

ANÁLISIS DE SEÑALES ELECTROCARDIOGRÁFICAS USANDO TÉCNICAS DE PROCESAMIENTO DIGITAL

TRABAJO FIN DE CARRERA

INGENIERÍA TÉCNICA DE TELECOMUNICACIÓN

JOSÉ LORENZO ROMERO

2015



**Universitat Oberta
de Catalunya**

CONTENIDO

RESUMEN	4
1. INTRODUCCIÓN	5
2. MOTIVACIÓN	6
2.1 Anatomía del corazón.....	6
2.2 Sistema de conducción eléctrica del corazón.....	7
2.3 Aparato circulatorio.....	9
2.4 Componentes del electrocardiograma.....	10
2.5 Perturbaciones de la señal electrocardiográfica.....	13
2.6 Resumen.....	15
3. OBJETIVOS	16
4. MARCO TEÓRICO MODELOS DE FILTRADO	17
4.1 Técnicas de preprocesamiento de la señal.....	18
4.1.1 Eliminación del ruido.....	18
4.1.1.1 Métodos basados en técnicas clásicas de filtrado.....	18
4.1.1.2 Filtros de media móvil.....	21
4.1.1.3 Promedio de latidos.....	21
4.1.1.4 Aproximación mediante funciones.....	24
4.1.1.5 Reducción mediante Transformada de Wavelet.....	24
4.1.1.5.1 Elección del umbral.....	25
4.1.1.6 Resumen de técnicas de eliminación del ruido.....	26
4.1.2 Interferencias de la red.....	27
4.1.3 Variaciones de la línea base.....	28
4.1.3.1 Filtros clásicos.....	29
4.1.3.2 Filtros adaptativos.....	29
4.1.3.3 Otros métodos.....	30
4.1.3.4 Resumen de técnicas de reducción de las variaciones de la línea base..	31
4.1.4 Criterios para medir la efectividad de los filtros.....	31
4.1.4.1 Percentage Root Difference (PRD).....	31
4.1.4.2 Relación señal a ruido (SNR).....	31
4.1.4.3 Coeficiente de cross-correlación.....	31
4.1.4.4 Error cuadrático medio.....	32
4.2 Extracción de características.....	33
4.3 Segmentación y normalización.....	34
4.4 Reducción de características.....	34
5. ESTUDIO PRÁCTICO	36
5.1 Formación de la señal ECG.....	38
5.2 Captura de la onda simulada.....	42
5.3 Ruido.....	42

5.4 Filtrado.....	42
5.4.1 Filtrado con filtro paso bajo.....	42
5.4.2 Filtrado mediante Wavelet.....	46
5.4.3 Comparación de ambas técnicas de filtrado.....	52
5.5 Detección del punto R y cálculo del número de latidos.....	54
6. RESULTADOS	56
7. CONCLUSIONES	58
7.1 Conclusiones generales.....	58
7.2 Conclusiones personales.....	59
8. PRÓXIMAS LÍNEAS DE TRABAJO	60
9. BIBLIOGRAFÍA.....	61
10. GLOSARIO	63
11. ANEXOS	68
11.1 La Transformada de Wavelet	68
11.1.1 La Transformada de Wavelet Continua (CWT)	69
11.1.2 La Transformada de Wavelet Discreta (DWT)	69
11.1.2.1 Funciones de escala y funciones de Wavelet	69
11.1.2.2 Ejemplo representación de una señal senoidal.....	70
11.2 Análisis multiresolución mediante transformada de Wavelet.....	73
11.3 Filtros digitales.....	76
11.3.1 Ventajas de usar filtros digitales frente a los analógicos.....	77
11.3.2 Filtros recursivos y no recursivos.....	78
11.3.3 Filtros FIR.....	78
11.3.4 Filtros IIR.....	80
12. ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	82
13. MATLABteca Y ARCHIVO DE DATOS	84

RESUMEN

El trabajo que se presenta a continuación aborda la problemática del tratamiento de señales electrocardiográficas (ECG) sometidas a elementos diferentes tales como ruidos provocados por el contacto de los electrodos, interferencias debidas a la frecuencia de la red eléctrica, variaciones de la línea base, etc. Tras hacer pasar la señal por diferentes procesos de filtrado se procede a la detección y extracción de las características de la onda ECG para que el clínico pueda diagnosticar las cardiopatías, mal funcionamiento o malformaciones del corazón.

La importancia del tema es tal que los estudios realizados al respecto en el ámbito de la ciencia e investigación son amplios. Existen tesis doctorales y trabajos de investigación que abarcan, apoyándose en herramientas matemáticas y de computación, los diferentes aspectos del tratamiento de la señal para conseguir el objetivo perseguido. La mayoría de los trabajos se apoyan en análisis teóricos que complementan con estudios prácticos, partiendo de unas completas bases de datos existentes en el MIT (Massachusetts Institute of Technology), y que ofrece de forma altruista. El presente trabajo hace un resumen de las principales técnicas, dejando para su estudio y consulta el extenso índice bibliográfico que se propone, así como la abundante documentación existente en Internet.

Como muestra práctica de los resultados a obtener se parte de la construcción manual de la señal ECG para obtener una nube de puntos que sirve de base de estudio para el desarrollo de algoritmos apoyados en el lenguaje de programación MATLAB. El objetivo del presente trabajo es doble. Por una parte, se pretende hacer un resumen de la problemática del tratamiento de señales ECG, y por otra parte, intenta servir como fundamento docente/académico para entender el complejo y extenso enfoque teórico que se realiza. No se pretende en ningún momento investigar sobre líneas nuevas, haciendo notar los complejos estudios y tesis doctorales que hoy en día continúan profundizando en el complejo escenario que se plantea.

Por último, resaltar que así como la literatura cuenta con una amplia documentación teórica, el enfoque práctico carece de referencias bibliográficas destacables, siendo el presente trabajo una guía teórico/práctica para el lector que se inicia en el análisis del comportamiento de las ondas ECG y la extracción de conclusiones para el diagnóstico certero de las cardiopatías de ese complejo órgano que es el corazón.

El autor.

1. INTRODUCCIÓN

En el cuerpo humano se producen una gran cantidad de señales eléctricas provocadas por actividades que tienen su ubicación en los músculos y nervios que lo integran.

El corazón, por ejemplo, es conductor de un patrón característico de las variaciones de voltaje. El registro (electrocardiograma, ECG) y análisis de estos eventos bioeléctricos constituye una fuente de información a partir de la cual se pueden detectar enfermedades cardíacas.

Mediante técnicas de análisis de las señales electrocardiográficas, se pretende analizar el comportamiento de las muestras digitalizadas. Adicionalmente, el ruido generado por diferentes causas en la señal del ECG, debe ser detectado y filtrado. Utilizando técnicas de análisis matemático se puede detectar y filtrar tal ruido.

2. MOTIVACIÓN

Las tecnologías de la información y de la comunicación han penetrado en la ciencia y se han hecho un hueco, llegando a especialidades tan importantes para el ser humano como es la Medicina. Entre las enfermedades más importantes que causan muerte están las cardiovasculares, pasando la cifra de los 15 millones anuales mundiales.

Según la Sociedad Española de Cardiología (SEC), las enfermedades cardiovasculares se dividen en: reumáticas, hipertensivas, cardiopatías isquémicas, insuficiencia cardíaca, cerebro vasculares y arritmias. El ECG¹ es la representación gráfica de la actividad eléctrica del corazón, que se obtiene de un electrocardiógrafo de forma continua.

2.1 Anatomía del corazón.

El corazón tiene cuatro cámaras: dos **aurículas** y dos **ventrículos**, izquierdos y derechos. La aurícula derecha recibe la sangre venosa del cuerpo y la envía al ventrículo derecho el cual la bombea a los pulmones, lugar en el que se oxigena y del que pasa a la aurícula izquierda. De aquí la sangre se deriva al ventrículo izquierdo, de donde se distribuye a todo el cuerpo y regresa a la aurícula derecha cerrando el ciclo cardíaco.

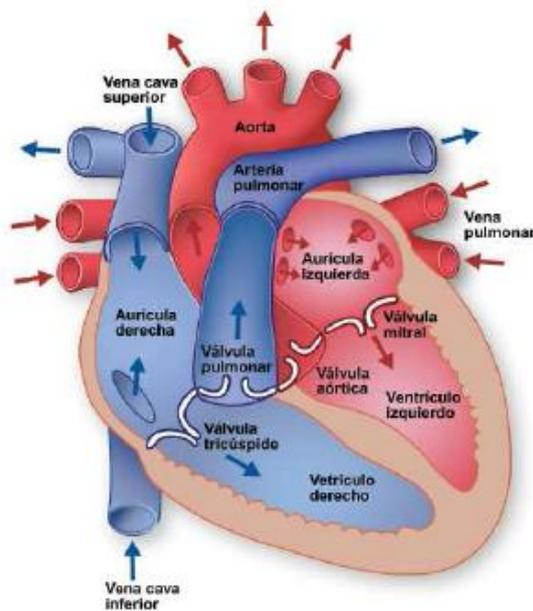


Ilustración 1: flujo de sangre en el corazón [2]

Para que la contracción cíclica del corazón se realice en forma sincrónica y ordenada, existe un sistema de estimulación y conducción eléctrica compuesto por fibras de músculo cardíaco especializadas en la transmisión de impulsos eléctricos. Aunque el corazón tiene inervación por parte del sistema nervioso simpático, late aún sin estímulo de este, ya que el sistema de conducción es autoexcitable. Es por esto que el corazón sigue latiendo aún cuando lo extirpamos, para un trasplante de corazón, por ejemplo.

El sistema de conducción se inicia con la despolarización cardíaca y debe transmitir ese impulso eléctrico desde las aurículas hacia los ventrículos. Para ello se compone de los

¹ <http://es.wikipedia.org/wiki/Electrocardiograma>

² http://www.texasheart.org/HIC/anatomy_Esp/anato_sp.cfm

siguientes elementos: el **nódulo sinoauricular (o sinusal)**, el **nódulo auriculoventricular**, el **haz de His**, con sus ramas derecha e izquierda y las **Fibras de Purkinje**.

En el cuerpo humano se generan una amplia variedad de señales eléctricas, provocadas por la actividad química que tiene lugar en los nervios y músculos que lo conforman. El corazón, por ejemplo, produce un patrón característico de variaciones de voltaje. El registro y análisis de estos eventos bioeléctricos son importantes desde el punto de vista de la práctica clínica y de la investigación. Los potenciales se generan a nivel celular, es decir, cada una de las células es un diminuto generador de voltaje.

Un electrocardiograma (ECG) es una prueba física ampliamente utilizada para valorar la condición del corazón en forma no invasiva. Dicha prueba se usa para evaluar el estado del sistema de conducción del corazón, el del músculo, y también, en forma indirecta, la condición de este órgano como una bomba y la aparición de ritmos patológicos causados por daño al tejido de conducción de las señales eléctricas, u otros trastornos no cardíacos. El ECG es la representación gráfica de la actividad bioeléctrica del músculo cardíaco, por lo que un equipo de registro de ECG (electrocardiógrafo) es comparable a un voltímetro que realiza una función de registrador.

2.2 Sistema de conducción eléctrica del corazón.

El impulso cardíaco se origina espontáneamente en el **nódulo sinusal**.

Desde el nódulo sinusal, el impulso eléctrico se desplaza, diseminándose por las aurículas a través de las **vías internodales**, produciendo la despolarización auricular y su consecuente contracción. En adultos sanos, el nodo sinusal descarga a una velocidad de 60 impulsos por minuto, definiendo así el ritmo sinusal normal, que se traduce en contracciones por minuto.

La onda eléctrica llega luego al **nódulo auriculoventricular**. Aquí, la onda eléctrica sufre una pausa de aproximadamente 0,1 segundos.

El impulso cardíaco se disemina luego a través de un haz de fibras que es un puente entre el nódulo auriculoventricular y las ramas

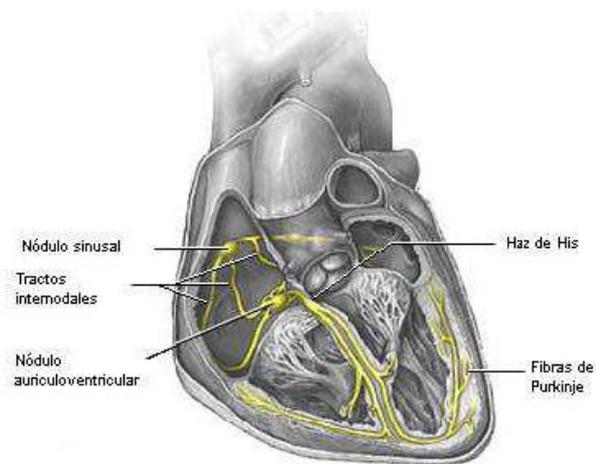


Ilustración 2: sistema de conducción eléctrica del corazón [3]

³ http://www.electrocardiografia.es/a_electrica.html

ventriculares, llamado **haz de His**. Se divide en 4 ramas: las ramas derecha e izquierda y esta última se divide en el fascículo izquierdo anterior y el fascículo izquierdo posterior, desde donde el impulso eléctrico es distribuido a los ventrículos mediante una red de fibras que ocasionan la contracción ventricular llamadas **fibras de Purkinje**, desencadenando la contracción ventricular.

En la siguiente ilustración se puede observar la formación de la onda ECG a través de las diferentes conducciones eléctricas del corazón.

4

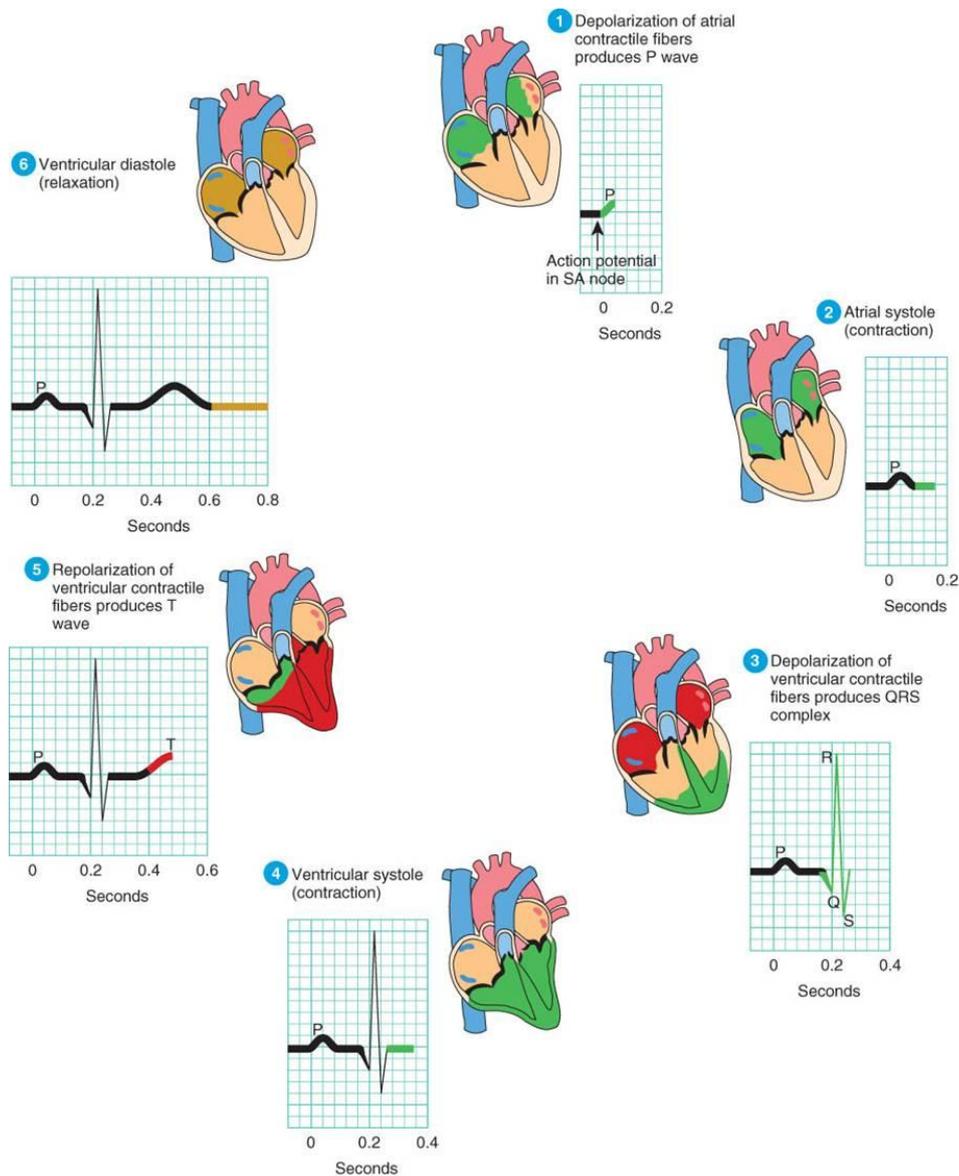


Ilustración 3⁴: formación de la onda ECG. (1) depolarización atrial, (2) el impulso eléctrico atravesando el nodo auriculoventricular, (3) depolarización ventricular, (4) sístole ventricular, (5) repolarización ventricular, (6) todas las células cardíacas de nuevo en descanso [4].

⁴ <http://www.uaz.edu.mx/histo/TortorAna/ch20/ch20.htm>

2.3 Aparato circulatorio

La sangre impulsada por el corazón en cada sístole, circula por las arterias, los capilares y las venas. La elasticidad de las arterias aorta y pulmonar permite que el flujo discontinuo producido por el corazón se transforme en un flujo continuo. Las arterias constituyen siempre vías de salida desde los ventrículos, mientras que las venas son siempre vías de entrada a las aurículas. La circulación es **doble**, debido a que la sangre recorre dos

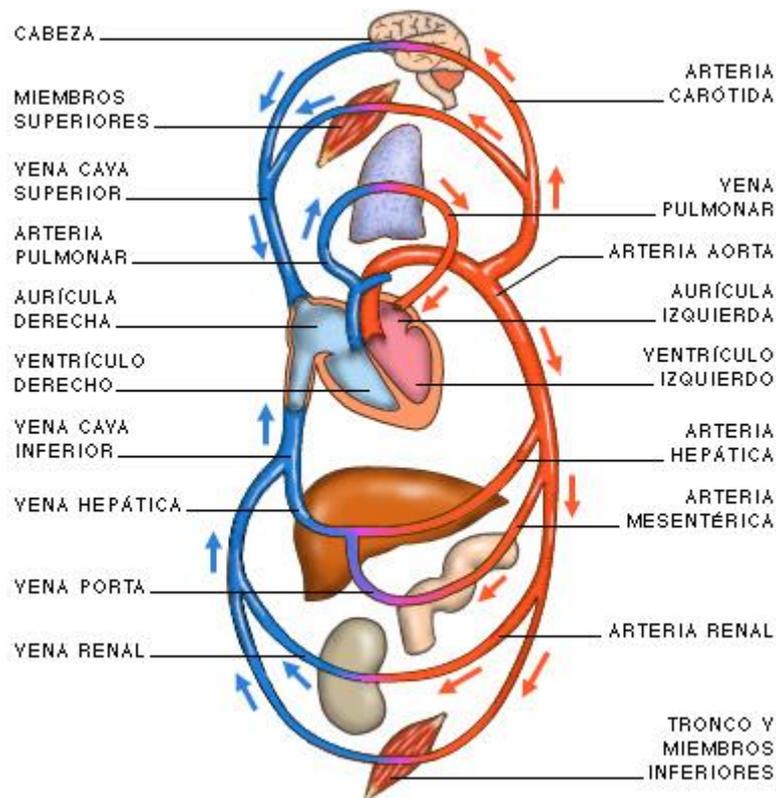


Ilustración 4: recorrido de la sangre. Circuito pulmonar y sistémico [5].

circuitos, el **circuito pulmonar** y el **circuito sistémico**:

- **La circulación menor o pulmonar:** se realiza entre el corazón y los pulmones. Tiene la función de efectuar el intercambio de oxígeno y dióxido de carbono. La contracción del ventrículo derecho, envía la sangre venosa a la arteria pulmonar. La arteria se divide en dos ramas, que penetran en los pulmones y se ramifican para dar capilares, a través de los cuales se efectúa el intercambio de los gases respiratorios. La sangre oxigenada regresa por las venas pulmonares hasta la aurícula izquierda, que se halla relajada.

⁵ <http://mahryag.blogspot.com.es/>

- **La circulación mayor o sistémica:** se efectúa entre el corazón y el resto del cuerpo. Transporta el oxígeno y los nutrientes a todos los tejidos y retira los desechos producidos por las células. Se inicia con la contracción del ventrículo izquierdo, que impulsa la sangre oxigenada, procedente de la circulación pulmonar, a la arteria aorta. Como tiene que vencer mucha resistencia, su pared es más gruesa que la del ventrículo derecho. La sangre se distribuye, a través de arterias y arteriolas, por los distintos órganos, donde se efectúa el intercambio capilar. Los capilares confluyen en las venas, que llevan la sangre de retorno al corazón. Esta sangre, desoxigenada y cargada de dióxido de carbono, ingresa por las venas cavas en la aurícula derecha.

2.4 Componentes del electrocardiograma.

Un trazo normal de un ciclo cardíaco consta de una onda P, un complejo QRS y una onda T. Además, en más de un 50% de los casos también es posible que sea visible una pequeña onda U. El voltaje de la **línea base** del ECG también es conocido como línea isoelectrica o línea basal. Normalmente, la línea isoelectrica es la porción de trazo que sigue a la onda T y precede a la siguiente onda P.

En la práctica, la señal electrocardiográfica capturada es tan débil que se encuentra muy contaminada con el ruido (50 Hz ó 60 Hz) acoplado como interferencia y procedente de la red eléctrica, no resultando totalmente eliminado por el amplificador diferencial de instrumentación. Además, la señal resulta mezclada con diversos artefactos de baja frecuencia generados como consecuencia de la respiración del paciente y otras causas. Por último, aparece también una cierta cantidad de ruido blanco que se genera en el propio sistema amplificador.

El estudio del ECG permite al especialista conocer el estado del corazón, ya que las alteraciones de su funcionamiento se reflejan en modificaciones del ECG normal.

En el caso de un individuo sano, un período del ECG comprende los componentes que se detallan en la ilustración 5. Las porciones del electrocardiograma entre las deflexiones reciben el nombre de **segmentos**, y las distancias entre ondas, **intervalos**.

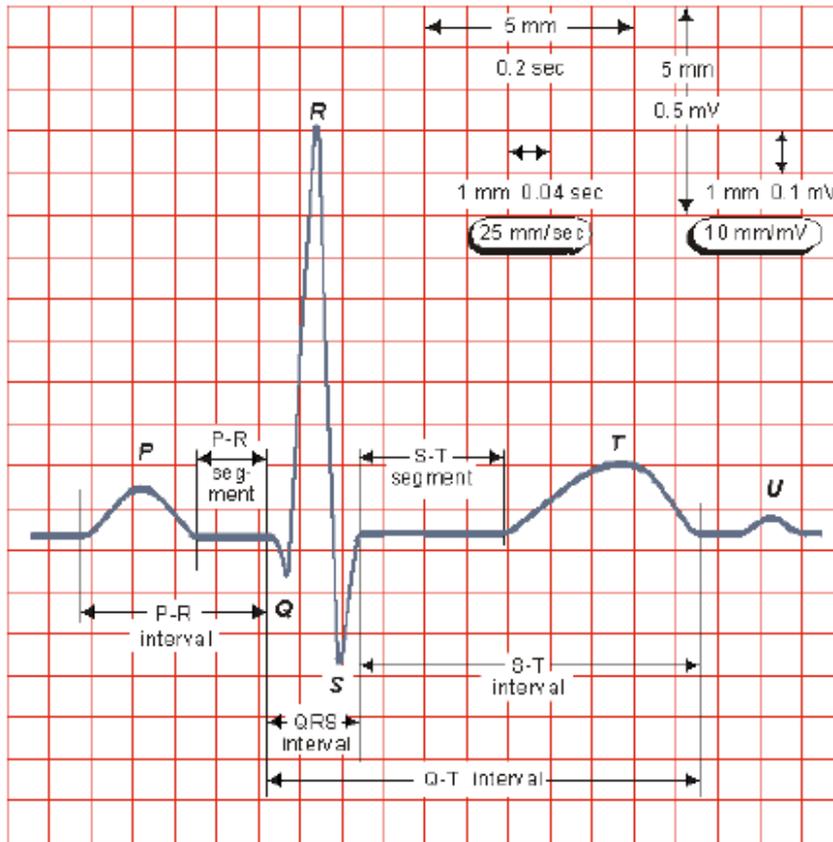


Ilustración 5: onda ECG [6].

Onda P

La onda P es la señal eléctrica que corresponde a la despolarización auricular. Resulta de la superposición de la despolarización de la aurícula derecha (parte inicial de la onda P) y de la izquierda (final de la onda P). La repolarización de la onda P (llamada onda T auricular) queda eclipsada por la despolarización ventricular (Complejo QRS). Para que la onda P sea sinusal (que provenga del nodo sinusal) debe reunir ciertas características:

1. No debe superar los 0,25 mV (milivoltios). Si lo supera, estamos en presencia de un agrandamiento auricular derecho.
2. Su duración no debe superar los 0,11 segundos en el adulto y 0,07-0,09 segundos en los niños. Si está aumentado posee un agrandamiento auricular izquierdo y derecho.
3. Tiene que ser redondeada, de rampas suaves, simétricas, de cúspide roma y de forma ovalada.
4. Tiene que preceder al complejo ventricular.

⁶ http://www.electrocardiografia.es/ondas_ecg.html

Complejo QRS

El complejo QRS corresponde a la corriente eléctrica que causa la contracción de los ventrículos derecho e izquierdo (despolarización ventricular), la cual es mucho más potente que la de las aurículas y compete a más masa muscular, produciendo de este modo una mayor deflexión en el electrocardiograma.

Las ondas Q que son demasiado anchas y profundas indican un infarto de miocardio.

Las ondas R y S indican contracción del miocardio. Las anomalías en el complejo QRS pueden indicar bloqueo de rama (cuando es ancha), taquicardia de origen ventricular, hipertrofia ventricular u otras anomalías ventriculares. Los complejos son a menudo pequeños en las pericarditis.

La duración normal es de 60 a 100 milisegundos.

Onda T

La onda T representa la repolarización de los ventrículos. Durante la formación del complejo QRS, generalmente también ocurre la repolarización auricular que no se registra en el ECG normal, ya que es tapado por el complejo QRS. Eléctricamente, las células del músculo cardíaco son como muelles cargados; un pequeño impulso las dispara, despolarizan y se contraen. La recarga del muelle es la repolarización (también llamada potencial de acción).

En la mayoría de las derivaciones, la onda T es positiva. Las ondas T negativas pueden ser síntomas de enfermedad.

El segmento ST conecta con el complejo QRS y la onda T. Puede estar reducido en la isquemia y elevado en el infarto de miocardio.

Su duración aproximadamente es de 0,20 segundos o menos y mide 0,5 mV.

Onda U

Esta onda es normalmente invisible.

Frecuencia cardíaca

La frecuencia cardíaca puede ser derivada de un trazado del electrocardiograma con varias ecuaciones. Una de ellas sigue la regla de los 300, la cual funciona si el ritmo es regular: dividiendo 300 entre el número de cuadros grandes (cinco cuadros pequeños en cada cuadro grande) entre un R y la siguiente. Por ejemplo, en la gráfica siguiente,

la distancia en cuadros grandes entre un R y el siguiente es aproximadamente de 3,7: dividiendo 300 entre 3,7 produce una frecuencia cardíaca de 80 latidos por minuto.



Ilustración 6: representación de un tren de ondas ECGs para una frecuencia cardíaca de 125 latidos/minuto [7]

2.5 Perturbaciones de la señal electrocardiográfica⁸.

Una perturbación, es una señal indeseable que puede alterar la señal original de ECG. En el contexto señales electrocardiográficas, se consideran:

a. Interferencia de línea de potencia:

Esta consiste en una señal de 60 Hz y sus armónicos, que pueden ser modelados como combinaciones de sinusoides.

Parámetros típicos:

- Amplitud - superior al 50% de la amplitud pico a pico ECG.

b. Ruido por contacto de electrodos:

Es un ruido transitorio causado por las pérdidas de contacto entre el electrodo y la piel, la cual efectivamente desconecta el sistema de medición del sujeto.

Parámetros típicos:

- Frecuencia - 60Hz.
- Constante de tiempo - cerca de 1s.

c. Artefactos de movimiento:

Estos son cambios transitorios en la señal ECG, causados por variaciones en la impedancia electrodo-piel debido al movimiento del electrodo. La causa usual de artefactos de movimiento son las vibraciones/movimientos del sujeto.

Parámetros típicos:

- Duración - 100 ms a 500 ms.
- Amplitud - 30% de la amplitud pico a pico del ECG.

⁷ <http://sapiensmedicus.org/blog/2014/04/07/interpreta-lo-basico-del-ecg-en-7-sencillos-pasos/>

⁸ <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84903718>

d. Contracción muscular (electromiográfico, EMG):

La línea base de electromiograma está usualmente en rango de los microvoltios y por lo tanto es generalmente insignificante. Las señales resultantes de la contracción muscular pueden ser asumidas como quiebres transitorios. Este ruido se puede apreciar con claridad en el espectro de la señal.

Parámetros típicos:

- Desviación estándar - 10% de la amplitud pico a pico del ECG.
- Duración - 50ms.
- Contenido de frecuencia DC - 10kHz.

e. Desplazamiento de Línea base y Modulación de amplitud de ECG con respiración:

El desplazamiento de línea base por respiración puede ser representado como una componente sinusoidal en la frecuencia de respiración adherida a la señal ECG.

Parámetros típicos:

- Variación de amplitud - 15% de la amplitud pico a pico del ECG.
- Variación de línea base - 15% de la amplitud pico a pico del ECG.
- Variación de frecuencia - 0.15 Hz a 0.3 Hz.

f. Ruido electro-quirúrgico:

Este destruye completamente el ECG y puede ser representado como una gran cantidad de sinusoides con frecuencias aproximadamente entre 100Hz y 900Hz.

Parámetros típicos:

- Amplitud - 200% de la amplitud pico a pico del ECG.
- Duración - 1s a 10s.

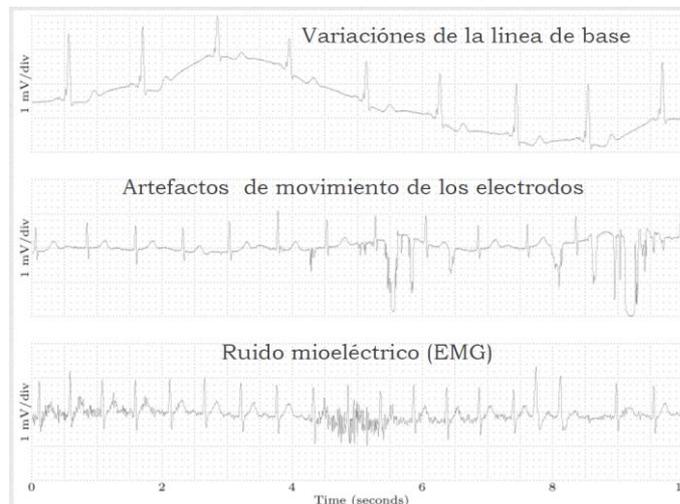


Ilustración 7: perturbaciones del ECG debido a diferentes causas [9].

⁹ <http://aulaenred.ibercaja.es/img/SenalesBiomedicas1.pdf>

2.6 Resumen

En el cuerpo humano se producen una gran variedad de señales eléctricas. El corazón es un músculo conductor de dichas señales y a través del registro de las variaciones de voltaje se genera una bioseñal cuya representación es el electrocardiograma (ECG). Se pretende en el presente trabajo hacer un análisis del ECG y detectar sus características principales cuando se ve influenciado por interferencias externas como son los provocados por movimientos del paciente, de los electrodos, etc.

Así, tras presentar la anatomía y fisiología se le introduce al lector en la comprensión de las distintas partes de la onda ECG, para a continuación hacer un somero estudio de las principales causas que perturban la bioseñal. Tales perturbaciones deben ser corregidas al objeto de poder separar la parte útil de la señal de la que se añade debido a las influencias externas. Para ello, se hace un tratamiento en cascada y se hace pasar la señal analógica por filtros analógicos previos al muestreo, para hacer posteriores filtrados digitales.

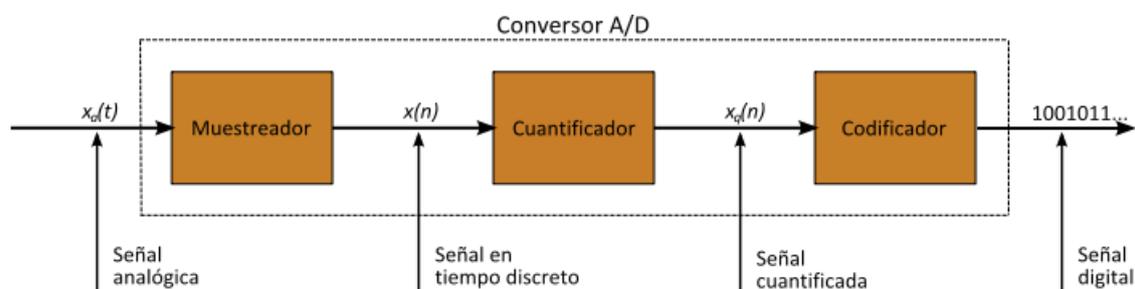


Ilustración 8: proceso de conversión analógico-digital. [10]

Este proceso de filtrado en cascada da lugar a una señal libre de las perturbaciones, salvando un margen de error propio del proceso que servirá al clínico para discriminar si hay alguna cardiopatía.

Finalmente, con el apoyo del software MATLAB y como muestra práctica de los efectos del filtrado, se hace la construcción de una señal ECG normal y se le somete a diferentes perturbaciones para realizar un filtrado digital y poder extraer algunas conclusiones interesantes de la efectividad de los métodos realizados. Como aplicación práctica se hace un conteo de los pulsos para contabilizar el número de latidos del corazón a partir de la detección del máximo R en la onda ECG.

¹⁰ http://es.wikipedia.org/wiki/Conversi%C3%B3n_anal%C3%B3gica-digital

3. OBJETIVOS

- Presentar diferentes modelos de filtrado de la señal ECG.
- Detectar y filtrar en la curva ECG el ruido provocado por fuentes externas.
- Analizar la curva electrocardiográfica (ECG) y extraer sus características.
- Hacer un estudio práctico de un filtrado digital apoyándose en el software matemático MATLAB.
- Calcular el número de latidos a partir de la detección de los máximos R de la curva ECG.

4. MARCO TEÓRICO: MODELOS DE FILTRADO

Un esquema comúnmente aceptado en el análisis de la señal electrocardiográfica consiste en el que se muestra en la ilustración siguiente. En ella, una vez que se adquiere la señal, se hace un preprocesamiento consistente en el filtrado del ruido, eliminación de la interferencia de la red y corrección de las variaciones de la línea base. A continuación se hace una compresión de la señal, eliminando información redundante y manteniendo todas las características de la señal, sin perder información crítica. Mediante la segmentación y normalización, se hace la detección de las características más relevantes de la onda, como es la detección del complejo QRS, la detección de las ondas P y T, y de los picos de la onda R. Por último, mediante la reducción de características, se trata de extraer el mínimo conjunto de datos que proporcionen el máximo de información.

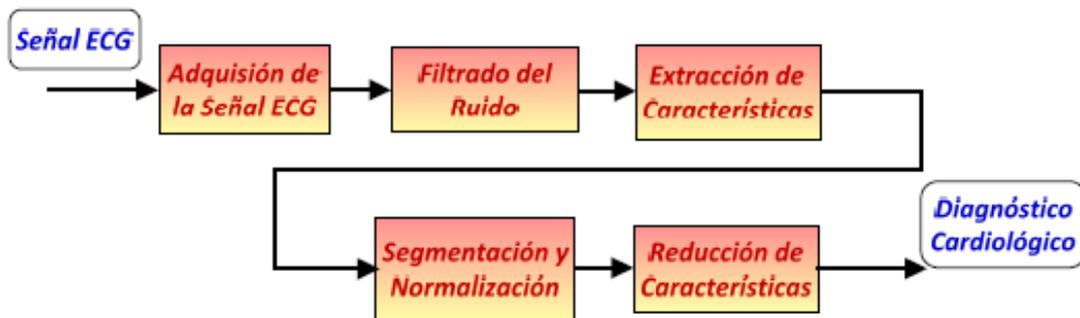


Ilustración 9: esquema de análisis de la señal ECG [11].

A continuación se relaciona para cada una de las etapas el estado del arte.

Tratamiento de la señal	Métodos	
Preprocesamiento de la señal (en rojo técnicas analógicas previas al muestreo, y en verde digitales)	Eliminación del ruido	Técnicas de filtrado clásico Filtros de media móvil Promedio de latidos Aproximación mediante funciones Transformada de Wavelet
	Interferencia de la red	

	Variaciones de la línea base	Filtros clásicos Filtros adaptativos Otros métodos
Extracción de características		
Segmentación y normalización	Detección del complejo QRS	
	Detección de ondas P y T	
	Detección de los picos de onda R	
Reducción de características		

4.1 Técnicas de preprocesamiento de la señal.

Una vez capturada la señal ECG, el proceso consiste en aplicarle filtrado analógico **antes de hacer un muestreo** para su cuantificación y procesado digital (ver apartado 2.6). En este preprocesamiento de la bioseñal, se comienza aplicando filtros clásicos con el objetivo de eliminar el ruido, eliminar las variaciones de la línea base e interferencias de la red. Posteriormente, **tras el muestreo**, se vuelve a procesar la señal, usando para ello técnicas de filtrado digital, que continuarán eliminando componentes no deseados de ruido y variaciones de la línea base.

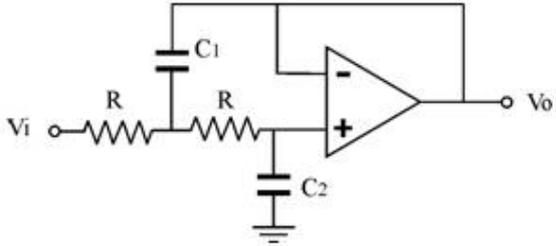
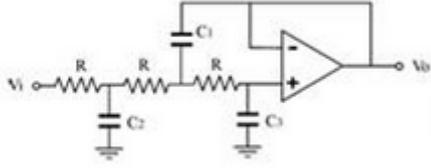
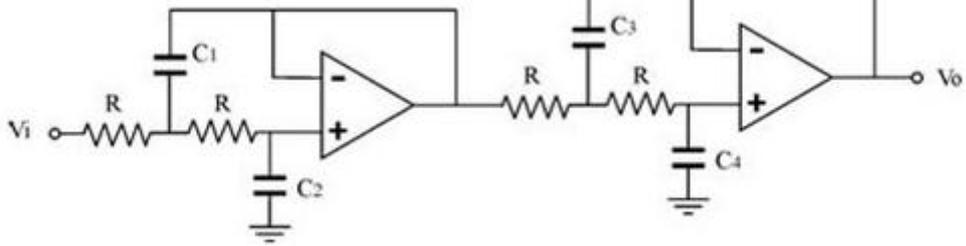
4.1.1 Eliminación del ruido

Como veíamos anteriormente, el ruido presente en la señal electrocardiográfica se puede deber a múltiples factores. A continuación vamos a analizar algunos métodos para reducirlo.

4.1.1.1 Métodos basados en técnicas clásicas de filtrado.

Una de las técnicas más usadas la constituye el uso de **filtros PASO BAJO**. Esta técnica supone que el ruido tiene componentes frecuenciales altas, por encima de la señal. Uno de los filtros más usados es el de Butterworth¹² diseñado para producir una respuesta plana hasta la frecuencia de corte, y después disminuye a razón de 20*n dB por década, donde n es el número de polos del filtro.

¹² http://es.wikipedia.org/wiki/Filtro_de_Butterworth

	<p>SEGUNDO ORDEN</p>
	<p>TERCER ORDEN</p>
	<p>CUARTO ORDEN</p>

La función de transferencia es:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

Donde ω_c es la frecuencia de corte, y N es el orden del filtro. La representación de la respuesta en frecuencia es la que muestra la ilustración siguiente.

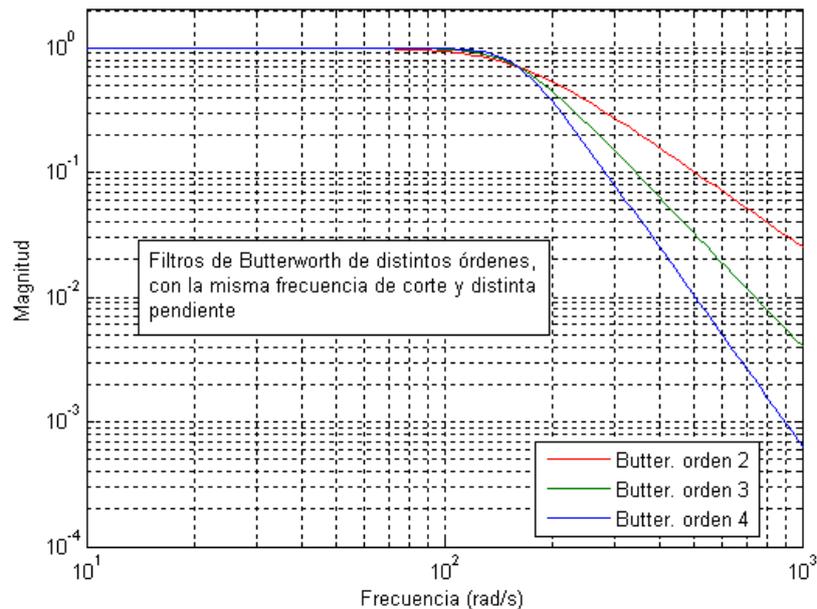


Ilustración 10: representación de la respuesta en frecuencia. Filtro de Butterworth [13].

El inconveniente principal de estos filtros es su escasa selectividad, evitándose usar en el análisis de señales biomédicas.

Una vez que se adquiere la señal electrocardiográfica, y se ha filtrado mediante técnicas clásicas, se procede al **muestreo**, que consiste en tomar muestras de una señal analógica a una frecuencia o tasa de muestreo constante, para cuantificarlas posteriormente. El muestreo está basado en el teorema del muestreo de Nyquist-Shannon¹⁴.

Posteriormente hay un procesamiento digital. La señal presenta una serie de elementos ajenos a ella, como son el ruido, las interferencias de la red eléctrica y las variaciones de la línea base, que hay que eliminar o minimizar. Así, la señal podemos ponerla como:

$$x[n] = ECG[n] + r[n] + b[n]$$

donde:

- $x[n]$: señal discreta adquirida
- $ECG[n]$: señal electrocardiográfica real que se desea registrar
- $r[n]$: es el ruido en general
- $b[n]$: son las variaciones de la línea base

¹³ http://es.wikipedia.org/wiki/Filtro_de_Butterworth

¹⁴ http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_muestreo_de_Nyquist-Shannon

- n : índice temporal discreto

En definitiva, se trata de reducir $r[n]$ y $b[n]$ para que $x[n]$ se parezca lo más posible a ECG[n].

4.1.1.2 Filtros de media móvil

Este tipo de filtrado parte de la idea intuitiva de que cada valor es similar a sus adyacentes, dado que los cambios en la secuencia no se hace de forma repentina o inesperada. A título ilustrativo, supongamos la serie siguiente {3.2, 4.7, 2.6, 3.5, 3.1, 4.6, 4.1, 2.8, 4.3, 3.2, 2.9}. Si usamos como estimador de tendencia central la **mediana**, y una secuencia de tres valores para obtener el valor suavizado, tenemos {3.2, 3.2, 3.5, 3.1, 3.5, 4.1, 4.1, 4.1, 3.2, 3.2, 2.9}.

Tanto la amplitud de ventana como la ponderación son parámetros modificables que inciden en la potencia del alisado de la curva. Si la ventana que escogemos es de 5 elementos, la serie que se obtiene es más lisa aún {3.2, 3.2, 3.2, 3.5, 3.5, 3.5, 4.1, 4.1, 3.2, 3.2, 2.9}.

Mediante los filtros de media móvil,

$$y[n] = \frac{1}{a + b + 1} \sum_{k=n-a}^{k=n+b} x[k]$$

Se hace una ponderación en cada punto de las muestras vecinas. Este tipo de filtro no se usa por su falta de selectividad, además de enmascarar detalles de alta frecuencia de la señal. Este filtro se puede usar cambiando los valores de a y b . También se pueden dar pesos diferentes a las muestras. Así:

$$y[n] = \frac{x[n-1] + 2x[n] + x[n+1]}{4}$$

4.1.1.3 Promedio de latidos

Mediante esta técnica se promedia y depura la señal electrocardiográfica del ruido externo. El objetivo principal es disminuir el nivel de ruido que contamina el registro electrocardiográfico.

El promediado de ECG se basa en la característica repetitiva con cada latido de las señales y la suposición de que no existe correlación entre el ruido y la señal.

Para realizar el estudio del promediador de señal, se supone un conjunto de señales pertenecientes al proceso aleatorio:

$$r_i(k) = s(k) + n_i(k); \quad i = 1, \dots, R; \quad k = 1, \dots, L$$

donde k es el índice de tiempo discreto de duración L muestras, i es cada una de las R realizaciones del proceso, $s(k)$ es la señal a estimar (se supone invariable a lo largo de las realizaciones).

- $n_i(k)$ representa el ruido que contamina a la realización i , y que es distinto para cada una de ellas.
- $r_i(k)$ es cada una de las R realizaciones de la señal repetitiva sobre las que se va a aplicar el promediado.
- Se supone además que $s(k)$ no varía con cada realización, el ruido $n_i(k)$ no está correlado con el estímulo que genera la señal determinista $s(k)$, ni con ella misma. El ruido $n_i(k)$ es un proceso estacionario en sentido amplio con media cero y varianza σ^2 .

Se obtiene la estimación $\bar{s}_R(k)$ como el promediado de las R realizaciones $r_i(k)$:

$$\bar{s}_R(k) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R r_i(k) = s(k) + \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R n_i(k) = s(k)$$

Y podemos concluir que la señal original $s(k)$ se obtiene como promediado de las R realizaciones $r_i(k)$.

El uso del promediado requiere de un punto de sincronismo como referencia, ya que el desalineamiento de las señales a promediar produce un efecto indeseable de filtrado.

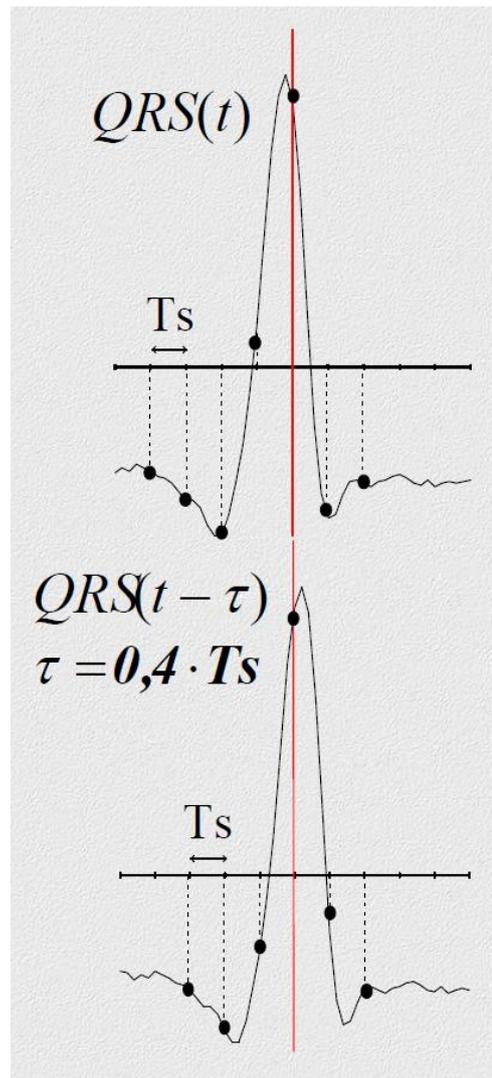


Ilustración 11: desalineamiento de la señal ECG [15].

El alineamiento de la señal se puede hacer por diferentes métodos, como el método de Woody, o el de las integrales normalizadas, que se escapan del alcance de este trabajo.

¹⁵ Laguna, Pablo. *Acondicionamiento de la señal ECG y extracción de parámetros clínicamente útiles*. Curso de verano de la Universidad de Cantabria: Técnicas avanzadas de tratamientos de señal para la mejora del proceso asistencial en el entorno de la medicina especializada.

4.1.1.4 Aproximación mediante funciones

Esta es otra de las formas de minimizar el ruido de la señal. Se trata de ajustar la curva mediante segmentos¹⁶, tal como se aprecia en la siguiente ilustración, teniendo el mismo efecto que un filtro paso bajo.

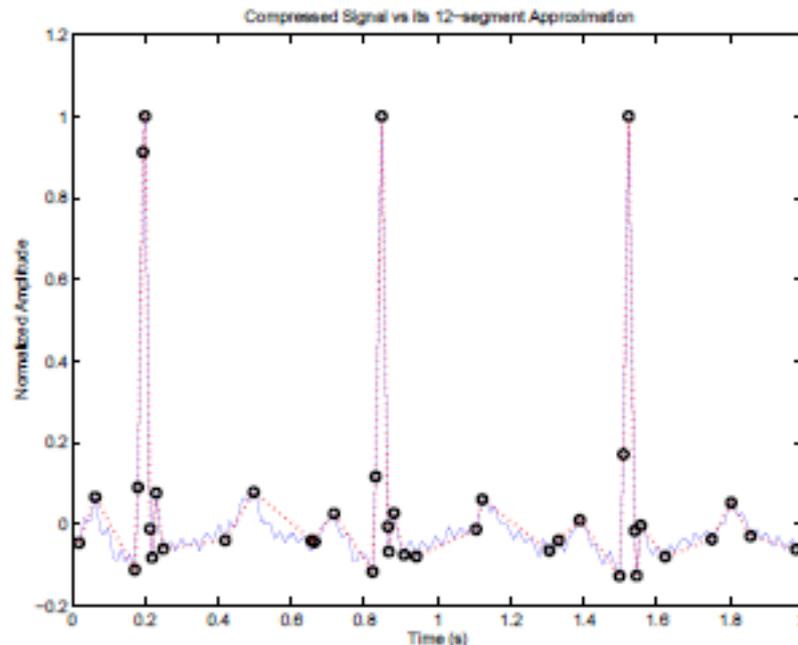


Ilustración 12: aproximación de la señal ECG mediante funciones [17].

4.1.1.5 Reducción mediante Transformada de Wavelet¹⁸

Esta es una técnica relativamente reciente, con la que se consigue una reducción del ruido. Los algoritmos usados fueron iniciados por Donoho y Johnstone en EEUU y por Ricard y Kerkyacharian en Francia.

Los algoritmos se pueden clasificar en métodos de reducción **lineal y no lineal**:

¹⁶ A.Koski and M.Juhola. Segmentación of digital signals based on estimated compression ratio. IEEE, 43(9), 1996. Engineering transactions on Biomedical

¹⁷ Micó, Pau. *Nuevos desarrollos y aplicaciones basados en métodos estocásticos para el agrupamiento no supervisado de latidos en señales electrocardiográficas*. Departamento de Informática de Sistemas y computadores. Universidad Politécnica de Valencia.

¹⁸ Véase Anexo I

- **Métodos lineales:** se basan en que el ruido se encuentra principalmente en los coeficientes finos de escala, de forma que se eliminan los coeficientes con una escala más fina que un cierto umbral λ :

$$d_{j,k} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \geq \lambda \\ d_{j,k}, & \text{si } j < \lambda \end{cases}$$

- **Métodos no lineales:** se basa en la idea de que el ruido se encuentra en cada coeficiente y está distribuido sobre todas las escalas. Hay dos versiones, la de umbral suave y la de umbral duro (soft threshold y hard threshold):
 - **Umbral duro:** elimina los coeficientes que se encuentran debajo de cierto umbral λ elegido.
 - **Umbral suave (Shrinkage Denoising):** elimina los coeficientes que se encuentran por debajo de un umbral λ elegido, y mueve el resto a otro sitio.

El procedimiento para la eliminación del ruido requiere de tres etapas:

1. Cálculo de la transformada de la señal. Para ello, hay que elegir una función de Wavelet y un número de niveles de descomposición o resolución¹⁹.
2. Aplicación de un **umbral** y cálculo de coeficientes para determinar aquellos que representan el ruido. Un umbral es un parámetro de suavizado. Para cada nivel se elige un parámetro λ y se aplica un umbral duro o suave, eliminando los de más baja energía.
3. Cálculo de la transformada inversa para recuperar la señal, a partir de los coeficientes modificados.

4.1.1.5.1 Elección del umbral

Existen muchos métodos para calcular el valor del umbral λ . Hay dos categorías: **umbrales globales**, que eligen un λ fijo aplicable a todos los coeficientes Wavelet, y los **umbrales dependientes de nivel**, que fijan un valor λ para cada nivel de resolución (escala).

- **Algoritmo MINIMAX:** desarrollado por Donoho y Johnstone en 1994, se propone como umbral λ ,

$$\lambda = 0.3936 + 0.1829 \left(\frac{\log N}{\log 2} \right)$$

¹⁹ Véase Anexo I

donde N es el tamaño de la muestra.

- **Algoritmo VISUSHRINK:** propuesto también por Donoho y Johnstone en 1994, se usa un umbral,

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(N)}$$

donde N es el tamaño de la muestra y σ se define como:

$$\sigma = \frac{\text{mediana}(|d_{J-1,b}|)}{0.6745}$$

con J el número de niveles de descomposición, y $b=0,1,\dots,2^{J-1} - 1$

4.1.1.6 Resumen de técnicas de eliminación de ruido

TIPO	TÉCNICA	EFFECTIVIDAD
ANALÓGICA	Filtrado clásico	El filtrado es poco selectivo* por lo que son filtros poco selectivos y se usan por ello al comienzo del filtrado en cascada.
DIGITAL	Filtro de media móvil	Baja selectividad. Enmascara detalles de alta frecuencia de la señal.
	Promedio de latidos	Requiere de un punto de sincronismo como referencia complicado de conseguir para evitar el desalineamiento de las señales ECG consecutivas.
	Aprox. mediante funciones	Dependiendo del número de puntos la aproximación será mejor o no. Requiere bastante esfuerzo de computación. Mismo comportamiento que el filtro paso bajo.
	Transformada de Wavelet	Introduce fluctuaciones temporales. Filtra peor a altas frecuencias y mejor a bajas frecuencias que los filtros digitales.

A la vista de las diferentes técnicas, se propone usar un filtrado clásico (filtro paso bajo) antes del muestreo, para posteriormente, una vez muestreada, mediante Wavelet, filtrar las bajas frecuencias, donde el filtrado es más selectivo.

Nota *: en un filtro la selectividad se mide como el cociente entre la frecuencia de la banda de paso y la frecuencia de la banda atenuada, de forma que cuando el cociente

se aproxima a 1 es muy selectivo, y cuando se acerca a cero es poco selectivo. Mide la eficacia de la función que debe realizar el filtro.

4.1.2 Interferencias de la red

La frecuencia de la red es de 50 Hz o 60 Hz, generando una onda que se solapa a la señal ECG, junto con sus armónicos. La amplitud suele ser superior al 50% de la amplitud pico a pico de la señal ECG.

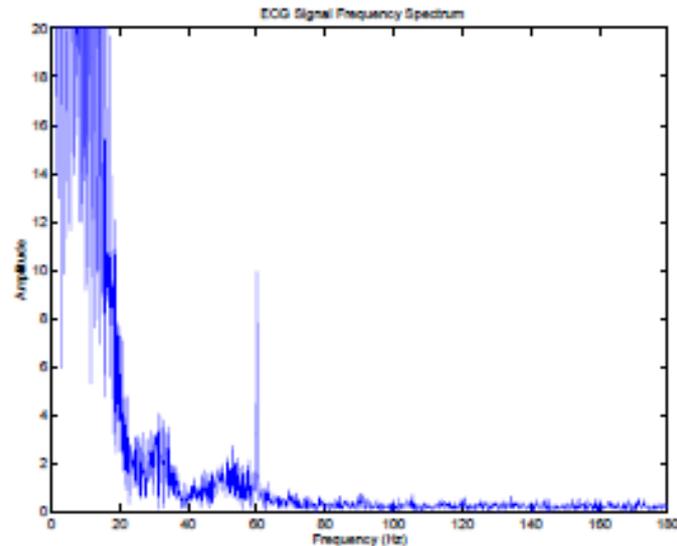


Ilustración 13: espectro de una señal ECG donde se aprecia el contenido frecuencial de la señal de 60 Hz debido a la interferencia de la red [20].

Para eliminar este tipo de interferencia, se diseñan **filtros elimina banda**, centrados en la frecuencia de interferencia de la red y con un ancho de banda lo suficientemente estrecho para que no interfiera al resto de componentes de la señal. Así, un ejemplo es el **filtro de Chebyshev de orden dos (filtro Notch)**:

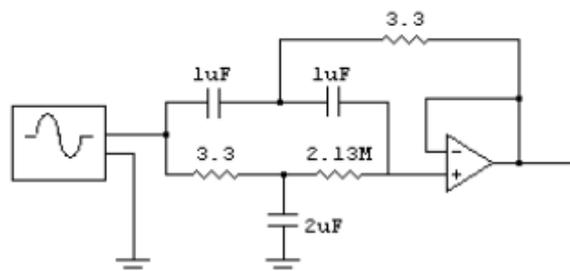


Ilustración 14: filtro elimina banda. Filtro de Chebyshev de orden dos.

²⁰ Micó, Pau. *Nuevos desarrollos y aplicaciones basados en métodos estocásticos para el agrupamiento no supervisado de latidos en señales electrocardiográficas*. Departamento de Informática de Sistemas y computadores. Universidad Politécnica de Valencia.

Cuya función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{s^2 + 1.4227 * 10^5}{s^2 + 0.939s + 1.4227 * 10^5}$$

y el diagrama de Bode es el de la siguiente ilustración.

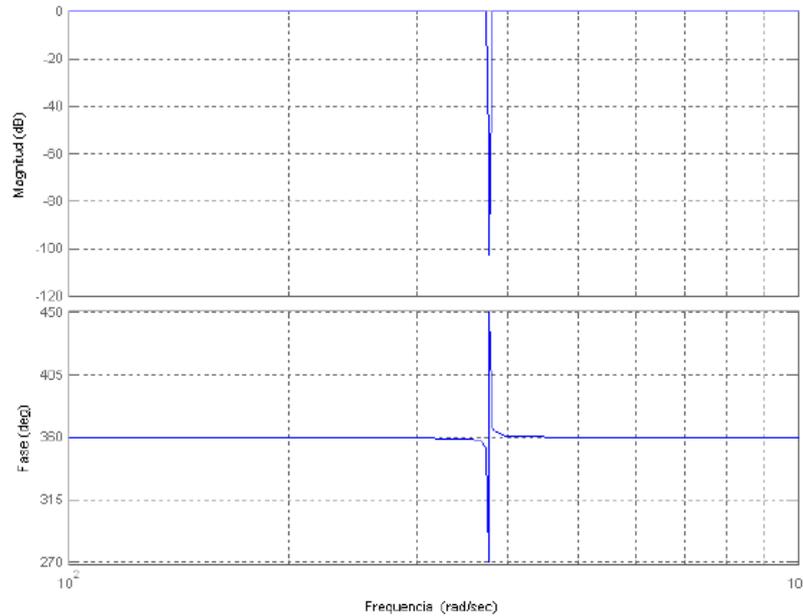


Ilustración 15: diagrama de Bode de un filtro de Chebyshev de segundo orden.

4.1.3 Variaciones de la línea base

Interferencias de baja frecuencia (de 0 a 0.5 Hz) y alta amplitud consiguen variar la línea base de la señal ECG, principal causa de error en el diagnóstico visual y automático. Estas interferencias se deben al movimiento lento de los electrodos sobre la piel, a cambios de las propiedades físico-químicas del contacto piel-electrodo o al movimiento del cuerpo producido por la respiración.

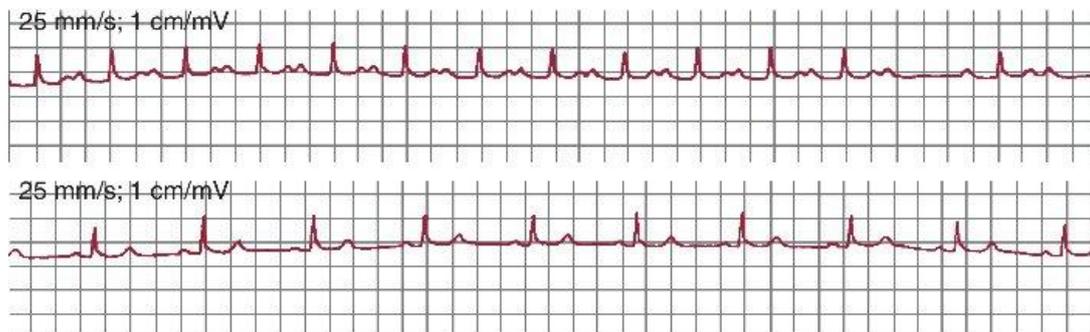


Ilustración 16: señal ECG con variaciones de la línea base [21].

²¹ <http://www.revespcardiol.org/es/enfoque-clinico-taquicardia-el-aleteo/articulo/90113962/>

Hay diferentes técnicas para su reducción.

4.1.3.1 Filtros clásicos

Mediante un filtro pasa banda entre 0.5 Hz y 100 Hz, o un filtro paso alto con frecuencia de corte de 0.5 Hz, pues estas interferencias tienen un contenido frecuencial por debajo de esta frecuencia. Esta solución no es factible porque:

- Se modifican las componentes de baja frecuencia como el segmento ST.
- Los filtros lineales tienen un elevado coste computacional y para conseguir una banda estrecha es necesario un elevado número de coeficientes. Si se usan filtros IIR se requerirán menos coeficientes, pero al no tener fase lineal, se distorsionaría la señal.

4.1.3.2 Filtros adaptativos²²

Se propone un método usando como técnica el filtrado adaptativo.

Para ello, se propone un filtrado adaptativo en cascada en dos pasos. El primero consiste en un filtrado adaptativo constante, y el segundo en un filtrado tomando como referencia los instantes de aparición de cada latido. En ambos se usa el algoritmo LMS.

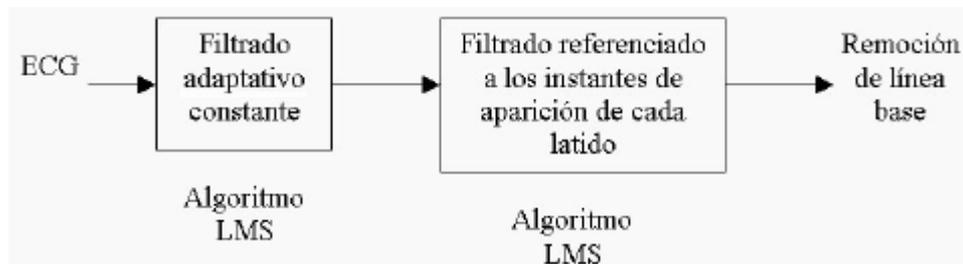


Ilustración 17: filtro adaptativo en cascada [23].

El primer filtrado pretende eliminar la componente DC y las frecuencias menores que aquellas donde aparece el segmento ST. Después de esto, y teniendo en cuenta el comportamiento repetitivo del ECG, se aplica un filtrado adaptativo que elimina el remanente de las variaciones en la línea base que no estén correladas con el QRS para así preservar las que sí lo estén.

²² Adaptive baseline wander removal in the ecg: Comparative analysis with cubic splines technique

²³ Jané, R., Laguna, P., Thakor, N., and Caminal, P. (1992). Adaptive baseline wander removal in the ecg: Comparative analysis with cubic splines technique. IEEE Computers in Cardiology, pages 143–146.

4.1.3.3 Otros métodos

Las variaciones de la línea base pueden corregirse a partir de otros métodos que exceden al presente trabajo, tal como la aproximación con splines cúbicos²⁴ o filtros variantes en el tiempo²⁵ (la frecuencia de corte va variando según el análisis de las componentes frecuenciales de cada latido respecto a un promedio de los mismos).

4.1.3.4 Resumen de técnicas de reducción de las variaciones de la línea base

TIPO	TÉCNICA	EFFECTIVIDAD
ANALÓGICO	Filtro pasa banda de 0.5 a 100 Hz	Se modifican las componentes de baja frecuencia. Elevado coste computacional para conseguir selectividad.
	Filtro paso alto de frecuencia de corte 0.5 Hz	Ídem
	Filtro IIR	Requieren menos coeficientes y por tanto menor coste computacional. Al no tener fase lineal se distorsiona la señal.
DIGITAL	Filtros adaptativos	Situado entre los dos siguientes. Pérdida de datos hasta que el algoritmo se adapta a la señal.
	Filtros variantes en el tiempo	Óptimos para $f > 0,5$ Hz
	Aproximación con splines cúbicos	Es el método más efectivo para $f \leq 0,5$ Hz. Inconveniente: fuerte dependencia de la frecuencia cardíaca.

²⁴ C.R. Meyer and H.N. Keiser. Electrocardiogram baseline noise estimations and removal using cubic splines and state-space computation techniques. Computers and Biomedical Research, pages pp. 459–470, 1997.

²⁵ L. Sörnmo. Time-varying digital filtering of eeg baselinewander. Medical and Biological Engineering and Computers, pages pp. 503–508, 1993.

A la vista de las técnicas descritas y la literatura existente, se usa en cascada un filtrado analógico y posteriormente el método que más efectividad proporciona es el de los **splines cúbicos** dado que la frecuencia de variación de la línea base es de 0,5 Hz. No obstante, para casos en los que haya una gran actividad muscular y artefactos de movimiento como la prueba de esfuerzo, el **filtro adaptativo** es el más deseable. Cuando hay variaciones rápidas de la línea base, el método más adecuado es el **filtro variante en el tiempo**.

4.1.4 Criterios para medir la efectividad de los filtros.

A continuación se van a comentar una serie de medidas usadas para medir el grado de efectividad de los filtros citados.

4.1.4.1 Percentage Root Difference (PRD)

Se define como:

$$PRD = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (x(n) - \tilde{x}(n))^2}{\sum_{n=1}^N x^2(n)}} * 100$$

donde $x(n)$ es la señal original, $\tilde{x}(n)$ es la señal reconstruida, y N es el tamaño de la ventana sobre el cual se calcula el PRD. Cuanto menor es el error entre ambas señales, menor es el PRD, y mejor será el funcionamiento del algoritmo de filtración.

4.1.4.2 Relación señal a ruido (SNR)

Se define como:

$$SNR = 10 \log \left(\frac{\sum_{n=1}^N (x(n) - \bar{x})^2}{\sum_{n=1}^N (x(n) - \tilde{x}(n))^2} \right)$$

A mayor SNR, menor es la diferencia entre la señal original y la señal filtrada.

Hay una relación entre PRD y SNR:

$$SNR = -20 \log (0.01 PRD)$$

4.1.4.3 Coeficiente de cross-correlación

Al objeto de tener una medida que refleje el grado de similitud entre la señal original x y la filtrada, y , se emplea el coeficiente de correlación cruzada de Pearson, R_{xy} ,

$$R_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sqrt{C_{xx}C_{yy}}}$$

donde C_{xy} es la covarianza cruzada, x e y las señales a las que se quiere calcular los coeficientes. Cuando la relación entre x e y es perfectamente lineal, el coeficiente vale 1 ó -1. Cuando el coeficiente está próximo a 0, o no existe relación entre las variables analizadas, o bien la relación no es lineal.

4.1.4.4 Error cuadrático medio

Se define como:

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |x(n) - \tilde{x}(n)|^2$$

Cuanto más se acerque a cero este parámetro, mayor es la similitud entre ambas señales.

4.2 Extracción de características.

Una vez se ha hecho un tratamiento de la señal ECG, eliminando el ruido, la interferencia de red y corrigiendo la línea base, se procede a hacer la extracción de características, utilizando para ello un **método de aproximación poligonal**. Mediante esta técnica se conseguirá seguir reduciendo el ruido, disminuyendo la información tratada y por tanto el coste computacional será también menor.

El método consiste en hacer aproximaciones por tramos de tiempo. Se usan seis funciones: una constante, una recta, una función triangular, un trapecio, una función exponencial y una función senoidal. Una vez hecha la aproximación, se calcula el error cuadrático medio y se elige el menor.

Función	Definición
Constante	$f(Y(t)) = a$
Recta	$f(Y(t)) = a + b * t$
Exponencial	$f(Y(t)) = a * b t + c$
Senoidal	$f(Y(t)) = a * \sin(t + b) + c$
Triangular	$f(Y(t)) = \begin{cases} a + b * t & t \leq c \\ (a + 2 * b * c) - (b * t) & t \geq c \end{cases}$
Trapezoidal	$f(Y(t)) = \begin{cases} a + b * t & t \leq c_{start} \\ a + b * c_{start} & c_{start} \leq t \leq c_{stop} \\ (a + b * c_{start} + b * c_{stop}) - (b * t) & t \geq c_{stop} \end{cases}$

Ilustración 18: parámetros variables de las funciones utilizadas

Se emplean dos técnicas diferentes: se aplica cada uno de las seis funciones y se escoge la de menor error cuadrático medio, o bien, se hace en cada tramo una combinación de las seis funciones y se escoge la de menor error cuadrático medio.

4.3 Segmentación y normalización.

Para analizar la señal electrocardiográfica es de suma importancia aislar cada una de sus partes, en duración y amplitud, para poder hacer su clasificación y diagnóstico. De una buena segmentación y normalización de la onda depende el diagnóstico certero posterior. Por ejemplo, una contracción auricular más lenta de lo normal provoca un segmento PQ largo y la duración de QRS también, o el ritmo cardíaco se puede calcular a partir de los intervalos RR, o determinadas arritmias e infartos tienen que ver con el tamaño de la onda T y su forma, o la pendiente de ST.

4.4 Reducción de características

En esta etapa se pretende extraer de los datos el menor número de características que nos proporcione la mayor cantidad de información. En la literatura especializada aparecen una gran cantidad de métodos para extraer las características que se escapan del alcance de este trabajo.

5 ESTUDIO PRÁCTICO

Tras el recorrido teórico por los diferentes métodos de tratamiento de la señal ECG, se aborda, como ejemplo práctico, el objetivo de calcular los latidos a partir de la recepción de una onda, lo cual va a servir como excusa para mostrar la forma práctica de filtrar la señal, cambiando entre diferentes técnicas y estudiar el comportamiento de la onda con sus interferencias.

5.1 Formación de la señal ECG

Tal como se aprecia en la siguiente ilustración, y se comentaba en el apartado 2.4, la onda ECG tiene una forma característica que en la práctica se tipifica mediante componentes, segmentos e intervalos. En concreto, para el ejemplo práctico que se está tratando, interesa apreciar la onda P, complejo QRS, ondas T y U.

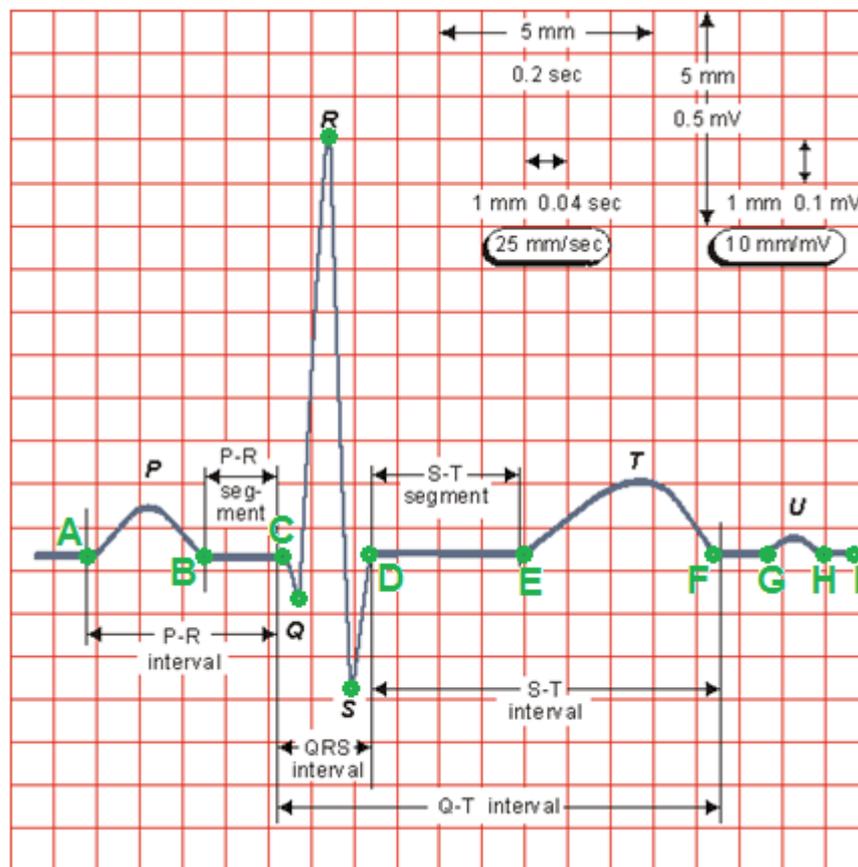


Ilustración 19: onda ECG donde se muestran los diferentes componentes.

A partir de la representación gráfica, se va a estimar una nube de puntos para lo cual se divide el periodo en muestras de longitud 0.1 mm. Resaltar que en las divisiones

horizontales corresponde cada cuadrícula de 1mm de longitud a un periodo de tiempo de 0.04 segundos, y la cuadrícula vertical de 1mm de longitud, con una tensión de 0.1mV.

Coordenadas de los puntos:

A(0,0), B(2.8,0), C(4.5,0), D(6.6,0), E(10.2,0), F(14.7,0), G(15.7,0), H(16.7,0), I(25,0), P(1.4,1.2), Q(5.1,-0.8), R(5.6, 9.6), S(6.3, -3), T(12.7,1.8), U(16.2, 0.5)

ONDA APB: aproximación mediante una parábola invertida.

$$V = -0.61t^2 + 1.71t, \text{ para } t \in [0,2.8]$$

RECTAS BC, DE, FG y HI:

$$V = 0$$

RECTA CQ:

$$V = -1.33t + 5.99 \text{ para } t \in [4.5,5.1]$$

RECTA QR:

$$V = 20.8t - 106.88 \text{ para } t \in [5.1,5.6]$$

RECTA RS:

$$V = -18t + 110.4 \text{ para } t \in [5.6,6.3]$$

RECTA SD:

$$V = 10t - 66 \text{ para } t \in [6.3,6.6]$$

ONDA ETF: aproximación mediante una parábola invertida.

$$V = -0.36t^2 + 8.964t - 53.98 \text{ para } t \in [10.2,14.7]$$

ONDA GUH: aproximación mediante una parábola invertida.

$$V = -2t^2 + 64.8t - 524.38 \text{ para } t \in [15.7,16.7]$$

De esta forma, se va a suponer un individuo sano con unas pulsaciones de 60 latidos/minuto. Dado que en cada onda ECG hay un latido, y que dura 25mm(=25*0.04=1 seg), y se hacen cortes de 0.1mm, se obtendrá una nube de puntos de:

$$10 \cdot 25 \cdot 60 = 15.000 \text{ puntos/minuto}$$

El resultado se mete en una hoja Excel que se llama “**CurvaECG.xlsx**”.

	A	B	
1	Tiempo	Tension	
2	0	0	
3	0,1	0,1649	
4	0,2	0,3176	
5	0,3	0,4581	
6	0,4	0,5864	
7	0,5	0,7025	
8	0,6	0,8064	
9	0,7	0,8981	
10	0,8	0,9776	
11	0,9	1,0449	
12	1	1,1	
13	1,1	1,1429	

Ilustración 20: hoja Excel con los datos de la onda ECG.

5.2 Captura de la onda simulada

La primera parte del algoritmo en MATLAB va a ser la captura de la nube de puntos. En la siguiente ilustración se muestran las instrucciones y el resultado gráfico obtenido:

```
function carga_de_datos()  
    cargaDatos('CurvaECG.xlsx');  
end  
  
function cargaDatos(nombreArchivo)  
    tiempo=xlsread(nombreArchivo,1,'A2:A15002');  
    tension=xlsread(nombreArchivo,1,'B2:B15002');  
    plot(tiempo,tension);  
end
```

Ilustración 21: carga de datos en MATLAB.

La onda ECG simulada en un latido es (250 puntos):

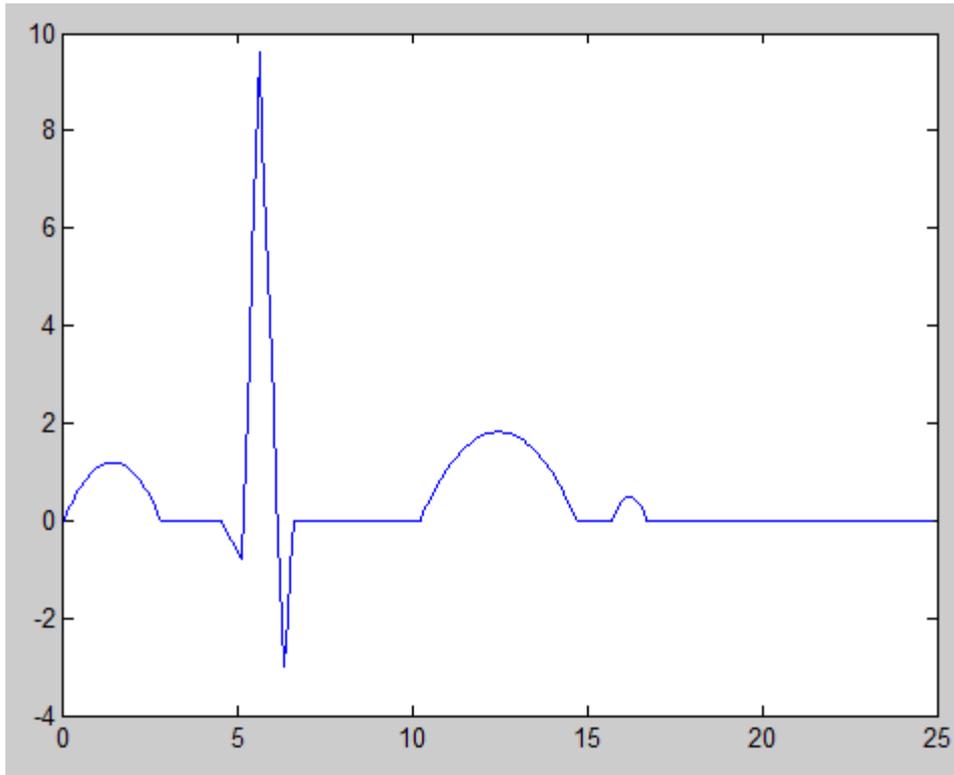


Ilustración 22: representación gráfica de la onda ECG simulada.

Para los 60 latidos (15.000 puntos), la onda simulada es como se muestra en la siguiente ilustración.

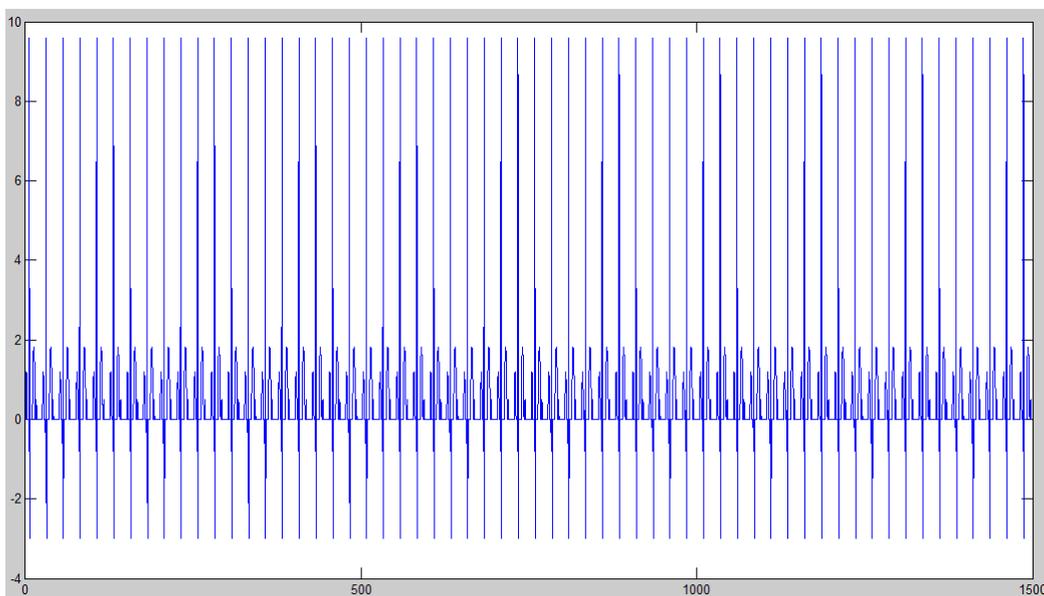


Ilustración 23: representación gráfica de la onda ECG simulada durante 1 minuto.

5.3 Ruido

Una vez que se ha reconstruido la señal simulada se va a proceder a alterarla mediante ruido. De esta forma, se van a distinguir dos tipos de señales:

- Señales senoidales con diferentes frecuencias.
- Ruido blanco gaussiano (media cero y desviación típica σ).

Las señales simulan el efecto de aparatos eléctricos (100 kHz a 1 MHz), interferencias con la red eléctrica (50 ó 60 Hz), efecto capacitivo entre el electrodo y la piel (0.05 Hz), variaciones de la línea base (0.3 Hz), movimientos lentos del paciente que provocan movimientos de los electrodos (0.07 Hz y amplitud del 20% del pico máximo), etc.

Ruido blanco gaussiano: el ruido blanco es una señal aleatoria que se caracteriza por el hecho de que sus valores de señal en dos tiempos diferentes no guardan correlación estadística. Se denomina gaussiano porque su función de densidad espectral responde a una distribución normal.

Se va a sumar a la señal principal ruidos con relaciones señal-ruido (SNR) diferentes. Así, cuando la potencia de la señal y del ruido se miden a través de la misma impedancia, la expresión de SNR puede calcularse como cociente del cuadrado de las amplitudes de la señal principal y la señal con ruido, es decir:

$$SNR = \frac{P_S}{P_R} = \left(\frac{R_S}{R_R}\right)^2$$

donde R_S y R_N son las amplitudes RMS de las señales. De esta forma se han representado ruidos para el 10, 20 y 30% de la amplitud de la onda principal:

$$SNR = 10\log_{10}\left(\frac{1}{0.1}\right)^2, SNR = 10\log_{10}\left(\frac{1}{0.2}\right)^2, SNR = 10\log_{10}\left(\frac{1}{0.3}\right)^2$$

```
function carga_de_datos()
    cargaDatos('CurvaECG.xlsx');
    %rsn=10*log10((1/0.1)^2);
    %rsn=10*log10((1/0.2)^2);
    rsn=10*log10((1/0.3)^2);
    tension=awgn(tension,rsn);
    plot(tiempo(1:250),tension(1:250));
    cad=strcat('ECG simulada + ruido gaussiano (snr:',mat2str(floor(rsn*100)/100),' dB)');
    title(cad);

function cargaDatos(nombreArchivo)
    tiempo=xlsread(nombreArchivo,1,'A2:A15002');
    tension=xlsread(nombreArchivo,1,'B2:B15002');
    %plot(tiempo,tension);
end
end
```

Ilustración 24: algoritmo para la simulación de ruido blanco gaussiano de diferentes niveles SNR

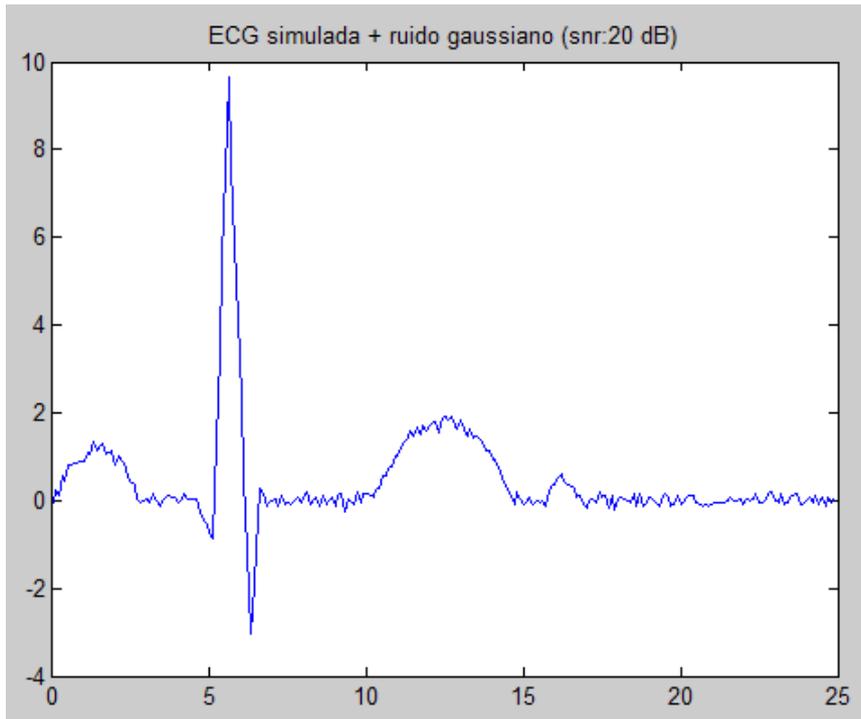


Ilustración 25: señal ECG con ruido SNR de 20dB

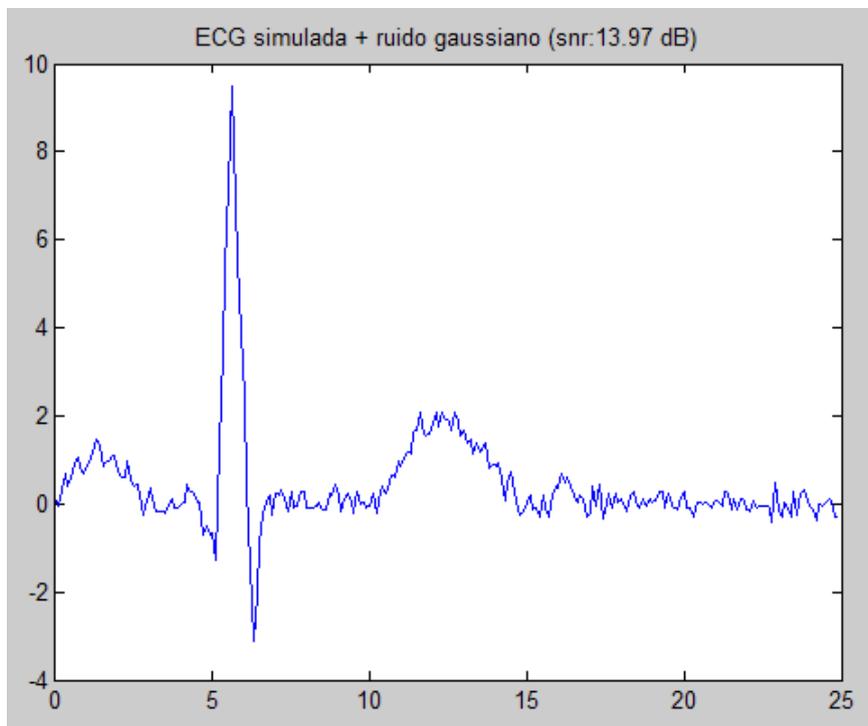


Ilustración 26: señal ECG con ruido SNR de 13.97 dB

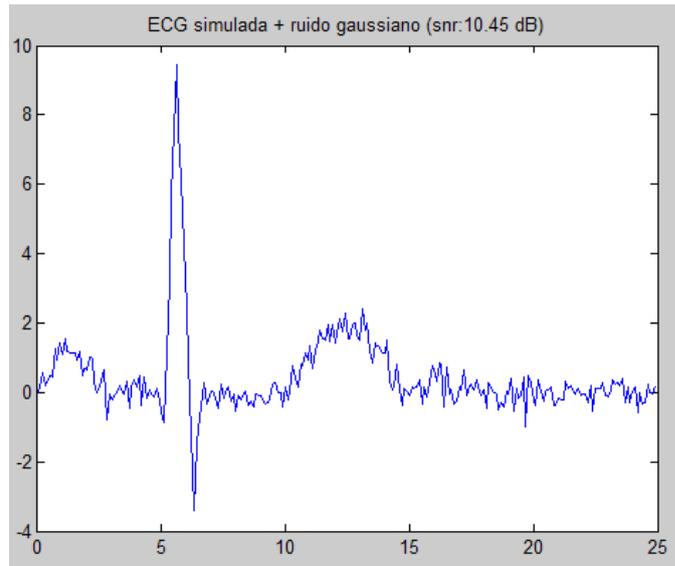


Ilustración 27: señal ECG con ruido SNR de 10.45 dB

Señal senoidal: este tipo de interferencia simula varias situaciones típicas en la toma del ECG como las que indicábamos al comienzo del punto 5.3. La escala va desde los 0.05 Hz hasta 1 MHz. El algoritmo usado es el de la siguiente ilustración.

```
function senal_seno()
    cargaDatos('CurvaECG.xlsx');
    frec=50;
    seno=calculo_frecuencia(frec);
    seno=seno';
    senal=seno+tension(1:250);
    figure(1);
    subplot(2,1,1);
    plot(tiempo(1:250),senal(1:250));
    cad=strcat('ECG simulada + ruido senoidal (frecuencia:',mat2str(floor(frec*100)/100),' Hz');
    title(cad);
    subplot(2,1,2);
    l=0:0.1:24.9;
    plot(l,seno);
    cad=strcat('Ruido senoidal (frecuencia:',mat2str(floor(frec*100)/100),' Hz');
    title(cad);
    axis([0 25 -2 2]);

    %CÁLCULO DE LA FRECUENCIA
    function seno=calculo_frecuencia(fmax)
        l=0:0.1:24.9;
        seno=sin(2*pi*fmax*l*0.04);
    end

    function cargaDatos(nombreArchivo)
        tiempo=xlsread(nombreArchivo,1,'A2:A15002');
        tension=xlsread(nombreArchivo,1,'B2:B15002');
        %plot(tiempo,tension);
    end
end
```

Ilustración 28: algoritmo para la simulación del ruido provocado por una fuente senoidal de frecuencia f

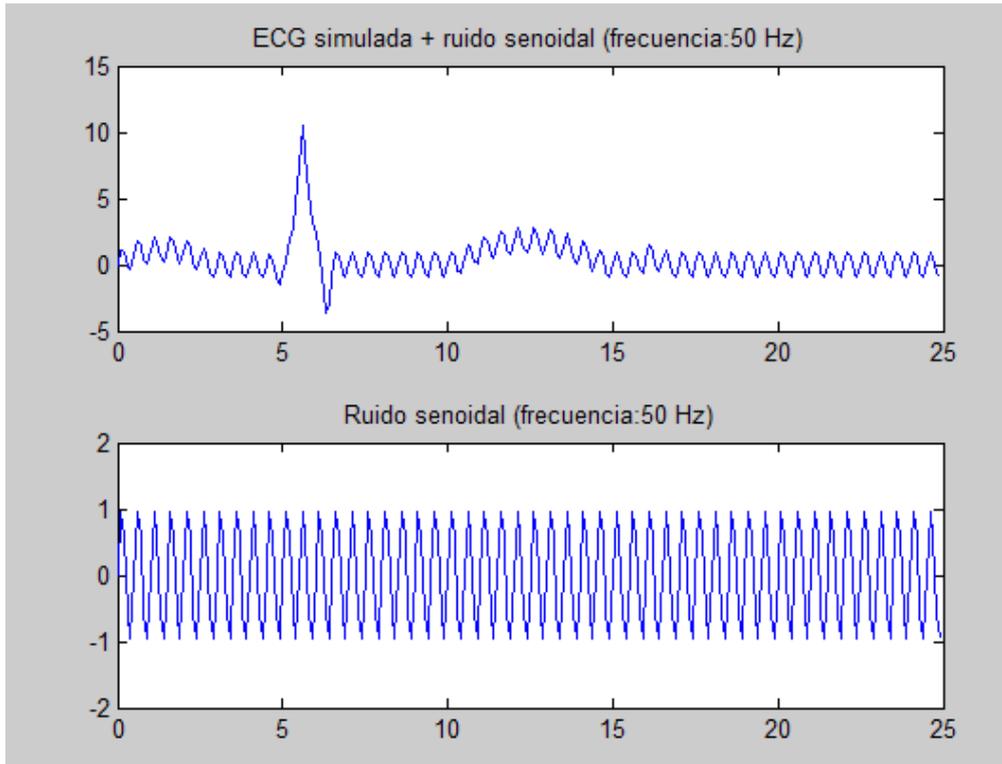


Ilustración 29: señal ECG simulada con ruido senoidal procedente de una fuente senoidal a 50 Hz

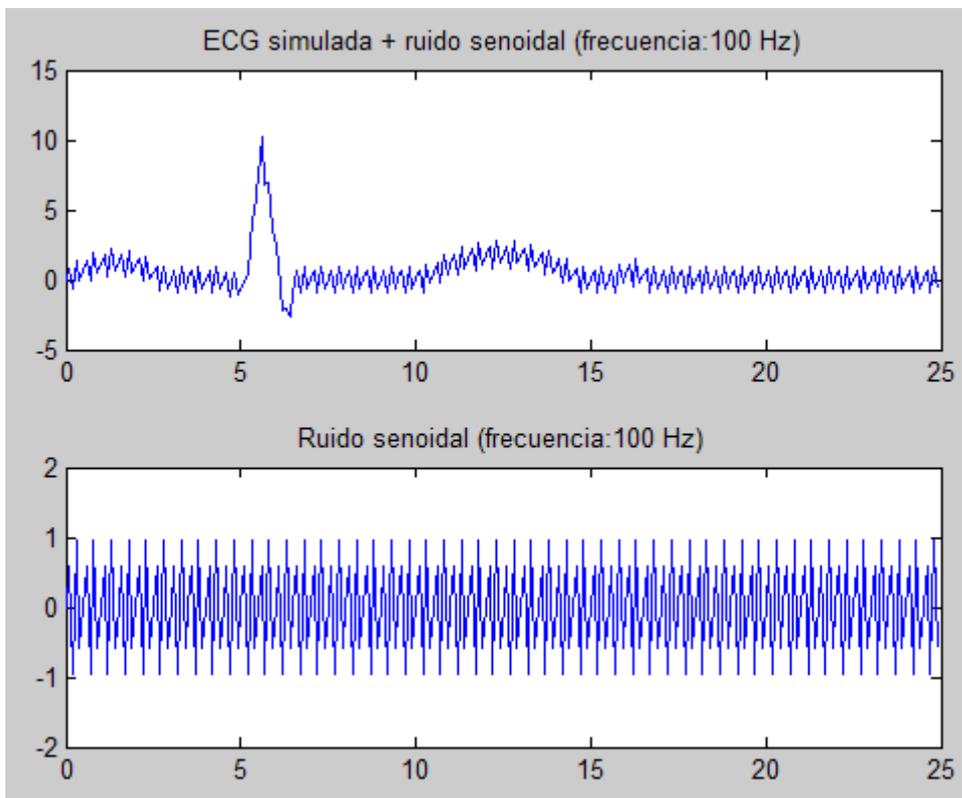


Ilustración 30: señal ECG simulada con ruido senoidal procedente de una fuente senoidal a 100 Hz.

5.4 Filtrado

El objetivo que persigue el filtrado es la eliminación del ruido manteniendo las características de la señal. Se presentan dos métodos comúnmente empleados: filtrado mediante filtros paso bajo, y filtrado mediante Wavelets.

5.4.1 Filtrado con filtro paso bajo

Esta técnica se basa en el diseño de un filtro paso bajo el cual elimina componentes frecuenciales altas, que generalmente se corresponden con señales interferentes en la captación de la señal.

Mediante la transformada rápida de Fourier se muestra cómo la señal simulada con ruido cuenta con una frecuencia de 50 Hz que se desea eliminar mediante el filtro paso bajo.

```
function fft_senal()
    cargaDatos('CurvaECG.xlsx');
    L=250;
    Fs=250;

    %RUIDO GAUSSIANO
    rsn=10*log10((1/0.1)^2);
    %rsn=10*log10((1/0.2)^2);
    %rsn=10*log10((1/0.3)^2);

    %RUIDO SENOIDAL
    frec=50;
    seno=calculo_frecuencia(frec);
    seno=seno';
    tensionR=seno+tension(1:250);

    %tension=tension-awgn(tension,rsn);

    f = Fs/2*linspace(0,1,NFFT/2+1);
    x=2*abs(Y(1:NFFT/2+1));

    plot(f,2*abs(Y(1:NFFT/2+1)))
    title('Espectro frecuencial de la onda simulada con ruido senoidal de 50 Hz')
    xlabel('Frecuencia (Hz)')
    ylabel('|Y(f)|')

    [pks,locs]=findpeaks(2*abs(Y(1:NFFT/2+1)))

    %CÁLCULO DE LA FRECUENCIA
    function seno=calculo_frecuencia(fmax)
        l=0:0.1:24.9;
        seno=sin(2*pi*fmax*l*0.04);
    end

    function cargaDatos(nombreArchivo)
        tiempo=xlsread(nombreArchivo,1,'A2:A15002');
        tension=xlsread(nombreArchivo,1,'B2:B15002');
        %plot(tiempo,tension);
    end
end
```

Ilustración 31: algoritmo para la detección de la frecuencia dominante a filtrar mediante el filtro paso bajo.

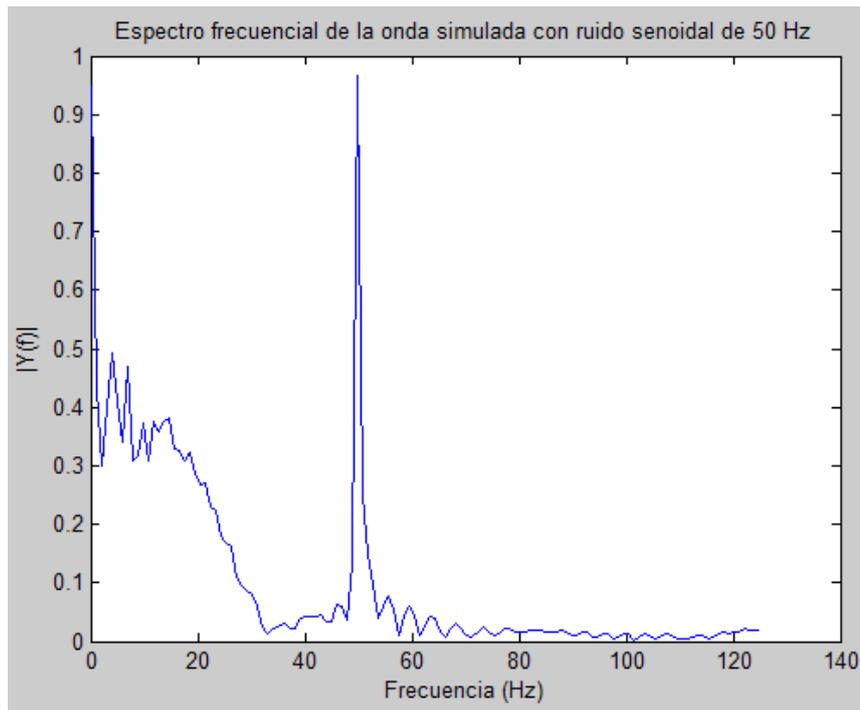


Ilustración 32: espectro frecuencial de la onda simulada con ruido senoidal de 50 Hz.

El ruido introducido mete una señal con una frecuencia dominante de 50 Hz. Se pretende diseñar un filtro paso bajo de Butterworth que elimine este armónico. Para ello, la función MATLAB que se encarga de parametrizar el filtro es:

```
fdesign.lowpass(Fp, Fst, Ap, Ast, x, y, t, m)
```

donde:

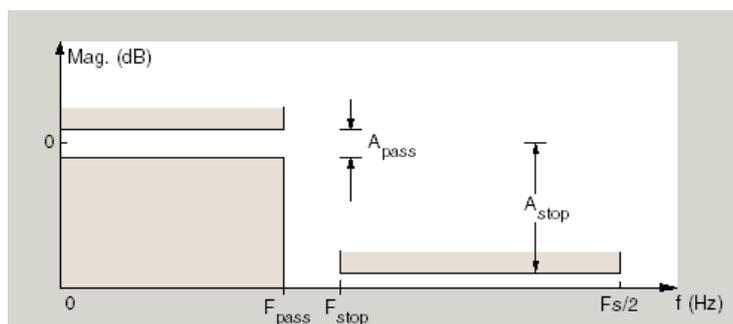


Ilustración 33: esquema de la curva de filtrado de un filtro paso bajo con sus parámetros característicos [26].

Fp:

²⁶ Ayuda de MATLAB R2014a

frecuencia al comienzo de la banda de filtración. Se especifica en unidades de frecuencia normalizada. También se le denomina F_{pass} .

Fst: frecuencia al final de la banda de filtración. Se especifica en unidades de frecuencia normalizada. También se le denomina F_{stop} .

Ap: cantidad de rizado permitido en la banda de filtración en decibelios. También se llama A_{pass} .

Ast: atenuación al final de la banda de filtrado. También se llama A_{stop} .

Dado que la frecuencia a filtrar es de 50 Hz, la frecuencia normalizada se define como el cociente entre la frecuencia en Hz y la mitad de la frecuencia de corte, que en este caso es de 250 muestras/segundo. Así:

$$F = \frac{50}{250/2} = 0.4$$

y los parámetros quedan:

$$F_p=0.2, F_{st}=0.4, A_p=0.1, A_{st}=80$$

El algoritmo en MATLAB sería el de la ilustración siguiente.

```
function filtrado_pasoBajo()
    cargaDatos('CurvaECG.xlsx');

    %RUIDO GAUSSIANO
    %rsn=10*log10((1/0.1)^2);
    %rsn=10*log10((1/0.2)^2);
    %rsn=10*log10((1/0.3)^2);
    %tension=awgn(tension,rsn);

    %RUIDO SENOIDAL
    frec=50;
    seno=calculo_frecuencia(frec);
    seno=seno';
    tensionR=seno+tension(1:250);

    senal_filtrada=filtrar_senal_con_filtros(tensionR(1:250));

    %FILTRADO DE LA SEÑAL MEDIANTE PASO BAJO|...
function senal_filtrada=filtrar_senal_con_filtros(senal_entrada)
    %Definimos los parámetros del filtro
    d = fdesign.lowpass('Fp,Fst,Ap,Ast',0.2, 0.4, 0.1, 80);
    %Diseñamos el filtro paso bajo
    f = design(d, 'butter');
    %Filtramos con la señal de entrada
    output1=filter(f,senal_entrada);
```

```
    %Dibujamos la señal de entrada y la señal filtrada
    figure(1);subplot(3,1,1);plot(tension(1:250));
    title('Señal original');
    subplot(3,1,2);plot(senal_entrada);
    title('Señal con ruido senoidal de 50 Hz')
    subplot(3,1,3);plot(output1,'r');
    title('Señal filtrada con filtro paso bajo')
    senal_filtrada=output1;
end

%CÁLCULO DE LA FRECUENCIA
function seno=calculo_frecuencia(fmax)
    l=0:0.1:24.9;
    seno=sin(2*pi*fmax*l*0.04);
end

function cargaDatos(nombreArchivo)
    tiempo=xlsread(nombreArchivo,1,'A2:A15002');
    tension=xlsread(nombreArchivo,1,'B2:B15002');
    %plot(tiempo,tension);
end
end
```

Ilustración 34: algoritmo para el filtrado de la señal simulada con ruido mediante un paso bajo de Butterworth.

En la siguiente ilustración se muestra el resultado gráfico del proceso de filtraje mediante el filtro paso bajo de Butterworth. Como puede verse, la señal con ruido presenta un rizado superpuesto con una frecuencia de 50Hz, el cual es filtrado para obtener la señal en rojo de la última gráfica.

La señal sufre una pérdida de ganancia y un retardo. Estos dos hechos no tienen efecto alguno sobre nuestro estudio y no afecta en nada.

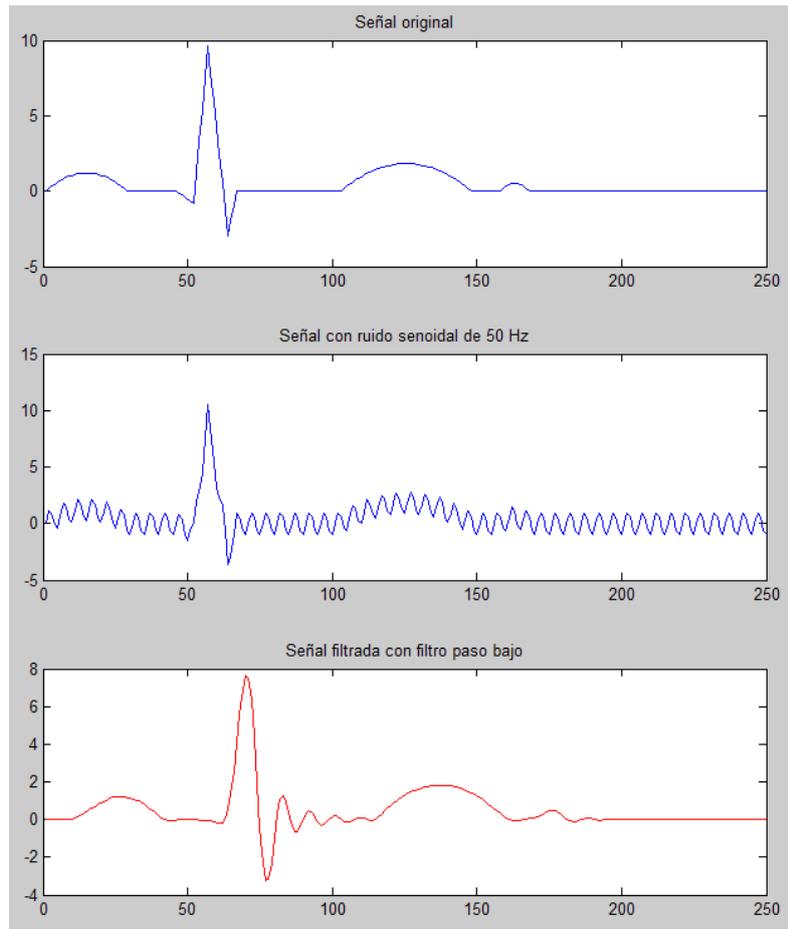


Ilustración 35: representación gráfica de la señal original, la señal con ruido, y la señal una vez se ha filtrado mediante el filtro paso bajo de Butterworth.

5.4.2 Filtrado mediante Wavelet

La segunda técnica de filtrado consiste en la aplicación de la transformada Wavelet (ver anexo). Dependiendo de las características particulares de cada familia Wavelet, los resultados que se obtendrán serán mejores o peores.

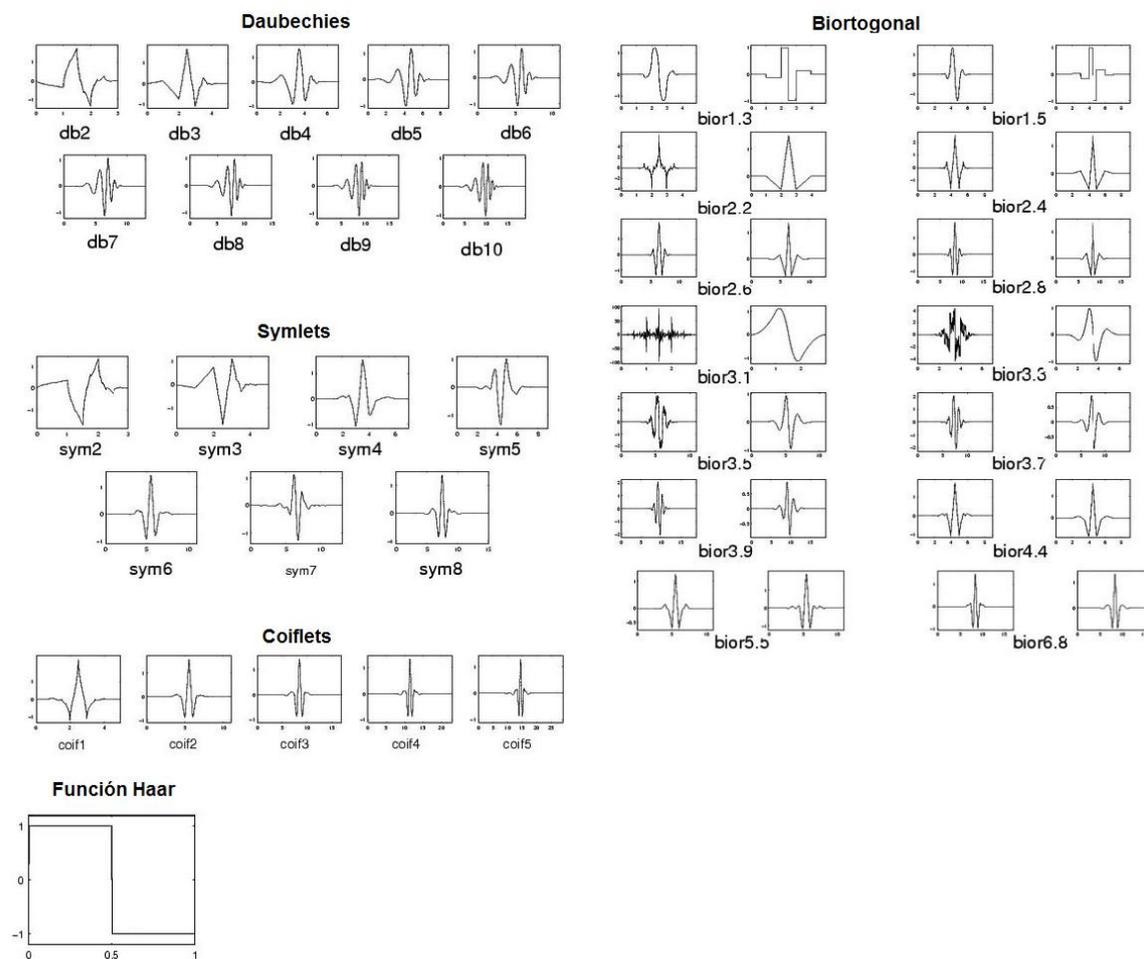


Ilustración 36: familias Wavelets [27]

A partir del algoritmo de la figura siguiente se han cruzado las diferentes familias con niveles del 1 al 5 para determinar qué familia es la que filtra mejor y en qué nivel. La forma numérica de comprobarlo es mediante la evaluación de la relación señal a ruido, SNR:

$$SNR = \frac{\text{Senal original}}{\text{Ruido}}$$

A la señal original simulada se le suma un ruido blanco gaussiano del 10%.

²⁷ <http://ceres.ugr.es/~alumnos/sigpro/cap4.html>

```
function filtrado_Wavelet()
    cargaDatos('CurvaECG.xlsx');

    %RUIDO GAUSSIANO
    rsn=10*log10((1/0.1)^2);
    %rsn=10*log10((1/0.2)^2);
    %rsn=10*log10((1/0.3)^2);
    senal_ruidosa=awgn(tension,rsn);

    senal_filtrada=filtrar_senal_con_Wavelet(senal_ruidosa(1:250));

    %Dibujamos la señal de entrada y la señal filtrada
    figure(1);subplot(3,1,1);plot(tension(1:250));
    title('Señal original');
    subplot(3,1,2);plot(senal_ruidosa(1:250));
    title('Señal con ruido gaussiano')
    subplot(3,1,3);plot(senal_filtrada,'r');
    title('Señal filtrada con Wavelet')

    %FILTRADO DE LA SEÑAL MEDIANTE WAVELET...
    function senal_filtrada=filtrar_senal_con_Wavelet(senal_entrada)
        % Descomponemos la señal en 7 niveles con la familia y parámetros wavelet:
        %w='haar';
        w='coif4'; |
        %w='db10';
        %w='bior6.8'
        m=1;
        %for m=1:1
            [c,l] = wavedec(senal_entrada,m,w);
            %reconstruimos la señal con x niveles
            senal_filtrada_wavelet = wrcoef('a',c,l,w,m);
            %Dibujamos la señal de entrada superpuesta a la señal filtrada
            %figure();plot(senal_entrada);hold on;plot(senal_filtrada_wavelet,'r');
            senal_filtrada=senal_filtrada_wavelet;
            numSNR=snr(tension(1:250),senal_filtrada-tension(1:250))
        %end
    end

    function cargaDatos(nombreArchivo)
        tiempo=xlsread(nombreArchivo,1,'A2:A15002');
        tension=xlsread(nombreArchivo,1,'B2:B15002');
        %plot(tiempo,tension);
    end
end
```

Ilustración 37: algoritmo para el filtrado de la señal mediante Wavelets usando diferentes familias con distintos niveles.

Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla.

Familia	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5
Haar	15,24	8,68	3,02	2,69	1,39
dB2	19,11	12,00	9,15	1,95	1,64
dB3	20,78	17,13	3,93	2,45	1,33
dB4	21,46	14,05	8,31	3,50	1,22
dB5	21,83	14,10	4,76	2,10	1,72
dB6	21,36	17,63	6,78	3,14	1,65
dB7	21,84	16,79	5,71	2,97	1,19
dB8	21,75	15,41	5,72	2,19	1,55
dB9	22,15	17,19	6,80	3,12	1,83
dB10	21,95	17,62	4,99	2,79	1,34
sym2	19,09	11,99	9,14	1,94	1,61
sym3	20,28	17,00	3,92	2,45	1,34
sym4	21,12	14,55	4,43	2,67	1,22
sym5	21,30	14,35	8,95	2,11	1,79
sym6	21,69	16,35	4,12	3,10	1,23
sym7	21,49	18,12	8,52	2,73	1,39
sym8	21,84	15,96	6,44	3,33	1,22
coif1	19,80	11,24	5,33	2,00	1,30
coif2	21,37	13,80	5,81	3,48	1,21
coif3	21,62	15,04	5,97	3,04	1,16
coif4	22,01	15,84	5,94	2,25	1,29
coif5	21,86	16,29	6,03	2,56	1,54
bior1.1	15,26	8,68	3,01	2,69	1,39
bior1.3	15,09	9,92	3,47	2,40	1,32
bior1.5	15,07	8,21	7,38	2,47	1,34
bior2.2	20,91	12,84	5,89	2,00	1,38
bior2.4	20,83	16,65	3,70	2,70	1,32
bior2.6	20,73	12,99	5,47	3,43	1,24
bior2.8	20,55	16,67	10,37	3,81	1,18
bior3.1	20,90	14,23	2,28	1,93	0,84
bior3.3	21,12	15,26	5,83	2,49	1,27
bior3.5	21,23	16,55	8,40	2,25	1,50
bior3.7	21,35	16,16	5,31	2,20	1,68
bior3.9	21,22	16,57	4,24	2,26	1,78
bior4.4	21,30	17,61	3,93	2,79	1,35
bior5.5	21,70	15,10	4,39	3,09	1,31
bior6.8	22,02	17,97	9,04	3,38	1,20

Ilustración 38: familias de Wavelets por niveles.

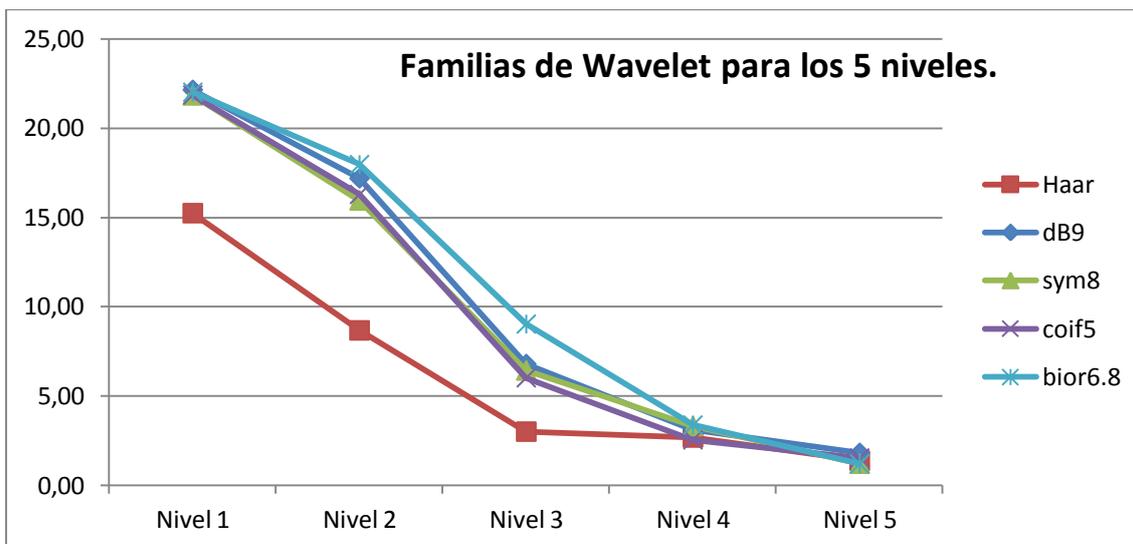


Ilustración 39: familias de Wavelets para los 5 niveles. Se ha elegido de cada familia el que daba un valor de SNR mayor para el nivel 1.

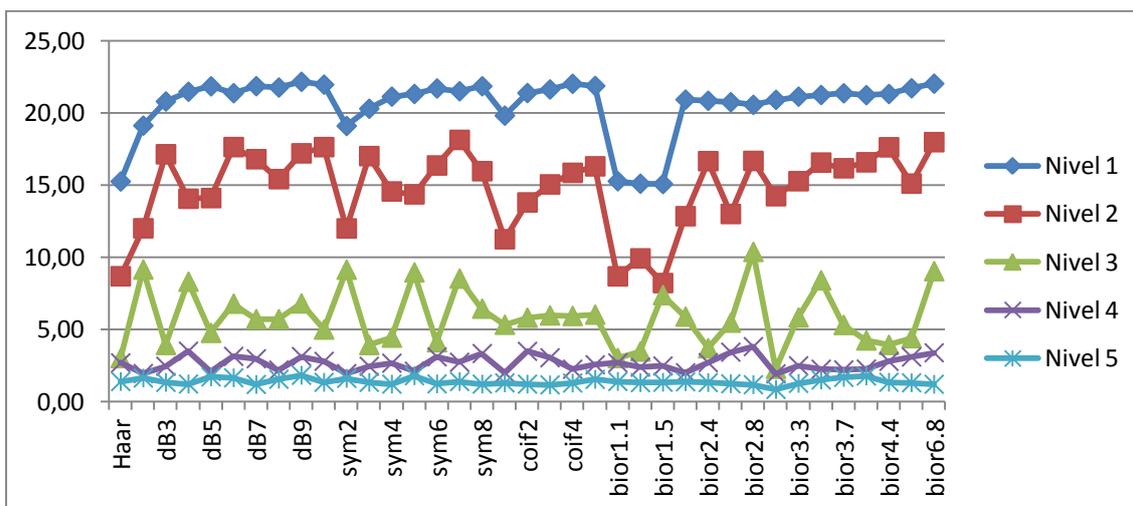


Ilustración 40: niveles por familias de Wavelets

Como puede apreciarse en la figura, la familia de curvas de Daubechies de orden 9 resulta ser la que tiene un nivel de eliminación del ruido mayor.

Se puede ver de forma gráfica la diferencia que hay entre una familia Daubechies 9 y una Haar por ejemplo, para un mismo nivel.

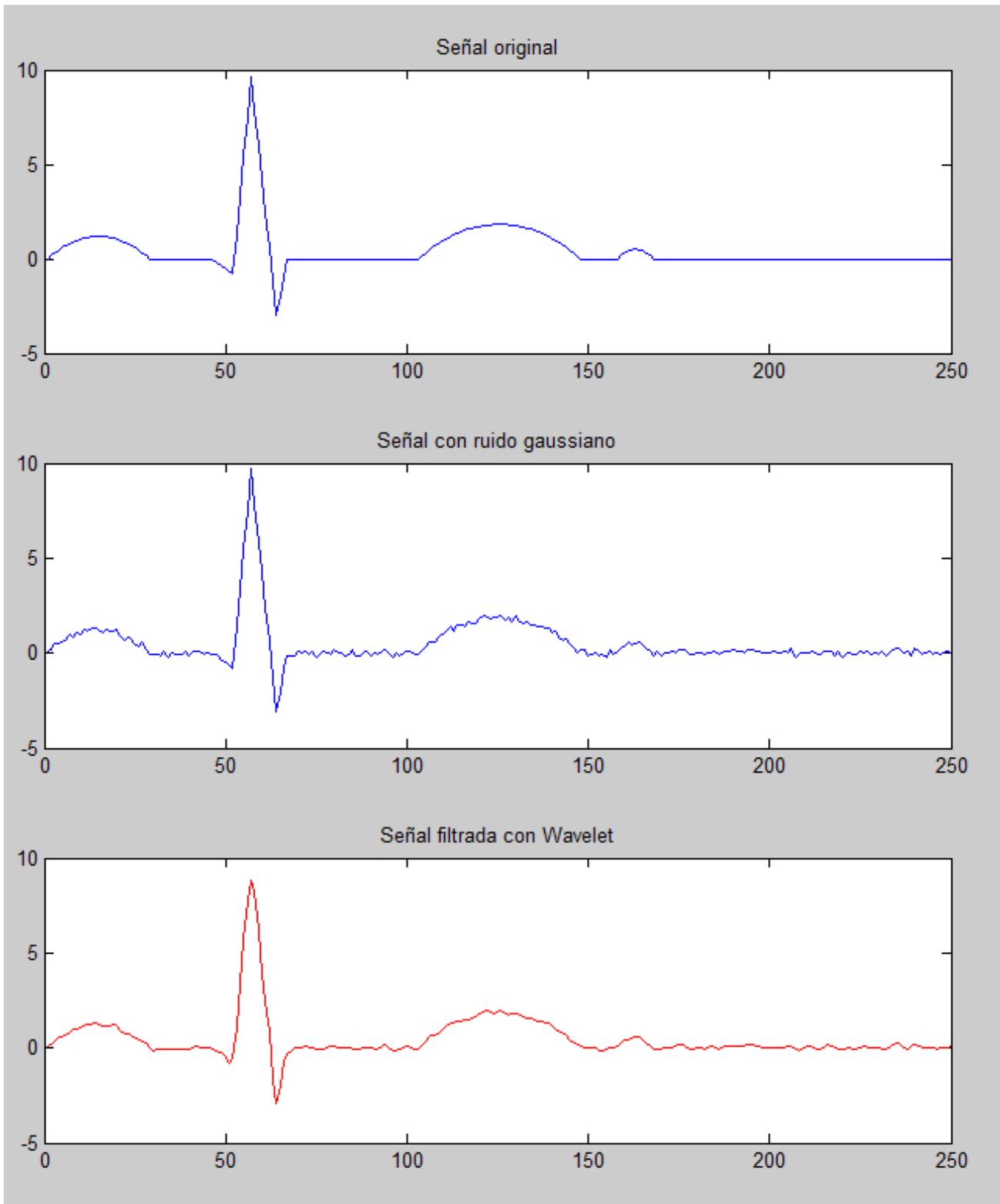


Ilustración 41: filtrado mediante Daubechies 9

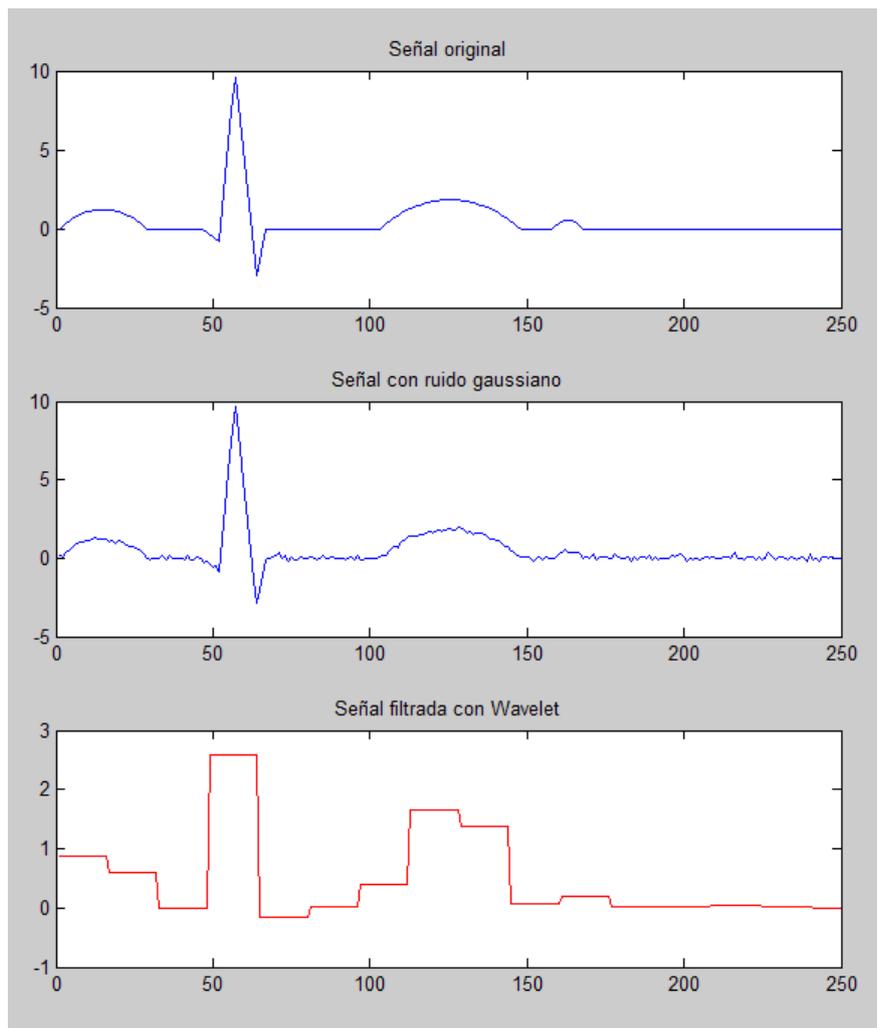


Ilustración 42: filtrado de la señal mediante la familia Haar en nivel 3. Se puede ver que la reconstrucción de la curva hace perder la característica de la señal.

5.4.3 Comparación de ambas técnicas de filtrado

Se comparan ambas técnicas desde tres puntos de vista diferentes:

A. Desde el punto de vista temporal.

Tal como se decía anteriormente, la señal filtrada mediante filtros paso bajo sufre un retardo y una pérdida de ganancia, lo cual no tiene efecto alguno sobre el objetivo que se persigue, que es la extracción de las características de la señal.

Además, la transformada de Wavelet introduce mayor cantidad de fluctuaciones temporales y por tanto una reducción del ruido menos eficiente.

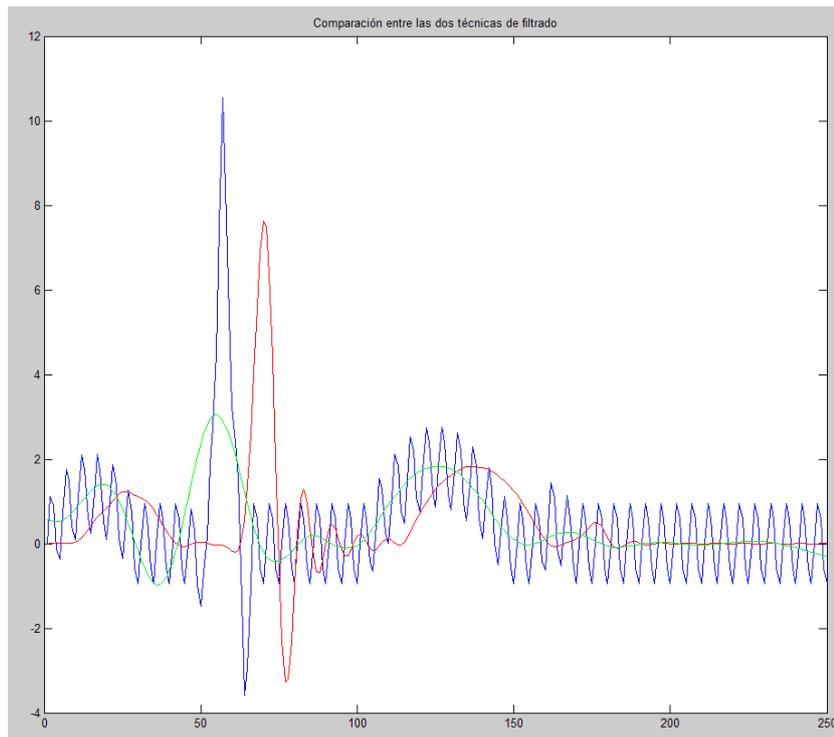


Ilustración 43: comparación entre las dos técnicas de filtrado. En azul la señal original ruidosa, en verde la señal filtrada mediante Wavelet (db9 con nivel 4), y en rojo la señal filtrada mediante un filtro paso bajo.

B. Comparación de los espectros de las señales filtradas

Si se aplica a la señal ruidosa (azul), a la señal filtrada mediante filtro paso bajo (roja) y a la señal filtrada mediante filtro Wavelet (verde), se observa como la señal ruidosa evidentemente tiene un mayor componente de armónicos que las señales filtradas. También se observa como el filtro paso bajo logra una mejor eliminación de las altas frecuencias.

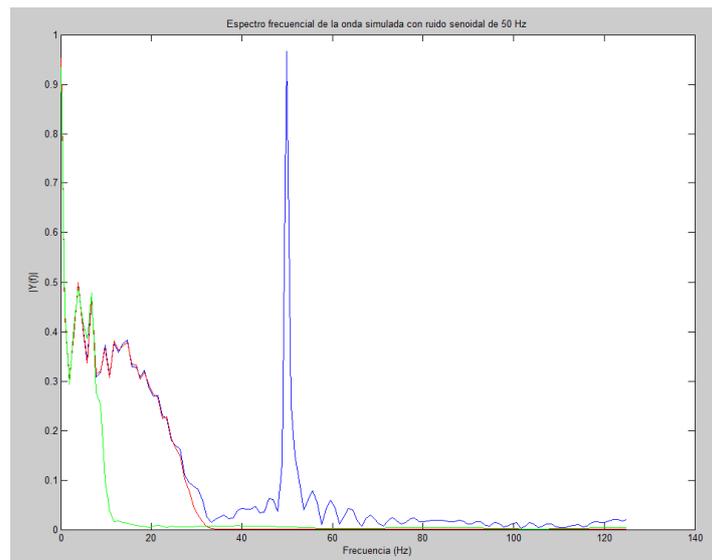


Ilustración 44: espectro frecuencial de la onda ruidosa (azul), de la onda filtrada mediante paso bajo (roja) y filtrada mediante Wavelet (verde)

En cuanto a las frecuencias comprendidas en el rango 10-35 Hz, se observa que el filtro paso bajo tiene amplitudes mayores que el filtro de Wavelet. La caída de la curva en el filtro de Wavelet tiene más pendiente que la del filtro paso bajo, con lo cual filtra mejor en este rango de frecuencias.

C. Tiempo de ejecución.

Otro de los aspectos a tener en cuenta en la elección de la técnica de filtrado es el esfuerzo de computación empleado por cada una de las técnicas. De esta forma,

	Tiempo (mseg)
Filtro paso bajo	32.08
Filtro Wavelet Daubechies 9 nivel 4	146.38

Y la técnica de filtrado mediante paso bajo requiere un esfuerzo de computación de aproximadamente la quinta parte que el filtrado Wavelet.

En conclusión se ve que la técnica de filtrado paso bajo requiere menos esfuerzo de computación, filtra peor a bajas frecuencias y mejor a altas frecuencias, y presenta un retardo de la señal y una pérdida de ganancia. Además la técnica de Wavelet presenta una reducción del ruido menos eficiente por introducir mayor cantidad de fluctuaciones temporales.

5.5 Detección del punto R y cálculo de latidos

El complejo QRS²⁸ corresponde a la corriente eléctrica que causa la contracción de los ventrículos derecho e izquierdo (despolarización ventricular), la cual es mucho más potente que la de las aurículas y compete a más masa muscular, produciendo de este modo una mayor deflexión en el electrocardiograma.

La onda R es la primera deflexión positiva del complejo QRS y en la imagen clásica del ECG, es la de mayor tamaño. Uno de los principales y más sencillos usos que se le da a la detección del máximo R es el conteo de la frecuencia cardíaca. Para ello, durante un minuto se cuentan los máximos R que hay en el ECG y se deducen de ahí los latidos/min que tiene un individuo. La taquicardia se considera cuando el número de latidos está por encima de los 100 latidos/min.

En nuestra muestra simulada se ha elegido un ECG de un individuo normal con 60 latidos/min. Mediante el siguiente algoritmo y el apoyo de MATLAB, se determina el

²⁸ http://es.wikipedia.org/wiki/Electrocardiograma#Complejo_QRS

número de latidos de la onda ECG simulada de entrada a la que se le ha añadido un ruido blanco gaussiano.

```
function calculo_latidos
    cargaDatos('CurvaECG.xlsx');
    tension=awgn(tension,1,'measured');
    ventana=250;
    j=1;

    calculaR_total(ventana,tiempo,tension);

    %CÁLCULO DE R Y EL NÚMERO DE LATIDOS...
function calculaR_total(ventana,tiempo,tension)
    j=1;
    for i=1:250:15000
        [picoTiempo,picoTension]=calculaR(tiempo(i:i+ventana),tension(i:i+ventana));
        R(j,1)=picoTiempo;
        R(j,2)=picoTension;
        j=j+1;
    end
    PrimerPicoR_Tiempo=R(1,1)
    PrimerPicoR_Tension=R(1,2)
    NumeroDeLatidos=size(R);
    NumeroDeLatidos=NumeroDeLatidos(1)
end

function [picoTiempo,picoTension]=calculaR(tiempo,tension)
    [pks,locs]=findpeaks(abs(tension));
    maxTension=pks(1);
    maxTiempo=locs(1);
    for i=1:length(pks)
        if(pks(i)>maxTension)
            maxTension=pks(i);
            maxTiempo=tiempo(locs(i));
        end
    end
    picoTension=maxTension;
    picoTiempo=maxTiempo;
end

function cargaDatos(nombreArchivo)
    tiempo=xlsread(nombreArchivo,1,'A2:A15002');
    tension=xlsread(nombreArchivo,1,'B2:B15002');
    %plot(tiempo(1:250),tension(1:250));
end
end
```

Ilustración 45: cálculo del número de latidos a partir de la onda ECG simulada.

6 RESULTADOS

El análisis de la curva ECG constituye en la actualidad unos de los pilares sobre el que se sustenta el diagnóstico clínico de enfermedades cardíacas, resultando de especial importancia los resultados arrojados por el análisis de la misma, los cuales deben ser rigurosos y certeros, toda vez que las conclusiones que se extraigan a partir de la extracción de las características de la curva sirven al clínico para dictaminar y enjuiciar la cardiopatía en estudio. De ahí la necesidad de ser muy críticos con los diferentes métodos y exigentes a la hora de extraer conclusiones.

En el presente trabajo, tras hacer un recorrido somero por las diferentes técnicas de filtrado, se ha simulado la onda electrocardiográfica para sacar conclusiones de dos técnicas de filtrado comúnmente empleadas en la práctica: el filtro paso bajo de Butterworth y el análisis por la transformada discreta de Wavelet (DWT). El lenguaje de programación empleado ha sido MATLAB R2014a.

El programa comienza haciendo la carga de los 15.000 puntos que conforman la señal ECG simulada. Se ha cogido a un individuo ideal sano con 60 latidos/minuto. Cada segundo se produce un latido que se muestrea en intervalos de 0.04s, obteniéndose 250 muestras por segundo.

El ruido se introduce mediante dos técnicas diferentes: ruido senoidal de diferentes frecuencias, y ruido blanco gaussiano.

Para el estudio del filtrado mediante Wavelets, se han recorrido 37 familias de curvas de Wavelets (ondículas) al objeto de ver el comportamiento que tenía el filtro frente al ruido. De todas estas familias analizadas resulta la de **Daubechies 9 con nivel 4** donde se encuentra un mejor comportamiento, resultado que se arroja a partir del análisis de la relación señal a ruido.

En el filtrado con filtro paso bajo de Butterworth, los resultados muestran un retardo importante en la curva y sobre todo una gran pérdida de ganancia. Su comportamiento frente a las frecuencias altas es mejor que el que realiza el método de las Wavelets, sin embargo, el comportamiento en bajas frecuencias es mejor en este caso que con los filtros paso bajo.

Otro de los aspectos importantes a tener en cuenta es el esfuerzo de computación requerido en ambos casos, siendo mucho más exigente en el caso de filtrado mediante Wavelets (casi cinco veces).

Por otra parte, las fluctuaciones temporales que provoca el filtrado de Wavelet en la onda hace que, desde este punto de vista, resulte más apropiado el uso de filtrado paso bajo.

Como aplicación directa de la detección de los puntos característicos de la curva, se ha desarrollado un algoritmo para el cálculo del punto R, dado que su recuento produce precisamente el número de latidos por minuto del individuo. El punto R aparece sólo una vez en cada latido.

Finalmente comentar que, si bien en el presente trabajo sólo se ha puesto una etapa de filtrado paso bajo, en la realidad se colocan en cascada diferentes etapas, resultando un tiempo de computación mucho mayor que el de Wavelet. Pese a ello, es preferible el filtrado en cascada con filtros paso bajo dado que se sacrifica el esfuerzo de computación frente a la calidad de la señal recibida.

¿Por qué se han elegido estos filtros y cuál se recomienda?

Como demostración práctica del efecto que realiza el filtrado sobre la onda afectada por el ruido, se ha simulado mediante MATLAB **un filtro paso bajo de Butterworth**. Este filtro tiene una aproximación al filtro ideal bastante buena, consiguiendo una salida casi plana hasta la frecuencia de corte (banda pasante) y se aproxima a cero en la banda rechazada. Se trata de un filtro con una caída lenta, lo que implica aumentar el orden del mismo para mejorar su selectividad. La respuesta en fase es muy lineal en la banda pasante (por lo que el retardo de todas las componentes es homogéneo). MATLAB toma el orden del filtro adecuado para adaptarse a los requerimientos de las bandas de paso y rechazo.

En cuanto al **filtrado mediante la transformada de Wavelet**, aunque introduce fluctuaciones temporales, filtra mejor a frecuencias bajas, más habituales en la captación de la onda ECG. Se han probado diversas familias llegando a la conclusión de que las curvas de Daubechies de orden 9 son las que presentan eliminaciones de ruido mayores.

7 CONCLUSIONES

7.1 Conclusiones generales

En el trabajo presente se han recopilado los diferentes métodos existentes en la literatura y que están implicados en las diferentes etapas del procesamiento de la señal electrocardiográfica.

Previo al muestreo de la señal, se han analizado métodos para la reducción del ruido basados en filtrados clásicos, fundamentalmente filtros paso bajo. Una vez realizado el muestreo y la cuantificación, se muestran diferentes técnicas, filtros de media móvil, promedio de latidos, aproximación mediante funciones y basados en la transformada de Wavelet. En cuanto a la reducción de las interferencias de la red, dado que la frecuencia es exacta y conocida, el método planteado mediante el uso de un filtro Notch, previo al muestreo, da resultados muy satisfactorios. Para la reducción de las variaciones de la línea base, previo al muestreo, se han visto métodos basados en filtros clásicos, y tras el muestreo, filtros adaptativos, aproximación mediante funciones (transformada de Wavelet) y filtros variantes en el tiempo.

Como estudio práctico se ha tomado una nube de puntos que simulan una señal ECG normal, sin cardiopatías, a la que se le someten diferentes niveles de ruido al objeto de ver el comportamiento de los diferentes filtros. Desde el punto de vista temporal con el filtro paso bajo la señal sufre retardos y una pérdida de ganancia (esta última no tiene efectos sobre la extracción de las características). Desde el punto de vista espectral, el filtrado con Wavelet es más efectivo a bajas frecuencias, si bien el esfuerzo computacional también es unas cuatro veces superior al filtrado mediante el paso bajo. Dado que el rango de frecuencias donde habitualmente se genera el ruido, las interferencias y las variaciones de la línea base es bajo, es más eficiente la transformada de Wavelet en el objetivo de reducción aunque requiere mayores esfuerzos computacionales. En la realidad lo que se hace es situar en cascada ambos modelos de filtraje.

Como aplicación práctica de la detección de las características de la red se ha calculado el número de latidos a partir del conteo de pulsos de la señal electrocardiográfica, utilizando para ello una función MATLAB que permite hacer el recuento de los picos de una señal.

7.2 Conclusiones personales

Este Trabajo Fin de Carrera ha resultado especialmente complicado desde el punto de vista de la definición de objetivos y demostración práctica de los mismos. Al ser el estudio de la onda ECG fundamental para la detección de cardiopatías del corazón, el número de estudios y trabajos de investigación existentes en la literatura es muy amplio. La razón fundamental es que se pretende manejar, a través del cálculo computacional y la electrónica, la extensa variabilidad de la onda capturada debido a fenómenos externos de ruido, interferencias y otras circunstancias que en algunos casos llegan a aparecer incluso de forma aleatoria (por ejemplo las provocadas por el movimiento de los electrodos como consecuencia del movimiento del paciente). La complejidad es tal que en los últimos trabajos publicados se tratan métodos fundamentados en la redes neuronales, cadenas de Markov, etc., los cuales exceden con mucho el propósito del trabajo, que no es otro que servir de fundamento en el inicio del estudio de la problemática asociada a la captación de la onda ECG.

Por otra parte, se consideró muy interesante completar el trabajo con un caso práctico que pusiera de relieve cuestiones planteadas desde el punto de vista teórico/académico. Para ello, se acudió a la herramienta matemática MATLAB, en la que partía de cero (resulta un verdadero lenguaje de programación) y cuya potencia queda manifestada en los resultados obtenidos con las pocas líneas de programación escritas.

Comentar finalmente que el tema me ha resultado sumamente interesante y complejo, y que se deja la puerta abierta para continuar desarrollando el caso práctico para comprobar y extraer resultados que permitan sacar conclusiones útiles en el difícil arte del diagnóstico de enfermedades del corazón.

8 PRÓXIMAS LÍNEAS DE TRABAJO

En el presente trabajo se han estudiado diferentes métodos para la reducción del ruido, la reducción de las interferencias de red y las variaciones de la línea base, dentro del paso "Preprocesamiento de la señal ECG". Como ejemplo práctico, apoyándose en el software matemático MATLAB se ha simulado la onda ECG y se han desarrollado funciones para la eliminación del ruido a través de dos tipos de filtrados: mediante un filtro paso bajo de Butterworth (muy útil porque tiene una respuesta muy plana, sin rizado) y mediante la transformada Wavelet (con la aproximación de funciones se pueden simular diversas familias de ondículas) se consiguen buenos resultados a bajas frecuencias, siendo, a la luz de los resultados, la Daubechies 9 con nivel 4 la que consigue mejores resultados en la relación SNR.

La extracción de características consiste en comprimir la señal eliminando información innecesaria pero manteniendo las propiedades relevantes y sin pérdidas de información crítica. De esta forma se consigue disminuir la carga computacional de procesamiento posterior. Una línea de trabajo a futuro es el desarrollo de un módulo MATLAB donde, de la misma forma que en el uso de la transformada Wavelet se probaron varias familias de ondículas, se puedan probar todas las funciones de la Ilustración 18, para comparar los errores cuadráticos medios obtenidos.

En cuando al siguiente proceso, la segmentación, la detección de las características de la onda, en lugar de usar la función MATLAB de detección de picos, puede modelarse también mediante la transformada de Wavelet, resultando mucho más práctico a la hora de trasladar la parametrización a un circuito operacional por ejemplo. Una línea de avance sería trabajar en el modelado mediante MATLAB de esta función de detección de características mediante la transformada de Wavelet. Actualmente hay varios trabajos de investigación con resultados interesantes acerca de la segmentación de la onda ECG a través de redes neuronales, pero su objeto excede el ámbito del presente trabajo tal como se comentaba anteriormente.

9 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Acevedo Martínez, Liesner. *Computación paralela de la transformada Wavelet. Aplicaciones de la transformada Wavelet al álgebra lineal numérica*. Departamento de Sistemas Informáticos. Universidad Politécnica de Valencia.
- [2] Addison, Paul. *Wavelet Transform and the ECG: a review*. Institute of Physics publishing. Physiological Measurement. CardioDigital Ltd., Elvingston Science Centre, East Lothian, EH33 1EH, UK.
- [3] Agretti, Hernán G.; Monzón, Jorge E. *Análisis Espectral del electrocardiograma*. Departamento de Ingeniería Eléctrica. Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura. UNNE.
- [4] Arnau, Jaume; Salafranca, Lluís; Turbany, Jaume. *Aplicación de las técnicas de suavizado en la variación negativa contingente (CNV)*. Anuario de Psicología 1992. Nº 55, 37-52. Facultad de Psicología. Universidad de Barcelona.
- [5] Cabasson, Aline; Meste, Olivier; Blain, Gregory; Bermon, Stephane. *Optimality statment of the Woody's method and improvement*. Project BIOMED. ISRN I3S/RR-2006-28-FR. September 2006.
- [6] Duque Cardona, Edison. *Análisis de la variabilidad del intervalo QT en la señal electrocardiográfica*. Universidad tecnológica de Pereira. Facultad de Ciencias Básicas. Maestría en instrumentación física. 2009.
- [7] González Villada, Marcela; Martínez Osorio, Ximena. *Análisis de señales electrocardiográficas con isquemia cardíaca usando técnicas de procesamiento digital de señales*. Universidad de Manizales. Facultad de Ingeniería. Programa de tecnología en sistemas. 2009.
- [8] Guerrero Martínez, Juan F. *Procesado digital de bioseñales, tema 4*. Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Universidad de Valencia. Departamento de Ingeniería Electrónica.
- [9] Hernández, Eugenio. *Matemáticas de las señales*. Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid.
- [10] Jané Raimon; Laguna, Pablo; V. Thakor, Nitish ; Caminal Pere. *Adaptive Baseline Wander Removal in the ECG: comparative analysis with cubic spline technique*. Instituto de Cibernética (UPC-CSIC), Barcelona (Spain); Centro Politécnico Superior, Universidad de Zaragoza (Spain); Johns Hopkins University, Baltimore, USA.
- [11] Laguna, Pablo. *Acondicionamiento de la señal ECG y extracción de parámetros clínicamente útiles*. Curso de verano de la Universidad de Cantabria: Técnicas avanzadas de tratamientos de señal para la mejora del proceso asistencial en el entorno de la medicina especializada.
- [12] Leydy Laura Álvarez; E., Henao, Ricardo; Duque, Edison. *Análisis de esquemas de filtrado análogo para señales ECG*. Scientia Et Technica, vol.XIII, núm.37, diciembre, 2007, pp.103-108. Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia.
- [13] Micó, Pau. *Nuevos desarrollos y aplicaciones basados en métodos estocásticos para el agrupamiento no supervisado de latidos en señales electrocardiográficas*. Departamento de Informática de Sistemas y computadores. Universidad Politécnica de Valencia.
- [14] Mora González, Miguel; Casillas Rodríguez, Fco. Javier; Muñoz Maciel, Jesús; Martínez Romo,

Julio C.; Luna Rosas, Francisco J.; Luna Ortega, Carlos A.; Gómez Rosas, Gilberto; Peña Lecona, Gerardo. *Reducción de ruido digital en señales ECG utilizando filtraje por convolución*. Revista Investigación y Ciencia de la Universidad Autónoma de Aguascalientes.. Nº 40, Enero-abril 2008.

- [15] Nieto, Natalia; Orozco, Marcela. *El uso de la transformada Wavelet discreta en la reconstrucción de señales senoidales*. Scientia et Technica Año XIV. Nº 38, Junio 2008. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701.
- [16] Orozco Alzate, Mauricio. *Clasificación de arritmias cardíacas usando la transformada de Wavelet y técnicas de reconocimiento de patrones*. Universidad Nacional de Colombia. Sede Manizales. Facultad de Ingeniería y Arquitectura. Departamento de electricidad. Electrónica y computación. 2003.
- [17] Rodríguez Sotelo, Jose Luis. *Estudio comparativo de técnicas para extracción de parámetros en señales de electrocardiografía*. Universidad Nacional de Colombia. Sede Manizales. Facultad de Ingeniería y Arquitectura. Departamento de Electricidad, Electrónica y Computación. 2004.
- [18] Romero Gil, Gemma; Laguna Lasaosa, Pablo. *Filtrado de Wiener en el plano tiempo-frecuencia aplicado a electrocardiografía de alta resolución*. Departamento de Ingeniería Electrónica y Comunicaciones. Centro Politécnico Superior. Universidad de Zaragoza.
- [19] Royo, María Pilar; Laguna, Pablo. *Cancelación de variaciones de línea base en el ECG: estudio comparativo de diferentes técnicas*. Grupo de Tecnologías de las Comunicaciones. Departamento de Ingeniería Eléctrica y Comunicaciones. Centro Politécnico Superior. Universidad de Zaragoza
- [20] Saenz de Pipaón Cilveti, Edurne. *Diseño de una aplicación para el análisis temporal de una señal ECG*.
- [21] Torres Niño, Luis Alejandro. *Algoritmo computacional para el estudio y caracterización de la variabilidad de la frecuencia cardíaca en la fibrilación auricular mediante el análisis de la dinámica no lineal*. Universidad industrial de Santander. Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática. Bucaramanga. 2010.
- [22] Uribe Arango, William; Duque Ramírez, Mauricio; Medina Durango, Eduardo. *Electrocardiografía y arritmias*.
- [23] Vega Picón, Eduardo. *Diseño y construcción de un electrocardiógrafo de 12 derivaciones para el análisis de señales cardíacas*. Universidad Politécnica Salesiana. Sede Cuenca.

10 GLOSARIO

Aliasing: proceso donde una senoide cambia de una frecuencia a otra como resultado del muestreo u otra acción no lineal. Usualmente resulta en una pérdida de información de la señal.

Alineamiento temporal: mecanismo para sincronizar señales en el tiempo. Técnica para posibilitar la comparación de señales de la misma naturaleza pero eventualmente de diferente duración.

Arritmia: irregularidad y desigualdad en las contracciones del corazón.

Artefacto: componente no deseada en la señal medida o adquirida.

Atrial: auricular.

Aurícula: cámara de entrada, donde desembocan las venas trayendo la sangre. Esta cámara tiene paredes musculares capaces de contraerse, pero no muy gruesas, ya que su función es sólo la de ayudar a llenar el ventrículo.

Auricular: perteneciente a las aurículas del corazón.

Ciclo cardíaco: secuencia de activación cardíaca. Despolarización, repolarización y polarización.

Complejo QRS: sección de la señal electrocardiográfica correspondiente a la despolarización ventricular.

Derivación: registro realizado con cierta disposición de electrodos. Dicha disposición.

DFT: transformada discreta de Fourier.

Diádico: relativo a potencias de dos.

Diástole: en el ciclo cardíaco, periodo de relajación del músculo del corazón.

Dominio de la frecuencia: una señal que tiene frecuencia como variable independiente. La salida de la transformada de Fourier.

Dominio del tiempo: una señal que tiene el tiempo como variable independiente.

Electrocardiografía: procedimiento de electrodiagnóstico consistente en la obtención y registro gráfico de los potenciales eléctricos producidos por el corazón en los diversos momentos de su actividad.

Electrocardiograma: trazado gráfico de los potenciales eléctricos que tienen lugar durante la contracción cardíaca.

Electrodo: extremo de un conductor en contacto con un medio, al que lleva o de el que recibe una señal eléctrica.

F

FT: Fast Fourier Transform. Transformada rápida de Fourier.

Filtro paso alto: sistema que atenúa todas las frecuencias que están por debajo de una frecuencia de corte y permite el paso de aquellas que se encuentran por encima de la misma.

Filtro paso bajo: sistema que atenúa todas las frecuencias que están por encima de una frecuencia de corte y permite el paso de aquellas que se encuentran por debajo de la misma.

Filtro paso banda: sistema que deja pasar únicamente una banda de frecuencias.

Frecuencia de corte: frecuencia que separa la banda de paso de la banda de transición. Usualmente se mide donde la amplitud es reducida a 0.707 (-3 dB).

Frecuencia de muestreo: ratio o razón a la cual son adquiridas las muestras con un conversor analógico/digital.

Función de transferencia: la señal de salida dividida entre la señal de entrada. La función de transferencia puede expresarse de diferentes formas, dependiendo de cómo estén representadas las señales. Por ejemplo, en el dominio s y en el dominio z se expresa como la división de dos polinomios.

Latido: segmento de la señal de ECG, desde una onda P hasta el comienzo de la próxima.

Línea base: observación o valor que representa el nivel normal mínimo, o un nivel inicial, de una cantidad medible.

Onda P: sección de la señal electrocardiográfica correspondiente a la despolarización auricular.

Onda T: sección de la señal electrocardiográfica correspondiente a la repolarización ventricular.

Periodo de muestreo: espacio de tiempo entre muestras cuando una señal es digitalizada.

Registro Holter: registro electrocardiográfico de 24 horas de duración.

Relación señal a ruido: razón entre la potencia de la señal y la potencia del ruido.

Ruido: señal eléctrica aleatoria no deseada que afecta la señal.

Ruido blanco: ruido aleatorio que tiene un espectro de frecuencia completamente plano. Ocurre cuando cada muestra en el dominio del tiempo no contiene información acerca de las otras muestras.

Segmentación: extracción de cada uno de los latidos presentes en un registro

electrocardiográfico.

Sístole: periodo de contracción cardíaca, en particular de los ventrículos con objeto de enviar sangre a las arterias pulmonar y aorta.

SNR: Signal to Noise Ratio. Relación Señal a Ruido.

Supraventricular: relativo a la parte superior de los ventrículos.

Taquicardia: término médico que define la aceleración espontánea del ritmo y de la frecuencia cardíaca.

Transformada: un procedimiento, ecuación o algoritmo que cambia un grupo de datos en otro grupo de datos.

Transformada discreta de Fourier: Transformada de Fourier que trata con señales en el dominio del tiempo que son discretas y finitas en el tiempo.

Transformada discreta Wavelet: Transformada Wavelet calculada solo para escalas y posiciones basadas en potencias de dos (diádica) mediante un algoritmo eficaz.

Transformada rápida de Fourier: algoritmo eficiente para calcular la transformada discreta de Fourier (DFT).

Transformada Wavelet: la transformada wavelet de una señal s es la familia $C(a, b)$, que depende de dos índices a y b . Consiste en calcular un índice de semejanza entre la señal y la wavelet localizada en la posición b y de escala a . Los índices $C(a, b)$ son llamados coeficientes. La transformada wavelet puede ser discreta o continua.

Umbral: valor mínimo o máximo de una variable que se establece para tomar

una decisión en un algoritmo.

Ventana: una ventana es un multiplicador de una señal de dominio de tiempo. En la teoría se tiene acceso a una señal que se extiende infinitamente en el tiempo, pero en la práctica, esto no es posible y surgen discontinuidades. El propósito de la ventana es remover (o suavizar) las discontinuidades que existen al principio de la muestra. Si no se remueven, estas discontinuidades se pueden manifestar como frecuencias más altas que la frecuencia de Nyquist cuando ocurre el muestreo.

Ventricular: perteneciente al ventrículo.

Ventrículo: cámara encargada de impulsar la sangre. Los ventrículos tienen paredes musculares más gruesas, sobre todo el izquierdo, que tiene que bombear la sangre a todo el cuerpo. Por el contrario, el derecho, que sólo bombea a los pulmones, tiene una pared menos gruesa, un músculo menos potente.

W

avelet: forma de onda de duración efectiva limitada que tiene un valor promedio de cero.

WT: Wavelet Transform. Transformada Wavelet.

11 ANEXOS

11.1 La transformada de Wavelet

Las señales pueden ser estacionarias y no estacionarias. Las señales estacionarias se localizan en el tiempo, no variando su frecuencia. Su análisis se hace mediante Fourier, que permite descomponerla en términos de senoides. Se puede pasar del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo y viceversa, perdiéndose en el primero información que no es relevante por ser procesos estacionarios.

En procesos no estacionarios, es decir, aquellos con frecuencia variable en el tiempo, no es posible pasar del dominio de la frecuencia al tiempo sin perder información. Surge la necesidad de contar con una representación localizada en el tiempo y en la frecuencia. Como solución aparece la Transformada de Fourier de tiempo reducido (STFT, Short Time Fourier Transform), que consiste en ir analizando la señal a través de una ventana de longitud fija

El uso de esta ventana temporal de tamaño fijo tiene una desventaja adicional: al ser el tamaño fijo, no se pueden analizar pequeños detalles. Nace entonces el análisis de Wavelet, que permite analizar la señal con cambios abruptos en sus componentes, analizando la señal a través de ventanas de tamaño variable, adaptadas al cambio de frecuencia.



Ilustración 46: ondícula.

La base de Wavelet son funciones variables en escala y en tiempo. Una función de Wavelet de pequeña onda (algunos autores le llaman ondícula) de duración limitada en el tiempo, que permite un adecuado análisis de fenómenos transitorios no estacionarios, variables en el tiempo y con discontinuidades. En la ilustración de al lado se muestra un ondícula.

11.1.1 La Transformada de Wavelet Continua (CWT)

Mediante la transformada continua de Wavelet (CWT) se puede expresar una señal continua como una expansión de términos del producto entre la propia función y una función Wavelet Madre, $\Psi(t)$, que debe cumplir la llamada **condición de admisibilidad**:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(w)|^2}{w} dw < \infty$$

que viene a decir que su transformada de Fourier sea un filtro pasa banda, con rápido decrecimiento hacia el infinito y hacia $\omega=0$. A partir de la Wavelet Madre se generan Wavelet hijas mediante dilataciones, contracciones y traslaciones en el tiempo:

$$\Psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

Y la transformada Wavelet continua queda:

$$CWT f(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi_{u,s}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$$

11.1.2 La Transformada Wavelet Discreta (DWT)

La complejidad en el tratamiento numérico de la CWT hace necesario contar con una herramienta que permita la discretización de ésta. Así, se representa una señal $f(t)$ como una suma de funciones de Wavelet, $\Psi(t)$, para detalles finos, y funciones de escala, $\phi(t)$, para realizar una aproximación:

$$f(t) = \sum_k \sum_j c_{j,k} \phi(t) + \sum_k \sum_j d_{j,k} \Psi(t)$$

11.1.2.1 Funciones de escala y funciones de Wavelet

Se define un parámetro a mediante el cual se puede expresar s y u de la siguiente forma:

$$s = a^{-j} \quad u = ka^{-j}$$

Sustituyendo en la expresión de la Wavelet hija:

$$\Psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^{-j}}} \Psi\left(\frac{t - ka^{-j}}{a^{-j}}\right) = a^{\frac{j}{2}} \Psi(a^j t - k)$$

Una muy buena solución se obtiene haciendo $a=2$, denominándose en este caso **Wavelets Diádicas**:

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j t - k) \quad j, k \in Z$$

$$DWT f(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j t - k) dt$$

Y se define la función de escala como:

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) \quad j, k \in Z$$

$$DWT f(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) dt$$

Resultando la representación general de $f(t)$ de la forma:

$$f(t) = \sum_k \sum_j c_{j,k} 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) + \sum_k \sum_j d_{j,k} 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j t - k)$$

Lo único que resta es encontrar los coeficientes a través del producto vectorial de $f(t)$ y la función de escala y de Wavelet:

$$c_{j,k} = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_{j,k}(2^j t - k) dt$$

$$d_{j,k} = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \Psi_{j,k}(2^j t - k) dt$$

11.1.2.2 Ejemplo: representación de una señal senoidal

Se va a hacer una representación de la función $f(t)=\text{sen}(t)$, $t \in [-1,7]$ para tres escalas diferentes, $j=0,1,2$, mediante la función de escala y de Wavelet siguiente:

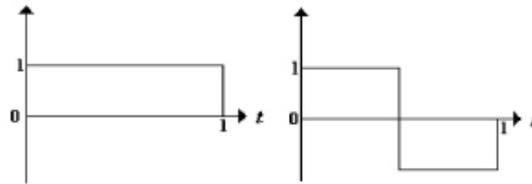


Ilustración 47: función de Wavelet Haar.

Esta última se llama la **función de Wavelet Haar**.

$$\phi_{j,k} = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}}, & \text{si } t_1 = \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{1+k}{2^j} = t_2 \\ 0, & \text{e. o. c.} \end{cases}$$

$$\Psi_{j,k} = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}}, & \text{si } \frac{k}{2^j} \leq t \leq \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \\ 2^{-\frac{j}{2}}, & \text{si } \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \leq t \leq \frac{k+1}{2^j} \\ 0, & \text{e. o. c.} \end{cases}$$

El procedimiento a realizar es el siguiente:

1. Para $j=0$, se determina el intervalo de variación del parámetro k :

$$t_1 = -1 = \frac{k}{2^j} \qquad t_2 = 1 = \frac{1+k}{2^j}$$

de donde $k \in [-1, 6]$.

2. A continuación se calculan los coeficientes de escala para $j=0$ y k :

$$\phi_{0,k} = \phi(t - k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \leq t \leq 1+k \\ 0, & \text{e. o. c.} \end{cases}$$

$$\Psi_{0,k} = \Psi(t - k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \leq t \leq 1/2 + k \\ -1, & \text{si } \frac{1}{2} + k \leq t \leq k + 1 \\ 0, & \text{e. o. c.} \end{cases}$$

con lo que los coeficientes quedan:

$$c_{0,k} = \int_{-1}^7 f(t) \phi(t - k) dt \rightarrow c_{0,-1} = \int_{-1}^0 \text{sen}(t) dt = -0.4597$$

$$d_{0,k} = \int_{-1}^7 f(t) \Psi(t - k) dt \rightarrow$$

$$d_{0,-1} = \int_{-1}^{-1/2} \text{sen}(t) dt - \int_{-1/2}^0 \text{sen}(t) dt = -0.2149$$

3. Se repite el procedimiento para $j=1$ y $j=2$, resultando las siguientes tablas:

▪ Para $j \cong 0$

$c_{0,-1}$	-0.4597	$d_{0,-1}$	-0.2149
$c_{0,0}$	0.4597	$d_{0,0}$	-0.2149
$c_{0,1}$	0.9564	$d_{0,1}$	-0.0173
$c_{0,2}$	0.5738	$d_{0,2}$	0.1961
$c_{0,3}$	-0.3363	$d_{0,3}$	-0.2149
$c_{0,4}$	-0.9373	$d_{0,4}$	0.0516
$c_{0,5}$	-0.6765	$d_{0,5}$	-0.1735
$c_{0,6}$	0.2063	$d_{0,6}$	-0.2391

▪ Para $j = 2$

$c_{2,-4}$	-0.7655	$d_{2,-4}$	-0.0400
$c_{2,-3}$	-0.58	$d_{2,-3}$	-0.0506
$c_{2,-2}$	-0.36	$d_{2,-2}$	-0.0580
$c_{2,-1}$	-0.12	$d_{2,-1}$	-0.0619
$c_{2,0}$	0.12	$d_{2,0}$	-0.0619
$c_{2,1}$	0.36	$d_{2,1}$	-0.0580
$c_{2,2}$	0.58	$d_{2,2}$	-0.0506
$c_{2,3}$	0.76	$d_{2,3}$	-0.0400
$c_{2,4}$	0.89	$d_{2,4}$	-0.0269
$c_{2,5}$	0.97	$d_{2,5}$	-0.0121
$c_{2,6}$	0.995	$d_{2,6}$	0.0033
$c_{2,7}$	0.95	$d_{2,7}$	0.0186
$c_{2,8}$	0.84	$d_{2,8}$	0.0328

▪ Para $j = 1$

$c_{1,-2}$	-0.6746	$d_{1,-2}$	-0.091
$c_{1,-1}$	-0.2448	$d_{1,-1}$	0.1205
$c_{1,0}$	0.2448	$d_{1,0}$	0.1205
$c_{1,1}$	0.6746	$d_{1,1}$	0.0909
$c_{1,2}$	0.9391	$d_{1,2}$	0.0392
$c_{1,3}$	0.9738	$d_{1,3}$	-0.0222
$c_{1,4}$	0.7699	$d_{1,4}$	-0.0781
$c_{1,5}$	0.3777	$d_{1,5}$	-0.1149
$c_{1,6}$	-0.1071	$d_{1,6}$	-0.1236
$c_{1,7}$	-0.5656	$d_{1,7}$	-0.1020
$c_{1,8}$	-0.8857	$d_{1,8}$	-0.0555
$c_{1,9}$	-0.9889	$d_{1,9}$	0.0047
$c_{1,10}$	-0.8500	$d_{1,10}$	0.0637
$c_{1,11}$	-0.5030	$d_{1,11}$	0.1071
$c_{1,12}$	-0.0328	$d_{1,12}$	0.1243
$c_{1,13}$	0.4454	$d_{1,13}$	0.1110

$c_{2,9}$	0.69	$d_{2,9}$	0.0449
$c_{2,10}$	0.492	$d_{2,10}$	0.0542
$c_{2,11}$	0.262	$d_{2,11}$	0.0602
$c_{2,12}$	0.016	$d_{2,12}$	0.0624
$c_{2,13}$	-0.230	$d_{2,13}$	0.0607
$c_{2,14}$	-0.463	$d_{2,14}$	0.0552
$c_{2,15}$	-0.667	$d_{2,15}$	0.0463
$c_{2,16}$	-0.830	$d_{2,16}$	0.0345
$c_{2,17}$	-0.941	$d_{2,17}$	0.0206
$c_{2,18}$	-0.993	$d_{2,18}$	0.0054
$c_{2,19}$	-0.984	$d_{2,19}$	-0.0101
$c_{2,20}$	-0.913	$d_{2,20}$	-0.0250
$c_{2,21}$	-0.78	$d_{2,21}$	-0.038
$c_{2,22}$	-0.61	$d_{2,22}$	-0.0493
$c_{2,23}$	-0.39	$d_{2,23}$	-0.0572
$c_{2,24}$	-0.157	$d_{2,24}$	-0.0616
$c_{2,25}$	-0.091	$d_{2,25}$	-0.0621
$c_{2,26}$	0.334	$d_{2,26}$	0.0588
$c_{2,27}$	0.556	$d_{2,27}$	0.0518

Ilustración 48: coeficientes de escala y coeficientes de Wavelet para $j=0, 1$ y 2 . [29]

²⁹ El uso de la transformada Wavelet discreta en la reconstrucción de señales senoidales. Scientia et Technica Año XIV. Nº 38, Junio 2008. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701.

4. Finalmente se hace la reconstrucción de la señal sumando los coeficientes de escala y Wavelet. Para $j=0, 1$ y 2 :

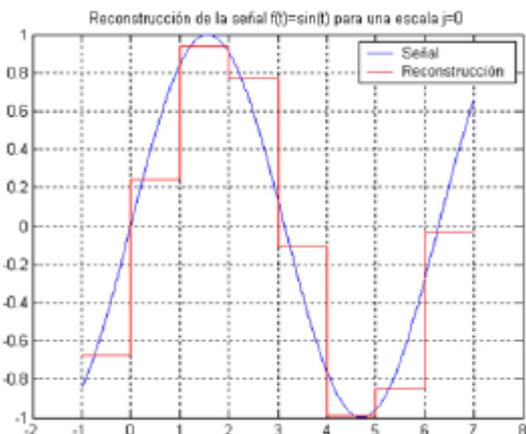


Ilustración 50: reconstrucción de la señal a escala $j=0$. [30]

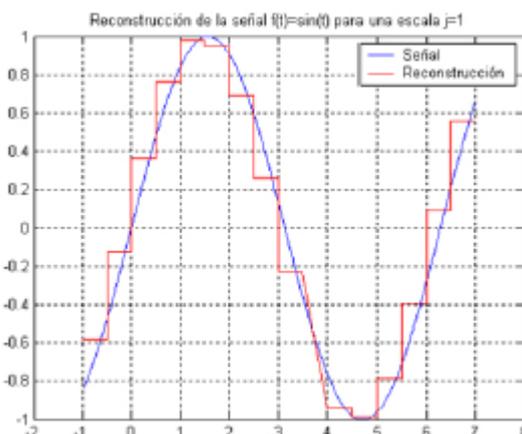


Ilustración 49: reconstrucción de la señal a escala $j=1$. [30]

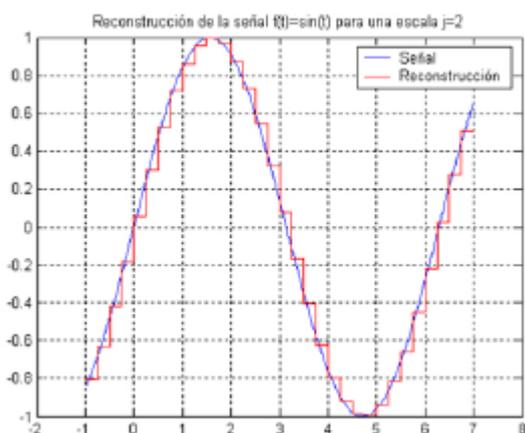


Ilustración 51: reconstrucción de la señal a escala $j=2$. [30]

11.2 Análisis multiresolución mediante transformada de Wavelet

El análisis multiresolución es una herramienta que utiliza la Transformada Discreta de Wavelet (DWT) para representar una señal tiempo variante en término de sus componentes de frecuencia. Esencialmente mapea una señal unidimensional del tiempo en una señal de tiempo y frecuencia. En la siguientes ilustraciones se observa

³⁰ El uso de la transformada Wavelet discreta en la reconstrucción de señales senoidales. Scientia et Technica Año XIV. Nº 38, Junio 2008. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701.

una señal ruidosa que se mapea en el dominio Wavelet en diferentes escalas y se representa como una señal en dos dimensiones.

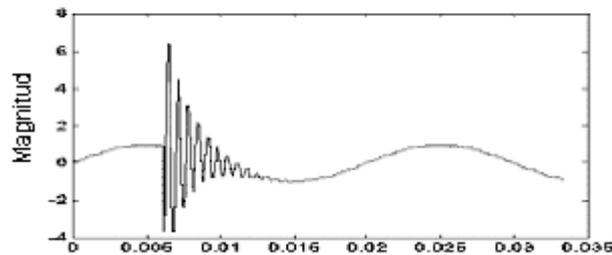


Ilustración 52: señal unidimensional en el dominio del tiempo. [31]

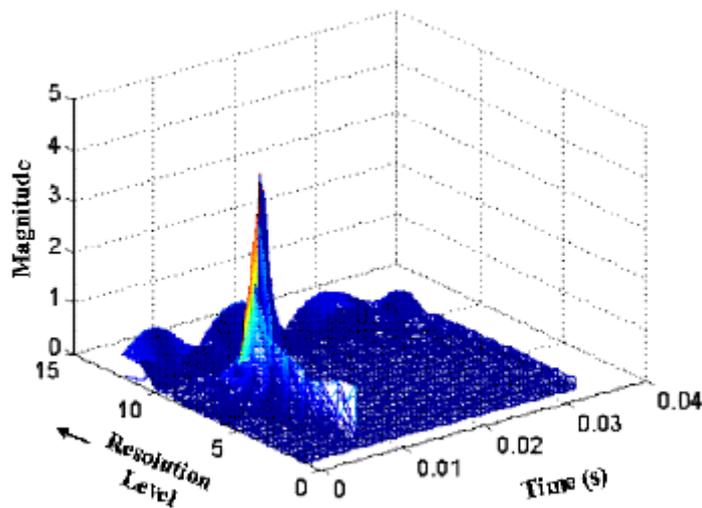


Ilustración 53: señal bidimensional en el dominio Wavelet. [31]

El objetivo del análisis multiresolución es el desarrollo de representaciones de una señal $f(t)$ en términos de sus bases ortonormales, que son funciones que pueden ser escaladas y trasladadas para descomponer $f(t)$ y representarla en diferentes resoluciones o escalas. Matemáticamente se puede representar esta cuestión así:

$$f(t) = \sum_k c_0(k)\varphi(t - k) + \sum_k \sum_{j=0}^{j=J-1} d_j(k)2^{\frac{j}{2}} - \Psi(2^j t - k)$$

³¹ <http://www.um.edu.ar/math/wavelets/discre.htm>

Usando el análisis multiresolución la señal en el dominio del tiempo $f(t)$ se puede mapear en el dominio Wavelet y ser representada en diferentes niveles de resolución en término de coeficientes:

$$[c_0, d_0, d_1, \dots, d_{J-1}]$$

Representando d_j los coeficientes de detalle en diferentes niveles de resolución, y c_0 los coeficientes de aproximación. Los pasos a seguir para obtener estos coeficientes son los que se representan en la siguiente ilustración.

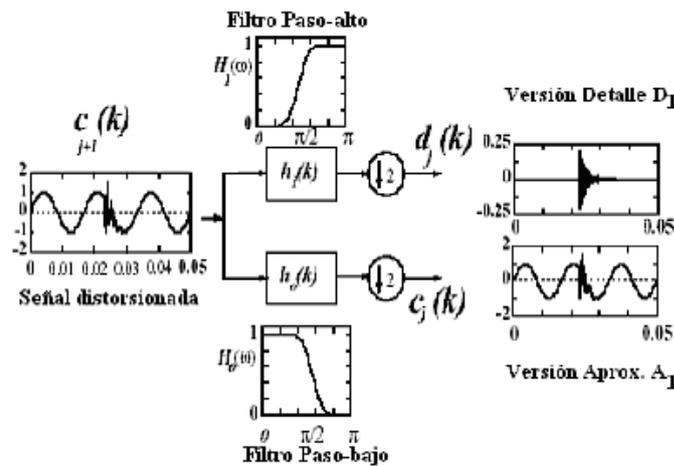


Ilustración 54: Transformada Discreta de Wavelet. Una etapa del análisis multiresolución. [32]

Los coeficientes se calculan mediante un algoritmo que se implementa mediante la aplicación recursiva de filtros discretos paso alto y paso bajo. Este algoritmo se conoce como **algoritmo piramidal o de Mallat**.

Posteriormente hay un proceso de reconstrucción donde a partir de los coeficientes se puede reconstruir la señal original $f(t)$ de forma aproximada. De igual forma, esto se hace siguiendo recursivas etapas.

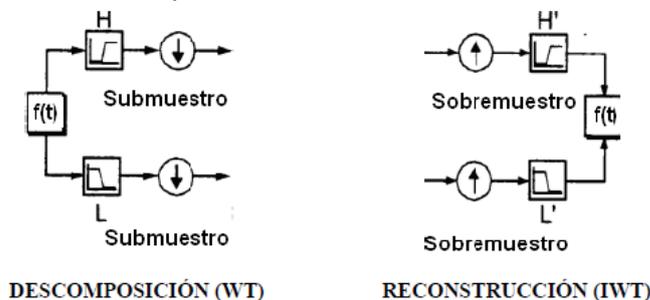


Ilustración 55: proceso de descomposición y reconstrucción de la señal $f(t)$ mediante el análisis multiresolución.

³² <http://www.um.edu.ar/math/wavelets/discre.htm>

Mediante el filtrado paso alto se obtienen los detalles de la señal, y mediante el filtrado paso bajo las componentes aproximadas.

11.3 Filtros digitales³³

Se emplea en procesamiento de señales para eliminar partes no deseadas de la misma, tales como ruido o sólo permitir el paso de un cierto rango de frecuencias.

El siguiente diagrama ilustra esta idea básica:



Ilustración 56: función de un filtro digital

Hay dos tipos principales de filtros: **analógico** y **digital**. Son bastantes diferentes tanto en su aspecto físico como en su modo de funcionamiento.

Un filtro analógico emplea circuitos electrónicos con componentes discretos tales como resistencias, condensadores, amplificadores operacionales, etc. que sean requeridos para el filtrado deseado. Tales filtros son muy empleados para reducción de ruido, mejora de señales de vídeo, ecualizadores gráficos y muchas otras áreas.

Hay técnicas estándares bien asentadas para diseñar un filtro analógico con un requerimiento dado. En todas las diversas etapas la señal está siendo filtrada como un voltaje o corriente eléctrica, es decir, se involucra una magnitud física y real directamente de la señal analógica.

Un filtro digital emplea un procesador digital que efectúa operaciones matemáticas en valores muestreados de la señal. El procesador puede ser de propósito general, tal como cualquier ordenador personal, un chip DSP (Procesador Digital de Señales) especializado o una FPGA programable..

La señal de entrada analógica debe ser muestreada y digitalizada usando un ADC (convertor analógico-digital). El resultado son números binarios que representan los valores sucesivos muestreados. Estos son transferidos al procesador, el cual efectúa operaciones matemáticas en ellos. Las operaciones pueden ser desde filtros de promediado de la muestra actual con alguna de las anteriores hasta multiplicaciones por constantes de los valores de entrada o de instantes anteriores almacenados en memoria, para posteriormente sumar estos resultados de la multiplicación y dar una

³³ <http://www.duiops.net/hifi/enciclopedia/filtro-digital.htm>

salida. Es decir, operaciones propias de teoría sistemas lineales: convoluciones en el dominio temporal (multiplicación en el dominio de la frecuencia) con otras señales prefijadas que consisten en una cadena de coeficientes. Para diseñar estos filtros suele usarse un impulso y desplazarlo sucesivas veces multiplicado por alguna constante, es decir, usando la transformada z.

Finalmente, si es necesario, los resultados de estos cálculos, que están representando valores muestreados de la señal filtrada, son enviados a través de un DAC (conversor digital-analógico) para devolver la señal a una forma analógica. Por tanto, en un filtro digital la señal está siempre representada por una secuencia de números, en vez de un voltaje o una corriente.

El siguiente diagrama muestra el esquema básico de uno de estos sistemas:

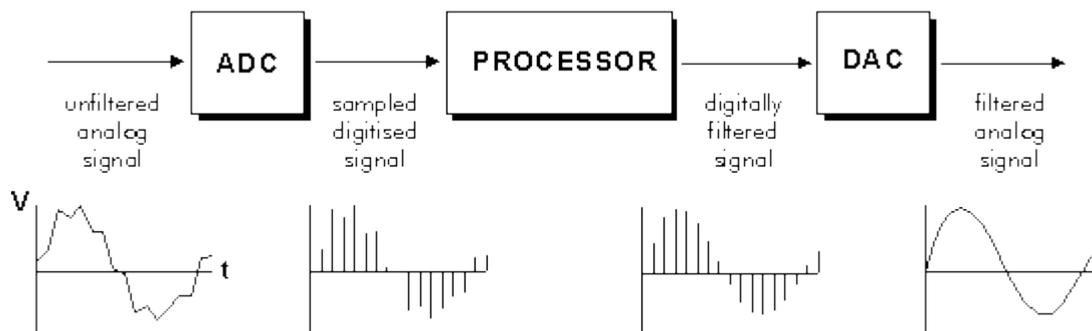


Ilustración 57: diagrama general de un sistema de filtrado digital

11.3.1 Ventajas de usar filtros digitales sobre los analógicos

Se tienen principalmente las siguientes ventajas:

1. Un filtro digital es programable, es decir, su funcionamiento está terminado por un programa almacenado en la memoria contigua al procesador. Esto significa que puede ser variado fácilmente sin afectar al hardware, mientras que la única manera de variar un filtro analógico es alterando el circuito.
2. Los filtros digitales pueden ser fácilmente diseñados, probados e implementados en un ordenador. Los analógicos pueden ser simulados, pero siempre hay que implementarlos a través de componentes discretos para ver su funcionamiento real.
3. Las características de los filtros analógicos, particularmente los que contienen componentes activos, están sujetos a alteraciones y dependen de la temperatura. Los filtros digitales no sufren estos problemas y son extremadamente estables ante factores externos.
4. A diferencia de los filtros analógicos, los digitales pueden manejar con mucha precisión las bajas frecuencias. Como la tecnología de los DSP va mejorando, el

aumento de su velocidad permite que también sean aplicados en el campo de la radio frecuencia (muy altas frecuencias), la cual en el pasado era exclusivamente dominio de la tecnología analógica.

5. Los filtros digitales son mucho más versátiles a la hora de manipular la señal, que pueden llegar a variarla y tratarla radicalmente cambiando sus características.
6. Los procesadores DSP más rápidos pueden manejar combinaciones complejas de filtros en paralelo o en serie (en cascada), haciendo los requerimientos de hardware relativamente simples y compactos en comparación con la circuitería analógica equivalente.

11.3.2 Filtros recursivos y no recursivos

Un filtro no-recursivo es aquel cuya salida está calculada exclusivamente a partir de valores de entrada ($Y_n = X_n + X_{n-1} + X_{n-2}...$), mientras que uno recursivo es aquel que además de los valores de entrada emplea valores previos de salida ($Y_{n-1}, Y_{n-2}...$), los cuales se almacenan en la memoria del procesador. La palabra recursivo significa literalmente "volver hacia atrás" y se refiere al hecho de que valores de salida previamente calculados vuelven de nuevo para calcular los nuevos valores de salida.

Un filtro recursivo generalmente requiere mucho menos coeficientes para que evalúe el procesador, es decir, que es de menor orden y es más corto, que un filtro no-recursivo que persiga una característica en frecuencia dada.

Los filtros no-recursivos se conocen como **filtro FIR** (Respuesta al Impulso Finita) y los recursivos como **filtros IIR** (Respuesta al Impulso Infinita).

Estos términos se refieren a las diferentes respuestas al impulso de ambos tipos de filtros. La respuesta al impulso de un filtro digital es la secuencia de salida cuando se aplica un impulso unidad a su entrada (un impulso unidad es muy simple, tan sólo una secuencia consistente en un valor 1 en el instante de tiempo $t=0$, seguido de ceros para todas las muestras siguientes, lo que se llama también una **Delta de Kronecker**).

Un filtro FIR es uno cuya respuesta es de una duración finita. Uno IIR es aquel cuya respuesta al impulso teóricamente continua para siempre debido a la recursividad con valores previos de salida que constantemente están siendo devueltos a la entrada.

11.3.3 Filtros FIR³⁴

Es un tipo de filtro digital que si su entrada es un impulso (una delta de Kronecker) la salida será un número limitado de términos no nulos. Para obtener la salida sólo se emplean valores de la entrada actual y anteriores. Su expresión en el dominio discreto es:

³⁴ <http://www.duiops.net/hifi/enciclopedia/filtro-digital-FIR.htm>

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n - k)$$

El orden del filtro está dado por N, es decir, el número de coeficientes. También la salida puede ser expresada como la convolución de una señal de entrada x[n] con un filtro h[n]:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x_{n-k}$$

La estructura de un filtro FIR por tanto es la siguiente:

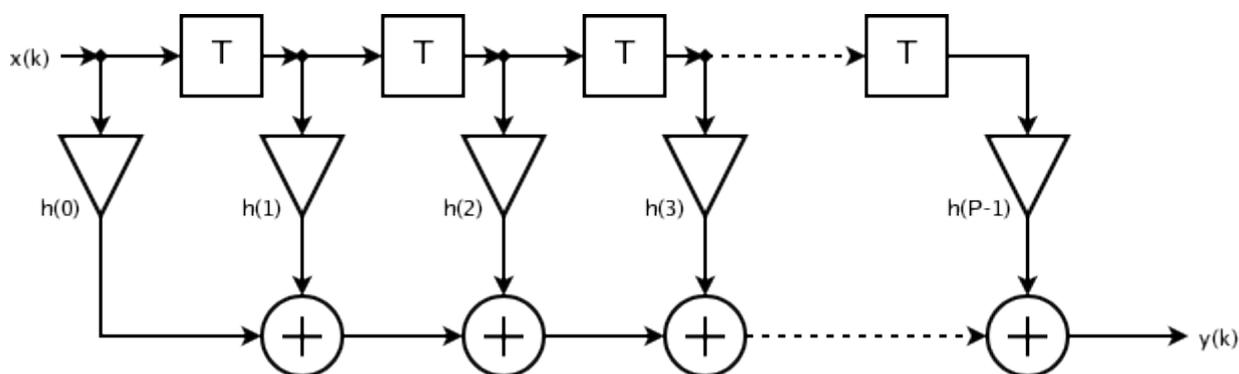


Ilustración 58: diagrama de bloques de un filtro FIR

La cual puede verse reflejada en la aplicación de la transformada Z:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k z^{-k} = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{N-1} z^{-(N-1)}$$

Como se puede ver, la misma entrada se retarda cada vez más en el tiempo, se multiplica por diversos coeficientes y finalmente se suma. Hay muchas variaciones de esta estructura. Si tenemos una respuesta de frecuencia como objetivo, conseguiremos que la respuesta del filtro se asemeje más a ella cuanto más largo sea o número de coeficientes tenga.

Los filtros FIR son estables puesto que sólo tienen polos, es decir, elementos en el numerador en su función de transferencia. También tienen la ventaja que pueden diseñarse para ser de fase lineal, es decir, no introducen desfases en la señal, a diferencia de los IIR o los filtros analógicos.

Sin embargo, tienen el inconveniente de ser más largos al tener más coeficientes que los filtros IIR capaces de cumplir similares características. Esto requiere un mayor tiempo de cálculo que puede dar problemas en aplicaciones en tiempo real.

11.3.4 Filtros IIR³⁵

Es un tipo de filtro digital en el que si su entrada es un impulso (una delta de Kronecker), la salida será un número ilimitado de términos no nulos, es decir, que nunca volverá a un estado de reposo. Para obtener la salida se emplean valores de la entrada actual y anteriores y, además, valores de salida anteriores que son almacenados en memoria y realimentados a la entrada. También se llaman filtros digitales recursivos. Su expresión en el dominio discreto es:

$$y[n] = \sum_{i=0}^P b_i x[n - i] - \sum_{j=1}^Q a_j y[n - j]$$

El orden del filtro está dado por el máximo entre P y Q. Una de las posibles estructuras para un filtro IIR es la siguiente:

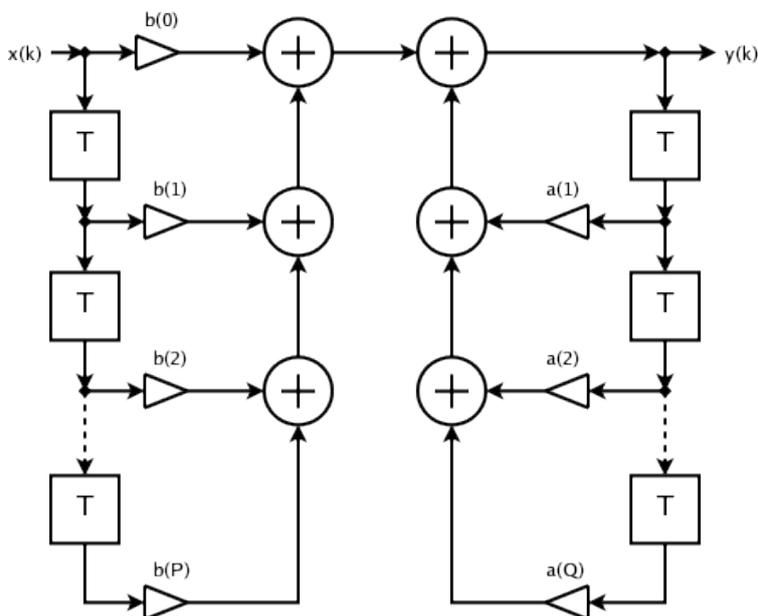


Ilustración 59: diagrama de bloques de un filtro IIR.

Se puede ver cómo la salida $y(k)$ es introducida de nuevo en el sistema. La transformada Z del mismo es:

³⁵ <http://www.duiops.net/hifi/enciclopedia/filtro-digital-IIR.htm>

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^P b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^Q a_j z^{-j}}$$

Ahora se tiene un denominador y por tanto, ceros además de polos, que son los causantes de las posibles inestabilidades que pueden comprometer la estabilidad y causalidad del sistema.

Las ventajas de los filtros IIR respecto a los FIR es que pueden conseguir una misma respuesta empleando un número de coeficientes en el filtro mucho menor, requiriendo un menor tiempo de cálculo. El inconveniente es, además de la inestabilidad ya comentada, la introducción de desfases en la señal, que pueden ser compensados pero a costa de añadir más coeficientes al filtro.

12 ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: flujo de sangre en el corazón [2]	6
Ilustración 2: sistema de conducción eléctrica del corazón [3]	7
Ilustración 3 ⁴ : formación de la onda ECG. (1) depolarización atrial, (2) el impulso eléctrico atravesando el nodo auriculoventricular, (3) depolarización ventricular, (4) sístole ventricular, (5) repolarización ventricular, (6) todas las células cardíacas de nuevo en descanso [4].....	8
Ilustración 4: recorrido de la sangre. Circuito pulmonar y sistémico [5].	9
Ilustración 5: onda ECG [6].	11
Ilustración 6: representación de un tren de ondas ECGs para una frecuencia cardíaca de 125 latidos/minuto [7]	13
Ilustración 7: perturbaciones del ECG debido a diferentes causas [9].	14
Ilustración 8: proceso de conversión analógico-digital. [10].....	15
Ilustración 9: esquema de análisis de la señal ECG [11].	17
Ilustración 10: representación de la respuesta en frecuencia. Filtro de Butterworth [13].	20
Ilustración 11: desalineamiento de la señal ECG [15].	23
Ilustración 12: aproximación de la señal ECG mediante funciones [17].	24
Ilustración 13: espectro de una señal ECG donde se aprecia el contenido frecuencial de la señal de 60 Hz debido a la interferencia de la red [20].	27
Ilustración 14: filtro elimina banda. Filtro de Chebyshev de orden dos.	27
Ilustración 15: diagrama de Bode de un filtro de Chebyshev de segundo orden.....	28
Ilustración 16: señal ECG con variaciones de la línea base [21].	28
Ilustración 17: filtro adaptativo en cascada [23].	29
Ilustración 18: parámetros variables de las funciones utilizadas	32
Ilustración 19: onda ECG donde se muestran los diferentes componentes.	34
Ilustración 20: hoja Excel con los datos de la onda ECG.	36
Ilustración 21: carga de datos en MATLAB.....	36
Ilustración 22: representación gráfica de la onda ECG simulada.	37
Ilustración 23: representación gráfica de la onda ECG simulada durante 1 minuto.	37
Ilustración 24: algoritmo para la simulación de ruido blanco gaussiano de diferentes niveles SNR.....	38
Ilustración 25: señal ECG con ruido SNR de 20dB.....	39
Ilustración 26: señal ECG con ruido SNR de 13.97 dB.....	39
Ilustración 27: señal ECG con ruido SNR de 10.45 dB.....	40
Ilustración 28: algoritmo para la simulación del ruido provocado por una fuente senoidal de frecuencia f	40
Ilustración 29: señal ECG simulada con ruido senoidal procedente de una fuente senoidal a 50 Hz	41
Ilustración 30: señal ECG simulada con ruido senoidal procedente de una fuente senoidal a 100 Hz.	41

Ilustración 31: algoritmo para la detección de la frecuencia dominante a filtrar mediante el filtro paso bajo.....	42
Ilustración 32: espectro frecuencial de la onda simulada con ruido senoidal de 50 Hz.	43
Ilustración 33: esquema de la curva de filtrado de un filtro paso bajo con sus parámetros característicos [26].....	43
Ilustración 34: algoritmo para el filtrado de la señal simulada con ruido mediante un paso bajo de Butterworth.	45
Ilustración 35: representación gráfica de la señal original, la señal con ruido, y la señal una vez se ha filtrado mediante el filtro paso bajo de Butterworth.	46
Ilustración 36: familias Wavelets [27].....	47
Ilustración 37: algoritmo para el filtrado de la señal mediante Wavelets usando diferentes familias con distintos niveles.....	48
Ilustración 38: familias de Wavelets por niveles.	49
Ilustración 39: familias de Wavelets para los 5 niveles. Se ha elegido de cada familia el que daba un valor de SNR mayor para el nivel 1.....	50
Ilustración 40: niveles por familias de Wavelets	50
Ilustración 41: filtrado mediante Daubechies 9	51
Ilustración 42: filtrado de la señal mediante la familia Haar en nivel 3. Se puede ver que la reconstrucción de la curva hace perder la característica de la señal.	52
Ilustración 43: comparación entre las dos técnicas de filtrado. En azul la señal original ruidosa, en verde la señal filtrada mediante Wavelet (db9 con nivel 4), y en rojo la señal filtrada mediante un filtro paso bajo.	53
Ilustración 44: espectro frecuencial de la onda ruidosa (azul), de la onda filtrada mediante paso bajo (roja) y filtrada mediante Wavelet (verde).....	53
Ilustración 45: cálculo del número de latidos a partir de la onda ECG simulada.	55
Ilustración 46: ondícula.	68
Ilustración 47: función de Wavelet Haar.....	71
Ilustración 48: coeficientes de escala y coeficientes de Wavelet para $j=0, 1$ y 2 . [29]	72
Ilustración 49: reconstrucción de la señal a escala $j=1$. [30]	73
Ilustración 50: reconstrucción de la señal a escala $j=0$. [30]	73
Ilustración 51: reconstrucción de la señal a escala $j=2$. [30]	73
Ilustración 52: señal unidimensional en el dominio del tiempo. [31].....	74
Ilustración 53: señal bidimensional en el dominio Wavelet. [31]	74
Ilustración 54: Transformada Discreta de Wavelet. Una etapa del análisis multiresolución. [32]	75
Ilustración 55: proceso de descomposición y reconstrucción de la señal $f(t)$ mediante el análisis multiresolución.....	75
Ilustración 56: función de un filtro digital	76
Ilustración 57: diagrama general de un sistema de filtrado digital	77
Ilustración 58: diagrama de bloques de un filtro FIR	79
Ilustración 59: diagrama de bloques de un filtro IIR.....	80

CurvaECG.xlsx: tabla Excel con los 15.000 puntos que conforman la onda ECG simulada. A partir de la carga de estos puntos, puede ejecutarse cada una de las funciones MATLAB que aparecen en el punto 5 del presente trabajo.

calcula_fft.m: función MATLAB para calcular la Transformada Rápida de Fourier (FFT) al objeto de determinar el espectro de frecuencias de la onda ruidosa simulada, la onda filtrada mediante paso bajo, y la onda filtrada mediante Wavelet.

calculo_frecuencia.m: función MATLAB que genera una onda senoidal de cualquier frecuencia.

calculo_latidos.m: función MATLAB para determinar el número de latidos de un paciente a partir del cálculo de ondas R que tiene su curva ECG durante un minuto.

carga_de_datos.m: función MATLAB que realiza la carga de datos a partir de la hoja Excel CurvaECG.xlsx para generar la onda simulada ECG.

comparacion_filtrado.m: función MATLAB para comparar gráficamente las curvas de ECG ruidosa, la curva filtrada mediante paso bajo y la curva filtrada mediante Wavelet.

fft_senal.m: función MATLAB que calcula la Transformada Rápida de Fourier (FFT) de la señal ruidosa.

filtrado_pasoBajo.m: función MATLAB para realizar el filtrado de la señal ECG simulada mediante un filtro paso bajo de Butterworth.

filtrado_Wavelet.m: función MATLAB para realizar el filtrado de la señal ECG simulada mediante Wavelet.