Contrast d'hipòtesis

Carles Rovira Escofet

P08/05057/02308

UOC
Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

Índex

Sessió 1

Introducció al contrast d'hipòtesis 5

1. Hipòtesis nul·la i alternativa 5
2. El nivell de significació 8
3. El concepte d'estadístic de contrast 9
4. El *p*-valor 11
5. Resoldre un contrast d'hipòtesi 12
6. Relació amb els intervals de confiança 12
7. Resum 13

Exercicis 14

Sessió 2

Contrastos sobre la mitjana i sobre la proporció 17

1. Contrastos sobre la mitjana 17
   1.1. Cas de la variància coneguda 17
   1.2. Cas de la variància desconeguda 18
   1.3. Cas amb mostres no normals 20
   1.4. Dades aparellades 21
2. Contrastos sobre la proporció (mostres grans) 22
3. Resum 24

Exercicis 25

Introducció al contrast d'hipòtesis

En aquesta sessió presentem una nova tècnica estadística: el contrast d'hipòtesis. Veurem primer algunes situacions on la podem utilitzar.

***Test* o *contrast* són dues maneres d'anomenar la mateixa tècnica.**

Tirem 100 vegades una mateixa moneda. En principi es tracta d'una moneda normal, de manera que esperem que ens surti aproximadament el mateix nombre de cares que de creus. Esperem, per tant, una relació de l'ordre 50-50 (50 cares, 50 creus), o 48-52. Però, què passa si la relació que obtenim és de l'ordre 45-55 o, encara més, de 40-60? Podem considerar que el resultat obtingut ens indica que la moneda no és perfecta? O hem de dir que el resultat és només fruit de la casualitat?

Un altre cas: imagineu que comprem una màquina que fabrica xips i que, segons el fabricant, en fa com a màxim un 1% de defectuosos. Després de fabricar 300 xips, els revisem i descobrim que n'hi ha 5 de defectuosos (segons el fabricant haurien d'haver estat 3). Aquest augment del nombre de xips defectuosos indica que la màquina no funciona bé, o podem pensar que només és casualitat?

Una darrera situació. Un estudi afirma que la mitjana de les alçades dels nois catalans de 17 anys és de 178 cm. Visitem un institut i escollim 10 nois a l'atzar; la seva alçada mitjana és de 171 cm. Podem pensar que els nois d'aquest institut tenen una alçada diferent de la del conjunt de nois de Catalunya?

Importància del test

El test serà l'eina que ens permetrà de treure conclusions a partir de la diferència entre les observacions i els resultats que s'haurien d'obtenir si la hipòtesi de partida fos certa.

Fixeu-vos que les tres situacions anteriors són similars. En els tres casos suposem una certa hipòtesi i hem de decidir, a partir de les nostres observacions, si tenim prou evidències per a poder-la rebutjar. Com ho farem? Utilitzarem probabilitats.

1. Hipòtesis nul·la i alternativa

El primer pas quan volem estudiar aquest tipus de problema és determinar bé les hipòtesis. Cal que en determinem dues, ja que la resolució del problema consistirà, en certa mesura, a escollir-ne una entre aquestes dues.

La **hipòtesi nul·la**, que indicarem per H_0, és la hipòtesi de partida. Ha de recollir el fet que volem posar a prova.

La **hipòtesi alternativa** és la que, com el seu nom indica, oferim com a alternativa a la nul·la. Aquesta hipòtesi, que denotem per H_1, representa que s'ha produït un canvi respecte de la situació descrita per la hipòtesi nul·la.

Per a poder plantejar correctament les hipòtesis, caldrà que entenguem bé l'estructura estadística que hi ha darrere de les dades i, per tant, haurem de conèixer quina distribució segueixen. Les hipòtesis s'expressaran normalment en termes d'algun paràmetre de la distribució de les dades que estudiem.

Tornem a l'exemple de les alçades, però ara hi afegim una mica més d'informació. Sabem, per exemple, que la variable "alçada" segueix una distribució normal. Per tant, una alçada és una observació d'una variable $N(\mu,\sigma^2)$. Suposarem també que σ és coneguda i és igual a 3. Aleshores, quan diem que els nois de 17 anys tenen una alçada mitjana de 178 cm, en realitat proposem que la hipòtesi nul·la expressada en termes del paràmetre μ és aquesta:

$$H_0\text{: } \mu = 178$$

Per a detectar si les alçades no segueixen aquesta mitjana hem d'agafar com a hipòtesi alternativa:

$$H_1\text{: } \mu \neq 178 \text{ (hipòtesi bilateral)}$$

Però si volguéssim detectar si els nois són més alts de 178 cm, la hipòtesi alternativa hauria de ser aquesta:

$$H_1\text{: } \mu > 178 \text{ (hipòtesi unilateral)}$$

mentre que si volguéssim detectar si són més baixos de 178 cm hauria de ser:

$$H_1\text{: } \mu < 178 \text{ (hipòtesi unilateral)}$$

La hipòtesi alternativa pot ser bilateral, si el paràmetre és diferent del valor corresponent a la hipòtesi nul·la, o unilateral, si només ho compara en una direcció.

Observació

Amb la mateixa hipòtesi nul·la podem estudiar diverses hipòtesis alternatives.

Exemple de la moneda

Considerem l'exemple de tirar una moneda i veure si és perfecta. Podem representar el llançament d'una moneda per una variable de Bernoulli de paràmetre p, $B(p)$, on p indica la probabilitat de treure una cara.

Si volem "contrastar" el fet que la moneda sigui perfecta respecte que no ho sigui, la hipòtesi nul·la H_0 correspon a "la moneda és perfecta", i la hipòtesi alternativa H_1, a "la moneda no és perfecta", que es pot representar, en termes del paràmetre p de la manera següent:

$$H_0\text{: } p = \frac{1}{2}, \text{ contra } H_1\text{: } p \neq \frac{1}{2}$$

Fixeu-vos que agafem com a hipòtesi nul·la el supòsit "la moneda és perfecta", que és la situació habitual; la hipòtesi alternativa és la que indica que hi ha hagut canvis.

Observeu que...

... les hipòtesis s'expressen en termes del paràmetre de les dades que utilitzen.

Observeu que podríem plantejar el cas de manera que la hipòtesi nul·la correspongués a "la moneda és perfecta" i l'alternativa a "la probabilitat de cara és més alta que la de creu". Si ho escrivim en funció del paràmetre resulta:

$$H_0\text{: } p = \frac{1}{2}, \text{ contra } H_1\text{: } p > \frac{1}{2}$$

Tenim la mateixa hipòtesi nul·la, però la hipòtesi alternativa és diferent. Fixeu-vos que el primer cas era una alternativa bilateral, mentre que en el segon, és unilateral.

Un cop plantejades les hipòtesis nul·la i alternativa hem de prendre una decisió a partir de les observacions. D'una banda, hi ha dues decisions possibles:

1) Acceptar la hipòtesi nul·la
2) Rebutjar la hipòtesi nul·la

D'altra banda, hi ha dues situacions possibles:

a) La hipòtesi nul·la és certa
b) La hipòtesi nul·la és falsa

Això fa que puguem cometre dues classes d'errors diferents: podem acceptar la hipòtesi nul·la quan aquesta és falsa o podem rebutjar la hipòtesi nul·la quan aquesta és certa, tal com es veu en la taula següent:

		Decisions	
		Acceptar H_0	Rebutjar H_0
Situacions	H_0 certa	Decisió correcta	Error de tipus I
	H_0 falsa	Error de tipus II	Decisió correcta

Importància de les observacions

Segons el conjunt d'observacions concret decidirem rebutjar o acceptar la hipòtesi nul·la.

Podem mesurar aquests errors amb la probabilitat que es donin les situacions respectives.

Així, podem considerar els errors següents:

- L'error de tipus I és la probabilitat que rebutgem la hipòtesi nul·la quan aquesta és certa.
- L'error de tipus II és la probabilitat que acceptem la hipòtesi nul·la quan aquesta és falsa.

Ara necessitem una regla de decisió que ens permeti de determinar si hem d'acceptar o rebutjar la hipòtesi nul·la a partir de les observacions. Com que podem cometre dos tipus d'errors diferents, ens interessaria prendre la decisió que els minimitzés tots dos. Com sempre, la solució d'aquest problema no és fàcil. Normalment, l'experiència ens ensenya que quan establim una regla de decisió que fa molt petit un dels dos errors, l'altre es fa gran.

Com que no podem fer petits els dos errors al mateix temps utilitzarem l'estratègia següent: buscarem regles de decisió que ens permetin de tenir limitat l'error de primer tipus, és a dir, l'error que fem quan decidim rebutjar la hipòtesi nul·la i aquesta és certa. Aquesta estratègia és conservadora, tendim a no rebutjar la hipòtesi nul·la excepte si els resultats són molt poc probables sota aquesta.

Orígens de l'estratègia

L'estratègia de decisió que emprem aquí es basa en els resultats de Neyman i Pearson, dos importants matemàtics del segle XX.

Una bona manera de fer petits els dos errors i, per tant, de millorar els nostres resultats, és augmentar la mida de les mostres que utilitzem.

2. El nivell de significació

El nivell de significació α d'un contrast és l'error màxim de tipus I que estem disposats a assumir.

Determinar el nivell de significació que cal fixar quan es comença l'estudi no és un problema estrictament matemàtic, ja que depèn de cada cas particular. Usualment es fa servir el valor estàndard de $\alpha = 0{,}05$. Altres nivells utilitzats són de l'ordre de 0,1, de 0,01 o fins i tot de 0,001 (si volem augmentar la precisió).

Sentit del nivell de significació d'un contrast

Un nivell $\alpha = 0{,}05$ significa que encara que la hipòtesi nul·la sigui certa, les dades de 5 de cada 100 mostres ens la faran rebutjar. És a dir, acceptem que podem rebutjar la hipòtesi nul·la equivocadament, 5 de cada 100 vegades.

A l'hora d'escollir el nivell de significació, recordem que l'error de tipus I (rebutjar H_0 quan aquesta és certa) indica que detectem un canvi respecte de la hipòtesi nul·la quan, en realitat, no n'hi ha. Per tant, podem tenir en compte les consideracions següents:

- Si detectar aquest canvi –que, en realitat, no existeix i només és conseqüència del caràcter aleatori de les dades– no és gaire greu, aleshores podem escollir un nivell de significació alt (per exemple, de l'ordre de 0,1).
- Si detectar aquest canvi –que, en realitat no existeix– és un error greu, aleshores hem de fixar un nivell de significació petit.

Però cal anar en compte. Com més petit sigui el valor de α que fixem, més tendència tindrem a acceptar la hipòtesi nul·la. El cas extrem seria fixar un nivell de significació 0. En aquest cas acceptarem sempre la hipòtesi nul·la, de manera que mai no es donarà l'error de tipus I, però és clar que si hem d'acceptar sempre, l'estudi que hem fet no ens aporta res de nou.

El fet de tenir fitat l'error de tipus I fa que el nostres contrastos siguin conservadors i tendeixin a acceptar la hipòtesi nul·la, a menys que hi hagi evidències molt clares que l'hem de rebutjar.

"Acceptem" o "no rebutgem"?

Com que quan acceptem la hipòtesi nul·la no n'estem gaire segurs, normalment en lloc de dir "Acceptem la hipòtesi nul·la" diem "No rebutgem la hipòtesi nul·la".

Quan acceptem la hipòtesi nul·la no estem segurs que sigui realment certa, ja que no controlem l'error de tipus II (l'error que fem quan acceptem la hipòtesi nul·la i aquesta és falsa).

Quan rebutgem la hipòtesi nul·la estem segurs que l'hem de rebutjar perquè tenim fitat l'error de tipus I (l'error que fem quan rebutgem la hipòtesi nul·la i aquesta és certa).

3. El concepte d'estadístic de contrast

Ja tenim fixades les hipòtesis i també l'error de tipus I que estem disposats a assumir. Per a decidir si rebutgem la hipòtesi nul·la o no la rebutgem utilitzarem el que anomenarem *estadístic de contrast*.

Un **estadístic de contrast** és una funció de la mostra de la qual en coneixem la distribució sota la hipòtesi nul·la.

Cada problema diferent té el seu estadístic de contrast corresponent.

Vegem com utilitzar l'estadístic de contrast per a decidir si rebutgem la hipòtesi nul·la o no ho fem. Per exemple, en el cas de les alçades dels nois, sabem que si tenim una mostra d'alçades de n nois escollits a l'atzar, aleshores sota la hipòtesi nul·la (és a dir, $\mu = 178$) podem definir la variable:

Recordeu que...

... si tenim una mostra de mida n d'una distribució $N(\mu,\sigma^2)$, aleshores la variable:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

segueix una distribució normal estàndard.

$$z = \frac{\bar{x}-178}{\frac{3}{\sqrt{n}}}$$

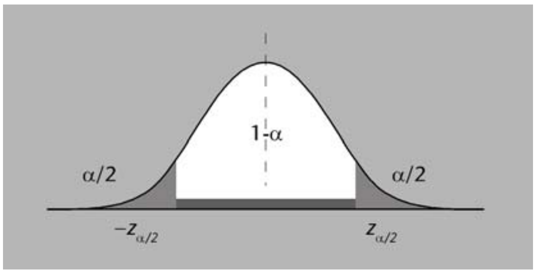
Aquest valor és una observació d'una llei $N(0,1)$.

Si la hipòtesi nul·la és certa, el valor observat z hauria d'estar a la zona on la distribució normal estàndard concentra una probabilitat més gran, és a dir, al voltant del zero. Si ens surt un valor molt allunyat del zero, aquest valor serà poc probable sota la hipòtesi nul·la, i ens portarà a decidir de rebutjar-la, ja que pensarem que la seva aparició no pot ser deguda a l'atzar, sinó al fet que la hipòtesi nul·la deu ser falsa. Ara bé, fins a quin punt ha de ser poc probable per a decidir de rebutjar-la? Això vindrà donat pel nivell de significació fixat.

Així, imagineu que fem el contrast H_0: $\mu = 178$ contra H_1: $\mu \neq 178$. Un valor de l'estadístic de contrast proper a 0 és més probable sota H_0 que no sota H_1. Així, utilitzarem la regla de decisió següent: ❗

Exemple de contrast bilateral.

- Acceptarem H_0 si $|z| \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$
- Rebutjarem H_0 si $|z| > z_{\frac{\alpha}{2}}$



Zona d'acceptació de la hipòtesi nul·la

La part del gràfic amb una ratlla més gruixuda correspon a la zona on hem d'acceptar la hipòtesi nul·la. Fixeu-vos com influeix la hipòtesi alternativa a l'hora de decidir.

on $z_{\frac{\alpha}{2}}$ és l'anomenat *valor crític*.

Per a determinar el valor crític $z_{\alpha/2}$ només cal imposar que l'error de tipus I (probabilitat de rebutjar H_0 quan és certa) sigui menor o igual que el nivell de significació α, és a dir:

$$P\left(|Z| > z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(Z > Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) + P\left(Z < -z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \leq \alpha$$

Terminologia

En els contrastos bilaterals, a vegades es diu que la probabilitat de les dues cues (la part que correspon a la zona on hem de rebutjar la hipòtesi nul·la) ha de ser α.

on Z és la distribució de l'estadístic de contrast. En aquest cas, sota la hipòtesi nul·la, segueix una distribució normal estàndard. Per exemple, per a $\alpha = 0{,}05$ trobem (per exemple, a les taules de la normal) que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

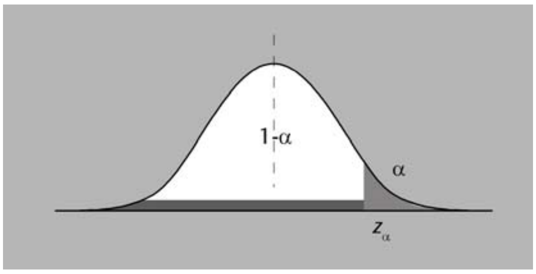
Exemple de contrast unilateral

Fem ara un contrast unilateral, en particular H_0: $\mu = 178$ contra H_1: $\mu > 178$. En aquest cas, un valor positiu de l'estadístic de contrast serà més probable sota H_1 (ja que sota la hipòtesi alternativa el més normal és que $\bar{x}$ sigui més gran que 178), mentre que els valors negatius ho seran sota H_0. En aquest cas, la regla de decisió serà aquesta:

- Acceptarem H_0 si $z \leq z_\alpha$
- Rebutjarem H_0 si $z > z_\alpha$

Validesa del mètode

El mètode és el mateix per a qualsevol distribució simètrica, així que també serveix si l'estadístic de contrast segueix una distribució *t* de Student.



Terminologia

En aquest contrast unilateral, es diu que la probabilitat de la cua de la dreta ha de ser α.

Per a determinar el valor crític z_α imposem, com abans, que l'error de tipus I sigui més petit que el nivell de significació α, en aquest cas:

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha$$

on Z és la distribució de l'estadístic de contrast. Com abans, sota la hipòtesi nul·la, està distribuït com una normal estàndard. Per exemple, per a $\alpha = 0{,}05$, trobem que $z_\alpha = 1{,}65$.

De la mateixa manera, veiem que per al contrast H_0: $\mu = 178$ contra H_1: $\mu < 178$, la regla de decisió serà la següent:

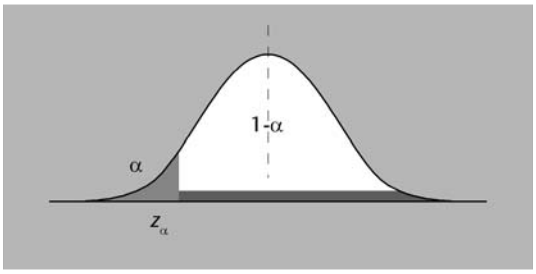
- Acceptarem H_0 si $z \geq z_\alpha$.
- Rebutjarem H_0 si $z < z_\alpha$.

amb la condició:

$$P(Z < z_\alpha) = \alpha,$$

on Z és, com abans, la distribució de l'estadístic de contrast, que sota la hipòtesi nul·la té una distribució normal estàndard. Per a $\alpha = 0{,}05$ trobem que $z_{\alpha} = -1{,}65$.

La llei d'aquesta variable *Z* s'anomena *llei de l'estadístic de contrast*.



Terminologia

En aquest contrast unilateral, es diu que la probabilitat de la cua de l'esquerra ha de ser α.

4. El *p*-valor

En molts casos, per a resoldre un contrast d'hipòtesis, no calcularem el valor crític, sinó que utilitzarem l'anomenat *p-valor*.

El programari estadístic més habitual utilitza el *p*-valor per a fer el contrast d'hipòtesis.

El ***p*-valor** és la probabilitat del resultat de l'estadístic de contrast observat o d'un de més allunyat quan la hipòtesi nul·la és certa.

Sentit del *p*-valor

El *p*-valor associat a una observació de l'estadístic de contrast és el nivell de significació més petit que ens permet de rebutjar la hipòtesi nul·la.

Quan el *p*-valor sigui petit, indicarà que el valor de l'estadístic de contrast que hem observat tenia una probabilitat petita de sortir sota la hipòtesi nul·la i, per tant, haurem de rebutjar la hipòtesi nul·la. En canvi, quan sigui gran, indicarà que era un valor força probable sota la hipòtesi nul·la i, per tant, és lògic que acceptem H_0.

Si el *p*-valor és inferior al nivell de significació α, rebutjarem la hipòtesi nul·la.

Si el *p*-valor és superior o igual al nivell de significació α, acceptarem la hipòtesi nul·la.

Validesa del mètode

El mètode és el mateix per a qualsevol distribució simètrica, així que també serveix si l'estadístic de contrast segueix una distribució *t* de Student, com veurem més endavant.

Exemple d'aplicació del *p*-valor

En l'exemple de les alçades, imagineu que el nostre estadístic de contrast observat és 1,61 i denotem per Z una variable aleatòria que té una distribució normal estàndard, que és la llei de l'estadístic de contrast sota la hipòtesi nul·la. Suposem, a més, que hem fixat un nivell de significació $\alpha = 0{,}1$. Així:

1) Si fem el contrast H_0: $\mu = 178$ contra H_1: $\mu \neq 178$, aleshores el *p*-valor és (probabilitat de les dues cues):

$$P(Z > |1{,}61|) = P(Z > 1{,}61) + P(Z < -1{,}61) = 2 \cdot 0{,}0537 = 0{,}1074 > \alpha \Rightarrow \text{No rebutgem } H_0$$

Fixeu-vos que per a calcular el *p*-valor, calculem la probabilitat que la variable Z prengui un valor més allunyat que el valor 1,61 observat.

2) Si fem el contrast H_0: $\mu = 178$ contra H_1: $\mu > 178$, aleshores el *p*-valor és (probabilitat de la cua de la dreta):

$$P(Z > 1{,}61) = 0{,}0537 < \alpha \Rightarrow \text{Rebutgem } H_0$$

Fixeu-vos que, en aquest cas, el valor obtingut és molt poc probable sota la hipòtesi nul·la. De totes maneres, si haguéssim considerat un nivell de significació de 0,05, hauríem d'haver acceptat la hipòtesi nul·la.

3) Si fem el contrast H_0: $\mu = 178$ contra H_1: $\mu < 178$, aleshores el *p*-valor és (probabilitat de la cua de l'esquerra):

$$P(Z < 1{,}61) = 0{,}9463 > \alpha \Rightarrow \text{No rebutgem } H_0$$

En canvi, en aquest cas el valor obtingut és molt probable sota la hipòtesi nul·la, per això l'acceptem.

Aquestes probabilitats moltes vegades no es poden calcular amb taules estadístiques i cal utilitzar un programari estadístic.

5. Resoldre un contrast d'hipòtesi

Podem descriure el procediment per a plantejar i resoldre un contrast d'hipòtesis en 5 etapes:

1) Fixar les hipòtesis nul·la i alternativa.
2) Fixar un nivell de significació.
3) Determinar l'estadístic de contrast i la seva llei.
4) Calcular el *p*-valor associat al nostre estadístic de contrast calculat.
5) Comparar el *p*-valor amb el nivell de significació i prendre una decisió.

Un altre procediment

Podem substituir els passos 4 i 5 del procediment presentat per a resoldre un contrast d'hipòtesis pel càlcul del valor crític.

6. Relació amb els intervals de confiança

Per als contrastos bilaterals, podem fer un contrast d'hipòtesi utilitzant intervals de confiança. Vegem-ho amb un exemple.

El pes en grams de les pomes d'una explotació agrària segueix una distribució normal de desviació típica 3,5. Un estudi ens diu que el pes mitjà és de 155 grams i volem comprovar si això és cert. Si denotem per μ l'esperança de la distribució de les pomes, volem contrastar:

$$H_0: \mu = 155 \text{ contra } H_1: \mu \neq 155$$

Per a fer-ho, hem agafat una mostra aleatòria de 42 pomes i hem obtingut una mitjana aritmètica de 163,8.

Primer hem de trobar un interval de confiança del 95% per a la mitjana de la distribució. Recordeu que es pot obtenir a partir de la fórmula següent:

$$\bar{x} \pm 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

que en el nostre cas ens dóna l'interval (162,74, 164,85). Sabem que de cada 100 mostres que considerem, el valor autèntic de la μ estarà, com a mínim, en 95 dels intervals corresponents. Per això, si el valor que volem contrastar a la hipòtesi nul·la cau dins l'interval, acceptarem la hipòtesi nul·la.

Si el valor que volem contrastar està en l'interval de confiança acceptem la hipòtesi nul·la i, si no hi és, rebutgem la hipòtesi nul·la.

En aquest cas, com que $155 \notin (162{,}74,\ 164{,}85)$, hem de rebutjar la hipòtesi nul·la.

7. Resum

En aquesta sessió hem presentat els conceptes fonamentals d'una nova tècnica estadística: el contrast d'hipòtesis. Hem introduït els conceptes d'hipòtesi nul·la, hipòtesi alternativa, errors de tipus I i II, estadístic de contrast, valor crític i *p*-valor. Finalment, hem vist com utilitzar un interval de confiança per a fer un contrast d'hipòtesi.

Exercicis

1. Comprem una màquina que fabrica xips que, segons el fabricant, fabrica com a màxim un 1% de xips defectuosos. Expliqueu les variables aleatòries que hi ha en aquesta situació i discutiu les possibles hipòtesis que podem estudiar per a comprovar si les especificacions del fabricant són certes.

2. S'escull una mostra de 80 persones i s'observa que 10 tenen els ulls blaus. Doneu un interval de confiança del 95% per a la proporció de persones amb els ulls blaus. Contrasteu si es pot afirmar que la proporció de persones amb els ulls blaus és del 7% amb un nivell de significació $\alpha = 0{,}05$.

3. Tenim una mostra de mida 10 d'una variable aleatòria amb distribució normal de mitjana μ desconeguda i variància $\sigma^2 = 4$. Les nostres observacions són aquestes:

11,57	10,57	11,32	12,30	10,36
12,00	10,29	11,48	8,74	10,03

Contrasteu, amb nivell de significació de 0,1, les hipòtesis següents:

a) H_0: $\mu = 11$ contra H_1: $\mu \neq 11$
b) H_0: $\mu = 11$ contra H_1: $\mu > 11$
c) H_0: $\mu = 11$ contra H_1: $\mu < 11$

Solucionari

1. En realitat, es tracta de fer un control de qualitat per a determinar si la probabilitat de produir un xip defectuós és inferior a 0,01. Considerem un model en què per a cada xip tenim una variable X_i amb llei de Bernoulli de paràmetre p desconegut, que pren el valor 1 quan el xip és defectuós, i el valor 0, quan no ho és. Podem considerar diversos contrastos:

a) H_0: $p = 0{,}01$ contra H_1: $p \neq 0{,}01$

En aquest cas, la hipòtesi alternativa H_1 ens diu que la proporció de xips defectuosos no és de l'1 per cent. Si rebutgem la hipòtesi nul·la, no sabrem si ho fem perquè la proporció és més gran o més petita. És a dir, podríem rebutjar una màquina que no fes cap peça defectuosa. Aquest contrast no ens interessa.

b) H_0: $p = 0{,}01$ contra H_1: $p < 0{,}01$

En aquest cas, la hipòtesi alternativa H_1 ens diu que la proporció de xips defectuosos és menor de l'1 per cent. Només rebutjarem la hipòtesi nul·la si la proporció de xips defectuosos és clarament inferior a l'1 per cent. Aquest contrast ens pot interessar si només volem una màquina de la qual estem molt segurs que la seva producció és molt bona. Aleshores ens quedarem la màquina quan rebutgem la hipòtesi nul·la. Però hi ha el problema que el test té tendència a acceptar la hipòtesi nul·la, de manera que hi ha la possibilitat que rebutgem màquines que satisfan les especificacions del fabricant.

c) H_0: $p = 0{,}01$ contra H_1: $p > 0{,}01$

En aquest cas, la hipòtesi alternativa H_1 ens diu que la proporció de xips defectuosos és més gran de l'1%. Només rebutjarem la hipòtesi nul·la si la proporció de xips defectuosos és clarament superior a l'1%. És molt possible que ens quedem amb una màquina amb una producció de xips defectuosos superior a l'especificada.

2. L'interval de confiança al 95% sobre una proporció p es calcula a partir de l'expressió següent:

$$\hat{p} \pm z_{0,025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Com que $\hat{p} = 10/80 = 0{,}125$ i $n = 80$, obtenim l'interval (0,053, 0,197). Volem fer el contrast:

$$H_0\text{: } p = 0{,}07 \text{ contra } H_1\text{: } p \neq 0{,}07$$

Atès que $0{,}07 \in (0{,}053,\ 0{,}197)$, acceptarem la hipòtesi nul·la.

3. De la mateixa manera que en l'exemple de les alçades, agafem l'estadístic de contrast següent:

$$z = \frac{\bar{x} - 11}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$$

Sota la hipòtesi nul·la, aquest estadístic correspon a una observació d'una llei $N(0,1)$. En el nostre cas, podem calcular:

$$\bar{x} = 10{,}866$$

de manera que l'estadístic de contrast és aquest:

$$z = \frac{\bar{x} - 11}{\frac{2}{\sqrt{n}}} = -0{,}21$$

a) Per al contrast H_0: $\mu = 11$ contra H_1: $\mu \neq 11$ (és bilateral), calculem els valors crítics $\pm z_{\alpha/2}$ de manera que:

$$P(|Z| > z_{\alpha/2}) = P(Z < -z_{\alpha/2}) + P(Z > z_{\alpha/2}) = 0{,}1$$

I tenint present la simetria de la distribució normal:

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = 0{,}05$$

on Z correspon a una distribució normal estàndard. Trobem que $z_{\alpha/2} = 1{,}65$. Per tant, hem d'acceptar la hipòtesi nul·la.

D'altra banda, si calculem el p-valor, hem de buscar la probabilitat de les dues cues:

$$P(|Z| > 0{,}21) = 2P(Z > 0{,}21) = 2 \cdot 0{,}4168 = 0{,}8336 > \alpha$$

i hem d'acceptar la hipòtesi nul·la.

b) Per a H_0: $\mu = 11$ contra H_1: $\mu > 11$ (unilateral), el valor crític satisfà:

$$P(Z > z_\alpha) = 0{,}1$$

és a dir que $z_\alpha = 1{,}28$. La regla de decisió és:

- Acceptarem H_0 si $z \leq z_\alpha$
- Rebutjarem H_0 si $z > z_\alpha$

Per tant, en aquest cas acceptarem la hipòtesi nul·la.

Si calculem el p-valor, hem de buscar la probabilitat de la cua de la dreta:

$$P(Z > -0{,}21) = P(Z < 0{,}21) = 0{,}5832 > \alpha$$

i hem d'acceptar la hipòtesi nul·la.

c) En el cas H_0: $\mu = 11$ contra H_1: $\mu < 11$ (unilateral), el valor crític satisfarà:

$$P(Z < z_\alpha) = 0{,}1$$

trobem que $z_\alpha = -1{,}28$. La regla de decisió és aquesta:

- Acceptarem H_0 si $z \geq z_\alpha$
- Rebutjarem H_0 si $z < z_\alpha$

Per tant, també acceptarem la hipòtesi nul·la.

I calculem el p-valor corresponent. La probabilitat de la cua de l'esquerra és aquesta:

$$P(Z < -0{,}21) = 0{,}4168 > \alpha$$

de manera que hem d'acceptar la hipòtesi nul·la.

Contrastos sobre la mitjana i sobre la proporció

En aquesta sessió estudiarem com dur a terme un contrast d'hipòtesis, primer sobre mitjanes de poblacions i després sobre proporcions.

El pas fonamental per a fer un contrast d'hipòtesis és determinar l'estadístic de contrast. Sabem que si tenim una mostra prou gran d'una variable aleatòria amb esperança k, aleshores un estadístic del tipus:

Una proporció es pot veure com la mitjana en una població binària.

$$\frac{\text{Mitjana mostral} - k}{\text{Error estàndard de la mitjana}}$$

és una observació d'una distribució normal estàndard. També sabem que en mostres petites, si les observacions provenen d'una distribució normal, aquest estadístic segueix o bé una distribució normal estàndard (si la variància és coneguda) o bé una t de Student (si la variància és desconeguda). Vegem com utilitzar aquests estadístics per a fer contrastos.

1. Contrastos sobre la mitjana

Donada una mostra $x_1, \ldots, x_n$ que prové d'una distribució normal $N(\mu,\sigma^2)$ suposem que volem fer un contrast sobre el valor de la mitjana μ.

Atenció

En aquesta sessió, per a resoldre un contrast, buscarem el p-valor i no calcularem el valor crític. Penseu, però, que podem resoldre els contrastos de les dues maneres.

La hipòtesi nul·la serà del tipus:

$$H_0\text{: } \mu = \mu_0$$

on μ_0 és una constant fixada. Podem tenir dos tipus d'hipòtesi alternativa:

- $H_1\text{: } \mu \neq \mu_0$ (bilateral)
- $H_1\text{: } \mu < \mu_0$ o $H_1\text{: } \mu > \mu_0$ (unilateral)

El pas següent consisteix a determinar l'estadístic de contrast. Distingirem dos casos, segons si coneixem la variància σ^2 o no la coneixem.

En una situació real difícilment coneixerem la variància.

1.1. Cas de la variància coneguda

Si la variància és coneguda, l'error estàndard de la mitjana es pot calcular com $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

La variable:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma}$$

sota la hipòtesi nul·la segueix una distribució normal estàndard.

Per tant, per a fer contrastos sobre la mitjana amb σ coneguda, l'estadístic de contrast és aquest:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

que es correspon, sota la hipòtesi nul·la, amb una observació d'una distribució normal estàndard.

Un cop calculat el valor observat de l'estadístic de contrast, hem de determinar el *p*-valor. Com ja hem vist, aquest depèn de la hipòtesi alternativa:

- Si H_1: $\mu \neq \mu_0$, aleshores (probabilitat de les dues cues):

$$p = P(|Z| > |z|) = P(Z > |z|) + P(Z < -|z|)$$

- Si H_1: $\mu < \mu_0$, aleshores (probabilitat de la cua de l'esquerra):

$$p = P(Z < z)$$

- Si H_1: $\mu > \mu_0$, aleshores (probabilitat de la cua de la dreta):

$$p = P(Z > z)$$

on recordem que Z correspon a una llei normal estàndard.

1.2. Cas de la variància desconeguda

Si la variància és desconeguda, per a determinar l'error estàndard de la mitjana, aproximem la desviació estàndard σ per la desviació estàndard mostral:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

En aquest cas, sota la hipòtesi nul·la, la variable:

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{s}$$

segueix una llei t de Student amb $n - 1$ graus de llibertat.

Per tant, per a fer contrastos sobre la mitjana amb σ desconeguda, l'estadístic de contrast és aquest:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

que es correspon, sota la hipòtesi nul·la, a una observació d'una t de Student amb $n - 1$ graus de llibertat.

Com abans, el darrer pas és el càlcul del p-valor associat al nostre valor observat de l'estadístic de contrast. En aquest cas:

- Si H_1: $\mu \neq \mu_0$, aleshores (probabilitat de les dues cues):

$$p = P(|t_{n-1}| > |t|) = P(t_{n-1} > |t|) + P(t_{n-1} < -|t|)$$

- Si H_1: $\mu < \mu_0$, aleshores (probabilitat de la cua de l'esquerra):

$$p = P(t_{n-1} < t)$$

- Si H_1: $\mu > \mu_0$, aleshores (probabilitat de la cua de la dreta):

$$p = P(t_{n-1} > t)$$

on recordem que t_{n-1} segueix una llei t de Student amb $n - 1$ graus de llibertat.

Exemple de contrast sobre la mitjana en cas de variància desconeguda

Es mesura l'amplada d'una mostra aleatòria de 64 fustes i s'obté una mitjana de 35,02 i una desviació estàndard mostral de 0,1224. Suposem que sabem que l'amplada de les fustes segueix una distribució normal. Volem contrastar la hipòtesi que la mitjana veritable és 35 amb un nivell de significació de $\alpha = 0{,}05$.

En aquest cas considerem les hipòtesis següents:

$$H_0: \mu = 35 \text{ contra } H_1: \mu \neq 35$$

Com que la variància és desconeguda, l'error estàndard és:

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}1224\sqrt{\frac{1}{64}} = 0{,}0153$$

i l'estadístic de contrast és:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{35{,}02 - 35}{0{,}0153} = 1{,}307$$

Com que correspon a una distribució t de Student amb 63 graus de llibertat i la hipòtesi alternativa és bilateral, el p-valor és (utilitzant el programari estadístic):

$$P(|t_{63}| > 1{,}307) = 2(1 - P(t_{63} \leq 1{,}307)) = 2(1 - 0{,}9020) = 0{,}1960$$

Per tant, hem d'acceptar la hipòtesi nul·la, la qual cosa vol dir que amb les dades que tenim no podem afirmar que la mitjana no sigui 35.

Si volguéssim resoldre el contrast utilitzant el valor crític, hauríem de determinar un valor $z_{\alpha/2}$ tal que:

$$P\left(|t_{63}| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}05$$

Si busquem aquest valor obtenim (per a calcular aquesta probabilitat cal utilitzar el programari estadístic):

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}9983$$

Com que 1,307 $\in$ (–1,9983; 1,9983), obtenim també que hem d'acceptar la hipòtesi nul·la.

1.3. Cas amb mostres no normals

Si no sabem si les mostres provenen d'una distribució normal podem fer també un contrast d'hipòtesi per la mitjana, sempre que tinguem una mostra de mida més gran de 30, $n > 30$ (el cas $n < 30$ amb mostres que no provenen d'una llei normal no s'estudia en aquesta sessió). Suposarem també que no en coneixem la variància.

En aquesta situació, pel teorema del límit central, sabem que podem aproximar la variable:

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{s}$$

a un distribució $N(0,1)$. A partir d'aquí podem acabar el test com en el cas del contrast sobre la mitjana amb variància coneguda.

Vegeu el contrast sobre la mitjana en el cas de la variància coneguda en la secció 1.1 d'aquesta sessió.

Exemple de contrast sobre la mitjana amb mostres no normals

En un laboratori es mesura el temps de vida (temps de funcionament fins que s'espatlla) d'un tipus de bombetes. L'experiment es repeteix 300 vegades i s'obté una mitjana mostral de 5,14 i una desviació típica mostral de 0,25 (les unitats són setmanes). Fem el contrast:

$$H_0 : \mu = 5 \text{ contra } H_1 : \mu \neq 5$$

Sabem que els temps de vida usualment no segueixen una distribució normal perquè els seus valors s'ajusten més bé a una exponencial. De totes maneres, com que tenim una mostra prou gran, podem aplicar el tipus de contrast exposat. L'error estàndard de la mitjana és aquest:

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}25\sqrt{\frac{1}{300}} = 0{,}0144$$

i l'estadístic de contrast:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{5{,}14 - 5}{0{,}0144} = 9{,}722$$

que segueix una normal estàndard. Tenim una hipòtesi bilateral, així que el p-valor és:

$$P(|Z| > 9{,}722) = 2P(Z > 9{,}722) = 0{,}000$$

i hem de rebutjar la hipòtesi nul·la, la qual cosa vol dir que estem segurs que el temps de vida esperat no és 5, sigui quin sigui el nivell de significació escollit 0,1, 0,05 o, fins i tot, 0,001.

1.4. Dades aparellades

Tots els contrastos que hem vist fins ara s'han plantejat utilitzant només una mostra. Podem utilitzar també aquestes mateixes tècniques quan tenim dues mostres amb dades aparellades.

Imagineu que volem estudiar si una estona de relaxació ajuda a millorar la productivitat dels treballadors. Podem fer aquest estudi de dues maneres:

1) Podem agafar una mostra de treballadors que han fet relaxació i una mostra de treballadors que no n'han fet i comparar-ne la productivitat dels dos grups (dades no aparellades).

2) Podem agafar un únic grup de treballadors, mesurar-ne la productivitat sense haver fet relaxació i tornar-la a mesurar al cap d'alguns dies durant els que han fet l'estona de relaxació diària. Aleshores, podem estudiar la variació de la productivitat (dades aparellades).

Dades aparellades de mostres normals

Si les dades aparellades provenen de mostres normals, en fer la diferència tornem a obtenir dades que provenen d'una llei normal.

Fixeu-vos que en el segon cas utilitzem els mateixos individus per a obtenir les dues mostres, de manera que si en fem la diferència individu a individu, podem passar a estudiar una única mostra que serà l'increment de la productivitat.

Una **mostra de dades aparellades** és un conjunt d'observacions de dues variables diferents observades en els mateixos individus, de manera que per cada individu tenim dues observacions.

Avantatge de les dades aparellades

Les dades aparellades tenen l'avantatge que eliminen la variabilitat a causa del fet d'utilitzar individus diferents en les dues mostres.

Ara podem aplicar els contrastos vistos en els subapartats anteriors a la diferència de les dues mostres.

Exemple de contrast amb dades aparellades

Després d'un tractament de 6 mesos, la bilirubina total de 4 malalts va presentar la variació següent: (mesures en mg/ml):

	Inicial	Final
Individu 1	2,3	2,2
Individu 2	2,0	1,9
Individu 3	1,8	1,8
Individu 4	2,8	2,4

Suposem normalitat i volem estudiar amb un nivell de significació $\alpha = 0{,}01$ si es pot acceptar que la bilirubina ha disminuït a causa d'aquest tractament. Com que són proves que s'han fet sobre els mateixos malalts podem dir que es tracta de mostres aparellades.

Primer convertim les dades de les dues mostres en les d'una sola mostra resultat de la diferència:

Diferència
0,1
0,1
0
0,4

Per a aquestes dades calculem $\bar{x} = 0{,}15$ i $s = 0{,}1732$. Formulem les hipòtesis de contrast: considerarem que la hipòtesi nul·la és aquella en què no hi ha hagut una disminució de la bilirubina, mentre que l'alternativa considera que sí que n'hi ha hagut (així, si rebutgem la hipòtesi nul·la, estarem força segurs que el tractament fa disminuir la bilirubina). Per tant, tenim el contrast següent:

$$H_0: \mu = 0 \text{ contra } H_1: \mu > 0$$

Com que la variància és desconeguda, l'error estàndard de la mitjana és aquest:

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}1732\sqrt{\frac{1}{4}} = 0{,}0866$$

i l'estadístic de contrast:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{0{,}15}{0{,}0866} = 1{,}732$$

Com que correspon a una distribució t de Student amb 3 graus de llibertat (la mida de la mostra és 4) i la hipòtesi alternativa és unilateral, el p-valor és el següent:

$$P(t_3 > 1{,}732) = 1 - P(t_3 \leq 1{,}732) = 1 - 0{,}9092 = 0{,}0908$$

Per tant, hem d'acceptar la hipòtesi nul·la, i això vol dir que amb les dades que tenim no podem afirmar que el tractament fa disminuir la bilirubina.

2. Contrastos sobre la proporció (mostres grans)

Considerem ara que tenim una mostra $x_1, ..., x_n$, que prové d'una distribució de Bernoulli de paràmetre p i volem fer un contrast sobre el paràmetre. Necessitarem també que la mida de la mostra sigui prou gran, com a mínim $n > 30$.

El paràmetre *p*

Recordeu que moltes vegades p indica la probabilitat d'èxit en un experiment.

La hipòtesi nul·la serà del tipus:

$$H_0: p = p_0$$

on p_0 és una constant fixada. Podem tenir dos tipus d'hipòtesi alternativa:

- $H_1: p \neq p_0$ (bilateral)
- $H_1: p < p_0$ o $H_1: p > p_0$ (unilateral)

Un cop establertes les hipòtesis, cal determinar l'estadístic de contrast.

En aquest cas, la mitjana mostral correspon a la freqüència, que indiquem per $\hat{p}$. Com que la variància d'una distribució de Bernoulli de paràmetre p_0 és $p_0(1-p_0)$, l'error estàndard de la mitjana es pot calcular a partir de l'expressió següent:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{p_o(1-p_0)}{n}}$$

Pel teorema del límit central, l'estadístic:

$$\frac{\hat{p}-p_o}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\hat{p}-p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$$

es pot aproximar per una distribució normal estàndard.

Per tant, en el cas de les proporcions, l'estadístic de contrast és aquest:

$$\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

que segueix una distribució normal estàndard sota la hipòtesi nul·la.

El càlcul del *p*-valor es fa a partir d'aquí igual com s'ha discutit en el cas de la variància coneguda.

Vegeu el càlcul del *p*-valor fet en la secció 1.1 d'aquesta sessió.

Exemple de càlcul del *p*-valor sobre proporcions

En una enquesta feta a 1.000 barcelonins, 350 dels enquestats manifestava practicar alguna activitat esportiva. Podem considerar que una tercera part dels barcelonins practica alguna activitat esportiva contra que sigui menys d'una tercera part els qui practiquen activitat esportiva, amb un nivell de significació de $\alpha = 0{,}1$?

Fixeu-vos que volem fer el contrast següent:

$$H_0\text{: } p = 0{,}33 \text{ contra } H_1\text{: } p < 0{,}33$$

ja que en la hipòtesi alternativa ens interessa verificar només si la proporció que practica una activitat esportiva és inferior al 33%.

Calculem ara l'error estàndard de la proporció:

$$\sqrt{\frac{0{,}33(1-0{,}33)}{1.000}} = 0{,}0149$$

Com que la freqüència observada és aquesta:

$$\hat{p} = \frac{350}{1.000} = 0{,}35$$

el valor de l'estadístic de contrast observat és aquest:

$$\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0{,}35-0{,}33}{0{,}0148} = 1{,}345$$

I si Z és una normal estàndard, el p-valor corresponent és aquest:

$$P(Z < 1{,}345) = 1 - P(Z \geq 1{,}345) = 1 - 0{,}0901 = 0{,}9099$$

Com que aquest valor és més gran que α, podem acceptar la hipòtesi nul·la i dir que una tercera part dels barcelonins fan alguna activitat esportiva.

3. Resum

En aquesta sessió hem après a fer contrastos d'hipòtesis per a la mitjana i per a proporcions. Per a la mitjana, hem distingit segons si les dades provenen o no d'una distribució normal i segons si coneixem el valor de la variància poblacional o no el coneixem.

Exercicis

1. Per a estudiar els diàmetres d'uns eixos agafem una mostra de mida 100. La mitjana mostral obtinguda és de 38 i la variància mostral, 4. Podem dir amb un nivell de significació del 0,05 que la mitjana dels diàmetres dels eixos és de 40?

2. Les qualificacions dels exàmens d'estadística i d'àlgebra d'un grup d'estudiants matriculats a les dues assignatures han estat aquestes:

Estudiant	Estadística	Àlgebra
1	7,6	7,1
2	4,8	3,0
3	5,1	4,2
4	7,5	5,2
5	4,3	4,8
6	4,1	3,6
7	5,5	3,9
8	8,3	1,1
9	6,9	5,8

Estudis dels resultats de semestres anteriors han demostrat que les notes segueixen una distribució normal.

a) Contrasteu la hipòtesi nul·la que la mitjana de les notes d'estadística sigui 5,5 contra que sigui més petita que 5,5.

b) Contrasteu la hipòtesi nul·la que les notes d'estadística i d'àlgebra tinguin la mateixa mitjana contra que siguin diferents.

3. Comprem una màquina que fabrica xips que, segons el fabricant, com a màxim fabrica un 1% de xips defectuosos. Després de fabricar 300 xips els revisem i descobrim que n'hi ha 5 de defectuosos. Contrasteu si podem dir que el percentatge de xips defectuosos és, com a molt, de l'1% amb un nivell de significació $\alpha = 0{,}1$.

Solucionari

1. Volem fer el contrast següent:

$$H_0\text{: } \mu = 40 \text{ contra } H_1\text{: } \mu \neq 40$$

En principi, no sabem si les dades provenen d'una distribució normal, però com que la mostra és força gran (> 30), podem fer un contrast. L'error estàndard de la mitjana és aquest:

$$\frac{2}{\sqrt{100}} = 0{,}2$$

i, per tant, l'estadístic de contrast val:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{38 - 40}{0,2} = -10$$

El p-valor corresponent per al nostre contrast bilateral és (Z indica una normal estàndard):

$$P(|Z| > 10) = 2P(Z > 10) \cong 0,000$$

de manera que hem de rebutjar la hipòtesi nul·la, és a dir, estem segurs que la mitjana no és 40.

2.

a) En aquest cas considerem el contrast següent:

$$H_0\text{: } \mu = 5,5 \text{ contra } H_1\text{: } \mu < 5,5$$

A partir de les dades calculem la mitjana i la variància mostral:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 6,01\ ;\ s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 1,57$$

Així, l'error estàndard és aquest:

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = 1,57\sqrt{\frac{1}{9}} = 0,525$$

i l'estadístic de contrast:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{6,01 - 5,5}{0,525} = 0,971$$

Les dades provenien d'una distribució normal i la variància és desconeguda; per tant, sota la hipòtesi nul·la, l'estadístic de contrast correspon a una distribució t de Student amb 8 graus de llibertat. Així, el p-valor és aquest:

$$P(t_8 < 0,971) = 0,82$$

Per tant, hem d'acceptar la hipòtesi nul·la.

b) Com que tenim dades aparellades, primer de tot calculem les diferències:

Estudiant	Estadística	Àlgebra	Diferència
1	7,6	7,1	0,5
2	4,8	3,0	1,8
3	5,1	4,2	0,9
4	7,5	5,2	2,3
5	4,3	4,8	–0,5
6	4,1	3,6	0,5
7	5,5	3,9	1,6
8	8,3	1,1	7,2
9	6,9	5,8	1,1

A partir d'aquí, podem fer un contrast com el de l'apartat **a**, tenint en compte que ara volem fer el contrast següent:

$$H_0\colon \mu = 0 \text{ contra } H_1\colon \mu \neq 0$$

Calculem la mitjana i la desviació típica mostral:

$$\bar{x} = 1{,}71 \quad s = 2{,}21$$

L'error estàndard és aquest:

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}21\sqrt{\frac{1}{9}} = 0{,}73$$

i l'estadístic de contrast:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{1{,}71}{0{,}73} = 2{,}34$$

Com en l'apartat **a**, l'estadístic de contrast correspon a una distribució t de Student amb 8 graus de llibertat. Ara el p-valor és aquest:

$$P(|t_8| > 2{,}34) = 2(1 - P(t_8 \leq 2{,}34)) = 2(1 - 0{,}9763) = 0{,}0474$$

Per tant, amb un nivell de significació de 0,05, hem de rebutjar la hipòtesi nul·la i, en conseqüència, podem assegurar que les mitjanes són diferents. En canvi, si agaféssim un nivell de 0,01, l'hauríem d'acceptar, és a dir, amb aquest nivell encara no tenim prou evidència per a dir que les dues mitjanes són diferents.

3. Volem fer un contrast per a una proporció amb una mostra bastant gran. Si diem p a la proporció de xips defectuosos, plantegem el contrast següent:

$$H_0: p = 0{,}01 \text{ contra } H_1: p > 0{,}01$$

Ara calculem l'error estàndard:

$$\sqrt{\frac{0{,}01(1-0{,}01)}{300}} = 0{,}0057$$

Com que la proporció poblacional és aquesta:

$$\hat{p} = \frac{5}{300} = 0{,}0167$$

el valor observat de l'estadístic de contrast és aquest:

$$\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0{,}0167-0{,}01}{0{,}0057} = 1{,}1754$$

I si Z és una normal estàndard, el p-valor corresponent és aquest:

$$P(Z > 1{,}1754) = 1 - P(Z \leq 1{,}1754) = 1 - 0{,}8801 = 0{,}1199$$

Per tant, com que és més gran que α, podem acceptar la hipòtesi nul·la i dir que la proporció de xips defectuosos és de l'1%.