Les decisions de comprar

PID_00244556

Joaquim Silvestre i Benach

Amb la col·laboració de
Maria Llop Llop

Temps mínim previst de lectura i comprensió: **4 hores**

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció 5

Objectius 8

1. La decisió de comprar del consumidor 9

2. Les funcions de demanda 13
2.1. Aplicació al sistema de despesa lineal 13
2.2. Aplicació a les preferències de Cobb-Douglas 14

3. Les funcions de demanda, les corbes d'Engel i les corbes de demanda 16

4. L'efecte de canvis en la riquesa i les corbes d'Engel 18
4.1. La llei d'Engel 18
4.2. L'elasticitat respecte de la riquesa i la participació en el pressupost 18

5. L'efecte de canvis en el propi preu i les corbes de demanda ... 21
5.1. L'excedent del consumidor 21
5.2. La llei de la demanda 22
5.3. L'equació de Slutski 24
5.3.1. Efecte total = efecte de substitució + efecte de riquesa 24
5.3.2. El signe de l'efecte de substitució 25
5.3.3. El signe de l'efecte de riquesa 26
5.3.4. El signe de l'efecte total 27
5.4. La despesa i l'elasticitat respecte del preu 30

6. Canvis en el preu d'un altre bé 31

Resum 32

Activitats 33

Exercicis d'autoavaluació 33

Solucionari 35

Introducció

Habitualment, els consumidors prenem decisions de compra complexes que engloben un nombre elevat de béns i serveis. Alhora, els béns i serveis que comprem tenen uns preus diferents i, per tant, afecten la nostra renda disponible de manera diferent.

La teoria microeconòmica del consum pren com a punt de partida la representació de les preferències mitjançant funcions d'utilitat que hem vist en el mòdul «Les preferències del consumidor», i determina quina és la situació d'equilibri dels consumidors. Per tal d'establir aquest equilibri, s'ha de conèixer la renda o riquesa de què disposa un individu i s'han de conèixer també els preus dels diferents béns i serveis que potencialment pot adquirir. Així, prenent com a donats la renda i els preus dels béns i serveis, un consumidor triarà la combinació que li reporta la màxima utilitat total. Aquesta combinació de béns, o cistella de consum, es coneix com a **combinació òptima**.

Per a entendre com es determina aquesta decisió òptima, podem plantejar el problema de consum de la Rosa. Suposem que aquesta noia destina una part de la seva renda a anar a menjar al restaurant i l'altra part a comprar una combinació d'aliments. La taula1 mostra la utilitat de la Rosa, mesurada en unitats hipotètiques, en funció del nombre d'unitats consumides de cadascun dels dos béns. En aquesta taula s'observa que la utilitat de la Rosa és creixent amb la quantitat: com més aliments compra i més vegades va a menjar al restaurant, més elevat és el nivell de satisfacció associat.

Tabla 1. Utilitat derivada del consum dels dos tipus de béns

Restaurant	Utilitat	Aliments	Utilitat
0	0	0	0
1	18	1	12
2	25	2	15
3	30	3	20
4	36	4	26
5	44	5	34
6	49	6	40
7	53	7	45
8	56	8	49
9	58	9	53
10	59	10	55

Atès que la renda de la Rosa és limitada, és a dir, està donada, no pot comprar una quantitat il·limitada de béns. Suposem que amb la renda mensual disponible i els preus vigents, durant un mes pot adquirir les combinacions de quantitats que apareixen a la taula 2.

Tabla 2. Combinacions assequibles dels dos tipus de béns

Restaurant	Aliments	Utilitat
5	0	44 + 0 = 44
4	2	36 + 15 = 51
3	4	30 + 26 = 56
2	6	25 + 40 = 65
1	8	18 + 49 = 67
0	10	0 + 55 = 55

Segons la informació d'aquesta taula, la Rosa maximitza la seva utilitat mensual quan va 1 cop al restaurant i compra 8 paquets d'aliments. Aquesta serà, doncs, la combinació de béns o **cistella òptima de consum** de la Rosa. Per a arribar a aquest resultat, hem hagut de tenir en compte dues variables: la renda mensual de la Rosa i els preus (dels aliments i d'anar a menjar al restaurant), que són variables donades o exògenes. Cal remarcar que els preus no apareixen directament a la taula 2, però sí que hi apareixen implícitament, atès que s'hi mostra el nombre d'unitats que es poden comprar dels dos tipus de béns partint d'una renda disponible mensual.

En aquest mòdul veurem com es calcula la cistella òptima de consum, prenent com a punt de partida la **restricció pressupostària** del consumidor imposada per les dades de partida: la renda disponible i els preus dels béns. Com que els individus desitgen fer la seva utilitat com més gran millor, es tractarà d'assolir la corba d'indiferència més elevada compatible amb la restricció pressupostària. D'aquesta resolució en sorgeixen unes **funcions de demanda** dels béns, que depenen del mateix preu, del preu dels béns alternatius de consum i de la renda del consumidor, per a un nivell determinat de satisfacció (és a dir, d'utilitat). També veurem que les **corbes de demanda** expressen la quantitat demandada d'un bé en funció del mateix preu, prenent com a donats els preus dels altres béns de consum i la renda del consumidor.

En síntesi, la determinació de la cistella òptima es fa resolent un problema de maximització de la utilitat condicionada a una renda disponible prefixada i a uns preus dels béns també donats. Lògicament, els canvis que es produeixin en els preus i a la renda del consumidor ocasionaran modificacions d'aquesta cistella òptima.

En particular, un canvi en la renda altera les decisions òptimes dels individus. Això porta a la distinció entre **béns normals**, que es consumeixen en quantitats creixents (decreixents) a mesura que la renda augmenta (disminueix), i **béns inferiors**, que es consumeixen en quantitats decreixents (creixents) a mesura que la renda augmenta (disminueix). La relació entre els canvis de renda i de la quantitat consumida es pot mesurar a partir de la sensibilitat del consum d'un bé davant canvis en la renda del consumidor (**elasticitat renda**).

Mitjançant la representació gràfica de les corbes de demanda, és possible veure els efectes d'un canvi en el preu d'un bé. Aquesta alteració del preu duu al concepte d'**elasticitat preu** i permet la distinció entre **béns ordinaris** i **béns de Giffen**. Els béns ordinaris són els que tenen una quantitat demandada decreixent a mesura que n'augmenta el preu. Els béns de Giffen mantenen una relació positiva entre el preu i la quantitat demandada.

D'una manera més precisa, una pujada en el preu d'un producte porta a dues conseqüències diferents, que, a més, es produeixen de simultàniament: l'**efecte substitució** i l'**efecte renda**. L'efecte substitució es deriva del fet que una mercaderia més cara porta a substituir el seu consum pel consum d'altres béns que no han tingut aquest encariment i que, per tant, s'han abaratit en termes relatius. L'efecte renda s'explica pel fet que l'increment de preu d'un producte redueix el poder de compra o capacitat adquisitiva del consumidor.

Objectius

En els materials didàctics d'aquest mòdul hi ha les eines per a assolir els objectius següents:

1. Aplicar el principi de la maximització condicionada a les decisions de compra del consumidor.

2. Obtenir les funcions de demanda del consumidor, i a partir d'aquestes, les corbes d'Engel i les corbes de demanda.

3. Familiaritzar-se amb algunes formes de funcions de demanda d'ús freqüent; en particular, les que corresponen a les preferències de Cobb-Douglas, i les del sistema de despesa lineal.

4. Entendre el concepte d'*elasticitat de la demanda* respecte de la riquesa, i aplicar-lo a la qüestió dels canvis en la participació en el pressupost en variar la riquesa, en particular, a la llei d'Engel sobre la despesa en aliments.

5. Descobrir la distinció entre els efectes de substitució i de riquesa, i les seves implicacions sobre la llei de la demanda.

6. Entendre el concepte d'*elasticitat de la demanda* respecte del preu, i aplicar-lo a la qüestió dels canvis en la despesa en un bé quan en canvia el preu.

1. La decisió de comprar del consumidor

Partim de la idea que el consumidor racional tria l'alternativa més bona, segons les seves preferències, dins el conjunt assolible, que anomenarem **conjunt pressupostari.**

Estudiem, primer, el problema de les decisions de comprar: el consumidor ha de distribuir una quantitat de diners **donada**, la seva **riquesa**, entre un seguit de béns o serveis de consum que es poden adquirir en el mercat a preus donats. Com abans, ens limitem a dos béns.

Les **variables** a decidir pel consumidor són les dues **quantitats** a comprar: x_1 i x_2.

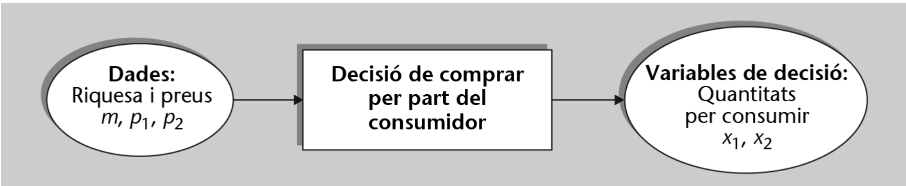
Les **dades** d'aquest problema de decisió són tres:

- La riquesa, que anomenarem m.
- Els preus de mercat dels dos béns de consum, que anomenarem p_1 i p_2, respectivament.

El supòsit que els preus són dades implica que el consumidor no pot regatejar o fixar el preu. També suposem que el preu per unitat no canvia en funció del nombre d'unitats comprades.

El gràfic 1 presenta un esquema del problema de les decisions de comprar.

Gràfic 1. Les decisions de comprar



El conjunt assolible, o **conjunt pressupostari**, és el d'aquelles combinacions (x_1, x_2) que, als preus p_1 i p_2, no valen més que la riquesa m. Matemàticament, una combinació (x_1, x_2) pertany al conjunt pressupostari si:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m.$$

En termes geomètrics, les fronteres del conjunt pressupostari són les següents:

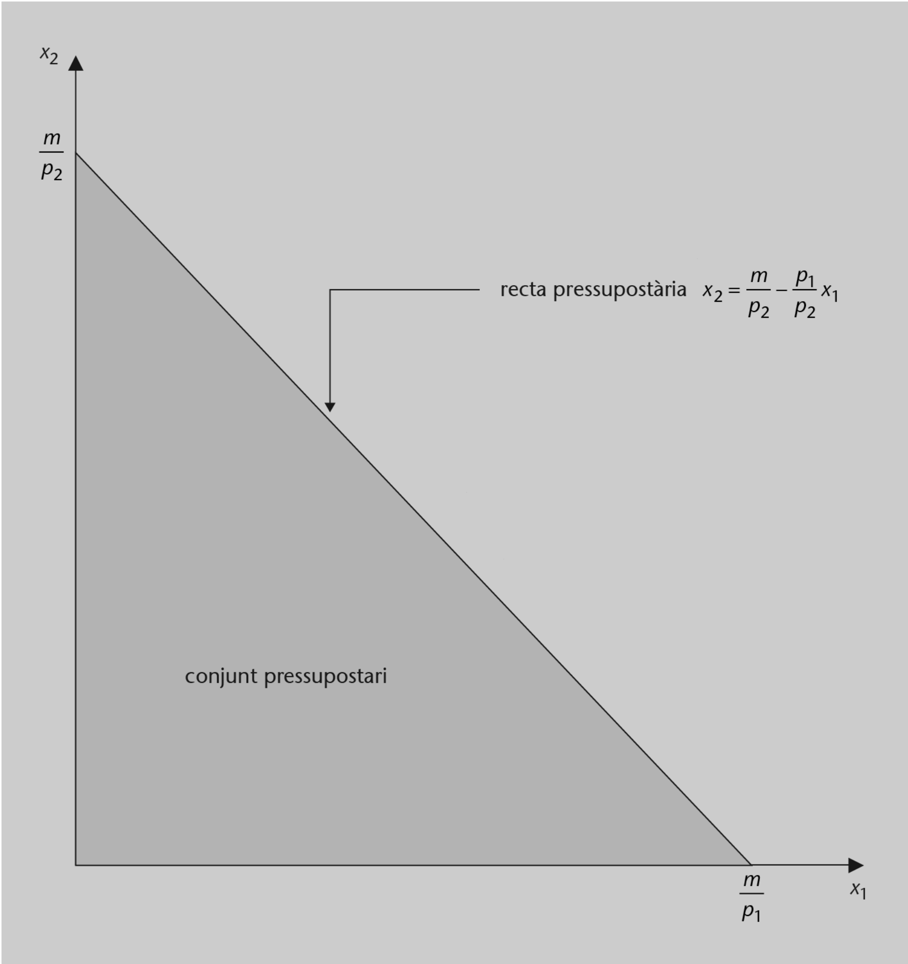
- La **recta pressupostària, o de balanç** amb equació:

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1.$$

- Els **eixos de coordenades** o, més generalment, la condició que les preferències hi estiguin definides.

El gràfic 2 és un exemple gràfic de conjunt pressupostari.

Gràfic 2. El conjunt pressupostari quan la riquesa del consumidor està donada

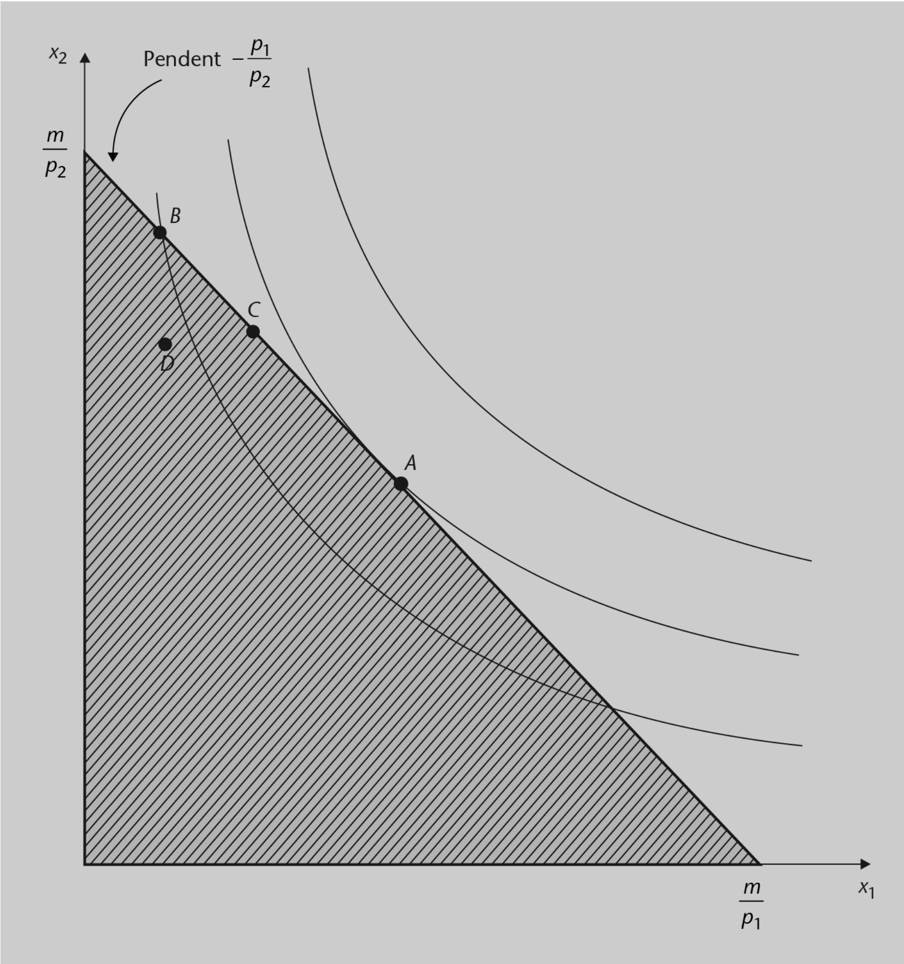


Cal observar que si els preus i la riquesa es multipliquen pel mateix factor positiu, llavors el conjunt pressupostari no canvia.

Suposem que els béns són (almenys conjuntament) desitjables.

El consumidor tria un punt, amb dues coordenades x_1 i x_2: ha de ser el millor punt, d'acord amb les seves preferències, dins el conjunt pressupostari, que té la forma del gràfic 3. Quin punt triarà?

Gràfic 3. Anàlisi gràfica de les decisions de comprar



Amb l'ajut del gràfic podem fer un seguit de raonaments:

1) És clar que, si els béns són desitjables, el consumidor triarà un punt en la recta pressupostària. Un consumidor racional no triaria un punt com ara *D*, ja que *B* comporta quantitats més grans dels dos béns, i *B* també és assolible. Per tant, el punt (x_1, x_2) que ha triat el consumidor ha de satisfer el següent:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m. \tag{1}$$

2) D'altra banda, també és clar que el consumidor no triarà el punt *B*, ja que hi ha altres punts, com ara *C*, que prefereix *B* i que encara pertanyen al conjunt pressupostari. En general, el consumidor mai no triarà un punt pel qual passa una corba d'indiferència que talla la recta pressupostària. En el punt triat pel consumidor racional, la corba d'indiferència tot just ha de tocar la recta pressupostària, sense travessar-la.

3) En el cas del gràfic 3, en què les corbes d'indiferència són llises i el consumidor tria un punt, com ara *A*, amb les dues coordenades positives, el pendent de la corba d'indiferència ha de ser igual al pendent de la recta pressupostària. Per tant, es compleix la condició següent:

Condició de tangència: pendent de la corba d'indiferència = pendent de la recta pressupostària, és a dir:

$$\text{Taxa marginal de substitució} \equiv \frac{\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (2)$$

La interpretació de la condició de tangència és particularment nítida en el cas quasilineal, és a dir, amb funció d'utilitat de la forma $u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$, en què la condició de tangència, per a $p_2 = 1$, esdevé la que es mostra a continuació:

$$v'(x_1) = p_1,$$

que es pot llegir de la manera següent: el consumidor tria la quantitat de mercaderia 1 que iguala la valoració marginal al preu.

En general, per tal de trobar el punt triat pel consumidor, podem seguir aquests passos:

1) Representem gràficament la recta pressupostària i algunes corbes d'indiferència per a intuir si, en el punt triat, les quantitats són positives i la corba d'indiferència és llisa.

2.a) Si ens sembla que les quantitats són positives i la corba d'indiferència és llisa, busquem el punt triat. Fem servir la recta pressupostària i la condició de tangència.

2.b) Si, contràriament, sembla que la solució té una quantitat zero (cas anomenat **solució de cantó**, típic quan els dos béns són perfectament substitutius) o bé correspon a un punt en què la corba d'indiferència no és llisa (típic quan els dos béns són perfectament complementaris), llavors la condició de tangència no serveix gaire: l'anàlisi gràfica sovint suggereix el mètode correcte.

2. Les funcions de demanda

Les quantitats x_1 i x_2 triades pel consumidor típicament variaran en canviar les dades m, p_1 o p_2.

Com varia la decisió de comprar del consumidor quan les dades varien? Per tal de contestar aquesta pregunta, mirem d'expressar les quantitats comprades, x_1 i x_2, en funció de les dades p_1, p_2 i m.

Definició. La funció de demanda d'un bé determinat (1 o 2) per part d'un consumidor és la funció que té com a arguments la riquesa del consumidor, m, i els preus p_1 i p_2. Els valors d'aquesta funció indiquen les quantitats del bé en qüestió que el consumidor vol comprar o consumir.

Les escriurem així:

Funció de demanda del bé 1: $x_1(p_1, p_2, m)$;
Funció de demanda del bé 2: $x_2(p_1, p_2, m)$.

Les funcions de demanda són, per tant, funcions de **tres variables**: el propi preu, el preu de l'altra mercaderia i la riquesa.

Fixem-nos en el cas en què les quantitats triades són positives i la corba d'indiferència és llisa. Les igualtats (1) i (2) formen un sistema de dues equacions amb dues incògnites x_1 i x_2 i amb tres paràmetres (p_1, p_2, m). Si aïllem les dues incògnites i resolem el sistema, obtindrem les dues funcions de demanda.

2.1. Aplicació al sistema de despesa lineal

Continuem amb l'exemple del Sr. Les que hem vist en el mòdul 1, amb preferències representades per la funció d'utilitat: $u(x_1, x_2) = (x_1 + 2)^{2/3} (x_2 - 1)^{1/3}$. Per tal de resoldre el sistema de dues equacions en les dues incògnites (x_1, x_2), utilitzarem l'expressió de la taxa marginal de substitució que hem trobat abans:

- Recta pressupostària: $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$.
- Condició de tangència: $2\dfrac{x_2 - 1}{x_1 + 2} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

Una vegada resolt aquest sistema de dues equacions en les dues incògnites p_1 i p_2, obtenim el següent:

$$x_1(p_1, p_2, m) = -2 + \frac{2}{3p_1}(m + 2p_1 - p_2),$$

$$x_2(p_1, p_2, m) = 1 + \frac{1}{3p_2}(m + 2p_1 - p_2).$$

En aquest cas, cal suposar que la riquesa és prou gran per a garantir que cap d'aquestes dues expressions sigui negativa ($m \geq p_1 + p_2$).

Com hem vist, aquesta funció d'utilitat és del tipus Stone-Geary, l'expressió general del qual és la següent:

$$(x_1 - a_1)^{\alpha}\,(x_2 - a_2)^{1-\alpha}(\text{per a } x_1 \geq a_1 \text{ i } x_2 \geq a_2).$$

Seguint el mateix procés de càlcul, obtindríem les funcions de demanda:

$$x_1(p_1, p_2, m) = a_1 + \frac{\alpha}{p_1}\,(m - p_1\,a_1 - p_2\,a_2),$$

i

$$x_2(p_1, p_2, m) = a_2 + \frac{1-\alpha}{p_2}\,(m - p_1\,a_1 - p_2\,a_2).$$

Si multipliquem aquestes expressions pel preu corresponent, obtenim funcions de despesa que són lineals en les tres variables p_1, p_2 i m. És per aquesta raó que s'anomena **sistema de despesa lineal**.

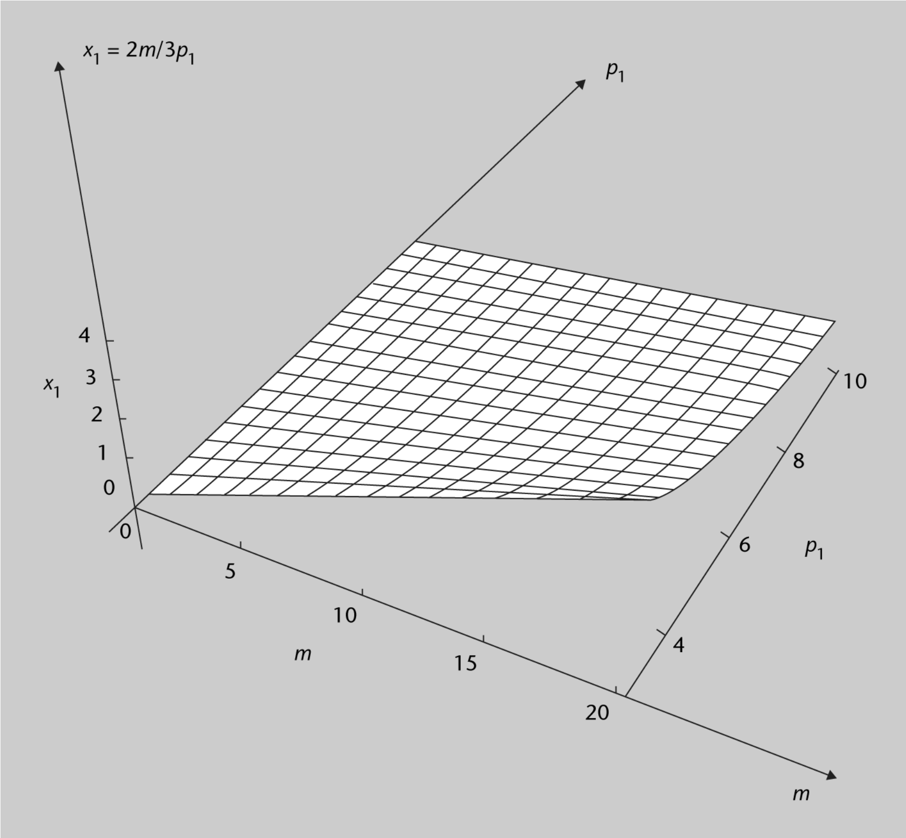
2.2. Aplicació a les preferències de Cobb-Douglas

Com hem vist, quan els paràmetres a_1 i a_2 són zero, la funció d'utilitat de Stone-Geary esdevé la funció de Cobb-Douglas $x_1^{\alpha}\,x_2^{1-\alpha}$. Per tant, la funció de demanda del bé 1 passa a ser la següent:

$$x_1 = \alpha\frac{m}{p_1}.$$

En aquest cas, p_2 no hi té cap paper.

Gràfic 4. La funció de demanda $x_1 = \frac{2m}{3p_1}$, per al bé 1, corresponent a la funció d'utilitat de Cobb-Douglas $x_1^{2/3}x_2^{1/3}$



3. Les funcions de demanda, les corbes d'Engel i les corbes de demanda

Recordem que la funció de demanda del bé 1 és una funció de tres variables independents:

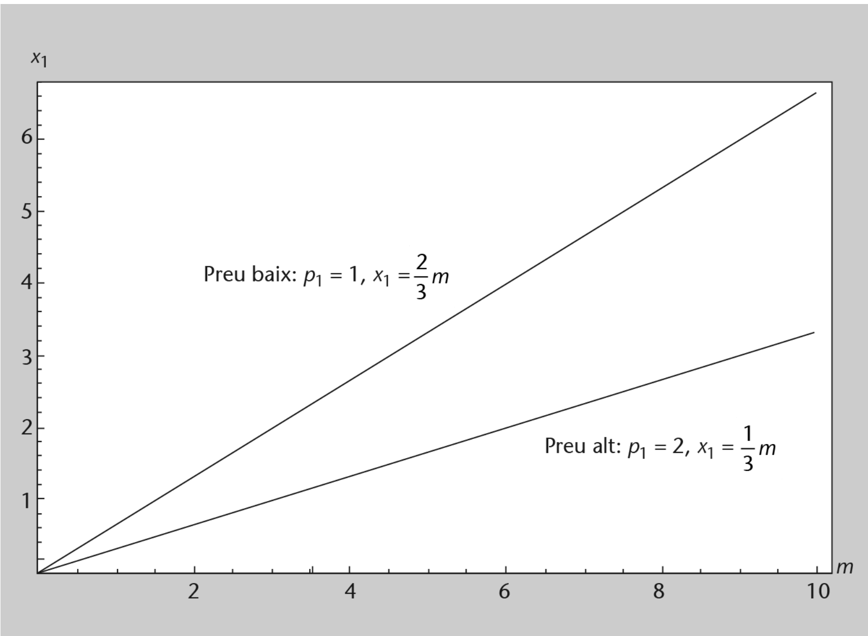
$$x_1(p_1, p_2, m),$$

que ens expressa com depèn la quantitat del bé 1 demanada de les variables (p_1, p_2, m), que poden variar de manera conjunta.

Sovint ens interessarà veure com canvia la quantitat demanada x_1 del bé 1 en variar, separadament, cadascuna de les variables independents. Concretament, en els casos següents:

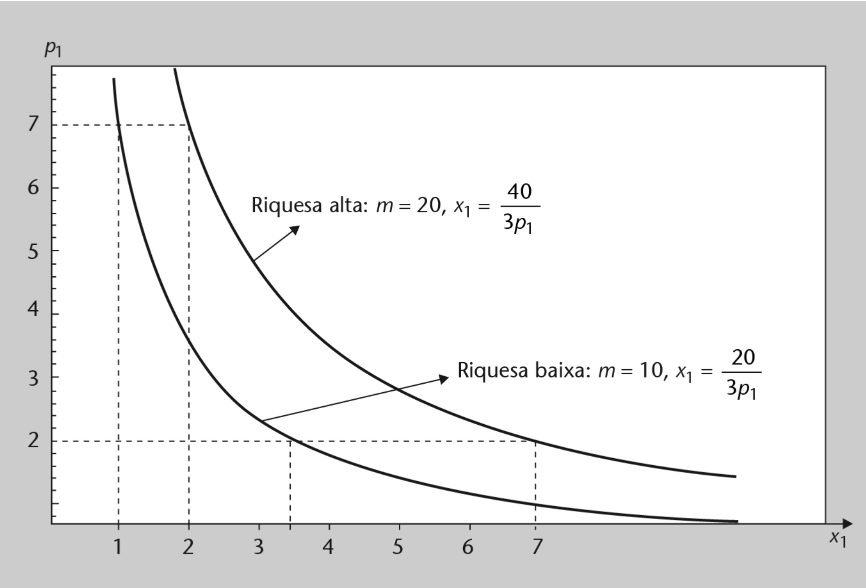
- Quan varia la riquesa, m, (per a valors donats de p_1 i p_2) la relació entre m i x_1 (per a valors donats de p_1 i p_2) s'expressa gràficament per mitjà de les **corbes d'Engel**. Típicament, hi ha una corba d'Engel per a cada combinació de p_1 i p_2. El gràfic 5 presenta dues corbes d'Engel que s'han obtingut a partir de la funció de demanda.

Gràfic 5. Dues corbes d'Engel corresponents a la funció de Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = (x_1)^{2/3}(x_2)^{1/3}$



- Quan varia el propi preu, p_1 (per a valors donats de p_2 i m), la relació entre p_1 i x_1 (per a valors donats de p_2 i m) s'expressa gràficament per mitjà de les **corbes de demanda**. Típicament, hi ha una corba de demanda per a cada combinació de m i p_2. El gràfic 6 presenta dues corbes de demanda. Aquí, la variable independent, p_1, se situa tradicionalment a l'eix de les ordenades, cosa que pot induir a confusió.

Gràfic 6. Dues corbes de demanda corresponents a la funció de Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = (x_1)^{2/3}(x_2)^{1/3}$



Precaució: no confonguem *funció de demanda* amb *corba de demanda*.

- La **funció de demanda** del bé 1 és una funció de tres variables $x_1(p_1, p_2, m)$. Les corbes d'Engel i les corbes de demanda es poden obtenir a partir d'aquesta funció.

- Una **corba de demanda** del bé 1 és una corba en quadrant cartesià en què tenim x_1 i p_1 als eixos. Expressa com la quantitat del bé 1 demanada depèn de la variable p_1, per a valors donats de m i p_2. Òbviament, si els nivells de m i p_2 canvien, la corba de demanda del bé 1 que en resultarà serà diferent.

Recomanació

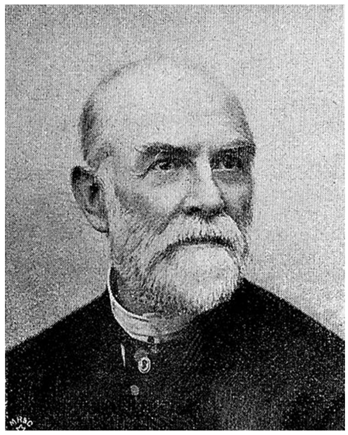
Per tal d'evitar confusions, cal fer el següent:

- No diguem *demanda* en lloc de *funció de demanda*.
- No diguem *demanda* en lloc de *corba de demanda*.

4. L'efecte de canvis en la riquesa i les corbes d'Engel

4.1. La llei d'Engel

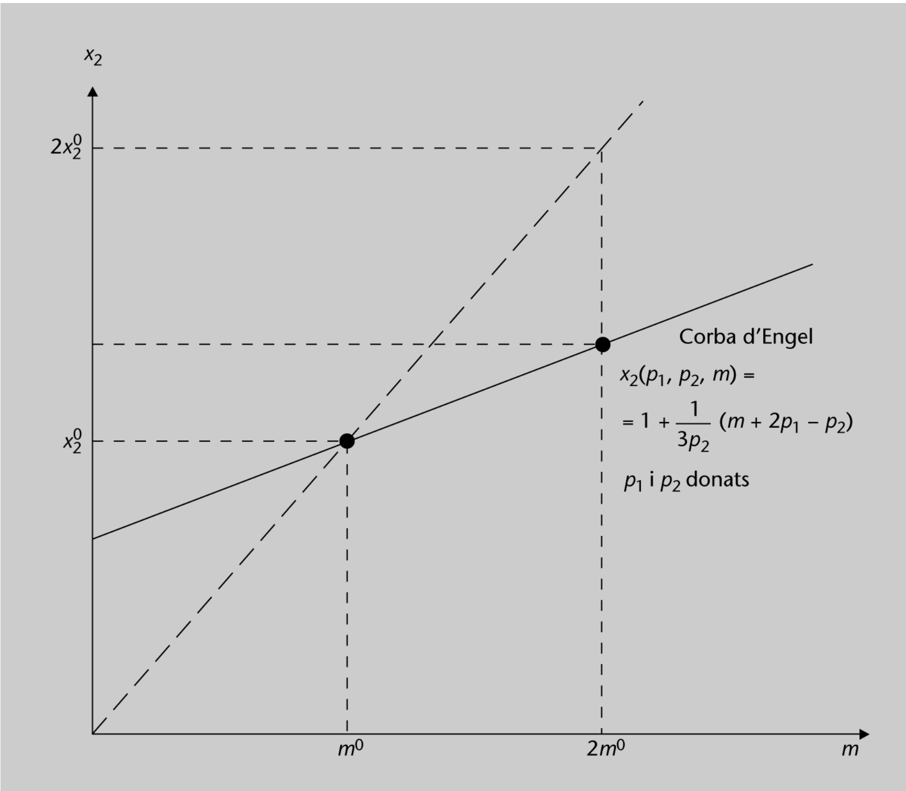
L'estadístic alemany Ernst Engel (1821-1896) descobrí una de les regularitats empíriques més robustes de tota la història dels estudis econòmics, és a saber, l'anomenada **llei d'Engel**, que diu que, quan la riquesa augmenta, la demanda d'aliments també augmenta, però menys que proporcionalment.



Ernst Engel (1821-1896)

Podem il·lustrar aquesta llei amb la corba d'Engel per al bé 2 generada per les preferències del Sr. Les (vegeu el gràfic 7). Interpretem el bé 2 com a aliments i el bé 1 com a habitatge. Quan la riquesa es duplica, per exemple, passa de m^0 a $2m^0$, el consum del bé 2 augmenta, però no arriba a duplicar-se.

Gràfic 7. Una corba d'Engel per al Sr. Les, bé 2. El bé 2 és de primera necessitat



4.2. L'elasticitat respecte de la riquesa i la participació en el pressupost

Recordem que la funció de demanda x_j (p_1, p_2, m) del bé j (j pot ser 1 o 2) és funció de tres variables. Quan dibuixem una corba d'Engel, mantenim els preus constants. Per tant, el pendent d'una corba d'Engel, anomenat la **prospecció marginal al consum**, és la derivada parcial $\frac{\partial x_j}{\partial m}$.

L'**elasticitat respecte de la riquesa** es defineix així:

elasticitat de la demanda del bé *j* respecte de la riquesa =

$$= \frac{\text{\% de canvi en la quantitat del bé } j \text{ demanada}}{\text{\% del canvi en la riquesa}} .$$

O, en altres paraules:

elasticitat de la demanda del bé *j* respecte de la riquesa =

$$= \text{propensió marginal al consum del bé } j \cdot \frac{\text{riquesa}}{\text{quantitat del bé } j \text{ demanada}} .$$

Matemàticament la denotem $E_j(p_1, p_2, m)$ i la definim de la manera següent:

$$E_j(p_1, p_2, m) = \frac{\partial x_j(p_1, p_2, m)}{\partial m} \cdot \frac{m}{x_j(p_1, p_2, m)}.$$

Introduïm també les definicions següents:

1) **bé normal**: $E_j(p_1, p_2, m) > 0$;

- **bé de luxe**: $E_j(p_1, p_2, m) > 1$;
- **bé d'elasticitat unitària** respecte de la riquesa: $E_j(p_1, p_2, m) = 1$;
- **bé de primera necessitat**: $0 < E_j(p_1, p_2, m) < 1$;

2) **bé d'elasticitat nul·la** respecte de la riquesa: $E_j(p_1, p_2, m) = 0$;

3) **bé inferior**: $E_j(p_1, p_2, m) < 0$.

Nota

Si es fa servir aquesta terminologia, la llei d'Engel es pot reflectir en l'exemple dient que els aliments són béns de primera necessitat.

N'hi ha gaires, de béns inferiors? En realitat, sempre que parlem d'un bé ens referim a un agregat, més o menys específic, de béns.

Per exemple, els aliments són agregats de nivell alt; la carn, una mica menys; la vedella, encara menys; el cervell de vedella britànica, encara menys, etc.

Pot ser que un bé molt específic, com ara el cervell de vedella britànica, sigui inferior, però no que els aliments, o la carn, ho siguin. Un exemple de bé inferior, empíricament clar, és el lloguer de pisos als Estats Units. En general l'habitatge és, però, un bé normal.

L'elasticitat respecte de la riquesa ajuda a entendre la relació entre la participació en el pressupost i la renda. Suposem que la riquesa del consumidor augmenta: la fracció de la riquesa emprada en aliments, s'apujarà o s'abaixarà?

Si la llei d'Engel es compleix, aleshores s'abaixarà. Intuïtivament, la riquesa augmenta en un, diguem, 10%, però si els aliments són un bé de primera necessitat, llavors la quantitat d'aliments demanada augmenta en menys d'un 10%. És a dir, la despesa en aliments augmenta en una proporció menor que la riquesa.

Matemàticament: $\dfrac{d\dfrac{p_j x_j}{m}}{dm} = \dfrac{p_j \dfrac{\partial x_j}{\partial m} m - p_j x_j}{m^2} = \dfrac{p_j}{m^2}\left(\dfrac{\partial x_j}{\partial m}\dfrac{m}{x_j}\right) j - 1 = \dfrac{p_j}{m^2}(E_j - 1)$, és a dir, la participació $\dfrac{p_j x_j}{m}$ del bé *j* en el pressupost (o riquesa) *m* augmenta amb *m* si E_j és més gran que 1, i disminueix si E_j és més petit que 1.

La llei d'Engel suggereix que, a mesura que les societats esdevenen més riques, la proporció de la riquesa social gastada en aliments disminueix. El mateix Engel va fer notar que, atès que, en gran part, els aliments són productes agrícoles, la llei d'Engel explica la tendència decreixent del pes relatiu del sector agrícola en les economies modernes.

5. L'efecte de canvis en el propi preu i les corbes de demanda

5.1. L'excedent del consumidor

Considerem una funció d'utilitat quasilineal, és a dir, $u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$, amb $v(0) = 0$. Per simplificar, fixem $p_2 = 1$ o, en altres paraules, mesurem el preu del bé 1 en unitats del bé 2. La funció de demanda del bé 1 és determinada per la condició de tangència $p_1 = v_1'(x_1)$, que ens permet representar fàcilment la corba de demanda. Per exemple, si $v_1(x_1) = a\,x - (1/2)\,b\,(x_1)^2$, llavors $p_1 = a - b\,x_1$, que es representa com una línia recta (vegeu el gràfic 8.a).

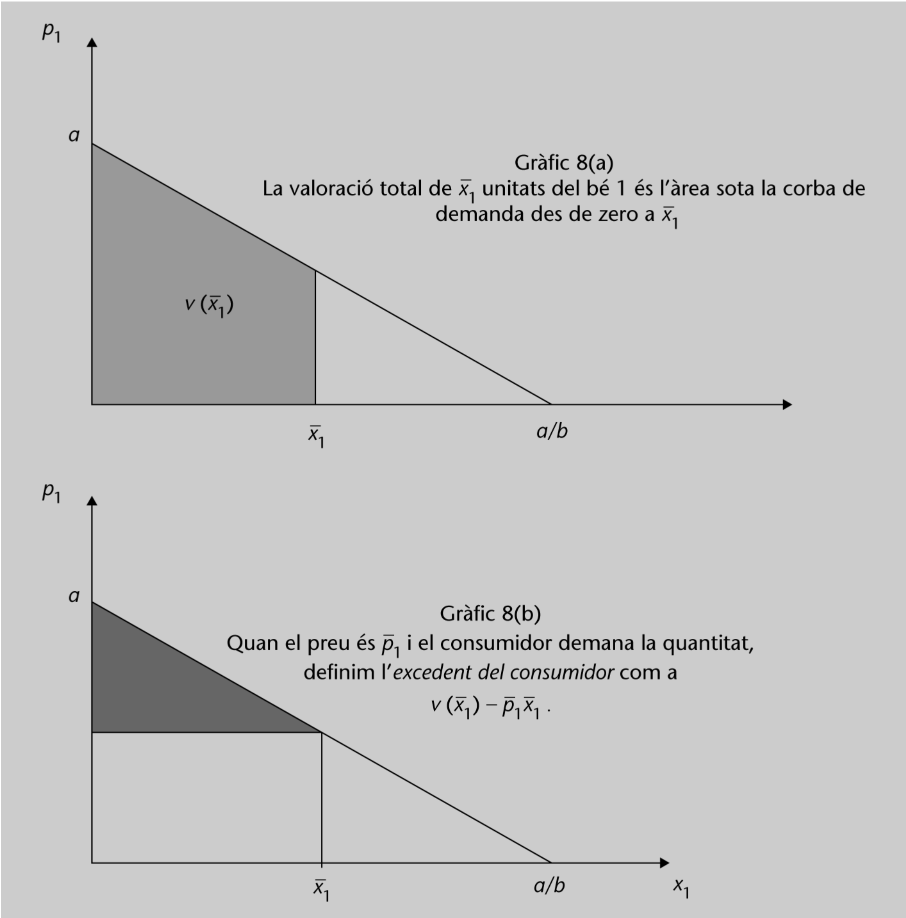
L'àrea de sota la corba de demanda té un significat interessant. Pel teorema fonamental del càlcul, $\int_0^{\bar{x}_1} v'(x_1)dx_1 = v(\bar{x}_1) - v(0) = v(\bar{x}_1)$. Per tant, si coneixem la funció de demanda i veiem que no depèn de la riquesa, podem obtenir la funció de valoració total $v(x_1)$ i, en conseqüència, la funció d'utilitat $u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$. El gràfic 8.a ho il·lustra.

Quan el preu del bé 1 és $\bar{p}_1$ i el consumidor demana la quantitat $\bar{x}_1$, el consumidor valora la quantitat $\bar{x}_1$ a $v(\bar{x}_1)$, però només paga $\bar{p}_1\bar{x}_1$. Seguint l'enginyer francès Jules Dupuit (1804-1866), definim l'*excedent del consumidor* com la diferència $v(\bar{x}_1) - \bar{p}_1\bar{x}_1$ (vegeu el gràfic 8.b).


Jules Dupuit (1804-1866)

Podem interpretar l'excedent del consumidor com la valoració per part del consumidor de l'oportunitat de comprar la quantitat del bé 1 que vulgui al preu $\bar{p}_1$ per unitat. És fàcil comprovar gràficament que un consumidor amb corba de demanda de pendent molt fort assignarà a aquesta oportunitat un valor més alt que un altre consumidor amb corba de demanda més plana que compri la mateixa quantitat.

Gràfic 8. $u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2 = ax_1 - (1/2)b(x_1)^2 + x_2$
$p_1 = v'(x_1) = a - bx_1$

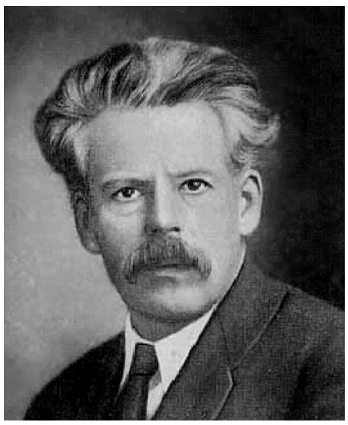


5.2. La llei de la demanda

És una llei empírica que les corbes de demanda de béns de consum mai no tenen pendent positiu: quan el preu d'una mercaderia s'apuja, els consumidors en compren una quantitat menor (o, almenys, la mateixa). Aquesta regularitat s'anomena **llei de la demanda**. Si es compleix la llei de la demanda, llavors:

$$\frac{\partial x_j(p_1, p_2, m)}{\partial p_1} \leq 0.$$

A més a més de ser una llei empírica, la llei de la demanda també és una llei teòrica? És a dir, es pot afirmar que els supòsits del consumidor racional impliquen que mai no tindrà una corba de demanda amb pendent positiu? Curiosament, la resposta és que no; hi ha la possibilitat teòrica que la corba de demanda d'un determinat consumidor racional tingui un pendent positiu per a un cert interval de preus. L'anàlisi d'aquesta qüestió, de la qual van ser pioners el matemàtic rus Ievgueni Slutski i l'economista britànic Sir John Hicks, té una certa subtilesa conceptual i matemàtica.


Ievgueni Slutski (1880-1948)

Un bé amb demanda de pendent positiu s'anomena *bé de Giffen* o *bé giffenià*, per referència a Robert Giffen (1837-1910), que va ser periodista, funcionari i estadístic britànic i que, curiosament, mai no va escriure res sobre el tema. (Alfred Marshall li va penjar aquesta etiqueta.) Un bé que no és giffenià s'anomena *ordinari*.

Cal dir que els béns giffenians són força excepcionals. De fet, la primera evidència empírica sòlida és molt recent: vegeu **Robert T. Jensen; Nolan H. Miller** (2008). «Giffen Behavior and Subsistence Consumption». *American Economic Review* (vol. 98, núm. 4).

Robert Giffen

Juntament amb Ernst Engel, Robert Giffen fou un pioner dels estudis econòmics empírics, i va dur a terme treballs estadístics sobre els salaris, el producte nacional i el creixement econòmic, que es publicaren entre 1884 i 1890. També va promoure un projecte de túnel submarí, per a unir la Gran Bretanya, no pas amb el continent, sinó amb Irlanda.

La llei de la demanda no és una llei teòrica

Amb la finalitat d'entendre aquesta possibilitat, considerem la història següent: el vostre amic anglès Giffen fa 24 anys, i heu decidit regalar-li un pom de roses i clavells de 24 flors. Us agradaria regalar-li el **màxim nombre possible de roses**, però, per desgràcia, només teniu dos-cents euros i, quan telefoneu a la florista, us diu el següent:

- Les roses valen 10 euros cadascuna.
- Els clavells costen 5 euros.

Feu un càlcul ràpid i veieu que haureu de comprar 16 roses (160 euros) i 8 clavells (40 euros), és a dir:

$$x_c(5,\ 10,\ 200) = 8,$$

on x_c és la vostra funció de demanda de clavells: la primera variable és el preu per unitat de clavells, la segona el de les roses, la tercera, la vostra modesta riquesa.

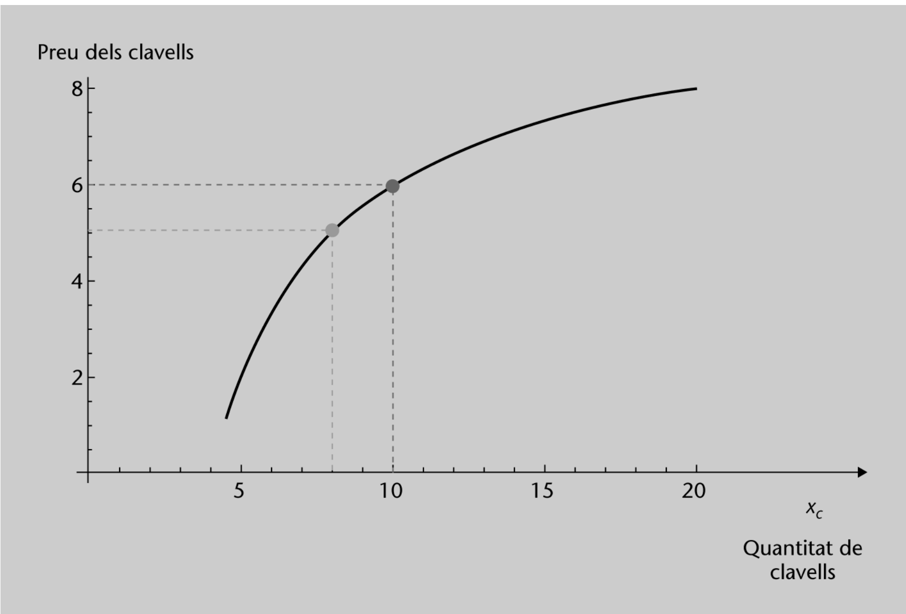
Però quan arribeu a la floristeria us diuen que els clavells s'han apujat, i ara valen 6 euros cadascun. Contrariats, reconsidereu la vostra decisió i us adoneu que ara el pom de 24 flors ja no pot incloure 16 roses.

Heu de comprar 14 roses (140 euros) i 10 clavells (60 euros), és a dir:

$$x_c(6,\ 10,\ 200) = 10.$$

També us adoneu que acabeu de violar la llei de la demanda: quan el preu dels clavells era baix, en demanàveu 8, i, en apujar-se el preu, en demaneu 10. El pendent és positiu (vegeu el gràfic 9).

Gràfic 9. Exemple hipotètic de bé giffenià



5.3. L'equació de Slutski

5.3.1. Efecte total = efecte de substitució + efecte de riquesa

Una manera d'entendre la nostra decisió sobre els clavells, perfectament racional, és que, quan el preu dels clavells s'apuja, els nostres 200 euros no arriben tan lluny com abans. Per tant, ens hem de resignar a comprar una combinació que no és tan bona com abans.

Podem dir que la puja del preu d'un bé que comprem ens empobreix: disminueix la nostra «capacitat adquisitiva» o «riquesa real».

La puja de preus, però, també fa que els clavells s'encareixin respecte de les roses.

Per tant, podem dir que quan el preu dels clavells s'apuja, s'activen simultàniament dos efectes:

- L'efecte de la disminució en la capacitat adquisitiva, que anomenem **l'efecte de riquesa**.
- L'efecte de l'encariment relatiu dels clavells, que anomenem l'**efecte de substitució**.

Com els podem separar? Considerem una altra història hipotètica, la de l'oncle Eugeni. És la següent:

> Suposem que cada dia tenim el costum de menjar un entrepà al bar que ens costa 2 **€**. Aquesta és la situació d'abans (preu = 2, riquesa = m).
>
> Un bon dia, però, el preu de l'entrepà es dispara i passa a ser de 20 **€**. Aquesta és la situació de després (preu = 20, riquesa = m).
>
> Frustrats, sortim del bar a reflexionar quan, casualment, el nostre oncle Eugeni, que és molt ric, passa per allà. L'oncle Eugeni ens regala 18 **€**. Aquesta és la situació compensada (preu = 20, riquesa = m + 18).
>
> Quina és la nostra demanda quan el preu és de 20 **€** i la nostra riquesa ha augmentat en 18 **€**?
>
> - L'**efecte de substitució** ens porta de la situació d'abans a la compensada.
> - L'**efecte de riquesa** ens porta de la situació compensada a la de després.
> - L'**efecte total** ens porta de la situació d'abans a la de després.

En general:

1) Partim d'una posició inicial en què la riquesa del consumidor és m, els preus són p_1 i p_2 i el consumidor demana les quantitats x_1^A i x_2^A dels béns 1 i 2, respectivament. Aquesta és la **situació d'abans** (naturalment, $p_1 x_1^A + p_2 x_2^A = m$).

2) Suposem que el preu del bé 1 canvia a $p_1 + \Delta p_1$, en què Δp_1 pot ser positiu (el preu s'apuja) o negatiu (el preu s'abaixa), mentre que la riquesa del consumidor continua essent m. (El preu p_2 tampoc canvia.) Aquesta és la **situació de després**. Entenem per x_1^D la quantitat de bé 1 demanada pel consumidor en la situació de després.

3) Considerem una situació hipotètica intermèdia en què els preus són els de després, però la riquesa del consumidor s'ajusta o es compensa, s'hi suma Δm (que pot ser positiu o negatiu), de manera que pugui mantenir el cistell de consum d'abans (x_1^A i x_2^A) amb els preus de després ($p_1 + \Delta p_1$, p_2). Aquesta és la **situació compensada** en què els preus són ($p_1 + \Delta p_1$, p_2) i la riquesa del consumidor és $(p_1 + \Delta p_1)\, x_1^A + p_2\, x_2^A$, igual a $m + \Delta m$. És a dir:

$$\Delta m = \Delta p_1\, x_1^A.$$

Entenem per x_1^C la quantitat de bé 1 demanada pel consumidor en la situació compensada.

- L'efecte de substitució correspon a la taxa de canvi $\dfrac{x_1^C - x_1^A}{\Delta p_1}$ (moviment de la situació d'abans a la compensada).
- L'efecte de riquesa correspon a la taxa de canvi $\dfrac{x_1^D - x_1^C}{\Delta p_1}$ (moviment de la situació compensada a la de després).
- L'efecte total correspon a la taxa de canvi $\dfrac{x_1^D - x_1^A}{\Delta p_1}$ (moviment de la situació d'abans a la de després).

Òbviament, n'obtenim el següent:

$$\frac{x_1^D - x_1^A}{\Delta p_1} = \frac{x_1^C - x_1^A}{\Delta p_1} + \frac{x_1^D - x_1^C}{\Delta p_1}\ .$$

És a dir:

efecte total = efecte de substitució + efecte de riquesa.

5.3.2. El signe de l'efecte de substitució

És un resultat sorprenent que l'efecte de substitució no pugui ser positiu. De fet, generalment és negatiu, però pot ser zero en casos especials, com ara el de béns perfectament complementaris.

En altres paraules:

- L'efecte de substitució ens mou en la direcció oposada a la del canvi de preus (o bé no ens mou).

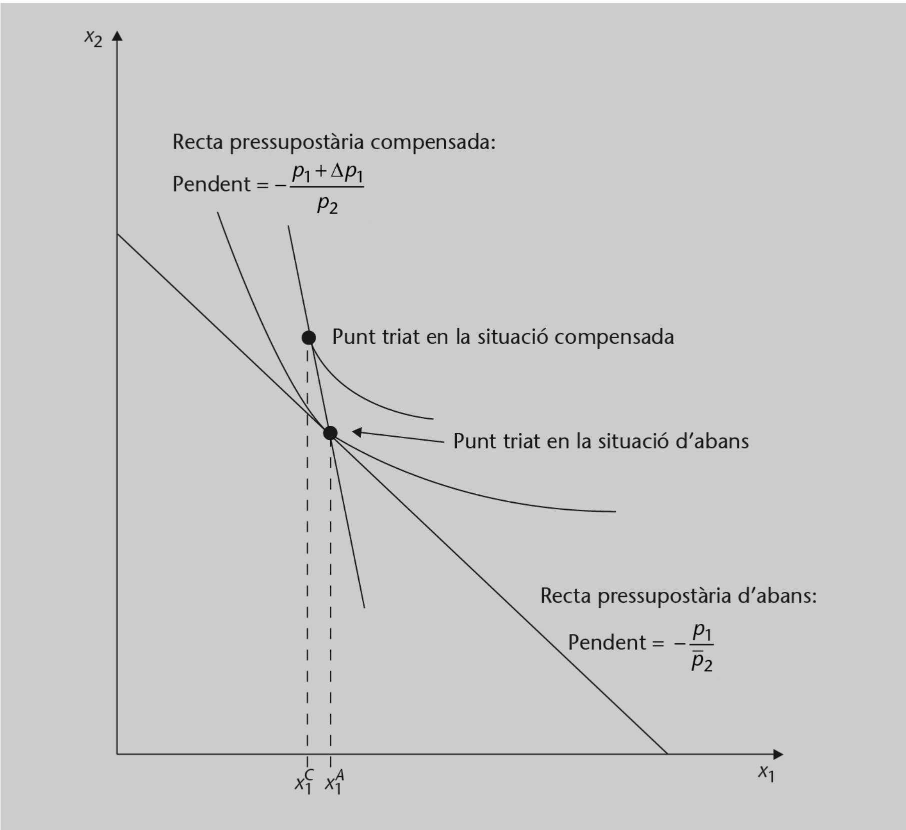
- L'efecte de substitució mai no pot induir un consumidor a comprar més d'un bé que s'ha encarit o menys d'un bé que s'ha abaratit.

Exemple

En el cas de l'oncle Eugeni, això implica que no comprareu més entrepans en la situació compensada que en la situació d'abans.

El gràfic 10 presenta una demostració gràfica d'aquest resultat, per al cas en què el preu del bé 1 s'apuja i passa de p_1 a $p_1 + \Delta p_1$, en què $\Delta p_1 > 0$. En la situació d'abans, la recta pressupostària té el pendent $-p_1/p_2$ i el consumidor tria el punt amb abscissa x_1^A. La demanda compensada s'indueix per una recta pressupostària que passa pel punt triat abans i té el pendent més fort $-(p_1 + \Delta p_1)/p_2$. El consumidor triarà un punt d'aquesta recta. A la dreta o a l'esquerra del punt que ha triat abans? A la dreta no pot ser, ja que estaria per sota de la recta pressupostària d'abans, punts que des del punt de vista del consumidor són pitjors que el punt que ha triat abans. Per tant, el consumidor no pot triar una quantitat del bé 1 superior a la d'abans. L'efecte de substitució no pot ser positiu.

Gràfic 10. Demostració gràfica de la llei de la demanda compensada (el preu del bé 1 s'apuja)



5.3.3. El signe de l'efecte de riquesa

Quan passem de la situació compensada a la de després, els preus no canvien. Només canvia la riquesa de consumidor, en la magnitud $-\Delta m = -\Delta p_1\, x_1^A$, **negativa** si el preu s'ha apujat ($\Delta p_1 > 0$) i **positiva** si s'ha abaixat ($\Delta p_1 < 0$).

Si el bé 1 és normal, ocorre el següent:

- La quantitat demanada augmenta en augmentar la riquesa, és a dir, $x_1^D - x_1^C > 0$ si $-\Delta p_1\, x_1^A > 0$ (o bé $\Delta p_1 < 0$).

- La quantitat demanada disminueix en disminuir la riquesa, és a dir, $x_1^D - x_1^C < 0$ si $-\Delta p_1\, x_1^A < 0$ (o bé $\Delta p_1 > 0$).

En tots dos casos, si el bé 1 és normal, aleshores $\frac{x_1^D - x_1^C}{\Delta p_1} < 0$, és a dir, l'efecte de riquesa és negatiu.

Pel mateix raonament, si el bé 1 és inferior, aleshores $\frac{x_1^D - x_1^C}{\Delta p_1} > 0$, és a dir, l'efecte de riquesa és positiu.

5.3.4. El signe de l'efecte total

Com hem vist, l'efecte de substitució sempre és negatiu (o zero).

D'altra banda, l'efecte de riquesa és, tal com acabem de veure, el següent:

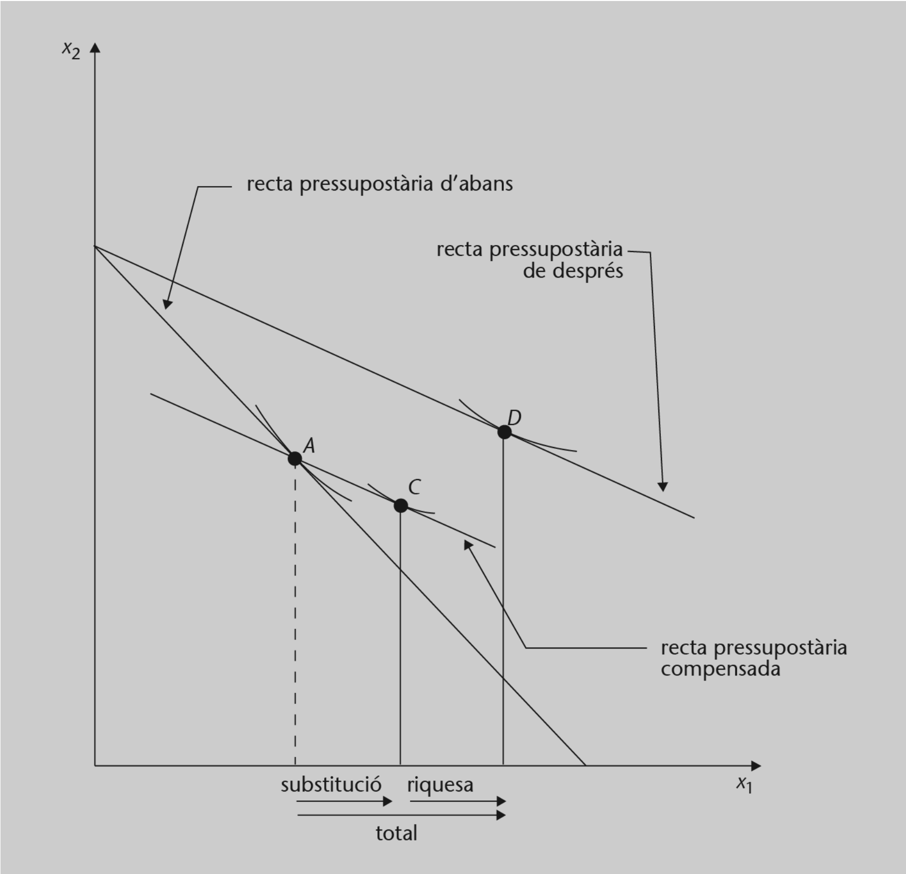
- Negatiu si el bé 1 (que el consumidor compra) és normal.
- Positiu si el bé 1 (que el consumidor compra) és inferior.

Per tant, l'**efecte total** és el següent:

- Negatiu si el bé 1 és normal, com il·lustra el gràfic 11.
- Negatiu, positiu o zero si el bé 1 és inferior.

Per tant, si el bé 1 és giffenià, ha de ser inferior.

Gràfic 11. Representació gràfica de l'equació de Slutski per al cas en què el preu s'abaixa ($\Delta p_1 < 0$), bé normal



Tornem a l'exemple dels clavells

	Preu dels clavells	Preu de les roses	Riquesa	Demanda de clavells	Demanda de roses
Situació abans	5	10	200	8	16
Situació després	6	10	200	10	14
Situació compensada	6	10	208	**8** (48 €)	**16** (160 €)

- Efecte de substitució: $\frac{x_1^C - x_1^A}{\Delta p_1} = \frac{8-8}{1} = 0;$
- Efecte de riquesa: $\frac{x_1^D - x_1^C}{\Delta p_1} = \frac{10-8}{1} = 2 > 0;$
- 'Efecte total: $\frac{x_1^D - x_1^A}{\Delta p_1} = \frac{10-8}{1} = 2 > 0.$

En altres paraules, aquí l'efecte total és positiu a causa de l'efecte de riquesa. L'efecte de substitució, però, no ho és, d'acord amb el resultat general.

És útil considerar els casos extrems següents:

1) Béns perfectament complementaris: no hi ha substitució i l'efecte de substitució és zero, és a dir:

efecte total = efecte de riquesa.

Béns perfectament complementaris

Tal com acabem de veure, aquest també és el cas dels clavells.

2) A l'altre extrem tenim les funcions d'utilitat quasilineals, és a dir, de la forma $u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$, en què la demanda del bé 1 és independent de la riquesa del consumidor. En aquest cas, $x^D = x^C$, l'efecte de riquesa és zero. Per tant:

efecte total = efecte de substitució.

L'equació de Slutski en termes de derivades parcials de la funció de demanda

Obtenim aquestes expressions si passem al límit, és a dir, $\Delta p_1 \to 0$.

- Efecte total: $\frac{\partial x_1}{\partial p_1}$;
- Efecte de substitució: $\left[\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial m} x_1\right]$;
- Efecte de riquesa: $\left[-\frac{\partial x_1}{\partial m} x_1\right]$.

Llei de la demanda per a un bé normal (que el consumidor compra):

si el bé 1 és normal, llavors $\frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0$, és a dir, la quantitat demanada es mou en la direcció oposada al preu.

Llei de la demanda compensada: $\left[\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial m} x_1\right] \leq 0$, tant si el bé 1 és normal com inferior.

5.4. La despesa i l'elasticitat respecte del preu

Definim l'**elasticitat de la demanda del bé 1 respecte del preu** com:

$$\frac{\text{\% del canvi en la quantitat del bé 1 demanada}}{\text{\% del canvi en el preu del bé 1}},$$

o, en altres paraules, així:

$$\text{elasticitat de la demanda del bé 1 respecte del preu} =$$
$$= \text{efecte total} \cdot \frac{\text{preu del bé 1}}{\text{quantitat del bé 1 demanada}}.$$

Matemàticament la denotem $\varepsilon_1(p_1, p_2, m)$, i la definim d'aquesta manera:

$$\varepsilon_1(p_1, p_2, m) = \frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{x_1(p_1, p_2, m)}.$$

Típicament serà un nombre negatiu (és per això que a vegades es defineix amb el signe canviat):

- Si el seu valor absolut és més gran que 1, direm que la demanda del consumidor és **elàstica**.
- Si és més petit que 1, direm que és **inelàstica**.

Augmentarà o es reduirà la despesa del consumidor en el bé 1 quan augmenta el seu preu? Com en moltes qüestions de l'economia pràctica, la resposta depèn de l'elasticitat:

- Si la demanda és elàstica, baixarà. Si el preu s'apuja en un 10% i la demanda del consumidor és elàstica, la quantitat demanada baixarà en més d'un 10%, per tant el producte preu × quantitat baixarà.

  Matemàticament,

  $$\frac{\mathrm{d}p_1 x_1}{\mathrm{d}p_1} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + x_1 = x_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1} + 1\right) = x_1(\varepsilon_1 + 1),$$

  expressió negativa si la demanda és elàstica i, per tant, $\varepsilon_1 < -1$.

- Si la demanda és inelàstica, la despesa augmentarà en apujar-se el preu.

Com veurem, aquestes consideracions serien importants per a un monopolista que vengués el bé 1 al consumidor, ja que la despesa del consumidor és l'ingrés del monopolista: un monopolista que vengui el bé 1 al consumidor no fixarà mai el preu en un punt en què la demanda del consumidor sigui inelàstica.

6. Canvis en el preu d'un altre bé

Diem que el bé 1 és un bé **complementari** (brut) del bé 2 si la demanda del bé 1 disminueix quan el preu del bé 2 augmenta. És a dir, si el preu del bé 2 s'apuja, les quantitats demanades dels dos béns es mouran en la mateixa direcció*.

* Suposem que la llei de la demanda es compleix.

Matemàticament: el bé 1 és un bé complementari (brut) del bé 2 si $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} < 0$.

Paral·lelament: el bé 1 és un bé substitutiu (brut) del bé 2 si $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} > 0$.

Resum

Aquest mòdul parteix de la teoria de la racionalitat individual per a explicar com els consumidors prenen les decisions de comprar béns i serveis. La idea central és que el consumidor busca maximitzar la satisfacció (utilitat) del seu consum però que, alhora, té unes restriccions de partida: la renda i els preus dels béns.

La solució d'aquest problema d'optimització permet obtenir les funcions de demanda ordinària, que depenen de la renda del consumidor i dels preus dels béns de consum. La corba de demanda és una relació entre la quantitat demandada i el preu del mateix producte, mantenint constant la renda i els preus dels altres béns que compra l'individu.

Lògicament, quan la renda o els preus varien, això té com a resultat canvis en el comportament òptim del consumidor. També hem vist que canvis en els preus dels béns consumits ocasionen un efecte substitució i un efecte renda, que es desencadenen simultàniament.

Activitats

1. Siguin dos béns de consum diferents: els aliments (x_1 o bé 1) i les vacances (x_2 o bé 2). L'Àlex té unes preferències representades per la funció d'utilitat: $U(x_1x_2) = \ln (x_1x_2)$ i disposa d'una renda anual de 2.000 unitats monetàries. A més, sabem que el preu dels aliments és de 100 i el de les vacances, de 250.

a) Determina les funcions de demanda d'aliments i de vacances de l'Àlex.
b) Quina és la quantitat anual d'aliments i de vacances que triarà?
c) Calcula les corbes d'Engel per a cadascun dels dos béns. Com es comporten els aliments i les vacances atenent a la renda?
d) Si es produeix un augment de la renda d'un 10% i un encariment dels aliments del 20%, determina les noves quantitats que triarà l'Àlex dels dos béns.

2. Les preferències de l'Anna estan representades per la funció d'utilitat de tipus Stone-Geary: $u(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^{2/3}(x_2 - 5)^{1/3}$, entre dos béns de consum: x_1 i x_2.

a) Determina les funcions de demanda ordinàries per als dos béns.
b) Calcula l'elasticitat de la demanda de cada bé respecte de la riquesa.

Exercicis d'autoavaluació

1. Apliqueu la tècnica del apartat 1 per a calcular les funcions de demanda d'un consumidor amb preferències del tipus Cobb-Douglas, és a dir, representades per la funció d'utilitat $x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha}$.

Un cop obtingudes, comproveu que s'avenen amb les demandes del sistema de despesa lineal del subapartat 2.1 per al cas especial on $a_1 = a_2 = 0$.

2. Comproveu gràficament i verbalment que, sota les preferències del gràfic 2 (apartat 2), el consumidor pot triar solucions de cantó. Us suggerim que considereu gràficament els casos en què un segell de 15 euros val més que 3 segells de 5 euros, menys o el mateix.

3. Apliqueu la tècnica de l'apartat 2 per a calcular les funcions de demanda d'un consumidor amb preferències representades per la funció d'utilitat $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$.

4. Apliqueu la tècnica de l'apartat 2 per a calcular les funcions de demanda d'un consumidor amb preferències representades per la funció d'utilitat:

$$u(x_1, x_2) = ax_1 - \frac{1}{2}b(x_1)^2 + x_2, \text{ on } a > 0 \text{ i } b > 0.$$

5. Representeu gràficament la corba d'Engel per al bé 1 d'un consumidor amb preferències representades per la funció d'utilitat Cobb-Douglas: $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha}$.

6. Representeu gràficament les corbes d'Engel d'un consumidor amb preferències representades per la funció d'utilitat:

$$u(x_1, x_2) = ax_1 - \frac{1}{2}b(x_1)^2 + x_2 \left(\text{per a } a > 0,\ b > 0 \text{ i } x_1 < \frac{a}{b}\right),$$

a) primer per al bé 1.

b) després en un altre gràfic, per al bé 2.

7. Suposem que les preferències d'un consumidor determinat es poden representar amb la funció d'utilitat Cobb-Douglas: $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha}$. Representeu gràficament, en el mateix gràfic, dues corbes de demanda del bé 1, corresponents a dos nivells de riquesa (riquesa alta i riquesa baixa).

8. Suposem que les preferències d'un consumidor determinat es poden representar per la funció d'utilitat $u(x_1, x_2) = ax_1 - \frac{1}{2}b(x_1)^2 + x_2 \left(\text{per a } a > 0,\ b > 0 \text{ i } x_1 < \frac{a}{b}\right)$.

a) Representeu gràficament, en el mateix gràfic, les dues corbes de demanda del bé 1 corresponents a dos nivells de riquesa (riquesa alta i riquesa baixa).

b) El mateix, però per al bé 2.

9. Com hem vist en el subapartat 2.1, les funcions de demanda d'un consumidor amb les preferències del gràfic 1 del mòdul 1 (Sr. Les) són:

$$x_1(p_1,\ p_2,\ m) = -2 + \frac{2}{3p_1}(m + 2p_1 - p_2)$$

i:

$$x_2(p_1,\ p_2,\ m) = 1 + \frac{2}{3p_2}(m + 2p_1 - p_2).$$

a) Representeu gràficament una corba d'Engel per al bé 1, i una altra per al bé 2.

b) Trobeu expressions per a l'elasticitat de la demanda respecte de la riquesa per a cadascun dels dos béns.

c) Discutiu les qüestions següents:
- Algun dels dos béns és normal?
- Algun dels dos béns és inferior?
- Algun dels dos béns és un bé de luxe?
- Algun dels dos béns és un bé de primera necessitat? Argumenteu les respostes gràficament.

d) Dibuixeu una corba de demanda per a cadascun dels dos béns. Acompleixen aquestes corbes la llei de la demanda? Expliqueu-ho gràficament, i també amb referència a la teoria dels efectes de substitució i de riquesa, fent servir les respostes a la pregunta anterior.

e) El bé 1 és complementari brut del bé 2?, el bé 2 és complementari brut del bé 1?

10. El gràfic 11 del text (subapartat 5.3.4) representa l'efecte de substitució i l'efecte de riquesa corresponents a una reducció del preu del bé 1. Construïu el mateix gràfic, però per a un augment del preu del bé 2.

11. El senyor Basili consumeix dos béns que considera perfectament complementaris: les seves preferències són, de fet, les representades en el gràfic 3 del mòdul 1 (apartat 2). La raó d'una mercaderia respecte de l'altra en el seu consum és sempre 1:1.

a) Determineu gràficament el punt triat pel senyor Basili quan els preus són p_1 i p_2 , i la seva riquesa és m.

b) Escriviu, en forma d'equació, la condició que la raó d'una mercaderia a l'altra en el seu consum és sempre 1 : 1.

c) Escriviu l'equació de la seva recta de balanç.

d) Trobeu les funcions de demanda per a les dues mercaderies i resoleu el sistema d'equacions format per les respostes a), b) i c).

e) Il·lustreu gràficament, amb un gràfic comparable al gràfic 11 del text (subapartat 5.3.4), l'efecte de substitució degut a un canvi en el preu del bé 1.

Solucionari

Activitats

1.

a) Donats p_1, p_2 i m (els preus dels aliments, de les vacances i la renda, respectivament), l'Àlex selecciona una cistella que és factible i que maximitza la seva utilitat:

$$\begin{array}{ll} Max & \ln(x_1 x_2) \\ s.a. & p_1 x_1 + p_2 x_2 = m. \end{array}$$

La cistella òptima ha de complir les condicions següents:

- Condició de tangència: la corba d'indiferència que conté aquesta cistella i la recta de balanç són tangents en el punt on es determina la cistella òptima.
- Factibilitat: la cistella òptima pertany a la recta pressupostària.

La **condició de tangència** ens diu que els pendents de la corba d'indiferència i de la recta de balanç coincideixen a la cistella òptima. Per tant, en aquest punt, la relació marginal de substitució (*RMS*) s'iguala al quocient de preus:

$$RMS_{x_1}^{x_2} = \frac{UMg_1(x_1, x_2)}{UMg_2(x_1, x_2)} = \frac{p_1}{p_2}$$

En el nostre cas, aquesta condició respon als càlculs següents:

$$UMg_1(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} \quad \text{i} \quad UMg_2(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2}$$

I l'*RMS* és igual a:

$$RMS_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

Per tant, la condició de tangència és la següent:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

La **cistella òptima** compleix l'equació de la recta de balanç:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m.$$

Així doncs, amb les dues igualtats anteriors tenim un sistema de dues equacions i dues incògnites. La solució d'aquest sistema són les funcions de demanda d'aliments i de vacances de l'Àlex, que depenen de la renda i dels preus dels béns:

$$x_1 = \frac{m}{2p_1}, \qquad x_2 = \frac{m}{2p_2}.$$

b) Substituïm els valors de l'enunciat $m = 2.000$, $p_1 = 100$ i $p_2 = 250$ a les funcions de demanda anteriors i obtenim les quantitats demandades anualment:

$$x_1 = \frac{m}{2p_1} = \frac{2.000}{2.100} = 10, \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{m}{2p_2} = \frac{2.000}{2.250} = 4.$$

c) Les corbes d'Engel mostren la quantitat demandada dels béns en funció de la renda, tot mantenint els preus constants. Per això, agafem les funcions de demanda i les escrivim de la manera següent:

$$m = 2p_1 x_1,$$

que és la corba d'Engel del bé aliments. Anàlogament:

$$m = 2p_2 x_2,$$

que és la corba d'Engel del bé vacances.

La relació entre la renda del consumidor i la quantitat d'aliments i vacances és positiva $\left(\frac{\partial m}{\partial x_i} = 2p_i, i = 1,2\right)$. Això indica que els dos béns són normals.

d) L'augment de la renda i del preu dels aliments significa que ara els nous valors per a aquestes variables són:

$$m = 2.200, p_1 = 120.$$

Amb aquests nous valors, calculem les noves quantitats consumides tot substituint les funcions de demanda de la manera següent:

$$x_1 = \frac{m}{2p_1} = \frac{2.200}{2*120} = 9.166 \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{m}{2p_2} = \frac{2.200}{2*250} = 4,4.$$

2.

a) Donats p_1, p_2 i m (els preus dels béns i la renda), l'Anna selecciona la cistella que és factible i que maximitza la seva utilitat. Analíticament, es tracta de trobar (x_1, x_2) que:

$$\text{Max } (x_1 - 4)^{2/3}(x_2 - 5)^{1/3} \text{ tal que } p_1x_1 + p_2x_2 = m.$$

La cistella òptima de l'Anna està caracteritzada per dues condicions:

- La corba d'indiferència que conté aquesta cistella i la recta de balanç són tangents en aquesta cistella.
- La cistella òptima pertany a la recta pressupostària.

La **condició de tangència** ens diu que els pendents de la corba d'indiferència i de la recta de balanç coincideixen en aquesta cistella. Això implica que:

$$RMS(x_1, x_2) = p_1/p_2,$$

on *RMS* denota la relació marginal de substitució. Per a calcular-la, fem el quocient d'utilitats marginals: $RMS(x_1, x_2) = UMg_1(x_1, x_2)/UMg_2(x_1, x_2)$.

Les utilitats marginals dels dos béns són igual a:

$$UMg_1(x_1, x_2) = \frac{2}{3}(x_1 - 4)^{-1/3}(x_2 - 5)^{1/3} \text{ i } UMg_2(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(x_1 - 4)^{2/3}(x_2 - 5)^{-2/3}.$$

D'aquí obtenim l'*RMS*:

$$RMS(x_1, x_2) = 2\left(\frac{x_2 - 5}{x_1 - 4}\right).$$

Per tant, en aquest cas la primera condició és igual a:

$$2\left(\frac{x_2 - 5}{x_1 - 4}\right) = p_1/p_2.$$

La **cistella òptima** compleix l'equació de la recta de balanç:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m.$$

Les dues igualtats anteriors constitueixen un sistema de dues equacions i dues incògnites: x_1 i x_2, en les quals els preus i la renda són paràmetres (o variables exògenes). La solució d'aquest sistema ens dóna les funcions de demanda dels dos béns:

$$x_1 = \frac{2}{3p_1}(m + 2P_1 - 5P_2) = 4 + \frac{2}{3p_1}(m - 4p_1 - 5p_2) \quad \text{i}$$
$$x_2 = \frac{1}{3p_2}(m - 4P_1 + 10P_2) = 5 + \frac{1}{3p_2}(m - 4p_1 - 5p_2).$$

Aquestes expressions són les demandes ordinàries, ja que per a cada valor de preus i renda ens dóna la quantitat òptima demandada de cada bé.

b) L'elasticitat renda respon als càlculs següents:

$$E_1(p_1, p_2, m) = \frac{\partial x_1}{\partial m}\frac{m}{x_1} = \frac{2}{3p_1}\frac{m}{x_1} = \frac{2m}{3p_1\left(4 + \frac{2}{3p_1}(m - 4p_1 - 5p_2)\right)} = \frac{m}{m + 2p_1 - 5p_2},$$

$$E_2(p_1, p_2, m) = \frac{\partial x_2}{\partial m}\frac{m}{x_2} = \frac{1}{3p_2}\frac{m}{x_2} = \frac{m}{3p_2\left(5 + \frac{1}{3p_2}(m - 4p_1 - 5p_2)\right)} = \frac{m}{m - 4p_1 + 10p_2}.$$

Exercicis d'autoavaluació

1. Resolem, per a les incògnites x_1 i x_2, el sistema de les dues equacions: condició de tangència, i recta de balanç:

1) La condició de tangència és aquesta: taxa marginal de substitució = quocient de preus, és a dir:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{\alpha \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\alpha-1}}{(1-\alpha) \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\alpha-1}} = \frac{\alpha \cdot x_2}{(1-\alpha) \cdot x_1} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (1)$$

2) L'equació de la recta de balanç és:

$$p_1\, x_1 + p_2\, x_2 = m. \qquad (2)$$

De l'expressió (1):

$$p_1\, x_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\, p_2\, x_2. \qquad (3)$$

Substituint-ho a l'expressió (2), trobem que la demanda de x_2 és: $p_2\, x_2 = m - \frac{\alpha}{1-\alpha}\, p_2\, x_2$; és a dir: $x_2 = (1-\alpha)\frac{m}{p_2}$, i emprant aquesta expressió, podem escriure (3) com $x_1 = \alpha \frac{m}{p_1}$.

En resum, les dues **funcions de demanda de Cobb-Douglas** són:

$$x_1(p_1,\ p_2,\ m) = \alpha \frac{m}{p_1}$$
$$x_2(p_1,\ p_2,\ m) = (1-\alpha)\frac{m}{p_2}$$

Comprovem ara que aquestes funcions de demanda són un cas particular de les del sistema de despesa lineal estudiat en el subapartat 2.1. Allà hem trobat les expressions següents:

$$x_1(p_1,\ p_2,\ m) = a_1 + \frac{\alpha}{p_1}(m - p_1\, a_1 - p_2\, a_2),$$

i

$$x_2(p_1,\ p_2,\ m) = a_2 + \frac{1-\alpha}{p_2}(m - p_1\, a_1 - p_2\, a_2);$$

les quals, per a $a_1 = a_2 = 0$, clarament resulten les que hem acabat de calcular.

2. Recordem que el pendent de les corbes d'indiferència és, en valor absolut, $\frac{1}{3}$.

Argument verbal: si un segell de 15 euros val més que 3 segells de 5 euros, llavors sota les preferències del gràfic 2 el consumidor racional mai no comprarà segells de 15 euros.

Argument gràfic: el pendent de la recta de balanç, en valor absolut, és més fort que $\frac{1}{3}$.

Si tria el punt on la recta de balanç toca l'eix d'ordenades, el consumidor assoleix la corba d'indiferència més alta entre les que tenen algun punt comú amb el conjunt pressupostari.

3. Trobem les funcions de demanda del consumidor resolent el sistema d'equacions següents:

Vegeu la resolució de l'exercici 1.

1) La condició de tangència és: taxa marginal de substitució $= \frac{p_1}{p_2}$, és a dir:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x_1}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

2) La recta de balanç és: $p_1x_1 + p_2x_2 = m$.

De la condició de tangència obtenim la funció de demanda de la primera mercaderia:

$x_1(p_1, p_2, m) = \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2$, que, d'acord amb les implicacions de la quasilinealitat, presenta la particularitat de no dependre de la riquesa m. És a dir, es tracta d'un bé situat en la frontera entre els béns normals i els inferiors. Substituint-ho a la recta de balanç, obtenim la funció de demanda de la mercaderia segona:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m - p_1 \cdot \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2}{p_2} = \frac{4m \cdot p_1 - (p_2)^2}{4p_1p_2}.$$

Observem que aquesta solució requereix que la riquesa sigui prou alta, és a dir, $m > \frac{(p_2)^2}{4p_1}$.

En cas contrari, trobaríem una solució de cantó, on $x_2 = 0$, i $x_1 = \frac{m}{p_1}$.

4. Un cop més, trobem les funcions de demanda del consumidor en resoldre el sistema d'equacions:

Vegeu la resolució dels exercicis 1 i 3.

1) La condició de tangència és la següent: taxa marginal de substitució $= \frac{p_1}{p_2}$, és a dir:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{a - bx_1}{1} = a - bx_1 = \frac{p_1}{p_2}.$$

2) La recta de balanç és: $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$.

De la condició de tangència obtenim la funció de demanda del bé primer:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{a - \frac{p_1}{p_2}}{b} = \frac{a\,p_2 - p_1}{bp_2} = \frac{a}{b} - \frac{p_1}{b\,p_2}$$

que, de fet, no depèn de la riquesa, d'acord amb la quasilinealitat de la funció d'utilitat. Substituint-ho a la recta de balanç, obtenim la funció de demanda del bé segon:

Vegeu la funció de demanda del bé 1 en la resolució de l'exercici 1.

$$x_2(p_1, p_2, m) = \frac{m - p_1x_1}{p_2} = \frac{m}{p_2} = \frac{1}{b} \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 - \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Aquesta solució és vàlida quan la riquesa és prou alta; en cas contrari, trobaríem una solució de cantó, on $x_2 = 0$ i $x_1 = \frac{m}{p_1}$.

5. Sabem que la funció de demanda del bé 1 és: $x_1(p_1, p_2, m) = \alpha \frac{m}{p_1}$. Per tant, una corba d'Engel per al bé 1 és una línia recta que passa per l'origen, amb pendent $\frac{\alpha}{p_1}$. Vegeu gràfic 12.

Vegeu les funcions de demanda en l'exercici 4.

6.

a) Sabem que la funció de demanda del bé 1 és aquesta:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{a\,p_2 - p_1}{b\,p_2}$$

Per tant, una corba d'Engel per al bé 1 és una línia horitzontal que talla l'eix d'ordenades al nivell $\frac{a\,p_2 - p_1}{b\,p_2}$. Vegeu gràfic 13.

b) La funció de demanda del bé 2 és la següent:

$$x_2(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_2} + \frac{1}{b} \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 - \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Per tant, una corba d'Engel per al bé 2 és una recta amb pendent $\frac{1}{p_2}$, que talla l'eix d'ordenades en el nivell $\frac{1}{b} \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 - \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)$.

El gràfic 14 representa la corba per al cas en què l'última magnitud és positiva.

7. Sabem que la funció de demanda del bé 1 és aquesta:

Vegeu la funció de demanda del bé 1 en l'exercici 1.

$$x_1(p_1, p_2, m) = \alpha \frac{m}{p_1}.$$

Les corbes de demanda per a dos nivells de riquesa seran dues hipèrboles, i la corresponent al nivell de riquesa alt estarà damunt de l'altra. Vegeu gràfic 15.

8.

a) Sabem que la funció de demanda del bé 1 és aquesta:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{a}{b} - \frac{p_1}{b\,p_2},$$

una funció que no depèn de la riquesa. Per tant, les corbes de demanda corresponents a riquesa alta i a riquesa baixa coincideixen. D'altra banda, l'expressió que defineix la corba de demanda és la d'una línia recta. Vegeu el gràfic 16.

b) Sabem que la funció de demanda del bé 2 és $x_2(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_2} + \frac{1}{b} \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 - \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)$.

Vegeu les funcions de demanda en la resolució de l'exercici 4.

Per tant, la corba de demanda corresponent al nivell de riquesa alt estarà damunt de l'altra. Vegeu el gràfic 17.

9.

a) Vegeu els gràfics 18 i 19.

b) L'elasticitat de la demanda respecte de la riquesa:

- Per al bé 1 és la següent: $E_1(p_1, p_2, m) = \frac{\partial x_1}{\partial m}\frac{m}{x_1} = \frac{2}{3p_1}\frac{m}{x_1} = \frac{m}{m - (p_1 + p_2)}$.

- Per al bé 2: $E_2(p_1, p_2, m) = \frac{\partial x_2}{\partial m}\frac{m}{x_2} = \frac{1}{3p_2}\frac{m}{x_2} = \frac{m}{m + 2(p_1 + p_2)}$.

c) Els dos béns són normals, ja que la corba d'Engel és creixent per a cada bé. Analíticament podem comprovar que la derivada respecte de la riquesa *m* de cadascuna de les expressions trobades a b) és positiva.

El bé 1 és de bé 2: de luxe, com es pot veure de l'expressió trobada a b) per la seva elasticitat respecte de la riquesa, que és més gran que 1.

El bé 2, en canvi, és de primera necessitat: compareu el gràfic 19 amb el gràfic 4 del text; d'altra banda, la seva elasticitat respecte de la riquesa, calculada a b), és positiva, però menor que 1.

d) Els dos béns compleixen la llei de la demanda. Els gràfics 20 i 21, de la pàgina següent, mostren que les corbes de demanda són decreixents (o no creixents).

D'altra banda, hem vist en la part c) que els dos béns són normals i, per tant, que l'efecte de riquesa no pot ser positiu per a cap dels dos. En conseqüència, l'efecte total no pot ser positiu i cap dels dos béns no pot violar la llei de la demanda.

e) Calculem les derivades parcials creuades:

En primer lloc, $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = -\frac{2}{3p_1} < 0$. Per tant, el bé 2 és complementari brut del bé 1.

En segon lloc, $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = -\frac{2}{3p_2} > 0$. Per tant, el bé 1 és substitutiu brut del bé 2.

És curiós, oi? Aquest és un problema que tenen les definicions de béns substitutius i complementaris bruts, que no es presentaria si apliquéssim les definicions de béns substitutius i complementaris nets.

10. Vegeu el gràfic 22.

11.

a) Vegeu el gràfic 23.

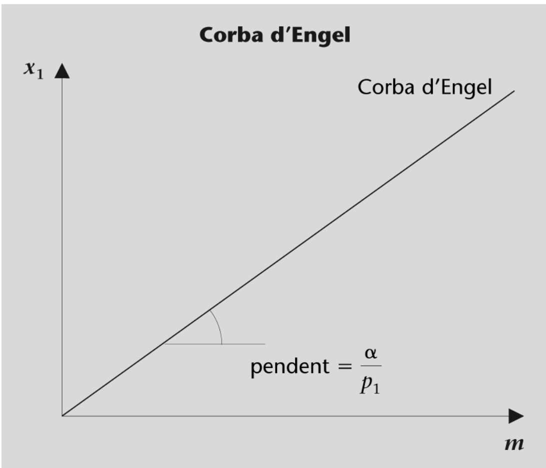
b) $x_2 = x_1$ (Massa senzill, oi?)

c) $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$.

d) Com que $x_2 = x_1$ la recta de balanç es pot escriure $p_1 x_1 + p_2 x_1 = m$, és a dir, $x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1 + p_2}$ per tant $x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1 + p_2}$.

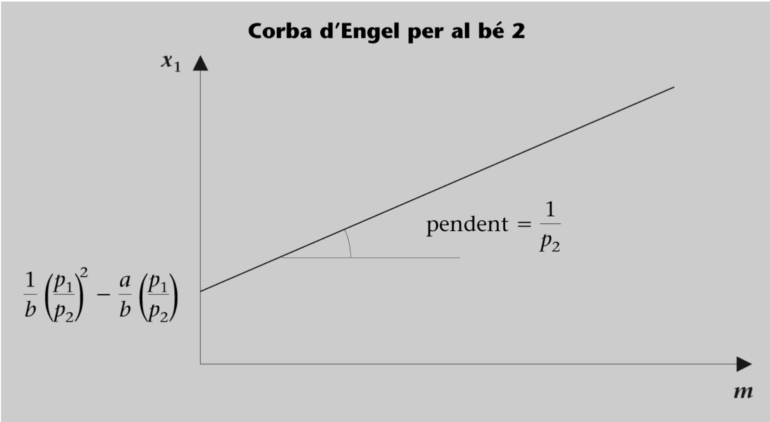
e) L'efecte de substitució és zero: vegeu el gràfic 24.

Gràfic 12

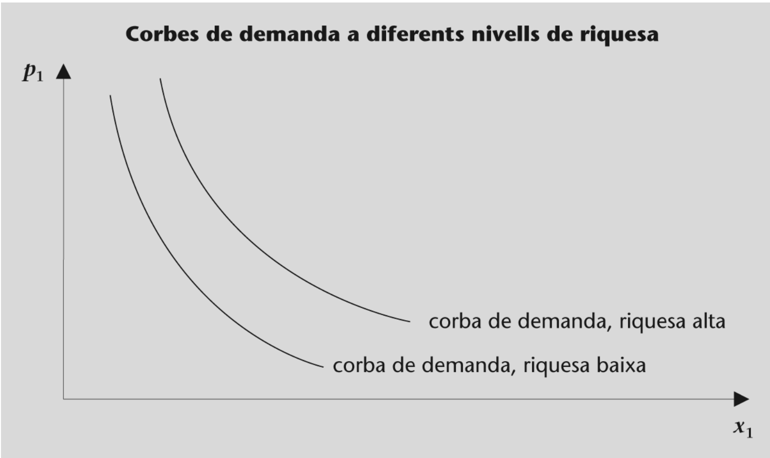


Gràfic 13

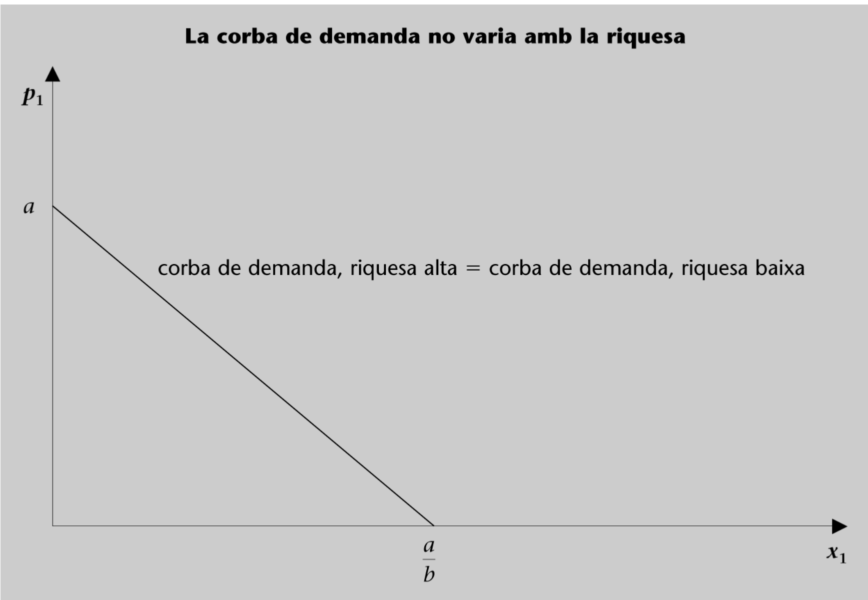
Gràfic 14



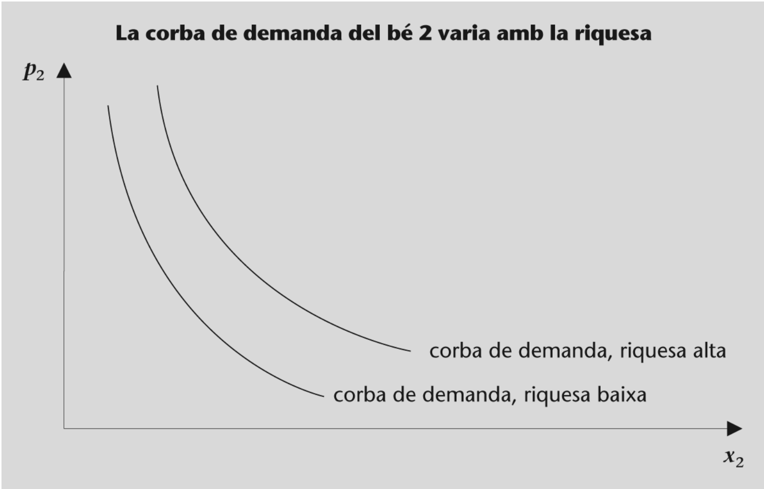
Gràfic 15



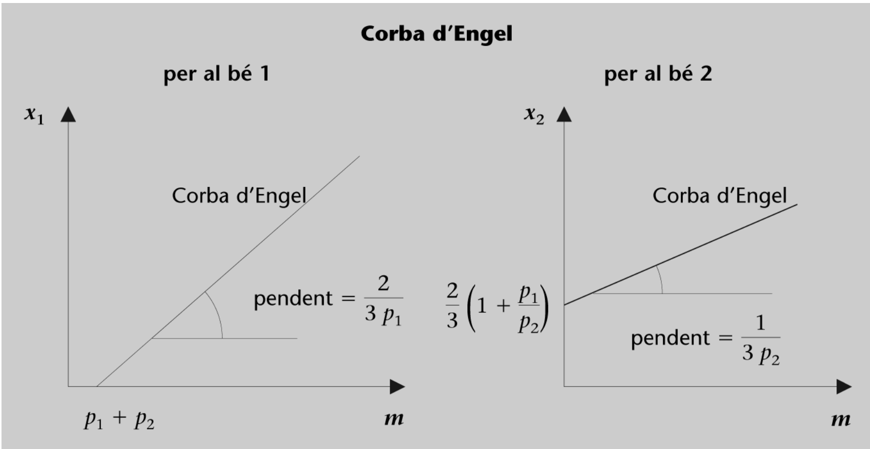
Gràfic 16



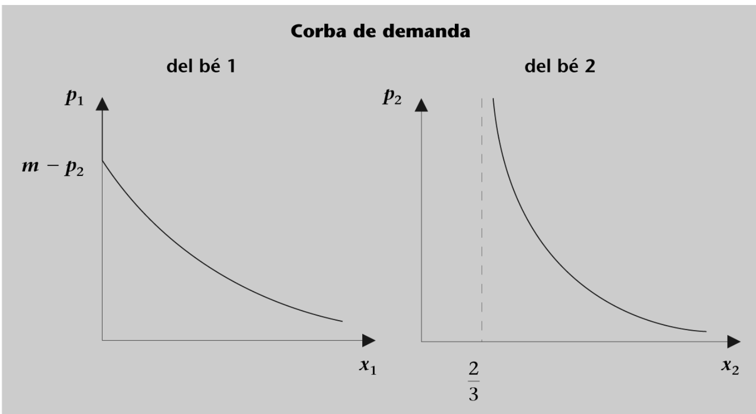
Gràfic 17



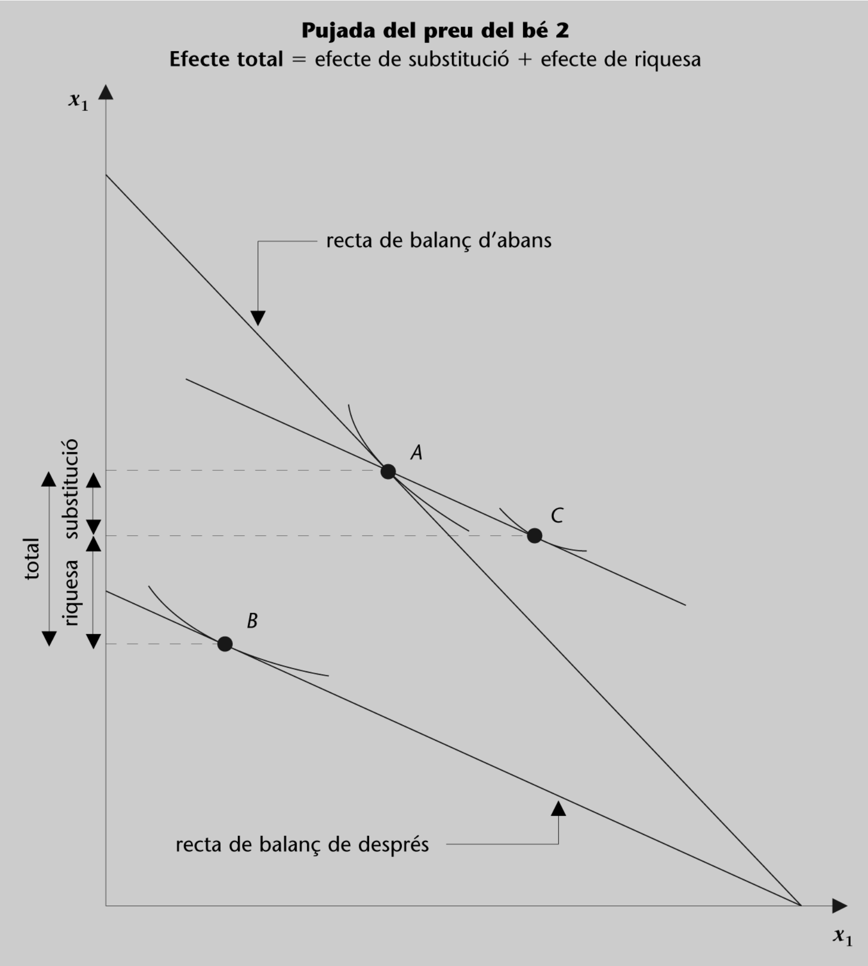
Gràfics 18 i 19



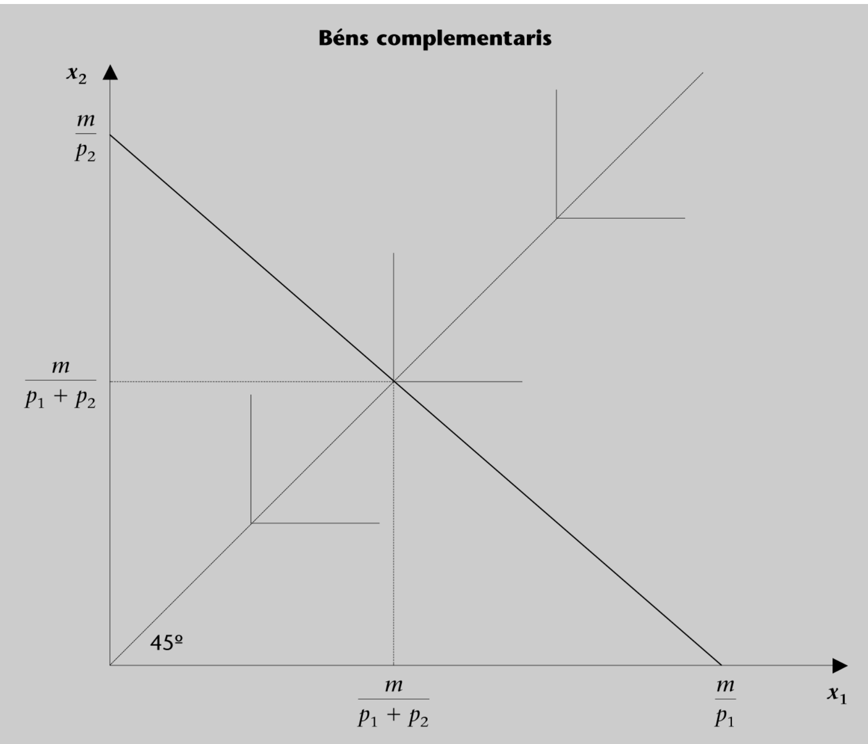
Gràfics 20 i 21



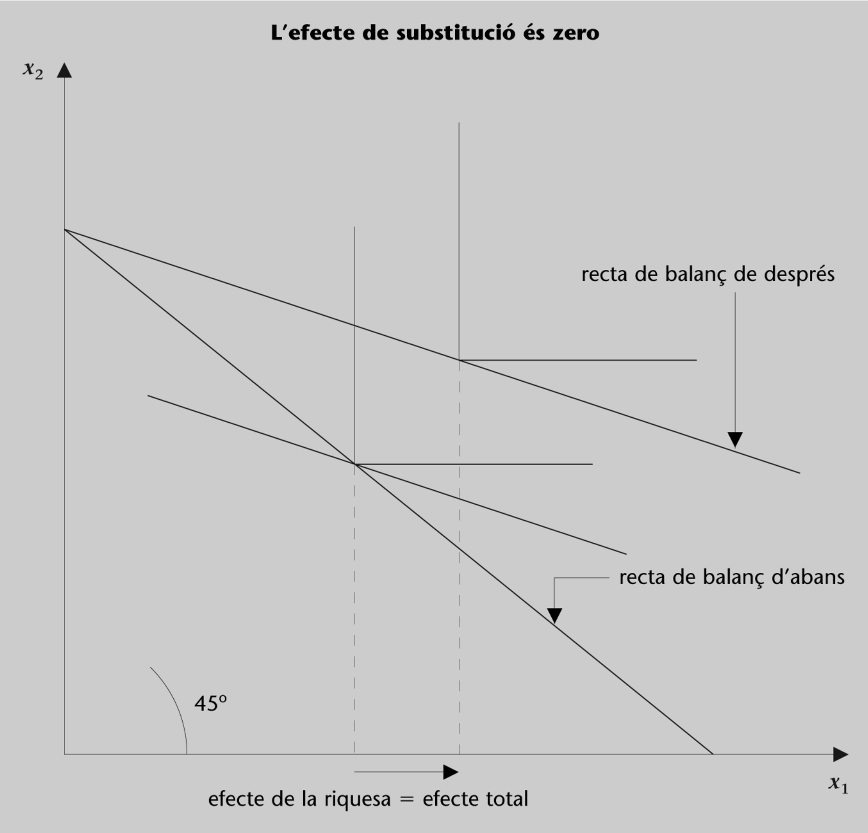
Gràfic 22



Gràfic 23



Gràfic 24


L'efecte de substitució és zero
x_2
recta de balanç de després
recta de balanç d'abans
45º
x_1
efecte de la riquesa = efecte total