Probabilitat

Àngel J. Gil Estallo

P08/05057/02304

Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

Índex

Sessió 4

Introducció a la probabilitat

1. Introducció

Comencem per introduir alguns exemples i preguntes que ens puguin guiar en el desenvolupament posterior de la teoria; per a fer-ho, ens basarem en un exemple ben senzill: l'estudi del comportament d'un dau.

Llençar un dau i observar quin és el nombre de punts que apareixen a la cara superior és el que s'anomena un **experiment aleatori**, ja que, si bé sabem quins són els possibles resultats (que surtin 1 o 2 o 3 o 4 o 5 o 6 punts), no podem saber quin serà el nombre de punts que sortiran en cada tirada particular. El conjunt de tots els possibles resultats s'anomena **espai mostral** i s'acostuma a designar per la lletra Ω.

Experiment aleatori

Segur que quan tirem sempre sortirà un nombre de punts menor o igual que 6, però no podem dir exactament quants punts hi trobarem en cada tirada.

Experiment aleatori és aquell que té diferents resultats possibles dels quals no tenim certesa sobre quin es produirà realment. A més, cal que l'experiment es pugui repetir en condicions idèntiques tantes vegades com sigui necessari.

Espai mostral és el conjunt de resultats possibles que podem obtenir en realitzar un experiment aleatori. Es designa per la lletra Ω.

Ω = espai mostral.
ω_i = resultat possible.

A partir d'aquest moment, i si no es diu el contrari, considerarem que l'espai mostral és finit i que tenim k resultats possibles: $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$.

És important fixar des del primer moment quin és l'espai mostral associat a l'experiment aleatori.

Exemples d'espai mostral

En el cas del dau, l'espai mostral és:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Veure què surt si llancem una moneda a l'aire és un experiment aleatori (els resultats possibles són cara o creu, però a cada tirada no podem dir quin dels dos sortirà) amb espai mostral:

$$\Omega = \{\text{cara, creu}\}$$

2. Esdeveniments o successos aleatoris

Un **esdeveniment** o **succés aleatori** és qualsevol subconjunt de l'espai mostral. És a dir, qualsevol subconjunt del conjunt de resultats d'un experiment aleatori.

Denotarem els esdeveniments per lletres majúscules A, B…

Ens podem preguntar ara quins són els esdeveniments més simples de tots: evidentment, seran aquells que consten d'un únic resultat; són els anomenats **esdeveniments elementals**.

Identificarem els resultats de l'experiment aleatori amb els **esdeveniments elementals** que són els esdeveniments formats per un únic resultat.

En general, els esdeveniments contindran més d'un resultat, i moltes vegades ens interessarà conèixer el nombre de resultats que contenen.

Notació

Card( ) és la funció **cardinal** d'un conjunt.

En altres textos Card(A) es denota per #A o per $n(A)$.

Card(A) denotarà el nombre de resultats que conté l'esdeveniment A.

Així, doncs, després de realitzar un experiment aleatori tenim esdeveniments de dos tipus:

a) Esdeveniments elementals: són estrictament els que podem obtenir com a resultat de l'experiment.

b) Esdeveniments: són agrupacions d'un o més resultats. Sovint podrem donar una descripció de l'esdeveniment a partir d'una característica comuna a tots els resultats de l'esdeveniment (del tipus "ser parell", "ser primer"...).

L'esdeveniment "ser parell"

Els daus no saben si els nombres que surten són parells o no. Tampoc no porten escrita la paraula *parell*. El fet que el nombre que surt en un dau sigui parell es correspon a la descripció que fem d'una certa situació que no es correspon a un únic valor del dau. Per tant, ser parell no és un resultat!

Així, doncs, si l'esdeveniment conté un únic resultat direm que és un esdeveniment *elemental*; si en conté més d'un, direm simplement que és un esdeveniment.

Exemples de resultats i esdeveniments

a) En el cas del dau, el conjunt de possibles resultats (espai mostral) és $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i podem tenir, entre d'altres, els successos següents:

- B = "el nombre de punts és parell", que correspon a l'agrupació dels resultats $\{2, 4, 6\}$; és a dir, en el fons $B = \{2, 4, 6\}$. Evidentment, Card(B) = 3.
- $C = \{3, 4, 5, 6\}$. En aquest cas, el succés C correspon a "treure un valor superior o igual a 3"; Card(C) = 4.
- $D = \{1, 6\}$. D és un succés format pels resultats 1 i 6.
- $F = \{3\}$. F és el succés que correspon a "treure un 3".

b) "Treure un nombre major que 5" és un esdeveniment elemental o resultat, ja que es correspon a treure un 6. "Treure un nombre parell" no és un succés elemental, ja que no es correspon amb un únic valor concret del dau.

Els **resultats favorables** a un succés són els resultats que conté. Card(A) és el nombre de resultats favorables a A.

A continuació, definirem dos successos molt especials: el succés segur i l'impossible.

2.1. El succés segur

El **succés segur** és el que està format per tots els resultats possibles; és a dir, és el mateix espai mostral Ω.

Exemple d'un succés segur

Tirem un dau i considerem el succés "treure un nombre menor que 10". Això segur que sempre passa!

El succés segur conté tots els resultats; així, passi el que passi, "segur" que qualsevol resultat pertany al succés "segur".

2.2. El succés impossible

El **succés impossible**, denotat per ∅ (**conjunt buit**), és el succés que no ocorre mai. Evidentment, Card(∅) = 0.

Exemple de succés imposible

Tirem un dau i considerem el succés "treure un 26". Això segur que no passa mai! Un altre exemple de succés impossible és "treure un nombre parell i múltiple de 5".

3. Operacions amb successos

Acabem de veure que podem determinar un succés per mitjà del conjunt de resultats possibles d'un experiment aleatori. Evidentment, la descripció pot ser molt complexa i de vegades interessa barrejar o operar certs successos per descriure situacions més complicades. També hem vist com un esdeveniment és, de fet, el conjunt dels resultats que conté: per tant, totes les propietats dels conjunts i de les operacions amb conjunts són vàlides per a successos.

A continuació, descriurem diverses operacions conjuntives aplicades als successos aleatoris; en concret, parlarem de la unió, de la intersecció i del complementari de successos.

3.1. Intersecció de successos i successos incompatibles

Suposem que tenim dos successos A i B:

El succés $A \cap B$ (llegit *A intersecció B*) està format per aquells resultats favorables a A i a B simultàniament.

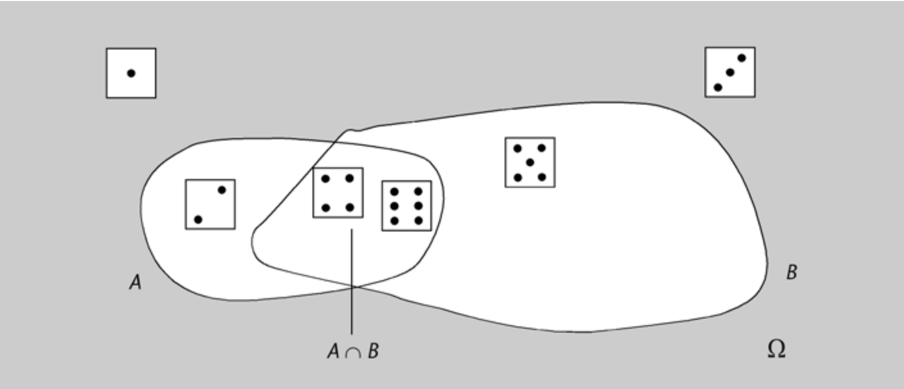
És a dir, la intersecció dels successos A i B és un succés menor que A i que B, en què només apareixen els resultats que són a A i també a B. Per a il·lustrar gràficament aquestes operacions, ens serà útil utilitzar els ben coneguts diagrames de Venn.

Nombre d'elements de $A \cap B$

No hi ha una fórmula que ens digui el nombre d'elements de $A \cap B$ a partir dels elements de A i de B. En la majoria dels casos haurem de mirar directament quants resultats hi ha a $A \cap B$. El que és segur és que $\text{Card}(A \cap B) \leq \text{Card}(A)$ i $\text{Card}(A \cap B) \leq \text{Card}(B)$.

Exemple d'intersecció de successos

Si el succés A és "treure un nombre parell" i el succés B és "treure un nombre major que 3", aleshores $A = \{2, 4, 6\}$ i $B = \{4, 5, 6\}$ i, evidentment, $A \cap B$ = {"treure un nombre parell major que 3"}= {4, 6}, que són els únics resultats que estan simultàniament en A i en B. Gràficament:



3.1.1. Successos incompatibles

Més endavant serà molt important saber si dos successos tenen resultats en comú o no; això porta a la definició de successos incompatibles.

Dos esdeveniments són incompatibles si no tenen cap resultat en comú, és a dir, si $A \cap B$ és el succés impossible. Dit d'una altra manera, A i B són incompatibles si són conjunts disjunts, és a dir, si $A \cap B = \varnothing$. En aquest cas, $\text{Card}(A \cap B) = 0$.

Exemple de successos incompatibles

Els successos "treure un nombre menor que 2" i "treure un nombre parell major o igual que 4" són successos incompatibles.

3.2. Unió de successos

Suposem que tenim dos successos A i B. El succés $A \cup B$ (llegit A **unió** B) està format per aquells resultats favorables a A, o a B, o a tots dos alhora.

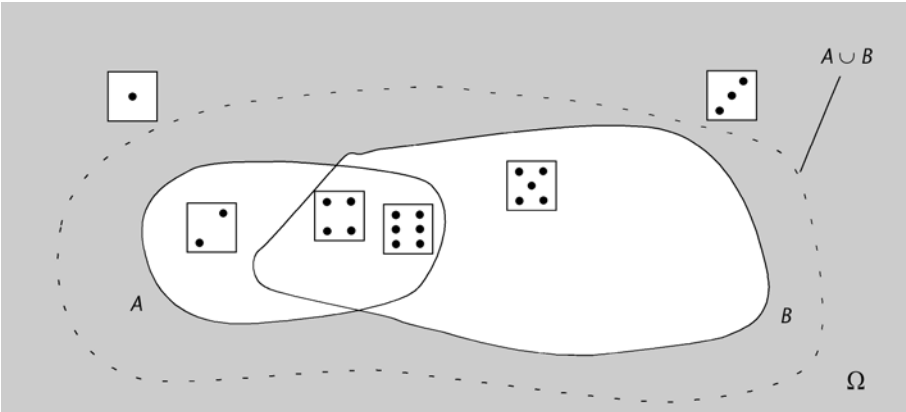
És a dir, unir els successos A i B serveix per a crear un succés més gran que conté els resultats de A més els resultats de B. És fàcil veure que:

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Observeu que a Card(A) + Card(B) comptem dos cops els elements de la intersecció (un cop per pertànyer a A i un cop per pertànyer a B); a Card(A) + + Card(B) – Card($A \cap B$), cada element de la unió està comptat un únic cop.

Exemple d'unió de successos

Si el succés A és "treure un nombre parell" i el succés B és "treure un nombre major que 3", aleshores $A = \{2, 4, 6\}$ i $B = \{4, 5, 6\}$ i, $A \cup B$ = "treure un nombre parell o major que 3" = $\{2, 4, 5, 6\}$ i $A \cap B = \{4, 6\}$. Així, Card($A \cup B$) = 4, que coincideix amb Card(A) + + Card(B) – Card($A \cap B$), ja que Card(A) = 3, Card(B) = 3 i Card($A \cap B$) = 2. Gràficament:



3.3. Complementari d'un succés

Suposem que estudiem un succés A.

El succés A^C (llegit **complementari** de A) està format per aquells resultats que no són favorables a A.

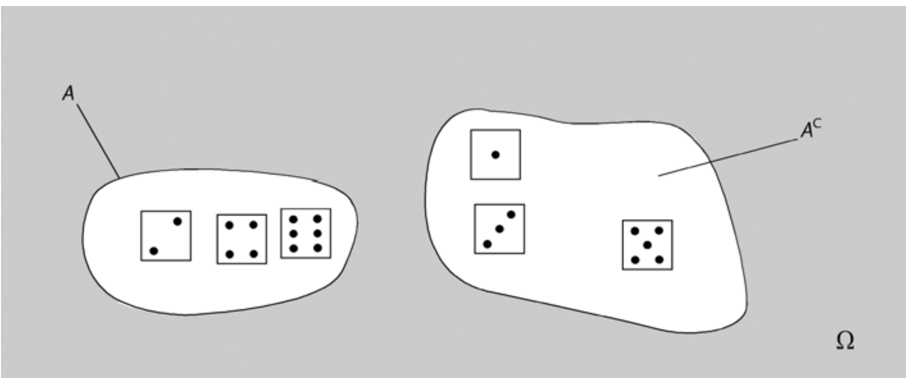
Notació

De vegades s'escriu $\bar{A}$ o $C(A)$ en lloc de A^C.

És a dir, el complementari del succés A és el succés que únicament conté els resultats que no són a A.

Exemple de succés complementari

Si $B = \{1, 2, 5\}$, aleshores $B^c = \{3, 4, 6\}$, precisament els resultats que no són a B. Si el succés és A = "treure un nombre parell", aleshores $A = \{2, 4, 6\}$ i $A^C = \{1, 3, 5\}$ que es correspon, com calia esperar, amb els nombres senars. Gràficament:



Evidentment, el nombre d'elements de A^C és el nombre de possibles resultats menys el nombre d'elements de A, és a dir:

$$\text{Card}(A^C) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(A)$$

Complementari i incompatibilitat

A i A^c sempre són successos disjunts, ja que no pot ser que un resultat sigui a A i fora de A simultàniament. Per exemple, un nombre no pot ser parell i imparell simultàniament.

3.4. Taules de successos

De vegades ens pot ser útil fer una taula en què es vegin clarament els resultats que pertanyen a cada succés i a certes operacions amb els successos. Per exemple, en el cas del dau i si el succés A és "treure un nombre parell" i el succés B és "treure un nombre major que 3", aleshores $A = \{2, 4, 6\}$ i $B = \{4, 5, 6\}$, podem construir una taula com aquesta, en què anem marcant quin resultat pertany a cada succés:

Possible resultat: Valor del dau	**És de A?**	**És de B?**	**És de $A \cup B$?**	**És de $A \cap B$?**	**És de A^C?**
1	No	No	No	No	Sí
2	Sí	No	Sí	No	No
3	No	No	No	No	Sí
4	Sí	Sí	Sí	Sí	No
5	No	Sí	Si	No	Sí
6	Sí	Sí	Sí	Si	No

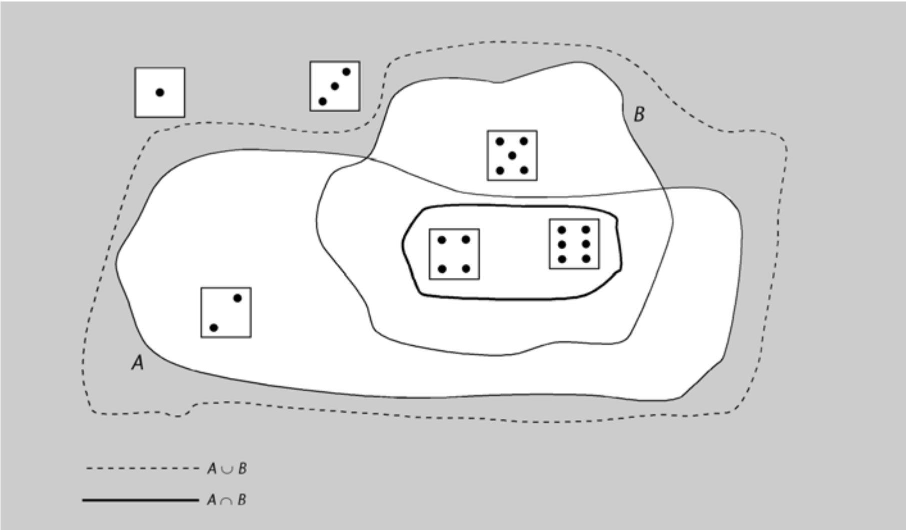
En què, com veieu, per a tenir...

- "Sí" a la pregunta "És de $A \cup B$?", hem de tenir com a mínim un "Sí" (o bé a "És de A?" o bé a "És de B?").

- "Sí" a la pregunta "És de $A \cap B$?", hem de tenir un "Sí" a "És de A?" i també un "Sí" a "És de B?".

- "Sí" a la pregunta "És de A^C?", hem de tenir un "No" a "És de A?".

Podem visualitzar el contingut de la taula mitjançant un gràfic, en què podem veure com el succés $A \cup B$ engloba els resultats de A i els de B, mentre que el succés $A \cap B$ conté exclusivament els resultats que són a A i també a B.



***A* és “treure un nombre parell” i el succés *B* és “treure un nombre major que 3”.**

4. Resum

En aquesta sessió hem introduït el concepte d’experiment aleatori, a partir del qual es desenvoluparà la teoria de la probabilitat. Tot experiment aleatori hi té associat el conjunt dels seus resultats, anomenat *espai mostral*. Els resultats es poden agrupar en successos (també dits *esdeveniments*), que s’anomenen *elementals* si contenen un únic resultat. S’insisteix en la noció de resultat favorable a un succés (de fet, són els resultats que en formen part).

Després es recorden les operacions d’unió, intersecció i complementari de conjunts, aplicades al cas dels experiments aleatoris. Es tracten dos tipus particulars de successos: el **succés segur** i el **succés impossible**. A partir d’aquest últim es defineixen els **successos incompatibles**, que són aquells en què la seva intersecció és buida (és a dir, la seva intersecció és el succés impossible). Per a afavorir la visualització dels successos i les operacions que es poden realitzar sobre aquests, s’utilitzen els **diagrames de Venn** i les **taules de successos**.

Exercicis

1. Suposem que hem examinat el sistema operatiu i el processador de deu ordinadors de la nostra empresa. Els resultats han estat els següents:

Ordinador	Sistema operatiu	Processador
1	Doors95	Lenteron
2	Doors98	FortiumII
3	Doors95	Lenteron
4	Doors2000	FortiumII
5	Doors95	Lenteron
6	Doors98	Lenteron
7	Doors95	Lenteron
8	Doors98	FortiumII
9	Doors95	FortiumII
10	Doors2000	FortiumII

Considerem els successos A i B, que són:

- A = "el sistema operatiu és Doors98"
- B = "el processador és FortiumII"

a) Interpreteu la situació en termes d'experiments aleatoris i determineu l'espai mostral corresponent.
b) Determineu quins resultats formen els successos $A \cup B$, $A \cap B$, A^c, B^c, $A^C \cap B$, $A^C \cup B$ i doneu una descripció de cadascun d'aquests.

2. Tirem un dau dos cops:
a) Calculeu l'espai mostral de l'experiment i el nombre de resultats possibles.
b) Determineu quins són els successos següents i el nombre de resultats favorables a cadascun d'aquests:

- A = "les dues tirades surt el mateix nombre"
- B = "la suma dels dos nombres és major que 7"
- $A \cap B$, $A \cup B$, B^C

Solucionari

1.
L'experiment aleatori consisteix a escollir un ordinador a l'atzar i, per tant, cadascun dels deu ordinadors és un resultat possible. És a dir, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, si suposem que tenim els ordinadors numerats de l'1 al 10.

Podem construir la taula de successos següent:

Ordinador	És de A?	És de B?	És de $A \cup B$	És de $A \cap B$	És de A^c?	És de B^c?	És de $A^c \cap B$?	És de $A^c \cup B$?
1	No	No	No	No	Sí	Sí	No	Sí
2	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No	No	Sí
3	No	No	No	No	Sí	Sí	No	Sí
4	No	SÍ	Sí	No	Sí	No	Sí	Sí
5	No	No	No	No	Sí	Sí	No	Sí
6	Sí	No	Sí	No	No	Sí	No	No
7	No	No	No	No	Sí	Sí	No	Sí
8	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No	No	Sí
9	No	SÍ	Sí	No	Sí	No	Sí	Sí
10	No	SÍ	Sí	No	Sí	No	Sí	Sí

I també podem donar una descripció de cadascun dels successos:

a) $A \cup B$ = "el sistema és Doors98 o té FortiumII" = {2, 4, 6, 8, 9, 10}

b) $A \cap B$ = "el sistema és Doors98 i té FortiumII" = {2, 8}

c) A^c = "el sistema no és Doors98" = {1, 3, 4, 5, 7, 9, 10} (en aquest cas, el sistema serà o Doors95 o Doors2000)

d) B^c = "no tenir FortiumII" = {1, 3, 5, 6, 7} (en aquest cas, serà tenir Lenteron)

e) $A^c \cap B$ = "el sistema no és Doors98 i té FortiumII" = {4, 9, 10}; per tant, serà Doors95 o Doors2000 amb FortiumII.

f) $A^c \cup B$ = "el sistema no és Doors98 o té FortiumII" = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10}; per tant, serà Doors95 o Doors2000 o tindrà FortiumII .

2.

L'espai mostral es pot distribuir en forma de taula en què la fila representa el valor de la primera tirada i la columna, el valor de la segona tirada.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Per tant, hi ha 36 resultats possibles, és a dir, Card(Ω) = 36.

Els successos favorables a A són:

$$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

i Card(A) = 6.

Els successos favorables a B són:

$$\{(2,6), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,3), (5,4),\\ (5,5), (5,6), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

i, per tant, Card(B) = 15.

Inspeccionant els successos A i B tenim que $A \cap B = \{(4,4), (5,5), (6,6)\}$ i Card($A \cap B$) = 3. Ara tenim que:

$$A \cup B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,6), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5),\\ (4,6), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

i Card($A \cup B$) = 18, també podem calcular indirectament:

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) = 6 + 15 - 3 = 18$$

$$B^C = \{(1,1), (1,2),(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1),(2,2), (2,3), (2,4),\\ (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (6,1)\}$$

que, evidentment, corresponen al cas que la suma dels daus és menor o igual que 7; en total, Card(B^C) = 21, nombre que també es pot calcular fent:

$$\text{Card}\ (B^C) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(B) = 36 - 15 = 21$$

Combinatòria i tècniques de recompte

En l'estudi d'un experiment aleatori és important comptar els resultats que formen part d'un cert succés i també comptar els possibles resultats que se'n poden obtenir en realitzar experiment. En aquesta sessió recordarem breument algunes tècniques bàsiques de combinatòria per tal de poder tractar les situacions més comunes. En concret treballarem:

1) La regla del producte

2) Les variacions

3) Les permutacions

4) Les combinacions i els nombres combinatoris.

En general, es tractarà de, donats uns quants objectes, construir agrupacions utilitzant només aquests objectes i tenint en compte els aspectes següents:

1) S'han d'agrupar tots els objectes disponibles o només uns quants d'aquests?

2) Podem repetir els objectes en les agrupacions o bé en les agrupacions els objectes han de ser tots diferents?

3) Importa l'ordre? És a dir, interessa considerar les diferents possibilitats d'ordenació dins de cada agrupació o són indiferents?

Segons quina sigui la resposta d'aquestes preguntes, haurem de fer servir alguna de les tècniques que comentem a continuació.

1. La regla del producte

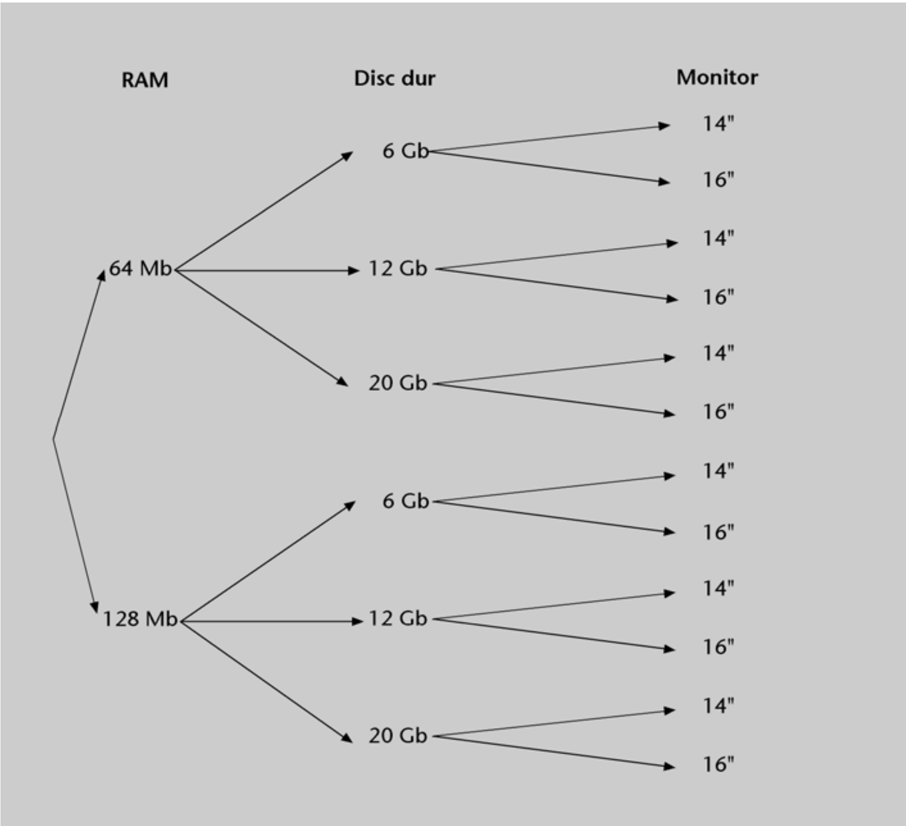
En aquesta secció enunciarem una regla general de molta utilitat en molts casos.

Per a determinar el total de possibilitats que tenim si hem d'efectuar una seqüència de tries successives, cal multiplicar el nombre de possibilitats de la primera tria pel nombre de possibilitats de la segona tria, i així successivament.

Aquests processos en què fem tries successives es poden representar fàcilment en forma d'arbres, en què de cada node surten tantes branques com possibilitats tenim, tal com veurem en l'exemple següent.

Exemple d'aplicació de la regla del producte

La nostra empresa munta ordinadors i els clients poden escollir algunes de les característiques de l'equip: concretament, poden escollir entre 64 o 128 Mb de memòria RAM, disc dur de 6, 12 o 20 Gb i pantalla de 14 o de 16 polzades, opcions que es poden barrejar de totes les maneres possibles. Quants models diferents d'ordinador podem oferir als nostres clients? Mitjançant un diagrama d'arbre podem disposar fàcilment de totes les configuracions possibles.



Es veu clarament que en total podem oferir $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ configuracions diferents en els nostres equips.

2. Variacions

Suposem que tenim N objectes i ens demanen que n'escollim k, de manera que no n'hi hagi dos de repetits i que qualsevol canvi en l'ordenació doni lloc a un altre grup diferent: de quantes maneres ho podem fer?

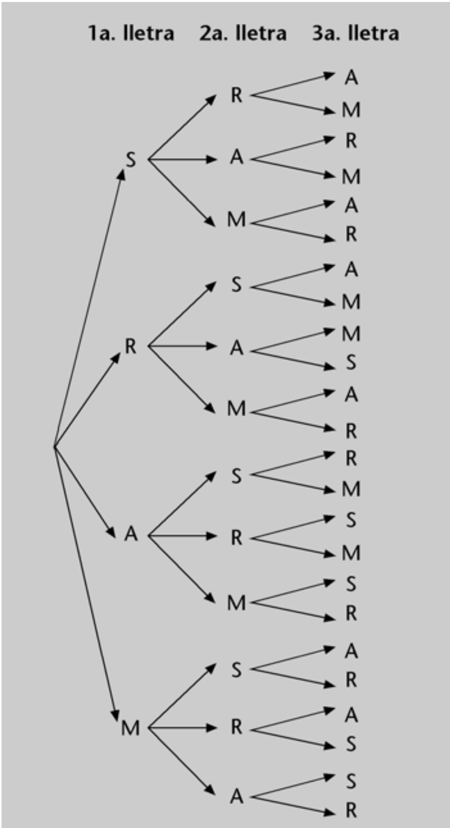
Característiques de les variacions

En les variacions no cal que agrupem tots els objectes de cop, no podem repetir els objectes i, a més, importa l'ordre.

Cadascuna de les maneres en què podem escollir i ordenar k elements d'entre N donats –sense repetir-ne cap– és una de les **variacions** dels N elements agafats de k en k.

Variacions de les lletres de la paraula *SRAM*

Suposem que volem considerar totes les possibles paraules (en el sentit de seqüències de lletres, encara que no tinguin sentit!) de tres lletres que es poden formar usant únicament lletres de la paraula *SRAM* (per tant, $N = 4$). Ho farem mitjançant un arbre en què és veu que a cada pas tinc una possibilitat d'elecció menys i que necessito tres passos per a construir els subconjunts ordenats de tres elements. Observeu que, de fet, és com si escollim tres lletres de la paraula *SRAM* i després les ordenem de totes les maneres possibles, ja que ordenacions diferents donen lloc a "paraules" diferents.



Observem com en el primer pas tenim $N = 4$ possibilitats d'elecció, en el segon $N - 1 = 3$ i en el tercer $N - 2 = 2$; en total, tinc $N(N - 1)(N - 2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ paraules diferents.

Observem que hem de fer k tries i que a cada tria tinc una possibilitat menys que en la anterior. *A*plicant la regla del producte, podem fàcilment saber el nombre total de possibles agrupacions.

El **nombre de les variacions** de N elements agafats de k en k s'obté fent el producte de k factors a partir de N, restant cada cop una unitat:

$$N(N-1)\ldots(N-k+1) = \frac{N!}{(N-k)!}$$

(on hi ha k factors decreixents a partir de N).

Exemple

La revista *PCUniverse* ens envia una llista de vint-i-tres portàtils i ens demana que retornem la llista dels que creiem que són els cinc millors portàtils de la llista, ordenada en la forma primer, segon, tercer, quart i cinquè. En aquest cas, hem d'ordenar $5(= k)$ portàtils com a millors portàtils entre $23(= N)$ possibles i, per tant, tinc:

$N(N - 1) \ldots (N - 5 + 1) = 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 = 4.037.880$ possibles respostes diferents.

2.1. Variacions amb repetició

Si ens trobem en la situació descrita per les variacions, però amb la particularitat que es poden repetir els objectes tantes vegades com calgui, ens trobarem amb un problema de **variacions amb repetició**. La diferència amb les variacions normals és que a cada tria podem tornar a escollir entre tots els objectes inicials (es poden repetir).

El **nombre de les variacions amb repetició** de N elements agafats de k en k s'obté fent el producte de k factors iguals a N, és a dir, és igual a:

$$N^k$$

Característiques de les variacions amb repetició

En les variacions amb repetició no cal que agrupem tots els objectes de cop, podem repetir els objectes i, a més, importa l'ordre.

Exemple de variacions amb repetició

Quants caràcters diferents es poden codificar amb cadenes de vuit zeros i vuit uns? Tinc dos objectes (0 i 1), els hem d'agafar vuit vegades i podem repetir el 0 i l'1 tantes vegades com convingui; com que tinc vuit tries i cadascuna d'aquestes amb dues possibilitats, el nombre total és 2^8. Fixem-nos que les cadenes 01000000 i 1000000 són diferents (codifiquen caràcters diferents) i, per tant, importa l'ordre.

3. Permutacions

A continuació, ens plantegem de quantes maneres diferents es pot ordenar un conjunt d'objectes.

Una **permutació** d'un conjunt d'objectes és qualsevol possible ordenació d'aquests objectes.

Característiques de les permutacions

En les permutacions cal que agrupem tots els objectes de cop, no podem repetir els objectes i, a més, evidentment, importa l'ordre.

Calcular el nombre total de permutacions d'un conjunt d'objectes és ben fàcil fent servir la regla del producte: suposem que tenim N objectes; per a decidir quin anirà en primer lloc, tenim N possibles eleccions; un cop he escollit quin anirà en primer lloc, tinc $N – 1$ possibilitats d'elecció per a escollir quin anirà en segon lloc, i així successivament. És a dir, a cada pas tinc una possibilitat menys d'elecció, ja que he anat fixant els objectes i, per tant, cada vegada disposo d'un objecte menys que cal situar; aplicant la regla del producte obtinc el nombre total de possibles ordenacions.

Una altra manera de veure-ho

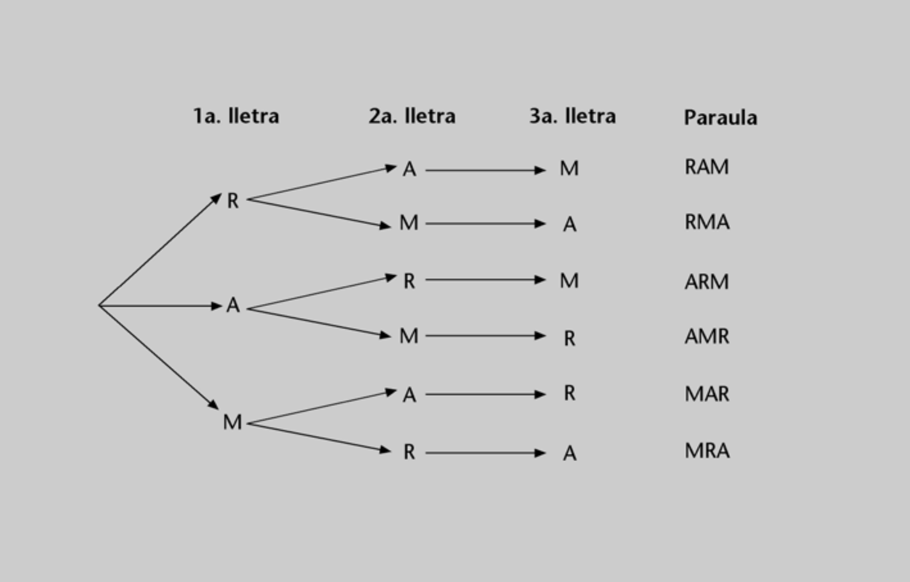
També es pot calcular pensant que el nombre de permutacions és el nombre de les variacions de N elements agafats de N en N, ja que, per definició, es tracta d'ordenar-los tots.

El **nombre de les permutacions** de N objectes és:

$$N! = N \cdot (N - 1) \cdot (N - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Exemple d'aplicació de les permutacions

De quantes maneres es poden ordenar les lletres de la paraula *RAM*? Si fem un arbre, observem com en el primer pas tinc tres opcions, en el segon pas només tinc dues opcions, ja que una lletra està fixada en el primer lloc, i en el tercer pas tinc una única opció, que és la lletra que encara no he situat. Per tant, el nombre de permutacions serà $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.



Les ordenacions de vint-i-tres portàtils

Si la revista *PCUniverse* ens demana que ordenem de totes les maneres possibles els vint-i-tres portàtils, haurem d'escriure 23! ordenacions diferents.

23! és un nombre enorme, concretament és:

25.852.016.738.884.976.640.000

4. Combinacions

En altres situacions, interessa considerar agrupacions en què no cal tenir en compte l'ordre, bé perquè no és rellevant, bé perquè no afecti el resultat final. En aquest cas, treballarem directament amb subconjunts.

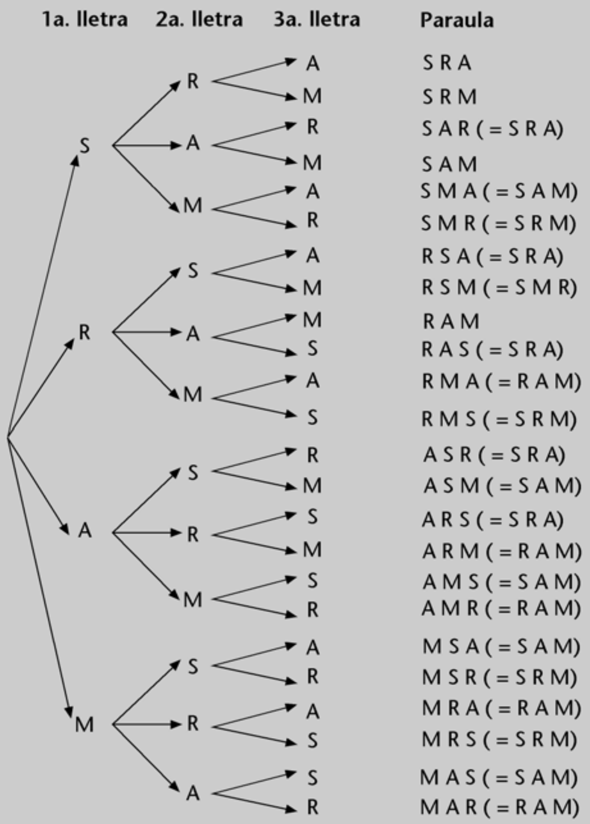
Donats N objectes diferents, una **combinació** d'aquests N objectes agafats de k en k és qualsevol subconjunt de k elements que es pugui formar usant només els N objectes inicials.

Característiques de les combinacions

En les combinacions no cal que agrupem tots els objectes, no podem repetir els objectes i no importa l'ordre.

Exemple d'aplicació de combinacions

Suposem que hem d'escriure tots els possibles subconjunts de tres elements que es poden formar usant únicament lletres de la paraula *SRAM*. Ho farem mitjançant un arbre en què es veu que a cada pas tinc una possibilitat d'elecció menys i que necessito tres passos per a construir els subconjunts de tres elements. El parèntesi indica que el subconjunt ja ha estat construït anteriorment i amb quin subconjunt es correspon.



Comentari

SAR és el mateix subconjunt que *SRA* i, per tant, no el considerem com un grup diferent.

També observem que hi ha moltes repeticions perquè, quant als conjunts, tant és considerar $\{S, R, A\}$ com $\{R, A, S\}$. En l'arbre hem indicat les repeticions i, per tant, només hem de considerar els subconjunts següents: $\{S, R, A\}$, $\{S, R, M\}$, $\{S, A, M\}$, $\{R, A, M\}$. Tenim, doncs, quatre combinacions possibles; aquest nombre es pot deduir a partir de l'arbre: l'arbre té en total $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ branques (que, de fet, es corresponen a les variacions de quatre elements agafats de tres en tres), però cadascuna d'aquestes apareix 3! vegades, ja que les tres lletres apareixen en tots els ordres possibles; per tant, el nombre de combinacions és igual a $4 \cdot 3 \cdot 2 / 3!$, que, escrit usant factorials, es pot expressar com a $4! / (3! \cdot 1!)$.

Notació

El nombre combinatori *N sobre k* també es pot escriure $C(N, k)$ o bé C_N^k.

El **nombre de combinacions** de N objectes agafats de k en k es calcula fent:

$$\binom{N}{k} = \frac{\text{Nombre de variacions de } N \text{ elements agafats de } k \text{ en } k}{\text{Permutacions de } k \text{ elements}} =$$

$$= \frac{N(N-1)\ldots(N-k+1)}{k!} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

$\binom{N}{k}$ és l'anomenat **nombre combinatori** "N sobre k".

Els cinc millors portàtils

PCUniverse ens envia una llista de vint-i-tres portàtils i ens demana que retornem la llista dels que creiem que són els cinc millors portàtils de la llista. En aquest cas, he d'escollir 5(= k) entre 23 (= N) possibles i, per tant, tinc:

$$C(N, K) = \frac{23!}{(5!\ (23-5)!)} =$$

$$= \frac{23!}{(5!\ 18!)} = 33.649$$

possibilitats d'escollir cinc portàtils (la revista no demana que els ordenem, només vol saber els que creiem que són els cinc millors, sense ordre de preferència entre si).

5. Resum

En aquesta sessió es fa un recorregut per algunes tècniques de recompte molt utilitzades en el context de l'estudi de la probabilitat. En el quadre següent resumim els casos estudiats, les seves característiques i les fórmules de combinatòria més importants que apareixen, suposant que disposem de N individus i els hem d'agafar de k en k:

	Cal agafar-los tots?	**Es poden repetir?**	**Importa l'ordre?**	**Nombre total**
Variacions	No	No	Sí	$N(N-1)\ldots(N-k+1)$
Variacions amb repetició	No	Si	Sí	N^k
Permutacions	Sí	No	Sí	$N!$
Combinacions	No	No	No	$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$

Les fórmules es dedueixen a partir de l'anomenada *regla del producte*. També s'insisteix en com distingir un cas d'un altre i en quins casos cal aplicar cadascuna de les definicions.

Exercicis

1. El pòquer

La baralla de pòquer consta de cinquanta dues cartes amb quatre colls (cors, diamants, trèvols i piques) i tretze cartes de cada coll, numerades així: l'as, 2 ... 10, la *J*, la *Q* i la *K*. Cada vegada es reparteixen cinc cartes; això s'anomena *una ma de cinc cartes*.

a) Quantes mans de cinc cartes diferents poden aparèixer en jugar al pòquer?
b) Quantes d'aquestes mans tenen exactament un as?
c) Quantes mans no tenen cap as?
d) Quants pòquers es poden formar? Un pòquer són quatre cartes del mateix nombre i una altra d'un nombre diferent.
e) En quantes mans hi ha almenys una *K*?

2. Les cadires de Guillem Portes

Es fa una reunió dels deu empresaris més importants del sector informàtic del món; a la reunió assisteixen Guillem Portes i el seu ferotge competidor, director d'Oracel. Per a evitar problemes de protocol, seuen en una filera de deu cadires:

a) De quantes maneres diferents poden seure els deu empresaris?
b) De quantes maneres diferents poden seure els deu empresaris, però de manera que Guillem Portes i el seu ferotge competidor no estiguin l'un al costat de l'altre?

Solucionari

1. El pòquer

a) Es tracta de fer subconjunts de cinc cartes en què no importa l'ordre i en què, evidentment, no es poden repetir les cartes.

En total, doncs, $\binom{52}{5} = 2.598.960$ mans diferents.

b) Mirem les possibilitats d'escollir quatre cartes que no siguin as, que són:

$$\binom{48}{4} = 194.580$$

Ara, per a completar una mà, hem d'escollir entre quatre asos; per tant, les possibilitats totals són:

$$\binom{48}{4} \cdot 4 = 778.320$$

c) Cal escollir cinc cartes entre les quaranta-vuit que no són un as. Per tant:

$$\binom{48}{5} = 1.712.304$$

d) Per a formar un pòquer, hem de seguir un procés com aquest:

- Escollir un nombre (de l'as a la *K*): tretze possibilitats.
- Escollir quatre cartes d'aquest nombre: una possibilitat, ja que només hi ha quatre cartes de cada nombre.
- Escollir una carta d'entre les que queden: quaranta-vuit possibilitats.

En total, tenim $13 \cdot 48 = 624$ pòquers diferents.

e) Primer, mirem en quantes mans no hi ha cap *K*:

$$\binom{52-4}{5} = 1.712.300$$

Traiem les quatre *K* de la baralla i ens queden quaranta-vuit cartes, de les quals n'he d'agafar cinc. Per tant, hi ha almenys una *K* en:

$$\binom{52}{5} - \binom{52-4}{5} = 886.656 \text{ mans}$$

2. Les cadires de Guillem Portes

a) Són les permutacions de deu persones: $10! = 3.628.800$

b) Primer, calculem totes les maneres que hi ha de què seguin junts. Com que han de seure junts, és com si tinguéssim nou objectes per ordenar; tenint en compte que un objecte (la parella Guillem Portes-director d'Oracel) val per dos, ja que Guillem Portes tant pot estar a la dreta com a l'esquerra, en total tenim, doncs, $2 \cdot 9! = 725.760$ maneres de què seguin junts; per tant, de maneres de què seguin separats tinc:

$$10! - 2 \cdot 9! = 10 \cdot 9! - 2 \cdot 9! = 8 \cdot 9! = 2.903.040 \text{ de possibilitats}$$

Farem els càlculs...

... amb ordinador o usant la funció factorial d'algunes calculadores.

Probabilitat

Aquí comencem l'estudi de la probabilitat. A grans trets, la probabilitat d'un succés és una mesura de la tendència a donar-se que té el succés. Aquesta mesura serà un nombre situat entre dos valors: el 0, que serà la probabilitat d'un succés que no es pugui donar mai (el succés impossible) i l'1, que es correspondrà amb un succés que es dóna sempre (el succés segur).

1. Introducció i freqüència relativa

Per a il·lustrar les idees sobre probabilitat que s'introduiran més endavant de manera formal, començarem per reflexionar sobre la freqüència relativa d'un resultat d'un experiment aleatori. Considerem, doncs, un experiment aleatori i el seu espai mostral Ω i veiem, en primer lloc, un exemple que ens guiarà en aquesta introducció.

La freqüència relativa en un dau trucat (I)

Llancem un dau R = 100 cops i anotem quantes vegades apareix cada resultat en la taula següent:

Resultat	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Aparicions	12	28	20	20	5	15

La freqüència relativa del resultat 2 és 28 / 100; el resultat 5 té freqüència relativa 5/100. Com podeu veure, hi ha nombres que tenen més tendència a sortir que d'altres, la qual cosa ens pot fer sospitar que el dau no és ben bé "neutral". La freqüència relativa és un indicador numèric de la tendència a donar-se que té cada resultat.

Repetim l'experiment aleatori un nombre R de vegades; si dividim el nombre de vegades que es dóna un resultat per R obtenim la **freqüència relativa** del resultat. Evidentment, la freqüència relativa de qualsevol resultat és un nombre entre 0 i 1. La suma de les freqüències relatives de tots els resultats ha de ser igual a u.

Partint del fet que un succés és un conjunt de resultats, també és possible determinar-ne la freqüència relativa.

La freqüència relativa d'un succés s'obté dividint el nombre de vegades que el resultat que s'obté en realitzar l'experiment és favorable al succés pel nombre de repeticions de l'experiment.

Per a calcular la freqüència relativa d'un succés també podem utilitzar la freqüència relativa dels resultats que conté.

La freqüència relativa de qualsevol succés és igual a la suma de les freqüències relatives dels seus resultats favorables. És evident que la freqüència relativa d'un succés és un nombre entre zero i u.

Significat de la freqüència relativa = 0

Freqüència relativa = 0 vol dir que no ha passat mai; freqüència relativa = 1 vol dir que totes les vegades hem obtingut un resultat favorable al succés.

La freqüència relativa en un dau trucat (II)

Seguint amb l'exemple del dau trucat: quina és la freqüència relativa del succés P = "treure un nombre parell"? De les cent vegades que hem llançat el dau, 28 + 20 + 15 vegades hem obtingut un nombre parell; per tant, la freqüència relativa de P és:

$$(28 + 20 + 15)/100 = 63/100$$

que és precisament igual a:

$$28/100 + 20/100 + 15/100$$

és a dir, la suma de les freqüències relatives del 2, el 4 i el 6 (els resultats parells). *A*ixí, doncs, el 63% de les vegades ha sortit un nombre parell!

És molt important adonar-se que a partir de les freqüències relatives de certs successos en podem deduir la freqüència relativa d'altres.

Si dos successos són incompatibles, la freqüència relativa de la seva unió és la suma de les respectives freqüències relatives.

Recordeu que...

... dos sucessos són incompatibles si són disjunts.

Freqüència relativa de la unió de successos (I)

Seguint amb l'exemple del dau trucat, la freqüència relativa del succés P = "treure un nombre parell" és 63 / 100 i la del succés Q = "sortir un 3 o un 5" és 25%; la freqüència relativa de $P \cup Q$ és 88%, que és precisament igual a 63% + 25%, ja que P i Q són disjunts.

Fixeu-vos que si els successos no són incompatibles, la freqüència relativa de la seva unió no és la suma de les seves freqüències relatives.

Freqüencia relativa de la unió de successos (II)

Si considerem P = "treure un nombre parell" i Q = "treure un nombre major que 3"; la freqüència relativa de P és 63%, la de Q és 40%, però la de $P \cup Q$ no és 63% + 40% = 103%, ja que la freqüència relativa no pot ser més gran que 100% = 1. De fet, la freqüència relativa de $P \cup Q$ correspon a la suma de les freqüències relatives dels resultats 2, 4, 5, 6 i és igual al 68%.

En realitat, la freqüència relativa de la unió de dos successos és la suma de les seves freqüències relatives menys la freqüència relativa de la seva intersecció.

Freqüència relativa de la unió de successos (III)

Podem comprovar la propietat esmentada en el cas de l'exemple del dau trucat, ja que la freqüència relativa de la intersecció de $P \cap Q$ és 35% i, per tant, la freqüència relativa de $P \cup Q$ és igual a 63% + 40% − 35% = 68%.

Quines altres propietats de la freqüència relativa podem destacar? D'entre les moltes que té en comentarem dues:

1) La freqüència relativa del succés segur és 1, ja que es dóna sempre que efectuem l'experiment. La freqüència relativa del succés impossible és zero, ja que no es dóna mai.

2) La freqüència relativa del complementari de *A* és 1 menys la freqüència relativa de *A*.

Freqüència relativa del succés segur

Quina és la freqüència relativa del succés "treure un nombre menor que 10" quan tirem un dau 1.000 cops? evidentment 1, ja que els 1.000 cops hem obtingut un nombre menor que deu. I aquesta freqüència serà sempre 1, independentment del nombre de tirades que efectuem.

Freqüencia relativa de la A^c

Si un succés es dóna el 23% de les vegades, el seu complementari s'ha de donar el 77% (100% – 23%) de les vegades.

2. La teoria de la probabilitat

La teoria de la probabilitat és una teoria matemàtica que estableix com podem assignar una probabilitat a successos complexos a partir de la probabilitat de successos més simples. Hi ha diferents maneres de definir aquestes probabilitats, però totes han de complir uns requisits de coherència que es corresponen amb algunes de les propietats mencionades per a la freqüència relativa dels successos que hem comentat en la secció anterior.

La qüestió de decidir quines propietats bàsiques s'han d'exigir al que anomenem *probabilitat* va ser estudiada per Kolmogorov, cap als anys trenta; en els seus treballs va arribar a la conclusió que n'hi havia prou amb tres propietats (axiomes) per a establir el concepte de probabilitat. Aquestes propietats són les següents:

1) La probabilitat de qualsevol succés ha de ser un nombre entre 0 i 1.

2) Si dos successos són disjunts, la probabilitat de la seva unió és la suma de les probabilitats de tots dos successos.

3) La probabilitat del conjunt de tots els possibles resultats (succés segur) ha de ser 1.

Expressions per a la probabilitat

Com que la probabilitat és un nombre entre 0 i 1, de vegades l'expressarem en percentatge, tal com se sol fer amb la freqüència relativa. *Així*, direm que una certa probabilitat és 0,3 o bé del 30%.

Si comencem per definir la probabilitat com una funció *P* que fa correspondre a cada succés la seva probabilitat, podem rescriure les propietats anteriors de la manera següent:

Probabilitat i freqüència relativa

Observeu com aquestes propietats són algunes de les mencionades per la freqüència relativa, només que canviant l'expressió "freqüència relativa" per "probabilitat".

P1.) $0 \leq P(A) \leq 1$ per a tot succés *A*.

P2.) Si *A* i *B* són successos disjunts, aleshores $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

P3.) $P(\Omega) = 1$ (en què Ω és l'espai mostral, que es correspon al succés que conté tot els possibles resultats).

3. Propietats que es deriven de la definició de probabilitat

A continuació veurem com, amb les propietats P1, P2 i P3, podem arribar a conclusions molt interessants sobre la probabilitat d'alguns successos determinats.

Probabilitat i freqüència relativa

Observeu que en la definició de probabilitat no hi ha cap regla per a calcular la $P(A \cap B)$ en funció de $P(A)$ i $P(B)$.

3.1. La probabilitat del succés impossible

Respecte al succés impossible $\varnothing$, tenim que:

$$P(\varnothing) = 0$$

Això es deu als fets següents:

a) Com que $\varnothing$ i Ω són disjunts, per aplicació de la propietat P2:

$$P(\varnothing \cup \Omega) = = P(\varnothing) + P(\Omega)$$

b) Però atès que $\varnothing \cup \Omega = \Omega$, per la propietat P3, $P(\varnothing \cup \Omega) = P(\Omega) = 1$.

c) En conseqüència, $1 = P(\varnothing) + 1$, de la qual cosa podem concloure que $P(\varnothing) = 0$.

3.2. La probabilitat del complementari

Un raonament anàleg ens permet de tractar la probabilitat del complementari d'un succés. Fixem-nos que, per a tot succés A, $A \cup A^c = \Omega$; per les propietats P2 i P3, tenim que $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1$; aleshores:

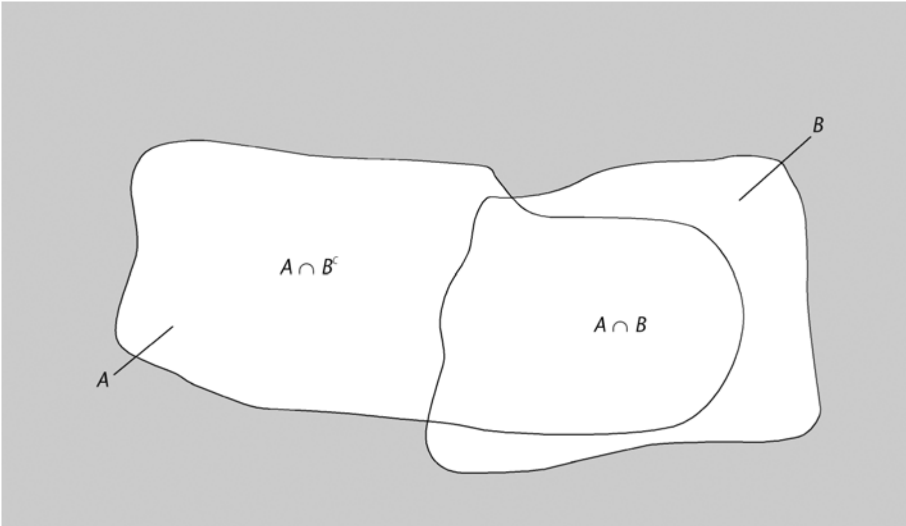
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

3.3. La probabilitat de la unió

Una altra propietat molt interessant que es deriva de $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ i del fet que $(A \cap B)$ i $(A \cap B^c)$ són disjunts és la següent:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

Gràficament:



Una propietats de la unió

$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, ja que els resultats de A són "els de A que són a B" unió "els de A que no són a B".

La propietat **2** permet de calcular la probabilitat de la unió de successos que siguin incompatibles, però què passa si els successos no ho són? En aquest cas, aplicarem la regla següent:

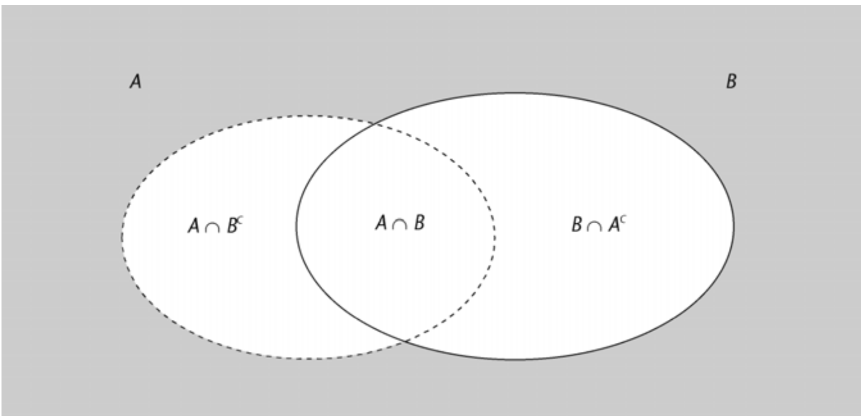
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Segons aquesta, per a calcular la probabilitat de la unió cal calcular la suma de probabilitats i després restar la probabilitat de la intersecció. Per tant, sempre tenim que $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

Demostració de la regla de la probabilitat de la unió

La regla segons la qual $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ es pot demostrar molt fàcilment a partir dels fets següents:

1) Tal com es veu en el gràfic següent:



tenim que $A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$. Com que aquests conjunts són evidentment disjunts, tenim que $P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap B^c)$;

2) Com que $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$, podem deduir que $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.

3) Finalment, $P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap B^c) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$.

4. Assignació de probabilitat quan els resultats són equiprobables. Regla de Laplace

Fins ara, hem vist com la teoria de la probabilitat permet d'assignar probabilitats a certs successos a partir de la probabilitat d'altres successos més simples. Ara falta veure com podem assignar probabilitats als successos més simples de tots (els resultats d'un experiment aleatori), de manera que puguem obtenir, gràcies a la probabilitat, conclusions interessants sobre els successos i sobre les situacions descrites pels successos que interessen.

Primer, començarem per definir el que s'entén per resultats equiprobables.

Dos resultats d'un experiment aleatori són **equiprobables** si tenen la mateixa probabilitat d'ocórrer.

Un espai mostral és **uniforme** si tots els resultats són equiprobables.

Probabilitat i equiprobabilitat

Por semblar paradoxal definir probabilitat a partir del concepte de successos equiprobables. El que passa és que tothom entén perfectament que, si el dau és perfecte, tantes possibilitats hi ha de treure un u com un dos… És a dir, el concepte d'equiprobabilitat no depèn de com mesurem efectivament la probabilitat de cadascun dels nombres del dau.

En aquest cas, si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \dots \omega_k\}$ té k possibles resultats, tindrem que $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_k)$. Per aplicació de la propietat **2** i partint del fet que els resultats d'un experiment aleatori són sempre disjunts –ja que si es dóna un resultat, no se'n pot donar un altre de diferent–, tenim que:

$$1 = P(\Omega) = P(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \dots \cup \omega_k) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_k) = kP(\omega_1)$$

i, per tant, la probabilitat de cada resultat és:

$$P(\omega_i) = \frac{1}{k} = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

Quina serà la probabilitat d'un succés qualsevol? Suposem que el succés A resulta estar format per s resultats, amb la qual cosa $\mathrm{Card}(A) = s$; suposem que, per exemple, $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$. En aquest cas:

Probabilitat d'un dau perfecte

Si tirem un dau perfecte, tots els nombres tenen la mateixa probabilitat de sortir. Quina és aquesta probabilitat?

Evidentment, haurà de ser 1/6.

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + p(\omega_s) = (1/k) + \dots + (1\ /\ k) = s/k$$

És a dir, per a calcular la probabilitat de A, haurem de determinar quants resultats formen part del succés A –els resultats favorables a A– i dividir aquest nombre pel total de resultats possibles; aquesta és l'anomenada regla de Laplace.

La **regla de Laplace** afirma que en un espai uniforme la probabilitat d'un succés A es calcula mitjançant el quocient següent:

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de resultats favorables a } A}{\text{Nombre total de possibles resultats}}$$

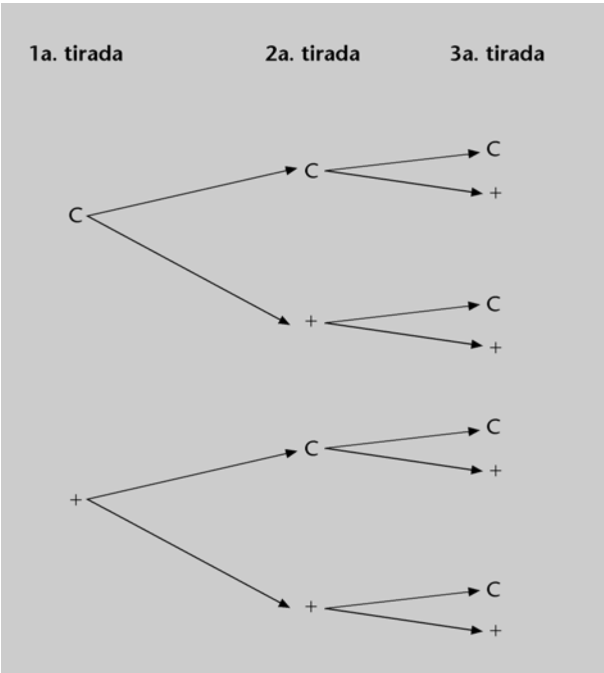
L'ús d'aquesta regla permet d'interpretar la probabilitat com a percentatge, ja que podem considerar $P(A)$ com el percentatge de vegades que es dóna un resultat de A respecte del total de possibles resultats.

Exemple de càlcul de probabilitats

Tirem un dau perfecte (sense trucar) i considerem els successos A = "surt un nombre major que 4", B = "surt un nombre parell", C = "surt un nombre major que 8". En aquest cas, l'espai mostral té 6 possibles resultats equiprobables i $P(A) = 2/6$, $P(B) = 3/6 = 1/2$, $P(C) = 0/6 = 0$.

Exemple d'aplicació de la regla de Laplace

Tirem una moneda perfecta tres cops i considerem els successos següents: A = "surten 3 cares", B = "surt una única creu", D = "no surten ni dues cares ni dues creus consecutives". En primer lloc, determinem l'espai mostral de l'experiment, espai que es pot obtenir fàcilment mitjançant l'arbre dels possibles resultats (en què C representa cara i + representa creu):



Per tant:

$$\Omega = \{(CCC), (CC+), (C+C), (C++), (+CC), (+C+), (++C), (+++)\}$$

és a dir, tinc vuit possibles resultats, i tots aquests resultats són equiprobables (ja que a cada tirada la probabilitat que surti cara és la mateixa probabilitat que surti creu). A continuació podem calcular cadascun dels successos:

$$A = \{(CCC)\},\ B = \{(+CC), (C+C), (CC+)\},\ D = \{(C+C), (+C+)\}$$

les probabilitats corresponents són $P(A) = 1/8$, $P(B) = 3/8$, $P(D) = 2/8$.

5. Probabilitats en espais mostrals no uniformes i freqüència relativa

No sempre podem assegurar que els resultats d'un experiment aleatori siguin equiprobables. Pensem en el cas d'un dau del qual sospitem que està trucat;

ara ens enfrontem a dos nous problemes: com podem confirmar aquesta sospita i com podem calcular la probabilitat de cada resultat. En tots dos casos la resposta passa per calcular la freqüència relativa de cadascun dels resultats després de repetir l'experiment moltes i moltes vegades.

Així, si després de repetir l'experiment (tirar el dau) mil vegades, obtenim cent uns, cent dosos, cent tresos, cent quatres, cent cincs i cinc-cents sisos, podem pensar que la probabilitat d'obtenir un sis és aproximadament 1/2, mentre que la probabilitat d'obtenir qualsevol altre nombre serà d'aproximadament 1/10.

És clar que aquestes aproximacions a la probabilitat de cadascun dels resultats no seran definitives, ja que en anar augmentant en nombre de repeticions de l'experiment, aniran canviant les freqüències relatives. Per a evitar aquesta ambigüitat, es va repetint l'experiment i s'observa si la freqüència relatives de cada resultat tendeix cap a algun valor a mesura que es van repetint els experiments.

Aquestes probabilitats, obtingudes com el valor al qual tendeixen les freqüències relatives després de repetir moltes vegades un experiment, s'anomenen **probabilitats empíriques**.

Necessitat de la repetibilitat

Recordeu que una de les característiques que demanem als experiments aleatoris és que s'han de poder repetir tantes vegades com calgui.

A partir d'aquestes probabilitats empíriques, i aplicant les propietats que defineixen la probabilitat, podem assignar probabilitat a tots els altres successos.

Un dau curiós i força trucat

Tirem un dau 150.000 cops i obtenim els resultats següents:

Resultat	1	2	3	4	5	6
Freqüència	1	100.000	40.000	9.999	0	0

Per a calcular les probabilitats empíriques de cadascun dels resultats, hem de dividir la seva freqüència per 150.000 (el nombre de cops que hem repetit l'experiment). La probabilitat que el nombre sigui parell és (100.000 / 150.000) + (9.999 / 150.000). La probabilitat que el nombre sigui major que 5 és 0.

6. Probabilitat condicionada

En aquest apartat ens concentraren en el concepte de probabilitat condicionada. Començarem per un exemple, en què s'il·lustra la influència que uns successos poden tenir en d'altres.

Probabilitat condicionada en un dau perfecte

Si llancem un dau perfecte, la probabilitat que el resultat sigui un nombre parell és 0,5. A continuació, llancem el mateix dau i cau a sota de la taula, i abans de mirar el nombre que ha sortit, algú ens diu que és major que 3; en aquest cas, quina és la probabilitat que sigui parell? El primer que ens hem de preguntar és quins són els possibles resultats: són

{4, 5, 6}, ja que la informació prèvia de què disposem descarta que hagi sortit un u, un dos o un tres. Així, dels possibles resultats majors que 3, dos són parells. Per tant, com que tinc tres resultats en què el nombre que surt és major que 3 –i d'aquests, dos són parells–, la probabilitat que surti parell sabent que el nombre és major que 3 és 2/3.

A continuació, definim el concepte de probabilitat condicionada, que recull la influència que poden tenir uns successos sobre d'altres.

La probabilitat del succés *A* **condicionat** a *B*, probabilitat que denotarem per $P(A \mid B)$, és la probabilitat que en realitzar l'experiment aleatori el resultat obtingut sigui de *A*, sabent que el resultat obtingut és de *B*.

Observació sobre la probabilitat condicionada

Observem que si el resultat és de *B*, pot ser de *A* (amb la qual cosa serà de $A \cap B$) o no.

En l'exemple del dau perfecte si *B* = "ser major que 3" i *A* = "ser parell", tindrem que si el resultat és de *B* ("ser major que 3"), pot ser de *A* ("ser parell") o no ("no ser parell").

Començarem calculant intuïtivament probabilitats condicionades en una situació relacionada amb els ordinadors de la nostra empresa.

Considerem la taula següent que registra les diferents configuracions dels cinquanta ordinadors de la nostra empresa, atenent a la RAM de què disposen i al tipus de processador (el tipus de processador apareix en una etiqueta enganxada al costat del botó d'engegar, mentre que per a saber la RAM, cal engegar l'ordinador):

	64Mb	128MB
Patinum1	10	20
Patinum22	10	10

De la taula obtenim que tenim deu ordinadors amb 64MB de RAM i Patinum1, vint ordinadors amb 128 MB de RAM i Patinum1, deu ordinadors amb 64MB de RAM i Patinum 22 i, finalment, deu ordinadors de 128MB de RAM i Patinum22. Si escollim un ordinador a l'atzar, podem calcular fàcilment moltes probabilitats; per exemple, *P*("estar equipat amb Patinum 1") = 30/50, mentre que *P*("tenir 64MB de RAM") = 20/50.

A continuació, introduïm la probabilitat condicionada: suposem que escollim un ordinador a l'atzar i llegim en l'etiqueta que el seu processador és un Patinum22; ens preguntem quina és la probabilitat que tingui 64 Mb de RAM. Quina és aquesta probabilitat? Sabem que l'ordinador porta un Patinum 22 i, per tant, ha de ser un dels vint ordinadors que tenen aquest processador. D'entre aquests vint, sabem que deu tenen 64Mb de RAM, per tant:

$$P(\text{"té 64MB de RAM"} \mid \text{"porta Patinum22"}) = 10 / 20 = 1 / 2$$

Un altre cas: hem engegat un ordinador sense mirar l'adhesiu del processador i resulta que té 128 Mb de RAM, quina és la probabilitat que tingui Patinum1?

De la mateixa manera que abans, hi ha trenta ordinadors amb 128MB de RAM, dels quals vint tenen Patinum1; per tant:

$$P(\text{“porta Patinum1”} \mid \text{“té 128MB de RAM”}) = 20/30$$

Si en aquesta última fórmula dividim numerador i denominador pel total d'individus obtenim:

$$P(\text{“porta Patinum1”} \mid \text{“té 128MB de RAM”}) = (20/50) \;/\; (30/50)$$

en què 30 / 50 resulta ser la probabilitat de tenir 128MB de RAM i, per tant:

$$P(\text{“porta Patinum1”} \mid \text{“té 128MB de RAM”}) = \\ = (20 \;/\; 50) \;/\; P(\text{“té 128 Mb de RAM”})$$

Ara ens resta esbrinar què representa el numerador: com que hi ha vint ordinadors que tenen Patinum1 i 128 Mb de RAM, 20/50 és la probabilitat que un ordinador tingui Patinum1 i també 128Mb de RAM, amb la qual cosa finalment obtenim:

$$P(\text{“porta Patinum1”} \mid \text{“té 128MB de RAM”}) = \\ = P(\text{“porta Patinum1”} \cap \text{“té 128Mb de RAM”}) \;/\; P(\text{“té 128 Mb de RAM”})$$

Observació

Fixeu-vos que si $P(B) = 0$ no té sentit definir la probabilitat $P(A \mid B)$.

Aquest resultat motiva la fórmula següent, vàlida per a calcular probabilitats condicionades. Siguin A i B dos successos, de manera que $P(B) > 0$; aleshores:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Càlcul de probabilitats condicionades

En l'exemple de la RAM i els Patinum tenim que P(“té 128 Mb” | “porta Patinum22”) = = P(“té 128Mb” $\cap$ “porta Patinum22”) / P(“porta Patinum22”) = (10/50) / (20/50) = 1/2.

6.1. Relació entre probabilitat condicionada i probabilitat de la intersecció

Recordeu que no tenim cap fórmula per a determinar la probabilitat de la intersecció de dos successos; en canvi, a partir de la fórmula de la probabilitat condicionada podem obtenir el resultat següent: donats dos successos qualssevol A i B, amb $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$, aleshores:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$$

Aquesta propietat es demostra fàcilment simplement aïllant $P(A \cap B)$ en la definició de $P(A \mid B)$ i $P(B \cap A) = P(A \cap B)$ en la definició de $P(B \mid A)$.

7. Independència de successos

Començarem per una definició intuïtiva del concepte d'independència per poder justificar més endavant la definició formal.

Dos successos A i B són **independents** quan el fet que n'ocorri un no altera la probabilitat que ocorri l'altre.

La formalització d'aquesta idea a partir de la probabilitat condicionada dóna lloc a l'anomenada **regla del producte de probabilitats**. Dos successos A i B són independents si i només si:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ara ens podem preguntar quina relació té aquesta definició d'independència amb la probabilitat condicionada: doncs bé, és fàcil demostrar que per a determinar si dos successos són independents, tenim tres vies diferents.

Si $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$, les afirmacions següents són equivalents:

1) Els successos A i B són independents
2) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
3) $P(A \mid B) = P(A)$
4) $P(B \mid A) = P(B)$

Demostració de la regla del producte de probabilitats

Les afirmacions **1** i **2** són equivalents per definició (és la regla del producte).

Ara suposem que es dóna l'afirmació **2**, segons la qual $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; per tant:

$$P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A) \cdot P(B)/P(B) = P(A)$$

amb la qual cosa hem demostrat l'afirmació **3**.

D'altra banda, si $P(A \mid B) = P(A)$, tenim que $P(A \cap B)/P(B) = P(A)$ i, per tant, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, amb la qual cosa demostrem que l'afirmació **3** implica la **2**.

Que l'afirmació **2** és equivalent a la **4** es fa de la mateixa forma, observant que:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

Exemple de successos independents amb un dau perfecte

Tornem ara a l'exemple del dau perfecte i considerem els successos A = "treure un nombre parell", B = "treure un nombre major que 3" i C = "treure un nombre major que 4". Ens preguntem si els successos A i B són independents; per a fer-ho, calculem:

$P(A) = 3/6 = 1/2$ i
$P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B) = P(\text{“parell major que 3”}) / P(\text{“major que 3”}) =$
$= P(\{4, 6\})/P(\{4, 5, 6\}) = (2/6) / (3/6) = 2/3$

Com que $P(A) = 1/2 \neq P(A/B) = 2/3$, els successos A i B no són independents. En canvi:

$P(A \mid C) = P(A \cap C) / P(C) = P(\text{“parell major que 4”}) / P(\text{“major que 4”}) =$
$= P(\{6\}) / P(\{5, 6\}) = (1/6) / (2/6) = 1 / 2$

Independència de successos (I)

Per a veure si dos successos són independents calculem $P(A)$, $P(B)$ i $P(A \cap B)$.

- Si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, aleshores són independents.
- Si $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, aleshores no són independents.

Independència de successos (II)

a. Calculem $P(A)$ i $P(A \mid B)$; si $P(A) = P(A \mid B)$, aleshores els successos són independents; si $P(A) \neq P(A \mid B)$, aleshores els successos no són independents.

b. Calculem $P(B)$ i $P(B \mid A)$; si $P(B) = P(B \mid A)$, aleshores els successos són independents; si $P(B) \neq P(B \mid A)$, aleshores els successos no són independents.

Exemple de successos independents

Considerem dos successos qualssevol tals que $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}5$ i $P(A \cap B) = 0{,}25$; els successos A i B són independents, ja que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Interpretació de dos successos no independents

Els successos A i B no són independents, ja que dins de B la proporció de parells és 2/3, mentre que del total de resultats la proporció de parells és 1/2; és a dir, dins el succés B la probabilitat de A és major que respecte del total de resultats; per això A i B no són independents.

Com que $P(A) = 1 / 2 = P(A \mid C)$, els successos són independents.

Exemple de processos no independents llançant un dau dos cops

Continuem amb els daus, però ara llencem un dau dos cops. Considerem els successos A = "el valor màxim de les dues tirades és 1"; B = "la suma dels valors de les dues tirades és un nombre parell". És fàcil veure que $P(A) = 1 / 36$, ja que hi ha 36 resultats possibles i només en un (el cas (1,1)) el màxim val 1. Per calcular la $P(B)$ construïm l'espai mostral en el que destaquem els resultats de B:

$$\begin{array}{cccccc}
\underline{(1\ 1)} & (1\ 2) & \underline{(1\ 3)} & (1\ 4) & \underline{(1\ 5)} & (1\ 6) \\
(2\ 1) & \underline{(2\ 2)} & (2\ 3) & \underline{(2\ 4)} & (2\ 5) & \underline{(2\ 6)} \\
\underline{(3\ 1)} & (3\ 2) & \underline{(3\ 3)} & (3\ 4) & \underline{(3\ 5)} & (3\ 6) \\
(4\ 1) & \underline{(4\ 2)} & (4\ 3) & \underline{(4\ 4)} & (4\ 5) & \underline{(4\ 6)} \\
\underline{(5\ 1)} & (5\ 2) & \underline{(5\ 3)} & (5\ 4) & \underline{(5\ 5)} & (5\ 6) \\
(6\ 1) & \underline{(6\ 2)} & (6\ 3) & \underline{(6\ 4)} & (6\ 5) & \underline{(6\ 6)}
\end{array}$$

Clarament, $P(B) = 18 / 36 = 1 / 2$. Ara bé:

$$P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B) = (1/36) / (1/2) = 1/18$$

Calia esperar aquest valor, ja que dins B (que té 18 elements) només hi ha un resultat que pertanyi a A. Com que $P(A \mid B) \neq P(A)$, podem concloure que A i B no són independents.

Interpretació de dos successos independents

En el cas del succés C, la proporció de parells dins de C és 1 / 2, igual que la proporció de parells respecte del total; per tant, el fet que ocorri C no afecta la probabilitat de A, o el que és el mateix, A i C són independents.

En resum, i si ens fixem en la relació entre els valors de $P(A)$ i $P(A \mid B)$, tenim les possibilitats següents:

a) $P(A \mid B) > P(A)$; en aquest cas, podem dir que el succés B afavoreix que ocorri el succés A, ja que la probabilitat de A sabent que hem obtingut un resultat de B és més gran que la probabilitat de A tot sol.

b) $P(A \mid B) < P(A)$; en aquest cas, podem dir que el succés B dificulta que ocorri el succés A, ja que la probabilitat A disminueix si es dóna un resultat de B.

c) $P(A \mid B) = P(A)$; en aquest cas, el fet que ocorri un resultat de B no afecta la probabilitat de A. Per tant, tots dos successos no s'afecten mútuament: són independents.

8. Resum

Aquesta sessió està dedicada íntegrament a definir el concepte de probabilitat i a deduir-ne les conseqüències més importants. Es comença treballant sobre la noció de freqüència relativa de successos per a justificar la presentació de tres axiomes (les propietats P1, P2 i P3), amb les quals queden fixades les característiques que ha de tenir una funció de probabilitat. Un cop fixats els axiomes, s'extreuen les primeres conseqüències de la relació entre la probabilitat i les operacions entre successos (unió, complementari...), considerant especialment aquelles propietats necessàries posteriorment en el desenvolupament de la teoria.

Els axiomes de la probabilitat determinen com podem assignar probabilitat a successos complexos a partir de successos més simples, però també cal preocupar-se de l'assignació de probabilitat als successos més simples de tots: els resultats de l'experiment aleatori; per a fer-ho, cal considerar dos casos, segons si l'espai és uniforme o no:

1) Si l'espai és uniforme, és a dir, si tots els resultats tenen la mateixa probabilitat, resulta que la probabilitat d'un resultat és 1 dividit pel nombre de resultats possibles; com a conseqüència, obtenim l'anomenada *regla de Laplace*, segons la qual la probabilitat d'un succés s'obté dividint el nombre de resultats favorables al succés pel nombre de resultats possibles.

2) En cas que l'espai no sigui uniforme, la probabilitat dels successos s'aproxima per les anomenades *probabilitats empíriques*, que es corresponen al valor al qual tendeixen les freqüències relatives dels successos a mesura que anem repetint l'experiment aleatori.

En la segona part de la sessió s'examina la noció de probabilitat condicionada, concepte que recull i formalitza la possible influència d'un succés en un altre. Si suposem que tenim dos successos A i B, $P(A \mid B)$ denota la probabilitat d'obtenir un resultat de A sabent que s'ha obtingut un resultat de B. En cas que $P(A \mid B) = P(A)$, és a dir, si el fet que es doni un resultat de B no afecta la probabilitat del succés A, direm que A i B són independents. Finalment, es caracteritza la independència de successos mitjançant la regla del producte de probabilitats, segons la qual els successos A i B són independents si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Exercicis

1. Hem fabricat setze unitats d'un determinat producte. N'hi ha deu de bons, quatre amb petits defectes i dos de molt defectuosos. Els comerciants només accepten el articles bons, però la companyia KaBaC només rebutja els molt defectuosos.

a) Si escollim un article a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui acceptat pel comerciant?

b) Si n'escollim dos, quina és la probabilitat que tots dos siguin rebutjats per la companyia KaBaC? I que en sigui acceptat exactament un pel comerciant?

c) Si n'escollim tres, quina és la probabilitat que el comerciant no n'accepti cap?

2. Pòquer

La baralla de pòquer consta de cinquanta-dues cartes amb quatre colls (cors, diamants, trèvols i piques) i tretze cartes de cada coll, numerades així: l'as, 2, .., 10, la *J*, la *Q* i la *K*. Cada vegada es reparteixen cinc cartes; això s'anomena *una mà de cinc cartes*.

a) Quina és la probabilitat d'obtenir una mà amb un únic as?

b) Quina és la probabilitat d'obtenir almenys un as?

3. Les alarmes

En una fàbrica la probabilitat que el sistema d'alarma 1 falli és del 20%, la probabilitat que falli el sistema d'alarma 2 és del 10% i la probabilitat que fallin tots dos alhora, del 4%. Quina és la probabilitat que:

a) almenys un dels dos funcioni?

b) funcionin tots dos?

4. Defectes en cadena

El procés de fabricació d'un objecte passa per dues cadenes independents. La probabilitat d'adquirir un defecte en la primera cadena és de 0,001. En la segona cadena és del 0,0001. Calculeu la probabilitat que un objecte sigui defectuós.

5. Llancem una moneda perfecta tres cops:

a) Quina és la probabilitat d'obtenir un total de dues cares en les tres tirades?

b) Quina és la probabilitat d'obtenir almenys una cara?

c) Quina és la probabilitat d'obtenir dues cares consecutives, però no tres cares?

d) Calculeu la probabilitat d'obtenir dues cares consecutives, però no tres cares, sabent que, efectivament, han sortit dues cares.

e) Els successos obtenir dues cares consecutives, però no tres cares i obtenir dues cares són independents?

f) Doneu un exemple de dos successos relacionats amb les tres monedes que siguin independents; justifiqueu la vostra resposta.

6. Llancem una moneda trucada tres cops. Repetiu el problema anterior suposant que la moneda està trucada i en què la probabilitat d'obtenir cara a cada llançament és 0,8.

7. Demostreu, utilitzant les propietats conegudes de la probabilitat, el següent:

a) $P(A^C \mid B) = 1 - P(A \mid B)$
b) $P(B \mid A) = P(A \mid B) \cdot P(B)/P(A)$

8. Un estudi fet entre els estudiants de la universitat demanava, entre altres variables, el sexe i si mai s'havia visitat la Vall de Núria. Un cop processades les respostes, es va obtenir el següent:

- Van respondre 70 homes i 30 dones.
- En total, 60 dels enquestats han visitat la Vall de Núria.
- 42 homes han visitat Núria.

Es demana:

a) Calculeu la probabilitat que un enquestat seleccionat a l'atzar sigui home.
b) Calculeu la probabilitat que un enquestat seleccionat a l'atzar sigui home i hagi visitat la Vall de Núria.
c) Escollim un qüestionari a l'atzar i resulta ser la d'un home; quina és la probabilitat que en aquest qüestionari s'hagi respost "no" a la pregunta "ha estat a la Vall de Núria?".
d) Escollim un qüestionari a l'atzar i resulta ser el d'una persona que afirma haver visitat la Vall de Núria; quina és la probabilitat que aquest qüestionari correspongui a una dona?
e) En vista dels resultats de l'enquesta, els successos "ser home" i "haver visitat la Vall de Núria" són independents? Interpreteu-ne el resultat.

Solucionari

1. Estem en una situació en què tots els possibles resultats tenen la mateixa probabilitat. Així, per a calcular la probabilitat d'un succés, utilitzarem la fórmula:

a) El nombre total de resultats és 16 i el nombre a favor del succés és 10:

$$\frac{\text{Nombre de resultats a favor el succés}}{\text{Nombre total de resultats}}$$

Per tant, P("acceptat pel comerciant") = 10/16.

b) En aquest cas, el nombre total de resultats és el binomi:

$$\binom{16}{2} = 120$$

(és com escollir dos elements de 16). Els resultats en què tots dos siguin rebutjats per la companyia KaBaC són únicament un (hem d'agafar els dos productes molt defectuosos) i, per tant:

$$P(\text{"tots dos rebutjats per KaBaC"}) = \frac{1}{\binom{16}{2}} = 0{,}00833$$

Els resultats a favor que el comerciant n'accepti exactament un són 10 * 6 = 60 (n'hem d'escollir un entre els deu de bons i un d'entre els sis restants). Per tant:

$$P(\text{"un d'acceptat pel comerciant"}) = \frac{60}{\binom{16}{2}} = 0{,}5$$

c) Amb un raonament anàleg, obtenim:

$$P(\text{"comerciant que no n'accepti cap dels tres"}) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{16}{3}} = 0{,}0357$$

2. Pòquer

a) Com que totes les mans són equiprobables, hem de dividir el total de mans en les quals hi ha un únic as pel total de mans, amb la qual cosa obtenim el resultat següent:

$$\frac{\binom{48}{4} \cdot 4}{\binom{52}{5}} = 0{,}29947$$

b) Serà 1 menys la probabilitat de no tenir cap as; evidentment:

$$P(\text{"no obtenir cap as"}) = \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0{,}6588$$

ja que per a no tenir cap as, hem d'escollir cinc cartes entre les quaranta-vuit que no són as. *A*ixí, doncs:

$$P(\text{"obtenir almenys un as"}) = 1 - P(\text{"no obtenir cap as"}) = \\ = 1 - 0{,}6588 = 0{,}3412$$

3. Les alarmes

Definim F_1 = "l'alarma 1 falla" i F_2 = "l'alarma 2 falla". Sabem que $P(F_1) = 0{,}2$; $P(F_2) = 0{,}1$ i $P(F_1 \cap F_2) = 0{,}04$. Aleshores:

a)

$$P(\text{"que almenys un dels dos funcioni"}) = 1 - P(\text{"que cap no funcioni"}) = \\ = 1 - P(F_1 \cap F_2) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$$

b)

P(“que funcionin tots dos”) = 1 – P(“que algun no funcioni”) =

$= 1 - P(F_1 \cup F_2) = 1 - (P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2)) =$

$= 1 - (0{,}2 + 0{,}1 - 0{,}04) = 0{,}74$

4. Defectes en cadena

Definim D_1 = “defecte a la cadena 1” i D_2 = “defecte a la cadena 2”. Sabem que:

$$P(D_1) = 0{,}001;\ P(D_2) = 0{,}0001 \text{ i } P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \cdot P(D_2) = 0{,}0000001$$

ja que, en ser les cadenes independents, D_1 i D_2 són successos independents. Aleshores:

P(“objecte defectuós”) =

$= P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = 0{,}001 + 0{,}0001 - 0{,}0000001$

5. Llancem una moneda perfecta tres cops.

En total, tenim vuit possibilitats: {ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++}; calcularem les probabilitats i després comprovarem el resultat buscant els successos favorables; observeu que els vuit resultats tenen la mateixa probabilitat: 1/8.

a) $\frac{\binom{3}{2}}{8} = 0{,}37$; ja que de les tres tirades dues han de ser cares. També es pot calcular fent:

$$\frac{\text{Card (“en total dues cares”)}}{8} = \frac{\text{Card}(\{\text{cc+, c+c,+cc}\})}{8} = \frac{3}{8}$$

b) La probabilitat d’obtenir almenys una cara és:

1 – P(“no obtenir cap cara”) =

$$= 1 - \frac{\text{Card (“no obtenir cap cara”)}}{8} = 1 - \frac{\text{Card}(\{+++\})}{8} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

c) La probabilitat d’obtenir dues cares consecutives, però no tres cares és:

$$\frac{\text{Card}(\{\text{cc+,+cc}\})}{8} = \frac{2}{8}$$

d) La probabilitat que ens demanen a l’enunciat és:

P(“dues cares consecutives, però no tres cares” | “han sortit dues cares”) =

= P(“dues cares consecutives, però no tres cares” ∩ “han sortit dues cares) /

/ P(“han sortit dues cares”) = (2/8) / (3/8) = 2/3

e) Hem vist que:

P(“dues cares consecutives, però no tres cares”|“han sortit dues cares”) = 2/3 però:

$$P(\text{“dues cares consecutives, però no tres cares”}) = 2/8$$

i, per tant, els successos no són independents.

f) Per exemple, considerem els successos U = “el tercer cop surt cara” i F = “el primer cop surt cara”; tenim que $P(\mathrm{U}) = 1/2$ i $P(\mathrm{F}) = 1/2$; també tenim que $P(\mathrm{U} \cap \mathrm{F}) = 2/8 = 1/4$. Com que $P(\mathrm{U} \cap \mathrm{F}) = 2/8 = 1/4 = P(\mathrm{U}) \cdot P(\mathrm{F})$, arribem a la conclusió que els successos són independents.

6. Llancem una moneda trucada tres cops:
Calcularem les probabilitats de cadascun dels possibles resultats:

$$P(\mathrm{CCC}) = 0{,}8^3 = 0{,}512$$

ja que, com que les tirades són independents:

$$P(\mathrm{CCC}) = P(\text{“primera és cara”} \cap \text{“segona és cara”} \cap \text{“tercera és creu”}) =$$
$$= P(\text{primera és cara}) \cdot P(\text{segona és cara}) \cdot P(\text{tercera és cara}) = 0{,}8^3$$

$$P(\mathrm{CC+}) = 0{,}8^2 \cdot 0{,}2$$

ja que, com que les tirades són independents:

$$P(\mathrm{CC+}) = P(\text{“primera és cara”} \cap \text{“segona és cara”} \cap \text{“tercera és creu”}) =$$
$$= P(\text{“primera és cara”}) \cdot P(\text{“segona és cara”}) \cdot P(\text{“tercera és creu”}) = 0{,}8^2 \cdot 0{,}2$$

Seguint aquest raonament tenim la taula següent:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Resultat	CCC	CC+	C+C	+CC	C++	+C+	++C	+++
Probabilitat	$0{,}8^3$	$0{,}8^2 \cdot 0{,}2$	$0{,}8^2 \cdot 0{,}2$	$0{,}8^2 \cdot 0{,}2$	$0{,}8 \cdot 0{,}2^2$	$0{,}8 \cdot 0{,}2^2$	$0{,}8 \cdot 0{,}2^2$	$0{,}2^3$

- La probabilitat d’obtenir dues cares serà la suma de les probabilitats dels successos 2, 3 i 4; és, doncs: $0{,}8^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}384$.

- La probabilitat d’obtenir almenys una cara serà la suma de les probabilitats dels resultats 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 o u menys la probabilitat del resultat 8, és a dir, serà: $1 - 0{,}2^3 = 0{,}992$.

- Dues cares consecutives, però no tres cares es corresponen amb els successos 2 i 4, la suma de les probabilitats dels quals és: $0{,}8^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}256$.

- Ara hem de calcular:

P(“dues cares consecutives, però no tres cares”$\cap$“han sortit dues cares”) /
/ P(“han sortit dues cares”) = 0,256/0,384 = 0,67

- Hem vist que:

  P(“dues cares consecutives, però no tres cares” | “han sortit dues cares”) = 0,67

  però P(“dues cares consecutives, però no tres cares”) = 0,256 i, per tant, els successos no són independents.

- Considerem els successos de l’exercici anterior:

  U = “el tercer cop surt cara” i F = “el primer cop surt cara”

  tenim que:

  $$P(U) = 0{,}8^3 + 0{,}8^2\, 0{,}2 + 0{,}8^2\, 0{,}2 + 0{,}8\; 0{,}2^2 = 0{,}8$$

  És evident que $P(F) = 0{,}8$; també tenim que $P(U \cap F) = 0{,}8^3 + 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}64$. Com que $P(U \cap F) = 0{,}64 = P(U) \cdot P(F)$, arribem a la conclusió que els successos són independents.

7.
a) Si apliquem la definició, tenim que: $P(A^C \mid B) = P(A^C \cap B) / P(B)$; d’altra banda, sabem que $P(B) = P(B \cap A^C) + P(A \cap B)$ i, així, $P(B \cap A^C) = P(B) - P(A \cap B)$. Per tant:

$$P(A^C|B) = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B)$$

b) $P(A|B) \cdot \dfrac{P(B)}{P(A)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot \dfrac{P(B)}{P(A)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B|A)$

8.
a) En total van respondre cent persones, de les quals setanta eren homes. Per tant:

P(“home”) = 70/100.

b) Com que hi ha quaranta-dos homes que han visitat la Vall de Núria, P(“home” $\cap$ “ha visitat Núria”) = 42/100.

c) Ens demanen que calculem la probabilitat següent:

P(“no ha visitat la Vall de Núria” | “home”) =
= P(“no ha visitat la Vall de Núria” $\cap$ “home”) / P(“home”) =
= (28/100) / (70/100) = 0,4

d) Ens demanen:

P(“dona” | “ha visitat la Vall de Núria”) =
P(“dona” $\cap$ “ha visitat la vall de Núria”) / P(“ha visitat la Vall de Núria”) =
= (18/100) / (60/100) = 0,3

e) Podem calcular les probabilitats següents:

P(“ha visitat la Vall de Núria”) = 60/100 = 0,6 i
P(“ha visitat la Vall de Núria” | “home”) = (42/100) / (70/100) = 0,6

Com que aquestes probabilitats són iguals, els successos són independents, i en ser successos independents, podem afirmar que el fet de ser home ni afavoreix ni dificulta el que una persona hagi visitat la Vall de Núria.

El teorema de Bayes

En aquesta sessió presentarem el teorema de Bayes, un resultat importantíssim per a entendre les relacions causa-efecte entre diferents successos. Començarem treballant amb particions de l'espai mostral i relacionant-les amb la probabilitat condicionada.

1. Particions

Començarem per definir una partició d'un conjunt qualsevol.

> Donat un conjunt qualsevol E, una **partició** de E és una col·lecció de subconjunts de E disjunts, tals que la seva unió és el conjunt E.

Utilitat de les particions

Com tindrem oportunitat de veure més endavant, el fet de treballar amb dues particions permet d'estudiar situacions en què s'estudien consecutivament dues característiques i veure com la primera influeix en la segona (i també com la segona influeix en la primera).

És a dir, $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ és una partició de E si es verifiquen les condicions següents:

1) $A_i \cap A_j = \varnothing$ per a tot $i, j, i \neq j$
2) $A_1 \cup \ldots \cup A_m = E$

Sobre un mateix conjunt podem tenir diferents particions segons diferents conceptes.

Algunes possibles particions

1) Si considerem el conjunt O dels ordinadors de la nostra empresa, podem obtenir una partició segons el seu processador, de manera que, per exemple,

$$O = \{\text{“ordinadors amb PIII”}\} \cup \{\text{“ordinadors amb PIV”}\}$$

(suposant que cada ordinador té només un processador i que només tenim dos tipus de processador: PIII i PIV).

També tenim una partició segons la RAM que tenen instal·lada, segons la qual, per exemple, $O = \{\text{“64Mb”}\} \cup \{\text{“128MB”}\} \cup \{\text{“264Mb”}\}$ (sempre suposant que només tenim aquestes possibilitats).

2) Si considerem el conjunt E dels estudiants d'informàtica de Catalunya, podem obtenir diferents particions:

a) Segons el sexe: $E = \{\text{“homes”}\} \cup \{\text{“dones”}\}$

b) Segons el nombre de fills:

$$E = \{\text{“no tenen cap fill”}\} \cup \{\text{“tenen 1 fill”}\} \cup \{\text{“tenen 2 fills”}\} \cup \\ \cup \{\text{“tenen 3 fills”}\} \cup \{\text{“tenen 4 fills”}\} \cup \{\text{“tenen més de 4 fills”}\}$$

c) Segons si els agraden els calçots:

$E = \{\text{“estudiants a qui agraden els calçots”}\} \cup \{\text{“estudiants a qui no agraden els calçots”}\}$

2. Teorema de les probabilitats totals

El **teorema de les probabilitats totals** afirma que si $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ és una partició de l'espai mostral Ω i B és qualsevol succés, tenim que:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + ... + P(B \cap A_m)$$

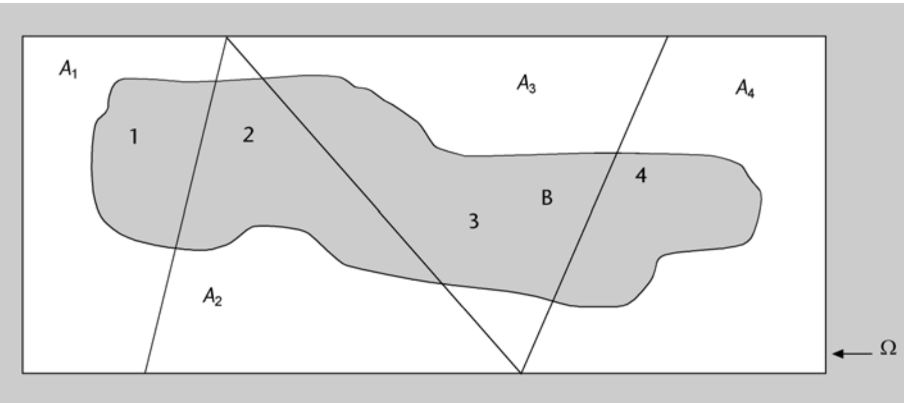
o el que és el mateix:

$$P(B) = P(B|A_1)\cdot P(A_1) + P(B|A_2)\cdot P(A_2) + P(B|A_3)\cdot P(A_3) + ... + P(B|A_m)\cdot P(A_m)$$

Demostració del teorema de les probabilitats totals

La demostració del resultat del teorema de les probabilitats és purament conjuntista. És fàcil veure que com que $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ és una partició de l'espai mostral, tenim que $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_m)$, i que com que $B \cap A_i$ i $B \cap A_j$ són sempre disjunts (ja que A_i i A_j ho són), tenim, per la probabilitat de la unió de conjunts disjunts que $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_m)$. Com que $P(B \cap A_i) = P(B \mid A_i)\ P(A_i)$, tenim la segona fórmula del teorema.

Gràficament el teorema de les probabilitats totals s'entén molt fàcilment (suposem que la partició consta de quatre conjunts): primer, dibuixem l'espai mostral Ω i els conjunts de la partició, conjunts que es reparteixen els uns amb els altres tots els punts de l'espai mostral, sense que cap punt no estigui simultàniament en dos dels conjunts; ara representem un succés B arbitrari; aquest succés es pot descompondre en la unió dels resultats de B que estan en cadascun dels A_i.



Representació gràfica del teorema

Els elements de B estan repartits entre els conjunts $A_1, A_2, ..., A_m$: cada element de B és en un i només en un dels A_i. La regió 1 és $A_1 \cap B$, la 2, $A_2 \cap B$,...

Exemples d'aplicació del teorema de les probabilitats totals

a) Suposem que dins el col·lectiu d'estudiants de la UOC els nois fumadors representen el 15% del total i que les noies fumadores representen el 12% del total. Quin percentatge d'alumnes de la UOC fumen? En aquest exemple considerem B = "fumar" i la partició $\{A_1, A_2\}$ on A_1 = "home" i A_2 = "dona". Per aplicació del teorema de les probabilitats totals i com que {"home", "dona"} és una partició del conjunt d'alumnes, tenim que:

$$P(\text{"fumar"}) = P(\text{"fumar"} \cap \text{"home"}) + P(\text{"fumar"} \cap \text{"dona"}) = 0{,}15 + 0{,}12 = 0{,}27$$

b) En una altra universitat, el 54% dels estudiants són homes i el 46%, dones; d'altra banda, el 30% dels homes són fumadors, mentre que de les dones el 25% són fumadores. Quin percentatge d'alumnes d'aquesta universitat fumen? Observeu que en aquest cas disposem d'informació sobre el percentatge de fumadors dins de cada sexe, és a dir, disposem de les probabilitats condicionades de fumar per cada sexe, P("fuma" | "home") = 0,3, P("fuma" | "dona") = 0,25. Per aplicació del teorema de les probabilitats totals i com que {"home", "dona"} és una partició del conjunt d'alumnes, tenim que:

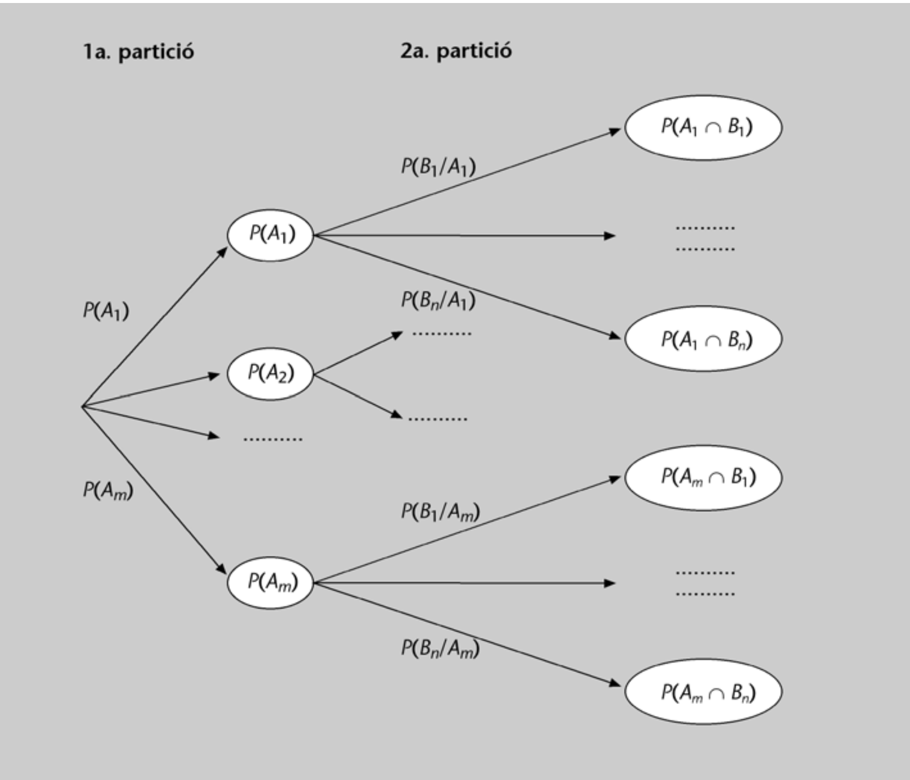
P("fumar") = P("fumar" | "home") · P("home") + P("fuma" | "dona") · P("dona") =
= 0,30 · 0,54 + 0,25 · 0,46 = 0,277

3. Arbres de probabilitat i probabilitat condicionada

Suposem que ara disposem de dues particions $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ i $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ de l'espai mostral; una manera molt útil de representar les particions i les probabilitats de la forma $P(A_i \mid B_j)$ i $P(A_i \cap B_j)$ per a totes les possibles parelles (A_i, B_j) consisteix a dibuixar l'arbre de probabilitat d'aquestes dues particions, arbre que té la forma següent:

Ordre de les particions

Si disposem de dues particions, considerarem normalment com a primera partició aquella que conté els successos que es donen abans en el temps, o bé aquells que es poden considerar causes dels successos de la segona partició.



en què, com es pot veure:

a) A cada node tenim la probabilitat d'estar situats en aquest.

b) A cada branca tenim la probabilitat de passar per la branca, suposant que estiguem situat en el node en què comença la branca.

A més:

a) En cada node terminal tenim la probabilitat de la intersecció, que es pot calcular com el producte de les probabilitats de les branques que cal agafar per a arribar al node, ja que $P(A_i \cap B_j) = P(A_i) \cdot P(B_j \mid A_i)$.

b) La suma de les probabilitats de les branques que surten d'un mateix node és 1 (això és degut al fet que tant les A_i com les B_j són particions de l'espai mostral).

c) La suma dels valors de tots els nodes terminals ha de ser 1.

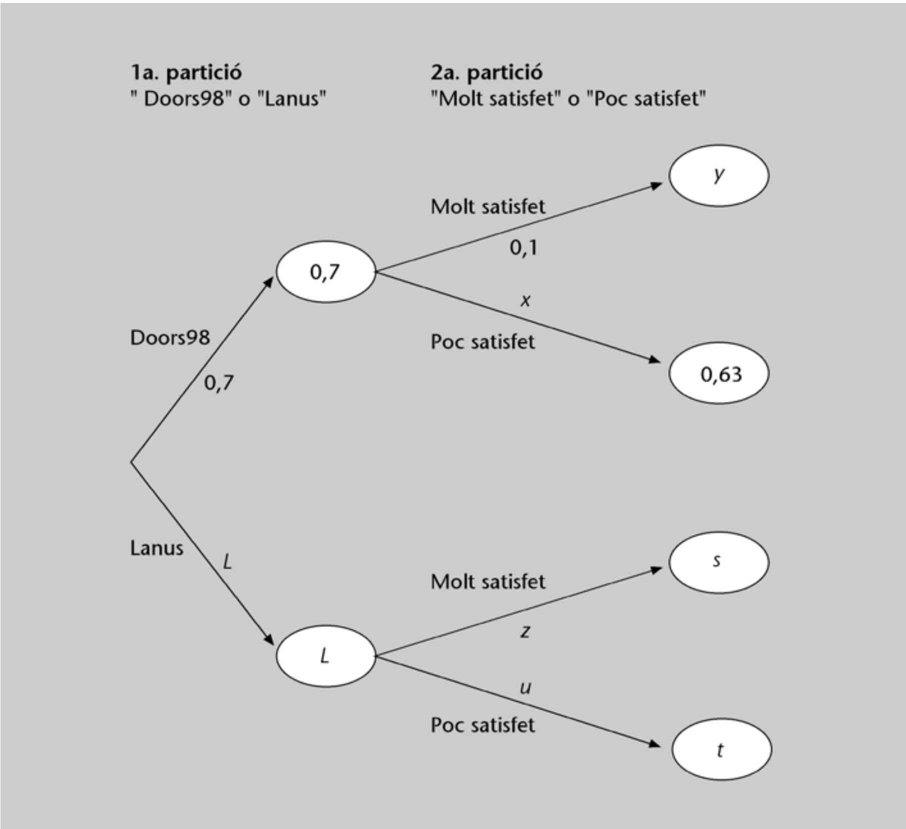
d) Pel teorema de les probabilitats totals tenim que $P(B) = P(B \cap A_1) + \ldots +$ $+ P(B \cap A_m)$. Per tant, la probabilitat de B és la suma de les probabilitats de tots els nodes terminals en els quals la branca que hi arriba és B.

Exemple: Lanus enfront de Doors98

Fem un estudi sobre el grau de satisfacció dels usuaris amb el sistema operatiu amb el qual treballen. A la nostra empresa només tenim ordinadors amb Doors98 i Lanus i només es podia contestar "Molt satisfet" i "Poc satisfet". L'espai mostral són els usuaris que estan distribuïts en dues particions: {"Doors98", "Lanus"}, si atenem al sistema operatiu i {"Molt satisfet", "Poc satisfet"}, si atenem al seu grau de satisfacció. Suposem que de l'enquesta es desprèn que:

- P("Doors98") = 0,7
- P("Molt satisfet" | "Doors98") = 0,1
- P("Doors98" $\cap$ "Poc satisfet") = 0,63
- P("Molt satisfet") = 0,34

En aquest cas concret, convé considerar com a primera partició el sistema operatiu, ja que pensem que pot ser la causa de la satisfacció o no dels usuaris. Amb la qual cosa tenim l'arbre següent amb algunes incògnites que cal trobar:

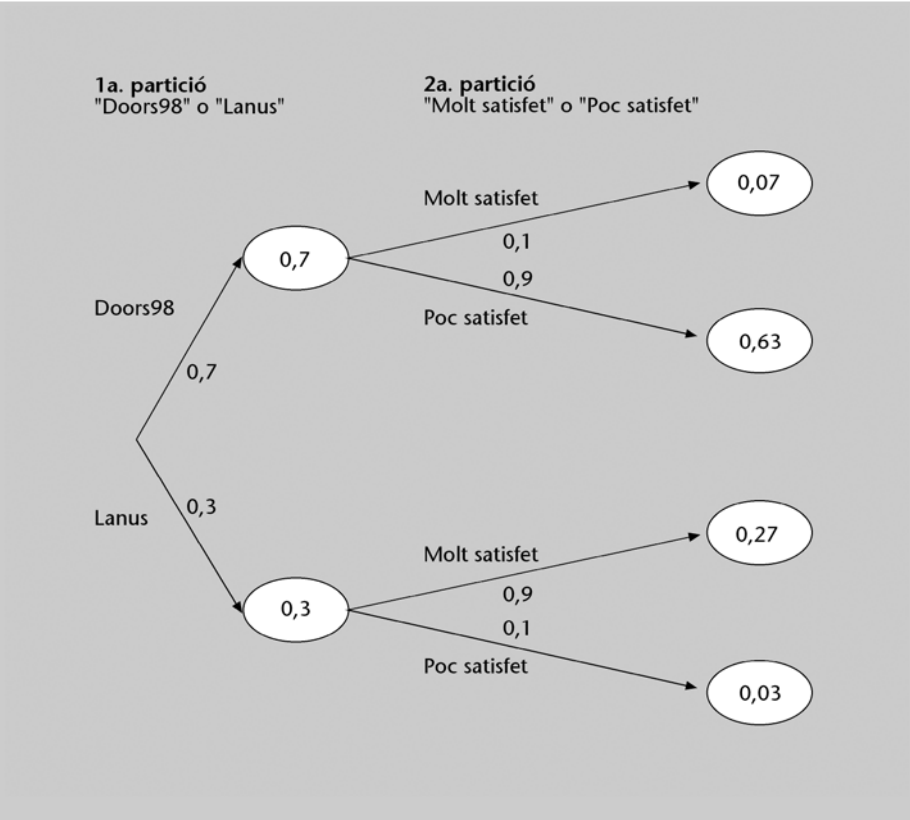


Ara tenim que:

- $L = 0{,}3$, ja que $L + 0{,}7 = 1$
- $y = P$("Doors98" $\cap$ "Molt satisfet") $= P$("Molt satisfet" | "Doors98") $\cdot$ P("Doors 98") = $= 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}07$

- Com que s i y són els nodes terminals tals que la branca que hi arriba és “Molt satisfet”, tenim que $s + y = P$(“Molt satisfet”) = 0,34 i, per tant, $s = 0{,}34 - 0{,}07 = 0{,}27$.
- Com que $z \cdot L = s$, tenim que $z = s/L = 0{,}27/0{,}3 = 0{,}9$.
- Ara tenim que $u = 0{,}1$ (ja que $u + z = 1$) i que $t = L \cdot u = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03$.

Finalment, l’arbre queda de la manera següent:



Així, podem veure com l’ús de “Lanus” causa l’efecte de molta satisfacció en el 90% dels casos, mentre que, per exemple, l’ús de “Doors98” només causa molta satisfacció en un 10% dels casos.

Arbres com els presentats en aquesta secció permeten de considerar les relacions entre la primera partició i la segona en termes de causes i efectes: la primera partició (usar “Doors98” o “Lanus”) són les possibles causes dels efectes recollits en la segona partició (“estar molt satisfet” o “estar poc satisfet”).

4. Taules de contingència

Un mecanisme molt útil per a descriure i trobar relacions de dependència o independència entre successos són les anomenades **taules de contingència.**

Formalment tenim, com en els arbres de probabilitat, dues particions $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ i $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ de l’espai mostral i construïm una taula com aquesta, taula que conté com a files els successos d’una partició i com a columnes, els successos de l’altra partició; en la intersecció de cada fila i columna apareix la probabilitat de la intersecció dels corresponents successos:

	A_1	A_2	...	A_m	Total
B_1	$P(B_1 \cap A_1)$	$P(B_1 \cap A_2)$	...	$P(B_1 \cap A_m)$	$P(B_1)$
B_2	$P(B_2 \cap A_1)$	$P(B_2 \cap A_2)$	...	$P(B_2 \cap A_m)$	$P(B_2)$
...					
B_n	$P(B_n \cap A_1)$	$P(B_n \cap A_2)$	...	$P(B_n \cap A_m)$	$P(B_n)$
Total	$P(A_1)$	$P(A_2)$	...	$P(A_m)$	1

En la darrera columna i en la darrera fila apareixen les anomenades *probabilitats marginals*, que són les probabilitats de cadascun dels successos de les particions involucrades; es poden calcular sumant les probabilitats de la fila o de la columna corresponent.

Independència de dos successos

Per a comprovar la independència de dos successos, sempre s'ha d'exhibir un argument basat en el càlcul de les probabilitats de A, de B, de $A \cap B$, de $A \mid B$ o de $B \mid A$ i en la relació entre aquestes probabilitats.

Aquestes taules permeten de visualitzar fàcilment la independència de successos, ja que, per exemple, A_2 i B_2 són independents si $P(A_2 \cap B_2) = P(A_2) \cdot P(B_2)$, és a dir, si el producte dels marginals corresponents és, efectivament, la probabilitat de la intersecció. Per a calcular les probabilitats condicionades, dividirem la casella corresponent pel total de la fila (si condicionem pel valor de la fila) o pel total de la columna (si condicionem sobre el total de la columna).

Exemples d'utilització de taules de contingència

a) Suposem que a partir de les dades dels ordinadors d'una empresa de la competència obtenim la taula de contingència següent que relaciona el processador ($A1$, $A2$) i la memòria RAM de les màquines:

	64Mb	128MB	Total
$A1$	10/50	20/50	30/50
$A2$	10/50	10/50	20/50
Total	20/50	30/50	1

A partir de la taula podem concloure el següent:

- Els successos "$A1$" i "64Mb" de RAM no són independents, ja que $(30/50) \cdot (20/50) \neq 10/50$.
- La probabilitat de tenir 128Mb de RAM sabent que té "$A2$" és P("128Mb" $\cap$ "$A2$") / / P("$A2$") = (10/50) / (20/50).
- La probabilitat de tenir 64Mb de RAM sabent que té un "$A1$" és P("64MB" $\cap$ "$A1$") / / P("$A1$") = (10/50) / (30/50).

b) En l'exemple Lanus enfront de Doors98 podem obtenir la taula de contingència següent:

	Molt satisfet	Poc satisfet	Total
Doors98	0,07	0,63	0,7
Lanus	0,27	0,03	0,3
Total	0,34	0,66	1

En què veiem clarament que ser usuari de Lanus i estar molt satisfet no són independents, ja que ($0{,}3 \cdot 0{,}34 \neq 0{,}27$). Cosa raonable, ja que com hem demostrat abans usar Lanus augmenta el nivell de satisfacció de l'usuari.

5. El Teorema de Bayes

A continuació, considerem la mateixa situació de la que parteix el teorema de les probabilitats totals, és a dir, que disposem d'un succés B i d'una partició $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$; d'aquesta manera, podem calcular la probabilitat de B com a:

$$P(B) = P(B \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(B \mid A_2) \cdot P(A_2) + ... + P(B \mid A_m) \cdot P(A_m).$$

És a dir, sabent les probabilitats de B condicionat a cadascun dels A_i i les probabilitats dels A_i, podem obtenir la probabilitat de B. Si volem interpretar aquest resultat en termes de causa–efecte, tenim que el succés B es pot produir com a efecte de m possibles causes ($A_1, ..., A_m$) i que per a calcular la probabilitat de B, cal fer la suma dels productes de la probabilitat que es doni a cadascuna de les causes per la probabilitat que, donada la causa, ocorri efectivament B.

Ara "girarem" la situació i intentarem de calcular la probabilitat de cadascuna de les causes, sabent que s'ha produït l'efecte B. *A*ixò ens pot semblar una mica complicat, però resulta que calcular les probabilitats de cadascun dels A_i (causes) condicionats a B (efecte) és bastant fàcil, manipulant adequadament les probabilitats.

El **teorema de Bayes** estableix que si $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ és una partició de Ω i són conegudes les probabilitats de B condicionat a cadascun dels A_i i la probabilitat de cadascun dels A_i , podem calcular la $P(A_i \mid B)$ de la manera següent:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) + \ldots + P(B|A_m)P(A_m)}$$

Demostració del teorema de Bayes

Aquest teorema és molt fàcil de demostrar seguint els passos següents:

1) Primer, la definició de probabilitat condicionada segons la qual:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

2) Després, només cal aplicar el teorema de les probabilitats totals i substituir $P(B)$ per $P(B \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(B \mid A_2) \cdot P(A_2) + ... + P(B \mid A_m) \cdot P(A_m)$.

Aplicació del teorema de Bayes a un cas particular

En el cas de Lanus enfront de Doors98, tenim les probabilitats de cada nivell de satisfacció condicionades pel sistema operatiu que s'utilitza. És a dir, coneixem les probabilitats dels suposats efectes ("satisfet" o "no satisfet") condicionats a les suposades causes (usar un sistema o l'altre).

Ara, ens podem preguntar les probabilitats d'usar un cert sistema a partir del grau de satisfacció de l'usuari; és a dir, ens preguntem les probabilitats de cadascuna de les causes (ús d'un sistema o un altre) condicionades pels efectes sobre els usuaris (grau de satisfacció). En aquest cas, haurem d'utilitzar el teorema de Bayes. Suposem que ens demanen

P("Doors98" | "està molt satisfet"); per a calcular-la, haurem d'efectuar les operacions següents (en què abreugem "Doors98" per D98, "Lanus" per L i "molt satisfet" per S:

$$P(D98|S) = \frac{P(S|D98) \cdot P(D98)}{P(S|D98) \cdot P(D98) + P(S|L) \cdot P(L)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}7}{0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}3} = 0{,}2058$$

I, per tant, dins el grup dels usuaris satisfets la probabilitat d'usar Doors98 és de 0,2058.

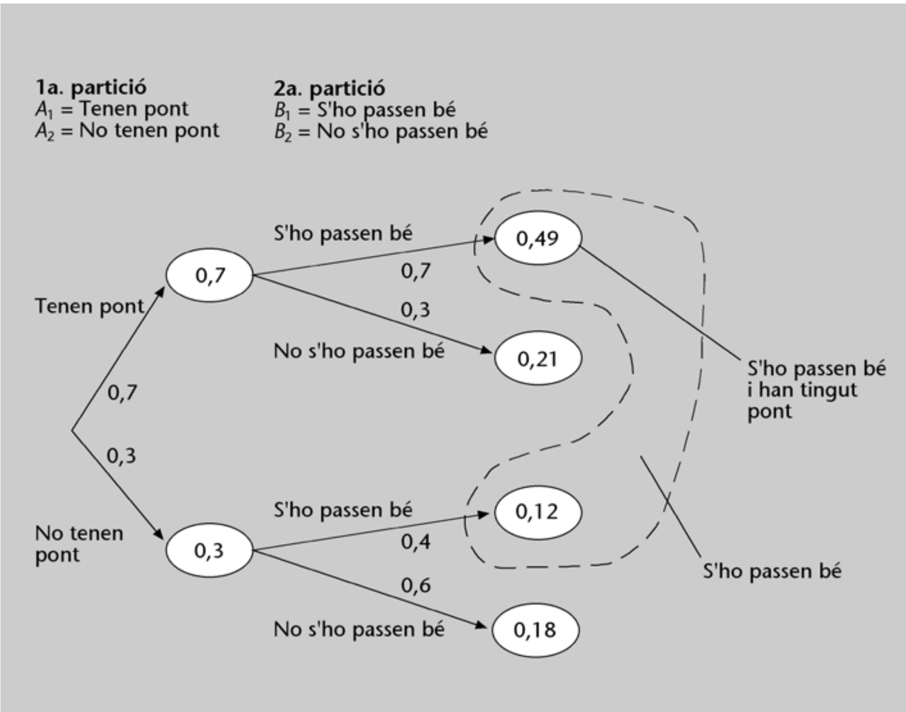
En aquest cas particular, el teorema de Bayes en permet d'invertir les relacions causa-efecte, ja que és com si poguéssim anar enrere en el temps i, partint del grau de satisfacció sobre el sistema informàtic, remuntar-nos a la probabilitat de la causa d'aquesta satisfacció. En l'exemple anterior, si escollim un usuari a l'atzar i resulta estar satisfet, tenim una probabilitat de 0,2058 que sigui usuari de D98, mentre que tenim una probabilitat de (1 – 0,2058) = 0,7942 que sigui usuari de "Lanus". Com podeu veure, usar "Lanus" és una causa molt més probable de satisfacció que usar D98!

6. El teorema de Bayes sobre un arbre de probabilitats

Si estem treballant amb un arbre de probabilitats concret, el teorema de Bayes té una formulació equivalent molt intuïtiva; ho veurem amb un exemple. Segons l'època del curs en què estudieu aquest material, es possible que estigueu preparant el pont del sis al vuit de desembre. En aquest cas, potser us interessarien aquestes dades (fictícies) sobre com s'ho passa la gent en aquest pont:

a) El 70% dels catalans tenen (o s'agafen pont).
b) Dels catalans que agafen pont, el 70% declaren haver-s'ho passat bé.
c) Dels catalans que no agafen pont, el 40% declaren haver-s'ho passat bé.
d) Només admetem dues possibilitats: passar-s'ho bé o no.

El corresponent arbre de probabilitats és el següent:



En aquest cas, la primera partició és la que conté els esdeveniments que ocorren temporalment en primer lloc: primer, es fa (o no es fa) pont i després, es respon la pregunta de si s'ho han passat bé. D'alguna manera també estem pressuposant que la causa de passar-s'ho bé és haver fet el pont!

Ara, ens preguntem la probabilitat que una persona hagi tingut pont sabent que ha afirmat haver-s'ho passat bé ($P(A_1 \mid B_1)$). Si ens fixem en l'arbre, observem que el 61% (0,49 + 0,12 = 0,61) diuen que s'ho han passat bé, però només el 49% (0,49) han tingut pont; per tant, forçosament tindrem que la probabilitat d'haver gaudit del pont sabent que s'ho han passat bé és de 80.32% (0,49 / 0,61 = 0,8032). Així, doncs, podem pensar que en el 80,32% dels casos passar-s'ho bé és a causa del pont.

És a dir, la probabilitat P("té pont | s'ho ha passat bé") = $P(A_1 \mid B_1)$ es calcula dividint la probabilitat del node "s'ho passen bé i han tingut pont" per la suma de les probabilitats corresponents a "passar-s'ho bé", es a dir:

$$P(\text{té pont}|\text{s'ho passa bé}) =$$

$$= \frac{\text{probabilitat del node "tenen pont i s'ho passen bé"}}{\text{suma de les probabilitats del nodes corresponents a passar-s'ho bé}} =$$

$$= \frac{0{,}49}{0{,}49 + 0{,}12}$$

I, en general, en un arbre de probabilitats en què apareixen les probabilitats $P(B \mid A_i)$, la $P(A_i \mid B)$ es calcula com:

$$P(A_i|B) = \frac{\text{Probabilitat del node corresponent a } A_i \cap B}{\text{Suma de les probabilitats dels nodes corresponents a } B}$$

Càlcul de probabilitats pel teorema de Bayes

En l'exemple del pont del sis al vuit de desembre, quines són les probabilitats...

a) de tenir pont sabent que no s'ho han passat bé?

b) de no tenir pont sabent que no s'ho han passat bé?

c) de no tenir pont sabent que s'ho han passat bé?

d) que els successos tenir pont i passar-s'ho bé són independents?

a)

$$P(\text{"té pont"}|\text{"no s'ho passa bé"}) =$$

$$= \frac{P(\text{"pont"} \cap \text{"no s'ho passa bé"})}{P(\text{"no s'ho passa bé"})} = \frac{0{,}21}{0{,}21 + 0{,}18} = 0{,}5384$$

És a dir, la probabilitat que una persona hagi tingut pont sabent que no s'ho ha passat bé és de 0,53; dit d'una altra manera, el 53% dels qui no s'ho han passat bé han tingut pont (potser estaven en una retenció de tràfic).

b)

$$P(\text{"no té pont"}|\text{"no s'ho passa bé"}) =$$

$$= \frac{P(\text{"no té pont"} \cap \text{"no s'ho passa bé"})}{P(\text{"no s'ho passa bé"})} = \frac{0{,}18}{0{,}21 + 0{,}18} = 0{,}4615$$

Els ponts i les causes

En termes de causes i efectes, podem entendre tenir pont o no tenir-lo com a causes dels efectes passar-s'ho bé o no. El teorema de Bayes permet de trobar les probabilitats que els efectes provinguin d'alguna de les possibles causes. Per exemple, *P*("tenir pont" | "s'ho ha passat bé") ens diu fins a quin punt tenir pont es pot considerar com a causa de passar-s'ho bé, ja que ens diu quin és el percentatge dels qui s'ho han passat bé que han tingut pont.

c) P(“no té pont” | “s’ho ha passat bé”) = 0,12 / (0,49 + 0,12) = 0,1967.

d) Els successos no són independents, ja que:

$$P(\text{“té pont”} \mid \text{“s’ho ha passat bé”}) = 80{,}32\%$$

que és major que la probabilitat de tenir pont (70%); és a dir, el fet de passar-s’ho bé (efecte) fa que augmenti la probabilitat d’haver tingut pont (causa).

Acabarem aquesta sessió amb un fragment d’un llibre de John Allen Paulos que esperem ajudi a entendre millor els càlculs i la interpretació que es poden fer del teorema de Bayes. És recomenable que rescriviu l’exemple en forma d’arbre i que comproveu els càlculs:

“Una elaboración interesante a partir del concepto de probabilidad condicional es el conocido teorema de Bayes, que fue demostrado por primera vez por Thomas Bayes en el siglo dieciocho, *y* constituye la base del siguiente resultado, un tanto sorprendente, con importantes consecuencias para los análisis de SIDA o la detección del consumo de drogas.

Supongamos que haya un análisis para detectar el cáncer con una fiabilidad del 98%; es decir, si uno tiene cáncer el análisis dará positivo el 98% de las veces, *y* si no lo tiene, dará negativo el 98% de las veces. Supongamos además que el 0,5% de la población –una de cada doscientas personas– padece verdaderamente cáncer.

Imaginemos que uno se ha sometido al análisis *y* que su médico le informa en tono pesimista que ha dado positivo. ¿Hasta qué punto ha de deprimirse esa persona? Lo sorprendente del caso es que dicho paciente ha de mantenerse prudentemente optimista. El porqué de este optimismo lo encontramos al determinar la probabilidad condicional de que uno tenga cáncer sabiendo que el análisis ha dado positivo.

Supongamos que se hacen 10.000 pruebas de cáncer. ¿Cuántas de ellas darán positivo? En promedio 9, 50 de estas 10.000 personas (el 0,5% de 10.000) tendrán cáncer, *y* como o el 98% de ellos darán positivo, tendremos 49 análisis positivos. Por otra parte, el 2% de las 9.950 personas restantes, que no padecen cáncer, también darán positivo, con un total de 199 análisis positivos (0,02 · 9.950 = 199). Así, del total de 248 positivos (199 + 49 = = 248), la mayoría son falsos positivos, *y* la probabilidad condicional de padecer el cáncer sabiendo que se ha dado positivo es sólo 49/248, aproximadamente un 20%! (Hay que comparar este porcentaje relativamente bajo con la probabilidad de dar positivo en el supuesto de que se tenga efectivamente el cáncer que, por hipótesis, es del 98%)”.

John Allen Paulos. *El hombre anumérico*. Tusquets Editores, Metatemas 20 (1990).

7. Resum

En aquesta sessió s’introdueixen dos resultats importantíssims per a entendre la probabilitat i com la podem aplicar a multitud de situacions: el teorema de les probabilitats totals i el teorema de Bayes. Per a enunciar aquests resultats, és necessari treballar amb particions i per a facilitar el seguiment de la teoria i la visualització dels resultats, s’introdueixen els arbres de probabilitat i les taules de contingència.

Els resultats d’aquesta sessió són molt tècnics i resumir-ne el contingut informalment resulta molt difícil; de tota manera, podem dir que el teorema de les probabilitats totals permet de calcular la probabilitat d’un succés sabent la probabilitat del succés en totes les possibles circumstàncies en què es pot donar. El teorema de Bayes permet de calcular certes probabilitats condicionades, probabilitats essencials per a entendre molts resultats; aquest teorema admet una presentació molt senzilla a partir de certs arbres de probabilitat.

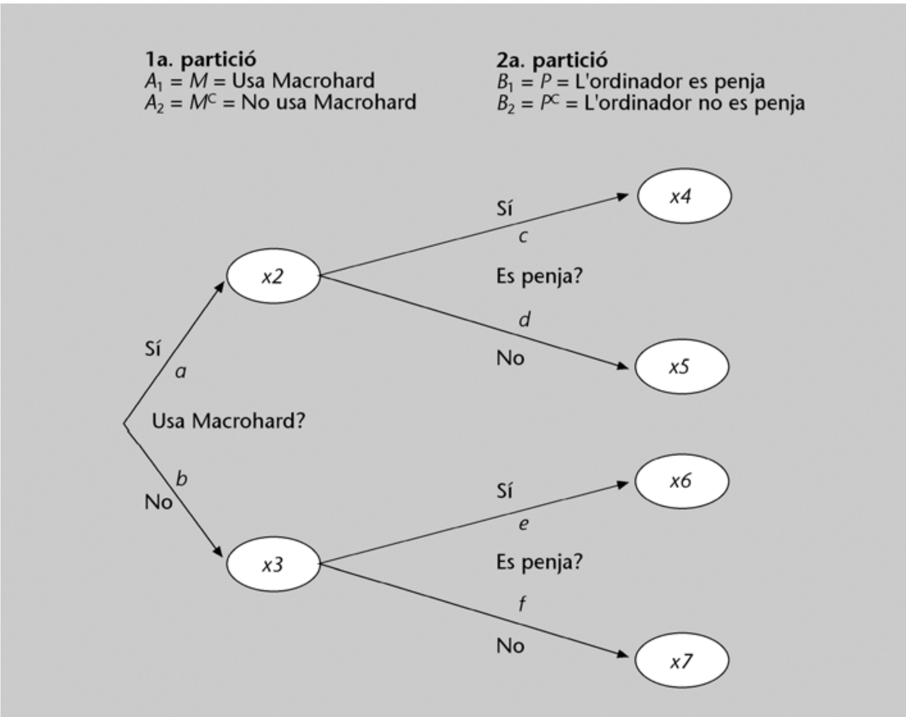
Exercicis

1. Un amic ha efectuat un estudi sobre la satisfacció dels usuaris de diferents entorns informàtics i ha resumit la informació obtinguda en forma de taula de contingència. La transmissió de la taula per fax no ha estat gaire bona i ens ha arribat amb alguns "forats" que han estat substituïts per lletres majúscules:

Grau de satisfacció					
	Gens	**Poc**	**Bastant**	**Molt**	**Total**
Linux	0,05	0,15	*A*	*B*	0,7
Windows	0,15	0,05	*C*	*D*	0,3
Total	0,2	0,2	0,3	0,3	1

a) Quina és la probabilitat que un usuari de Linux estigui poc satisfet amb l'entorn?
b) Quina és la probabilitat que una persona sigui usuari de Linux i respongui gens satisfet?
c) Els successos "ser usuari de Windows" i "estar gens satisfet", són independents?
d) Calculeu el valor de *A*, si el meu amic em confirma telefònicament que els successos "ser usuari de Linux" i "estar bastant satisfet" són independents.
e) Amb el valor de *A* calculat abans, trobeu els valors de *B*, *C* i *D* i reconstruïu la taula de contingència original.

2. Donat l'arbre de probabilitats següent:



en el qual si els successos són M = "Usa MicroHardPhrase" i P = "Es penja l'ordinador", sabem el següent:

- $P(M) = 0{,}8$
- $P(P^C \mid M) = 0{,}1$
- $P(P) = 0{,}74$

Es demana:

a) Acabeu d'omplir l'arbre de probabilitats (valors de $x2$, $x3$, $x4$, $x5$, $x6$, $x7$ i a, b, c, d, e, f).
b) Els successos M i P són independents?
c) Quant val $P(\mathrm{M}^C \cap P)$?

3. S'instal·la un programa antivirus en un ordinador. La probabilitat que l'ordinador tingui un virus detectable per l'antivirus és de 0,2. Si l'ordinador té el virus, la probabilitat que l'antivirus el detecti és de 0,9. Si l'ordinador no té el virus, la probabilitat que l'antivirus doni un missatge d'existència de virus és de 0,02.

a) Demostreu que la probabilitat que l'antivirus detecti un virus (pot existir o no) és 0,196.
b) Calculeu la probabilitat que l'ordinador no tingui virus i hagi aparegut un missatge d'existència de virus.
c) Calculeu la probabilitat que, si ha aparegut un missatge d'existència de virus, l'ordinador no tingui virus.
d) Calculeu la probabilitat que l'ordinador tingui el virus i l'antivirus no el detecti.
e) Calculeu la probabilitat que si no ha sortit cap missatge d'existència de virus, l'ordinador tingui el virus.

Solucionari

1.

a) P(“poc satisfet amb l'entorn” | “usuari de Linux”) =
= P(“poc satisfet” $\cap$ “usuari de Linux”) / P(“usuari de Linux”) =
= $0{,}15/0{,}7 = 0{,}2143$

b) P(“gens satisfet” $\cap$ “usuari de Linux”) = 0,05

c) P(“gens satisfet” $\cap$ “usuari de Windows”) = 0,15 $\neq$
$\neq$ P(“gens satisfet”) $\cdot$ P(“usuari de Windows”) = $0{,}2 \cdot 0{,}3$

Per tant, no són independents.

d) Si són independents s'haurà de complir:

$A = P$(“bastant satisfet” $\cap$ “usuari de Linux”) =
= P(“bastant satisfet”) $\cdot$ P(“usuari de Linux”) = $0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21$

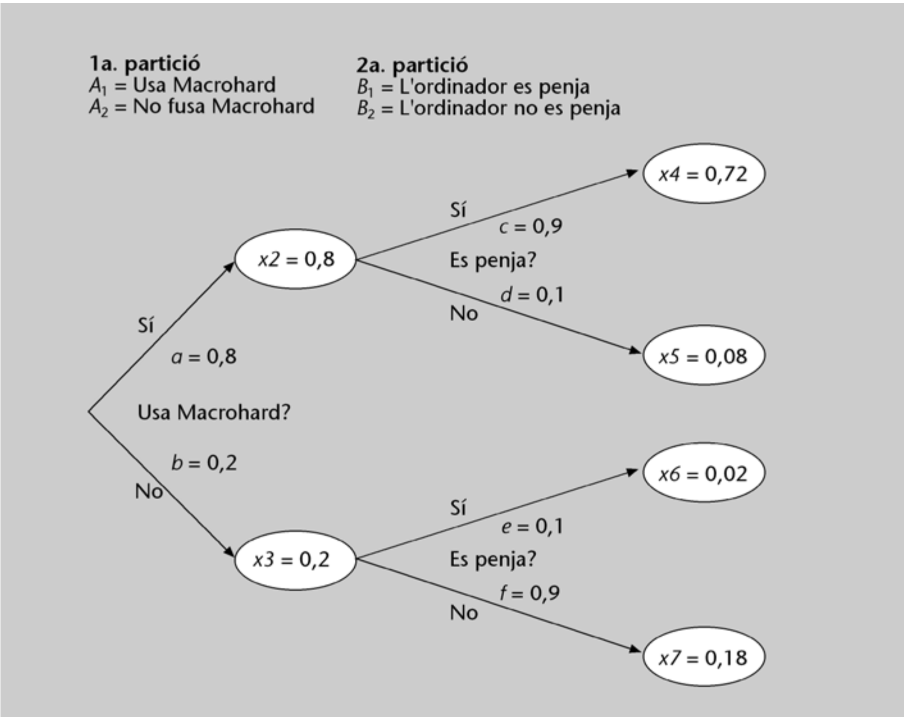
$$B = 0{,}7 - (0{,}05 + 0{,}15 + 0{,}21) = 0{,}29$$
$$C = 0{,}3 - 0{,}21 = 0{,}09;\ D = 0{,}3 - 0{,}29 = 0{,}01$$

2.

a) Observem els càlculs següents:

- $a = P(M) = 0{,}8$
- $b = P(M^C) = 1 - P(M) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$
- $x2 = a = P(M) = 0{,}8$
- $x3 = b = P(M^C) = 1 - P(M) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$
- $c = P(P \mid M) = P(P \cap M) \,/\, P(M) = P(M \cap P) \,/\, P(M) = 0{,}72/0{,}8 = 0{,}9$
- $d = P(P^C \mid M) = 0{,}1$
- $x4 = P(M \cap P) = 0{,}72$
- $x5 = P(M \cap P^C) = P(P^C \mid M) \cdot P(M) = 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}08;$
- $P(P) = 0{,}74 = P(P) = P(P \cap M) + P(P \cap M^C) = P(M \cap P) + P(M^C \cap P) =$
  $= 0{,}72 + P(M^C \cap P)$ i, per tant, $P(M^C \cap P) = 0{,}74 - 0{,}72 = 0{,}02$
  (o el que és el mateix, $x4 + x6 = 0{,}74$ i $x4 = 0{,}72$ implica $x6 = 0{,}02$)
- $x6 = P(M^C \cap P) = 0{,}02$
- $e = P(P \mid M^C) = P(M^C \cap P) \,/\, P(M^C) = 0{,}02/0{,}2 = 0{,}1$
- $f = 0{,}9$ (ja que $e + f = 1$)
- $x7 = P(M^C \cap P^C) = 0{,}18$ (també es pot fer veient que $x6 + x7 = 0{,}2$)

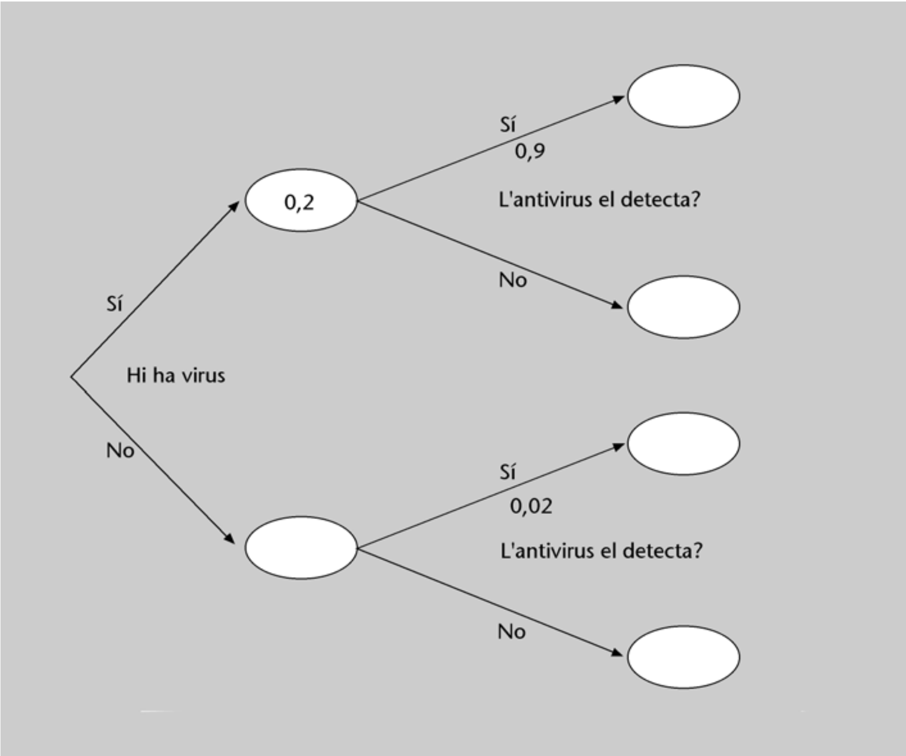
i l'arbre complet queda de la manera següent:



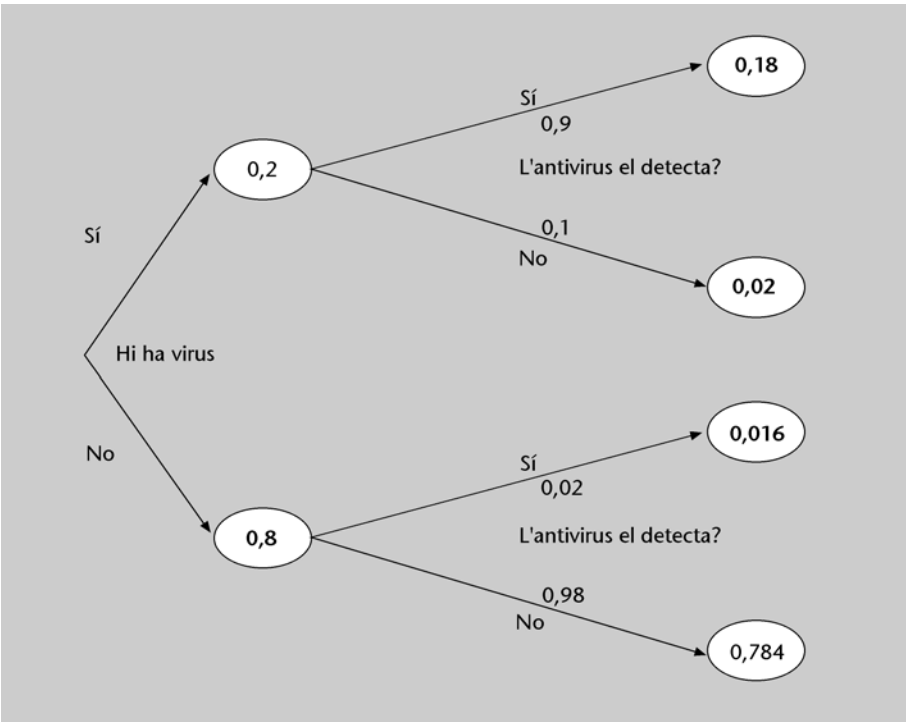
b) Com que $P(P \mid M) = 0{,}9$ i $P(P) = 0{,}74$, és clar que $P(P \mid M) = 0{,}9 \neq P(P)$ i, per tant, P i M no són independents. També es pot fer comprovant que $P(M \cap P) \neq \neq P(M) \cdot P(P)$.

c) $P(M^C \cap P)$ és la probabilitat que "no usi MicroHardPhrase" i "es pengi l'ordinador". Aquesta probabilitat correspon a $x6 = P(M^C \cap P) = 0{,}02$.

3. Podem considerar que aquest arbre en què "hi ha virus" vol dir "hi ha virus detectable").



Diem V = "l'ordinador té virus detectable per l'antivirus" i D = "l'antivirus detecta un virus". Aleshores, sabem per l'enunciat $P(V) = 0{,}2$; P("detecti el virus si hi ha virus") = $P(D \mid V) = 0{,}9$ i P("detecti el virus si no hi ha virus") = $P(D \mid V^C) = 0{,}02$. Immediatament, també sabem que $P(D^C \mid V) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Amb això podem completar l'arbre de la manera següent:



Ara podem contestar les preguntes següents:

a) Pel teorema de les probabilitats totals:

P("l'antivirus detecta un virus") =
$= P$("detecta i hi ha virus" $\cap$ "detecta i no hi ha virus") =
$= P(D) = P(D \cap V) + P(D \cap V^C) =$
$= P(D \mid V)\, P(V) + P(D \mid V^C)\, P(V^C) = (0{,}9 \cdot 0{,}2) + (0{,}02 \cdot 0{,}8) =$
$= 0{,}18 + 0{,}016 = 0{,}196$

(és la suma de les probabilitats dels nodes als quals arriba una branca del tipus SÍ el detecta).

b)

P("l'ordinador no té virus" $\cap$ "l'antivirus detecta un virus") =
$= P(V^C \cap D) = P(D \mid V^C) \cdot P(V^C) = 0{,}02 \cdot 0{,}8 = 0{,}016$

És a dir, amb una probabilitat del 0,016 l'ordinador no té virus, però l'antivirus dóna missatge d'existència de virus.

c) Pel teorema de Bayes i l'apartat **a**, tenim que:

$$P(V^C \mid D) = P(V^C \cap D) \;/\; P(D) = 0{,}016/0{,}196 = 8{,}1633 \cdot 10^{-2} = 8{,}16\%$$

És a dir, el 8,16% dels casos en què apareix un missatge d'existència de virus, l'antivirus s'equivoca, ja que no hi ha virus.

d) $P(D^C \cap V) = P(D^C \mid V) \cdot P(V) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02 = 2\%$

Aquest cas és que és preocupant: en el 2% dels casos l'ordenador té virus i l'antivirus no el troba!

e) $P(V \mid D^C) = P(V \cap D^C) \;/\; P(D^C) = 0{,}02 \;/\; (1 - 0{,}196) = 2{,}4876 \cdot 10^{-2} = 2{,}48\%$

Aquest cas també és preocupant: el 2,48% de les vegades que l'antivirus no dóna cap missatge de virus, efectivament en tenim un!