



## **Sèrie 1**

### **Opció A**

**A1.-** Calculeu dos valors de  $x$  diferents que compleixin  $\sin x = \frac{\tan x}{2}$ .

**Solució.-** Manipulant una mica l'equació:

$$\sin x = \frac{\tan x}{2} \rightarrow \sin x = \frac{\sin x}{2 \cos x} \rightarrow 2 \sin x \cos x = \sin x \rightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0.$$

És evident que la resposta consistirà en dos angles que anul·lin la funció sinus o que facin que el cosinus valgui 1/2. Algunes respostes possibles són, doncs:

$$x = 0, \quad x = \pi, \quad x = \pi/3, \quad x = 5\pi/3, \dots$$

**Puntuació.-** Per cada valor correcte de  $x$  es puntuarà 0.25 per l'angle i 0.25 per la justificació. Si els valors de  $x$  s'escriuen en graus sexagesimals doneu per bona la solució.

**A2.-** Determineu el valor de  $k$  que fa que el sistema 
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ x + 2y = k \end{cases}$$
 tingui solució única.

**Solució.-** De les dues primeres equacions, és evident que la matriu de coeficients és de rang 2. Caldrà demanar que la matriu ampliada no sigui de rang 3. Això es pot fer, per exemple, a partir de

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix} = 0 \rightarrow k = 0.$$

Lavors, tenim un sistema amb dues incògnites amb els rangs de la matriu de coeficients i de la matriu ampliada iguals a 2, cosa que garanteix que la solució existeix i és única.

**Puntuació.-** 0.5 punts per donar o trobar alguna condició que faci que el rang de la matriu ampliada sigui 2 o que posi en evidència que alguna de les equacions és combinació lineal de les altres dues. 0.5 punts per aplicar-la correctament i trobar el valor de  $k$ .

**A3.-** Determineu una primitiva de la funció  $f(x) = e^{2x} + e^{-3x}$ .

**Solució.-**  $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{-3x}}{3}$  ja que  $F'(x) = f(x)$ .

**Puntuació.-** 0.5 per la primitiva de cada sumand.



**A4.-** Calculeu la matriu inversa de  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Solució.-** Una manera d'obtenir-la pot ser fent

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, |A| = -1, A^{adj} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Puntuació.-** 1 punt. Queda a criteri del corrector la penalització de les errades que es cometin.

**A5.-** Resoleu  $e^{2x-3} - 1 = 0$ .

**Solució.-**  $e^{2x-3} = 1 \rightarrow 2x - 3 = 0 \rightarrow x = 3/2$ .

**Puntuació.-** 1 punt. Queda a criteri del corrector la penalització de les errades que es cometin.

## **Opció B**

**B1.-** Indiqueu l'equació de la recta paral·lela a la d'equació  $2x - 3y - 1 = 0$  que passa pel punt (1,2).

**Solució.-** El vector normal de la recta és el (2,-3). Llavors, l'equació demanada s'escriu  $2(x-1) - 3(y-2) = 0 \rightarrow 2x - 3y + 4 = 0$ .

**Puntuació.-** 0.5 per la determinació del vector normal o el pendent de la recta i 0.5 per l'equació.

**B2.-** Calculeu el pendent de la recta tangent a la corba d'equació  $y = xe^x$  pel punt en què  $x = 0$ .

**Solució.-**  $y' = e^x + xe^x$  i, quan  $x = 0$ ,  $m = e^0 + 0e^0 = 1$ .

**Puntuació.-** 0.5 pel càlcul correcte de la derivada i 0.5 pel del pendent.

**B3.-** Els angles d'un triangle rectangle valen  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  i  $90^\circ$ . Calculeu la longitud dels seus catets sabent que la hipotenusa té una longitud de 4m.

**Solució.-** A partir de les definicions de les raons trigonomètriques es poden trobar fent, per exemple,  $4 \sin 30^\circ = 2m$  i  $4 \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}m$ .

**Puntuació.-** 0.5 per cada catet.



**B4.-** Determineu el residu resultant de dividir el polinomi  $x^4 - 3x^2 + 2x + 4$  entre el binomi  $x - 1$ .

**Solució.-** La manera més senzilla d'arribar a la resposta és substituir  $x$  per 1 dins el polinomi. Això proporciona un residu igual a 4. Òbviament, aquest resultat també es pot obtenir fent la divisió ja sigui usant l'algorisme tradicional o el de Ruffini.

**Puntuació.-** 1 punt. Queda a criteri del corrector la penalització de les errades que es cometin.

**B5.-** Simplifiqueu l'expressió trigonomètrica  $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$ .

**Solució.-**

$$\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x.$$

**Puntuació.-** 1 punt. Queda a criteri del corrector la penalització de les errades que es cometin.

**Problema 1.-**

- Calculeu els coeficients  $a$  i  $b$  del polinomi  $P(x) = x^3 - ax^2 + bx$  de manera que la gràfica de  $y = P(x)$  passi pel punt  $(1,1)$  i la recta tangent en aquest punt sigui horitzontal.
- Determineu si el punt  $(1,1)$  és un màxim relatiu, un mínim relatiu o un punt d'inflexió.
- Calculeu l'àrea tancada entre les corbes  $y = P(x)$ ,  $y = 0$  i  $x = 1$ .

**Solució.-**

a) Primerament cal imposar que  $P(1) = 1$  i que  $P'(1) = 0$ . Donat que  $P'(x) = 3x^2 - 2ax + b$ , cal resoldre el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 1 - a + b = 1 \\ 3 - 2a + b = 0 \end{array} \right\} \rightarrow a = b = 3.$$

b) Per als valors trobats,  $P''(x) = 6x - 6$ ,  $P''(1) = 0$ ,  $P'''(x) = 6$  i es pot afirmar que es tracta d'un punt d'inflexió.



c)

$$A = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 3x) dx = \left[ \frac{x^4}{4} - x^3 + 3\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{4} u^2$$

**Puntuació.-**

0.5 punts pel càlcul de la derivada primera i 0.5 per la segona.

1 punt pel planteig del sistema i l'obtenció dels valors correctes de  $a$  i  $b$ .

1 punt per la classificació del punt  $(1,1)$ . No s'ha de penalitzar la no comprovació de la condició sobre la derivada tercera.

1 punt pel planteig correcte de la integral.

0.5 pel càlcul de la integral i 0.5 per l'aplicació de la regla de Barrow.

**Problema 2.-** Considereu les rectes del pla  $r_1 : x + 2y - 2 = 0$ ,  $r_2 : 2x - y - 4 = 0$ ,  
 $r_3 : y = -x/2$ ,  $r_4 : y = 1 + 7x$ .

- Digueu quines d'aquestes rectes són paral·leles i per què.
- Digueu quines d'aquestes rectes són perpendiculars i per què.
- Indiqueu els vèrtexs i calculeu l'àrea del triangle que formen les rectes  $r_1$ ,  $r_2$  i  $r_4$ .

**Solució.-**

L'expressió de totes les rectes en la mateixa forma, la general per exemple, facilitarà la determinació del paral·lelisme i la perpendicularitat.

$$r_1 : x + 2y - 2 = 0, \quad r_2 : 2x - y - 4 = 0, \quad r_3 : x + 2y = 0, \quad r_4 : 7x - y + 1 = 0.$$

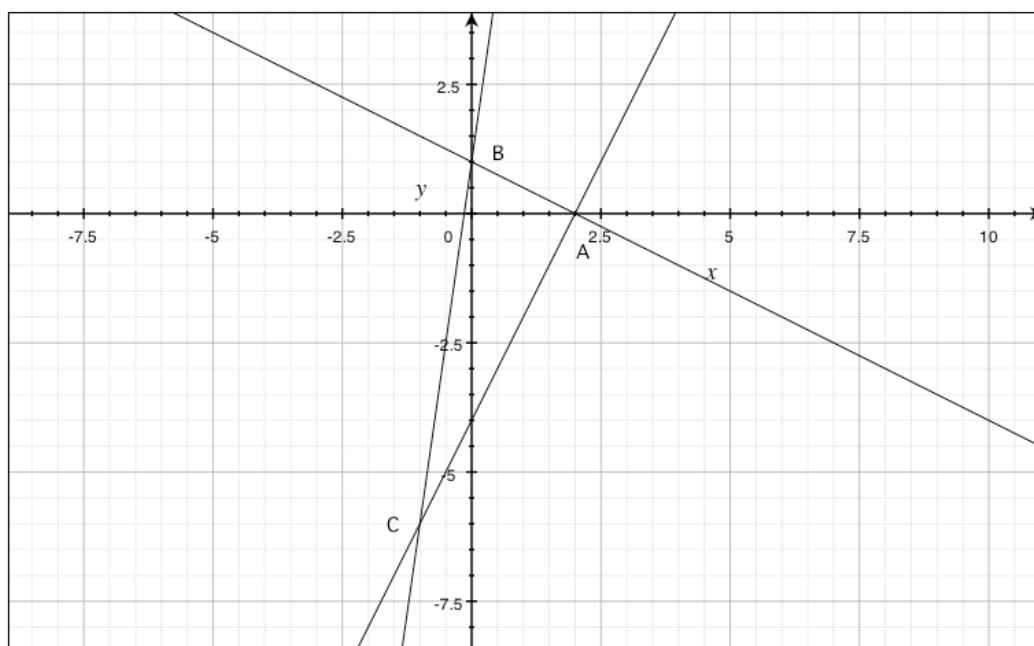
- Com que els vectors normals de la primera i la tercera coincideixen, són paral·leles.
- El vector normal de la segona és perpendicular al  $(1,2)$  ja que  $(2,-1) \cdot (1,2) = 0$ .  
Per tant, la recta  $r_2$  és perpendicular a la  $r_1$  i a la  $r_3$ .
- El punt d'intersecció de les rectes  $r_1$  i  $r_2$  és  $A(2,0)$ .  
El punt d'intersecció de les rectes  $r_1$  i  $r_4$  és  $B(0,1)$ .  
El punt d'intersecció de les rectes  $r_2$  i  $r_4$  és  $C(-1,-6)$ .



El triangle  $ABC$  és rectangle en  $A$  ja que els costats corresponents a aquest vèrtex, tal com ja s'ha comprovat, estan sobre rectes perpendiculars. Llavors, es poden prendre com a base i altura la longitud dels catets  $AB$  i  $AC$ .

$$AB = \sqrt{(0-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}, \quad AC = \sqrt{(-1-2)^2 + (-6-0)^2} = \sqrt{45},$$

$$Àrea = \frac{\sqrt{5}\sqrt{45}}{2} = \frac{15}{2}u^2.$$



**Puntuació.-**

1 punt per trobar justificadament les rectes paral·leles.

1 punt per trobar justificadament les rectes perpendiculars.

1.5 per trobar els tres vèrtexs (0.5 cada vèrtex).

1.5 per calcular l'àrea.