



Sèrie 1

A1.- Calculeu el valor de la suma dels mil primers nombres naturals parells.

Solució: L'enunciat demana que es calculi

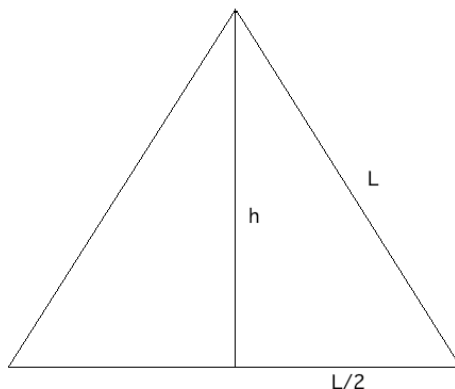
$$2 + 4 + \dots + 2000 = \frac{2000 + 2}{2} \times 1000 = 1001000.$$

Puntuació: 1punt. No cal indicar el tipus de progressió si s'usa la fórmula correcta de la suma. Un cop aplicada la fórmula correctament, els errors de càlcul penalitzen 0.5 a criteri del corrector.

A2.- Calculeu la longitud dels costats d'un triangle equilàter de $\sqrt{3} m^2$ d'àrea.

Solució: Si es representen l'altura per h i els costats per L , al dividir el triangle en dues parts iguals per una bisectriu, s'obté un triangle rectangle d'hipotenusa L i catets h i $L/2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores s'obté la relació entre el costat i l'altura



$$h^2 + \frac{L^2}{4} = L^2, \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} L.$$

A continuació, com que es coneix l'àrea,

$$\frac{h \cdot L}{2} = \sqrt{3}, \quad \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L^2}{2} = \sqrt{3}, \quad L^2 = 4, \quad L = 2m.$$

Una altra possibilitat prové de l'aplicació de la fórmula d'Heró que, en el cas del triangle equilàter, s'escriu $A = \sqrt{s(s-L)(s-L)(s-L)}$ on s és el semiperímetre, és a dir $s = \frac{3L}{2}$. Llavors

$$\sqrt{\frac{3L}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2}} = \frac{L^2}{4} \sqrt{3} = \sqrt{3}, \quad L = 2m.$$



Puntuació: 1 punt. Qualsevol procediment correcte amb errors de càlcul es puntua 0.5.

A3.- Calculeu el valor del pendent de la recta tangent a la corba d'equació $y = e^{1/x}$ en el punt d'abscissa $x = 1$.

Solució: Només cal derivar la funció que defineix la corba i substituir-hi l'abscissa donada.

$$f'(x) = -e^{1/x} / x^2, \quad m = f'(1) = -e.$$

Puntuació: 0.5 pel càlcul correcte de la derivada i 0.5 pel càlcul del pendent. Total 1 punt.

A4.- Trobeu una primitiva de la funció $f(x) = \cos 5x + \sqrt{x}$.

Solució: Pot ser $F(x) = \sin 5x / 5 + 2x^{3/2} / 3$ ja que $F'(x) = \cos 5x + \sqrt{x}$.

Puntuació: 0.5 per la integració correcta de cada sumand. Total 1 punt.

A5.- Trobeu les coordenades del punt de tall del pla d'equació $x + y + z = 0$ i la recta

$$\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{2}.$$

Solució: De l'equació de la recta, es poden escriure x i z en funció de y ,
 $x = 2y + 1$, $z = 2y - 1$. Al substituir aquestes expressions dins l'equació del pla s'arriba a $2y + 1 + y + 2y - 1 = 0$, $5y = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $z = -1$. Per tant, el punt de tall és $(1, 0, -1)$.

Puntuació: 0.5 per construir un sistema d'equacions (encara que no s'escrigui en forma de sistema) coherent amb l'exercici. 0.5 per trobar la seva solució. Total 1 punt.

B1.- Simplifiqueu l'expressió $\frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$.

$$\text{Solució: } \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{1}{1 - \cos x}.$$

Puntuació: 1 punt. Queda a criteri del corrector la penalització dels errors que es cometin.



B2.- Calculeu el domini de la funció $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Solució: La funció existirà quan el radicand no sigui negatiu i, a més a més, el denominador sigui diferent de zero.

$$\frac{1-x}{1+x} \geq 0, \quad -1 < x \leq 1, \quad \text{Dom}(f) = (-1, 1].$$

Puntuació: 1 punt. Si no s'indica correctament el caràcter dels extrems es penalitza 0.5.

B3.- Trobeu els valors de p que fan que el sistema següent no tingui cap solució

$$\begin{cases} px - y = 6 \\ x - py = 6 \end{cases}.$$

Solució: El determinant de la matriu de coeficients és igual a $p^2 - 1$ que s'anul·la quan p val 1 o -1.

Quan $p = -1$, el sistema és $\begin{cases} -x - y = 6 \\ x + y = 6 \end{cases}$ i al sumar ambdues equacions s'obté $0 = 12$, és a dir, no té solució.

Per contra, quan $p = 1$, el sistema és $\begin{cases} x - y = 6 \\ x - y = 6 \end{cases}$ i queda clar que està format per dues equacions iguals. Això significa que, en aquest cas, té infinites solucions.

Puntuació: 1 punt. Encara que només es discuteixi el cas $p = -1$ es donarà la puntuació màxima.

B4.- Calculeu la distància de l'origen de coordenades a la recta d'equació $4x - 8y + 1 = 0$.

Solució: $d = \frac{1}{\sqrt{16+64}} = \frac{1}{\sqrt{80}}.$

Puntuació: 1 punt.

B5.- Trobeu el valor de m que fa que la matriu $A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ sigui la inversa de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solució: Caldrà que el producte de les dues matrius sigui igual a la identitat 2×2 .

$$\begin{pmatrix} m & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+2 & m+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Això es compleix si $m = -1$.



Puntuació: 0.5 pel producte correcte de les dues matrius. 0.5 per la determinació correcta de m . Total 1 punt.

Problema 1.- Considereu la paràbola d'equació $y = x^2 - 4x + 2$.

- a) Trobeu les equacions de les rectes tangents a la paràbola pels punts A , d'abscissa $x = 0$, i B on $x = 4$.
- b) Trobeu el punt C , de tall de totes dues rectes.
- c) Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs A , B i C .

Solució:

a) En primer lloc es deriva la funció que defineix la paràbola $y' = 2x - 4$.

Les coordenades del punt A són $(0,2)$, el pendent de la recta tangent val $m = -4$ i l'equació de la recta és $y - 2 = -4x$, $y = -4x + 2$.

Procedint anàlogament amb el punt $B (4,2)$, $m = 4$ i l'equació és $y - 2 = 4(x - 4)$, que simplificada s'escriu $y = 4x - 14$.

b) Resolent el sistema format per les dues equacions de les rectes s'obté el punt C .
 $2 - 4x = 4x - 14$, $8x = 16$, $x = 2$, $y = -6$.

Llavors, $C(2,-6)$.

c) Finalment, s'observa que, si s'agafa com a base del triangle el segment AB , la base del triangle val 4 i l'altura 8. Per tant $\text{Àrea} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16u^2$.

Puntuació:

Apartat a) 0.5 per derivar correctament. 0.25 per cada pendent i 0.5 per cada equació. Total 2 punts.

Apartat b) 0.5 pel sistema i 0.5 per la resolució. Total 1 punt.

Apartat c) 2 punts. Aquest apartat admet diverses resolucions. En general, però, caldrà trobar una base i una altura per tal de calcular l'àrea demanada. Suggeriment: comptar 0.5 per determinar la base, 0.5 per l'altura i 1 punt pel càlcul de l'àrea.



Problema 2.- Un magatzem serveix tres tipus de revestiment A , B i C . En la taula següent es recullen les tres darreres. Determineu el preu per metre quadrat de cada revestiment.

	Rev. A (m^2)	Rev. B (m^2)	Rev. C (m^2)	Total (€)
Comanda 1	50	100	80	2420
Comanda 2	70	80	80	2380
Comanda 3	100	90	70	2710

Solució: Si s'anomenen x , y i z els preus per metre quadrat dels revestiments A , B i C en aquest ordre, es pot escriure el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} 50x + 100y + 80z = 2420 \\ 70x + 80y + 80z = 2380 \\ 100x + 90y + 70z = 2710 \end{array} \right\}.$$

Per comoditat, es divideixen totes les equacions per 10,

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 10y + 8z = 242 \\ 7x + 8y + 8z = 238 \\ 10x + 9y + 7z = 271 \end{array} \right\}.$$

A continuació es proposa una resolució dels sistema però cal tenir en compte les moltes formes en què pot ser resolt.

Restant la segona menys la primera equació s'obté $2x - 2y = -4$, $y = x + 2$.

Substituint y dins la primera $5x + 10x + 20 + 8z = 242$, $z = \frac{222 - 15x}{8}$.

Finalment, per substitució, es deixa la tercera en funció de la variable x i s'acaba la resolució.

$$10x + 9x + 18 + \frac{1554 - 105x}{8} = 271, \quad x = 10, \quad y = 12, \quad z = 9,$$

quantitats que corresponen a euros per metre quadrat.

Puntuació: El planteig correcte del sistema 2 punts. La resolució correcta del sistema 3 punts. Cal penalitzar tots els errors comesos, encara que es puguin interpretar com errors de transcripció de l'enunciat. Queda a criteri del corrector penalitzar amb 0,5 o 1 punt els diversos errors que es cometin. Si es considera que el sistema resolt té poc o res a veure amb l'enunciat, malgrat hi hagi una resolució correcta posterior no es tindrà en compte.