



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys
Maig 2010

Criteris d'avaluació

SÈRIE 3

OPCIÓ A

EXERCICIS

A1.- Simplifiqueu l'expressió $\frac{x-1}{x^2-3x+2} + \frac{x+8}{x-2}$

Resolució.-

$$\frac{x-1}{x^2-3x+2} + \frac{x+8}{x-2} = \frac{1}{x-2} + \frac{x+8}{x-2} = \frac{x+9}{x-2}.$$

Puntuació.- 1 punt. Si es comet algun error de càlcul, depenent de la seva magnitud, valoreu la possibilitat de puntuar 0.5.

A2.- Digueu quant val p si el sistema següent és compatible.
$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 2x + 2y = p \end{array} \right\}$$

Resolució.- El sistema només pot ser compatible (i indeterminat) si la segona equació és proporcional a la primera, és a dir, si $p = 4$.

Puntuació.- 1 punt. Si es dona el valor de p sense justificar 0.5 punts.

A3.- Determineu el punt de tall de les rectes $x - y = 2$ i $x + y = 4$.

Resolució.- Sumant les dues equacions $2x = 6 \rightarrow x = 3$.
Restant-les $-2y = -2 \rightarrow y = 1$. El punt de tall és el (3,1).

Puntuació.- 1 punt.

A4.- Trobeu el domini de la funció $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$.

Resolució.- El domini de la funció estarà format per tots aquells valors de la x que fan que $\frac{1-x}{x+1} > 0 \rightarrow \text{Dom}(f) = (-1,1)$.

Puntuació.- 1 punt. Penalitzeu 0.5 si la solució donada inclou els extrems.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys
Maig 2010

Criteris d'avaluació

A5.- Calculeu el pendent de la recta tangent a la corba d'equació $y = \frac{1}{x}$ en el punt en què $x = 3$.

Resolució.- La derivada és $y' = -\frac{1}{x^2}$. Substituint $x = 3$ s'obté $m = -\frac{1}{9}$.

Puntuació.- 0.5 pel càlcul de la derivada i 0.5 pel càlcul del pendent.

OPCIÓ B

EXERCICIS

B1.- Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Quant val a si $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}$?

Resolució.- $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & a+4a \\ 10 & 2a+16 \end{pmatrix}$ i coincideix amb $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}$ si $a = 1$.

Puntuació.- 1 punt. Penalitzeu 0.5 si se segueix un esquema correcte, és a dir, si es calcula el quadrat de la matriu i s'identifica amb la donada, però hi ha errors de càlcul.

B2.- Simplifiqueu l'expressió $\frac{1}{\sin x} - \operatorname{cosec} x$.

Resolució.- De la definició de cosecant, $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$, es dedueix que val zero.

Puntuació.- 1 punt.



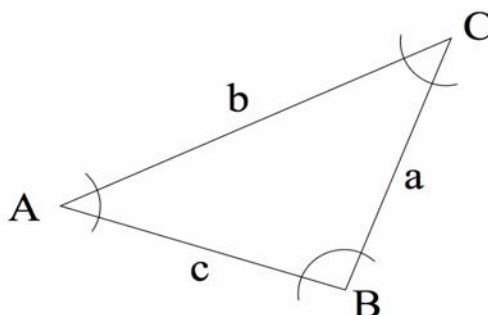
Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys
Maig 2010

Criteris d'avaluació

B3.- Enuncieu el teorema del cosinus, indiqueu-ne les variables corresponents en un dibuix i expliqueu que representa cadascuna.

Resolució.-

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$



on cada lletra minúscula representa el costat oposat a l'angle que rep el mateix nom però en lletra majúscula.

Encara que l'enunciat demana l'explicació del significat de les variables, si el dibuix és prou clar, precís i coherent amb l'enunciat del teorema podeu donar la resposta per bona.

Puntuació.- 0.5 per enunciar el teorema correctament.
0.5 pel dibuix i les explicacions.

B4.- Digueu per què són paral·lels el pla d'equació $x - y + 4 = 0$ i la recta

$$x = y = \frac{z}{2}.$$

Resolució.- Un vector perpendicular al pla és el $(1, -1, 0)$ i el director de la recta és el $(1, 1, 2)$. El seu producte escalar és nul, $(1, -1, 0) \cdot (1, 1, 2) = 0$, per tant, els vectors són perpendiculars i la recta i el pla són paral·lels.

Puntuació.- 1 punt.

B5.- Trobeu una funció primitiva de $\frac{1}{5x}$.

Resolució.- Pot ser $\frac{\ln x}{5}$ ja que $\left(\frac{\ln x}{5}\right)' = \frac{1}{5x}$.

Puntuació.- 1 punt.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys Maig 2010

Criteris d'avaluació

PROBLEMES

P1.- Considereu la funció $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$. Trobeu-ne el domini. Determineu-ne els extrems relatius i classifiqueu-los. Finalment, digueu si hi ha un extrem relatiu en el punt en què $x = 0$?

Resolució.- El domini és $Dom(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Per trobar els extrems, en primer lloc es calcula la derivada de la funció.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^3}{(x-1)^4} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}.$$

Aquesta derivada s'anul·la quan $x = 0$ i quan $x = 3$.

La derivada segona val $f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$.

Com que $f''(3) > 0$, a $x = 3$ hi ha un mínim relatiu de coordenades $(3, 27/4)$.

En canvi $f''(0) = 0$ i no permet saber si és un extrem. Ara bé, la derivada primera només és negativa dins l'interval $(1, 3)$ ja que és l'únic segment en què numerador i denominador tenen signes diferents. Llavors, a dreta i esquerra de $x = 0$ la funció creix i, per tant, no pot ser un extrem.

Puntuació.-

Càlcul del domini 1 punt.

Càlcul de la derivada 1 punt.

Trobar els valors de x que anul·len la derivada 1 punt.

Determinar que a $x = 3$ hi ha un mínim 1 punt.

Explicar què passa a $x = 0$ 1 punt. Accepteu com a resposta bona si es diu que correspon a un punt d'inflexió encara que no es comprovi amb la derivada tercera.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys Maig 2010

Criteris d'avaluació

P2.- Els vèrtexs d'un triangle són els punts $A(1,1)$, $B(3,2)$ i $C(2,4)$. Trobeu l'equació de la recta que passa per A i B . Calculeu la distància de C a aquesta recta. Calculeu l'àrea del triangle. Calculeu què val el cosinus de l'angle corresponent al vèrtex A .

Resolució.- En primer lloc es proposa una resolució directa de l'exercici. L'equació de la recta que passa per A i B es pot escriure com

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{2-1} \rightarrow y = \frac{x+1}{2} \rightarrow x - 2y + 1 = 0.$$

La distància de C a la recta anterior es calcula fent

$$d = \frac{|2 - 8 + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Per tal de calcular l'àrea del triangle, la distància anterior es pot usar com a altura i, llavors, la base serà la longitud del segment AB .

$$b = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

i l'àrea és

$$\text{àrea} = \frac{5}{2} u^2.$$

El cosinus demanat es pot calcular de diverses formes. Una seria l'aplicació del teorema del cosinus. Se segueix la notació habitual de designar amb la lletra minúscula el costat oposat a l'angle.

$$a = |\vec{BC}| = \sqrt{5},$$

$$b = |\vec{AC}| = \sqrt{10},$$

$$c = |\vec{AB}| = \sqrt{5}.$$

$$\text{Finalment, } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{10 + 5 - 5}{2\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

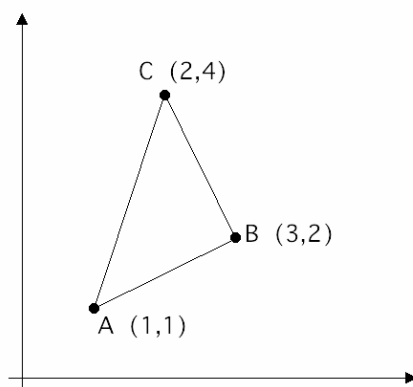
També es pot calcular usant el producte escalar.

$$\cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{(2,1) \cdot (1,3)}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys Maig 2010

Criteris d'avaluació



Molts dels càlculs es poden simplificar si s'observa que el triangle és rectangle en B , ja que els vectors $\vec{AB} = (2,1)$ i $\vec{BC} = (-1,2)$ són perpendiculars donat que el seu producte escalar és nul. Així, la distància de C a la recta és la longitud del costat BC , és a dir $\sqrt{5}$. L'àrea es igual a la meitat del producte dels catets

$$\text{àrea} = \frac{5}{2} u^2.$$

Com que, a més a més, el triangle és isòsceles, els angles diferents del recte valen 45° i el seu cosinus és igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Puntuació.-

Recta que passa per A i B 1 punt.

Distància de C a la recta 1 punt.

Trobar la base del triangle 1 punt.

Càlcul de l'àrea 1 punt.

Cosinus demanat 1 punt.

Compteu zero en aquells casos en què es suposi que el triangle és rectangle sense cap comprovació ni justificació.