Incertesa i raonament aproximat

Sistemes difusos

PID_00267993

Vicenç Torra i Reventós
Lluís Godo i Lacasa

Revisió a càrrec de
David Isern Alarcón

Temps mínim de dedicació recomanat: 4 hores

Universitat
Oberta
de Catalunya

Vicenç Torra i Reventós

Lluís Godo i Lacasa

David Isern Alarcón

La revisió d'aquest recurs d'aprenentatge UOC ha estat coordinada pel professor: Carles Ventura Royo (2019)

Tercera edició: setembre 2019

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Realització editorial: FUOC

Índex

Introducció 5

Objectius 6

1. Raonament amb informació incompleta: incertesa i imprecisió 7

1.1. Mesures d'incertesa 8

2. Sistemes difusos 15

2.1. Definició dels conjunts difusos i operacions 16

2.2. Construcció d'un sistema difús 29

2.3. Aplicació d'una regla i d'un conjunt de regles 37

2.4. Sistemes amb regles conjuntives i amb regles disjuntives. Les implicacions 44

2.5. Aspectes pràctics d'aquests sistemes 51

2.5.1. Sistemes complexos 53

Exercicis d'autoavaluació 59

Solucionari 61

Bibliografia 67

Introducció

Com s'ha comentat en el mòdul dedicat als sistemes basats en el coneixement, s'han desenvolupat mètodes específics de raonament per a tractar els diferents tipus de situacions que un sistema pot trobar. Així, s'han construït eines per a raonar sobre el temps, per a raonar sobre l'espai o per a poder actuar quan la informació de què es disposa no sigui completa.

En aquest mòdul ens centrarem en una d'aquestes qüestions: la de raonar amb informació incompleta (això és, quan la informació de què es disposa no és perfecte). D'entre les alternatives existents per a tractar aquest problema, ens centrarem en els sistemes difusos (raonament amb informació imprecisa).

Per a estudiar aquestes eines, el mòdul s'ha dividit en dos apartats:

1) El primer és una introducció on es planteja el problema del raonament amb informació incompleta. S'introdueix aquí la necessitat de mesurar la incertesa, i es donen tipus de mesura.

2) El segon està dedicat als sistemes difusos. Es veu que el coneixement es representa mitjançant regles en les quals hi apareixen els anomenats *conjunts difusos*. Després d'introduir aquests conjunts i de veure la forma que tenen les regles, es descriu com es fa la inferència i es dóna un exemple del funcionament d'aquests sistemes.

Objectius

Aquest mòdul didàctic pretén que assoliu els objectius següents:

1. Ser capaços de situar el problema de la informació incompleta.

2. Introduir les mesures d'incertesa.

3. Conèixer formes de raonar quan la informació és incompleta.

4. Entendre els sistemes difusos.

1. Raonament amb informació incompleta: incertesa i imprecisió

Lluís Godo i Lacasa

Molt poques vegades la informació o coneixement disponible sobre un domini concret és completa i precisa, ans al contrari, molt probablement és parcial, incerta, imprecisa, o en general incompleta. Però, tot i amb això, els humans som capaços de fer raonaments i d'extreure conclusions en moltes d'aquestes situacions. Per tant, si volem dotar un sistema basat en el coneixement de capacitats de raonament semblants a la d'un expert humà, aquest sistema ha de ser capaç de representar i raonar amb informació imperfecta. Aquesta imperfecció és deguda principalment a:

1) La poca fiabilitat de la informació (apreciacions subjectives, limitacions físiques dels sensors, etc.).

2) La incompletesa de la informació.

3) La imprecisió en la informació inherent a l'ús del llenguatge natural.

4) L'agregació d'informació conflictiva, contradictòria o redundant.

En aquest punt, i per a evitar confusions posteriors, convé recordar que incertesa i imprecisió són dos conceptes de naturalesa diferent, fins i tot si excloem la vaguetat com a cas particular d'imprecisió.

Incertesa i imprecisió

Si la nostra única informació (imprecisa) és I1 = "El termòmetre està per sobre dels 20 °C", la proposició P1 = "La temperatura exterior és 25 °C", tot i ser un enunciat totalment precís és a la vegada una proposició totalment incerta (saber que la temperatura està per sobre de 20 °C no és suficient per afirmar o negar que la temperatura sigui 25 °C). En canvi, la proposició P2 = "La temperatura exterior és superior als 15 °C", encara que molt més imprecisa és totalment certa (en efecte, si la temperatura és superior a 20 °C, també és superior a 15 °C). Per altra part, si la informació de la qual disposem és molt més precisa, per exemple I2 = "El termòmetre marca exactament 24 °C", aleshores desapareix tota incertesa: òbviament la proposició P2 continua essent certa, però ara podem afirmar que P1 és falsa, i així podem determinar la certesa o falsedat de qualsevol altre proposició referent a la temperatura actual, sempre i quan no vulguem precisar més enllà dels graus.

Per tant, la idea que hi ha al darrere és que la imprecisió és quelcom inherent al llenguatge de representació, és a dir, hi poden haver enunciats més o menys precisos i enunciats més o menys imprecisos. En canvi, la incertesa en la veritat o falsedat d'un enunciat (precís o imprecís) apareix tan bon punt la informació disponible per a l'avaluació d'aquest enunciat no és prou completa o precisa. En qualsevol cas, podem observar que com més imprecisió hi ha en la informació, més incertesa en les conclusions (i com més precisió tenim en la informació, menys incertesa en les conclusions). Per altra banda, com més imprecisos són els enunciats, menys incertesa tenim sobre la seva validesa.

1.1. Mesures d'incertesa

La manera més usual de tractar la incertesa és "mesurant-la", és a dir, utilitzant una mesura (en el sentit matemàtic del terme) sobre un conjunt d'esdeveniments, proposicions, conjunts de valors de les variables, etc. que volem representar i sobre els quals volem raonar. Aquest conjunt no pot ser un conjunt qualsevol sinó que ha de posseir una estructura algebraica que permeti manipular i/o combinar els seus elements. L'estructura més habitual és la de l'àlgebra de Boole.

Exemples d'àlgebra de Boole

1) L'àlgebra de subconjunts d'un cert conjunt (conjunt de les parts) amb les operacions d'intersecció, unió i complementació, i amb el conjunt buit i el total com a zero i unitat.

2) L'àlgebra de proposicions d'un llenguatge lògic amb la semàntica de la lògica clàssica (és a dir, amb dos valors de veritat, cert i fals) amb els connectius conjunció, disjunció i negació com a operacions i les constants "false" i "true" com a elements zero i unitat.

Àlgebra de Boole

Recordem que és una estructura (A, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, 0, 1), on A és un conjunt, $\wedge$ i $\vee$ són operacions binàries sobre A, $\neg$ és una operació unària, i 0, 1 són dos elements de A, tal que es verifiquen les propietats següents:

1) $\wedge$, $\vee$ són operacions commutatives, associatives i idempotents

2) 0, 1 són elements zero i unitat resp.: $a \wedge 0 = 0$, $a \wedge 1 = a$, $a \vee 0 = a$, $a \vee 1 = 1$

3) absorció: $(a \wedge b) \vee b = b$, $a \wedge (a \vee b) = a$

4) distributives: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

5) complementació: $a \wedge \neg a = 0$, $a \vee \neg a = 1$

Encara que equivalents, al llarg d'aquest apartat adoptarem per comoditat un marc conjuntístic en lloc d'un marc lògic, així parlarem de conjunts i no de proposicions.

La noció més general de mesura d'incertesa sobre l'àlgebra de Boole de les parts d'un univers W, que denotarem 2^W, és la d'una funció $\mu: 2^W \to [0, 1]$ tal que es verifiquen les propietats següents:

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\mu(W) = 1$

3) si $A \subseteq B$ aleshores $\mu(A) \leq \mu(B)$

L'interval real [0, 1] es pren com a escala, on el 0 representa l'absència total de certesa, i l'1 representa la certesa total (altres escales lineals també poden ser utilitzades en principi). Si interpretem $\mu(A)$ com el grau de creença en què el valor d'una variable *X* està en el conjunt A, aleshores la propietat (1) ens diu que la variable efectivament pren un sol valor (el buit indica que la variable no pren cap valor!), la (2) que aquest valor és en el conjunt total W, i la (3) que la mesura és monòtona (no estricta) respecte a la inclusió, és a dir, la certesa que la variable prengui valor en un conjunt més gran serà també més gran, o com a mínim igual però en cap cas menor, que en un conjunt més petit.

De fet, les propietats 1), 2) i 3) són les propietats mínimes que es requereixen a una mesura μ per tal de representar la incertesa. A partir d'aquí, els diferents models d'incertesa que es poden trobar a la literatura es caracteritzen per afegir algunes propietats addicionals.

Mesures de probabilitat

Les mesures de probabilitat sobre un univers finit, que són les usuals en les aplicacions, demanen una quarta propietat, l'*additivitat*:

$$\text{4-P)}\ \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),\ \text{si}\ A \cap B = \varnothing$$

Notació

La quarta propietat té diferents accepcions, notarem:
4-P) Propietat 4 – probabilitat.

que també pot ser expressada de manera equivalent com:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Aquesta important propietat permet reconstruir la mesura de qualsevol conjunt a partir de la mesura dels seus elements, també coneguda com a *distribució de probabilitat*.

En efecte, si coneixem la funció p: W → [0, 1] definida per p(x) = μ({x}) per a tot x de W, aleshores l'additivitat assegura que, per a qualsevol subconjunt A, podem calcular la seva probabilitat com:

$$\mu(A) = \Sigma_{x \in A} p(x)$$

En particular, la funció de distribució compleix que: $1 = \mu(W) = \Sigma_{x\in W}\ p(x)$.

Una altra conseqüència remarcable de l'additivitat és la coneguda relació entre la probabilitat d'un conjunt i la del seu complementari. En efecte si A^c denota el complementari de A respecte a W, aleshores tenim que:

$$1 = \mu(W) = \mu(A \cup A^C) = \mu(A) + \mu(A^C)$$

i per tant:

$$\mu(A^C) = 1 - \mu(A)$$

A part de les probabilitats, hi han altres tipus de mesures d'incertesa que s'han estudiat i que han donat lloc a diferents models pel tractament de la incertesa. Dues classes de mesures alternatives són: les de possibilitat i necessitat, i les funcions de credibilitat i plausibilitat.

Mesures de possibilitat i necessitat

Les anomenades *mesures de possibilitat* es caracteritzen per la propietat següent:

Notació

4-∏) Propietat 4 – possibilitat.

$$4\text{-}\prod)\ \mu(A \cup B) = max(\mu(A), \mu(B)),$$

que permet descompondre la mesura d'una unió per la funció de *màxim*, mentre que les mesures de necessitat es caracteritzen per la propietat de descomposició de la intersecció respecte a la funció de *mínim*:

$$4\text{-N})\ \mu(A \cap B) = min(\mu(A), \mu(B)).$$

Les mesures de possibilitat i de necessitat són duals, en el sentit que si μ és una mesura de necessitat aleshores la mesura μ^* definida per:

$$\mu^*\ (A) = 1 - \mu(A^C),$$

és una mesura de possibilitat, i a l'inrevés.

Les mesures de possibilitat també permeten de calcular la mesura d'un conjunt qualsevol a partir de la mesura dels seus elements. Efectivament si μ és una mesura de possibilitat sobre un W finit, i definim $\pi(x) = \mu(\{x\})$ per a tot element x de W, aleshores tenim que:

$$\mu(A) = max_{x \in A}\pi(x),$$

i per a la mesura de necessitat dual μ^* tenim que:

$$\mu^*(A) = min_{x \notin A}1 - \pi(x).$$

A la funció π: W $\rightarrow$ [0, 1] abans definida se l'anomena *distribució de possibilitat* i compleix que $1 = \mu(W) = \max\{\pi(x) \mid x \in W\}$.

El model possibilístic

El model possibilístic es deu a treballs de Zadeh (que va inventar els Fuzzy Sets) i de Dubois i Prade.

Aquestes mesures són la base del *model possibilístic* pel tractament de l'incertesa, relacionat amb l'ús de conjunts borrosos (*fuzzy sets*) per a modelitzar la imprecisió.

Els sistemes difusos, que es descriuen en l'apartat segon d'aquest mòdul, estan basats en el model possibilístic.

Mesures de credibilitat i de plausibilitat

Una altra família de mesures d'incertesa duals, en el sentit anterior, són les anomenades *funcions de credibilitat* (*belief*) i de *plausibilitat*. Les funcions de credibilitat compleixen la propietat següent:

Notació

4-B) Propietat 4 – belief.

4-B)

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \geq \Sigma_i \mu(A_i) - \Sigma_{ij} \mu(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \Sigma_{i,j,k} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) \ldots \pm \mu(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

per a tot n. En particular per a $n = 2$, tenim l'anomenada *superadditivitat*:

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B), \text{ si } A \cap B = \emptyset.$$

Les mesures de plausibilitat compleixen la propietat dual:

Notació

4-Pl) Propietat 4 – plausibilitat.

4-Pl)

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \Sigma_i \mu(A_i) - \Sigma_{i,j} \mu(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \Sigma_{i,j,k} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) \ldots \pm \mu(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

i per tant són mesures anomenades *subadditives*. Això és, verifiquen:

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B), \text{ si } A \cap B = \emptyset.$$

La característica més important de les funcions de credibilitat i de plausibilitat és la seva representació en termes de les anomenades *assignacions de masses*. Una assignació de massa m és una funció m: $2^W \rightarrow [0, 1]$ tal que:

$$\Sigma_{A \subseteq W} m(A) = 1,$$

és a dir, una massa no és res més que una distribució de probabilitat sobre el conjunt de les parts. Aleshores, μ és una funció de credibilitat si, i només si, existeix una assignació de masses m tal que $m(\emptyset) = 0$ i:

$$\mu(A) = \Sigma_{B \subseteq A} m(B)$$

Anàlogament, μ és una funció de plausibilitat si, i només si, existeix una assignació de masses m tal que $m(\emptyset) = 0$ i,

$$\mu(A) = \Sigma_{B \cap A \neq \emptyset} m(B)$$

Els subconjunts A tals que m(A) > 0 s'anomenen *elements focals*.

Les mesures de credibilitat i plausibilitat són la base de l'anomenat *model evidencial de Dempster-Shafer* per a modelitzar la incertesa, que de fet és un model més general que el probabilístic i el possibilístic. En efecte, una mesura de probabilitat és alhora un cas particular de funció de credibilitat i de plausibilitat, mentre que les de necessitat i possibilitat són casos particulars de mesures de credibilitat i de plausibilitat respectivament. En termes de masses, una probabilitat ve definida per una massa tal que els seus elements focals són *singletons* (conjunts d'un sol element), mentre que les mesures de possibilitat i necessitat ho són per aquelles masses tals que els seus elements focals formen un conjunt aniuat.

Lectura complementària

El model evidencial està basat en els treballs de Shafer i de Demspter. G. Shafer (1976). *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, en dóna una descripció.

Mesures d'incertesa: intensionalitat enfront d'extensionalitat

És molt important remarcar que les mesures d'incertesa són "intensionals" (o no són "extensionals" o "funcionals", equivalentment) en el sentit que no estenen les operacions de l'àlgebra de conjunts a operacions sobre l'interval [0, 1] excepte si trivialitzem la mesura. Dit d'altra manera, per a tota mesura $\mu: 2^W \rightarrow [0, 1]$ de manera que per algun C de 2^W es tingui $0 < \mu(C) < 1$, no existeixen operacions binàries T, S i unària N sobre [0, 1] tals que:

$$\mu(A \cap B) = T(\mu(A), \mu(B))$$

$$\mu(A \cup B) = S(\mu(A), \mu(B))$$

$$\mu(A^C) = N(\mu(A))$$

per a tot A, B de 2^W. És a dir, l'única manera de tenir total funcionalitat de la mesura és que per a tot A, o bé $\mu(A) = 1$ o bé $\mu(A) = 0$, o sigui, que de fet no tinguem incertesa.

Exercici de funcionalitat de la mesura

Exercici: Demostreu que l'única manera de tenir total funcionalitat de la mesura és que per a tot A, o bé $\mu(A) = 1$ o bé $\mu(A) = 0$.

Solució: D'entrada com que la $\cap$ i la $\cup$ són operacions commutatives, associatives i monòtones (respecte a la inclusió), també ho han de ser la T i la S. A més, com que $A \cap \varnothing = \varnothing$ i $A \cap W = A$, aleshores T ha de ser tal que $T(0, x) = 0$ i $T(1, x) = x$. Anàlogament, per raonament semblant, $S(0, x) = x$ i $S(1, x) = 1$. Com que $A \cap A = A \cup A = A$, aleshores T i S han de ser idempotents, això és, $T(x, x) = S(x, x) = x$, per a tot x de [0, 1]. D'aquestes propietats es dedueix que forçosament $T(x, y) = \min(x, y)$ i $S(x, y) = \max(x, y)$. En efecte, suposem $x \leq y$; aleshores tenim $x = T(x, x) \leq T(x, y) \leq T(x, 1) = x$, i de manera semblant tenim $y = S(y, y) \geq S(y, x) \geq S(y, 0) = y$. Finalment, tenim que per a tot A, $1 = \mu(W) = \mu(A \cup A^c) = \max(\mu(A), \mu(A^c))$, i a la vegada $0 = \mu(\varnothing) = \mu(A \cap A^c) = \min(\mu(A), \mu(A^c))$, d'on les úniques solucions possibles són $\mu(A) = 0$ (i $\mu(A^c) = 1$) o $\mu(A) = 1$ (i $\mu(A^c) = 0$).

Fixeu-vos que per les mesures abans esmentades només tenim, en general, funcionalitats parcials: les probabilitats només són funcionals amb la complementació $\mu(A^*) = 1 - \mu(A)$, però no ho són ni per la unió ni per la intersecció;

les mesures de possibilitat són funcionals per la unió però no ho són ni per la intersecció ni per la complementació; i les mesures de necessitat són funcionals per la intersecció però no ho són ni per la unió ni per la complementació.

El fet de la no-funcionalitat de les mesures d'incertesa té importants conseqüències des del punt de vista computacional, atès que es pot perdre l'eficiència de sistemes de raonament, com els basats en regles, a l'hora de augmentar-los el poder expressiu amb mecanismes genuïns de tractament de la incertesa. Per exemple, en el cas de les probabilitats, si en una base de coneixement tenim una regla del tipus:

si E llavors H

que és parcialment certa, només es dóna H quan s'observa E en un α%. Aleshores podem representar aquesta regla incerta per la parella (regla, grau de certesa):

si E llavors H, α

on α representa la probabilitat $P(H \mid E) = P(E, H) / P(E)$. Si de la informació disponible (E') podem saber per exemple que $P(E \mid E') = P(E, E') / P(E) = \beta$, hom esperaria poder dir quelcom sobre la probabilitat de H a partir de α i de β, mitjançant una funció f de combinació com $f(\alpha, \beta)$. Doncs, malauradament no és així. Fa falta més informació, una informació que no és evident que sigui necessària a un primer cop d'ull, com per exemple quina és la probabilitat $P(H \mid E, E')$ i la probabilitat $P(H \mid \neg E, E')$.

Exercici de càlcul de probabilitats

Exercici: Calculeu $P(H \mid E')$ en funció de $P(H \mid E) = \alpha$, $P(E \mid E') = \beta$, $P(H \mid E, E') = \gamma$ i de $P(H \mid E^c, E') = \delta$.

Solució: Per la regla de les probabilitats totals, $P(H \mid E') = P(H, E \mid E') + P(H, E^c \mid E')$, i aplicant la regla de Bayes a cada factor tenim $P(H \mid E') = P(H \mid E, E') \cdot P(E \mid E') + P(H \mid E^c, E') \cdot P(E^c \mid E') = \gamma \cdot \beta + \delta \cdot (1 - \beta)$.

Precisament, aquestes dificultats varen ser les causants de l'aparició als anys vuitanta de sistemes experts basats en regles com PROSPECTOR i MYCIN amb intents de trobar solucions més o menys enginyoses al fet de la no-funcionalitat de les probabilitats, és a dir, intentant fer funcionals els càlculs de probabilitats sota condicions particulars. D'aquesta manera aquests tipus de sistemes, anomenats *extensionals*, eren computacionalment eficients, però el preu que s'havia de pagar era un ús inadequat del model probabilístic i per tant la possible inexactitud dels resultats. Val a dir, però, que en aplicacions particulars, els errors a causa del model utilitzat es poden anar polint mitjançant solucions parcials i *ad hoc* en cada cas, ja sigui retocant els pesos, les regles, o bé per mecanismes de control propis del sistema, aliens al propi model de representació. Ara bé, aquestes solucions no són mai generals.

Per contra, els anomenats *sistemes intensionals*, són aquells que fan un ús correcte de la semàntica intensional de les diferents mesures d'incertesa. En general, i tret de comptades però importants excepcions, el preu que normalment paguen aquests sistemes és el d'un alt cost computacional. En particular, els sistemes basats purament en càlcul de probabilitats que no incorporen cap mena de mecanisme especial, com per exemple la lògica probabilista de Nilsson, esdevenen impracticables quan el nombre de variables que involucren és una mica gran. De fet, els sistemes basats en probabilitat només han tingut bona acollida dins la comunitat de la intel·ligència artificial a partir de l'aparició de les anomenades *xarxes bayesianes* o *xarxes causals* al final dels anys vuitanta les quals, gràcies a explotar les relacions d'independència entre variables que queden explícites en el formalisme gràfic del model, permeten de fer operatiu i eficient el raonar amb probabilitats.

Lectura complementària

Aquesta lògica és descrita a:
N. J. Nilsson (1986). "Probabilistic Logic". *Artificial Intelligence* (núm. 28, pàg. 71 - 87).

2. Sistemes difusos

Vicenç Torra i Reventós
David Isern Alarcón

Els sistemes difusos són sistemes basats en regles en els quals les regles es defineixen en termes dels anomenats *conjunts difusos*. Aquests sistemes es fan servir principalment en tasques de control o de modelització. En el primer cas volem controlar el comportament d'un aparell. Això vol dir que construïm un sistema per tal que el comportament de l'aparell segueixi un esquema determinat. Són exemples d'aquest tipus d'aplicació els sistemes per a controlar la temperatura d'un forn, per a controlar l'enfocament d'una màquina de fer fotografies o la velocitat d'un tren. En el segon cas, el sistema ha de resseguir o predir una determinada variable. Són exemples d'aquest tipus de sistema els estudis per a la predicció del comportament dels mercats financers.

D'acord amb el que vam explicar en el mòdul 3 el format de les regles d'un sistema basat en regles segueix l'estructura següent:

si <premissa> **llavors** <conclusió>

Aquí, les afirmacions sobre fets que apareixen tant a les premisses com a les conclusions correspondran a conceptes *vagues*.

Per a mostrar tots els elements que constitueixen els sistemes difusos, considerem un sistema per a controlar la durada d'un programa de rentat d'una rentadora. La durada del rentat tindrà en compte el nivell de brutícia de la roba i el nivell de greix. Se suposa que el sistema, un cop interpreta el nivell de brutícia i el nivell de greix, dedueix la durada del programa segons un conjunt de regles que "governen" el sistema de control. L'objectiu de tot plegat és calcular la durada efectiva del programa de rentat que hauria d'implementar el sistema de control en minuts.

Seguint l'exemple, el nostre sistema es basarà en regles de l'estil:

si *nivell_bruticia és poc* **i** *nivell_greix és alt* **llavors** *durada és llarga*

Com es veurà durant el mòdul, cal descriure com es defineixen les variables (*nivell de brutícia*, *nivell de greix* o *durada*), què signifiquen i com es defineixen termes com ara *baix*, *alt*, *llarga* associats a cadascuna de les variables i com s'interpreta aquesta regla dins un conjunt de regles. Es veurà com funciona un sistema expert difús i, finalment, com s'interpreta la sortida final del sistema.

L'apartat comença amb la descripció dels conjunts difusos i de les operacions que s'hi defineixen. Això és necessari perquè a cada terme de les regles li farem correspondre un conjunt difús que és avaluat per a determinar si un regla s'aplica o no. Un cop vist això veurem com es construeix un sistema difús. Examinarem les regles i com aquestes defineixen el sistema. A continuació, mostrarem com s'aplica una regla i com, a partir de l'aplicació de totes les regles, obtenim la conclusió de tot el sistema per a un estat concret.

2.1. Definició dels conjunts difusos i operacions

Els conjunts difusos generalitzen els conjunts clàssics (per a diferenciar a ambdós conjunts, a partir d'ara anomenarem *conjunts nítids* a aquests darrers). Per aquesta raó, moltes de les operacions que s'apliquen als conjunts difusos no són més que generalitzacions de les que apliquem als conjunts nítids. En aquesta secció veurem com es defineixen els conjunts difusos i algunes de les operacions que s'hi han definit. Veurem com aquestes operacions corresponen a les operacions que ja coneixem dels conjunts nítids.

Generalització

Parlem de generalització perquè els conjunts nítids (els booleans) són un cas particular dels difusos.

Per a representar els conjunts existeixen diverses maneres (representació extensional, funció característica, elements que satisfan una propietat), d'entre aquestes la que ens és més adequada en aquest moment és la que fa servir la funció característica. Aquesta funció declara per a cada element d'un domini de referència quins elements són del conjunt i quins no ho són. Això és, es defineix una funció booleana que quan s'aplica als elements del domini, retorna la seva pertinença (o no pertinença) al conjunt.

Per a poder passar fàcilment al cas difús, fem servir una funció característica que retorna 0 o 1: 0 quan l'element no pertany al conjunt i 1 quan sí que hi pertany. D'aquesta manera, formalment tenim que si D és el domini de referència on es defineix el conjunt A mitjançant una funció característica χ_A = A, aleshores tenim que χ_A és una funció de D en el conjunt {0, 1} (això és, χ_A: D → {0, 1}). Al conjunt D l'anomenem *domini de A* o bé *univers de discurs de A*.

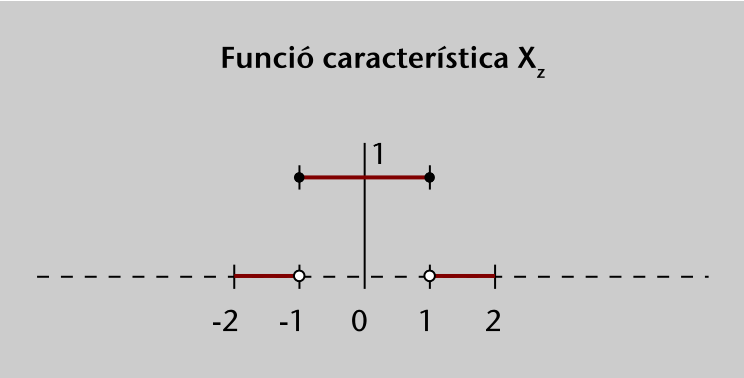
Exemple de funció característica

Prenem el conjunt definit pels punts de l'interval [-1, 1]. Aleshores, la funció característica d'aquest conjunt (que anomenem Z – de zero) és:

$$X_Z(x)\begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Donat un element del domini (un real r) podem veure si pertany o no al conjunt aplicant la funció χ_Z. Així, quan $\chi_Z(r) = 1$ voldrà dir que pertany al conjunt i quan $\chi_Z(r) = 0$ voldrà dir que no hi pertany. És clar que 0,5 hi pertany (perquè $\chi_Z(0,5) = 1$) i, en canvi, 2,5 no hi pertany ($\chi_Z(2,5) = 0$). En la figura 1 es dóna la representació gràfica de la funció característica d'aquest conjunt.

Figura 1



En els conjunts difusos en lloc de tenir que un element pertany a un conjunt o no hi pertany el que tenim és una pertinença graduada. Així, mentre que en l'exemple anterior tenim que es passa d'un element que pertany (el valor 1 pertany al conjunt) a un que no (el valor 1,001 no hi pertany) de manera abrupta, en un conjunt difús aquest canvi es pot fer suaument.

Per a poder modelitzar aquest canvi suau tenim que la funció en lloc de prendre valors en {0, 1} els prendrà en [0, 1] (en lloc de tenir que els elements o són o no són en el conjunt, ara els elements hi podran ser en un cert grau). Així tindrem que si un element pren el valor 1 pertany completament al conjunt, si prenem el valor 0,9 hi pertany però menys, si pren el valor 0,1 gairebé no hi pertany i si pren el valor 0 no hi pertany en absolut.

Funció de pertinença

La funció que defineix un conjunt difús es denomina *funció de pertinença*[1] (i la denotarem amb μ). Aquesta funció, donat un element del domini, retornarà el corresponent valor en [0, 1]. Per tant, tenim que una funció de pertinença μ sobre el domini D és de la forma μ: D → [0, 1].

(1)Funció de pertinença prové de l'anglès *membership function.*

Els conjunts difusos permeten definir conceptes en què no és fàcil (o no és possible) definir clarament un punt on separar entre aquells elements que són del concepte i aquells que no ho són. Alguns exemples clàssics són els relacionats amb la temperatura (fred o calent), l'alçada (alt o baix), la llargada (curta, llarga o extra llarga), o qualsevol variable que requereixi valors ordenats entre ells (molt baix, baix, mig, alt, molt alt).

Exemple de conjunt difús

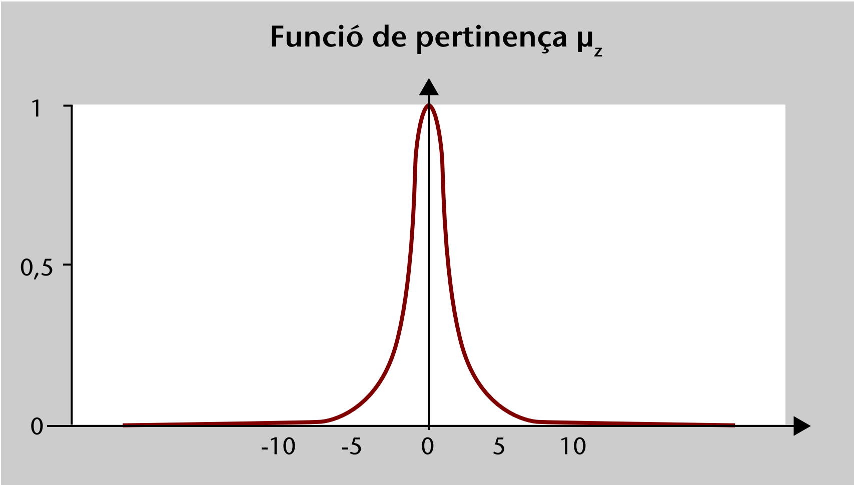
Definim el conjunt difús "aproximadament zero" mitjançant la funció de pertinença μ_Z següent:

$$\mu_Z(x) = 1/(1 + x^2)$$

Donat un element del domini (un real r) podem veure si pertany al conjunt o no aplicant la funció μ_Z. El valor de 0 pertany plenament al conjunt (observeu que $\mu_Z(0) = 1$) i a mesura que ens allunyem del 0 la pertinença és cada cop menor (per exemple, $\mu_Z(0,5) = 0,8$ i $\mu_Z(1) = 1/(1 + 1) = 0,5$).

La funció de pertinença corresponent a aquest conjunt es dóna en la figura 2.

Figura 2



Hi ha diferents formes de definir les funcions de pertinença. Com s'ha vist en l'exemple anterior, s'ha utilitzat una funció quadràtica per a definir el conjunt "aproximadament zero". La forma de les funcions de pertinença defineix el comportament que després tindrà el sistema, per la qual cosa normalment s'utilitzen formes senzilles en lloc de complexes, atès que tampoc no aporten molta més precisió al sistema.

Les funcions de pertinença més utilitzades són les funcions triangulars, les trapezoïdals i les gaussianes (vegeu figura 3).

Una funció triangular es defineix de la forma següent:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ (x-a)/(m-a) & a < x \leq m \\ (b-x)/(b-m), & m < x < b \\ 0, & x \geq b \end{cases}$$

On a és el llindar inferior, b el llindar superior i m és el valor on la funció val 1 i es compleix que $a < m < b$.

Una funció trapezoïdal es defineix per quatre punts (a, b, c, d): un llindar inferior a, un llindar superior d i un rang de suport entre dos punts b i c on la funció de pertinença té un valor 1. Considerant que $a < b < c < d$ tenim:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)/(b-a) & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ (d-x)/(d-c), & c \leq x \leq d \\ 0, & x > d \end{cases}$$

Dins de les funcions trapezoïdals, hi ha un parell de casos particulars, anomenats *funcions R*[2] i *funcions L*[3].

(2)De l'anglès *R-functions*.

(3)De l'anglès *L-functions*.

Les funcions *R* consideren els valors $a = b = -\infty$, i es defineixen com:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x > d \\ (d-x)\,/\,(d-c), & c \le x \le d \\ 1, & x < c \end{cases}$$

Les funcions *L* consideren els valors $c = d = \infty$, i es defineixen com:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)\,/\,(b-a), & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Les funcions campana[4] es defineixen de la forma següent:

(4)De l'anglès *bell function*.

$$\mu(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

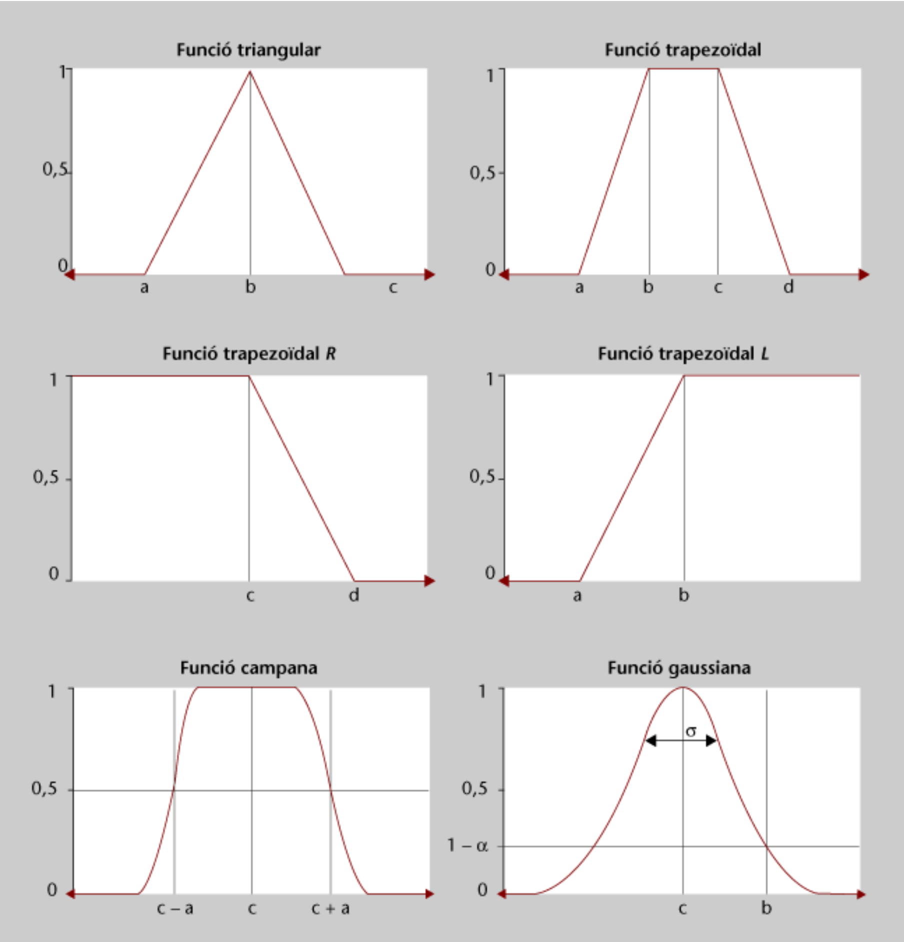
On c marca el punt central de la funció, a representa l'amplada i b (conjuntament amb a) controla la pendent definida com $-b/2a$.

Les funcions gaussianes es defineixen de la forma següent:

$$\mu(x; c, \sigma) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma 2}}$$

On σ representa la desviació estàndard i c representa la mitja.

Figura 3



Exemple de conjunt difús: alçada

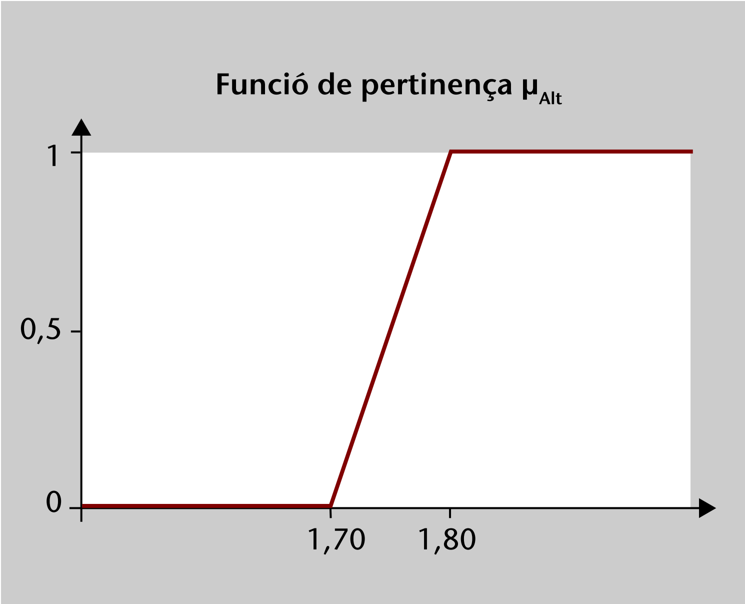
Si volem definir el concepte d'alt podem afirmar que a partir d'una certa alçada –per exemple 1,80 m– una persona és alta (satisfarà plenament el concepte d'alt) però això no vol dir que si fa 1,79 m aleshores no sigui alta en absolut. Mitjançant un conjunt difús podem modelitzar el concepte alt de manera que el pas a ser alt és graduat (així podem dir que una persona que fa 1,79 m és gairebé alta).

Definim el concepte alt amb una funció trapezoïdal *L* de la forma següent:

$$\mu_{\text{Alt}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1{,}70 \\ (x - 1{,}70) \,/\, (1{,}80 - 1{,}70), & 1{,}70 \le x \le 1{,}80 \\ 1, & x > 1{,}80 \end{cases}$$

En aquest cas, $\mu_{\text{Alt}}(1{,}79)$ = 0,9. Per tant, una persona d'1,79 gairebé satisfarà completament el concepte d'alt. La figura presenta la funció de pertinença d'aquest conjunt.

Figura 4



Noteu que el fet que una persona que faci 1,79 m sigui alt és una qüestió de grau (en aquest cas 0,9 –o sigui, és bastant cert que és alt) i és diferent del concepte de probabilitat. És diferent considerar que una persona té una probabilitat de ser alt de 0,9. Si d'una persona que no en sabem l'alçada se'ns diu que la probabilitat que sigui alta és de 0,9 pot passar que en conèixer-la trobem que faci 1,50. Aquest seria el cas si sabem que la persona pertany a un grup d'un curset de bàsquet on s'han inscrit deu alumnes i nou fan més de 1,90 m i un fa 1,50 m. Si, en canvi, se'ns diu que la persona pertany al concepte alt amb grau 0,9 no ens podem trobar que faci 1,50 m (1,50 m pertany amb grau 0 al concepte alt).

Operacions

És ben conegut que sobre els conjunts hi ha diverses operacions. Així, si A i B són conjunts se'n pot calcular la unió ($A \cup B$), la intersecció ($A \cap B$), el complement ($\neg A$) o la cardinalitat ($|A|$). També podem comprovar si un conjunt és un subconjunt d'un altre ($A \subset B$) o si un element a pertany a un conjunt ($a \in A$).

Totes aquestes operacions es poden generalitzar per a treballar amb conjunts difusos. Així, tindrem unió, intersecció etc. per a conjunts difusos. En aquesta secció veurem algunes d'aquestes operacions. A l'hora de definir-les s'ha de tenir en compte que perquè les operacions siguin correctes és necessari que quan s'apliquen a conjunts nítids el seu comportament correspongui al de les operacions corresponents dels conjunts nítids.

Generalització

Parlem de generalitzar les operacions nítides perquè quan les apliquem a conjunts nítids ens retornaran el mateix que si hi apliquéssim directament operacions nítides. La diferència és que ara disposarem d'operacions pels conjunts difusos.

Què vol dir aquí "correcte"?

Amb correcte volem dir que el seu significat sigui coherent amb el fet que els conjunts difusos generalitzen els conjunts nítids.

Complementació

Comencem considerant l'operació de complementació. Aquesta funció donat un conjunt difús en un domini D ens permet construir el seu complementari. En general suposem que si μ_A és un conjunt difús, el seu complementari serà $\mu_{no\text{-}A}$.

Exemple de complement de conjunt nítid

Quan Z correspon al conjunt de punts a l'interval [-1, 1] que hem vist abans i X_Z correspon a la seva funció característica, aleshores $X_{no\text{-}Z}$ s'ha de definir com segueix (noteu que aquesta és la funció que correspon a no pertany a l'interval [-1, 1]):

$$\chi_{\text{no-C}}(x) = \begin{cases} 1, & x \notin [-1,\ 1] \\ 0, & x \in [-1,\ 1] \end{cases}$$

Per a construir el complementari d'un conjunt difús qualsevol μ_A sobre D tindrem en compte, evidentment, la funció de pertinença μ_A. De fet, per a definir la pertinença d'un element x qualsevol del domini al conjunt complementari, considerarem només la pertinença de x en el conjunt inicial (això és $\mu_A(x)$). Així, si $\mu_A(x) = 1$, aleshores tindrem que aquest element x no ha de pertànyer al conjunt complementari (per tant, hem de tenir que $\mu_{\text{no-A}}(x) = 0$). De manera anàloga, si $\mu_A(x) = 0$, aleshores tindrem que aquest element x sí que ha de pertànyer al complementari ($\mu_{\text{no-A}}(x) = 1$).

D'acord amb això podem escriure que la pertinença de l'element x al complementari ($\mu_{\text{no-A}}(x)$) és una funció (que anomenem N *—de funció de negació–*) del valor $\mu_A(x)$. Aquesta funció, quan $\mu_A(x) = 1$ retornarà 0 i quan $\mu_A(x) = 0$ retornarà 1. Per tant, N(1) = 0 i N(0) = 1.

Conjunts i lògica estretament relacionats

Es diu de negació perquè igual que en el cas nítid, els conjunts i la lògica estan estretament relacionats. Així, el complement està relacionat amb la negació lògica.

Així, podem dir:

$$\mu_{\text{no–A}}(x) = N(\mu_A(x)),$$

amb $N(1) = 0$ i $N(0) = 1$. Aquestes dues igualtats (condicions sobre la funció N) són les anomenades *condicions de contorn de N*.

Tanmateix, amb això no en tenim prou. Mentre que en el cas nítid això seria prou perquè la pertinença del conjunt és booleana, en el cas difús la funció μ_A pot recórrer tot l'interval [0, 1]. Per tant, hem de considerar N com una funció que pren tots els valors de l'interval [0, 1]. A més, com que la pertinença a un conjunt és graduada, podem considerar que la pertinença al conjunt complementari també ha de ser graduada. D'acord amb això, la funció N ha de ser una funció que prengui valors en [0, 1] i que els retorni en [0, 1]. A més, perquè canvis suaus de la pertinença en el conjunt original no provoquin canvis bruscos en la pertinença al conjunt complementari, sovint, s'exigeix la continuïtat de la funció N. Tot això ho escriurem dient que N: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ i que és contínua.

A més de les condicions que han aparegut hi ha altres condicions que també són raonables per a la funció N. Una d'aquestes és la condició de monotonia. Aquesta condició s'expressa com:

per a tot a, b en [0, 1], si $a \leq b$ aleshores $N(a) \geq N(b)$.

Exemple de condició de monotonia: alçades

Per a interpretar aquesta condició considerem les alçades de dues noies Alba i Blanca. Suposem que n'Alba fa 1,72 i que na Blanca fa 1,75. Aleshores tenim que d'acord amb la definició del concepte d'alt que hem donat més amunt μ_{Alt}(Alba) = 0,2 i μ_{Alt}(Blanca) = 0,5.

Si definim $a = \mu_{Alt}$(Alba) = 0,2 i $b = \mu_{Alt}$(Blanca) = 0,5, podem veure que la condició anterior ens diu que ja que $a \leq b$, aleshores $N(a) \geq N(b)$. Això és equivalent a dir $N(\mu_{Alt}(\text{Alba})) \geq N(\mu_{Alt}(\text{Blanca}))$ que significa que en definir el complementari d'alt (el podem interpretar com una aproximació grollera de baix) n'Alba serà més baixa que na Blanca.

Si considerem el conjunt complementari del conjunt complementari podem incloure una nova condició per a la funció N: podem exigir que el conjunt complementari del conjunt complementari sigui el mateix conjunt original. En aquest cas necessitem que si s'aplica la funció N dues vegades retorni el valor original:

Igual que en els conjunts nítids

Noteu que això és el que passa amb els conjunts nítids. El complementari de [-1, 1] és $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ i el complementari d'aquest darrer conjunt és [-1, 1].

$$N(N(a)) = a \text{ per a qualsevol valor de a en } [0, 1].$$

Tingueu en compte que si el complementari del conjunt μ_A és $\mu_{\text{no-A}}(x) = N(\mu_A(x))$, el seu conjunt complementari serà $\mu_{\text{no-no-A}}(x) = N(\mu_{\text{no-A}}(x)) = N(N(\mu_A(x)))$. Per tant, si volem que $\mu_{\text{no-no-A}}(x) = N(N(\mu_A(x))) = \mu_A(x)$, necessitarem que per a tot $a = \mu_A(x)$ es compleixi $N(N(a)) = a$. A aquesta condició se l'anomena *involució*.

Si considerem totes les propietats que hem anat plantejant podem dir que una funció N: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua que satisfà les condicions:

1) $N(0) = 1$ i $N(1) = 0$ (condicions de contorn).

2) Per a tot a, b en [0, 1], si $a \leq b$ aleshores $N(a) \geq N(b)$ (monotonia).

3) Per a tot a en [0, 1], $N(N(a)) = a$ (involució), és una funció de complementació.

No hi ha una única funció que satisfaci totes aquestes condicions sinó que n'hi ha infinites. Això fa que mentre pels conjunts nítids hi ha una única manera de fer el complementari, en els conjunts difusos n'hi ha tantes com funcions N que satisfan les condicions anteriors. Per a cada funció que triem tindrem una complementació.

Funcions de complementació

Donem dues famílies de funcions de complementació:

1) $N_\lambda(a) = (1 - a)/(1 + \lambda a)$ per a qualsevol $\lambda > -1$ (família de Sugeno).

2) $N_w(a) = (1 - a^w)^{1/w}$ per a qualsevol $w > 0$ (família de Yager).

La primera és l'anomenada *família de Sugeno* i la segona és l'anomenada *família de Yager*. Amb $\lambda = 0$ en el primer cas i $w = 1$ en el segon cas s'obté la negació $N(a) = 1 - a$ que és la que s'utilitza de manera més freqüent. Noteu que en aquestes funcions sempre es compleix $N(1) = 0$ i $N(0) = 1$. Per tant es generalitza el cas nítid.

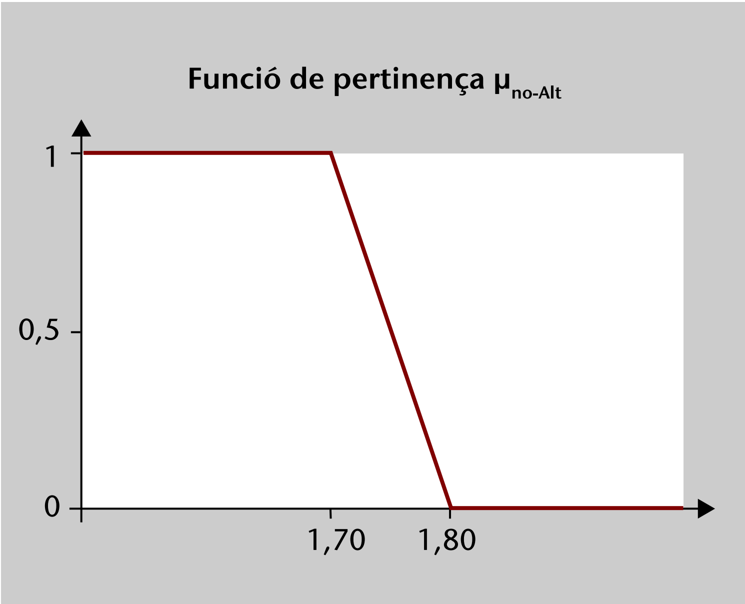
Exemple de les alçades

Utilitzant la complementació definida per Yager amb $w = 1$ o per Sugeno amb $\lambda = 0$, tenim $N(a) = 1 - a$. Així, obtenim que el complementari del conjunt μ_{Alt} serà:

$$\chi_{\text{no-Alt}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 1{,}70 \\ 1 - ((x - 1{,}70) / (1{,}80 - 1{,}70)) & \text{si } 1{,}70 \le x \le 1{,}80 \\ 0, & \text{si } x > 1{,}80 \end{cases}$$

La figura 5 dóna la representació gràfica d'aquesta funció de pertinença.

Figura 5



Unió de conjunts de conjunts difusos

Passem ara a la unió de conjunts (comencem considerant la unió de només dos conjunts). El procediment per a definir l'operació per a conjunts difusos serà anàleg al cas de la complementació tenint en compte que en tenir dos conjunts (els anomenem A i B) hi haurà dues funcions de pertinença (les anomenem μ_A i μ_B). Aleshores, construïm la funció de pertinença del conjunt unió, que anomenem $\mu_{A \cup B}$, a partir de les dues funcions μ_A i μ_B. De manera semblant al que passa en el cas nítid, per a la definició de la pertinença d'un element *x* al conjunt unió només considerarem la pertinença o no d'aquest element als conjunts que unim. Així, quan o bé $\mu_A(x)$ sigui 1 o bé ho sigui $\mu_B(x)$, direm que $\mu_{A \cup B}(x) = 1$. D'acord amb això, i de manera semblant al cas de la complementació, podem dir que $\mu_{A \cup B}(x)$ és una funció de $\mu_A(x)$ i de $\mu_B(x)$. Denotant aquesta funció per *S* (aquesta funció s'anomena *t-conorma*) podem escriure:

$$\mu_{A \cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Com que tant $\mu_A(x)$ com $\mu_B(x)$ corresponen a valors en l'interval [0, 1] (μ_A i μ_B són funcions de pertinença) i com que $\mu_{A\cup B}(x)$ ha de ser també un valor en aquest interval ($\mu_{A\cup B}$ és també una funció de pertinença), tindrem que S és una funció que donats dos valors en l'interval [0, 1] en retorna un altre en el mateix interval. Per tant, S: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

A aquesta funció se li exigeixen habitualment les quatre condicions següents:

1) $S(a, b) = S(b, a)$ (commutativitat)

2) $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$ (associativitat)

3) Si $a \leq c$ i $b \leq d$ llavors $S(a, b) \leq S(c, d)$ (monotonia)

4) $S(a, 0) = a$ (element neutre).

on a, b, c i d són valors qualssevol de l'interval [0, 1].

Tenint en compte que els valors a, b, c i d corresponen a valors de funcions de pertinença, aquestes condicions es poden interpretar de la manera següent:

1) S'ha de complir $S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = S(\mu_B(x), \mu_A(x))$ perquè la unió és commutativa:

$$A \cup B = B \cup A.$$

2) Si considerem la unió de tres conjunts difusos $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$ i $\mu_C(x)$, el resultat no ha de dependre de l'ordre de com fem les unions dos a dos. La unió és associativa, per tant ha de complir:

$$S(\mu_A(x), S(\mu_B(x), \mu_C(x))) = S(S(\mu_A(x), \mu_B(x)), \mu_C(x))$$

Com que en exigir l'associativitat, l'ordre en què agrupem els elements no afecta el resultat, quan hi hagi n conjunts difusos a unir escriurem sense agrupar $S(a_1, ..., a_n)$.

3) Com més gran sigui el grau de certesa corresponent als dos conjunts que unim, més gran serà el grau de certesa del conjunt unió.

4) La unió d'un conjunt μ_A amb el conjunt buit (el que satisfà $\mu_{\varnothing}(x) = 0$ per a tot x) és μ_A. Per tant, s'ha de complir:

$$S(\mu_A(x), \mu_{\varnothing}(x)) = S(\mu_A(x), 0) = \mu_A(x)$$

Es pot comprovar que les quatres condicions donades més amunt sobre la *t*-conorma S impliquen a les condicions que s'han de complir d'acord amb les propietats de la unió de conjunts:

$$S(0, 0) = 0,\ S(1, 0) = 1,\ S(0, 1) = 1 \text{ i } S(1, 1) = 1.$$

Deducció

Vegeu que $S(0, 0) = 0$ i $S(1, 0) = 1$ es dedueixen de la quarta condició fent $a = 0$ i $a = 1$, respectivament. $S(0, 1) = 1$ s'obté per commutativitat a $S(1, 0) = 1$. La igualtat $S(1, 1) = 1$ és implicada per la condició de monotonia i perquè sabem que $S(1, 0) = 1$ (no pot ser $S(1,1) = 0$ si $S(1, 0) = 1$).

Com ja passava en el cas de la funció N per a construir el conjunt complementari, no hi ha una única *t*-conorma S que satisfaci les condicions anteriors. Com a exemple donem una família de *t*-conormes (la família de Yager) i tres altres *t*-conormes que són molt conegudes:

1) $S(a, b) = \min(1, (a^w + b^w)^{1/w})$ per $w > 0$ (família de Yager).

2) $S(a, b) = \max(a, b)$ (màxim).

3) $S(a, b) = a + b - ab$ (suma algebraica).

4) $S(a, b) = \min(1, a + b)$ (Lukasiewitz o suma fitada).

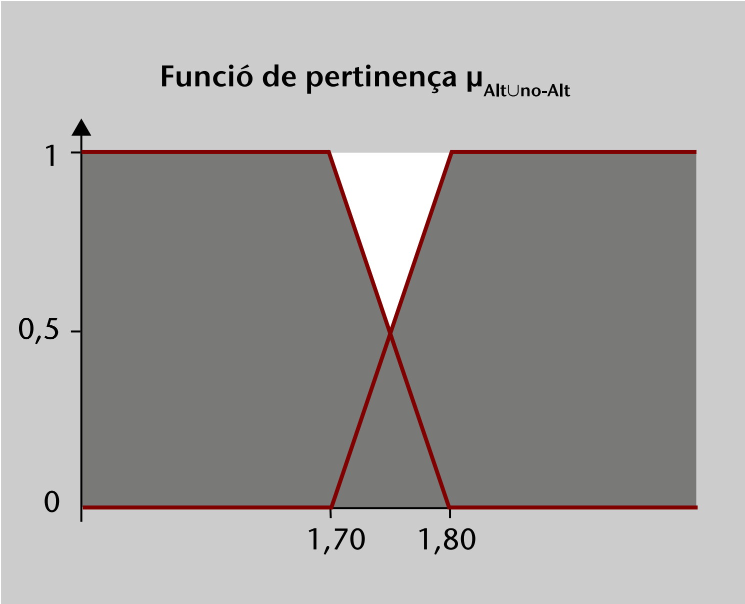
Exemple d'unió

Donem la resultant dels conjunts difusos μ_{Alt} i $\mu_{\text{no-Alt}}$ quan la *t*-conorma triada és el màxim:

$$\chi_{\text{Alt}\cup\text{no-Alt}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 1{,}70 \\ 1 - ((x - 1{,}70)/(1{,}80 - 1{,}70)) & \text{si } 1{,}70 \le x \le 1{,}75 \\ (x - 1{,}70)/(1{,}80 - 1{,}70) & \text{si } 1{,}75 \le x \le 1{,}80 \\ 1, & \text{si } x > 1{,}80 \end{cases}$$

la representació gràfica de $\mu_{\text{Alt} \cup \text{no-Alt}}$ és a la figura 6.

Figura 6



Intersecció de conjunts difusos

La definició de la intersecció de conjunts difusos és similar a la definició de la unió. Aquest cas es basa en la definició d'una funció anomenada *t-norma* i que denotarem T. Amb aquesta funció, si disposem de dues funcions de pertinença $\mu_A(x)$ i $\mu_B(x)$, podem construir la seva intersecció fent:

$$\mu_{A \cup B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

La funció T serà una funció T: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisfà, igual que la *t*-conorma, la commutativitat, l'associativitat i la monotonia. A més, satisfà la condició de l'element neutre però ara l'element neutre és l'1. Per tant, tenim que les *t*-normes satisfan:

1) $T(a, b) = T(b, a)$ (commutativitat).

2) $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$ (associativitat).

3) Si $a \leq c$ i $b \leq d$ llavors $T(a, b) \leq T(c, d)$ (monotonia).

4) $T(a, 1) = a$ (element neutre).

On *a*, *b*, *c* i *d* són valors qualssevol de l'interval [0, 1].

La condició de l'u com a element neutre s'obté si considerem que la intersecció d'un conjunt μ_A amb aquell que conté tots els elements del domini és el mateix conjunt μ_A. En aquest cas, si el conjunt que conté tots elements del domini D el denotem per $\mu_D(x) = 1$, tindrem que exigir $\mu_{A \cap D} = \mu_A$ correspon a demanar: $T(\mu_A(x), \mu_D(x)) = T(\mu_A(x), 1) = \mu_A(x)$.

Les altres condicions són iguals que en el cas de la unió de conjunts difusos.

En aquest cas també tenim més d'una funció que satisfà les propietats de les *t*-normes. Com a exemple considerem aquestes:

1) $T(a, b) = 1 - \min(1, [(1 - a)^w + (1 - b)^w]^{1/w})$ per $w > 0$ (família de Yager).

2) $T(a, b) = \min(a, b)$ (mínim).

3) $T(a, b) = ab$ (producte algebraic).

4) $T(a, b) = \max(0, a + b - 1)$ (Lukasiewitz o diferència fitada).

Exemple de intersecció

Considerem la intersecció del conjunt difús μ_{Alt} i el conjunt $\mu_{no\text{-}Alt}$. En aquest cas, usant la *t*-norma mínima obtenim:

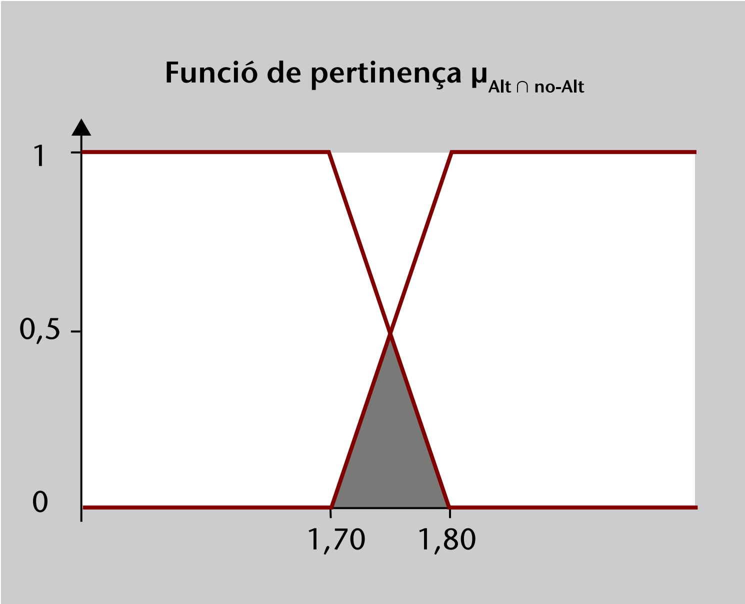
$$\chi_{\mathrm{Alt} \cup \mathrm{no\text{-}Alt}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1{,}70 \\ (x - 1{,}70) / (1{,}80 - 1{,}70) & \text{si } 1{,}70 \leq x \leq 1{,}75 \\ 1 - ((x - 1{,}70) / (1{,}80 - 1{,}70)) & \text{si } 1{,}75 \leq x \leq 1{,}80 \\ 0, & \text{si } x > 1{,}80 \end{cases}$$

la representació gràfica de $\mu_{\mathrm{Alt} \cap \mathrm{no\text{-}Alt}}$ és a la figura 7.

L'ordre no afecta al resultat

De manera anàloga al cas de la *t*-conorma, com que l'associativitat de la t-norma implica que l'ordre en què agrupem els elements no afecta el resultat, quan hi hagi *n* conjunts difusos a intersecionar escriurem $T(a_1, \ldots, a_n)$.

Figura 7



Aquí hem definit les funcions *N*, *T* i *S* per a construir el conjunt difús complementari, el conjunt difús intersecció i el conjunt difús unió. Tanmateix, l'ús d'aquestes funcions és més general. La funció *N* correspon a la funció de negació booleana (¬), la *t*-norma *T* correspon a una conjunció (^) i la *t*-conorma *S* correspon a una disjunció (v) quan els valors de certesa no són sols cert i fals sinó que tenim que la certesa és difusa. Això lliga amb la correspondència que hi ha entre proposicions i conjunts. De fet, les condicions que hem exigit per a *N*, *S* i *T* es poden entendre també des d'aquest punt de vista.

Un cop sabem com definir conjunts difusos i tenim les operacions de complementació, unió i intersecció (i, per tant, la negació, disjunció i conjunció) podem passar a veure com es construeix un sistema difús.

2.2. Construcció d'un sistema difús

Quan es construeix un sistema difús (o en general qualsevol sistema basat en el coneixement), s'ha de tenir en compte que el conjunt de regles que hi ha en el sistema ha de recobrir tot aquell domini que volem controlar o modelitzar. Per exemple, seguint l'exemple del mòdul d'un sistema de control de la durada del programa de rentat d'una rentadora, cal definir les regles que tindrem en compte en el sistema de control. Ara bé, pot ser que tinguem clares totes les possibilitats, o pot ser un subconjunt. En el cas que ateses unes entrades no s'activi cap regla, el sistema no donarà cap resultat. La zona definida per una combinació de les variables d'entrada (partició) que tingui almenys 1 regla l'anomenem *domini d'aplicació*.

Vegeu també

Recordeu que en l'apartat 1.1.1 del mòdul "Sistemes basats en el coneixement" s'ha dit que la base de coneixements ha de contenir tot el coneixement que el sistema necessita per a resoldre els problemes previstos. En aquest cas necessitem que hi hagi prou regles per a tractar totes les situacions que es preveuen.

Una manera d'assegurar-nos que el sistema tracta tots els possibles casos és definir una partició del domini a tractar i associar, com a mínim, una regla a cada element de la partició.

Dins els sistemes difusos, construirem les regles de manera que la seva premissa es compleixi només en la regió que li correspon.

Si seguim aquesta estructura, el que tindrem, en general, a la premissa és un conjunt de variables d'entrada x_1, ..., x_n on cada x_i està relacionada amb un terme $t_{i,a}$ que correspon a una part del domini de la variable x_i. Això és, tenim una regla de la forma:

si x_1 és $t_{1,a}$ **i** x_2 és $t_{2,b}$ **i** x_3 és $t_{3,c}$ **i** ... **i** x_n és $t_{n,z}$ **llavors** Y és $t_{Y,o}$

De forma general, les regles poden contenir conjuncions, disjuncions o negacions. En tots els casos s'aniran aplicant els operadors dels conjunts difusos que s'han anat veient. En el cas de les conjuncions, parlarem de la intersecció, en el cas de la disjunció, parlarem de la unió i, en el cas de la negació, parlarem del complementari.

Com que la construcció dels sistemes difusos recau en el concepte de variable (lingüística) passem ara a la seva definició. Veurem que per a cada variable tindrem associat un domini (un univers de discurs) i un terme que té associat un subconjunt dins aquest domini. Perquè les regles del sistema es puguin fer segons el que s'ha exposat més amunt, és necessari que els subconjunts associats als termes defineixin una partició del domini de les variables.

Variables lingüístiques

Informalment podem dir que una variable lingüística (per exemple, nivell de brutícia, o alçada, o temperatura) és aquella que pren com a valors mots en llenguatge natural (per exemple, fred, calent, alt, baix) que s'interpreten més tard en un domini de referència mitjançant conjunts difusos (per exemple, calent correspon a temperatures superiors a uns 40 graus).

> "Linguistic variable: a variable whose values are words or sentences in a natural or artificial language."
>
> L. A. Zadeh (1975). "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning". *Information Science* (núm. 8, pàg. 199-249 i 301-357).

Formalment, una variable lingüística ve definida per una tupla de la forma $<X, L_X, U_X, S_X>$, on els elements que apareixen corresponen a:

X: el nom de la variable lingüística. Per exemple, edat, alçada, temperatura.

L_X: els valors lingüístics que pot prendre la variable X. Per exemple, si prenem com a variable lingüística la temperatura podem definir $L_{\text{temperatura}}$ com el conjunt {fred, tebi, calent}. A cada element del conjunt L_X se l'anomena *terme* *lingüístic*, i, per tant, L_X és el conjunt de termes lingüístics per a la variable X. Així, fred és un terme lingüístic de la variable lingüística temperatura i, seguint amb l'exemple, $L_{temperatura}$ = {fred, tebi, calent}.

U_X: és l'univers de discurs sobre el qual la variable lingüística pren valors. De fet, correspon al domini en el qual podem interpretar els termes lingüístics. Per exemple, quan parlem de temperatura, els termes fred o calent es poden interpretar com a certs valors numèrics en el domini dels nombres reals. Així en aquest cas, i considerant la temperatura en graus centígrads, farem servir $U_{temperatura}$ com un subconjunt de nombres reals. En molts sistemes el domini de les variables correspon a un subconjunt dels nombres reals.

S_X: és la funció semàntica que dóna significat (interpreta) a cadascun dels termes lingüístics. Així, a cada valor de L_X se li assigna un conjunt difús sobre U_X. Per exemple, al terme calent li assignarem les temperatures a partir de 40 graus.

Definició completa per a la variable temperatura

La definició de la variable temperatura necessita els quatre elements descrits més amunt. Així tenim que la variable lingüística temperatura es defineix com la tupla:

<temperatura, $L_{temperatura}$ = {fred, tebi, calent}, $U_{temperatura}$ = [-50, 50], $S_{temperatura}$>

on la funció $S_{temperatura}$ és:

$S_{temperatura}(fred) = \mu_{fred}$, $S_{temperatura}(tebi) = \mu_{tebi}$ i $S_{temperatura}(calent) = \mu_{calent}$

amb les funcions de pertinença μ_{fred}, μ_{tebi} i μ_{calent} definides com:

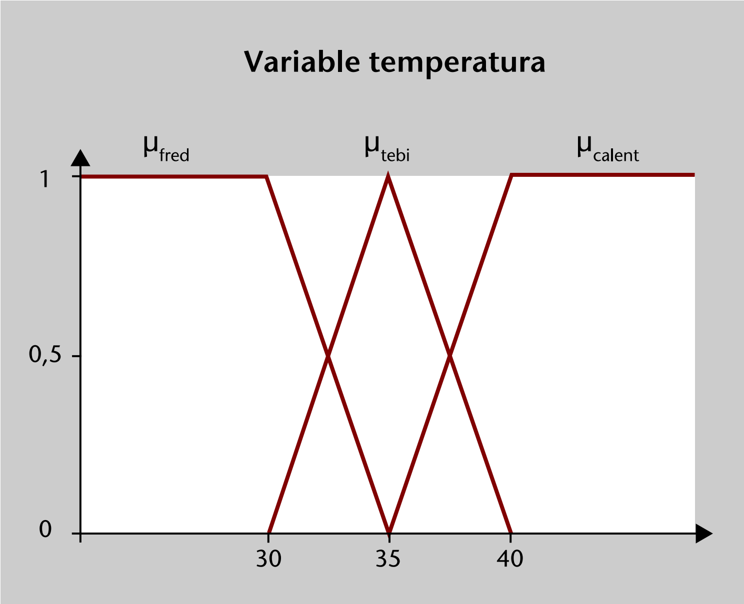
$$\mu_{\text{fred}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 30 \\ 1 - ((x-30)/(35-30)) & \text{si } 30 \le x \le 35 \\ 0, & \text{si } x > 35 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{tebi}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 30 \\ (x-30)/(35-30) & \text{si } 30 \le x \le 35 \\ 1 - ((x-35)/(40-35)) & \text{si } 35 \le x \le 40 \\ 0, & \text{si } x > 40 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{calent}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 30 \\ (x-35)/(40-35) & \text{si } 35 \le x \le 40 \\ 0, & \text{si } x > 40 \end{cases}$$

En la figura 8 es dóna la representació gràfica dels tres termes lingüístics que conformen la variable lingüística temperatura. Com és freqüent en la literatura dels conjunts difusos, les funcions de pertinença es presenten superposades. Cada terme es pot definir de forma diferent un de l'altre, com es veu en la figura, combinant funcions triangulars i trapezoïdals.

Figura 8



És convenient que el domini d'aplicació es divideixi en regions regulars i que puguem construir aquestes regions fàcilment quan disposem d'una partició del domini de les variables d'entrada (del seu univers de discurs). Com que per a cada variable hi ha definit un conjunt de termes, i per a cada terme hi ha associat un conjunt difús, podem exigir que aquests conjunts defineixin una partició de l'univers de discurs. Atès que estem parlant de conjunts difusos, i no de conjunts nítids, el que exigim és que la partició sigui difusa.

El concepte de partició difusa és una generalització del concepte de partició nítida.

> Un conjunt $\mu = \{\mu_1, ..., \mu_n\}$ de conjunts difusos defineix una partició difusa de l'univers de discurs D, quan $\Sigma_{i=1,n}\mu_i(x) = 1$ per a tot $x \in$ D.

Noteu que si els conjunts μ_i són nítids, el que estem exigint correspon, de fet,a una partició nítida. En aquest cas tenim que cada x del domini D només pot pertànyer a un únic conjunt. En el cas difús tindrem que un element podrà pertànyer a més d'un conjunt, però en aquest cas les pertinences seran parcials perquè han de sumar 1. Com que la suma de les pertinences ha de ser 1, si els conjunts són nítids tenim una única μ_i amb $\mu_i(x) = 1$ i per a totes les altres la pertinença és zero.

Definició completa per a la variable temperatura: funció de pertinença

D'acord amb tot això, en el nostre exemple exigim que les funcions de pertinença associades als termes lingüístics calent, tebi i fred de la variable temperatura defineixin una partició difusa de l'univers de discurs d'aquesta variable. Es pot comprovar que les funcions de pertinença μ_{fred}, μ_{tebi} i μ_{calent} defineixen una partició difusa de l'univers de discurs $U_{temperatura}$ = [-50, 50] perquè:

per a tot x del domini $U_{temperatura}$ = [-50, 50] es compleix $\mu_{fred}(x) + \mu_{tebi}(x) + \mu_{calent}(x) = 1$.

Podem veure que en aquest exemple hi ha elements del domini que només pertanyen a un conjunt. Per exemple, 50 graus només pertany al conjunt difús calent (als altres hi pertanyen amb grau de pertinença zero) mentre que 36 pertany amb grau $\mu_{tebi}(36) = 1 - ((36 - 35)/(40 - 35)) = 0{,}8$ al conjunt difús tebi i amb grau $\mu_{calent}(36) = (36 - 35)/(40 - 35) = 0{,}2$ al conjunt difús calent.

Selecció de les variables i construcció de les regles

Amb les indicacions que hem donat sobre la definició de les variables lingüístiques i la construcció de les regles es pot passar a construir el sistema difús. Per a construir-lo, abans que res, hem de seleccionar les variables que farem servir. Triant les que són d'entrada i les que són de sortida. Després haurem de definir per a cadascuna de les variables els seus termes lingüístics, l'univers de discurs i els conjunts difusos que corresponen a cada terme. Un cop fet això podrem passar a construir les regles. A continuació detallem un poc més cadascun d'aquests passos:

1) La variable de sortida: En primer lloc hem de determinar quina és la variable que ens permet controlar l'aparell o la variable que volem modelitzar. Aquesta variable serà la de sortida del sistema difús (suposarem que hi ha una única variable de sortida).

2) Les variables d'entrada: Un cop determinada la variable de sortida hem de seleccionar les variables d'entrada del sistema. Això és, triar les variables que hem de tenir en compte a l'hora de determinar el valor de la variable de sortida. Generalment, el conjunt de variables a tenir en compte pot ser molt gran ja que n'hi poden haver moltes que influeixen en el resultat. Tanmateix, només s'han de seleccionar les que són més rellevants: aquelles variables que són realment significatives pel procés que es vol controlar o per allò que es vol modelitzar. De fet, com menys variables se seleccionin més senzilla resulta la construcció del sistema.

Vegeu també

Vegeu alguns comentaris sobre la complexitat d'un sistema en relació amb el nombre de variables en l'apartat 2.5.1.

3) Components de les variables: Després de definir el conjunt de variables, hem de definir per a cadascuna d'aquestes els seus termes lingüístics, l'univers de discurs i els conjunts difusos que farem correspondre a cada terme. Els conjunts difusos de les variables d'entrada han de definir una partició de l'univers de discurs de la variable. La definició de les funcions de pertinença és un procés difícil ja que el comportament final del sistema en depèn. Per això, s'han desenvolupat mètodes que permeten optimitzar el sistema a partir de la modificació de les funcions de pertinença.

Vegeu també

Alguns dels mètodes es basen amb els algorismes genètics vistos en l'apartat 7. del mòdul "Resolució de problemes i cerca".

4) Definició de les regles: Si tenim *n* variables d'entrada $X_1, ..., X_n$, construirem per a cada tupla de la forma $(t_{1,a}, t_{2,b}, t_{3,c}, ..., t_{n,z})$ on $t_{i,j}$ és un terme lingüístic de X_i (per tant $t_{i,j} \in L_{Xi}$) una regla de la forma:

si X_1 és $t_{1,a}$ **i** X_2 és $t_{2,b}$ **i** X_3 és $t_{3,c}$ **i** ... **i** X_n és $t_{n,z}$ **llavors** Y és $t_{Y,o}$

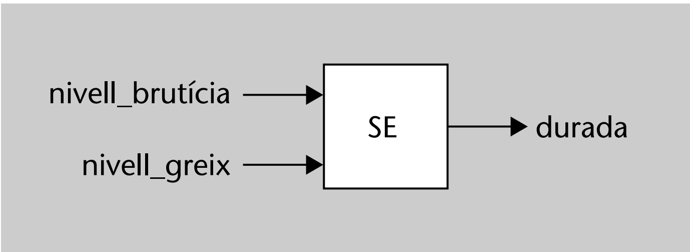
on $t_{Y,o}$ és un terme lingüístic de la variable de sortida Y (per tant $t_{Y,o} \in L_Y$). El conjunt de tuples ha de recobrir tot el domini de l'aplicació.

Cal dir que la construcció d'un sistema difús (tant si és per a un sistema de control com per a un de modelització) és difícil ja que la selecció de quines són les variables d'entrada sovint no és senzill (que siguin poques i rellevants) i a més tampoc no és fàcil construir les regles (definir quines són les conclusions de cada regla). De fet, en el procés de modelització cal tenir en compte tots aquells elements que s'han comentat en l'apartat 1.1.1. del mòdul "Sistemes basats en el coneixement".

Un exemple de sistema d'inferència difús

A continuació, completem els passos per a definir el sistema de control d'una rentadora que s'ha anat explicant en aquest mòdul.

Com s'ha vist fins ara, el sistema descriu dues variables (nivell de brutícia i nivell de greix). El sistema de decisió (SE) pren aquestes dues *variables d'entrada* per a decidir la durada del programa. Per tant, la durada, és una **variable de sortida**.



Per a cadascuna d'aquestes variables hem de definir els termes lingüístics, el seu univers de discurs i les funcions de pertinença que s'associen als termes lingüístics:

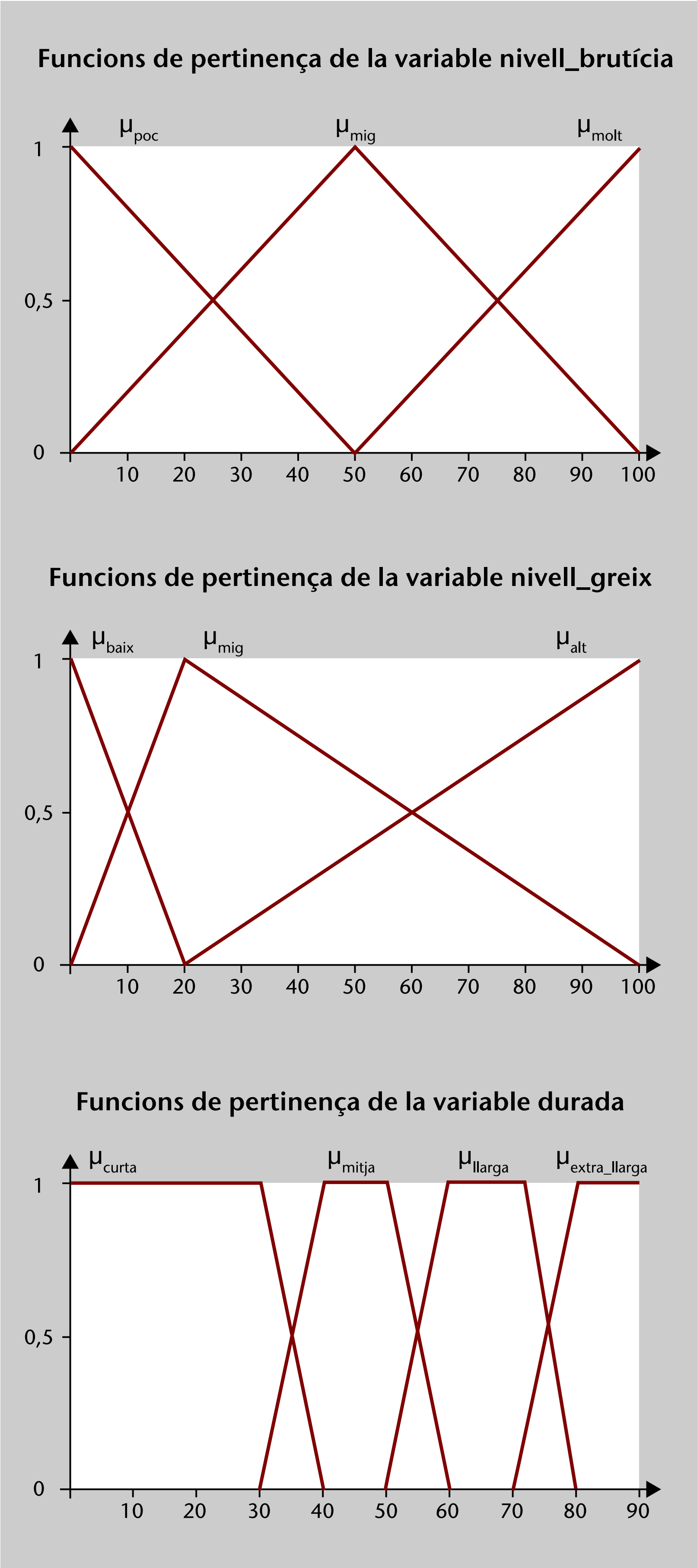
$$\langle \text{nivell\_brutícia}, L_{\text{nivell\_brutícia}} = \{\text{poc, mig, molt}\}, U_{\text{nivell\_brutícia}} = [0, 100], S_{\text{nivell\_brutícia}} \rangle$$

$$\langle \text{nivell\_greix}, L_{\text{nivell\_greix}} = \{\text{baix, mig, alt}\}, U_{\text{nivell\_greix}} = [0, 100], S_{\text{nivell\_greix}} \rangle$$

$$\langle \text{durada}, L_{\text{durada}} = \{\text{curta, mitja, llarga, extra\_llarga}\}, U_{\text{durada}} = [0, 90], S_{\text{durada}} \rangle$$

Com s'ha vist anteriorment, ara ens queda descriure els termes lingüístics associats a les tres variables. En aquest cas, també s'ha optat per utilitzar funcions de pertinença lineals, les trapezoïdals i les triagonals (o triangulars). La figura 9 mostra els termes definits per aquestes tres variables.

Figura 9


Funcions de pertinença de la variable nivell_brutícia
μpoc
μmig
μmolt
1
0,5
0
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
Funcions de pertinença de la variable nivell_greix
μbaix
μmig
μalt
1
0,5
0
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
Funcions de pertinença de la variable durada
μcurta
μmitja
μllarga
μextra_llarga
1
0,5
0
10 20 30 40 50 60 70 80 90

A continuació, descrivim les funcions de pertinença de cada terme de cada variable:

Variable nivell_brutícia:

$$\mu_{\text{poc}}(x) = \begin{cases} -0{,}02x + 1, & \text{si } 0 \le x < 50 \\ 0, & \text{si } 50 \le x \le 100 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{mig}}(x) = \begin{cases} 0{,}02x, & \text{si } 0 \le x < 50 \\ -0{,}02x + 2, & \text{si } 50 \le x \le 100 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{molt}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le x < 50 \\ 0{,}02x - 1, & \text{si } 50 \le x \le 100 \end{cases}$$

Variable nivell_greix:

$$\mu_{\text{baix}}(x) = \begin{cases} -0{,}05x + 1, & \text{si } 0 \le x < 20 \\ 0, & \text{si } 20 \le x \le 100 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{mig}}(x) = \begin{cases} 0{,}05x, & \text{si } 0 \le x < 20 \\ -0{,}0125x + 1{,}25, & \text{si } 20 \le x \le 100 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{alt}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le x < 20 \\ 0{,}0125x - 0{,}25, & \text{si } 20 \le x \le 100 \end{cases}$$

Variable durada:

$$\mu_{\text{curta}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \le x < 30 \\ -0{,}1x + 4, & \text{si } 30 \le x < 40 \\ 0, & \text{si } 40 \le x \le 90 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{mitja}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le x < 30 \\ 0{,}1x - 3, & \text{si } 30 \le x < 40 \\ 1, & \text{si } 40 \le x < 50 \\ -0{,}1x + 6, & \text{si } 50 \le x < 60 \\ 0, & \text{si } 60 \le x \le 90 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{llarga}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le x < 50 \\ 0{,}1x - 5, & \text{si } 50 \le x < 60 \\ 1, & \text{si } 60 \le x < 70 \\ -0{,}1x + 8, & \text{si } 70 \le x < 80 \\ 0, & \text{si } 80 \le x \le 90 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{extra\_llarga}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le x < 70 \\ -0{,}1x - 7, & \text{si } 70 \le x < 80 \\ 1, & \text{si } 80 \le x \le 90 \end{cases}$$

Un cop definides les variables, ens queda conèixer les regles que governaran l'SE. D'acord amb el que s'ha apuntat en el quart punt de l'esquema anterior, caldria definir una regla per a cadascun dels parells (a, b) on a és un terme lingüístic del conjunt $L_{\text{nivell\_brutícia}}$ i b és un terme lingüístic del conjunt $L_{\text{nivell\_greix}}$. En total, si utilitzem regles conjuntives, tenim un total de nou regles possibles.

nivell_greix\nivell_brutícia	poc	mig	molt
baix	curta	mitja	llarga
mig	curta	mitja	llarga
alt	llarga	llarga	extra_llarga

Aprofitant que tenim dues variables, podem mostrar les regles en forma de taula, indicant a cada eix els termes de cada variable.

Així, una de les regles de la taula, seria la que es va descriure anteriorment en aquest mòdul:

si*nivell_bruticia és poc***i***nivell_greix és alt***llavors***durada és llarga*

Comentaris addicionals sobre les regles i la construcció del sistema

En la descripció que s'ha fet, els antecedents de les regles apareixen lligats amb conjuncions. Tot i que això facilita la construcció del sistema, perquè és més fàcil recobrir tot el domini d'aplicació, no és un requisit indispensable.

De fet, en general, tenim que les premisses són combinacions d'expressions de la forma "X és l" on X és una variable i l és un terme lingüístic de la variable X i aquestes expressions es poden combinar mitjançant conjuncions, disjuncions o es poden negar amb negacions.

Per exemple, podríem definir regles de l'estil:

si *nivell_brutícia és molt* **i** *nivell_greix* ***no*** *és alt* **llavors** *durada és llarga*

Per exemple, utilitzant una disjunció:

si *nivell_bruticia és molt* **o** *nivell_greix és alt* **llavors** *durada és llarga*

De la mateixa manera, és possible tenir expressions en les conclusions en què aparegui més d'una variable i també hi hagi conjuncions, disjuncions i negacions. Aquí no considerarem cap d'aquests casos.

2.3. Aplicació d'una regla i d'un conjunt de regles

En l'apartat anterior hem vist com definir una regla i un sistema difús. En aquest apartat veurem com aplicar les regles quan disposem d'una certa informació corresponent a les variables d'entrada. Comencem mostrant com calcular el grau en què se satisfà l'antecedent d'una regla, després veurem què es conclou d'una regla quan aquesta només se satisfà en un cert grau i finalment veurem què passa quan en un sistema hi ha més d'una regla que es compleix en un determinat grau.

Ebraim H. Mamdani

El mètode Mamdani, bàsicament, es defineix com un sistema d'inferència on la *t-norma* és el mínim i la *t-conorma* és el màxim.

Lectura recomanada

IEEE (1977). "Application of Fuzzy Logic to Approximate Synthesis using Linguistic Synthesis". *Transaction on Computers* (núm. 12, pàg. 1182-1191).

La manera d'aplicar les regles que descrivim aquí correspon al **mètode de Mamdani**, i correspon a un tipus particular d'inferència.

Grau de satisfacció de l'antecedent

El grau de satisfacció de l'antecedent d'una regla correspon al grau en què la regla s'activarà. Aquest grau es calcula mirant la pertinença dels valors de les variables als conjunts difusos que apareixen en l'antecedent i després combinant les pertinences d'acord amb les conjuncions, disjuncions o complements que apareixen en l'antecedent. Com s'ha dit, en el nostre cas només considerarem conjuncions.

Considerem una regla amb n variables d'entrada $X_1, \ldots, X_n$ de la forma:

si X_1 és $t_{1,a}$ **i** X_2 és $t_{2,b}$ **i** X_3 és $t_{3,c}$ **i** ... **i** X_n és $t_{n,z}$ **llavors** Y és $t_{Y,o}$

on $t_{i,j}$ és un terme lingüístic de X_i (suposem que el conjunt difús associat al terme $t_{i,j}$ és $\mu_{i,j}$) i on $t_{Y,o}$ és un terme lingüístic de la variable de sortida Y.

Aleshores, quan en un instant concret coneixem el valor de cada variable X_i (denotarem aquests valors per x_i), podem avaluar la certesa de les expressions "X_i és $t_{i,j}$" per a cadascuna de les variables. Com que la funció de pertinença associada a $t_{i,j}$ és $\mu_{i,j}$, tenim que l'avaluació de l'expressió "X_i és $t_{i,j}$" no és més que veure en quin grau el valor x_i satisfà el conjunt $\mu_{i,j}$. Això és, $\mu_{i,j}(x_i)$. Per tant, per a la regla anterior podem calcular:

$$\mu_{1,a}(x_1),\ \mu_{2,b}(x_2),\ \mu_{3,c}(x_3),\ \ldots,\ \mu_{n,z}(x_n)$$

Ara, com que en l'antecedent d'aquesta regla les expressions "X_i és $t_{i,j}$" estan unides amb conjuncions, i la conjunció la modelitzem en el cas difús amb *t*-normes, tenim que la certesa de tot l'antecedent és:

$$T(\mu_{1,a}(x_1),\ \mu_{2,b}(x_2),\ \mu_{3,c}(x_3),\ \ldots,\ \mu_{n,z}(x_n))$$

Com que d'acord amb el que hem vist en el subapartat 2.1. no hi ha una única *t*-norma, a l'hora de construir un sistema difús s'ha de decidir quina *t*-norma fem servir per a modelitzar la conjunció. Evidentment, t-normes diferents donaran resultats diferents.

Vegeu també

En el subapartat 2.5 es comentarà una mica més sobre la qüestió de la tria dels paràmetres.

Avaluació de l'antecedent d'una de les regles del sistema de control fent servir la definició anterior de les variables

Avaluarem el grau de satisfacció d'una regla tenint en compte uns valors donats de les variables d'entrada. En aquest cas, prenem *nivell_brutícia* = 70 i *nivell_greix* = 50.

Considerem la regla següent:

si *nivell_brutícia és mig* **i** *nivell_greix és alt* **llavors** *durada és llarga*

Considerem un sistema Mamdani amb *t*-norma mínim.

En aquest punt, ens cal saber el grau de pertinença dels valors d'entrada a cadascun dels antecedents de la nostra regla.

En aquest cas, ens cal saber quin nivell de pertinença té el valor nivell_brutícia de 70 al terme mig: $\mu_{\text{mig}}(70) = (-0{,}02 * 70 + 2) = 0{,}6$.

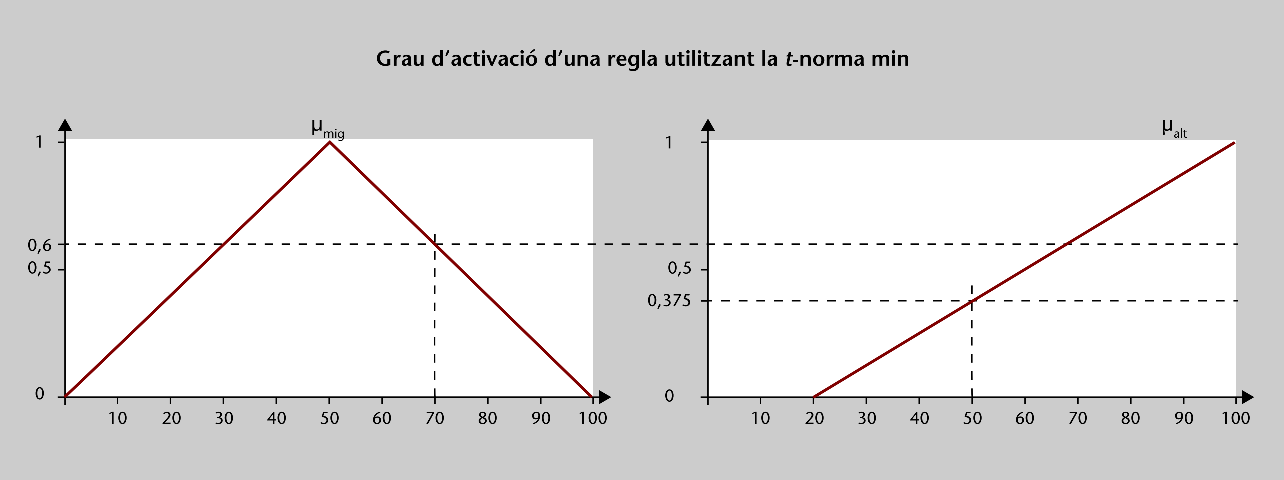
De forma anàloga, fem el mateix per a conèixer el grau de pertinença del valor d'entrada de 50 per a la variable *nivell_greix* i el terme alt: $\mu_{\text{alt}}(50) = (0{,}0125 * 50 - 0{,}25) = 0{,}375$.

Com que prenem la *t*-norma mínim, el grau de satisfacció dels antecedents en aquesta regla és min(0,6, 0,375) = 0,375.

Això vol dir que la regla s'activa amb un grau de certesa 0,375 i, per tant, haurem de tenir-la en compte a l'hora de prendre una decisió final.

En la figura 10, es dóna una representació gràfica del càlcul de la satisfacció de la regla.

Figura 10



Aplicació d'una regla

Un cop tenim la certesa en què se satisfà l'antecedent passem a obtenir la conclusió de la regla. Hem de tenir en compte que quan l'antecedent se satisfà plenament, la conclusió serà aquella mateixa que tenim en la regla, però que quan l'antecedent no se satisfà plenament, el que tindrem com a conclusió serà una modificació del que apareix en la regla. De fet, quan apliquem el sistema de Mamdani, el funcionament és com segueix:

Si suposem que el grau en què se satisfà l'antecedent és α, la conclusió de la regla serà el conjunt difús que hi apareix truncat amb el valor d'α. Això és, si tenim la regla:

Si X_1 és $t_{1,a}$ **i** X_2 és $t_{2,b}$ **i** X_3 és $t_{3,c}$ **i** ... **i** X_n és $t_{n,z}$ **llavors** Y és $t_{Y,o}$

on $t_{i,j}$ és un terme lingüístic de la variable X_i i $\mu_{i,j}$ és el conjunt difús associat al terme $t_{i,j}$ i on $t_{Y,o}$ és un terme lingüístic de la variable de sortida Y i $\mu_{\mathrm{Y,o}}$ és el conjunt associat a $\mathrm{t_{Y,o}}$ aleshores, la conclusió de la regla és el conjunt difús:

$$\mu_{Y,o}(x) = \min(\alpha, \mu_{Y,o}\ \mathrm{Y}(x)),$$

quan:

$$\alpha = T(\mu_{1,A}(x_1), \mu_{2,A}(x_2), \mu_{3,C}(x_3), \ldots, \mu_{n,Z}(x_n))$$

Es pot comprovar que si l'antecedent d'una regla es compleix completament (α = 1), aleshores la conclusió és $\mu_{Y,o}$. Dit d'una altra manera, si l'antecedent és compleix plenament, la conclusió és la que apareix a la regla. D'altra banda, quan l'antecedent de la regla no es compleix (α = 0), aleshores aquesta construcció ens donarà com a conclusió de la regla el conjunt buit.

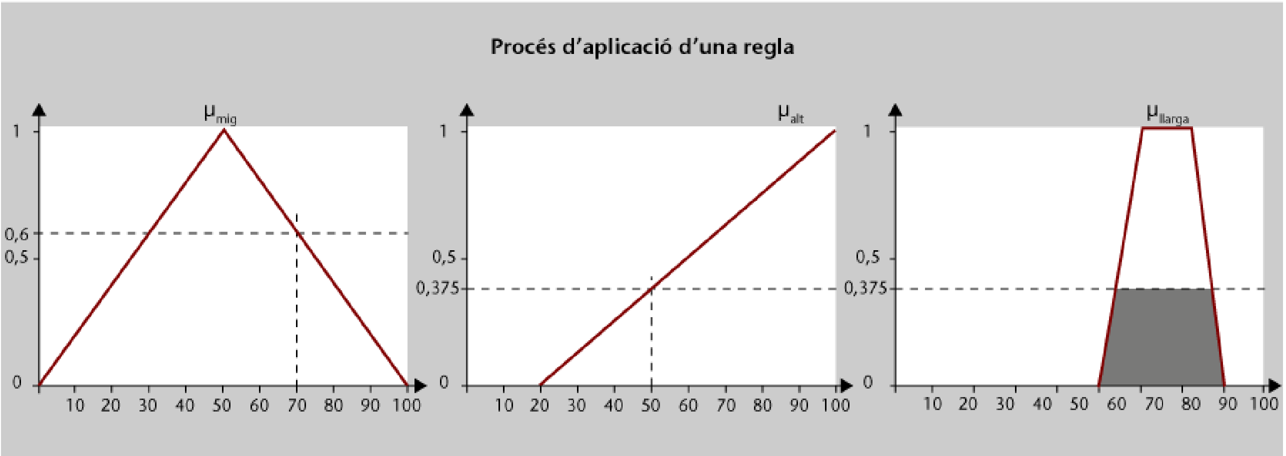
Prosseguint l'exemple de la rentadora

Un cop descrit com es calcula el conseqüent aplicant la *t*-norma mínim, observem gràficament com la regla que estem veient s'aplica finalment.

si *nivell_brutícia és mig* **i** *nivell_greix és alt* **llavors** *durada és llarga*

Com s'ha vist, el conseqüent de la regla queda activat amb un nivell 0,375 resultat d'aplicar el mínim als antecedents. Com es mostra en la figura 11, tenim que l'aplicació de la regla ens dóna que s'activa el terme *llarga* de la variable de sortida *durada* amb un nivell 0,375.

Figura 11



Aplicació d'un conjunt de regles

Quan en lloc de disposar d'una única regla en tenim un conjunt, el que farem és **aplicar el mateix procés per a cadascuna de les regles**. Això ens retornarà un conjunt difús per a cadascuna de les regles.

La conclusió del conjunt de regles es defineix com la **unió de les conclusions** (en la definició de la unió es farà servir una *t*-conorma).

Com s'ha vist fins ara, el resultat de la unió de les conclusions és un nou conjunt difús. A la pràctica, ens caldrà calcular la funció de pertinença d'aquest conjunt.

Tornem a subratllar que en aquest procés quan l'antecedent d'una regla no es compleix, la conclusió serà el conjunt buit. Això farà que en fer la unió de les conclusions aquestes regles no tinguin cap participació en la conclusió final.

Prosseguim amb l'exemple aplicant aquest procediment al conjunt de totes les regles del sistema de control

Pels valors d'entrada donats s'activen unes normes i unes altres no. Podem recuperar la taula amb les regles i indicar el nivell d'activació dels antecedents. Amb això, podem veure de forma directa quines regles s'activen i quin nivell final.

Recordem que considerem els valors d'entrada següents, *nivell_brutícia* = 70 i *nivell_greix* = 50. Amb aquests valors s'activen els termes *mig* (grau 0,6) i *molt* (grau 0,4) de la variable *nivell_brutícia*, i els termes *mig* (grau 0,625) i *alt* (0,375) de la variable *nivell_greix*.

En la taula, en les files en gris i entre parèntesi, mostrem els graus d'activació d'aquests termes lingüístics. Ja dins de la taula, es mostren els graus de satisfacció dels antecedents (aplicant la t-norma del mínim).

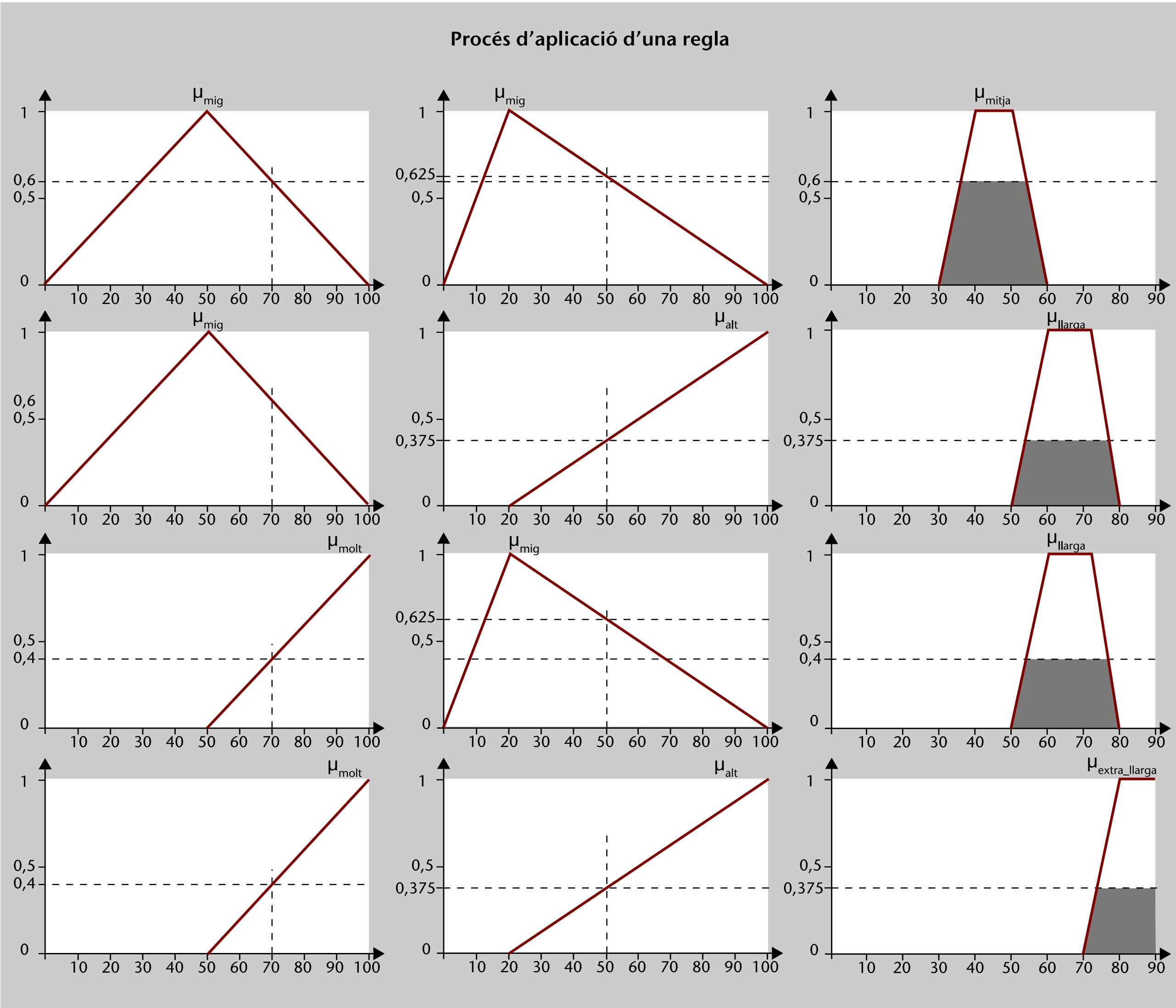
nivell_greix\nivell_brutícia	poc	mig (0,6)	molt (0,4)
baix	curta	mitja	llarga
mig (0,625)	curta	mitja (0,6)	llarga (0,4)
alt (0,375)	llarga	llarga (0,375)	extra_llarga (0,375)

És a dir, amb els valors d'entrada donats, s'activen quatre regles (de les nou que conté el bloc).

- **si** *nivell_brutícia és mig* **i** *nivell_greix és mig* **llavors** *durada és mitja*
- **si** *nivell_brutícia és mig* **i** *nivell_greix és alt* **llavors** *durada és llarga*
- **si** *nivell_brutícia és molt* **i** *nivell_greix és mig* **llavors** *durada és llarga*
- **si** *nivell_brutícia és molt* **i** *nivell_greix és alt* **llavors** *durada és extra_llarga*

En la figura 12, es mostren gràficament l'obtenció dels conseqüents en aquestes regles, on les gràfiques de la primera columna fan referència al nivell de brutícia, les gràfiques de la segona columna al nivell de greix i les de la tercera columna a la variable durada (sortida del sistema). Cada fila correspon a cadascuna de les quatre regles que s'activen i que s'han especificat anteriorment.

Figura 12



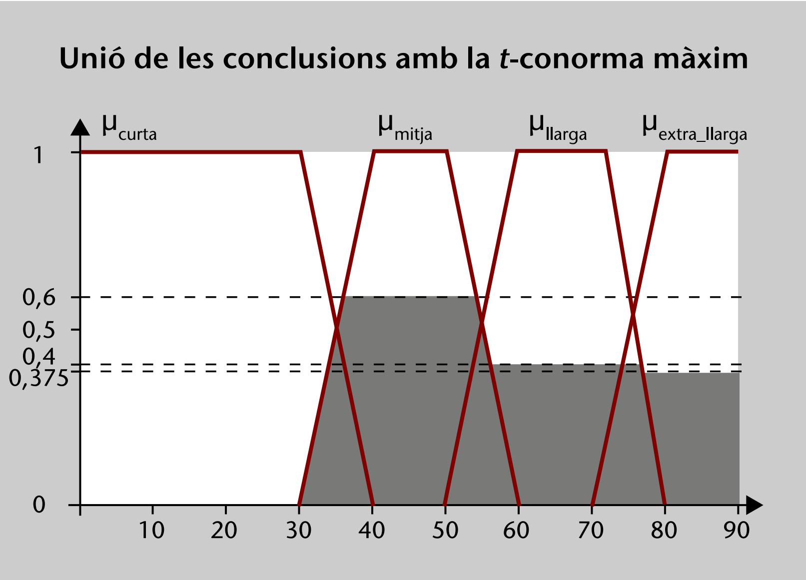
En la figura 13, s'observa la unió de les conclusions aplicant la *t*-conorma màxim. Veiem com, en cada terme, s'aplica el màxim calculat anteriorment.

En el cas dels termes *mitja* i *extra_llarga*, no hi ha cap problema perquè només hi ha una regla que l'activi i el resultat final és directe, però en el cas del terme *llarga* hi ha dues regles que l'activen. En aquest cas és on apliquem la *t*-conorma màxim per a calcular el grau d'activació: max(0,375, 0,4) = 0,4.

Abans de passar a calcular el valor nítid de la sortida, ens queda calcular la funció de pertinença resultant de la unió dels conjunts difusos ($\mu_{durada}(x)$).

$$\mu_{durada}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le x < 30 \\ 0,1x - 3, & \text{si } 30 \le x < 36 \\ 0,6, & \text{si } 36 \le x < 54 \\ -0,1x + 6, & \text{si } 54 \le x < 56 \\ 0,4, & \text{si } 56 \le x < 76 \\ -0,1x + 8, & \text{si } 76 \le x < 76,25 \\ 0,375, & \text{si } 76,25 \le x \le 90 \end{cases}$$

Figura 13



Nitidificació

En el pas anterior hem obtingut com a conclusió del sistema un conjunt difús. Desafortunadament, una solució d'aquest tipus sovint no és adequada perquè la variable de sortida requereix ser un valor real. Per exemple, la intensitat que hem de subministrar a l'aparell que controlem, o la velocitat a la qual s'ha de desplaçar un robot. En aquests casos, els sistemes difusos afegeixen un pas més al procés de deducció. Aquest pas es diu de *nitidificació*[5] i consisteix a obtenir un valor nítid a partir d'un conjunt difús.

(5)En anglès, *defuzzification*.

De fet, hi ha diverses maneres de fer el procés de nitidificació. Una d'aquestes és l'anomenat *centre de masses* (o *centre d'àrea*) i es defineix com una *mitjana* dels valors del domini cadascun ponderat segons la seva pertinença al conjunt que estem nitidificant.

Així, si tenim que la funció de pertinença conclusió d'un sistema difús és μ i si suposem que aquesta funció de pertinença està definida en un domini discret *D*, aleshores la nitidificació de μ és:

$$\text{CoM} = \frac{\sum_{x \in D} (\mu(x) * x)}{\sum_{x \in D} \mu(x)}$$

Com que la nostra funció de pertinença és contínua en el domini *D*, també podem fer el càlcul analíticament, substituint el sumatori per una integral definida de la forma següent:

$$\text{CoM} = \frac{\int_{x \in D} (\mu(x) * x) dx}{\int_{x \in D} (\mu(x)) dx}$$

Càlcul del valor nítid

Seguint l'exemple de la rentadora, en el pas anterior s'ha calculat la funció de pertinença de la variable de sortida *durada*. Ara, doncs, podem utilitzar aquesta funció per a calcular el valor nítid final.

Tenim la funció següent, per qualsevol *x* en el domini [0, 90]:

$$\mu_{\text{durada}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le x < 30 \\ 0,1x - 3, & \text{si } 30 \le x < 36 \\ 0,6, & \text{si } 36 \le x < 54 \\ -0,1x + 6, & \text{si } 54 \le x < 56 \\ 0,4, & \text{si } 56 \le x < 76 \\ -0,1x + 8, & \text{si } 76 \le x < 76,25 \\ 0,375, & \text{si } 76,25 \le x \le 90 \end{cases}$$

Llavors, si calculem el valor nítid de forma iterativa, el resultat final que obtenim és:

$$CoM = \frac{\sum_{x=0}^{90} (\mu_{\text{durada}}(x) * x)}{\sum_{x=0}^{90} (\mu_{\text{durada}}(x))} = \frac{78.323,31}{1.342,8745} = 58,325$$

El càlcul de forma iterativa es pot fer amb un petit programa on es defineix un bucle i una funció que retorni el valor de la funció de pertinença. En el nostre cas, aquesta funció ha de definir els diferents trams i retornarà el valor que correspongui.

```
v_numerador = v_denominador = 0;
v_interval := 0,02; -- resolució del càlcul
i = 0;
mentre (i<90) fer
    v_numerador += mu(i)*i;
    v_denominador += mu(i);
    i += v_interval;
fimentre;
retorna (v_numerador/v_denominador);
```

De forma anàloga, podem fer el càlcul del *CoM* utilitzant integrals per parts. Si fem els càlculs –sense cap error d'aproximació afegit– ens dóna el resultat següent:

Web recomanada

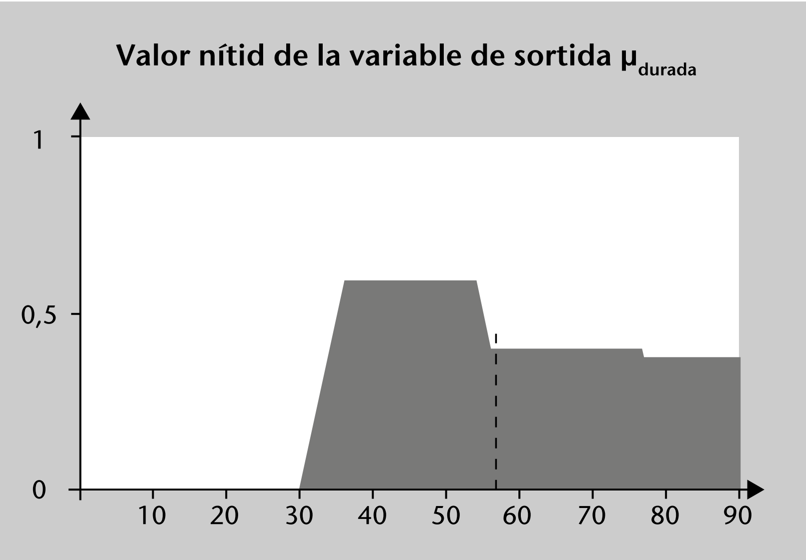
Per obtenir el valor nítid, podeu utilitzar eines en línia com CalcMe (http://www.wiris.com/calc/).

$$\mathrm{CoM} = \frac{\int_0^{90} (\mu_{\mathrm{durada}}(x) * x)dx}{\int_0^{90} (\mu_{\mathrm{durada}}(x))dx} =$$

$$= \frac{\int_{30}^{36}((0,1x-3)x)dx + \int_{36}^{54}(0,6x)dx + \int_{56}^{54}((-0,1x+6)x)dx + \int_{56}^{76}(0,4x)dx + \int_{76}^{76,25}((-0,1x+8)x)dx + \int_{76}^{90}(0,375x)dx}{\int_{30}^{36}(0,1x-3)dx + \int_{36}^{54}(0,6)dx + \int_{56}^{54}(-0,1x+6)dx + \int_{56}^{76}(0,4)dx + \int_{76}^{76,25}(-0,1x+8)dx + \int_{76}^{90}(0,375)dx} =$$

$$= \frac{(61,2+486+54,933+528+7,3745+428,61)}{(1,8+10,8+1+8+0,096875+5,1563)} = 58,322$$

Figura 14



2.4. Sistemes amb regles conjuntives i amb regles disjuntives. Les implicacions

El mecanisme d'inferència que s'ha descrit no és l'únic que existeix per als sistemes difusos. De fet, podem destacar quatre tipus diferents (dos dels quals són equivalents) d'inferència.

Vegeu també

Vegeu el mecanisme d'interferència descrit en el subapartat 2.3 d'aquest mòdul.

En general, la inferència es pot veure a partir de la construcció d'una relació entre les variables d'entrada i les de sortida. Així, una regla de la forma:

si *X* és en l'interval [1, 2] **llavors** *Y* és 2

indica que els elements *x* de l'interval [1, 2] estan relacionats amb el valor 2. Aleshores quan tenim un valor concret de *x*, podem mirar quins són els elements de y que hi estan relacionats. Aquest conjunt és la conclusió de la regla per a un estat donat.

Elements relacionats o no relacionats

En el cas de la regla anterior els elements del parell (x = 1,5, y = 2) estan relacionats, però, en canvi, els elements del parell (x = 1,5, y = 3) no ho estan.

En el cas nítid tenim que la relació que es construeix és nítida. Així podem veure si els elements d'un parell (entrades, sortida) estan relacionats o no. Com és conegut, una relació es pot modelitzar mitjançant una funció característica

R. En general, i pel cas de l'exemple de dues variables, tenim que $R(x, y) \in \{0, 1\}$. En la figura 15 es dóna una representació gràfica de la funció característica corresponent a la regla anterior.

Modelització de la relació

Suposant que la funció característica associada a la regla es denota R, tenim que $R(x = 1{,}5, y = 2) = 1$ i que $R(x = 1{,}5, y = 3) = 0$.

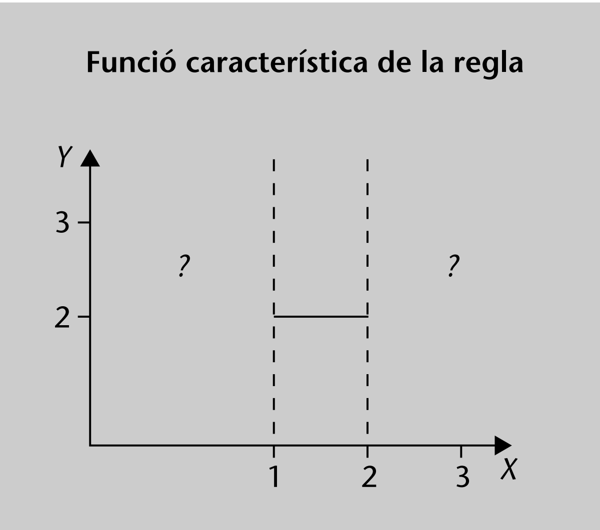
si *X* és en l'interval [1, 2] **llavors** *Y* és 2

Els punts (x, y) marcats corresponen a valors de x i y que estan relacionats. En el cas de tenir regles difuses, tenim que la relació que es construeix és difusa i, per tant, en lloc de tenir una funció característica el que tenim és una funció de pertinença.

Relació difusa

En aquest cas serà possible, per exemple, tenir $\mu(x = 1{,}5, y = 2{,}1) = 0{,}9$.

Figura 15



Un element important de com fer la inferència és com interpretar una regla o, el que és el mateix, com construir una relació difusa –la seva funció de pertinença– a partir d'una regla. De fet, això es pot fer de dues maneres diferents perquè hi ha dues interpretacions de les regles:

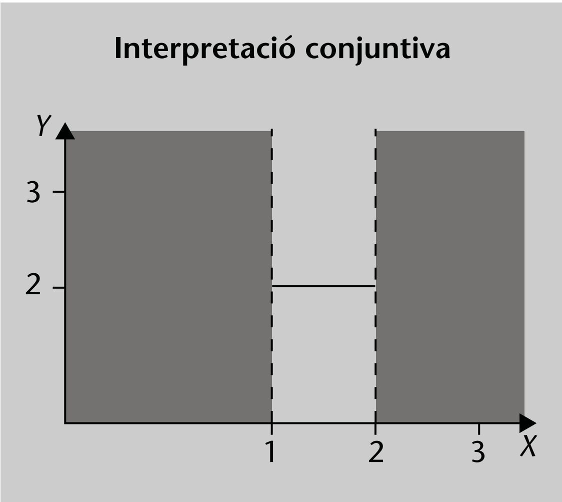
1) **Regles conjuntives**: una regla s'interpreta com una implicació. El comportament de totes les regles d'un sistema es defineix a partir de la *conjunció* de les implicacions (conjunció de les regles). De fet, si cada regla es veu com una relació, la relació que defineix el sistema format per totes les regles correspon a la intersecció de totes les relacions.

2) **Regles disjuntives**: una regla s'interpreta com un punt de l'espai entrades x sortida. El comportament de totes les regles d'un sistema és la *unió* dels "punts". De fet, si cada regla es veu com una relació, el que tenim és que el comportament del sistema ve definit per la unió de totes les relacions.

De manera gràfica, aquestes dues interpretacions corresponen a dues maneres d'omplir la relació en les zones que s'han marcat amb un interrogant en la figura 15.

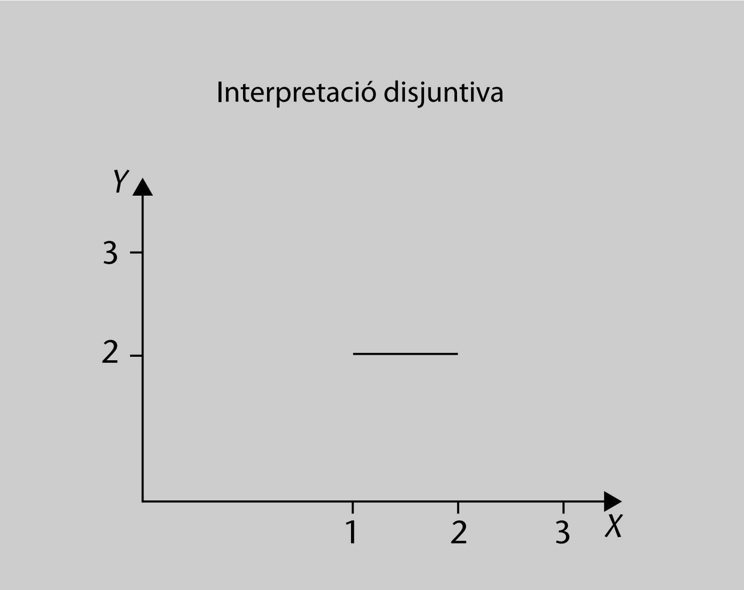
En el cas de les regles conjuntives, tenim que la zona marcada amb l'interrogant s'omple dient que els valors sí que poden estar relacionats (la funció característica té un valor de 1). Això és així perquè, com s'ha dit, una regla es veu com una implicació. Per tant, per a calcular la certesa pels parells podem tenir en compte com es calcula la certesa en una implicació. Recordem de l'assignatura de lògica que la certesa d'una implicació quan l'antecedent no es compleix és certa. Això és, F → T és T i que F → F també és T. Així, per a tots els parells amb una x que no és de l'interval [1, 2] la certesa de la implicació és 1. En la figura 16 es dóna la representació de la relació que tindríem d'acord amb la interpretació conjuntiva.

Figura 16



En el cas de regles disjuntives, la regla ens dóna els valors que sap relacionats i la resta es consideren com a no relacionats (es basen en què si hi ha altres punts relacionats la mateixa regla o una altra ja ens ho dirà). En aquest cas es veu la regla com una conjunció. Un parell (x, y) està relacionat si la regla ens ho diu. Això correspon en el cas anterior a dir, x és en l'interval [1, 2] i, a més, $y = 2$. Això s'aconsegueix modelitzant la regla mitjançant una conjunció (conjunció de la certesa de l'antecedent i de la certesa del conseqüent). Per tant, quan x és fora de l'interval [1, 2] la certesa de la relació ha de ser zero. La figura 17 dóna la representació de la relació en aquest cas.

Figura 17

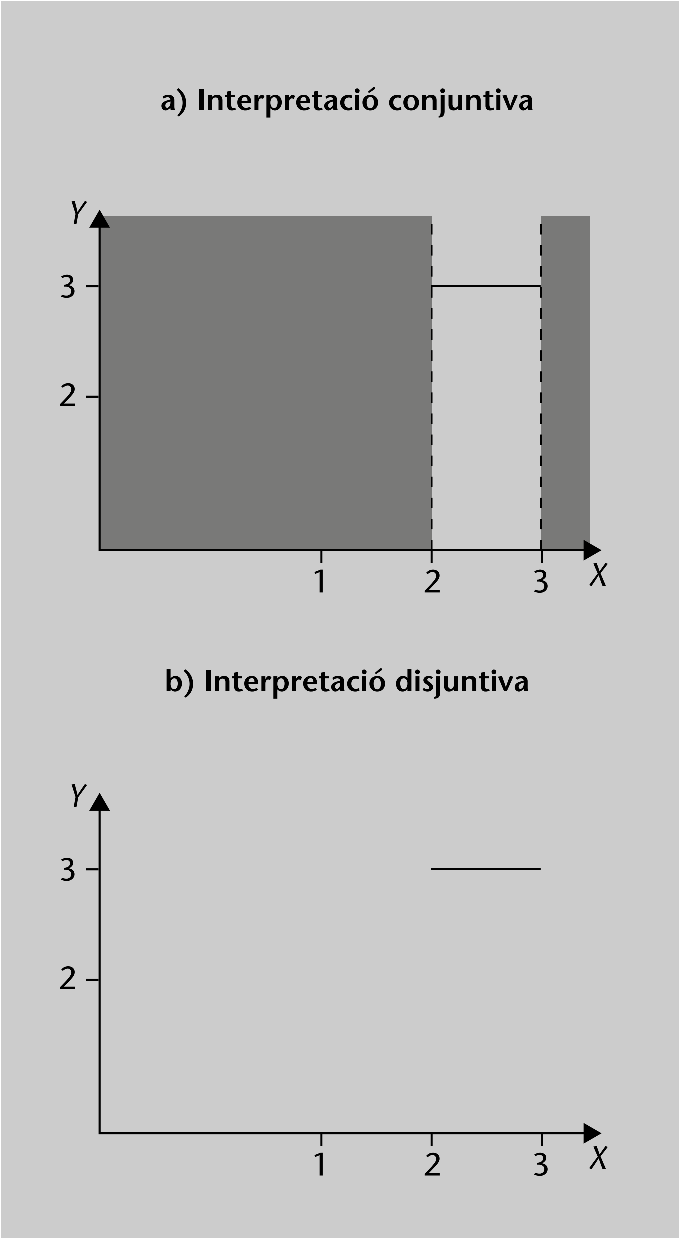


Com ja s'ha dit, els noms d'interpretació conjuntiva i disjuntiva vénen de quan en lloc de tenir una única regla en tenim més. En el primer cas farem conjunció de les relacions (intersecció) i en el segon cas farem una disjunció de les relacions (unió). Per a comprendre com s'interpreta un conjunt de regles en cadascun dels casos prenem la regla anterior i la nova regla:

si *X* és en l'interval [2, 3] **llavors** *Y* és 3

Les relacions corresponents a aquesta regla d'acord amb les interpretacions conjuntiva i disjuntiva es donen en la figura 18.

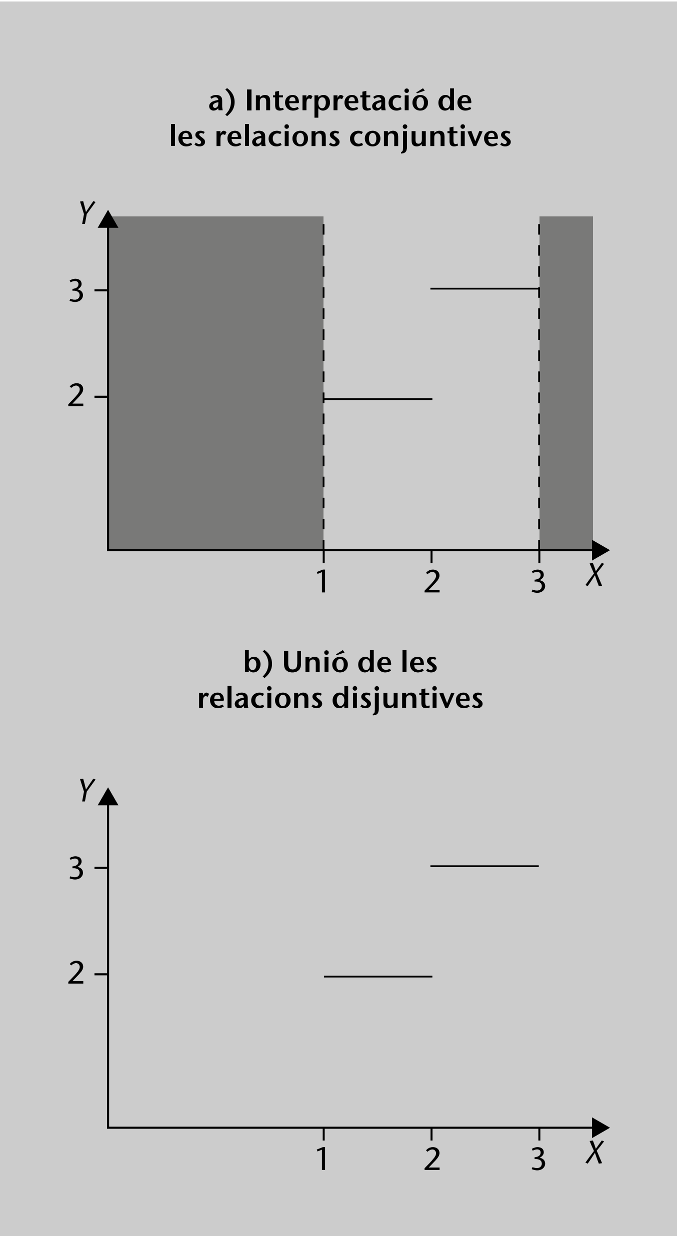
Figura 18



Sembla raonable pensar que si en un sistema tenim les dues regles el que voldrem és que quan la x estigui en l'interval [1, 2] la conclusió sigui $y = 2$ i que quan estigui en l'interval [2, 3] la conclusió sigui $y = 3$. Si fem la intersecció de les relacions conjuntives (intersecció de les figures 18 i 20(a) que representen les relacions conjuntives) obtindrem la relació conjuntiva de la figura 19(a). Si, en canvi, fem la unió de les disjuntives (unió de les figures 19 i 20(b) que representen les relacions disjuntives) obtindrem la relació disjuntiva de la figura 19(b). En ambdós casos, tenim que per x en l'interval [1, 3] la figura és la mateixa. Podeu veure que la intersecció de les relacions disjuntives dóna la relació buida i que la unió de les relacions conjuntives ens donarà la relació que sempre és 1.

Tot i que en la descripció i en l'exemple ens hem centrat en les regles binàries, el mateix serveix per al cas difús. Quan els antecedents i els conseqüents estan definits mitjançant conjunts difusos el que tindrem serà que la implicació (que apareix en la interpretació de les regles conjuntives) ha de ser una funció d'implicació difusa. Aquestes funcions es construeixen a partir de propietats de manera semblant a com hem fet amb les negacions, *t*-normes i *t*-conormes. En el cas de la interpretació disjuntiva no fa falta cap funció nova perquè en modelitzar la regla amb una conjunció es fa servir una *t*-norma.

Figura 19



Un cop hem interpretat les regles, hem de veure com combinar la informació corresponent a un estat concret amb les relacions que hem construït. Això ens donarà la conclusió de tot el sistema. Quan només es té una relació, la combinació de les dues informacions es fa mitjançant la composició de la relació amb la informació que tenim. En el cas nítid això és senzill. Per exemple, si tenim que l'estat del sistema correspon a x = 1,5, només hem de mirar quins elements estan relacionats amb aquesta x. En el nostre cas només n'hi ha un (y = 2) però en general n'hi podria haver més. La conclusió és el conjunt de tots els punts del domini de la variable Y relacionats. En el cas difús, la conclusió serà un conjunt difús sobre el domini de la variable Y.

Sense entrar en detall en aquest procés, podem escriure que si hi ha una regla que combina dues variables X i Y que s'interpreta, com en l'exemple, mitjançant una relació difusa $\mu_R(x, y)$, la conclusió d'aquesta regla quan l'estat correspon al conjunt difús μ_A és:

$$\mu_B(Y) = \sup_{x \in X} \min(\mu_R(x, y), \mu_A(x))$$

Noteu que la informació de l'estat actual ha de ser un conjunt sobre el domini de les X i que la conclusió és un conjunt difús sobre el domini de les Y. En el cas concret en què la informació és un valor concret x_0 del domini de les X en lloc de ser un conjunt difús μ_A, el que tenim és: $\mu_B(y) = \min (\mu_R(x, y), \mu_A(x)) = \mu_R(x_o, y)$ perquè $\mu_A(x_o) = 1$ i $\mu_A(x) = 0$ per a qualsevol altra x diferent ($x \neq x_o$).

La descripció de la inferència de Mamdani que hem donat en el subapartat 2.3 correspon a un sistema amb regles disjuntives on la *t*-norma per a combinar l'antecedent i el conseqüent de les regles és el mínim. Observeu que en aquest cas podem dir que:

$$\mu_B(y) = \mu_R(x, y) = T(\mu_{\text{antecedent}}(x_o), \mu_{\text{consequent}}(y)),$$

que quan T = mínim és el mateix que escapçar el conjunt $\mu_{\text{consequent}}(y)$ segons el valor de $\mu_{\text{antecedent}}(x_o)$.

La composició que s'ha donat aquí pressuposa que la informació sobre l'estat actual ve donada per un conjunt difús i que la base de coneixement del sistema és una relació. Quan en lloc de tenir una única regla disposem d'un conjunt de regles podem operar primer les regles per tal de construir una relació que resumeixi la informació de totes les regles (fent la unió o la intersecció de les relacions segons correspongui) i aplicar desprès el procés descrit. Tanmateix, hi ha una alternativa. Podem composar de manera independent cada regla i després combinar les conclusions (de manera semblant a com hem descrit en el sistema de Mamdani). Si prenem l'opció de combinar les conclusions hem de tenir en compte que quan les regles són disjuntives haurem de fer la unió de les conclusions (com hem fet en el cas del sistema de Mamdani) però que quan les regles són conjuntives el que cal fer és la intersecció dels resultats.

Quan considerem el fet de tenir regles conjuntives i disjuntives, i la possibilitat de fer primer una relació que resumeixi totes les regles o bé combinar les conclusions que dóna cada regla individualment tenim quatre maneres diferents d'operar:

1) Regles disjuntives, composant la informació de l'estat amb cadascuna de les regles i després fent la unió de les conclusions.

2) Regles disjuntives, primer fent la unió de les regles i després composant la informació corresponent a l'estat amb la relació que en resulta.

3) Regles conjuntives, composant la informació de l'estat amb cadascuna de les regles i després fent la intersecció de les conclusions.

4) Regles conjuntives, primer fent la intersecció de les regles i després composant la informació corresponent a l'estat amb la relació que en resulta.

El sistema de Mamdani correspon al primer tipus d'inferència. Hem de subratllar que el primer i el segon tipus d'inferència donen exactament el mateix resultat, els altres donen resultats diferents. De fet, es pot demostrar que el conjunt resultant del tercer tipus d'inferència és sempre un subconjunt del resultat del segon tipus i que el resultat del quart tipus és sempre un subconjunt del resultat del tercer.

2.5. Aspectes pràctics d'aquests sistemes

En la descripció que hem donat d'un sistema difús s'ha vist que hi ha molts paràmetres que cal fixar. Un cop s'han definit les regles hem de donar una funció de pertinença per a cada terme, després hem de definir les *t*-normes, *t*-conormes i el procediment de nitidificació que farem servir (a més de la negació en alguns casos). A més, hem vist també que no hi ha una única manera de fer la inferència sinó que n'hi ha més d'una. A tot això cal afegir el problema de la discretització de les variables. Generalment no implementarem un sistema difús considerant funcions de pertinença continues i això fa que calgui considerar discretitzacions del domini (com més fina sigui la discretització més gran serà el cost computacional del sistema).

Per a completar el sistema fa falta definir tots aquests elements. La seva tria no és senzilla i depèn de molts factors. Per a facilitar aquest procés hi ha procediments basats en algorismes genètics i en xarxes neurals per a trobar valors òptims per a un sistema concret. En general, sinó, caldrà trobar manualment valors que facin que el sistema es porti correctament.

Vegeu també

Els algorismes genètics i les xarxes neuronals es veuran en detall al mòdul 5 "Introducció a l'aprenentatge computacional".

A continuació presentem algunes indicacions per a construir aquests sistemes (tot i que no sempre són bones):

1) El producte dóna resultats més acurats que el mínim. Això és així per la forma de la funció mínim(x, y) i de $x * y$.

2) La utilització de funcions paramètriques (com la família de Yager) permet modificar fàcilment les funcions per a adaptar-les als nostres requeriments. A més, també podem aplicar tècniques d'aprenentatge.

3) Quan es construeixen funcions de pertinença a partir d'observacions, es poden fer servir les anomenades *B-splines*. L'ús de les *B-splines* és molt adequat, especialment quan no hi ha errors en les observacions. Quan n'hi ha el seu ús no és tan recomanable. A banda d'això, sovint es fan servir funcions de pertinença *triangulars* (construïdes per trossos lineals, com les que hem fet servir en els exemples d'aquest apartat).

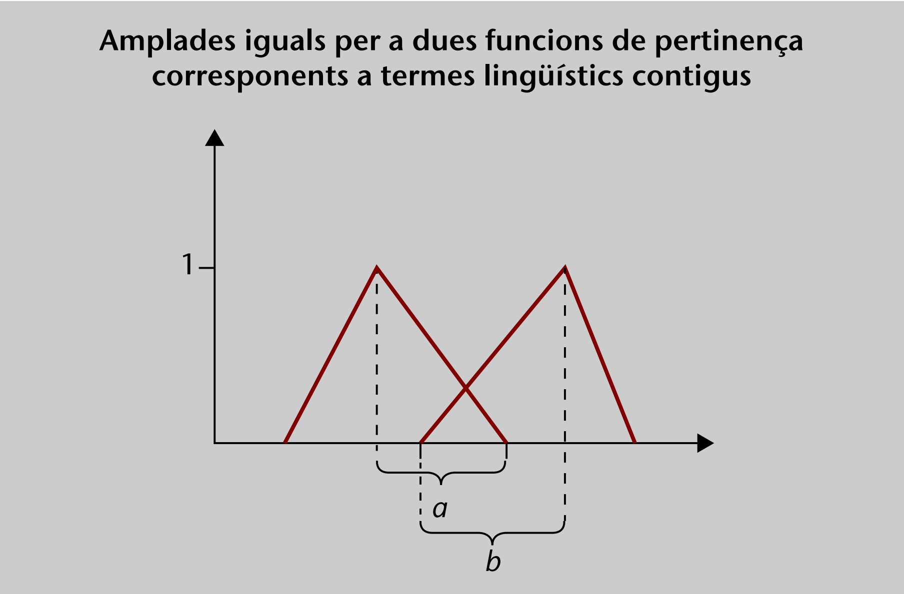
4) Dues funcions de pertinença corresponents a termes lingüístics contigus haurien de tenir intersecció no nul·la. Si la intersecció és nul·la hi haurà discontinuïtats en la conclusió.

5) És bo que les amplades a i b de dues funcions de pertinença corresponents a termes lingüístics contigus sigui la mateixa (vegeu la figura 20). És adequat que el valor de pertinença màxim de la intersecció d'aquestes funcions sigui 0,5. Això dóna bons comportaments en els sistemes de control.

6) En relació amb el sistema d'inferència, és més fàcil d'implementar un sistema que primer aplica les regles i després combina les conclusions (com el mètode de Mamdani) que un que primer combina les regles i després aplica la regla resultant.

7) Els sistemes amb regles disjuntives són més usats que els de regles conjuntives.

Figura 20



2.5.1. Sistemes complexos

L'aplicació típica d'un sistema difús basat en regles es basa en un conjunt de regles com el que s'ha vist fins ara: un conjunt de regles amb conjunts difusos en l'antecedent i en el conseqüent on totes les regles s'apliquen a la vegada per a obtenir la conclusió. Aquest tipus de sistemes planteja dificultats quan es volen modelitzar o controlar sistemes complexes.

En primer lloc, trobem que un sistema complex requereix un gran nombre de variables d'entrada perquè hi ha molts elements a tenir en compte abans de donar una conclusió. Per altra banda, els canvis imprevistos en l'entorn poden fer que les regles que s'havien definit deixin de ser vàlides.

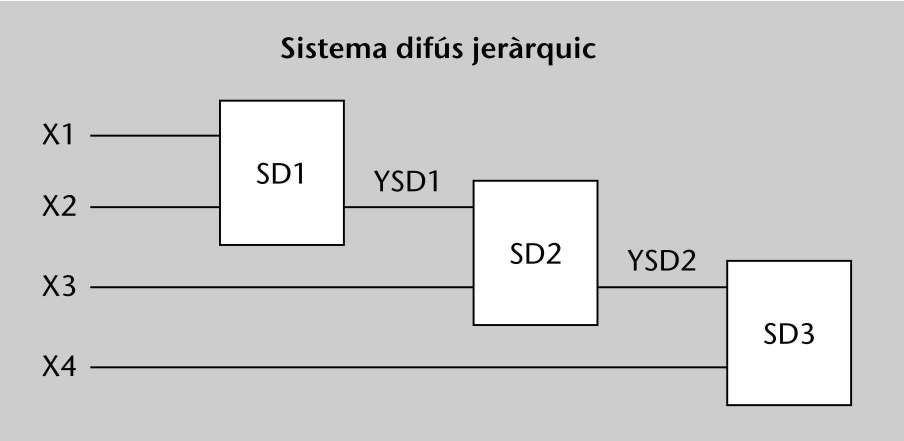
Exemple

Recordeu que tenim dues variables, tres termes lingüístics per variable, amb un total de 9 regles.

S'ha de subratllar que la dificultat de construir un sistema amb moltes variables és deguda a la quantitat de regles que fa falta definir. Si tenim un sistema amb n variables d'entrada i cada variable té m termes, això donarà que fan falta definir m^n regles per a recobrir tot el domini. Quan n és gran, el nombre de regles que hem de definir és excessiu.

Per a tractar aquests dominis complexos, tenim els sistemes jeràrquics (o sistemes multietapa). Els sistemes jeràrquics es componen d'una jerarquia de sistemes difusos (subsistemes) en què les conclusions d'un nivell són utilitzades com a entrades en el nivell següent. Les variables del sistema es van introduint en nivells successius. En la figura 21 es dóna un esquema d'un sistema difús jeràrquic amb quatre variables. Es pot veure que en el primer subsistema difús (SD1) es fan servir les variables X1 i X2. La conclusió d'aquest subsistema YSD1 juntament amb la variable X3 són les entrades del subsistema SD2. La sortida d'aquest sistema (YSD2) i la variable X4 són les entrades del susbsistema SD3. La sortida d'aquest sistema és la sortida de tot el sistema.

Figura 21



Exemple

Si no considerem un sistema jeràrquic on les variables tenen cadascuna tres termes, necessitem $3^4 = 81$ regles; en el cas jeràrquic (suposant que les variables YSD1 i YSD2 també tenen tres termes) tindrem nou regles per a cada subsistema i, per tant, un total de 3 * 9 = 27 regles.

Amb aquesta construcció el nombre de regles totals necessàries és menor que en l'altre cas.

De tota manera, l'ús d'aquests sistemes planteja algunes dificultats. N'enumerem algunes a continuació. La primera és que la capacitat de modelització d'un sistema jeràrquic no és la mateixa que la d'un sistema en què totes les regles s'apliquen a la vegada. La tria d'una jerarquia adequada és, per tant, molt important. A més, el fet de descompondre un sistema en subsistemes requereix considerar els paràmetres de cada sistema (*t*-norma, *t*-conorma, inferència de cada subsistema) i a més també s'haurà de considerar si cal nitidificar o no la conclusió de cada subsistema.

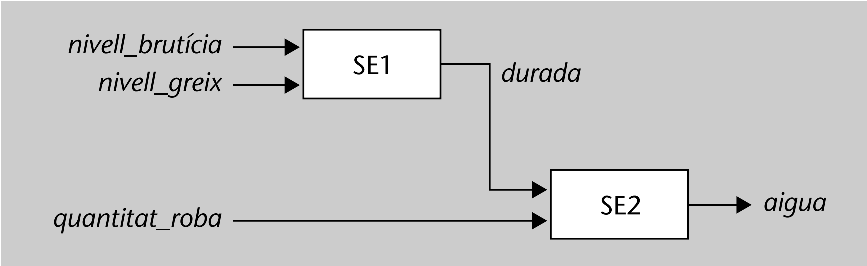
Per a resoldre el problema de l'entorn canviant una de les opcions és introduir noves variables en el sistema que permetin controlar els canvis en l'entorn. Una altra opció és construir un sistema jeràrquic en què un mòdul controli el comportament dels altres i en modifiquin les regles quan les condicions canvien.

Exemple de sistema jeràrquic difús

En l'apartat 2.2 s'ha analitzat un sistema de control d'una rentadora que tenia per objectiu determinar la durada d'un programa de rentat. Imaginem que es vol dissenyar un sistema una mica més complex que determini la quantitat d'aigua que ha d'agafar la nostra rentadora. Per a prendre aquesta decisió, el sistema tindrà en compte la durada del programa de rentat, que haguem determinat, i la quantitat de roba amb què s'ha carregat la rentadora.

Amb aquestes premisses, podem dissenyar un sistema de control difús amb dos blocs de regles, tres variables d'entrada, una variable de sortida i una variable intermèdia.

Volem conèixer la quantitat d'aigua que cal emprar en la rentadora pel valor *quantitat_roba* = 7, i els valors ja coneguts de *nivell_brutícia* = 70 i *nivell_greix* = 50.



En aquest sistema, ja coneixem molta informació. Tenim definides les variables lingüístiques *nivell_brutícia*, *nivell_greix* i *durada*. Ens mancarà definir les variables *quantitat_roba* i *aigua*.

Com s'ha dit anteriorment, cal decidir com han de treballar els dos subsistemes en continu. La forma habitual és que només es calcula el valor nítid de sortida final del sistema. Per a la sortida d'SE1, com veurem, no ens caldrà el valor nítid i farem entrar directament els valors de les activacions dels termes de la variable durada al nou bloc SE2. És per això que la variable *durada* la considerem com a variable intermèdia del sistema.

Definim les variables que ens manquen (vegeu figura 22).

Variable *quantitat_roba*:

<quantitat_roba, $L_{quantitat\_roba}$ = {poca, normal, molta}, $U_{quantitat\_roba}$ = [0, 10], $S_{quantitat\_roba}$>

i ara definim les funcions de pertinença dels tres termes:

$$\mu_{poca}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \le x < 2{,}5 \\ -0{,}4x + 2, & \text{si } 2{,}5 \le x < 5 \\ 0, & \text{si } 5 \le x \le 10 \end{cases}$$

$$\mu_{normal}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le x < 2{,}5 \\ 0{,}4x - 1, & \text{si } 2{,}5 \le x < 5 \\ -0{,}4x + 3, & \text{si } 5 \le x < 7{,}5 \\ 0, & \text{si } 7{,}5 \le x \le 10 \end{cases}$$

$$\mu_{molta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le x < 5 \\ 0{,}4x - 2, & \text{si } 5 \le x < 7{,}5 \\ 1, & \text{si } 7{,}5 \le x < 10 \end{cases}$$

Variable *aigua*:

<aigua, L_{aigua} = {poca, mitja, bastant, molta}, U_{aigua} = [0, 50], S_{aigua}>

i ara definim les funcions de pertinença dels quatre termes:

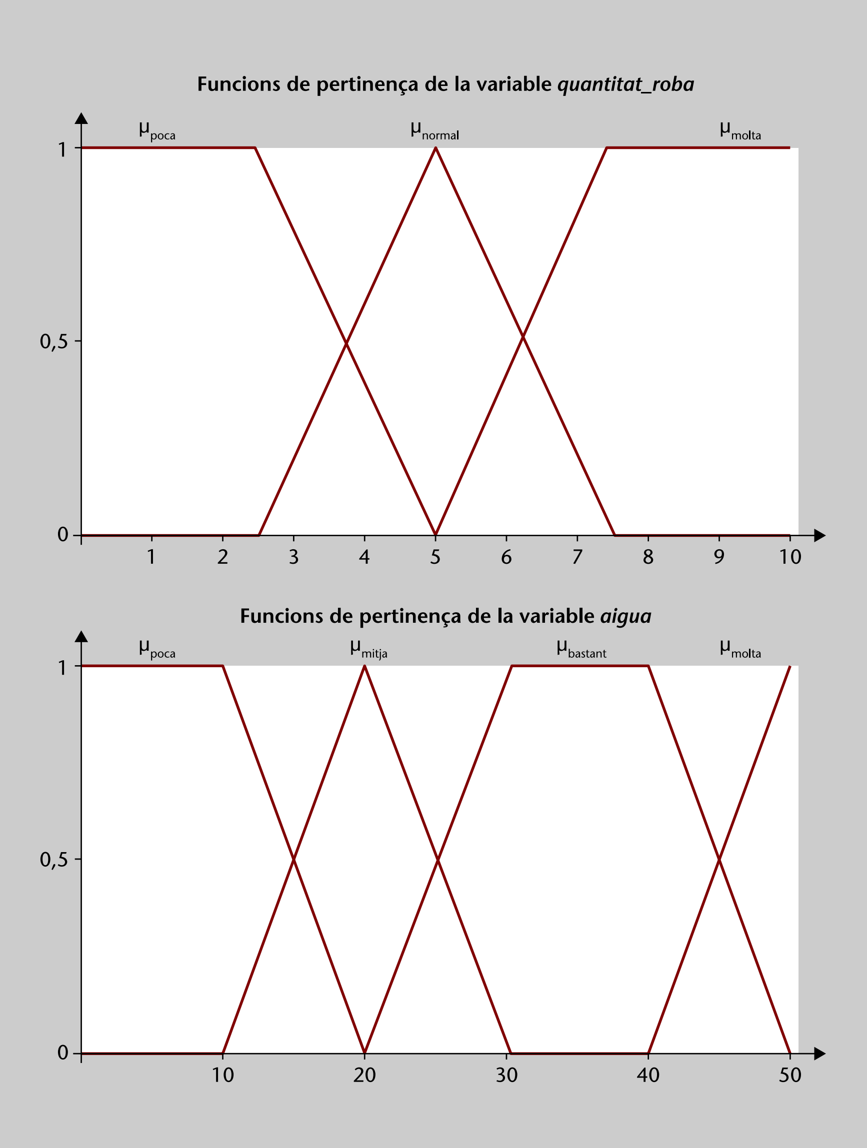
$$\mu_{poca}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \le x < 10 \\ -0{,}1x + 2, & \text{si } 10 \le x < 20 \\ 0, & \text{si } 20 \le x \le 50 \end{cases}$$

$$\mu_{mitja}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le x < 10 \\ 0{,}1x - 1, & \text{si } 10 \le x < 20 \\ -0{,}1x + 3, & \text{si } 20 \le x < 30 \\ 0, & \text{si } 30 \le x \le 50 \end{cases}$$

$$\mu_{bastant}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le x < 20 \\ 0{,}1x - 2, & \text{si } 20 \le x < 30 \\ 1, & \text{si } 30 \le x < 40 \\ -0{,}1x + 5, & \text{si } 40 \le x < 50 \end{cases}$$

$$\mu_{molta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le x < 40 \\ 0{,}1x - 4, & \text{si } 40 \le x \le 50 \end{cases}$$

Figura 22



El conjunt de regles definit a SE2 és el següent:

durada\quantitat_roba	poca	normal	molta
curta	poca	mitja	mitja
mitja	poca	mitja	bastant
llarga	mitja	bastant	molta
extra_llarga	bastant	molta	molta

Pel valor d'entrada de *quantitat_roba* = 7, s'activen els termes lingüístics *normal* amb un grau 0,2 i *molta* amb un nivell 0,8.

Per a veure com entren els valors de *durada* i *quantitat_roba* a SE2, utilitzarem els graus d'activació dels conseqüents de cada variable. No utilitzarem el valor nítid d'SE1 obtingut anteriorment. Els valors de *durada* que ja teníem calculats són el valor *mitja* amb valor (0,6), valor *llarga* (0,4) i valor *extra_llarga* (0,375).

Aprofitem que tenim dues variables d'entrada pel bloc SE2 i mostrem les activacions de les regles en forma tabular. Entre parèntesi, es mostren les activacions. Apliquem la t-norma mínim per a obtenir els conseqüents.

durada\quantitat_roba	poca	normal (0,2)	molta (0,8)
curta	poca	mitja	mitja
mitja (0,6)	poca	mitja (0,2)	bastant (0,6)
llarga (0,4)	mitja	bastant (0,2)	molta (0,4)
extra_llarga (0,375)	bastant	molta (0,2)	molta (0,375)

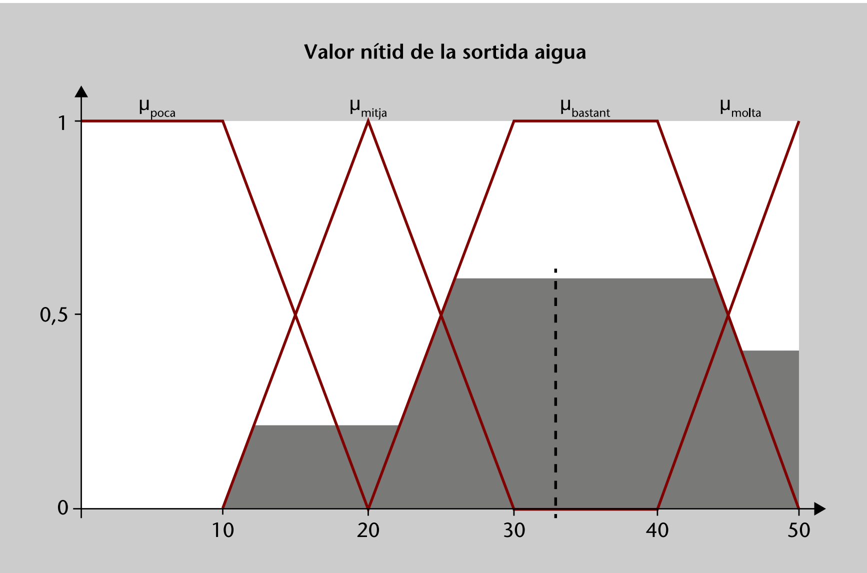
Així doncs, ja només ens queda obtenir els graus d'activació finals aplicant la *t*-conorma màxim. Obtenim que el terme de la variable aigua *mitja* queda actiu amb un grau 0,2, el valor *bastant* amb un grau max(0,2; 0,6) = 0,6, i el valor *molta* amb un grau max(0,2; 0,4; 0,375) = 0,4.

La funció de pertinença resultant és (vegeu figura 23):

$$\mu_{\text{aigua}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x < 10 \\ 0,1x - 1, & \text{si } 10 \leq x \leq 12 \\ 0,2, & \text{si } 12 \leq x \leq 22 \\ 0,1x - 2, & \text{si } 22 \leq x \leq 26 \\ 0,6, & \text{si } 26 \leq x \leq 44 \\ -0,1x + 5, & \text{si } 44 \leq x \leq 46 \\ 0,4, & \text{si } 46 \leq x \leq 50 \end{cases}$$

La quantitat d'aigua que gastarà la rentadora és de (el valor nítid) **33,42** litres.

Figura 23

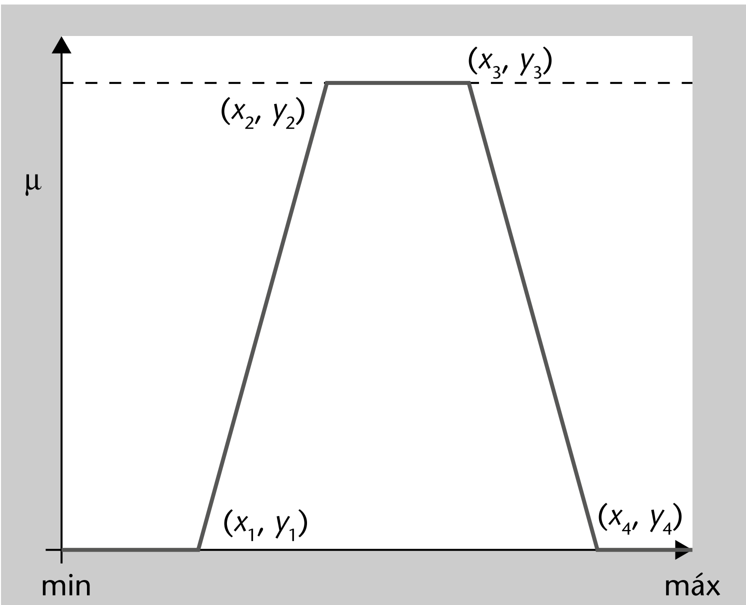


Exercicis d'autoavaluació

1. Considereu un sistema expert difús amb *tres* variables d'entrada (VarA, VarB, VarC) i *una* de sortida (*Out*). A continuació es detallen els punts de tall i els termes lingüístics associats a aquestes quatre variables.

Variable	Tipus	Rang	Terme lingüístic: punts (*x*, *y*)
VarA	Entrada	Mín: 0 Màx: 15	VL: (0, 1) (2, 1) (3, 0) (15, 0) L: (0, 0) (3, 1) (4, 1) (7, 0) (15, 0) M: (0, 0) (5, 0) (7, 1) (9, 1) (10, 0) (15, 0) H: (0, 0) (9, 0) (10, 1) (12, 1) (15, 0) VH: (0, 0) (12, 0) (13, 1) (15, 1)
VarB	Entrada	Mín: 0 Màx: 10	L: (0, 1) (1, 1) (4, 0) (10, 0) M: (0, 0) (1, 0) (5, 1) (7, 0) (10, 0) H: (0, 0) (6, 0) (9, 1) (10, 1)
VarC	Entrada	Mín: -5 Màx: 10	VL: (-5, 1) (-4, 1) (-2, 0) (10, 0) L: (-5, 0) (-4, 0) (-2, 1) (0, 1) (4, 0) (10, 0) M: (-5, 0) (0, 0) (2, 1) (4, 0) (10, 0) H: (-5, 0) (2, 0) (5, 1) (10, 1)
Out	Sortida	Mín: 0 Màx: 10	L: (0, 1) (3, 1) (6, 0) (10, 0) M: (0, 0) (4, 0) (5, 1) (6, 0) (10, 0) H: (0, 0) (3, 0) (7, 1) (10, 1)

La seqüència de punts dels termes es llegeix de la forma següent:



Preneu un sistema Mamdani amb *t*-norma mínim i *t*-conorma màxim.

a) Representeu gràficament les variables lingüístiques d'entrada i sortida. Calculeu totes les funcions de pertinença.

b) Detallant tot el procés d'inferència que es realitza, representeu la sortida del sistema i el valor nítid, considerant aquests valors d'entrada:

(VarA, VarB, VarC) = (6, 2, 3)

El conjunt de regles d'aquest sistema expert difús es detallen a continuació.

R1: SI (VarA és L) o (VarB és L) o (VarC és L) LLAVORS (Out és L)
R2: SI (VarA és M) o (VarB és L) o (VarC és M) LLAVORS (Out és L)
R3: SI (VarA és M) o (VarB és L) o (VarC és L) LLAVORS (Out és L)

R4: SI (VarA és VL) o (VarB és L) o (VarC és VL) LLAVORS (Out és L)
R5: SI (VarA és M) o (VarB és M) o (VarC és L) LLAVORS (Out és M)
R6: SI (VarA és M) o (VarB és M) o (VarC és H) LLAVORS (Out és H)
R7: SI (VarA és H) o (VarB és H) o (VarC és H) LLAVORS (Out és H)

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. a) Les funcions de pertinença són les següents:

Variable: VarA

Funcions de pertinença (μ_{terme})

$$\mu_{\mathrm{VL}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < x \leq 3 \\ -x + 3 \text{ si } 3 < x \leq 4 \\ 0 \text{ si } x > 4 \end{cases}$$

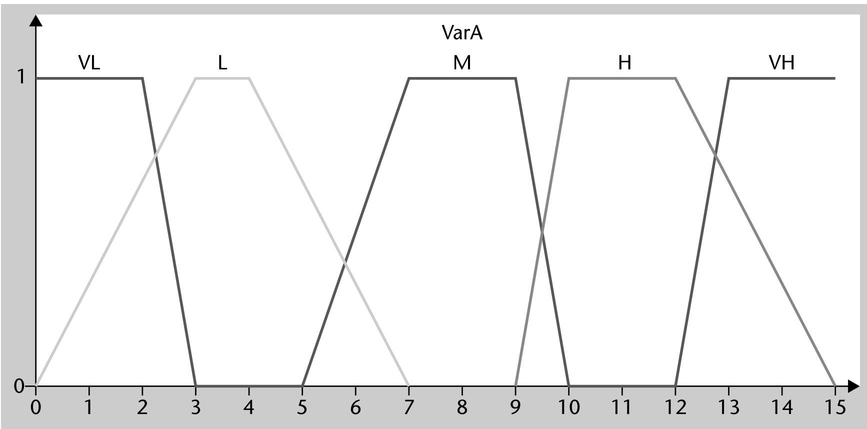
$$\mu_{\mathrm{L}}(x) = \begin{cases} 0{,}33x \text{ si } 0 < x \leq 3 \\ 1 \text{ si } 3 < x < 4 \\ -0{,}33x + 2{,}33 \text{ si } 4 < x \leq 7 \\ 0 \text{ si } x > 7 \end{cases}$$

$$\mu_{\mathrm{M}}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 5 \\ 0{,}5x - 2{,}5 \text{ si } 5 < x \leq 7 \\ 1 \text{ si } 7 < x \leq 9 \\ -x + 10 \text{ si } 9 < x \leq 10 \\ 0 \text{ si } x > 10 \end{cases}$$

$$\mu_{\mathrm{H}}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 9 \\ x - 9 \text{ si } 9 < x \leq 10 \\ 1 \text{ si } 10 < x \leq 12 \\ -0{,}33x + 5 \text{ si } 12 < x \leq 15 \\ 0 \text{ si } x > 10 \end{cases}$$

$$\mu_{\mathrm{VH}}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 12 \\ x - 12 \text{ si } 12 < x \leq 13 \\ 1 \text{ si } 13 < x < 15 \end{cases}$$

Representació gràfica de la variable VarA



Variable: VarB

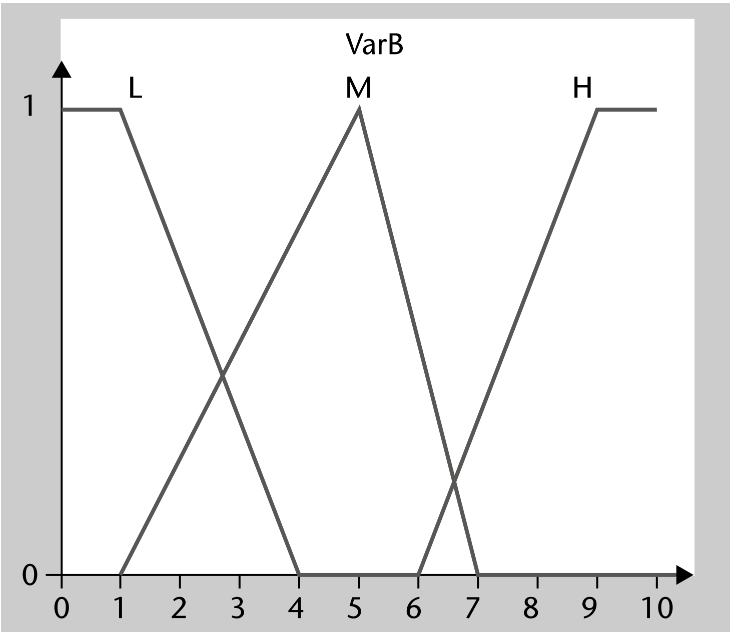
Funcions de pertinença (μ_{terme})

$$\mu_{\mathrm{L}}(x)=\begin{cases}1 \text{ si } 0<x\leq 1\\ -0{,}33x+1{,}33 \text{ si } 1<x\leq 4\\ 0 \text{ si } x>4\end{cases}$$

$$\mu_{\mathrm{M}}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<1\\ 0{,}25x-0{,}25 \text{ si } 5<x<7\\ -0{,}5x+3{,}5 \text{ si } 5<x\leq 7\\ 0 \text{ si } x>7\end{cases}$$

$$\mu_{\mathrm{H}}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<6\\ 0{,}33x-2 \text{ si } 6<x<9\\ 1 \text{ si } x>9\end{cases}$$

Representació gràfica de la variable VarB



Variable: VarC

Funcions de pertinença (μ_{terme})

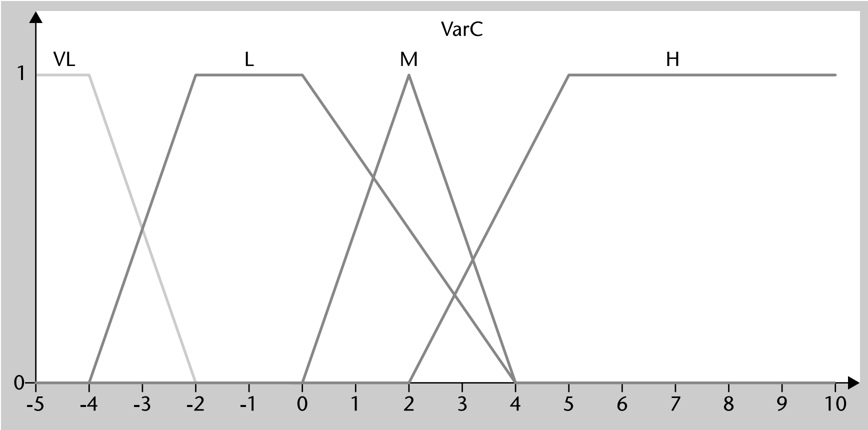
$$\mu_{\mathrm{VL}}(x)=\begin{cases}1 \text{ si } -5<x\leq -4\\ -0{,}5x-1 \text{ si } -4<x\leq -2\\ 0 \text{ si } x>-2\end{cases}$$

$$\mu_{\mathrm{L}}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<-4\\ 0{,}5x+2 \text{ si } -4<x\leq -2\\ 1 \text{ si } -2<x\leq 0\\ -0{,}25x+1 \text{ si } 0<x\leq 4\\ 0 \text{ si } x>4\end{cases}$$

$$\mu_{\mathrm{M}}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ 0{,}5x \text{ si } 0<x\leq 2\\ -0{,}5x+2 \text{ si } 2<x\leq 4\\ 0 \text{ si } x>4\end{cases}$$

$$\mu_{\mathrm{H}}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\leq 2\\ 0{,}33x-0{,}66 \text{ si } 2<x\leq 5\\ 1 \text{ si } x>5\end{cases}$$

Representació gràfica de la variable VarC



Variable: *Out*

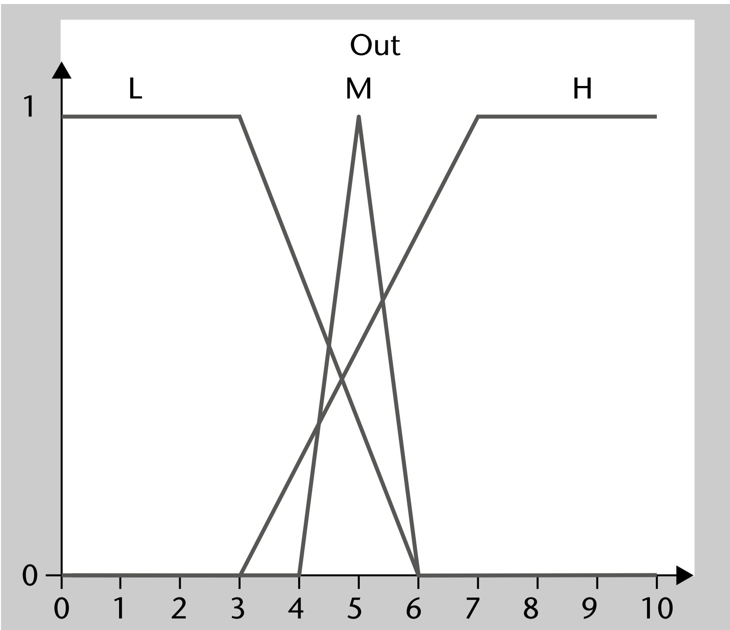
Funcions de pertinença (μ_{terme})

$$\mu_L(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x<3\\ -0{,}33x+2 \text{ si } 3<x\leq 6\\ 0 \text{ si } x>6\end{cases}$$

$$\mu_M(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<4\\ x-4 \text{ si } 4<x\leq 5\\ -x+6 \text{ si } 5<x\leq 6\\ 0 \text{ si } x>6\end{cases}$$

$$\mu_H(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<3\\ 0{,}25x-0{,}75 \text{ si } 3<x\leq 7\\ 1 \text{ si } x>7\end{cases}$$

Representació gràfica de la variable *Out*



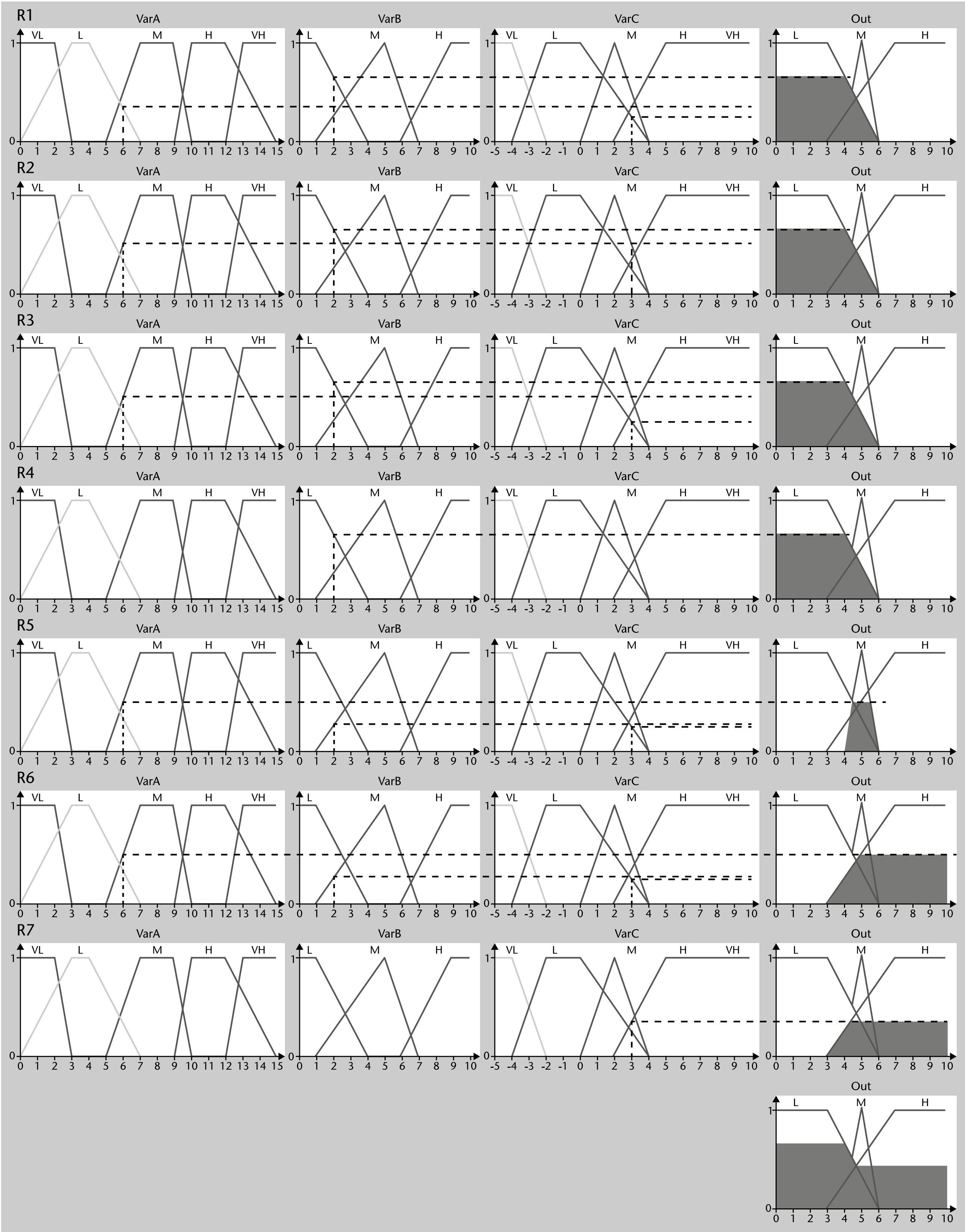
b) Càlcul del valor nítid.

Càlcul del valor nítid amb les mateixes entrades (6, 2 i 3), canviant les regles de funcionament per les regles del sistema difús 2.

El sistema de regles conté OR en lloc d'AND. Per tant, els conseqüents s'obtenen aplicant les *t*-conormes en lloc de les *t*-normes.

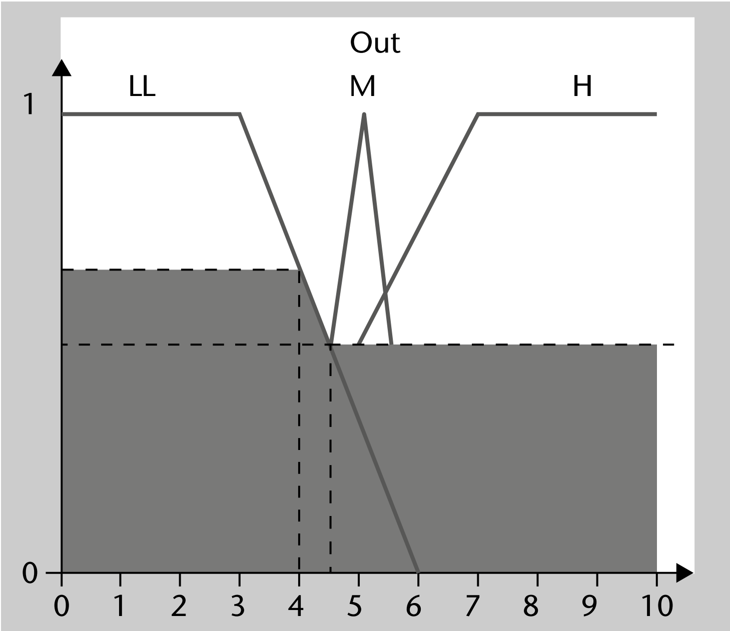
R1: S'ACTIVA. ***Out* és L truncada a 0,666**
R2: S'ACTIVA. *Out* és L truncada a 0,666
R3: S'ACTIVA. *Out* és L truncada a 0,666
R4: S'ACTIVA. *Out* és L truncada a 0,666
R5: S'ACTIVA. ***Out* és M truncada a 0,5**
R6: S'ACTIVA. ***Out* és H truncada a 0,5**
R7: S'ACTIVA. *Out* és H truncada a 0,333

Si mostrem gràficament les activacions i l'aplicació de les *t*-conormes, tenim les transicions següents.



Finalment, en aquest cas, la representació de la variable *Out*, la seva funció de pertinença i el valor nítid resultant són:

Representació gràfica de la variable *Out*



Funcions de pertinença (μ_{terme})

$$\mu_L(x) = \begin{cases} 0{,}66 \text{ si } 0 < x \leq 4 \\ -0{,}33x + 2 \text{ si } 4 < x < 4{,}5 \\ 0{,}5 \text{ si } 4{,}5 < x \leq 10 \end{cases}$$

Defuzzificació = 4.638.

Bibliografia

Bibliografia bàsica

Klir, G.; Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice-Hall.

Neapolitan, R. (1990). *Probabilistic Reasoning in Expert Systems: Theory and Algorithms*. JohnWiley & Sons Inc.

Bibliografia complementària

Dubois, D.; Prade, H. (1988). *Possibility Theory. An aproach to Computerized Processing of Uncertainty*. Nova York: Plenum Press.

Kahraman, C. (ed). (2006). *Fuzzy Applications in Industrial Engineering*. Springer.

López de Mántaras, R. (1990). *Aproximate Reasoning Models. Ellis Horwood series in Artificial Intelligence*. Ellis Horwood Limited.

Pearl, J. (1988). *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*. Morgan Kaufmann Publishers, Inc.

Trillas, E.; Alsina, C.; Terricabras, J. M. (1995). *Introducción a la lógica borrosa*. Ariel.

Programari

jFuzzyLogic. http://jfuzzylogic.sourceforce.net

Wiris CalcMe. https://calcme.com/

fuzzyTECH. https://www.fuzzytech.com/