. Compara ambdues decisions i explica les diferències en cas que n'hi hagi.
- c) Si l'empresa contaminant hagués de pagar un impost T per unitat de producte, quina seria la seva oferta? Quin hauria de ser el valor de T si es volgués aconseguir una solució eficient (és a dir, quan l'empresa d'acer internalitza els costos de la contaminació)?

Exercicis d'autoavaluació

1. Comenteu l'afirmació següent: «L'educació reuneix les característiques d'un bé públic pur i, per tant, s'ha de finançar amb impostos.»

2. En una economia, el nombre de persones riques, N_R , és de 10, mentre que el de persones pobres, N_P , és de 100. Ambdós grups de persones es proposen construir un ateneu que té un cost $C(q) = tq = 40q$, en què q és la mida en desenes de persones. La valoració de les persones pobres de l'ateneu és de $v_P(q) = q^{1/2}$, mentre que la de les riques és de $v_R(q) = 8q^{1/2}$. Quina o quines de les afirmacions següents són correctes?

- a) En l'equilibri de Lindahl, el conjunt dels rics paga una proporció més petita que el dels pobres.
- b) L'equilibri de Lindahl que obtenim és eficient.
- c) Amb un mecanisme de contribucions voluntàries, la quantitat de bé públic proveïda serà inferior que en l'equilibri de Lindahl.
- d) Cap de les afirmacions anteriors és correcta.

3. En un poble hi ha dos habitants, P i R , que tenen preferències definides per dos béns: un de públic, q , el nombre de carrers asfaltats del poble, i un de privat, x , numerari, que representa la despesa en béns privats. El cost de producció del bé públic en termes del privat és $c(q) = 4q$. Les preferències dels dos individus són les següents:

$$v_j(x_j, q) = x_j + v_j(q), \quad \text{on } v_j(q) = a_j q - \frac{q^2}{2},$$

$$a_j > q, \quad j = R, P, \quad \text{amb } a_R = 8, \quad a_P = 6.$$

Essent p_j la participació de i en la despesa total en el bé públic, quines de les afirmacions següents no són correctes en l'equilibri de Lindahl?

- a) La quantitat de bé públic és $q^* = 5$.
- b) La contribució de R és el triple que la de P .
- c) L'equilibri de Lindahl coincideix amb l'equilibri de Nash.
- d) L'equilibri de Lindahl reflecteix que la contribució està d'acord amb la valoració marginal del bé.

4. Considereu una carretera transitada que connecta dues ciutats, A i B. Els minuts que està disposat a dedicar un automobilista a fer un viatge per la carretera baixa amb x , el nombre de viatges efectuats al llarg del dia, segons l'expressió $t_d = 20 - 0,001x$. El cost privat marginal, en minuts, de fer un viatge, el mesura el temps mitjà per a efectuar-lo i és $t_d = 2 + 0,001x$. Quina de les afirmacions següents és correcta:

- a) El cost privat marginal de fer un viatge coincideix amb el cost social marginal.
- b) Si no hi ha cap regulació, el nombre de viatges diaris serà de 6.000.
- c) Si hi ha sobreexplotació de la carretera, un tipus de regulació que permetria baixar-ne l'ús seria un impost d'estacionament que incorpori una fracció fixa petita a pagar cada cop que aparques i una part alta en funció del temps d'estacionament.
- d) Cap de les respostes precedents és correcta.

5. L'Abel (a) i en Bernat (b) són els dos únics habitants d'una illa en què només hi ha un bé de consum, els cocos. Per tal de facilitar el trasllat dels cocos, han decidit fer un camí, que travessa part de l'illa i que els aproparà fins el lloc on els consumeixen. Tots dos individus poden utilitzar aquest camí simultàniament i, per tant, té característiques de bé públic. Tenint en compte els recursos de què disposen, treball i alguna eina petita, la corba de possibilitats de producció que expressa la quantitat màxima de bé públic per cada nivell de bé privat és $x^2 + q^2 - 3.200 = 0$, en què x és la quantitat de bé privat, en nombre de cocos, i q la de bé públic, en metres de camí. D'altra banda, les preferències d'aquests dos individus són idèntiques i es poden representar mitjançant $u_j = x_j q$, $j = a, b$. Quines són les quantitats eficients de camí i cocos?

6. Amb motiu de les festes, l'Ajuntament de Sant Vicent es planteja la possibilitat d'oferir gratuïtament als veïns dos tipus d'activitats: concerts de música a la plaça major (on caben tots els veïns) i l'elaboració d'una paella gegant a consumir al pavelló esportiu municipal. Tenint en compte els recursos disponibles, el nombre d'actuacions, q , i el nombre de racions d'arròs,

x , que pot oferir com a màxim l'Ajuntament el defineix la corba de possibilitats de producció següent:

$$x^2 + 4q^2 = 2.880.$$

A Sant Vicent hi conviuen cent veïns amb preferències idèntiques sobre aquestes activitats representables per la funció següent:

$$u(x_j, q) = x_j^4 q, \quad j = 1, \dots, 100,$$

Aquí, j denota les quantitats consumides per cada veí. Determina els nivells totals òptims d'actuacions i racions de paella que l'Ajuntament hauria d'oferir.

7. Considereu una societat de dos agents, a i b , i dos béns, 1 i 2. 1 és el manteniment de la façana modernista de la casa de l'agent a i 2 és un bé numerari que representa la despesa en els altres béns. A l'agent b li genera benestar l'estètica de la façana de la casa de a . Les funcions d'utilitat dels dos agents són $u_a = 10x_{1a} - x_{1a}^2 + x_{2a}$, $u_b = x_{2b} + 2x_{1a}$. Les dotacions inicials de bé 2 són $w_{2a} = w_{2b} = 100$. A l'agent a mantenir la façana li representa despeses, d'acord amb el que mostra la corba de transformació entre els béns 1 i 2 i que és $x_{2a} = 100 - 4x_{1a}$. (L'agent b no té una façana modernista i les despeses de manteniment impliquen zero). Determineu el següent:

- La solució privada, en què cada agent decideix les quantitats dels béns a consumir independentment del que faci l'altre agent.
- La quantitat eficient de bé 1 per a la societat.
- Si els agents poden negociar sense costos, amb informació completa i simètrica, quin seria el nivell de 1 a què arribarien? Quines són, llavors, les quantitats del bé 2 per a cada individu?
- Si no poden negociar, quin sistema d'impostos i subvencions hauria d'aplicar l'Ajuntament?

8. En una economia hi ha 2 béns, el bé 1, aigua, i el bé 2, que és numerari i representa la despesa en el conjunt d'altres béns, i dos agents, a i b . Les dotacions inicials són $w_{2a} = 40$, $h = a$, b , $w_{1a} = 48$, $w_{1b} = 2$, en què el primer subíndex fa referència al bé i el segon subíndex, a l'agent. Gairebé tota l'aigua és en el terreny de a . El consum d'aigua per part de b per sobre de la seva dotació ha de provenir de la de a , cosa que afecta negativament el benestar de a . Aquesta externalitat negativa es deu al fet que el consum de b afecta el medi i l'entorn del territori de a . Les preferències dels agents venen donades per les funcions d'utilitat:

$$\begin{aligned} u_a &= 10x_{1a} - x_{1a}^2/2 - (x_{1b} - 2)^2/8 + x_{2a}, \\ u_b &= 10(x_{1b}) - (x_{1b})^2/2 + x_{2b}. \end{aligned}$$

Determineu el següent:

- La solució privada (la solució a què arribarien els agents si actuessin de manera individual) si la Constitució estableix que b té dret a l'aigua que és en terreny de a .
- La solució privada si b no té dret a l'aigua que és en el territori de a .
- La solució eficient.
- L'impost unitari que s'hauria d'establir sobre x_{1b} per tal d'aconseguir la solució eficient i la utilitat que obtenen els dos agents si la recaptació impositiva es transfereix a a . Mostreu que hi ha un guany de benestar en comparació a les solucions privades.

Solucionari

Activitats

1. Si indiquem amb S_R la fracció que paguen els rics del cost total de construir el local social, y , i amb S_P la fracció que paguen els pobres, les condicions de primer ordre per als rics i per als pobres seran, respectivament:

$$\frac{tS_R}{N_R} = V'_R(y) \rightarrow \frac{10S_R}{15} = 2y, \text{ per als rics, i}$$

$$\frac{tS_P}{N_P} = V'_P(y) \rightarrow \frac{10S_P}{30} = 4y, \text{ per als pobres.}$$

Atès que $S_R = 1 - S_P$, podem escriure les condicions de la manera següent:

$$\frac{10(1 - S_P)}{15} = 2y \rightarrow 10(1 - S_P) = 30y,$$

$$\frac{10S_P}{30} = 4y \rightarrow 10S_P = 120y.$$

Tenim, doncs, un sistema de dues equacions i dues incògnites. Si el resollem, obtenim l'equilibri de Lindahl d'aquesta economia:

$$y = \frac{1}{15}, \quad S_P = \frac{12}{15}, \quad S_R = \frac{3}{15}.$$

Per tant, els rics pagaran una part de $\frac{3}{15}$ del cost total de construcció.

En l'equilibri de Lindahl se satisfà la condició d'eficiència econòmica, ja que les contribucions estan d'acord amb la valoració marginal del bé públic.

2.

a) Per la condició de Samuelson, sabem que la suma de les taxes marginals de substitució del bé privat pel bé públic en el consum, ha de ser igual al cost marginal de produir el bé públic. Per tant:

$$c'(x) = \frac{\partial U_1}{\partial U_1} \frac{\partial U_2}{\partial U_2} = \frac{\partial x}{\partial U_1} + \frac{\partial x}{\partial U_2}.$$

Llavors:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Traient factor comú obtenim:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}(1 + 2) = 1 \rightarrow \sqrt{x} = 3 \rightarrow x^* = 3^2 = 9,$$

que és la quantitat eficient de bé públic.

b) L'equilibri de Lindahl estableix un preu personalitzat per a cada grup d'individus (per a rics i pobres, per exemple). En el cas d'aquest exercici, aquest equilibri establirà un preu per a cada un dels dos consumidors de l'economia.

Comencem per l'individu 1. Aquest consumidor maximitza la utilitat respecte al bé públic i subjecte a la seva restricció pressupostària, de manera que:

$$\text{Max. } 2\sqrt{x} + m_1$$

$$\text{s.a. } p_1x + m_1 = w_1$$

Si substituïm la restricció pressupostària a l'equació que hem de maximitzar obtenim:

$$\text{Max. } 2\sqrt{x} + w_1 - p_1x.$$

La condició de primer ordre queda definida així:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = p_1^*.$$

Per a l'individu 2:

$$\begin{aligned} \text{Max. } & 4\sqrt{x} + m_2 \\ \text{s.a. } & p_2x + m_2 = w_2 \end{aligned}$$

De nou, si substituïm la restricció pressupostària a l'equació que maximitzem podem escriure:

$$\text{Max. } 4\sqrt{x} + w_2 - p_2x.$$

I, per la condició de primer ordre:

$$\frac{2}{\sqrt{x}} = p_2^*.$$

Com que anteriorment hem calculat la quantitat eficient de bé públic que es produirà en l'economia, podem substituir aquesta quantitat a les aportacions de cada consumidor. Tenim que:

$$x^* = 3^2 = 9.$$

Llavors:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}} = p_1^* & \rightarrow p_1^* = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}, \\ \frac{2}{\sqrt{x}} = p_2^* & \rightarrow p_2^* = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Per la condició de Lindahl sabem que totes les aportacions han de ser igual al cost marginal, és a dir: $C'(x) = 1$. Així, escrivim:

$$p_1 + p_2 = 1.$$

Efectivament es comprova:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

3.

a) Si el preu per a accedir al bosc és de 300 euros, substituïnt aquest valor a la funció de demanda, obtenim la quantitat total de boletaires diària. És a dir:

$$\begin{aligned} 300 &= 400 - 0,1Q, \\ Q &= 1.000. \end{aligned}$$

Amb una aflluència diària de 1.000 boletaires, se superaria el màxim de persones que garanteixen l'eliminació dels danys causats.

Els ingressos obtinguts pel propietari en aquesta situació són igual a: $300 \times 1.000 = 300.000$.

b) Si es recapta 75 euros en concepte de taxes, el nou preu que han de pagar els boletaires és de 375 euros. Amb aquest preu, l'aflluència diària serà igual a:

$$\begin{aligned} 375 &= 400 - 0,1Q, \\ Q &= 250. \end{aligned}$$

I no s'assoliria la xifra màxima de 500 persones diàries.

En aquest cas, els ingressos del propietari són igual a: $300 \times 250 = 75.000$. I la recaptació municipal: $75 \times 250 = 18.750$.

c) La taxa que s'hauria de cobrar sense posar en perill el bosc i maximitzar la quantitat de persones que hi accedeixen diàriament, es calcula a partir de:

$$300 + T = 400 - 0,1 * 500,$$

$$T = 50.$$

Ara, els ingressos del propietari són igual a: $300 \times 500 = 150.000$. I la recaptació municipal: $50 \times 500 = 25.000$.

4.

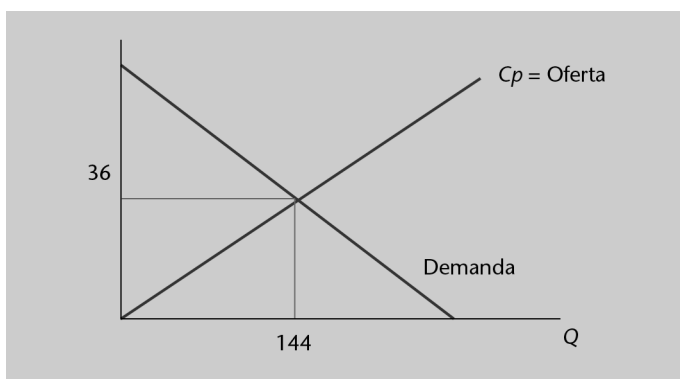
a) L'equilibri competitiu és el que correspon a la situació en què no es té en compte el cost de la contaminació. Aquest equilibri s'obté igualant l'oferta i la demanda de mercat, és a dir:

$$Q/4 = 180 - Q,$$

$$Q = 144.$$

El preu de venda respon a: $p = 180 - 144 = 36$.

La representació gràfica d'aquesta situació és:



b) Si es genera una externalitat de 5 euros per unitat produïda, la funció de cost marginal social (Cs) és igual a:

$$Cs = Q/4 + 5.$$

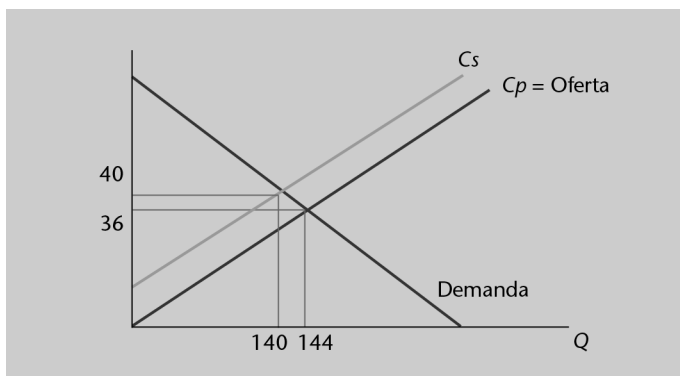
Llavors, la igualtat de la funció de demanda i el cost marginal social ens donen:

$$Q/4 + 5 = 180 - Q,$$

$$Q = 140,$$

que respon a l'òptim social. Aquesta quantitat es vendrà a un preu: $P = 180 - 140 = 40$.

Gràficament:



c) Si l'Estat decideix intervenir per tal d'evitar l'externalitat, haurà d'imposar un impost igual al valor monetari del cost ocasionat per la contaminació. En aquest cas, l'impost piguvià que portaria a la situació de l'apartat anterior és $T = 5$.

El preu pagat pels consumidors és coincident amb el de l'apartat anterior: $p = 40$. El preu net que reben els venedors, un cop han pagat l'impost, és igual a: $40 - 5 = 35$.

5. L'argument econòmic en el qual es basa la defensa dels permisos d'emissió és que fan possible la internalització del perjudici ocasionat per les activitats contaminants. Amb la compra

dels drets d'emissió, les empreses recullen (en part o completament) el cost social que generen al medi ambient. És una manera indirecta, doncs, d'aconseguir que el preu dels productes contaminants incorpori el perjudici social que s'ocasiona amb la seva producció.

6.

a) L'empresa d'acer imposa una externalitat negativa al camp de golf, la qual cosa es pot veure en la funció de costos d'aquest camp de golf. Com més acer produeixi l'empresa, més contaminació hi haurà al riu, més costos per al camp de golf i, en conseqüència, menys beneficis.

b) En el cas de l'equilibri competitiu, cada empresa maximitzarà beneficis igualant el cost marginal al preu. Per tant:

$$p_a = CMg_a(x_a) \leftrightarrow p_a = 12x_a,$$

$$p_c = CMg_c(x_c) \leftrightarrow p_c = 4x_c.$$

$$x_a^* = \frac{p_a}{12}.$$

$$x_c^* = \frac{p_c}{4}.$$

En el cas d'una maximització conjunta de beneficis, el problema que cal resoldre és:

$$\text{Max.}_{x_a, x_c} B = (p_a x_a - 6x_a^2) + (p_c x_c - 2x_c^2 - 3x_a).$$

I les condicions de primer ordre són igual a:

$$\frac{\partial B}{\partial x_a} = p_a - 12x_a - 3 = 0,$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_c} = p_c - 4x_c = 0.$$

$$x_a^0 = \frac{p_a - 3}{12},$$

$$x_c^0 = \frac{p_c}{4}.$$

Per tant, s'observa com $x_a^* > x_a^0$ a causa de l'externalitat, és a dir, si l'empresa d'acer tingués en compte els efectes nocius de la contaminació del riu dins de la seva funció de beneficis, aleshores produiria menys acer, i per tant, ocasionaria també menys contaminació.

c) L'oferta de l'empresa d'acer haurà de tenir en compte el nou impost. Per tant:

$$p_a = CMg_a(x_a) \leftrightarrow p_a = 12x_a + T \rightarrow x_a = \frac{p_a - T}{12}.$$

Sabem que quan l'empresa internalitza els costos de la contaminació, l'oferta de l'empresa és

$$x_a^0 = \frac{p_a - 3}{12}. \text{ Per tant:}$$

$$\frac{p_a - T}{12} = \frac{p_a - 3}{12} \rightarrow T = 3.$$

Aquest impost tindria el mateix efecte en la quantitat de producció d'acer (i, per tant, també en el nivell de contaminació generat) que la internalització dels costos de contaminar.

Exercicis d'autoavaluació

1. L'educació és exclòible i serà no rival si no hi ha congestió a les aules, de manera que el consum per part d'un alumne no limita el consum d'un altre. Aleshores, seria un bé públic impur. Tanmateix, l'educació presenta externalitats positives importants que permeten defensar el seu finançament públic.

2. Si p_R representa la fracció que paguen els rics del cost total i p_P representa la participació que paguen els pobres, les condicions de primer ordre per als rics i per als pobres seran, respectivament, les següents:

$$\frac{tp_R}{N_R} = v_R'(q) \rightarrow \frac{40p_R}{10} = 4q^{-1/2}, \text{ per als rics,}$$

$$\frac{tp_p}{N_p} = v_p'(q) \rightarrow \frac{40p_p}{100} = \frac{q^{-1/2}}{2}, \text{ per als pobres.}$$

Com que $p_p = 1 - p_R$, tenim el següent:

$$p_R = q^{-1/2} \quad p_p = 1,25 q^{-1/2}.$$

Si resollem aquest sistema, obtenim l'equilibri de Lindahl d'aquesta economia:

$$q^* = 5,0625 \quad p_p = 5/9 \quad p_R = 4/9.$$

La capacitat de l'ateneu és de 50 persones. Pel que fa a les qüestions, ocorre el següent:

- La resposta a) és correcta.
- L'equilibri de Lindahl satisfà la condició d'eficiència econòmica, ja que les contribucions estan d'acord amb les valoracions marginals del bé públic i, per tant, la resposta b) també és correcta.
- Les contribucions voluntàries originen, en general, una provisió de bé públic inferior a la del mecanisme de Lindahl, que proporciona la quantitat eficient. Per tant, l'opció c) també és correcta.
- Aleshores, l'opció d) és falsa.

3.

a) La resposta a) és correcta:

Tenim que amb $1 - p_p = p_R$, l'equilibri de Lindahl proposa el següent:

$$\begin{aligned} v_R'(q) &= p_R^4. \\ v_P'(q) &= p_p^4. \end{aligned}$$

És a dir,

$$v_R'(q) + v_P'(q) = 4 \rightarrow$$

Si substituïm les expressions de les valoracions marginals pel bé públic, ocorre el següent:

$$a_R - q^* + a_P - q^* = 4 \rightarrow q^* = \frac{(a_R + a_P - 4)}{2} = 5.$$

b) La resposta b) és correcta:

- La participació de R en la despesa és $v_R'(q^*) = p_R^4 \rightarrow p_R^4 = a_R - q^* = 3 \rightarrow p_R^* = 3/4$.
- Aleshores, la seva contribució serà $q^* p_R^* = 3,75$.
- La participació de P en la despesa és $v_P'(q^*) = p_p^4 \rightarrow p_p^4 = a_P - q^* = 1 \rightarrow p_p^* = 1/4$.
- Aleshores, la contribució del pobre serà $q^* p_p^* = 1,25$.

La del ric és el triple que la del pobre.

c) La resposta c) no és correcta:

En un equilibri de Nash, cada individu declararia la quantitat que està disposat a pagar pel bé públic, considerant donades les declaracions dels altres. Això no té res a veure amb l'equilibri de Lindahl, que és una proposta més aviat de caràcter normatiu.

d) La resposta d) és correcta:

L'equilibri Lindahl reflecteix que la contribució està d'acord amb la valoració marginal del bé, no amb la total:

$$\frac{\text{Contribució de R}}{\text{Contribució de P}} = \frac{\text{valoració marginal de R}}{\text{valoració marginal de P}}.$$

4.

a) La resposta a) és falsa: cada conductor individual en entrar a la via només té en compte el temps mitjà que destinarà a fer el viatge i no té en compte que en incorporar-se a la carretera alenteix la velocitat dels altres. És a dir, els agents no tenen en compte l'externalitat de congestió que generen. En conseqüència, el cost privat marginal coincideix amb el cost social mitjà.

Aleshores, el cost total per a la societat de viatjar per la carretera multiplica el nombre de viatges pel cost mitjà d'un viatge (donat pel temps mitjà de fer-lo: $C(x) = x \cdot t_s = 2x + x^2/1.000$). En conseqüència, el cost marginal valdrà $C'(x) = 2 + 2x/1.000$.

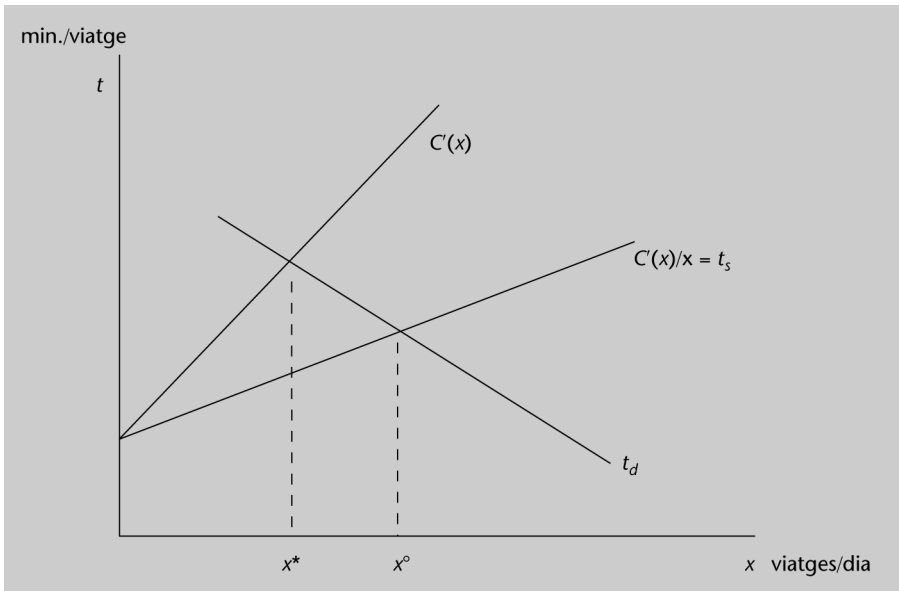
b) La resposta b) és falsa: el conductor individual utilitzarà la carretera si el valor que té per a ell el viatge (donat per la corba de demanda) no supera el cost que li comporta (donat pel temps mitjà de fer el viatge). El nombre de viatges que faran els conductors, guiats pel seu interès personal, serà $t_d(x^o) = t_s(x^o) \rightarrow x^o = 9.000$ viatges/dia.

Per a un ús eficient de la carretera, el benefici marginal i el cost marginal de fer viatges per la carretera per a la societat s'han d'igualar (el valor per a la societat d'un viatge addicional ha d'igualar el cost que representa a la societat efectuar-lo): $B'(x) = C'(x)$.

El benefici marginal social coincideix amb l'individual i ve donat pel temps a què està disposat a renunciar un automobilista per un viatge més: $B'(x) = t_d = 20 - 0,001x$.

L'òptim social serà, per tant, $x^* = 6.000$ viatges/dia.

Gràfic 6. Externalitat de congestió



c) La resposta c) és falsa: si hi ha sobreexplotació de la carretera, s'ha d'incidir en els que utilitzen més l'automòbil i fer que la tarifa incorpori una fracció fixa important, a pagar cada vegada que aparques, i una part petita en funció del temps d'estacionament. Establir la fracció fixa del tiquet baixa i la que està en funció del temps d'estacionament alta, permet facilitar l'accés de la gent al centre de la ciutat i impedir, així, que els aparcaments quedin saturats ràpidament.

d) La resposta (d) és correcta.

5. Per tal de calcular les quantitats òptimes en el sentit de Pareto de bé públic i bé privat, hem de considerar les condicions següents, l'assignació ha de ser factible i s'ha de complir la condició de Samuelson:

- L'assignació ha de ser factible, de manera que ha de verificar l'equació de la frontera de possibilitats de producció, $T(x, q) = 0$.
- La condició de Samuelson: la suma de les taxes marginals de substitució del bé privat pel bé públic ha de ser igual al cost marginal de produir el bé públic en termes del privat, o relació marginal de transformació del bé privat en bé públic, $RMS_a + RMS_b = RMT$, o el següent:

$$\frac{\partial u_a / \partial q}{\partial u_a / \partial x_a} + \frac{\partial u_b / \partial q}{\partial u_b / \partial x_b} = \frac{\partial T / \partial q}{\partial T / \partial x}$$

Si apliquem aquestes dues condicions a les dades del problema, obtenim el següent:

- Condició d'assignació factible:

$$x^2 + q^2 = 3.200 \quad \text{en què } x = x_a + x_b \text{ i } q = q_j, j = a, b.$$

- Condició de tangència:

$$\frac{x_a}{q} + \frac{x_b}{q} = \frac{2q}{2x} \rightarrow \frac{x}{q} = \frac{2q}{2x} \rightarrow x = q.$$

Si resollem el sistema de dues equacions, obtenim el següent:

$$2x^2 = 3.200 \rightarrow x^* = 40, \quad \text{i, per tant, } q^* = 40, x_a = 20, x_b = 20.$$

6. L'assistència a concerts per part d'un consumidor no exclou que la resta en pugui gaudir ni redueix el consum dels altres individus. Òbviament, això no passa amb les racions de pa-ella. Per tant, en el cas proposat, x és la quantitat d'un bé privat i q la d'un bé públic.

Una assignació òptima en el sentit de Pareto és una assignació de la frontera de possibilitats de producció, en què no és possible beneficiar un individu si no se'n perjudica un altre. Verifica les condicions següents:

- L'assignació és factible (és a dir, que pertany a la frontera de possibilitats de producció, $T(x, q) = 0$).
- La condició de tangència (condició de Samuelson): la suma de les taxes marginals de substitució del bé privat pel bé públic ha de ser igual al cost marginal de produir el bé públic.

$$\sum_{j=1}^N \frac{\frac{\partial u(x_j, q)}{\partial q}}{\frac{\partial u(x_j, q)}{\partial x_j}} = \frac{\frac{\partial T}{\partial q}}{\frac{\partial T}{\partial x}}$$

En el nostre cas, aquestes dues condicions es representen de la manera següent:

- Assignació factible: $x^2 + 4q^2 = 2.880$, en què $x = \sum_{j=1}^{100} x_j$.
- Condició de tangència:

$$\sum_{j=1}^N \frac{\frac{\partial u(x_j, q)}{\partial q}}{\frac{\partial u(x_j, q)}{\partial x_j}} = \sum_{j=1}^{100} \frac{x_j^4}{4x_j^3 q} = \sum_{j=1}^N \frac{x_j}{4q} = \frac{x}{4q}$$

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial q}}{\frac{\partial T}{\partial x}} = \frac{8q}{2x} = \frac{4q}{x}$$

- Si igulem les dues expressions, obtenim el següent: $\frac{x}{4q} = \frac{4q}{x} \Rightarrow x = 4q$.

Si resollem el sistema de dues condicions, la que afirma que l'assignació ha de ser factible i la de Samuelson, obtenim $x^* = 48$ i $q^* = 12$. Per tant, en l'òptim, l'Ajuntament organitzarà 12 actuacions i prepararà 48 racions d'arròs.

7.

a) L'agent a determina la quantitat òptima resolent el següent:

$$\text{Màx. } u_a = 10x_{1a} - x_{1a}^2 + x_{2a} \quad \text{subjecte a } x_{2a} = 100 - 4x_{1a}$$

És a dir:

$$\text{Màx. } u_a = 6x_{1a} - x_{1a}^2 + 100$$

La condició de primer ordre (que serà necessària i suficient per a un màxim, ja que la funció objectiu és estrictament còncava) es troba si es deriva i s'igual a 0:

$$6 = 2x_{1a}$$

És a dir, $\text{RMS}_a = \text{RMT}_b$ o $10 - 2x_{1a} = 4$. L'agent a decideix la quantitat òptima de bé 1 igualant el benefici marginal que li proporciona el bé 1, és a dir, la valoració marginal del bé 1 amb el cost marginal d'aquest bé (el que li costa aconseguir cada unitat addicional d'aquest bé, que s'obté de la corba de transformació $x_{2a} = 100 - 4x_{1a}$). Llavors, la quantitat òptima de manteniment és la següent:

$$x_{1a}^* = 3$$

Per tant, obtenim el següent:

$$x_{2a}^* = 100 - 4 \cdot 3 = 88$$

$$x_{2b}^* = 100$$

b) A fi de trobar l'òptim social, s'ha de tenir en compte que el bé 1 no solament afecta el benestar de l'agent a , sinó també al de b . La quantitat eficient es troba si es resol el següent:

$$\text{Màx. } u_a + u_b = 10x_{1a} - x_{1a}^2 + x_{2a} + x_{2b} + 2x_{1a} \text{ subjecte a } x_{2a} = 100 - 4x_{1a}$$

$$\text{Màx. } 10x_{1a} - x_{1a}^2 + x_{2b} + 2x_{1a} + 100 - 4x_{1a}$$

Ve donat pel següent:

$$10 - 2x_{1a} + 2 = 4.$$

$$RMS_a + RMS_b = RMT_{12}.$$

La suma de valoracions marginals per al bé 1 iguala el cost marginal de producció per a la societat del bé 1 en termes del 2. És a dir:

$$x_{1a}^\circ = 4.$$

c) El manteniment de la casa de a exerceix una externalitat positiva sobre b . Si poden negociar, com que $RMS_b = 2$, b està disposat a pagar 2 unitats de numerari per a cada unitat de manteniment que faci a . Això augmenta l' RMS_{12}^a (els beneficis marginals privats per a a del bé 1 en termes del 2) en 2 unitats:

$$RMS_b + 2 = 10 - 2x_{1a} + 2.$$

En poder negociar a internalitza l'externalitat. El pagar-li b 2 unitats de numerari per cada unitat de manteniment de la façana, augmenten els beneficis marginals privats de a fins a coincidir amb els socials. Si igualem el benefici marginal de a incrementat per la transferència unitària que li fa b amb el cost marginal social del manteniment de la façana, obtenim el següent:

$$10 - 2x_{1a} + 2 = 4 \quad x_{1a}^\circ = 4.$$

La transferència de b a a és de 2 unitats de numerari per cada unitat de manteniment de la façana:

$$t_{ba}^\circ = 2x_{1a}^\circ.$$

Per tant, tenim el següent:

$$x_{2a}^\circ = 100 - 4x_{1a}^\circ + 2x_{1a}^\circ = 100 - 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 92.$$

$$x_{2b}^\circ = 100 - t_{ba}^\circ = 92.$$

d) El sistema d'impostos i subvencions ha de fer internalitzar els efectes externs derivats del manteniment de la façana, és a dir, ha d'aconseguir que els beneficis privats i socials s'igualin.

L'òptim privat de a ve donat per $RMS_a = RMT_{12} \rightarrow x_{1a}^* = 3$ unitats de manteniment, inferior a l'òptim social de 4. La subvenció unitària, S , ha de fer que a internalitzi l'externalitat:

$$10 - 2x_{1a}^\circ + S = 4 \quad \text{en què } x_{1a}^\circ = 4.$$

Per tant, tenim el següent: $S^\circ = 2$.

L'impost, que s'ha suposat que s'aplicava a b , ha de ser $T^\circ = S^\circ \cdot x_{1a}^\circ = 8$.

És a dir, $x_{2a}^\circ = x_{2b}^\circ = 92$, com en c).

8.

a) L'agent a considera x_{1b}^* com a donat i escull x_{1a}^* i x_{2a}^* que verifiquin el següent:

$$\text{Màx. } u_a = 10x_{1a} - x_{1a}^2/2 - (x_{1b}^* - 2)^2/8 + x_{2a}$$

$$x_{1a}, x_{2a} \quad \text{subjecte a } x_{1a} + x_{1b}^* \leq 50; x_{2a} \leq 40.$$

Com que $\partial u_a / \partial x_{2a} = 1$, com més quantitat del bé 2, més utilitat per a a i, per tant $x_{2a}^* = 40$. D'altra banda, és estrictament còncaua en x_{1a} , de manera que podem trobar la quantitat òptima del bé 1 per a a si derivem la funció objectiu i igualem a 0: $\partial u_a / \partial x_{1a} = 10 - x_{1a} = 0$. Llavors es té que $x_{2a}^* = 10$ sempre $x_{1b}^* \leq 40$ (condició que, com veurem més endavant, es compleix).

- **Observació 1:** Aquí, consumir més del bé 1 no implica consumir menys del 2: el cost marginal del bé 1 en termes del 2 és zero o $RMT_{12} = 0$, que és el 0 que apareix en el segon membre de $10 - x_{1a} = 0$. Si extreure aigua tingués un cost, en termes de sacrifici del bé 2, diguem $x_2 = 20 - 2x_1$, per a qualsevol agent, llavors $RMT_{12} = 2$, i la quantitat òptima del bé 1 per a a sortiria de $10 - x_{1a} = 2$, com es pot comprovar si substituïm $x_{2a} = 20 - 2x_{1a}$ en la funció objectiu u_a , derivem respecte a x_{1a} i igualem a 0.
- **Observació 2:** Com que la utilitat marginal del bé 2 val 1, tenim $RMS_a = \partial u_a / \partial x_{1a}$. Així, la condició $\partial u_a / \partial x_{1a} = 0$ és la condició d'òptim privat $RMS_a = RMT_{12}$. La valoració marginal del bé 1 en termes del 2 per a a (el que està disposat a pagar per l'última unitat del bé 1) iguala el cost marginal de producció del bé 1 en termes del 2 per a la societat (el que ha de pagar a per l'última unitat del bé 1).

L'agent b considera x_{1a}^* com a donat i selecciona x_{1b}^* i x_{2b}^* que verifiquin el següent:

$$\text{Màx. } u_b = 10(x_{1b}) - (x_{1b})^2/2 + x_{2b},$$

$$x_{1b}, x_{2b} \quad \text{subjecte a } x_{1a}^* + x_{1b} \leq 50; x_{2b} \leq 40.$$

Si resollem de manera anàloga aquest problema, obtenim $x_{2b}^* = 40$ i $x_{1b}^* = 10$ sempre $x_{1b}^* \leq 40$. Per tant, tenim el següent:

$$x_{1a}^* = x_{1b}^* = 10, x_{2a}^* = x_{2b}^* = 40.$$

Si substituïm les quantitats òptimes en les funcions d'utilitat, tenim $u_a = 82$ i $u_b = 90$.

b) Si b no té dret a l'aigua en territori de a , $x_{1b}^* = 2$. A més, $x_{2b}^* = 40$. Com que les condicions de primer ordre del problema d'optimització de a no varien, tenim $x_{1a}^* = 10$, $x_{2a}^* = 40$. Per tant, tenim el següent:

$$x_{1a}^* = 10, x_{1b}^* = 2, x_{2a}^* = x_{2b}^* = 40.$$

Els nivells d'utilitat que aconseguen els agents són $u_a = 90$, $u_b = 58$.

c) Una solució eficient en el sentit de Pareto és una assignació factible d'aquesta economia que millora al màxim el benestar d'un agent, donat el benestar de l'altre. Per tant, si suposem com a donat el nivell d'utilitat de b \bar{u} per tal de maximitzar el benestar de a , hem de resoldre el problema de maximització següent:

$$\begin{array}{ll} \text{Màx. } u_a = 10x_{1a} - x_{1a}^2/2 - (x_{1b} - 2)^2/8 + x_{2a} & \\ x_{1a}, x_{2a} & \text{subjecte a } u_b = 10x_{1b} - x_{1b}^2/2 + x_{2b} = \bar{u} \\ & x_{1a} + x_{1b} \leq 50, \\ & x_{2a} + x_{2b} \leq 80. \end{array}$$

Com que sabem que no és òptim una quantitat més gran de 10 pel que fa al bé 1, tenim que la igualtat d'aquest bé es complirà i, per tant, ens en podem oblidar. En canvi, pel que fa al bé 2, els consumidors en volen consumir la quantitat més gran possible. Per tant, es complirà amb igualtat. Tenint en compte aquests raonaments, podem resoldre el problema següent:

$$\begin{array}{ll} \text{Màx. } u_a = 10x_{1a} - x_{1a}^2/2 - (x_{1b} - 2)^2/8 + x_{2a} & \\ x_{1a}, x_{2a}, x_{1b}, x_{2b} & \text{subjecte a } u_b = 10x_{1b} - x_{1b}^2/2 + x_{2b} = \bar{u} \\ & x_{2a} + x_{2b} = 80. \end{array}$$

Llavors, tenim $x_{2a} = 80 - x_{2b}$ i $x_{2b} = \bar{u} - 10x_{1b} + x_{1b}^2/2$. Substituïm en la funció objectiu:

$$\text{Màx. } 10x_{1a} - x_{1a}^2/2 - (x_{1b} - 2)^2/8 + 80 - (\bar{u} - 10x_{1b} + x_{1b}^2/2).$$

$$x_{1a}, x_{1b}$$

La funció és estrictament còncava i, per tant, les condicions de primer ordre són necessàries i suficients. Si derivem respecte a x_{1a} i igualem a zero, també com abans, tenim $x_{1a}^\circ = 10$. Si derivem respecte a x_{1b} i igualem a zero $-0,25x_{1b} + 0,5 + 10 - x_{1b} = 0$. Per tant, $x_{1b}^\circ = 8,4$. Per tant, tenim que per a qualsevol assignació eficient, ocorre el següent:

$$x_{1a}^\circ = 10, x_{1b}^\circ = 8,4 \text{ i } x_{2a} + x_{2b} = 80.$$

Hi ha tot un continu d'assignacions eficients.

Aquestes solucions generen una suma d'utilitats $u_a^\circ + u_b^\circ = 173,6$, superior a la que s'obtenia en els dos casos precedents.

d) L'impost ha de fer que b internalitzi l'externalitat que ocasiona a a , de manera que b , en perseguir el seu propi interès, consumeixi la quantitat òptima des del punt de vista social. L'objectiu de b esdevé el següent:

$$\begin{array}{ll} \text{Màx. } u_b = 10(x_{1b}) - (x_{1b})^2/2 + x_{2b} - t x_{1b}, & \\ x_{1b}, x_{2b} & \text{subjecte a } x_{1a}^* + x_{1b} \leq 50; x_{2b} \leq 40. \end{array}$$

Per tant, b consumirà la quantitat del bé 1 que verifiqui el següent:

$$\partial u_b / \partial x_{1b} = 10 - t - x_{1b} = 0. \text{ És a dir, } \text{RMS}_b - t = 0.$$

Com que la quantitat eficient és $x_{1b}^\circ = 8,4$, b , seguint el seu interès, consumirà aquesta quantitat si $t = 1,6$.

L'impost és $1,6 \cdot 8,4 = 13,44$, que es transfereix a a . Llavors, $x_{1a}^\circ = 10$, $x_{1b}^\circ = 8,4$, $x_{2a}^\circ = 53,44$, $x_{2b}^\circ = 26,56$. La utilitat que obtenen ambdós és $u_a^\circ = 98,32$ i $u_b^\circ = 75,28$. La suma és, novament, 173,6.