Disseny de rutes

PID_00260702

Mariona Villà Bonilla

Temps mínim de dedicació recomanat: 2 hores

Universitat
Oberta
de Catalunya

Mariona Villà Bonilla

Enginyera química i doctora en Administració i Direcció d'Empreses per la UPC. Va treballar com a professora ajudant al Departament d'Organització d'Empreses de la UPC (EUETIB) durant cinc anys, on impartia classes sobre organització de la producció. El 2015 va realitzar una estada de recerca a la Universitat Adolfo Ibáñez (Xile). Actualment, treballa a l'EAE Business School, on és responsable dels programes d'excel·lència acadèmica i docent sobre organització i administració d'empreses. La seva tasca investigadora se centra en l'estudi dels problemes d'optimització combinatòria i disseny de línies de muntatge.

L'encàrrec i la creació d'aquest recurs d'aprenentatge UOC han estat coordinats pel professor: Eduard Josep Alvarez Palau (2019)

Primera edició: febrer 2019

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Disseny: Manel Andreu
Realització editorial: Oberta UOC Publishing, SL

Índex

1. Introducció al disseny de rutes

El món, incloent el transport que utilitzem, es mou més ràpid que mai. Cada vegada les empreses competeixen més en velocitat de servei perquè les generacions actuals i futures cada vegada exigeixen més rapidesa en les operacions. Vivim en una societat en què no volem esperar, ja que hem entès que el temps és un dels recursos més escassos que tenim. Amb això, la correcta gestió del transport de mercaderies i productes es converteix en un assumpte essencial a qualsevol empresa que operi en aquests mercats, i això inclou el correcte disseny de les rutes (d'aprovisionament, de repartiment, etc.).

Malgrat la rellevància actual, els problemes en el disseny de les rutes existeixen pràcticament des que s'inicià el comerç entre els éssers humans. D'una forma similar als problemes de la localització, les primeres solucions a aquest tipus de problemes s'havien plantejat de forma merament geomètrica però, amb l'arribada de la computació, és possible plantejar problemes de modelització i optimització del disseny de rutes cada vegada més complexos, i també resoldre'ls de forma més eficient.

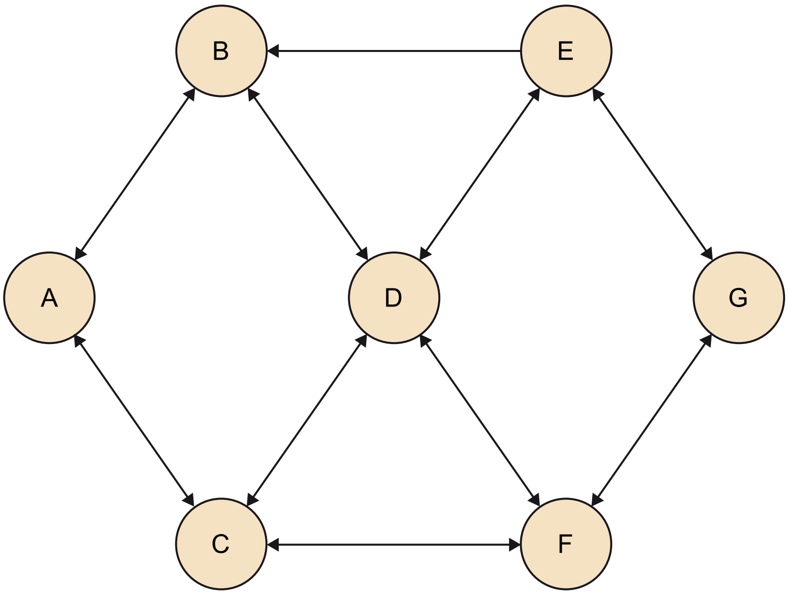
Per a modelar correctament un problema de rutes, en la majoria de casos, se simplifica el problema complet a un problema de flux a les xarxes. En la propera secció s'introdueixen aquest tipus de problemes, juntament amb les seves formulacions bàsiques i les seves aplicacions en el disseny de les rutes.

2. Introducció als problemes de flux

Els problemes de flux són omnipresents i apareixen allí on trobem xarxes de qualsevol tipus: les xarxes de tràfic aeri o ferroviari, les xarxes de cablejat elèctric, d'internet, els sistemes d'autopistes i carreteres, etc. Sempre que trobem una xarxa d'aquest tipus podem trobar problemes de flux associats, ja que en totes aquestes xarxes pretenem moure o transportar informació, energia, productes, persones o vehicles d'un punt a un altre de la xarxa de la manera més eficient possible.

Atesa aquesta definició, podem veure que els problemes de disseny de les rutes són, al cap i a la fi, aplicacions específiques dels problemes de flux més generals. Per a seguir en aquesta secció amb alguns dels problemes de flux més utilitzats, primer procedirem amb diverses definicions pel que fa als grafs i els seus components.

Figura 1. Exemple de graf.



Font: elaboració pròpia.

- **Graf**: s'entén per graf la xarxa definida per un conjunt de nodes amb arcs que els uneixen entre si. En la figura 1, es pot observar un exemple de graf.

- **Node**: és un element indivisible d'un graf, la unitat fonamental que conforma un graf. En la figura 1, podem observar 7 nodes denominats amb lletres majúscules, de l'A a la G.

- **Arc**: és una relació entre dos nodes del graf que implica direccionalitat. Solen estar representats en forma de fletxa que parteix del node d'origen i arriba al node de destinació. En la figura 1, trobem diversos exemples d'arc, per exemple, entre els nodes C i D.

- **Aresta**: és una relació entre dos nodes del graf que implica que les característiques de la relació entre els nodes són iguals en ambdues direccions (per exemple, el cost o el flux que pot circular és igual en ambdues direccions). Una aresta es pot representar mitjançant una línia o mitjançant una fletxa de doble punta que apunta a tots dos nodes (tant d'origen com de destinació). En la figura 1, es poden observar diversos casos d'aresta, per exemple, entre els nodes A i C.

- **Graf simètric**: és aquell en què totes les relacions entre els nodes es poden representar mitjançant arestes, és a dir, grafs on totes les connexions tenen les mateixes característiques en ambdues direccions.

En les properes subseccions, veurem diversos problemes bàsics de flux, les seves formulacions i algunes de les aplicacions clàssiques quant als problemes de transport i, específicament, de disseny de les rutes. Per a simplificar-ho, suposarem que tots els grafs que veurem a partir d'ara són simètrics.

2.1. Camí mínim (*shortest path*)

El problema de fluxos més simple i, al seu torn, més comú és el **problema de camí mínim** o de **cost mínim**. Es tracta d'un problema que parteix d'un graf i dos punts (origen i destinació), on cada arc que uneix cada parell de punts té un cost (o distància) associat, i pretén trobar el camí de menor cost (o més curt) entre el node d'origen i el de destinació (entenent-se com a camí el conjunt d'arcs que uneix dos punts concrets).

Aquest problema, depenent del significat dels costos associats als arcs, pot intentar trobar el camí més curt, el de menor cost, el més fiable, etc. Resulta un model molt útil en problemes de transport ja que, malgrat la seva senzillesa, es pot utilitzar com a part de modelitzacions més complexes o per a situacions concretes, com ara el càlcul de les rutes òptimes en situacions de tràfic urbà molt dens. La modelització del tràfic urbà segueix models d'optimització no lineals o models d'equilibri complexos, però es basa en la suposició que tots els vehicles es desplacen de la manera més eficient entre el seu origen i la seva destinació. Per tant, poder calcular el camí més eficient per a un vehicle és clau per a encarar problemes més complexos.

Vegem, doncs, el model matemàtic corresponent a aquest problema. Suposem un graf G, format per un conjunt de nodes N i un conjunt d'arcs A. El node d'origen s ($s \in N$) i el node de destinació t ($t \in N$) són coneguts. Cada parell de nodes i, j ($i, j \in N$) té un cost associat C_{ij}. El model utilitzarà variables binàries X_{ij}, que valdran 1 si l'arc entre el node i i el node j forma part del camí de cost mínim, i 0 en cas contrari.

Així, el model del problema de camí de cost mínim és definit per la funció objectiu (1) i està subjecte a les restriccions (2) i (3):

$$MIN \sum_{\forall i,j \in N} C_{ij} \cdot X_{ij} \qquad (1)$$

Subjecte a:

$$X_{ij} \in \{0; 1\} \; \forall \; i, j \in N \qquad (2)$$

$$\sum_{\forall j \in N} X_{ij} - \sum_{\forall k \in N} X_{ki} = \begin{Bmatrix} 1, si \quad i = s \\ -1, si \quad i = t \quad \forall \; i \in N \\ 0, \text{en altres casos} \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

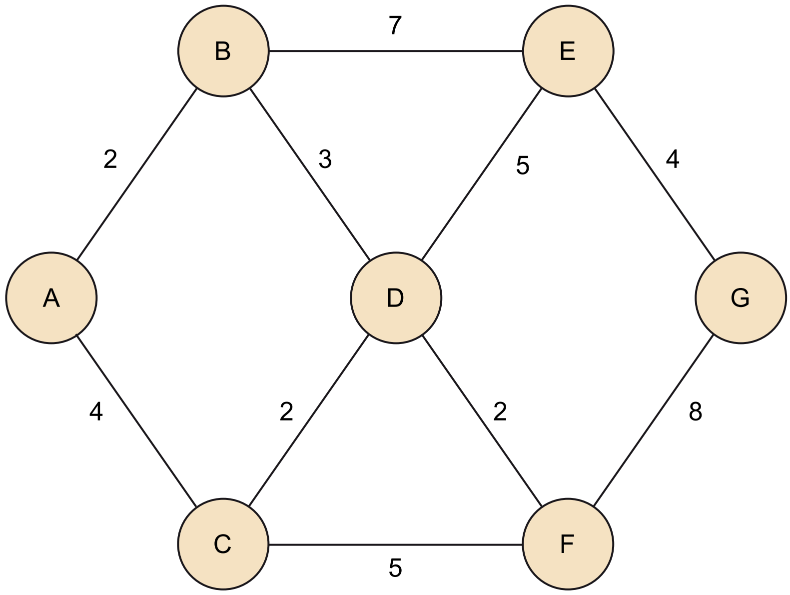
La funció objectiu (1) minimitzarà el cost del camí que es triï finalment. La restricció (2) assegura que les variables tinguin un valor binari per a qualsevol parell de punts, mentre que la restricció (3) assegura que hi hagi un camí que parteixi del node *s* i que acabi en el node *t*.

Des de la formulació d'aquest problema s'han desenvolupat múltiples algorismes i procediments de resolució, sent l'algorisme de Dijkstra un dels més coneguts per a obtenir el camí de cost mínim. A continuació, es detallen els passos de l'algorisme de Dijkstra i es resol un petit exemple utilitzant aquest procediment.

2.1.1. Algorisme de Dijkstra

Suposem el graf presentat en la figura 2, en què es presenta un conjunt de nodes (d'A a G) i un conjunt d'arcs no orientats amb el cost expressat sobre aquests (així, podem suposar que el cost és el mateix en ambdues direccions). Volem calcular el camí de cost mínim entre el node A i el G.

Figura 2. Graf per al càlcul de camins mínims mitjançant l'algorisme de Dijkstra.



- **Pas 1**. Marquem tots els nodes com a no visitats (en el nostre cas, marcarem els nodes amb una V quan siguin visitats, qualsevol node sense marca es considerarà no visitat).

- **Pas 2**. Assignem a cada node una distància temptativa des del node d'origen (la distància temptativa valdrà 0 per al node d'origen i ∞ per a la resta de nodes (vegeu inici en la taula 1). El node d'origen A és el node actual.

- **Pas 3**. Per al node actual, considerem tots els nodes veïns (nodes directament connectats per un arc al node actual) no visitats i calculem les seves distàncies temptatives per mitjà del node actual. Comparem la distància calculada amb el valor actual de la distancia temptativa i assignem solament el menor d'aquests.

- **Pas 4**. Una vegada considerats tots els nodes veïns del node actual, marquem el node actual com a visitat. Un node visitat ja no es torna a tenir en compte.

- **Pas 5**. Si hem marcat el node de destinació com a visitat, l'algorisme ha acabat.

- **Pas 6**. En cas contrari, seleccionem el node no visitat amb la distància temptativa més baixa i el triem com a nou node actual. Tornem al pas 3.

Vegem a continuació l'aplicació de l'algorisme a l'exemple de la Figura 2.

Taula 1. Algorisme de Dijkstra aplicat a l'exemple de la Figura 2.

	Inici	It.1	It.2	It.3	It.4	It.5	It.6	It.7
Node actual	A	A(V)	B(V)	C(V)	D(V)	E(V)	F(V)	G(V)
Distància A	0	0	0	0	0	0	0	0
Distància B	∞	2	2	2	2	2	2	2
Distància C	∞	4	4	4	4	4	4	4
Distància D	∞	∞	5	5	5	5	5	5
Distància E	∞	∞	9	9	9	9	9	9
Distància F	∞	∞	∞	9	7	7	7	7
Distància G	∞	∞	∞	∞	∞	15	13	13

La segona fila indica quin és el node actual i la resta de files indiquen la distància a cadascun dels nodes. Les columnes indiquen en quina iteració de l'algorisme ens trobem (quantes vegades s'han aplicat els passos 3, 4, 5 i 6).

Veiem que en la primera iteració solament podem calcular les distàncies temptatives als nodes B i D, ja que són els únics nodes que estan directament connectats a A. La iteració 2 i 3 ens permet calcular algunes distàncies més, per mitjà dels nodes B i C. En la iteració 4, veiem que el camí d'A a F que havíem trobat en la iteració anterior (que venia de C i tenia valor 9) no és el millor possible, ja que hi ha un camí amb un valor menor anant pel node D, amb valor 7. En la iteració 5, finalment arribem al node de destinació G, per mitjà del node F, i trobem un camí d'A a G que té valor 15, però no podem assegurar que sigui el camí de menor cost, ja que encara no hem visitat el node G. En la iteració 6, trobem un camí millor per a arribar a G, ja que té valor 13 i prové del node E. Finalment, en la iteració 7, visitem el node G i comprovem que no hi ha cap camí millor per a arribar a aquest node, per la qual cosa podem acabar l'algorisme.

El camí de cost mínim en aquest cas és A - B - E - G i el seu cost és igual a 13.

2.2. Cost mínim amb restriccions de capacitat

El model de camí de mínim cost, malgrat la seva utilitat, simplifica un factor molt important de molts problemes de flux a les xarxes, que és la capacitat dels arcs. És a dir, en el problema que acabem de resoldre, sempre s'assumeix que tots els arcs estan disponibles per a nosaltres, però la veritat és que la majoria de xarxes tenen limitacions sobre la quantitat d'elements (vehicles, energia, persones, dades, etc.) que són capaces de transportar.

És per això que una generalització del problema de camins amb cost mínim és el problema de camins amb cost mínim amb restriccions de capacitat.

La definició d'aquest problema es pot basar en el model matemàtic següent: suposem un graf G, format per un conjunt de nodes N i un conjunt d'arcs A. El node d'origen s ($s \in N$) i el node de destinació t ($t \in N$) són coneguts. Cada parell de nodes i, j (i, $j \in N$) té un cost associat C_{ij} i una capacitat U_{ij}. Finalment, el paràmetre b_i indicarà el flux net generat per cada node i. Si $b_i >$ 0, significa que el node i genera flux (per exemple, si els nodes fossin ciutats, podria significar que la quantitat de vehicles que surten d'aquesta ciutat és major que la quantitat de vehicles que entren, per la qual cosa es genera un flux de vehicles positiu). Si $b_i < 0$, significa que el node consumeix flux, per tant és un node de demanda (a l'exemple anterior, significaria que a la ciutat entren més vehicles dels que surten). I si $b_i = 0$, es diu que el node i és de transbord (a l'exemple anterior, si entra i surt la mateixa quantitat de vehicles, podem considerar que la ciutat és «de pas», ja que el flux de vehicles ni augmenta ni disminueix).

Se suposa que tot el flux generat per alguns nodes és absorbit per uns altres, és a dir, en el cas afirmatiu del graf estudiat suposem que $\Sigma_{\forall i \in N} b_i = 0$.

El model utilitzarà variables enteres X_{ij}, que indicaran el valor del flux que circula per l'arc que uneix els nodes i i j, i serà definit per la funció objectiu (4), subjecte a les restriccions (5) i (6):

$$MIN \sum_{\forall i,j \in N} C_{ij} \cdot X_{ij} \qquad (4)$$

Subjecte a:

$$0 \le X_{ij} \le U_{ij} \quad \forall\ i, j \in N \qquad (5)$$

$$\sum_{\forall j \in N} X_{ij} - \sum_{\forall k \in N} X_{ki} = b_i \qquad \forall\ i \in N \qquad (6)$$

La funció objectiu (4) minimitzarà el cost del camí que es triï finalment. La restricció (5) assegura que no se superi la capacitat de cap dels camins, alhora que garanteix que cap variable no prengui un valor negatiu. I la restricció (6) es coneix com la restricció de balanç, ja que a cada node assegura que el flux que entra menys el que surt sigui igual al flux net generat en el node.

Amb això, afegim les restriccions sobre la capacitat dels arcs i les restriccions sobre el balanç del flux. Atès que molts problemes de rutes consideren restriccions d'aquest tipus, és important familiaritzar-se amb aquestes per mitjà d'aquest model.

2.3. Flux màxim

En ocasions, és possible que la distància (o cost), no siguin rellevants i simplement l'objectiu sigui saber quant flux som capaços de transportar d'un punt a un altre de la xarxa, com a màxim. En aquests casos, s'aplica el model de flux màxim, basat en dues restriccions que ja hem vist anteriorment, la restricció de capacitat i la de balanç de flux.

Vegem la formulació d'aquest model: suposem un graf G, format per un conjunt de nodes N i un conjunt d'arcs A. El node d'origen s ($s \in N$) i el node de destinació t ($t \in N$) són coneguts. Cada parell de nodes i, j (i, $j \in N$) té una capacitat associada U_{ij}. Finalment, el paràmetre b_i indicarà el flux net generat per cada node i. El model utilitza variables senceres X_{ij}, que indicaran el valor del flux que circula per l'arc que uneix els nodes i i j.

Podem modelar el problema de flux màxim amb la funció objectiu (7), subjecte a les restriccions (8) i (9):

$$MAX \sum_{\forall i,j \in N} X_{ij} \qquad (7)$$

Subjecte a:

$$0 \leq X_{ij} \leq U_{ij} \quad \forall\, i, j \in N \qquad (8)$$

$$\sum_{\forall j \in N} X_{ij} - \sum_{\forall k \in N} X_{ki} = b_i \qquad \forall\, i \in N \qquad (9)$$

Aquest model es pot utilitzar com a base per a determinar el flux màxim de vehicles que pot circular entre certs punts d'una xarxa de carreteres, i també per al transport de mercaderies o per al transport d'informació, electricitat, etc.

3. Problemes i models per al disseny de les rutes

Un vegada introduïts els problemes de flux, la base dels quals és fonamental per a entendre problemes més complexos en el disseny de rutes, passem a introduir altres problemes una mica més complexos (o almenys, que es basen en les formulacions ja vistes en la secció anterior), que serveixen com a base per al disseny de rutes.

3.1. Arbre de cobriment mínim (*spanning tree problem*)

En ocasions, pot ser interessant no solament traçar el camí més curt des d'un punt d'origen a un altre de destinació, sinó també trobar tots els camins més curts que connectin qualsevol node del graf amb el node d'origen. Per exemple, per a fer recollides o lliuraments des d'un magatzem o base, serà útil conèixer els camins més curts fins a totes les poblacions a què es presta servei.

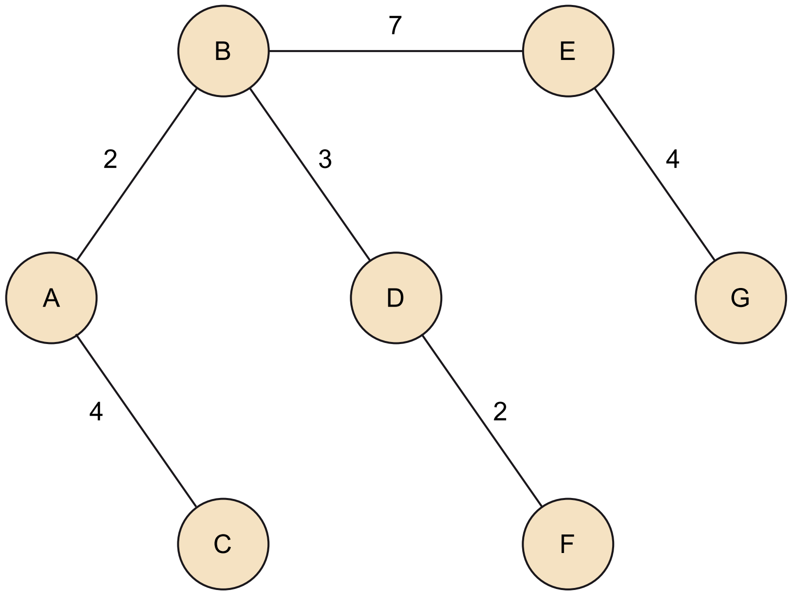
Aquest tipus de problema es coneix com a **arbre de cobriment mínim** (ACM o STP per les seves sigles en anglès, *spanning tree problem*). Un ACM es pot entendre com la generalització d'un problema de camins mínims i es defineix com segueix: atès un graf G no orientat, format per un conjunt de nodes N i un conjunt d'arcs A, i un node d'origen conegut s ($s \in N$), trobar l'arbre de cobriment mínim implica trobar els camins més curts (o menys costosos) que connectin cadascun dels nodes al node d'origen.

Un algorisme heurístic senzill que es pot utilitzar per a la resolució d'aquest problema és l'algorisme de Prim, que funciona de forma veraç, construint la solució node a node, afegint el camí més curt possible a l'arbre. L'algorisme de Prim segueix els passos següents:

- **Pas 1**: triem un node qualsevol.
- **Pas 2**: establim una branca nova. De tots els nodes que encara no formin part de l'arbre, triem el del camí més curt i l'unim a l'arbre.
- **Pas 3**: repetim els passos 1 i 2 fins que tots els nodes formin part de l'arbre.

A l'exemple mostrat per al problema del camí mínim, també és possible trobar l'ACM per al mateix graf (vegeu la figura 3).

Figura 3. Arbre de cobriment mínim per al graf de la figura 2.



Les aplicacions típiques d'aquest problema en relació amb el disseny de rutes, a més dels exemples ja esmentats, també inclouen la regionalització (agrupar àrees en regions per a establir rutes en aquestes), problemes de rutes aèries i l'establiment de connexions entre les poblacions aïllades.

3.2. Problema del viatjant de comerç (*travelling salesman problem*)

Un altre dels problemes clàssics de rutes que s'està estudiant des que va aparèixer la disciplina de la recerca operativa, és el **problema del viatjant de comerç** (molt conegut per les sigles del seu nom en anglès, TSP). Aquest problema considera un viatjant de comerç que ha de visitar una sèrie de ciutats en la seva rutina diària i intenta trobar la manera més eficient de fer-ho.

En un TSP, l'objectiu és trobar la ruta més curta que recorri tots els nodes del graf i després torni al node inicial. Es pot definir amb un model matemàtic com segueix: suposem un graf G, format per un conjunt de nodes (ciutats) N i un conjunt d'arcs A. El node d'origen s ($s \in N$) és conegut, i representarà el punt de partida del viatjant de comerç. Cada parell de nodes i, j (i, $j \in N$) té un cost associat C_{ij} al camí que va entre aquests. El model utilitzarà variables binàries X_{ij}, que valdran 1 si l'arc entre el node i i el node j forma part de la ruta mínima, i 0 en cas contrari.

El model del problema del viatjant de comerç és definit per la funció objectiu (10) i està subjecte a les restriccions (11), (12) i (13):

$$MIN \sum_{\forall i,j \in N} C_{ij} \cdot X_{ij} \qquad (10)$$

Subjecte a:

$$X_{ij} \in \{0;1\}\ \forall\ i,\ j \in N \qquad (11)$$

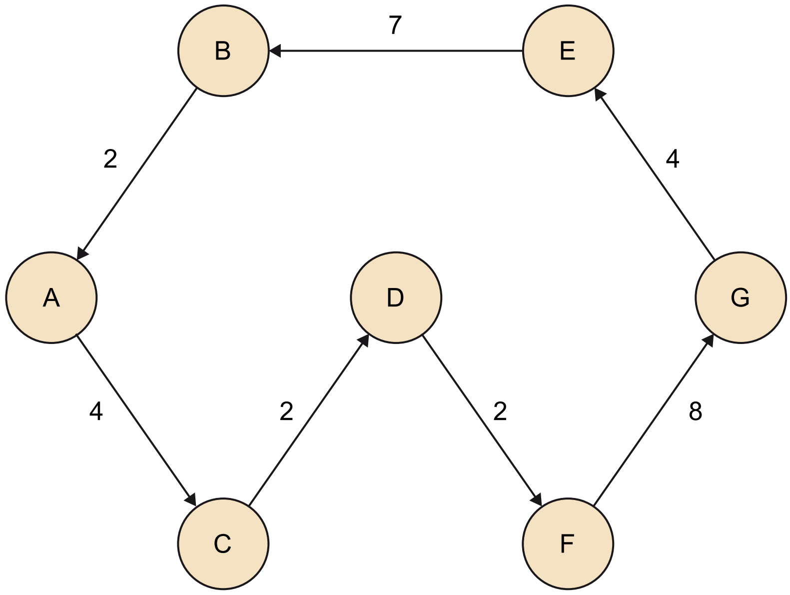
$$\sum_{\forall i<k} X_{ik} + \sum_{\forall j>k} X_{kj} = 2 \quad \forall\ k \in N \qquad (12)$$

$$\sum_{\forall i,j \in Q} X_{ij} \leq |Q| - 1 \quad \text{on } Q \subset N, 3 \leq |Q| \leq |N| - 3 \qquad (13)$$

La funció objectiu (10) minimitzarà el cost de la ruta que es triï finalment. La restricció (11) assegura que les variables tinguin un valor binari per a qualsevol parell de punts. La restricció (12) assegura que cada node tingui exactament un camí sortint i un d'entrant (és a dir, que la ruta final passarà per tots els nodes una sola vegada). I la restricció (13) assegura l'eliminació dels *subtours*, és a dir, no permet que les solucions siguin diversos *subtours* desconnectats entre si.

A l'exemple del camí mínim, també podem trobar un *tour* mínim per a un viatjant de comerç, vegeu la Figura 4.

Figura 4. Solució al problema del viatjant de comerç associat al graf de la figura 2.



Tot i que en aquest exemple tan simple la solució és relativament fàcil de trobar per enumeració, aquest és un problema d'alta complexitat computacional. Això vol dir que quan el graf sigui més gran, el temps que es triga a resoldre-ho per enumeració pot ser tan llarg que el problema sigui pràcticament irresoluble. És per això que hi ha moltíssims treballs acadèmics dedicats a dissenyar algorismes per a resoldre aquest problema d'una forma eficient, però que alhora doni una solució de bona qualitat.

El problema del viatjant de comerç no solament té aplicacions directes en el disseny de rutes (per exemple, rutes de repartiment o de recollides), sinó que també s'aplica com a part fonamental d'altres problemes d'aquest tipus. Per exemple, el problema d'enrutament de vehicles clàssic és, en el fons, la combinació d'un problema de viatjant de comerç amb un problema d'assignació de cadascun dels vehicles d'una flota a una ruta.

3.3. Problema d'enrutament de vehicles (*vehicle routing problem*)

Com avançàvem en la secció anterior, hi ha una generalització del viatjant de comerç que s'utilitza per a modelar el disseny de rutes i l'assignació de vehicles a aquestes. Aquest és el conegut com a **problema d'enrutament de vehicles** (també molt conegut per les sigles del seu nom en anglès, VRP).

En aquest problema, el que volem és, atesa una flota de K vehicles, dissenyar K rutes que siguin el més eficients possible, que entre totes les rutes es visitin tots els punts de demanda (o nodes del graf) existent. Així doncs, aquest problema consisteix a assignar els nodes a alguna de les rutes i solucionar, per a cada ruta, un problema del viatjant de comerç, per a trobar el *tour* més eficient que haurà de realitzar el vehicle per a visitar els seus punts assignats.

Es pot definir amb un model matemàtic com segueix: suposem una flota de K vehicles (i per tant, K rutes diferents), cadascun amb una capacitat u i un graf G, format per un conjunt de nodes (ciutats) N i un conjunt d'arcs A. El node d'origen s ($s \in N$) és conegut i representarà el punt de partida de la flota de vehicles. Cada node té una demanda associada d_i. Cada parell de nodes i, j (i, $j \in N$) té un cost associat C_{ij} al camí que va entre aquests. El model utilitzarà variables binàries X^k_{ij}, que valdran 1 si l'arc entre el node i i el node j forma part de la ruta k, i 0 en cas contrari, i també variables binàries Y_{ij} que valdran 1 si algun vehicle utilitza el camí que va *d'i* a j, i 0 en cas contrari.

Així, el model del problema d'enrutament de vehicles és definit per la funció objectiu (14) i està subjecte a les restriccions (15), (16), (17), (18), (19), (20), (21), (22) i (23):

$$MIN \sum_{\forall k} \sum_{\forall i,j \in N} C_{ij} \cdot X^k{}_{ij} \qquad (14)$$

Subjecte a:

$$X^k{}_{ij} \in \{0; 1\} \; \forall \; i, j \in N, \forall \; k \qquad (15)$$

$$Y_{ij} \in \{0; 1\} \; \forall \; i, j \in N \qquad (16)$$

$$\sum_{1 \leq k \leq K} X^k{}_{ij} = Y_{ij} \quad \forall\, i, j \in N \qquad (17)$$

$$\sum_{1 \leq j \leq |N|} Y_{ij} = 1 \quad \text{per a } i = 2,3, \ldots, |N| \qquad (18)$$

$$\sum_{1 \leq i \leq |N|} Y_{ij} = 1 \quad \text{per a } j = 2,3, \ldots, |N| \qquad (19)$$

$$\sum_{1 \leq j \leq |N|} Y_{\mathrm{s\,j}} = K \qquad (20)$$

$$\sum_{1 \leq i \leq |N|} Y_{is} = K \qquad (21)$$

$$\sum_{2 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} d_i \cdot X^k{}_{ij} \leq u \quad \forall\, k \qquad (22)$$

$$\sum_{\forall i, j \in Q} Y_{ij} \leq |Q| - 1 \quad \text{on } Q \subset N, 3 \leq |Q| \leq |N| - 3 \qquad (23)$$

Aquest model, que sembla molt més complex que els que hem vist anteriorment, és en realitat molt semblant al model del viatjant de comerç. La funció objectiu (14) minimitza el cost de totes les rutes. Les restriccions (15) i (16) asseguren que les dues variables tinguin valors binaris. La restricció (17) determina la relació entre ambdues variables (quan alguna de les K rutes passi pel *camí* i, j i així ho indiqui la variable X_{ij}, la variable Y_{ij} haurà d'indicar que aquest camí està en ús). Les restriccions (18) i (19) indiquen que el pas per cada node és únic, és a dir, com en el cas del problema del viatjant de comerç, cal assegurar-se que cada punt de demanda (node) és visitat una sola vegada, excepte en el cas del node d'origen. Les restriccions (20) i (21) asseguren que el node d'origen és visitat tantes vegades com rutes hi ha, ja que totes les rutes parteixen del mateix node d'origen. La restricció (22) assegura que a cada ruta es compleixi la demanda de cada node sense superar la capacitat del vehicle. Finalment, la restricció (23) és la mateixa restricció per a suprimir els *subtours* que trobàvem en el model del viatjant de comerç.

Atès que el problema d'enrutament és una generalització del problema del viatjant de comerç i que aquest resulta pràcticament impossible de resoldre per enumeració per a problemes de grandària real, podem determinar que això mateix serà cert per al problema d'enrutament. El problema d'enrutament de vehicles és pràcticament impossible de resoldre per enumeració en un temps eficient, per a grafs de grandària assimilables a problemes reals.

És per això que molts mecanismes heurístics de resolució (que no cal que obtinguin una solució òptima, però sí que donin una solució de qualitat) s'han desenvolupat per a la resolució d'aquest problema i problemes derivats. També s'han aplicat multitud de metaheurístiques (mètodes heurístics més complexos que s'adapten al problema concret), i també procediments exactes (algorismes que, aprofitant les característiques matemàtiques del problema, el poden resoldre de forma òptima sense necessitat d'enumerar el 100% de les possibles solucions). En l'article de Rocha *et al.* (2011) es pot consultar un estat de l'art dels problemes d'enrutament de vehicles i els procediments de resolució que s'han aplicat a aquests. En l'article de Daza *et al.* (2009) també es pot consultar amb més detall una metaheurística proposta per a la resolució d'aquest problema.

Lectures recomanades

Rocha Medina, L. B., González La Rota, E. C., & Orjuela Castro, J. A. (2011). «Una revisión al estado del arte del problema de ruteo de vehículos: evolución histórica y métodos de solución». A: *Ingeniería* (núm. 16, vol. 2, pàg. 35–55).

Daza, J. M., Montoya, J. R., & Narducci, F. (2009). «Resolución del problema de enrutamiento de vehículos con limitaciones de capacidad utilizando un procedimiento metaheurístico de dos fases». A: *Revista Escuela de Ingeniería de Antioquia* (núm. 12, pàg. 23–38).

Malgrat la seva complexitat, el problema d'enrutament de vehicles segueix sent un problema bàsic al què encara se li poden afegir algunes restriccions que permetin modelar situacions que encara s'assemblin més als casos reals. Per exemple, es pot considerar que hi ha lliuraments i recollides o finestres temporals. En les properes subseccions, s'expliquen breument aquestes addicions al model del problema d'enrutament i les seves aplicacions.

3.3.1. Amb recollides i lliuraments (*pick up & delivery*)

Què passa si en lloc de voler modelar una sèrie de rutes de lliurament (com fa el VRP clàssic), volem modelar una sèrie de rutes en què hi ha tant lliuraments com recollides en diferents nodes? Voldrem fer ambdues de la forma més eficient possible, sense superar la capacitat del vehicle.

És en aquesta situació on apareix la primera de les modificacions del problema d'enrutament de vehicles, les recollides i lliuraments. En aquesta versió del problema, necessitarem alguns paràmetres més per al model. Cada node i tindrà associats uns valors d_i (lliuraments) i p_i (recollides) que s'han de lliurar o recollir en aquest node. A més, necessitarem per a cada node i, un paràmetre O_i que ens indiqui quin és el node d'origen dels lliuraments que hi hagi en el node i i un paràmetre D_i que indiqui el node de destinació del que s'ha recollit en aquest node.

Suposem que, a cada node, el lliurament sempre es realitzarà abans que la recollida, de manera que el vehicle no es pot sobrecarregar dins el mateix node.

A més de les condicions que ha de complir una solució del problema d'enrutament bàsic (restricció de la càrrega, que totes les rutes parteixin del node d'origen, que cada node es visiti una sola vegada i que la solució no sigui un conjunt de *subtours*), aquest problema intentarà minimitzar el cost de totes les rutes amb dues condicions addicionals:

- Que per a cada node *i*, el node O_i (si no es tracta del node d'origen) s'ha de servir en la mateixa ruta, i abans que el node *i*.

- Que per a cada node *i*, el node D_i (si no es tracta del node d'origen) s'ha de servir en la mateixa ruta, i després que el node *i*.

3.3.2. Problemes amb finestres temporals

Avui, amb l'omnipresència del comerç electrònic, tots coneixem el problema de lliuraments amb finestres temporals: el client té una franja horària (un interval d'hores) en què ha d'estar present a la seva oficina, domicili, etc., perquè el lliurament es realitzi, perquè després (o abans) d'aquesta franja, el client ja no està disponible per a la recollida del paquet i el lliurament s'ha de retardar.

Per a modelar aquesta extensió del problema d'enrutament, de nou cal afegir alguns paràmetres al problema. En aquest cas, serà necessari que cada node *i* tingui associat un interval $[a_i,b_i]$, anomenat finestra temporal. L'instant en què cada vehicle abandona el node d'origen, el temps que es triga a viatjar per cada arc i el temps de servei S_i en cada node *i*, se suposen valors coneguts. Normalment, es considera que el temps de viatge entre cada arc és equivalent al cost (ja que el cost se sol calcular en funció de la distància i del preu del carburant).

A més de les condicions del problema bàsic d'enrutament, el problema d'enrutament amb finestres temporals intentarà minimitzar el cost de totes les rutes afegint aquesta condició: el servei de lliurament al node *i* sempre haurà de començar dins l'interval $[a_i,b_i]$ (encara que si el vehicle arriba abans, assumirem que pot esperar que arribi l'instant a_i), i el vehicle ha de parar en el node *i* durant el temps de servei S_i.

4. Problemes d'equilibri en el tràfic urbà

Per descomptat, tots els models que hem vist parteixen de la suposició que sabem exactament quant temps de viatge hi ha entre els nodes, entre d'altres. En alguns contextos, això pot ser relativament fàcil (parlant, per exemple, del transport d'energia), però no ocorre el mateix quan parlem del transport en el tràfic urbà.

Això és per una senzilla raó i és que el tràfic urbà afegeix moltíssimes variables en els problemes de les xarxes. Però això no significa que els models estudiats fins ara no tinguin utilitat en el tràfic urbà: el principi de Wardrop, en les xarxes de trànsit, ens indica que una xarxa de trànsit sempre arribarà a un equilibri, ja que tots els viatgers escolliran sempre la ruta més ràpida o més eficient per a arribar a la seva destinació. Per tant, saber calcular les rutes més curtes, barates o eficients és fonamental per a qualsevol problema de disseny de les rutes, fins i tot, en el tràfic urbà.

No obstant això, trobar la ruta més curta en el tràfic urbà és un problema complex a causa del concepte de congestió, el qual ens mostra com el mateix flux de vehicles en una xarxa de tràfic urbà influeix en quines són les rutes més curtes o eficients. La congestió augmenta amb el flux de vehicles i els vehicles canvien de ruta per la congestió, la qual cosa pot, al seu torn, causar descongestió. La interacció entre les decisions de transport i la congestió es pot modelar com un procés que arriba a un punt d'equilibri.

Aquest fenomen es pot resumir amb un exemple en què es decideix ampliar en un carril una de les autopistes d'entrada a una gran ciutat, atès l'alt volum de tràfic que rep. En un inici, segurament l'ampliació del carril disminuirà una mica la congestió. Però aviat, veient que la congestió ha disminuït i que ara la ruta per aquesta autopista és més eficient, molts conductors que utilitzaven carreteres secundàries dels voltants canviaran de ruta per a utilitzar la nova. Fins i tot, fins a tal punt que l'autopista tornarà a tenir molta congestió. Tenint en compte aquest factor, alguns conductors tornaran a canviar de ruta, ja que no volen bregar amb la congestió a l'autopista. Aquestes decisions i aquests canvis de ruta per la congestió ocorreran fins que, en pocs dies o setmanes, el sistema s'estabilitzi en un nou punt d'equilibri, amb més tràfic a l'autopista del que hi havia inicialment, però amb una mica menys de congestió gràcies al nou carril.

En aquest context, tecnologies com ara el GPS i el programari de recàlcul dinàmic de rutes resulten essencials per a establir rutes eficients en el tràfic urbà. Especialment, el programari que permet recalcular els recorreguts segons les dades de tràfic en temps real, combinat amb la tecnologia emergent de vehicles de conducció autònoma, poden ser la clau del disseny de rutes del futur a mitjà i llarg termini.

Bibliografia

Ahuja, R., Magnanti, T., & Orlin, J. (1993). *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications* (1a. edició). Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall.

Cordeau, J. F., Laporte, G., Savelsbergh, M. W. P., & Vigo, D. (2007). «Vehicle Routing». A: *Handbooks in Operations Research and Management Science* (vol. 14, pàg. 367–428). Elsevier.

Daza, J. M., Montoya, J. R., & Narducci, F. (2009). «Resolución del problema de enrutamiento de vehículos con limitaciones de capacidad utilizando un procedimiento metaheurístico de dos fases». A: *Revista Escuela de Ingeniería de Antioquia* (núm. 12, pàg. 23–38).

Florian, M., & Hearn, D. (1995). «Network Equilibrium Models and Algorithms». A: *Handbooks in Operations Research and Management Science* (vol. 8, pàg. 485–550). Elsevier B.V.

Laporte, G. (2010). «A Concise Guide to the Traveling Salesman Problem». A: *Journal of the Operational Research Society* (núm. 61, pàg. 35–40).

Ortúzar, J. de D., & Willumsen, L. G. (2011). *Modelling Transport* (4a. edició). Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd.

Pérez Kaligari, E., & Guerrero Rueda, W. J. (2015). «Métodos de optimización para el problema de ruteo de vehículos con inventarios y ventanas de tiempo duras». A: *Revista de Ingeniería Industrial* (núm. 14, vol. 3, pàg. 31–49).

Rocha Medina, L. B., González La Rota, E. C., & Orjuela Castro, J. A. (2011). «Una revisión al estado del arte del problema de ruteo de vehículos: evolución histórica y métodos de solución». A: *Ingeniería* (núm. 16, vol. 2, pàg. 35–55).

Sheffi, Y. (1985). *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods* (1a. edició). Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Toth, P., & Vigo, D. (Ed.). (2014). *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications* (2a. edició). Society for Industrial and Applied Mathematics and the Mathematical Optimization Society.