Equacions diferencials ordinàries (EDO) i transformades de Laplace (TL)

Albert Gras i Martí
Teresa Sancho Vinuesa

PID_00183898

Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

Índex

Sobre aquests materials de treball

Les equacions diferencials, o equacions que contenen derivades de funcions, apareixen en moltes aplicacions de l'enginyeria i de les ciències. Ja hem vist alguns exemples de càlcul integrodiferencial en l'última secció del mòdul "Càlcul integrodiferencial i aplicacions". En aquest mòdul farem una incursió breu en la resolució de les equacions diferencials i ens centrarem en les que involucren només funcions reals d'una única variable real. Una gran quantitat de fenòmens que tracta la física, l'enginyeria de telecomunicacions, l'economia, etcètera, es modelitzen en termes d'equacions diferencials, la solució de les quals permet conèixer l'evolució o algunes propietats del fenomen en qüestió. Introduirem els conceptes generals més importants sobre les equacions diferencials i veurem com podem resoldre els tipus més senzills que apareixen més freqüentment en els estudis d'enginyeria.

Una tècnica molt útil és l'aplicació de la transformada de Laplace.

1. Equacions diferencials

1.1. Què és una equació diferencial?

Dedicarem aquest mòdul, principalment, a resoldre equacions diferencials.

Denominem equació diferencial qualsevol equació que contingui derivades. Per exemple:

$$yy' + \frac{x^2}{y''} + \sin\ (xy''') = 2 + e^x \tag{1}$$

Un exemple més senzill d'equació diferencial és el següent:

$$y' = x \tag{2}$$

És important subratllar el fet que una solució d'una equació diferencial és una funció. I direm que hem resolt una equació diferencial quan trobem una funció $y(x)$ que verifica l'equació diferencial. Per exemple, la funció:

$$y(x) = \frac{x^2}{2} \tag{3a}$$

verifica l'equació diferencial (2), però també la verifica aquesta altra funció:

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + 23.5 \tag{3b}$$

A1

Comproveu que (3a) i (3b) són solució de l'equació (2).

A2

Quina serà la solució més general possible, del tipus (3b), que satisfaci l'equació (2)?

Ara bé, trobar una funció $y(x)$ expressada com a combinació de les funcions bàsiques (potencial, exponencial, logarítmica, trigonomètrica) que verifiqui una equació diferencial qualsevol, com la de l'equació (1), pot ser molt complicat i fins i tot impossible. Així i tot, sempre podem recórrer a un mètode numèric per tal de resoldre l'equació diferencial, de la mateixa manera que, per exemple, quan volem trobar els zeros d'una funció complicada o volem calcular una integral complicada recorrem a mètodes numèrics.

En definitiva, doncs, una equació diferencial és una equació del tipus:

$$f(x, y, y', y'', y''', \ldots) = 0 \tag{4}$$

en què x és la variable independent i y, la variable dependent. Una equació diferencial conté derivades de la funció incògnita. Resoldre l'equació diferencial implica, doncs, trobar la funció $y(x)$ que la verifica.

A3

Expliqueu per què l'expressió (4) és un cas més general que la (1) o la (2).

1.2. Exemple d'equació diferencial coneguda

Com hem vist en el mòdul "Càlcul integrodiferencial i aplicacions", hi ha una equació diferencial (que qui estudia enginyeria probablement coneix): la segona llei de Newton del moviment. Si un objecte que té una massa m es mou amb una acceleració a i a sobre hi actua una força F, la segona llei de Newton ens diu el següent:

$$F = m\,a \tag{5}$$

Amb la finalitat de veure que, efectivament, es tracta d'una equació diferencial, l'hem de reescriure una mica. En primer lloc, recordarem que l'acceleració de l'objecte es pot expressar de dues maneres: com la variació de la velocitat per unitat de temps:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{6a}$$

o com la derivada segona de la posició, respecte al temps dues vegades:

$$a = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} \tag{6b}$$

en què v és la velocitat de l'objecte i u és la funció que dóna la posició de l'objecte en qualsevol instant de temps t, $u(t)$. Si a més pensem que la força que actua sobre un objecte pot dependre del temps (per exemple, quan estirem un carretó cada vegada amb més força), de la velocitat (per exemple, quan cau un paracaigudes: la resistència de l'aire augmenta amb la velocitat de l'aire mateix) o de la posició que tingui l'objecte, podem escriure la segona llei de Newton com a equació diferencial en termes de la velocitat:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(t,u,v) \tag{7a}$$

o de la posició:

$$m\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = F(t,u,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}) \tag{7b}$$

En les equacions diferencials anteriors (7a, 7b) apareix la variable independent t, la variable dependent u i les derivades 1a. i 2a. de la posició $u' = v$, $u'' = a$.

Podem dir, doncs, que una equació diferencial expressa una relació entre una variable, com per exemple la variable u, i la variació (o les variacions) d'aquesta variable: u', u'', etcètera.

1.3. Ordre d'una equació diferencial

Un altre exemple d'equació diferencial és el següent:

$$ay'' + by' + cy = g(t) \tag{8a}$$

en què a, b i c són constants, és a dir, no depenen de les variables t ni y, i la funció $g(t)$ pot dependre de la variable independent t, però no depèn de la variable y.

I també podem tenir equacions diferencials d'aspecte més o menys complicat, com aquestes:

$$\sin y\, y'' = (1-y)y' + y^2 e^{-5y} \tag{8b}$$

$$y^{(4)} + 10y''' - 4y'' + 2y = \cos t \tag{8c}$$

L'ordre d'una equació diferencial és el de la derivada d'ordre més gran que conté. En els exemples anteriors:

- (7a) és una equació diferencial de primer ordre (en la variable v);
- (7b), (8a) i (8b) són equacions diferencials de segon ordre;
- (8c) és una equació diferencial de quart ordre.

Fixeu-vos que en la definició de l'ordre de l'equació diferencial, la potència a la qual s'eleven les variables no és important.

A4

De quin ordre són les equacions diferencials (1) i (2)?

En aquest curs ens centrarem, principalment, en les equacions diferencials ordinàries de primer i segon ordre. Hem afegit l'adjectiu *ordinàries* perquè, com veurem breument al final d'aquest mòdul, també hi ha equacions diferencials en derivades parcials.

Una EDO (equació diferencial ordinària) és la que únicament conté derivades "totals", és a dir, solament conté funcions d'una única variable, $f(x)$.

Se sol distingir entre EDO no homogènies, quan tenen un terme que només depèn de la variable independent –com l'equació (8c), que conté el terme cos t–, i EDO homogènies, quan tots els termes contenen la variable dependent o les seves derivades. És el cas de l'equació (8b), en què si escrivim tots els termes que depenen de y o de les seves derivades a l'esquerra de l'equació, resulta una EDO amb un zero a la dreta:

$$\sin y \frac{d^2y}{dx^2} - (1-y)\frac{dy}{dx} - y^2 e^{-5y} = 0$$

Nota: Els termes *homogènia* / *no homogènia* són similars als que s'utilitzen en àlgebra quan es parla de sistemes d'equacions.

La resolució d'una equació diferencial no és, en general, una tasca senzilla. S'han desenvolupat diferents tècniques per tal d'intentar resoldre les equacions més típiques.

El cas particular més important és el de les EDO lineals, que ara veurem.

La majoria de les tècniques de resolució per a EDO lineals de segon ordre es poden generalitzar per a EDO d'ordre superior. Per aquest motiu, ens centrarem en l'estudi d'equacions diferencials lineals ordinàries de primer i segon ordre.

1.4. EDO lineals

Es denomina *equació diferencial lineal* qualsevol EDO que es pugui escriure de la manera següent:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = g(t) \tag{9}$$

El més important que hem de tenir en compte sobre una equació diferencial lineal és que no hi ha productes de la funció $y(t)$ ni de les seves derivades entre si (com, per exemple, $y \cdot y'$ o $y' \cdot y''$). A més, ni la funció ni les seves derivades poden aparèixer amb una potència superior a la unitat (com, per exemple, y^2 o y'^3).

Els coeficients a_n, a_{n-1} … a_1, a_0 i la funció $g(t)$ de l'equació (9) poden ser nuls o no, poden ser constants o funcions de la variable independent t i, fins i tot, poden ser una funció no lineal de t. El fet que una EDO sigui lineal ho determina només la funció $y(t)$ i les seves derivades.

L'EDO que no es pot escriure de la manera (9) es denomina *EDO no lineal*.

A continuació veurem quines són les EDO lineals en els exemples anteriors.

A5

Són lineals o no les EDO de les equacions (1), (2), (4), (7a, 7b), (8a, 8b, 8c)?

I ara proposeu-ne uns quants exemples.

A6

a) Escriviu dues EDO que siguin lineals i dues més que no ho siguin.

b) És lineal o no la següent EDO?

$$\sin y + 3y' = 4t^2 \cos t$$

1.5. Solució d'una equació diferencial

Denominem *solució d'una equació diferencial en un interval*:

$$a < t < b \tag{10}$$

qualsevol funció $y(t)$ que compleixi l'equació diferencial en qüestió en l'interval anterior, (a, b).

És important comprovar que la solució d'una equació diferencial sovint va acompanyada per intervals, i que aquests intervals ens poden donar informació sobre la solució. Vegem-ne un exemple.

A7

Mostreu que la funció:

$$y(x) = x^{\frac{-3}{2}} \tag{11a}$$

és solució de l'EDO:

$$4x^2 y'' + 12xy' + 3y = 0 \tag{11b}$$

per a $x > 0$. (11c)

I ara contesteu aquestes preguntes:

A8

a) On hem fet servir la condició (11c) en la comprovació anterior, és a dir, quan la funció de l'equació (11a) és solució de l'equació diferencial (11b)?

b) Es pot incloure el punt $x = 0$ en la solució de l'equació diferencial?

c) Què passa si $x < 0$?

L'exemple anterior ens mostra que de vegades hem d'anar amb compte amb els intervals de validesa de la solució d'una equació diferencial. En general, ens limitarem a treballar amb nombres reals. No volem solucions que donin nombres complexos o imaginaris. En l'exemple (11a), això implica limitar l'estudi a l'interval $x > 0$.

A més, una equació diferencial pot tenir solucions molt diferents, com veurem en l'exemple següent.

A9

Comproveu que l'equació (11b) també té les solucions següents:

$$y(x) = x^{-1/2} \tag{12a}$$

$$y(x) = -x^{-3/2} \tag{12b}$$

$$y(x) = 7x^{-1/2} \tag{12c}$$

$$y(x) = -9x^{-3/2} + 7x^{-1/2} \tag{12d}$$

De fet, sempre hi ha infinites solucions per a una equació diferencial. Ja n'hem vist una mostra en l'activitat A2. Per tant, la qüestió és quina solució, de totes les que hi ha, volem. O és indiferent quina solució utilitzem? Aquesta qüestió ens porta a una definició nova: la de condicions inicials.

1.6. Condicions inicials

Les condicions inicials constitueixen una condició, o un conjunt de condicions, sobre la solució de l'equació, que ens permetran determinar, entre les infinites solucions que té l'equació diferencial, quina estem buscant.

Les condicions inicials solen ser de la forma:

$$y(t_0) = y_0$$

i/o:

$$y^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)}$$

És a dir, les condicions inicials són valors de la solució i/o de les derivades, en punts específics.

Com veurem més endavant, si les equacions diferencials es comporten "bé", solament tenen una solució que verifiqui determinades condicions inicials.

També veurem que el nombre de condicions inicials que es requereixen per tal d'especificar una solució particular d'una equació diferencial determinada depèn de l'ordre de l'equació diferencial.

A10

Comproveu que:

$$y(x) = x^{-3/2}$$

verifica l'equació diferencial:

$$4x^2 y'' + 12xy' + 3y = 0$$

amb les condicions inicials:

$$y(4) = \frac{1}{8}$$

i

$$y'(4) = -\frac{3}{64}$$

1.7. Problema de valors inicials

Un problema de valors inicials és una equació diferencial amb un nombre determinat de condicions inicials. El nombre de condicions inicials que són necessàries per tal de determinar una solució particular d'una equació diferencial coincideix amb l'ordre de l'equació diferencial. Per exemple, una equació diferencial de quart ordre requereix, doncs, quatre condicions inicials.

Els dos exemples següents són dos problemes de valors inicials:

a) $4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0,\ \ y(4) = \frac{1}{8},\ y'(4) = -\frac{3}{64}$ (13a)

b) $2ty' + 4y = 3,\ y(1) = -4$ (13b)

En el primer exemple anterior, (13a), que és una equació diferencial de segon ordre, hem especificat dues condicions inicials (el valor de la funció incògnita i de la derivada de la funció incògnita en un punt concret).

En el segon exemple, que és una equació diferencial de primer ordre, només hem especificat el valor d'una condició inicial, el valor de la funció en un punt.

A11

Inventeu-vos condicions inicials diferents per als exemples d'equacions diferencials anteriors, (13a i 13b).

1.8. Interval de validesa

Suposem que especifiquem les condicions inicials en un punt t_0; podem donar el valor de la funció en aquest punt:

$$y(t_0) = y_0$$

i/o el valor de les derivades de la funció en aquest punt:

$$y^{(k)}(t_0) = y_0^k$$

Donada una equació diferencial

$$f(x, y', y'', y''', \ldots) = 0$$

amb condicions inicials donades en un punt t_0 ,

es diu que $y : I \subset R \rightarrow R$ és solució de l'edo si y és n-vegades derivable en I, i verifica que $f(x, y', y'', y''', \ldots) = 0$ i $t_0 \in I$. L'interval I rep el nom d'interval de validesa.

1.9. Solució general

La solució general d'una equació diferencial és la forma més general que pot prendre la solució sense que tinguem en compte cap condició inicial. Vegem-ne un exemple.

A12

Comproveu que:

$$y(t) = \frac{3}{4} + \frac{c}{t^2} \qquad (14a)$$

(en què c és una constant indeterminada) és una solució de l'equació diferencial:

$$2ty' + 4y = 3 \qquad (14b)$$

Com veurem quan aprenguem a resoldre equacions diferencials, totes les solucions de l'equació diferencial (14b) seran de la forma (14a), amb una constant indeterminada c. Per tant, l'equació (14a) és la solució general de l'equació diferencial (14b).

En l'exemple anterior veiem que la solució general d'una equació diferencial de primer ordre té una sola constant indeterminada. Per tant, si volem determinar aquesta constant i obtenir una solució particular de l'equació diferencial farà falta una sola condició. Aquesta condició podria ser en forma del valor de la funció, o de la seva derivada, en un punt concret.

A13

Trobeu la solució particular de l'equació diferencial següent:

$$2ty' + 4y = 3 \tag{15a}$$

amb la condició inicial següent:

$$y(1) = -4 \tag{15b}$$

És a dir, trobeu la solució particular corresponent de l'equació diferencial (15a).

Nota: feu servir la solució general que ja coneixem, la de l'equació (14a).

En l'exemple anterior veiem que, una vegada tenim la solució general d'una equació diferencial, trobar la solució particular no implica res més que aplicar la condició o les condicions inicials i trobar els valors de les constants que apareixen en la solució general.

1.10. Solució implícita o solució explícita

Una solució explícita d'una equació diferencial és una solució expressada així: $y = f(t)$. És a dir, la variable dependent y apareix únicament a l'esquerra del signe igual i elevada a la potència unitat.

Qualsevol forma de la solució que no sigui de la forma anterior serà una solució implícita. Per exemple, $f(ty) = 0$.

Les solucions generals i les solucions particulars d'una equació diferencial poden ser implícites o explícites.

I com ja hem dit, de vegades només podem trobar solucions numèriques si resolem l'equació diferencial mitjançant algun mètode numèric.

A14

Comproveu que:

$$y^2 = t^2 - 3$$

és una solució implícita de l'equació diferencial:

$$y' = \frac{t}{y}$$

amb:

$$y(2) = -1$$

I ara veurem una solució explícita de la mateixa equació diferencial.

A15

Trobeu una solució particular explícita de l'equació diferencial:

$$y' = \frac{t}{y}$$

amb:

$$y(2) = -1$$

En l’activitat anterior hem estat capaços de trobar la solució explícita de l’equació diferencial a partir de la solució implícita, però això no sempre serà possible, i haurem de deixar la solució en forma implícita.

Notem, també, que en l’exemple anterior hem pogut trobar una solució particular explícita perquè teníem una condició inicial que ens ha ajudat a discriminar quina de les dues funcions és la correcta.

2. Equacions diferencials i modelització de problemes

Les equacions diferencials apareixen de manera natural en molts problemes de ciències o d'enginyeria. Així mateix, molts processos que es donen a la natura es poden descriure adequadament, mitjançant una equació diferencial. En particular, processos que impliquen els ritmes de canvi d'una magnitud amb el temps, com per exemple el refredament d'un cafè o el moviment d'un vehicle.

Segons la situació que tractem i les hipòtesis que fem per tal de descriure-la pot ser més o menys difícil arribar a plantejar l'equació diferencial, i després pot ser més o menys difícil resoldre l'equació diferencial corresponent.

El procés de descriure una situació física mitjançant una equació diferencial es denomina *modelització*. Vegem-ne un exemple.

2.1. Exemple: un cos que cau en un mitjà amb fricció

Una de les situacions físiques més senzilles que es poden imaginar és la d'un cos que cau. Suposem que el cos té una massa m i busquem l'equació diferencial que, en ser resolta, ens doni la velocitat de l'objecte en qualsevol instant de temps t. Suposarem que sobre el cos que cau només actua la gravetat i la resistència de l'aire. El diagrama de les forces que actuen sobre el cos es mostra en la figura 1.

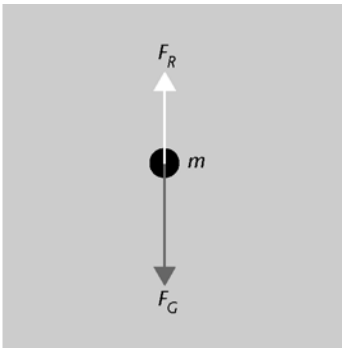

Figura 1: Forces que actuen sobre una massa que cau: gravetat i fregament.

El pes o força a causa de la gravetat és:

$$F_G = mg \tag{16a}$$

en què $g = 9.8$ m/s^2 és l'acceleració deguda a la gravetat.

Prenem com a sentit positiu del desplaçament el del moviment en la direcció vertical cap avall i prenem també com a positives les forces cap avall.

Suposarem que la força deguda a la resistència de l'aire és proporcional a la velocitat de l'objecte, v:

$$F_R = -\gamma v \tag{16b}$$

És a dir, com més ràpidament cau un objecte, més resistència li presenta l'aire. Això és fàcil de comprovar: si movem el palmell de la mà obert de manera lenta o ràpida dins de l'aigua, notarem que la resistència és més gran si la velocitat és més gran.

Prendrem el coeficient de resistència de l'expressió de l'equació (16b) positiu $\gamma > 0$ i d'acord amb el conveni de signes esmentat abans, hem de posar el signe – en la força de resistència perquè s'oposa a la de la gravetat.

Recordem la segona llei de Newton del moviment de la secció 1.2 d'aquestes notes:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(t,\ u,\ v) \tag{7a}$$

en què $F(t, u, v)$ és la suma de forces que actuen sobre l'objecte de massa m i que poden dependre del temps, de la posició o de la velocitat de l'objecte. En aquest cas, si recollim les expressions (16a) i (16b):

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \gamma v \tag{16c}$$

podem simplificar l'equació si dividim els dos membres per la massa de l'objecte:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\gamma}{m}v$$

que podem escriure així:

$$v' = g - \frac{\gamma}{m}v \tag{16d}$$

Veiem que es tracta d'una equació diferencial lineal de primer ordre que, una vegada resolta, donarà la velocitat v de l'objecte que cau mentre actua la gravetat i la resistència de l'aire.

A16

Prenem $m = 2$ kg, $\gamma = 0.392$ kg/s i suposem que en algun instant de temps és $v = 30$ m/s. Substituïu aquests valors en l'equació (16d) i expliqueu el significat del signe del valor de la derivada que n'obteniu. (Recordeu que $g = 9.8$ m/s^2.)

Encara no resoldrem l'equació diferencial (16d).

2.2. Abans d'aprendre mètodes de resolució d'equacions diferencials

Abans d'aprendre a resoldre equacions diferencials ordinàries, farem una recapitulació breu de les qüestions que ens preocuparan quan abordem equacions diferencials:

1) Tindrà solució una equació diferencial donada?

No totes les equacions diferencials tenen solució, però les que trobarem en aquest curs, sí.

El problema matemàtic de saber quan una equació diferencial tindrà solució es denomina *teorema d'existència* d'una equació diferencial.

2) Si una equació diferencial té solució, quantes solucions tindrà?

Hi pot haver més d'una solució per a una equació diferencial determinada.

Es denomina problema de la *unicitat de la solució* d'una equació diferencial.

3) Si una equació diferencial té una solució, la podem trobar?

La resposta no sempre és afirmativa.

En aquest curs ens centrarem a contestar la tercera qüestió per a uns quants tipus d'equacions diferencials d'interès per a la vostra carrera.

Comencem per un tipus d'equacions diferencials ben senzilles: les que permeten separar la variable dependent de la independent.

3. Equacions diferencials de variables separables

El primer tipus d'equacions diferencials que estudiarem és el que es denomina de *variables separables*. Es tracta d'equacions diferencials no lineals de primer ordre.

Una equació diferencial de variables separables és qualsevol equació diferencial de primer ordre que podem escriure de la manera següent:

$$f(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \tag{17}$$

És a dir, tota la dependència en x queda en el membre de la dreta, i tota la dependència en la variable y queda en el membre de l'esquerra.

Llavors, una equació diferencial serà separable (o de variables separables) si totes les y de l'equació diferencial són multiplicades per la derivada i totes les x de l'equació diferencial són a l'altre costat del signe igual.

En aquest cas, és senzill resoldre l'equació diferencial si la reescrivim així:

$$f(y)\ \mathrm{d}y = g(x)\ \mathrm{d}x \tag{18}$$

i integrem respecte de y a l'esquerra i respecte de x a la dreta:

$$\int f(y)\mathrm{d}y = \int g(x)\mathrm{d}x \tag{19}$$

En fer les integrals, obtindrem una solució implícita que, en molts casos, podrem resoldre i escriure en forma explícita, $y(x)$.

També ens haurem de fixar en l'interval de validesa de la solució i evitar que hi hagi divisions per zero, nombres complexos (com, per exemple, arrels quadrades de nombres negatius), logaritmes de nombres negatius, etcètera. La majoria de les solucions d'equacions diferencials que obtindrem no seran vàlides per a qualsevol valor de x.

A17

Resoleu l'equació diferencial següent (no fa falta que expresseu la solució en forma explícita):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6y^2x \tag{20a}$$

La solució que hem obtingut és una equació implícita. Abans d'escriure-la en forma explícita, sol ser més senzill calcular el valor de la constant si ens donen una condició inicial.

A18

a) Apliqueu la condició inicial següent:

$$y(1) = 1/25 \tag{20b}$$

par tal de determinar la constant C indeterminada en l'expressió de la solució de l'equació diferencial (20a) i escriviu la solució en forma explícita.

b) Determineu també l'interval de validesa de la solució.

Hem trobat la solució particular de l'equació diferencial (20a) que verifica la condició inicial (20b). Ara bé, si tenim una altra condició inicial, com, per exemple:

$$y(-4) = -\frac{1}{20} \tag{20c}$$

obtindrem una altra solució de l'equació diferencial. L'expressió de la solució coincideix amb la solució que verifica la condició inicial (20b), però ara l'interval de validesa canvia.

Vegem-ne un altre exemple.

A19

Resoleu el problema de valor inicial següent i trobeu l'interval de validesa de la solució:

$$y' = \frac{3x^2 + 4x - 4}{2y - 4} \tag{21a}$$

$$y(1) = 3 \tag{21b}$$

Nota: trobarem, en primer lloc, la forma implícita de la solució i, en l'activitat següent, discutirem la forma explícita, com hem fet en l'exemple anterior (activitats A17 i A18).

Ara hem de trobar la solució explícita.

A20

Trobeu la forma explícita de la solució de l'equació diferencial anterior, (21a), amb la condició (21b), i determineu l'interval de validesa de la solució.

Una vegada vist com resoldre equacions diferencials de variables separables, estudiarem un altre tipus d'equacions diferencials d'interès en l'enginyeria de telecomunicació: les equacions diferencials lineals i un mètode molt potent de resolució, que fa servir la denominada *transformada de Laplace*.

4. Transformada de Laplace

En aquesta secció veurem com utilitzar la transformada de Laplace (TL) per a resoldre equacions diferencials. En diverses aplicacions científiques o tecnològiques apareixen, a més, altres tipus de "transformades", com les transformades de Fourier, que estudiareu en altres cursos.

L'avantatge d'aplicar la TL a una equació diferencial és que permet transformar l'equació diferencial (que conté derivades de la variable) en un problema d'àlgebra (que manipula productes i potències de les variables). El problema d'àlgebra que obtindrem en aplicar la TL a l'equació diferencial serà, en general, de resolució més senzilla que si abordem directament l'equació diferencial. Després vindrà el problema de "desfer" la transformada i tornar a les variables inicials.

La TL també pot servir per a abordar problemes de valors inicials, de manera que serà una aplicació molt útil per a alguns problemes d'interès en la vostra carrera.

Com que la utilitat de la TL és més gran quan treballem amb funcions que tenen "salts", començarem amb una definició.

4.1. Funció contínua a trossos

Fins ara hem treballat amb funcions contínues (per exemple, la majoria de les funcions que apareixen en aquest curs). Direm que una funció és contínua a trossos si, d'interval a interval, la funció és contínua. Els trossos poden "empalmar bé" o no.

Denominem *interval obert* un subinterval del qual excloem els punts extrems. Per exemple, l'interval obert que va d'1.5 a 2.3 inclou tots els punts més grans d'1.5 i més petits de 2.3, però no inclou el punt 1.5 ni el 2.3.

Més formalment, podem dir que una funció és contínua a trossos en un interval determinat si aquest interval es pot descompondre en un nombre finit de subintervals oberts en què la funció és contínua i té un límit finit en els punts extrems de cada subinterval.

En la figura 2 es mostra l'esquema d'una funció contínua a trossos.

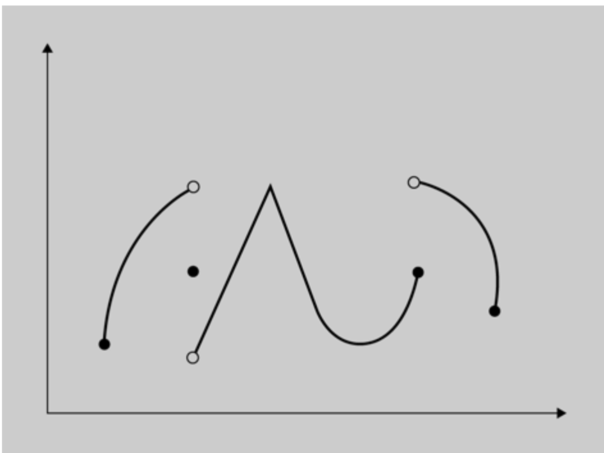

Figura 2: Una funció contínua a trossos. En els punts de discontinuïtat la funció pren un valor diferent en el límit per la dreta i per l'esquerra.

Dit d'una altra manera, una funció contínua a trossos és una funció que té un número finit d'interrupcions en l'interval considerat i no se'n va a l'infinit en cap punt de l'interval obert corresponent.

Definició de la TL

Suposem que $f(t)$ és una funció contínua a trossos. La TL de $f(t)$ s'escriu $L\{f(t)\}$ i es defineix així:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \tag{22a}$$

Es tracta, doncs, d'una integral impròpia que conté el factor exponencial e^{-st} en l'integrand, el qual introdueix una variable nova, s.

Les TL també se solen escriure en una notació alternativa, que mostra explícitament que la TL és una funció diferent, i de la variable nova s:

$$L\{f(t)\} = F(s) \tag{23}$$

(Recordeu que la variable t és una variable muda en la integral impròpia (22) i que desapareix en el procés d'integració.)

Per tant, la TL de la funció $f(t)$ és la funció $F(s)$, definida de manera que:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\ dt \tag{22b}$$

4.2. Integrals impròpies

Una integral impròpia[1] és una integral definida en què algun dels límits d'integració no és finit, ambdós són infinits o la funció que integrem presenta alguna singularitat (una divergència o una discontinuïtat).

El càlcul de TL, doncs, exigeix el càlcul d'integrals impròpies perquè el límit superior d'integració és infinit. Comencem amb l'exemple senzill següent. Suposem que la constant c no és nul·la, $c \neq 0$, i que volem avaluar la integral:

$$\int_0^{+\infty} e^{ct}\, dt$$

La manera com tractem el valor infinit en l'extrem superior de la integral és a força de substituir-lo per una constant finita, p:

$$\int_0^{p} e^{ct}\, dt$$

I, una vegada resolta la integral definida, prenem, en el resultat que hem obtingut, el límit per a valors infinits de p, és a dir, $\lim_{p\to+\infty}$:

$$\int_0^{+\infty} e^{ct}\, dt = \lim_{p\to+\infty} \int_0^{p} e^{ct}\, dt \tag{24}$$

1. Les integrals impròpies es treballen específicament en el mòdul de focalització: "Integració impròpia".

A21

Avalueu la integral impròpia (24), però no calculeu el límit encara.

Hem d'anar amb compte a l'hora de calcular el límit en l'equació (24), perquè el valor de c afectarà la resposta. Ja hem suposat que c no pot ser nul i, per tant, no hi ha cap problema amb el factor $1/c$ que ens apareix en calcular la integral de e^{ct} . Només ens hem de fixar en el signe de c que hem obtingut en l'activitat anterior.

Si $c > 0$, l'exponencial e^{cp} divergirà a l'infinit quan fem $p \to +\infty$. Però si $c < 0$, l'exponencial tendirà a zero quan $p \to +\infty$. Per tant, la integral (24) solament és convergent (és a dir, hi ha el límit i és finit) si $c < 0$ i obtenim:

$$\int_0^{+\infty} e^{ct}\,dt = -\frac{1}{c} \quad \text{si } c < 0 \tag{25}$$

Nota: si recordem que la integral definida (25) es pot interpretar com una àrea, obtenim, com esperàvem, que l'àrea que hi ha sota la corba e^{ct} i sobre l'eix $t > 0$ és positiva, $-1/c > 0$, perquè la funció exponencial és positiva.

4.3. Càlcul de TL

Ara que sabem com manejar integrals impròpies, començarem calculant les TL més senzilles.

A22

Calculeu $L\{1\}$, és a dir, calculeu:

$$L\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt$$

$L\{1\}$ significa que cal substituir la funció $f(t)$ per 1 en la definició de la TL, equació (22a).

Hem obtingut que:

$$L\{1\} = \frac{1}{s} \quad \text{si } s > 0 \tag{26}$$

Per tant, hem hagut d'imposar una restricció a la variable s per tal de poder calcular la TL del valor constant 1: la TL només està definida per a $s > 0$. Totes les TL tindran alguna restricció sobre el valor de s; no ho hem d'oblidar!

Fem un altre exercici.

A23

Calculeu $L\{e^{at}\}$.

Hem obtingut que:

$$L\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a} \quad \text{si } s > a \tag{27}$$

Com veiem, la variable s està restringida a valors més grans que a.

Però no sempre serà tot tan senzill. Calculem una altra TL.

A24

Calculeu $L\{\sin\,(at)\}$.

Ara hem obtingut que:

$$L\{\sin\ (at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{si } s > 0 \tag{28}$$

L'exemple anterior mostra que de vegades el càlcul de TL pot ser bastant pesat.

4.4. Una definició diferent de TL

Podeu trobar llibres que, en lloc de la definició (22a), fan servir la definició de la TL següent:

$$L\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\ dt \tag{29}$$

en què s'ha canviat el límit inferior de zero a menys infinit. En aquests casos, sovint ocorre que la funció $f(t)$ es defineix de la manera següent:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ f(t) & \text{si} \quad t > 0 \end{cases} \tag{30}$$

Dit d'una altra manera, se suposa que la funció s'anul·la si $t < 0$. En aquest cas, la integral de $-\infty$ a 0 valdrà zero perquè la funció $f(t)$ s'anul·la i tornem a la definició (22a).

4.5. Transformades de Laplace i EDO

Com hem vist en l'activitat A24, el càlcul directe de TL pot ser bastant llarg o complicat. El que fem normalment per tal d'estalviar esforços és utilitzar una taula de transformades que contingui les que apareixen més habitualment, com la que teniu al final d'aquest mòdul.

Abans d'abordar un parell d'exemples per il·lustrar l'ús de la taula, comprovem una propietat útil de les TL: la linealitat.

A25

Demostreu la propietat de linealitat següent:

- La TL d'una suma de funcions és igual a la suma de TL de cada funció:

$$L\{f+g\} = L\{f\} + L\{g\} \tag{31a}$$

- La TL del producte d'una funció per una constant és igual a la constant multiplicada per la TL de la funció:

$$L\{af\} = aL\{f\} \tag{31b}$$

Així, per a dues funcions $f(t)$ i $g(t)$ i dues constants a i b qualssevol, es compleix que:

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s) \tag{31c}$$

Per tant, quan calculem TL no ens hem de preocupar de constants ni de sumes o diferències de funcions. Només cal que calculem la TL de les funcions individuals i que mantinguem les constants i les addicions o diferències.

A continuació resoldrem uns quants exemples de càlcul de TL amb l'ajuda de la taula de TL que teniu al final d'aquestes anotacions.

A26

Feu servir la taula de TL i calculeu la TL de les funcions següents:

a) $f(t) = 6e^{-5t} + e^{3t} + 5t^3 - 9$

b) $g(t) = 4\cos(4t) - 9\sin(4t) + 2\cos(10t)$

c) $h(t) = 3\sinh(2t) + 3\sin(2t)$

d) $g(t) = e^{3t} + \cos(6t) - e^{3t}\cdot\cos(6t)$

Nota: La funció sinus hiperbòlic es defineix així:

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Resolem un altre conjunt d'exemples.

A27

Calculeu les TL de les funcions següents:

a) $f(t) = t\cosh(3t)$

b) $h(t) = t^2\sin(2t)$

c) $g(t) = t^{3/2}$

d) $f(t) = (10t)^{3/2}$

e) $f(t) = t\,g'$ (en què g' és la derivada respecte de t d'una funció $g(t)$ qualsevol)

Nota: la funció cosinus hiperbòlic es defineix així:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

No hem d'oblidar, com hem vist en els exemples anteriors, que podem utilitzar algunes fórmules generals de la taula de TL per a obtenir TL noves que no apareixen explícitament.

La TL i les EDO lineals

Abans de continuar amb el càlcul de TL, fem una pausa breu per tal de recordar per què estem parlant d'aquestes transformades. El nostre objectiu és resoldre EDO d'un tipus determinat i la TL pot ser una eina útil. Per exemple, l'equació diferencial:

$$y'' - 10y' + 9y = 5t \tag{32}$$

que és una equació diferencial lineal i de segon ordre, amb les condicions inicials següents:

$$y(0) = -1, \qquad y'(0) = 2 \tag{33}$$

es pot resoldre mitjançant el recurs de la TL.

Observeu que per tal d'aplicar la TL és necessari saber com actua sobre l'equació diferencial. Obtenim aquesta relació amb la fórmula (19) i (20) de la taula de TL.

A28

Calculeu la TL de cada membre de l'equació (32).

No hem obtingut la solució $y(t)$ del problema de valors inicials (32) i (33), però hem obtingut la TL següent:

$$Y(s) = \frac{-s^3 + 12s^2 + 5}{s^2(s^2 - 10s + 9)} \tag{34}$$

Per tant, si volem la solució $y(t)$ haurem de calcular la funció inversa. De moment deixarem aquí la resolució de l'EDO (32) i abordarem el problema del càlcul de la TL inversa amb alguns exemples.

Aquí només volem constatar que hem transformat el problema de valors inicials d'una EDO, com la (32) i la (33), en una equació algebraica, com hem vist en l'activitat anterior, A28. Les equacions algebraiques sempre són més senzilles que les equacions diferencials, però no hem d'oblidar que cal desfer el procés seguit i calcular la TL inversa per tal d'obtenir la solució $y(t)$. De vegades aquest últim pas pot ser pesat.

5. Transformada de Laplace inversa

Trobar la TL d'una funció no és gaire difícil si disposem d'una bona taula de transformades. Ara volem seguir el camí invers i, a partir d'una funció $F(s)$, esbrinar quina funció teníem originalment. Aquesta operació es denomina *calcular la TL inversa*.

El procés de calcular la inversa de la TL pot ser més complicat i llarg que el de calcular la TL directa.

La TL inversa la denotarem així:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \tag{35}$$

La TL inversa té la mateixa propietat de linealitat que la TL directa, equació (31): per a dues TL $F(s)$ i $G(s)$, i dues constants arbitràries a i b:

$$L^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = aL^{-1}\{F(s)\} + bL^{-1}\{G(s)\} \tag{36}$$

Tal com passa amb la TL directa, la TL inversa compleix la propietat de linealitat, equacions (31).

Per tant, en el càlcul de les TL inverses ens hem d'ocupar dels sumands que contingui la funció.

A continuació en resoldrem alguns exemples.

A29

Calculeu la TL inversa de cadascuna d'aquestes funcions:

a) $F(s) = \dfrac{6}{s} - \dfrac{1}{s-8} + \dfrac{4}{s-3}$

b) $H(s) = \dfrac{19}{s+2} - \dfrac{1}{3s-5} + \dfrac{7}{s^5}$

c) $F(s) = \dfrac{6s}{s^2+25} + \dfrac{3}{s^2+25}$

d) $G(s) = \dfrac{8}{3s^2+12} + \dfrac{3}{s^2-49}$

Com hem vist en els exercicis que acabem de resoldre, la millor manera d'identificar una transformada és fixant-nos en el denominador. I si hi ha més d'una possibilitat, podem fer servir el numerador per a identificar quina expressió és la correcta. De vegades farà falta ajustar el numerador i expressar-lo en la forma adequada per tal d'obtenir la funció inversa.

És a dir, amb una mica de pràctica, us adonareu que, en general, convé tenir en compte les recomanacions següents:

1) La clau per tal d'obtenir les TL inverses de manera senzilla és observar el denominador i intentar identificar de quina funció es pot tractar, a la vista del denominador.

2) Si únicament hi ha una entrada en la taula de TL que té aquell denominador particular, el pas següent és assegurar-se que el numerador té la forma adequada per seguir el procediment de càlcul de la TL inversa.

3) Si el numerador no té la forma adequada, sempre és senzill preparar-lo, i llavors podeu calcular la TL inversa.

4) Si hi ha més d'una entrada en la taula que té un denominador concret, llavors els numeradors de cada expressió de la taula seran diferents i cal comparar-los amb el que tingueu vosaltres. Modifiqueu el numerador de l'expressió, si fa falta, per tal d'ajustar-lo a l'expressió de la taula, i ja podreu calcular la TL inversa.

Ara podem abordar problemes una mica més difícils.

A30

Calculeu les TL inverses de les expressions següents:

a) $F(s)=\dfrac{6s-5}{s^2+7}$

b) $F(s)=\dfrac{1-3s}{s^2+8s+21}$

c) $G(s)=\dfrac{3s-2}{2s^2-6s-2}$

d) $H(s)=\dfrac{s+7}{s^2-3s-10}$

5.1. Descomposició en fraccions simples

Aviat us adonareu que en molts casos és necessari fer una descomposició en fraccions simples (quocients de polinomis del tipus $\dfrac{A}{(ax+b)^n},\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$) quan voleu calcular TL inverses.

Fixeu-vos que podríem haver fet l'últim exemple de l'activitat anterior, d), com els casos b) i c) i hauríem obtingut funcions trigonomètriques hiperbòliques. En utilitzar les definicions d'aquestes funcions, podríem arribar, per descomptat, a la solució que hem donat en l'activitat anterior, en forma de funcions exponencials, més senzilles de tractar que les hiperbòliques. Per aquesta raó, convé fer servir el mètode de descomposició en fraccions simples, tot i que impliqui una mica de feina extra, perquè la solució final involucrarà funcions més senzilles.

La primera regla per a arribar a una descomposició en fraccions simples és factoritzar el denominador tant com sigui possible. Després, podem fer servir expressions com les de la taula 1 per a plantejar la descomposició en fraccions simples.

Nota: és clar que el primer i el tercer cas de la taula anterior són casos especials del segon i el quart cas, respectivament. Però els escrivim explícitament perquè apareixen molt sovint.

Resolem uns quants exemples més per practicar la descomposició en fraccions simples. És la mateixa tècnica que de vegades permet calcular integrals on l'integrand és un quocient de polinomis.

Recordem quina és la descomposició en fraccions simples associades a cada factor del denominador original:

Taula 1. Descomposició en fraccions simples

Factor en el denominador	Termes en la descomposició en fraccions simples
$ax + b$ (arrel real simple)	$\dfrac{A}{ax+b}$
$(ax + b)^k$ (arrel real múltiple)	$\dfrac{A_1}{ax+b}+\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\dfrac{A_k}{(ax+b)^k}$
$ax^2 + bx + c$ (arrels imaginàries)	$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$(ax^2 + bx + c)^k$ (arrels imaginàries múltiples)	$\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\dfrac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\cdots+\dfrac{A_kx+B_k}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}$

A31

Calculeu la TL inversa de:

a) $G(s) = \dfrac{86s - 78}{(s+3)(s-4)(5s-1)}$

b) $F(s) = \dfrac{2 - 5s}{(s-6)\left(s^2+11\right)}$

c) $G(s) = \dfrac{25}{s^3\left(s^2+4s+5\right)}$

Com veieu, les fraccions simples apareixen sempre que fem servir les TL com a eina per a resoldre equacions diferencials.

5.2. Funcions esglaó

Abans de començar a resoldre EDO amb el mètode de la TL cal que estudiem una altra funció. Si no fos per la TL, seria molt més difícil resoldre equacions diferencials que incloguessin la funció esglaó $u_c(t)$.

La funció esglaó també es denomina *funció de Heaviside*. Es defineix així:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < c \\ 1 & \text{si} \quad t \geq c \end{cases} \tag{37}$$

A32

Com serà la gràfica de la funció de Heaviside?

També s'empren altres notacions per a la funció esglaó:

$$u_c(t) = u(t - c) = H(t - c) \tag{38}$$

Ens podem imaginar la funció esglaó com un interruptor que està apagat fins que $t = c$ i que en aquell punt s'engega i pren el valor 1. Però de vegades necessitem que el salt de la funció no sigui de 0 a 1, sinó a 3.5, per exemple, o que s'anul·li en altres intervals diferents de l'eix de nombres reals.

A33

a) Escriviu una funció $y(t)$ que inclogui la funció esglaó i que prengui els valors següents:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < c \\ 4 & \text{si} \quad t \geq c \end{cases}$$

b) Escriviu una funció que commuti del valor 0 al valor -7 quan $t \geq c$.

c) Volem un interruptor que s'engegui (amb el valor 1 per a $t < c$) i que s'apagui quan $t = c$. Escriviu la funció corresponent.

I ara volem que la funció s'apagui des del valor 3 quan passem per $t = -2$.

A34

Escriviu una funció $y(t)$ (que inclogui la funció esglaó) que tingui el valor 3 fins al punt $t = -2$ i que, a partir d'aquest punt, s'anul·li:

$$y(t) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad t < -2 \\ 0 & \text{si} \quad t \geq -2 \end{cases}$$

Escriviu també la solució emprant les altres notacions de la funció esglaó, equació (38).

Però la funció de Heaviside pot representar interruptors o discontinuïtats més complicades.

A35

Escriviu la funció següent en termes de funcions d'esglaó.

$$f(t) = \begin{cases} -4 & \text{si} \quad t < 6 \\ 25 & \text{si} \quad 6 \leq t < 8 \\ 16 & \text{si} \quad 8 \leq t < 30 \\ 10 & \text{si} \quad t \geq 30 \end{cases}$$

Quin aspecte té la funció anterior?

A36

Representeu gràficament la funció de l'activitat anterior, A35.

5.3. Interruptors que no prenen valors constants

La majoria dels "interruptors" no s'engeguen i prenen valors constants, sinó que s'engeguen i varien de manera continua amb el valor de t, com en el cas de la figura 3.

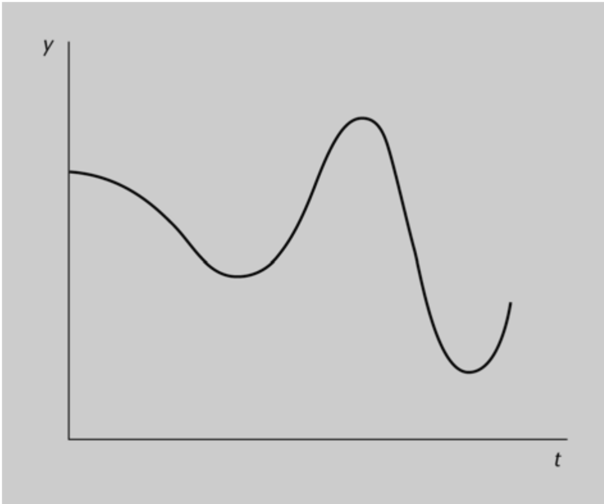

Figura 3: Una funció qualsevol $y(t)$ pot representar la variació d'un "interruptor" amb el temps.

Volem expressar, en forma de funcions esglaó, un interruptor que està apagat fins que $t = c$ i s'engega i pren els valors de la funció que mostra la figura 3:

– en $t = 0$, ha de prendre el valor $f(0)$;
– en $t = c + 4$, per exemple, ha de prendre el valor $f(4)$…

Dit d'una altra manera, volem que l'interruptor tingui l'aspecte de la figura 4.

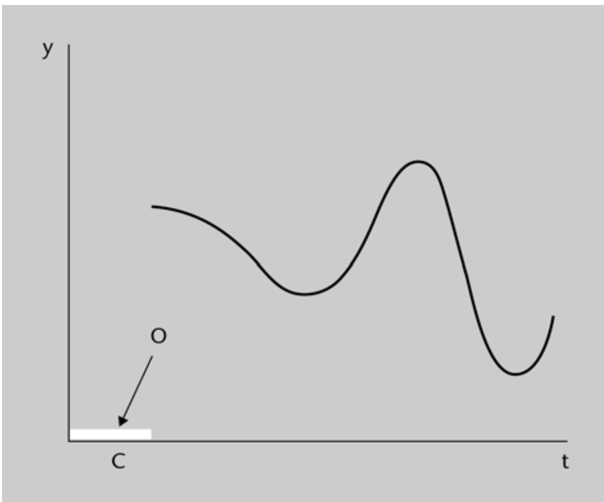

Figura 4: Una funció qualsevol $y(t)$ pot representar la variació d'un "interruptor" amb el temps, que s'engega en l'instant $t = c$.

És a dir, l'interruptor s'ha d'engegar en $t = c$ i prendre els valors que té la funció a partir del punt $t = c$, $f(t - c)$.

És essencial que entenguem la idea expressada en el paràgraf anterior: com que volem que l'interruptor s'engegui en el punt $t = c$ (en què c pot ser qualsevol nombre positiu o negatiu, inclòs el zero) i que l'interruptor prengui els valors de la funció que apareix en la figura 5, aleshores hem de fer un "desplaçament" de l'argument de la funció $f(t)$, i prendre-la en els punts $f(t - c)$. D'aquesta manera, els valors de la funció $f(t - c)$ per a $t > c$ són els mateixos que els de la funció $f(t)$ per a $t > 0$.

L'expressió de l'interruptor que volem és la següent:

$$g(t) = u_c(t) \cdot f(t - c) \tag{39}$$

Què passa si prenem la TL de l'expressió anterior? Apliquem la definició:

$$L\{u_c(t)\ f(t-c)\} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\ u_c(t)\ f(t-c)\ \mathrm{d}t = \int_c^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\ f(t-c)\ \mathrm{d}t$$

En l'últim pas hem fet servir el fet que la funció esglaó anul·la l'integrand si $t < c$ i val 1 en la resta de valors de t. Per aquest motiu, la integral definida comença a $t = c$.

Si ara fem la substitució $z = t - c$, la integral resulta:

$$L\{u_c(t)\ f(t-c)\} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s(z+c)}\ f(z)\ \mathrm{d}z = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sz}\ \mathrm{e}^{-cs}\ f(z)\ \mathrm{d}z$$

Fixeu-vos que el canvi de variable ha fet que torni a aparèixer el 0 en el límit inferior de la integral. A més, podem treure el segon factor de la integral perquè no depèn de z:

$$L\{u_c(t)\ f(t-c)\} = \mathrm{e}^{-cs} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sz}\ f(z)\ \mathrm{d}z$$

i la integral és la TL de la funció $f(t)$. Per tant, hem obtingut que:

$$L\{u_c(t)\ f(t - c)\} = \mathrm{e}^{-cs}\ F(s) \tag{40}$$

És a dir, havíem desplaçat en la funció $f(t)$ un valor c, el mateix paràmetre que introdueix la funció de Heaviside, $u_c(t)$, però la TL que finalment hem necessitat és la de $f(t)$, no la de $f(t - c)$. L'equació (40) és l'expressió (13) de la taula de TL que teniu al final del mòdul.

L'equació (40) és una expressió molt útil de TL inversa si la capgirem:

$$L^{-1}\{\mathrm{e}^{-cs}\ F(s)\} = u_c(t) \cdot f(t - c) \tag{41}$$

I la podem fer servir quan apareixen funcions exponencials en la TL inversa.

A37

Apliqueu l'expressió de l'equació (40) per tal de calcular la TL de la mateixa funció de Heaviside:

$$L(u_c(t)) = L(u_c(t) \cdot 1)$$

Per tant, obtenim dues relacions útils més:

$$L\left(u_c(t)\right) = \frac{\mathrm{e}^{-cs}}{s} \tag{42}$$

$$L^{-1}\left(\frac{\mathrm{e}^{-cs}}{s}\right) = u_c(t) \tag{43}$$

Resolem uns quants exercicis.

A38

Calculeu la TL de les funcions següents:

a) $g(t) = 10u_{12}(t) + 2(t-6)^3\, u_6(t) - (7 - \mathrm{e}^{12-3t})\, u_4(t)$

b) $f(t) = -t^2u_3(t) + \cos(t) \cdot u_5(t)$

c) $h(t) = \begin{cases} t^4 & \text{si} \quad t < 5 \\ t^4 + 3\sin\left(\dfrac{t}{10} - \dfrac{1}{2}\right) & \text{si} \quad t \geq 5 \end{cases}$

d) $f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad t < 6 \\ -8 + (t-6)^2 & \text{si} \quad t \geq 6 \end{cases}$

Com s'ha vist en l'exemple anterior, quan no hi ha funcions de Heaviside, el càlcul de la TL és senzill si disposem d'una bona taula de TL. Però quan hi ha funcions de Heaviside, el càlcul de les TL de vegades és una mica més pesat.

Ara farem algun exercici de càlcul de TL inverses.

A39

Calculeu la TL inversa d'aquestes funcions:

a) $H(s) = \dfrac{s\mathrm{e}^{-4s}}{(3s+2)(s-2)}$

b) $G(s) = \dfrac{5\mathrm{e}^{-6s} - 3\mathrm{e}^{-11s}}{(s+2)\left(s^2+9\right)}$

c) $F(s) = \dfrac{4s + \mathrm{e}^{-s}}{(s-1)(s+2)}$

d) $G(s) = \dfrac{3s + 8\mathrm{e}^{-20s} - 2s\mathrm{e}^{-3s} + 6\mathrm{e}^{-7s}}{s^2(s+3)}$

En algun moment del procés haurem d'utilitzar la relació (41).

6. Resolució de problemes de valors inicials amb transformades de Laplace

Ara que ja hem après a calcular tant TL com TL inverses, és hora de tornar a les equacions diferencials. Tot i així, en primer lloc necessitem saber què val la TL de la derivada d'una funció.

Si f, f', f'', ... , $f^{(n-1)}$ són totes funcions contínues i $f^{(n)}$ és una funció contínua a trossos, aleshores:

$$L\{f^{(n)}\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{44}$$

A40

Escriviu l'expressió anterior per a una funció $y(t)$ i per als casos $n = 1$ i $n = 2$.

Fixeu-vos que en el cas $n = 1$ i $n = 2$ apareixen les condicions inicials, és a dir, els valors a $t = 0$, $y(0)$, $y'(0)$ que fèiem servir en la secció 1.7 de problemes de valors inicials.

Les TL són útils, en particular, per a resoldre equacions diferencials no homogènies, és a dir, equacions que tenen un terme independent. En concret, la tècnica de la TL és útil quan l'EDO conté funcions de Heaviside en la funció independent.

Començarem amb un parell d'exemples ben senzills que il·lustraran el procediment per a resoldre equacions diferencials.

A41

Utilitzeu la TL i resoleu el problema de valors inicials següent:

$$y'' - 10y' + 9y = 5t,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2$$

Tot i que els hem esmentat abans, hem de subratllar dos fets respecte a l'ús de TL per a resoldre problemes de valors inicials:

1) L'ús de TL redueix una EDO a un problema algebraic, i normalment és més senzill resoldre un problema algebraic que una EDO.

2) En lloc d'obtenir solucions generals de les EDO i posteriorment utilitzar les condicions inicials adequades per a obtenir la solució particular, amb l'ús de TL es poden aplicar les condicions inicials des del primer pas. Aleshores obtenim directament la solució particular d'EDO, no una solució general.

A més, les solucions d'alguns problemes no es poden obtenir amb una altra tècnica que no sigui la TL.

Fem un altre exercici senzill.

A42

Utilitzeu el mètode de la TL per a resoldre el problema de valors inicials següent:

$$2y'' + 3y' - 2y = te^{-2t}, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = -2$$

Ara abordarem un problema una mica més complicat.

A43

Resoleu el problema de valors inicials següent:

$$y'' - 6y' + 15y = 2 \sin (3t), \qquad y(0) = -1, \qquad y'(0) = -4$$

Fins ara només hem vist problemes de valors inicials en què els valors inicials es donaven en el punt $t = 0$. Ja sabem que per calcular la TL de les derivades d'una funció necessitem els valors inicials a $t = 0$. Però, en alguns problemes, podem trobar que els valors inicials no són a $t = 0$. Com es manegen aquests casos? Vegem-ne un exemple.

A44

Resoleu el problema de valors inicials següent:

$$y'' + 4y' = \cos (t - 3) + 4t, \qquad y(3) = 0, \qquad y'(3) = 7$$

Amb la resolució d'aquest problema, ja hem vist com tractar problemes de valors inicials que no tenen les condicions inicials a $t = 0$. També hem vist en l'últim exemple que no sempre és el millor combinar tots els termes en un únic problema de fraccions simples, com s'ha fet en altres casos.

Recapitulació final: què hem après en aquest mòdul?

Hi ha molts tipus d'EDO que no hem vist i diverses tècniques que permeten resoldre-les. La introducció breu que hem mostrat aquí us permetrà abordar els casos d'EDO més habituals en la vostra carrera. D'altra banda, la resolució dels tipus d'EDO que se us presentaran en aquest curs és relativament senzilla quan s'ha practicat bastant.

A45

Recapitulació:

Comenteu què heu après en aquest mòdul en particular:

- Quina forma té una equació diferencial.
- Com són les seves solucions.
- Quin tipus d'equacions diferencials hem resolt.
- Per a què serveix la transformada de Laplace en la resolució d'una equació diferencial lineal.

Taula de transformades de Laplace

Taula de transformades de Laplace

	Funció	Transformada de Laplace
1	$y(t) = 1$	$Y(s) = \frac{1}{s}$
2	$y(t) = t$	$Y(s) = \frac{1}{s^2}$
3	$y(t) = t^2$	$Y(s) = \frac{2}{s^3}$
4	$y(t) = t^3$	$Y(s) = \frac{6}{s^4}$
5	$y(t) = t^n$	$Y(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$
6	$y(t) = e^{at}$	$Y(s) = \frac{1}{s-a}$
7	$y(t) = \sin(kt)$	$Y(s) = \frac{k}{s^2+k^2}$
8	$y(t) = \cos(kt)$	$Y(s) = \frac{s}{s^2+k^2}$
9	$y(t) = e^{at}\, t^n$	$Y(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
10	$y(t) = e^{at} \sin(kt)$	$Y(s) = \frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
11	$y(t) = e^{at} \cos(kt)$	$Y(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
12	$y(t) = e^{at} f(t)$	$Y(s) = L\{f(t)\}\ (s-a)$
13	$y(t) = f(t-a)\ U(t-a)$	$Y(s) = e^{-as}\ L\{f(t)\}$
14	$y(t) = t\ \sin(kt)$	$Y(s) = -\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right)' = \frac{2ks}{\left(s^2+k^2\right)^2}$
15	$y(t) = t^2\ \sin(kt)$	$Y(s) = \left(\frac{k}{s^2+k^2}\right)'' = \frac{2k(3s^2-k^2)}{\left(s^2+k^2\right)^3}$
16	$y(t) = t\ \cos(kt)$	$Y(s) = -\left(\frac{s}{s^2+k^2}\right)' = \frac{s^2-k^2}{\left(s^2+k^2\right)^2}$
17	$y(t) = t^2\ \cos(kt)$	$Y(s) = \left(\frac{s}{s^2+k^2}\right)'' = \frac{2s(s^2-3k^2)}{\left(s^2+k^2\right)^3}$
18	$y(t) = t^n f(t)$	$Y(s) = (-1)^n\ L\{f(t)\}^{(n)}$ (En què apareix la derivada n-èsima de la TL de la funció.)
19	$y(t) = f'(t)$	$Y(s) = sL\{f(t)\} - f(0)$
20	$y(t) = f''(t)$	$Y(s) = s^2L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
21	$y(t) = f'''(t)$	$Y(s) = s^3L\{f(t)\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$
22	$y(t) = f^{(n)}(t)$	$Y(s) = s^nL\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
23	$y(t) = f(t) \cdot g(t)$	$(f * g)(t) \Rightarrow L\{(f * g)(t)\} = L\{f(t)\} \cdot L\{g(t)\}$ on $(f \cdot g)(t)$ és la convolució de f i g definida com: $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$

	Funció	Transformada de Laplace
24	$y(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$Y(s) = \dfrac{L\{f(t)\}}{s}$
25	$y(t) = \sqrt{t}$	$Y(s) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
26	$y(t) = \mathrm{e}^{at}\sinh(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2 - b^2}$
27	$y(t) = \mathrm{e}^{at}\cosh(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$

Cal ser conscients que les transformades de Laplace $Y(s)$ que hem posat en aquesta taula estan restringides a alguns valors de s. Per exemple, les transformades de les cinc primeres entrades només són vàlides per a $s > 0$, i la transformada de la sisena només és vàlida quan $s > a$, etc.

Resolució d'activitats

A1

$$y(x)=\frac{x^2}{2}\rightarrow y'(x)=\frac{2x}{2}=x$$
$$y(x)=\frac{x^2}{2}+23.5\rightarrow y'(x)=\frac{2x}{2}=x$$

A2

a) Una solució del tipus $y(x)=\frac{x^2}{2}+$ constant.

A3

La funció de l'equació (4) pot ser una funció qualsevol de les variables i de les derivades de la variable independent.

A4

L'equació diferencial (1) és de tercer ordre, i l'equació diferencial (2) és de primer ordre.

A5

Són no lineals les EDO de les equacions (1) i (8b).

Són lineals les EDO de les equacions (2), (8a) i (8c).

L'EDO de l'equació (4) no podem saber si és lineal o no: depèn de la forma de la funció f.

Les EDO de les equacions (7a) i (7b) tampoc no podem dir si són o no lineals, depèn de la forma que tingui la funció F.

A6

b) No és lineal, a causa del terme sin y.

A7

$$y'(x) = -(3/2)x^{-5/2}$$
$$y''(x) = +(15/4)x^{-7/2}$$

Si substituïm en l'EDO:

$$4x^2\left(\frac{15}{4}x^{-7/2}\right)+12x\left(-\frac{3}{2}x^{-5/2}\right)+3\left(x^{-3/2}\right)=0$$
$$15x^{-3/2}-18x^{-3/2}+3x^{-3/2}=0$$
$$0=0$$

A8

a) No s'ha usat en cap moment.
b) No es pot incloure el punt $x = 0$, perquè si escrivim la funció així:

$$y(x)=x^{-3/2}=\frac{1}{\sqrt{x^3}} \tag{11d}$$

veiem que en aquest punt la funció no està definida: és una divisió per zero.

c) L'expressió (11c) ens diu que només discutirem arrels reals. Si $x < 0$, per exemple per a $x = -2$, l'expressió (11a) dóna:

$$y(-2) = \frac{1}{\sqrt{-8}}$$

que no és un nombre real.

A9

La comprovació és senzilla; si teniu dificultats plantegeu-les en el fòrum.

A10

Ja hem comprovat en l'activitat A7 que l'expressió $y(x) = x^{-3/2}$ verifica l'equació diferencial.

A més, si fem $x = 4$, obtenim:

$$y(4) = 4^{-3/2} = (2^2)^{-3/2} = 2^{-3} = 1/8$$

i si en la derivada

$$y'(x) = (-3/2)x^{-5/2}$$

fem $x = 4$, obtenim:

$$y'(4) = (-3/2)4^{-5/2} = (-3/2) \cdot (2^2)^{-5/2} = (-3/2) \cdot 2^{-5} = -3/2^6 = -3/64$$

A11

Cal tenir present que hi pot haver condicions inicials ben diferents de les de les equacions (13*a*) i (13*b*), com, per exemple, condicions que involucren només derivades calculades en punts diferents:

a) $y'(4) = -2,\ y'(6) = \frac{1}{3}$

b) $y'(2) = -3$

O bé condicions que no contenen cap derivada:

a) $y(4) = 3,\ y(-8) = -4$

b) $y(1.2) = -12$

A12

Així és:

$$y' = \frac{-2c}{t^3}$$

i si ho substituïm en

$$2ty' + 4y = 3$$

obtenim:

$$2t \cdot \left(\frac{-2c}{t^3}\right) + 4\left(\frac{3}{4} + \frac{c}{t^2}\right) = \frac{-4c}{t^2} + 3 + \frac{4c}{t^2} = 3$$

És a dir,

$$3 = 3$$

com volíem demostrar.

A13

Com que la solució general de l'equació diferencial és la de l'equació (14a),

$$y(t) = \frac{3}{4} + \frac{c}{t^2}$$

l'únic que cal és determinar el valor de c que faci que la solució general compleixi la condició inicial (15b). Fem $t = 1$ en l'expressió anterior i tenim en compte que el resultat ha de ser $y(1) = -4$:

$$-4 = y(1) = \frac{3}{4} + \frac{c}{1^2} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{19}{4}$$

Per tant, la solució particular que busquem de l'equació diferencial (15a) és:

$$y(t) = \frac{3}{4} - \frac{19}{4t^2}$$

A14

Com que tenim la variable independent elevada al quadrat, y^2, i no la variable y aïllada en l'expressió de la solució de l'equació, es tracta d'una solució implícita. Per a comprovar que és solució, podem derivar la solució respecte de la variable t i trobar que

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t$$

és a dir, si aïllem $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$:

$$y' = \frac{t}{y}$$

A més, si substituïm $t = 2$ trobem que l'equació, $y^2 = t^2 - 3$, dóna:

$$\left(y(2)\right)^2 = 4 - 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad y(2) = \pm 1$$

i la funció implícita verifica la condició inicial

$$y(2) = -1$$

Nota

També verifica una altra condició inicial, $y(2) = +1$, però això no importa en aquest moment.

A15

Ja sabem, per l'activitat anterior, que $y^2 = t^2 - 3$ és una solució implícita particular de l'equació diferencial

$y' = t/y$. Podem trobar la solució explícita si aïllem $y(t)$:

$$y = \pm\sqrt{t^2 - 3}$$

Per a saber quina de les dues solucions és la correcta, $y = +\sqrt{t^2 - 3}$ o $y = -\sqrt{t^2 - 3}$, hem d'aplicar novament la condició inicial: només una de les dues solucions la complirà. Com que volem que $y(2) = -1$, veiem que la solució que busquem és la que conté el valor negatiu de l'arrel. Per tant, la solució explícita particular correcta és:

$$y(t) = -\sqrt{t^2 - 3}$$

Nota

Ara ja no obtenim el valor $y(2) = +1$ en substituir $t = 2$ en la solució explícita particular, com ocorria en l'activitat anterior, l'A14.

A16

Obtenim que $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 3.92\ \mathrm{m/s^2} > 0$.

Per tant, la velocitat és creixent en el moment en què $v = 30$ m/s.

A17

Clarament, es tracta d'una equació diferencial separable. Per tant, la separem i n'integrem els dos membres. En cadascuna de les integracions apareix una "constant d'integració" i tenim, doncs, dues constants indeterminades que podem restar i reduir a una. S'acostuma a escriure aquesta constant en "el costat de les x" i l'anomenem C:

$$y^{-2}\mathrm{d}y = 6x\,\mathrm{d}x$$

$$\int y^{-2}\mathrm{d}y = \int 6x\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{y} = 6\frac{x^2}{2} + C = 3x^2 + C$$

A18

a) Si fem $x = 1$ en l'expressió anterior,

$$-\frac{1}{y(1)} = 3(1)^2 + C$$

i substituïm $y(1)$ pel seu valor, obtenim:

$$-\frac{1}{1/25} = 3(1)^2 + C \quad \Rightarrow \quad C = -28$$

Per tant,

$$-\frac{1}{y} = 3x^2 - 28$$

o bé

$$y = \frac{1}{28 - 3x^2} \qquad (20c)$$

b) Ara cal veure quins són els límits de validesa de la solució, o l'"interval de validesa". En primer lloc, ha de ser un interval continu, sense interrupcions ni "forats". En segon lloc, aquest interval ha de contenir el valor de la variable independent que apareix en la condició inicial, $x = 1$ en aquest cas.

En vista de la forma de la solució (20c), hem d'evitar els punts que anul·len el denominador, és a dir,

$$x = \pm\sqrt{28/3} \approx \pm 3.05505$$

perquè en aquests punts tindríem una divisió per zero. Això ens dóna tres intervals de validesa possibles,

$$-\infty < x < -\sqrt{28/3} \qquad (20d)$$

$$-\sqrt{28/3} < x < \sqrt{28/3} \qquad (20e)$$

$$\sqrt{28/3} < x < +\infty \qquad (20f)$$

Només el segon interval conté el valor de x que apareix en la condició inicial i, per tant, l'interval de validesa de la solució serà el (20e).

A19

Aquesta equació diferencial també és clarament separable.

$$(2y - 4)\mathrm{d}y = \left(3x^2 + 4x - 4\right)\mathrm{d}x$$

$$\int (2y - 4)\mathrm{d}y = \int \left(3x^2 + 4x - 4\right)\mathrm{d}x$$

$$y^2 - 4y = x^3 + 2x^2 - 4x + C$$

i si fem que es compleixi la condició inicial (21b),

$$(3)^2 - 4(3) = (1)^3 + 2(1)^2 - 4(1) + C$$

obtenim:

$$C = -2$$

i la solució és l'equació implícita

$$y^2 - 4y = x^3 + 2x^2 - 4x - 2 \tag{21c}$$

A20

Una manera de procedir és reescriure la solució (21c) de manera que quedi una equació quadràtica en *y*, però amb un terme "constant" que serà funció de *x*,

$$y^2 - 4y - \left(x^3 + 2x^2 - 4x - 2\right) = 0$$

i ja sabem com hem de trobar les solucions d'una equació quadràtica:

$$y(x) = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)\left(-(x^3 + 2x^2 - 4x - 2)\right)}}{2}$$

Si simplifiquem una mica l'expressió anterior, resulta:

$$y(x) = 2 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x + 2}$$

Sempre podem saber quina de les dues solucions és la correcta si tenim en compte la condició inicial. Si calculem les solucions per al punt $x = 1$,

$$y(1) = 2 \pm \sqrt{1 + 2 - 4 + 2} = 2 \pm 1$$

obtenim:

$$\begin{aligned} y(1) &= 1 \\ y(1) &= 3 \end{aligned}$$

La condició inicial (21b) indica que en aquest cas la solució amb el signe "+" davant de l'arrel quadrada és la correcta,

$$y(x) = 2 + \sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x + 2} \tag{21d}$$

Recordem que una funció $y(x)$ és una solució d'una EDO de primer ordre en un interval I, si $y(x)$ és contínua i derivable en I i a més, l'interval I conté el punt on s'aplica la condició inicial. En aquest cas, $y(x)$ és una funció contínua en l'interval $[-3.365, +\infty)$.

Ara bé

$$y'(x) = \frac{1}{2} \frac{3x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x + 2}} \tag{21e}$$

d'on podem observar que la funció $y(x)$ no és derivable en el punt -3.365 ja que en aquest punt s'anula el denominador.

Per tant, com que l'interval $(-3.365, +\infty)$ conté el valor $x = 1$ que usem en la condició inicial, ja tenim la solució particular de l'equació diferencial. Així, l'equació diferencial (21d) és vàlida per a $x > -3.365$.

A21

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ct}\, \mathrm{d}t = \lim_{p \to +\infty} \int_0^{p} \mathrm{e}^{ct}\, \mathrm{d}t = \lim_{p \to +\infty} \left(\frac{1}{c}\mathrm{e}^{cp} - \frac{1}{c}\right) \tag{25}$$

A22

Si ens adonem que aquesta integral no és més que la de l'activitat A21, amb $c = -s$, l'únic que hem de fer és reescriure la solució, equació (25) del mòdul, amb $c = -s$:

$$L\{1\} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = -\frac{1}{-s} \qquad \text{si} \quad -s < 0$$

és a dir,

$$L\{1\} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \frac{1}{s} \qquad \text{si} \quad s > 0 \tag{26}$$

perquè si $s > 0$, llavors $-s$ serà negativa, $-s < 0$.

A23

Substituïm la funció $f(t)$ per e^{at} en l'equació (22a) o (22b),

$$L\left\{e^{at}\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt$$

i ens trobem amb la mateixa expressió de l'activitat A21, però ara

$$c = a - s$$

Per tant,

$$L\left\{e^{at}\right\} = -\frac{1}{a-s} \qquad \text{si} \quad a - s < 0$$

és a dir,

$$L\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a} \qquad \text{si} \quad s > a \tag{27}$$

Per la mateixa raó que hem comentat després de l'equació (26), el resultat (27) és sempre positiu.

A24

Comproveu els càlculs següents i si teniu alguna dificultat, plantegeu-la en el fòrum de debat o al consultor:

$$F(s) = L\{\sin(at)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin(at) dt = \lim_{p\to+\infty} \int_0^{p} e^{-st} \sin(at) dt$$

Integrem per parts i obtenim

$$F(s) = \lim_{p\to+\infty}\left(-\left(\frac{1}{a} e^{-st} \cos(at)\right)\Big|_0^p - \frac{s}{a}\int_0^p e^{-st}\cos(at)dt \right)$$

Ara avaluem el primer membre en $t = p$ i en $t = 0$; integrem per parts novament la integral de l'expressió anterior i obtenim:

$$F(s) = \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\left(1 - e^{-sp}\cos(ap)\right) - \frac{s}{a}\left(\left(\frac{1}{a} e^{-st}\sin(at)\right)\Big|_0^p + \frac{s}{a}\int_0^p e^{-st}\sin(at)dt \right)\right)$$

Ara avaluem el segon membre en $t = p$ i en $t = 0$, prenem el límit dels tres termes i simplifiquem l'expressió resultant,

$$F(s) = \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\left(1 - e^{-sp}\cos(ap)\right) - \frac{s}{a}\left(\frac{1}{a} e^{-sp}\sin(ap) + \frac{s}{a}\int_0^p e^{-st}\sin(at)dt \right)\right) = \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\left(\frac{s}{a}\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(at)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(at)dt \tag{28}$$

Fixeu-vos que hem hagut de suposar que $s > 0$ per a poder fer els dos límits següents:

$$\lim_{p\to+\infty} e^{-sp}\cos(ap) = 0$$
$$\lim_{p\to+\infty} e^{-sp}\sin(ap) = 0$$

Recordeu

Quan calculem el límit del producte d'una funció que tendeix a zero, com l'anterior e^{-sp}, per una altra funció que està delimitada, com les funcions sinus i cosinus, que no poden ser superiors a 1 ni inferiors a –1, aquest límit és zero.

Per tant, la integral $F(s)$ és convergent per a $s > 0$.

Veiem també en l'equació (28) que hem tornat a la funció de partida. És a dir, que l'equació (28) es pot escriure així:

$$F(s) = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}F(s)$$

i si aïllem la funció $F(s) = L\{\sin(at)\}$, obtenim el resultat que buscàvem:

$$L\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2} \qquad \text{si} \quad s > 0 \tag{29}$$

A25

La demostració és senzilla i és una conseqüència del caràcter lineal de la integral,

$$L\{af(t)+bg(t)\}=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\left(af(t)+bg(t)\right)\mathrm{d}t$$

i com que les constants poden sortir fora de les integrals,

$$L\{af(t)+bg(t)\}=a\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t+b\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}g(t)\mathrm{d}t=aF(s)+bG(s)$$

A26

A partir de la taula de TL podem escriure les TL de cada funció exponencial, potencial o trigonomètrica.

a) $F(s)=6\dfrac{1}{s-(-5)}+\dfrac{1}{s-3}+5\dfrac{3!}{s^{3+1}}-9\dfrac{1}{s}$

$=\dfrac{6}{s+5}+\dfrac{1}{s-3}+\dfrac{30}{s^4}-\dfrac{9}{s}$.

b) $G(s)=4\dfrac{s}{s^2+(4)^2}-9\dfrac{4}{s^2+(4)^2}+2\dfrac{s}{s^2+(10)^2}$

$=\dfrac{4s}{s^2+16}-\dfrac{36}{s^2+16}+\dfrac{2s}{s^2+100}$

c) $H(s)=3\dfrac{2}{s^2-(-2)^2}+3\dfrac{2}{s^2+(2)^2}$

$=\dfrac{6}{s^2-4}+\dfrac{6}{s^2+4}$

d) $G(s)=\dfrac{1}{s-3}+\dfrac{s}{s^2+(6)^2}-\dfrac{s-3}{(s-3)^2+(6)^2}$

$=\dfrac{1}{s-3}+\dfrac{s}{s^2+36}-\dfrac{s-3}{(s-3)^2+36}$

A27

a) Aquesta funció no és a la taula de TL. Tot i així, podem usar la relació 18 de la taula i calcular la TL, amb $n=1$ i obtenim:

$$F(s)=L\{tg(t)\}=(-1)L\{g(t)\}'=-G'(s) \qquad \text{amb} \qquad g(t)=\cosh(3t)$$

Per tant, si tenim en compte els dos termes que inclouen la definició de cosh t, obtenim, a partir de la relació 6 de la taula de TL,

$$G(s)=\frac{s}{s^2-9}$$

i si derivem aquesta funció,

$$G'(s)=-\frac{s^2+9}{(s^2-9)^2}$$

Si usem la relació 18 de la taula de TL obtenim:

$$F(s)=\frac{s^2+9}{(s^2-9)^2}$$

b) També usem aquí la relació 18 de la taula de TL. De fet, ho podríem fer de dues maneres, considerant $n=1$,

$$H(s)=L\{tf(t)\}=-F'(s) \qquad \text{amb} \qquad f(t)=t\sin(2t)$$

o bé considerant $n=2$ i amb:

$$H(s)=L\{t^2f(t)\}=F''(s) \qquad f(t)=\sin(2t)$$

Com que és més senzill calcular una sola derivada, fem-ho de la primera manera. Si usem la relació 14, juntament amb l'expressió del sinh $t = (e^t - e^{-t})/2$, obtenim:

$$F(s) = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

i en derivar la funció,

$$F'(s) = -\frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

La transformada és, doncs,

$$H(s) = \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

c) Aquesta part es pot calcular amb la relació 18 de la taula de TL (amb $n = 1$ i $f(t) = \sqrt{t}$) o amb la relació (24) (juntament amb la relació 25). Fem-ho amb la relació 24 de la taula de TL, per variar. En primer lloc, ens hem d'adonar que

$$\int_0^t \sqrt{z}\mathrm{d}z = \frac{2}{3}t^{3/2} \quad \Rightarrow \quad t^{3/2} = \frac{3}{2}\int_0^t \sqrt{z}\mathrm{d}z$$

Si ara fem servir la relació 25,

$$f(t) = \sqrt{t}, \qquad F(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$$

obtenim:

$$G(s) = \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}\right)\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{5/2}}$$

Atenció

Convé que repetiu l'exercici pel camí de la relació 18 i 25 i comproveu que obteniu el mateix resultat.

d) Usarem la relació següent:

$$f(at) \to L\{f(at)\} = \frac{1}{a}L\{f\}\left(\frac{s}{a}\right) \quad si\ a > 0$$

juntament amb la resposta de l'exercici c).

Alternativament, també haguéssim pogut observar que

$$f(t) = (10t)^{3/2} = 10^{3/2} \cdot t^{3/2}$$

i utilitzant la linealitat de la transformada de Laplace i l'exercici anterior

$$L\{f\} = L\left\{10^{3/2} \cdot t^{3/2}\right\} = 10^{3/2}L\left\{t^{3/2}\right\} = 10^{3/2}\frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{5/2}}$$

e) Aquí usarem també la relació 18 de la taula, juntament amb la 19:

$$\begin{aligned} L\{t\,g'(t)\} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L(g') \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{sG(s) - g(0)\} \\ &= -\big(G(s) + sG'(s) - 0\big) \\ &= -G(s) - sG'(s) \end{aligned}$$

Recordeu que com que $g(0)$ és una constant, la seva derivada s'anul·la.

A28

Segons la propietat de linealitat, equació (31), necessitem la TL de cada membre de l'equació (32):

$$L\{y''\} - 10L\{y'\} + 9L\{y\} = L\{5t\}$$

A partir de les relacions adequades de la taula de TL, obtenim:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 10(sY(s) - y(0)) + 9Y(s) = \frac{5}{s^2}$$

i si usem les condicions inicials (33), obtenim:

$$(s^2 - 10s + 9)Y(s) + s - 12 = \frac{5}{s^2}$$

és a dir,

$$Y(s) = \frac{\frac{5}{s^2} + 12 - s}{s^2 - 10s + 9} = \frac{-s^3 + 12s^2 + 5}{s^2(s^2 - 10s + 9)} \tag{34}$$

A29

En resoldre aquests exercicis ens fixarem en alguns detalls que faciliten el càlcul de la TL inversa.

a) En vista del denominador del primer terme, sembla que el primer terme correspon simplement a una constant. El numerador "correcte" per a aquest terme és un 1 i, per tant, traurem el factor 6 abans de calcular la TL inversa.

El segon terme sembla una exponencial amb $a = 8$ i el numerador té exactament la forma adequada.

El tercer terme també sembla que correspon a una exponencial, però ara amb $a = 3$, i hem de deixar fora el 4 abans de calcular la TL inversa.

Per tant,

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{6}{s} - \frac{1}{s-8} + \frac{4}{s-3}\right\} = 6L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 1L^{-1}\left\{\frac{1}{s-8}\right\} + 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = 6 \cdot 1 - e^{8t} + 4e^{3t}$$

b) El primer terme, en aquest cas, sembla una exponencial amb $a = -2$, i hem de deixar fora el factor 19. Aneu amb compte amb els signes; en aquest tipus d'exercicis és fàcil despistar-se.

El segon terme té gairebé l'aspecte d'una exponencial, però té un $3s$ en lloc d'una s en el denominador. És una exponencial, però haurem de treure el factor 3 del denominador abans de calcular la TL inversa.

El denominador del tercer terme sembla ser l'entrada núm. 5 de la taula, amb $n = 4$. Tot i així, el numerador no té la forma correcta: conté un 7, mentre que necessitem un $4! = 24$. Això té una solució fàcil: multipliquem i dividim l'expressió per 24. En conjunt, doncs,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{19}{s-(-2)} - \frac{1}{3\left(s - \frac{5}{3}\right)} + \frac{7\frac{4!}{4!}}{s^{4+1}} \\ &= 19\frac{1}{s-(-2)} - \frac{1}{3}\frac{1}{s - \frac{5}{3}} + \frac{7}{4!}\frac{4!}{s^{4+1}} \end{aligned}$$

Ara ja podem escriure les TL inverses, mantenint els factors que ens ha calgut escriure davant de cada fracció:

$$h(t) = 19\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{5t}{3}} + \frac{7}{24}t^4$$

c) En aquest cas, tenim el mateix denominador en els dos termes i, segons la taula, hem d'usar la relació núm. 7 o la 8. Els numeradors ens permeten saber quina expressió tenim exactament. La primera té una s en el numerador i això significa que el primer terme ha de ser la relació 8; haurem de treure el factor 6 del numerador de la nostra expressió.

El segon terme només té una constant en el numerador i, per tant, ha de ser l'expressió número 7 de la taula, sempre que multipliquem i dividim per 5 per tal d'obtenir l'expressió de la taula.

La transformada s'escriu així:

$$\begin{aligned} F(s) &= 6\frac{s}{s^2 + (5)^2} + \frac{3\frac{5}{5}}{s^2 + (5)^2} \\ &= 6\frac{s}{s^2 + (5)^2} + \frac{3}{5}\frac{5}{s^2 + (5)^2} \end{aligned}$$

i, si la invertim, obtenim:

$$f(t) = 6\cos(5t) + \frac{3}{5}\sin(5t)$$

d) En aquest cas, el primer terme serà un sinus, una vegada traguem el factor 3 del denominador, mentre que el segon terme sembla ser un sinus hiperbòlic, com hem vist en l'activitat A25. Tanmateix, cal anar amb compte amb les diferències entre els dos tipus de sinus. En ajustar també els numeradors obtenim:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{3}\frac{8}{s^2+4} + \frac{3}{s^2-49} \\ &= \frac{1}{3}\frac{(4)(2)}{s^2+(2)^2} + \frac{3\frac{7}{7}}{s^2-(7)^2} \end{aligned}$$

i la transformada inversa és:

$$g(t) = \frac{4}{3}\sin(2t) + \frac{3}{7}\sinh(7t)$$

A30

a) En vista del denominador, es tracta d'una funció sinus o d'un cosinus. Tot i així, el numerador no s'ajusta a cap dels dos: per a un cosinus hauríem de tenir tan sols una *s* en el numerador i, a tot estirar, una constant que multipliqués la s; per a un sinus, caldria que el numerador fos una constant, i no una variable *s*.

El numerador de l'expressió *a*) conté les dues coses, per tant, només necessitem separar la TL en dos termes i, després, obtenim les TL inverses:

$$F(s) = \frac{6s}{s^2+7} - \frac{5\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}}{s^2+7}$$

$$f(t) = 6\cos\left(\sqrt{7}t\right) - \frac{5}{\sqrt{7}}\sin\left(\sqrt{7}t\right)$$

Nota

Tot i així, no sempre tindrem quadrats perfectes en sinus i cosinus, com els que han aparegut en aquests exemples inicials i senzills!

b) En aquest cas, no hi ha denominadors en la taula de TL que tinguin aquest aspecte. Però si completem el denominador en forma de quadrat, sí que s'assemblarà:

$$\begin{aligned} s^2+8s+21 &= s^2+8s+16-16+21 \\ &= s^2+8s+16+5 \\ &= (s+4)^2+5 \end{aligned}$$

Nota

Una regla general per a aconseguir formar el quadrat d'una expressió com la següent:

$$s^2+bs+c$$

és sumar i restar $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:

$$s^2+bs+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$$

i escriure:

$$\left(s+\frac{b}{2}\right)^2+c-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

I si tenim as^2 en lloc de s^2 primer podem treure *a* factor comú:

$$as^2+bs+c = a\left(s^2+\frac{b}{a}s+\frac{c}{a}\right)$$

Ara ja podem escriure la TL del cas *b*) així,

$$F(s) = \frac{1-3s}{(s+4)^2+5}$$

que s'assembla als casos 10 i 11 de la taula de TL. Però el cas 10 requereix tenir tan sols una constant en el numerador, i en el cas 11 necessitem un $s-a$ en el numerador. Com que no tenim cap de les dues situacions, hem de corregir el numerador.

Per a modificar el numerador convé fer en primer lloc les operacions adequades per a obtenir $s-a$. En el quocient anterior obtenim, per exemple,

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{1-3(s+4-4)}{(s+4)^2+5} = \frac{1-3(s+4)+12}{(s+4)^2+5} \\ &= \frac{-3(s+4)+13}{(s+4)^2+5}\end{aligned}$$

Com que necessitem el terme $s+4$ en el numerador, el deixem. Obtenim, així,

$$F(s) = -3\frac{s+4}{(s+4)^2+5} + \frac{13\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}{(s+4)^2+5}$$

i ja podem calcular la TL inversa:

$$f(s) = -3e^{-4t}\cos\left(\sqrt{5}t\right) + \frac{13}{\sqrt{5}}e^{-4t}\sin\left(\sqrt{5}t\right)$$

c) Aquest cas és semblant a l'anterior. Tan sols s'ha d'anar amb compte a deixar només una *s* en un quadrat, $(s+A)^2$, i no tenir la variable *s* multiplicada per una constant com en $(Bs+A)^2$,

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{3s-2}{2\left(s^2-3s-1\right)} = \frac{1}{2}\frac{3s-2}{s^2-3s+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{3s-2}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}}\end{aligned}$$

Aquesta expressió s'assembla a les 26 i 27 de la taula, si en modifiquem adequadament el numerador.

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{1}{2}\frac{3\left(s-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)-2}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}} = \frac{1}{2}\frac{3\left(s-\frac{3}{2}\right)+\frac{5}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3\left(s-\frac{3}{2}\right)}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}} + \frac{\frac{5}{2}\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}}\right)\end{aligned}$$

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(3e^{\frac{3t}{2}}\cosh\left(\frac{\sqrt{13}}{2}t\right) + \frac{5}{\sqrt{13}}e^{\frac{3t}{2}}\sinh\left(\frac{\sqrt{13}}{2}t\right)\right)$$

d) Aquesta expressió sembla similar a les dues anteriors, però no ho és. Els denominadors de les dues anteriors no es podien factoritzar fàcilment, però en aquest cas sí:

$$H(s) = \frac{s+7}{(s+2)(s-5)}$$

El denominador de l'expressió anterior suggereix que tenim un parell d'exponencials. Això requereix que el denominador tingui només un terme $(s+a)$ i cap variable *s* en el numerador.

Es pot resoldre si descomponem l'expressió en fraccions simples:

$$H(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-5}$$

Si operem en l'expressió anterior i la convertim en una fracció, obtenim:

$$H(s) = \frac{s+7}{(s+2)(s-5)} = \frac{A(s-5)+B(s+2)}{(s+2)(s-5)}$$

La igualtat anterior ha de ser certa per a qualsevol valor de *s*; per tant, els numeradors han de coincidir:

$$s+7 = A(s-5)+B(s+2)$$

Si fem, per exemple, $s = 5$, obtenim:

$$12 = A(0) + B(7) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{12}{7}$$

i si fem $s = -2$,

$$5 = A(-7) + B(0) \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{5}{7}$$

Per tant,

$$H(s) = \frac{-\frac{5}{7}}{s+2} + \frac{\frac{12}{7}}{s-5}$$

i

$$h(t) = -\frac{5}{7}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{12}{7}\mathrm{e}^{5t} \tag{35}$$

A31

a) La descomposició en fraccions simples és la següent:

$$G(s) = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{5s-1}$$

Si eliminem denominadors en els dos membres de la igualtat, obtenim:

$$86s - 78 = A(s-4)(5s-1) + B(s+3)(5s-1) + C(s+3)(s-4)$$

I si triem valors adequats per a la variable s, podem trobar fàcilment les constants:

$$\begin{array}{lll} s = -3, & -336 = A(-7)(-16) & \Rightarrow A = -3 \\ s = \frac{1}{5}, & -\frac{304}{5} = C\left(\frac{16}{5}\right)\left(-\frac{19}{5}\right) & \Rightarrow C = 5 \\ s = 4, & 266 = B(7)(19) & \Rightarrow B = 2 \end{array}$$

i obtenim:

$$G(s) = -\frac{3}{s+3} + \frac{2}{s-4} + \frac{1}{s-\frac{1}{5}}$$

en què ja hem escrit l'últim terme de manera que el denominador sigui del tipus $s + A$ i no $Bs + A$.

Resulta, doncs,

$$g(t) = -3\mathrm{e}^{-3t} + 2\mathrm{e}^{4t} + \mathrm{e}^{t/5}$$

b) El terme quadràtic en el denominador es descompon de la manera següent:

$$F(s) = \frac{2-5s}{(s-6)\left(s^2+11\right)} = \frac{A}{s-6} + \frac{Bs+C}{s^2+11}$$

Igualem els numeradors:

$$2 - 5s = A\left(s^2+11\right) + (Bs+C)(s-6)$$

Amb $s = 6$ obtenim el valor de A, però no podem donar altres valors senzills per a obtenir B i C, com hem fet per resoldre situacions semblants fins ara.

Com a alternativa, utilitzarem un mètode equivalent al de donar valors concrets a la variable s, però que sempre funciona: multipliquem els termes del membre de la dreta i agrupem els termes resultants, potències de s:

$$\begin{aligned} 2 - 5s &= A\left(s^2+11\right) + (Bs+C)(s-6) \\ &= As^2 + 11A + Bs^2 - 6Bs + Cs - 6C \\ &= (A+B)s^2 + (-6B+C)s + 11A - 6C \end{aligned}$$

i com que els polinomis dels dos costats de la igualtat han de coincidir per a tot valor de s, els coeficients de potències iguals de s han de ser iguals:

$$\begin{aligned} s^2 &: \quad A + B = 0 \\ s^1 &: \quad -6B + C = -5 \\ s^0 &: \quad 11A - 6C = 2 \end{aligned}$$

i obtenim:

$$A = -\frac{28}{47} \qquad B = \frac{28}{47} \qquad C = -\frac{67}{47}$$

Nota

El mètode alternatiu que acabem de fer servir per a obtenir els valors de A, B i C es basa, en definitiva, en el concepte d'*independència lineal* d'una base de funcions.

Portem els valors de A, B i C a l'expressió de $F(s)$. Com que els denominadors no són nombres senzills, resulta convenient treure'ls com a factor comú:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{47}\left(-\frac{28}{s-6} + \frac{28s-67}{s^2+11}\right) \\ &= \frac{1}{47}\left(-\frac{28}{s-6} + \frac{28s}{s^2+11} - \frac{67\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}}{s^2+11}\right) \end{aligned}$$

i, llavors,

$$f(t) = \frac{1}{47}\left(-28e^{6t} + 28\cos\left(\sqrt{11}t\right) - \frac{67}{\sqrt{11}}\sin\left(\sqrt{11}t\right)\right)$$

c) En aquest exemple podem interpretar el terme s^3 com a

$$s^3 = (s-0)^3$$

i, per tant, hem d'escriure:

$$G(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4s+5}$$

Si eliminem denominadors en els dos membres de la igualtat i multipliquem, resulta:

$$\begin{aligned} 25 &= As^2\left(s^2+4s+5\right) + Bs\left(s^2+4s+5\right) + C\left(s^2+4s+5\right) + (Ds+E)s^3 \\ &= (A+D)s^4 + (4A+B+E)s^3 + (5A+4B+C)s^2 + (5B+4C)s + 5C \end{aligned}$$

Identifiquem els coeficients de les potències de s del mateix grau:

$$\begin{aligned} s^4 &: \quad A + D = 0 \\ s^3 &: \quad 4A + B + E = 0 \\ s^2 &: \quad 5A + 4B + C = 0 \\ s^1 &: \quad 5B + 4C = 0 \\ s^0 &: \quad 5C = 25 \end{aligned}$$

Per tant,

$$A = \frac{11}{5}, \qquad B = -4, \qquad C = 5, \qquad D = -\frac{11}{5}, \qquad E = -\frac{24}{5}$$

Nota

El sistema és més senzill de resoldre del que sembla si comencem per la cinquena equació, després la quarta, la tercera, etc.

Igual que hem fet abans, traiem el factor 5 de tots els denominadors:

$$G(s) = \frac{1}{5}\left(\frac{11}{s} - \frac{20}{s^2} + \frac{25}{s^3} - \frac{11s+24}{s^2+4s+5}\right)$$

Encara hem de completar el quadrat de l'últim terme i escriure adequadament un parell de numeradors:

$$G(s) = \frac{1}{5}\left(\frac{11}{s} - \frac{20}{s^2} + \frac{25}{s^3} - \frac{11(s+2-2)+24}{(s+2)^2+1}\right)$$
$$= \frac{1}{5}\left(\frac{11}{s} - \frac{20}{s^2} + \frac{25}{s^3} - \frac{11(s+2)}{(s+2)^2+1} - \frac{2}{(s+2)^2+1}\right)$$

és a dir,

$$g(t) = \frac{1}{5}\left(11 - 20t - \frac{25}{2}t^2 - 11e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\sin t\right)$$

A32

La funció $u_c(t)$ fa un salt des del valor 0 al valor 1 en el punt $t = c$.

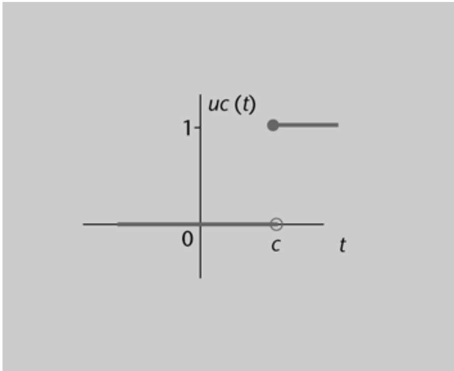

Figura 4: La funció esglaó unitat

A33

a) $y(t) = 4u_c(t)$

b) $y(t) = -7u_c(t)$

c) La funció següent exhibeix el comportament que volem:

$$y(t) = 1 - u_c(t)$$

(perquè abans de $t = c$ la funció de Heaviside s'anul·la). Per tant, la funció $1 - u_c(t)$ valdrà 1 per a $t < c$.

Quan arribem a $t = c$, la funció de Heaviside val 1, i la funció $1 - u_c(t)$ valdrà $1 - 1 = 0$.

En definitiva,

$$y(t) = 1 - u_c(t) = \begin{cases} 1 - 0 = 1 & \text{si} \quad t < c \\ 1 - 1 = 0 & \text{si} \quad t \geq c \end{cases}$$

A34

Si aprofitem el resultat de l'activitat anterior, A33, i escrivim:

$$y(t) = 3 - 3u_c(t)$$

tenim un interruptor que pren el valor 3 fins que s'apaga per a $t = c$.

Com que volem que $c = -2$, la solució serà

$$y(t) = 3 - 3u_{-2}(t) \tag{38}$$

Una altra notació per a la mateixa funció (38), en vista de l'equació (38) del mòdul, és aquesta:

$$y(t) = 3 - 3u(t+2)$$

i també

$$y(t) = 3 - 3H(t+2)$$

A35

En la funció $f(t)$ hi ha tres intervals en què els valors canvien sobtadament, per tant necessitarem tres funcions de Heaviside.

La solució és:

$$f(t) = -4 + 29u_6(t) - 9u_8(t) - 6u_{30}(t) \tag{39}$$

Ho podem comprovar fàcilment:

En el primer interval, $t < 6$, totes les funcions esglaó s'anul·len i la funció (39) val

$$f(t) = -4$$

En l'interval següent, $6 \le t < 8$, la primera funció de Heaviside val la unitat, mentre que les altres dues continuen sent nul·les. Per tant, la funció val:

$$f(t) = -4 + 29 = 25 \qquad \text{si} \quad 6 \le t < 8$$

En el tercer interval, $8 \le t < 30$, les primeres dues funcions esglaó són la unitat, mentre que l'última continua sent nul·la. La funció val:

$$f(t) = -4 + 29 - 9 = 16 \qquad \text{si} \quad 8 \le t < 30$$

En l'últim interval, $t \ge 30$, les tres funcions de Heaviside valen 1 i la funció val:

$$f(t) = -4 + 29 - 9 + 6 = 10$$

A36

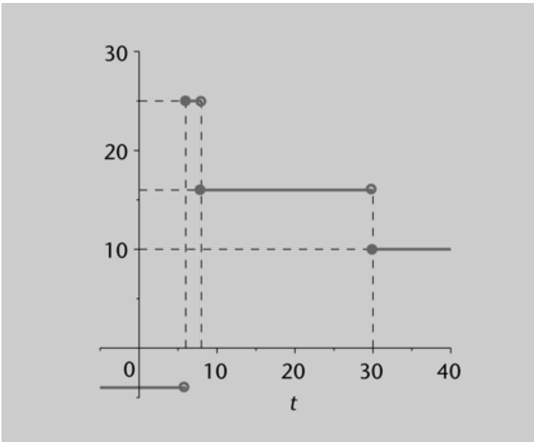

Figura 5. Una funció expressada mitjançant funcions esglaó

A37

Obtenim, a partir de l'equació (41),

$$L\left(u_c(t) \cdot 1\right) = \mathrm{e}^{-cs} L(1) = \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-sc}$$

A38

En tots els exercicis anteriors, que involucren la funció esglaó, la funció la TL de la qual volem calcular **ha de tenir** la forma

$$u_c f\left(t - c\right)$$

abans de començar a calcular les transformades. Si no té aquesta forma, l'hem de preparar. Vegem-ne el primer cas.

a) En aquesta funció tenim tres termes. El primer és simplement una funció de Heaviside i podem usar l'expressió (42).

El segon i el tercer termes contenen altres funcions i hem d'identificar quines funcions són les que estan desplaçades. En el segon terme la funció que es desplaça és:

$$f(t) = 2t^3 \quad \Rightarrow \quad f(t-6) = 2(t-6)^3$$

i ja està desplaçada en la quantitat correcta.

El tercer terme conté:

$$f(t) = 7 - \mathrm{e}^{-3t} \quad \Rightarrow \quad f(t-4) = 7 - \mathrm{e}^{-3(t-4)} = 7 - \mathrm{e}^{12-3t}$$

que també està desplaçada en el valor adequat.

Per tant, ja podem calcular la TL de la funció:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{10\mathrm{e}^{-12s}}{s} + \mathrm{e}^{-6s}\frac{2(3!)}{s^{3+1}} - \left(\frac{7}{s} - \frac{1}{s+3}\right)\mathrm{e}^{-4s} \\ &= \frac{10\mathrm{e}^{-12s}}{s} + \frac{12\mathrm{e}^{-6s}}{s^4} - \left(\frac{7}{s} - \frac{1}{s+3}\right)\mathrm{e}^{-4s} \end{aligned}$$

b) Aquesta part ens crearà alguns problemes. Conté dos termes i cap d'ells no està desplaçat en la quantitat correcta: el primer terme s'ha de desplaçar en 3 i el segon necessita desplaçar-se en 5. Per tant, com que s'han desplaçat, l'hem de forçar. Hi haurem d'introduir els desplaçaments i, després, evidentment, eliminar-los:

$$f(t) = -(t-3+3)^2\, u_3(t) + \cos(t-5+5)\, u_5(t) \tag{45}$$

En el primer terme usarem l'expressió del quadrat d'una suma:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{46}$$

En el segon terme tenim dues opcions. La primera operació seria usar la fórmula

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \tag{47}$$

per a separar-la en sinus i cosinus, que ja estaran desplaçats en la magnitud adequada, $t-5$.

Una altra manera més senzilla de calcular-la és fixar-se en la següent TL

$$L\{\cos(t+c)\} = \frac{\cos(c)\cdot s - \sin(c)}{s^2+1}$$

Observeu que aquesta transformada es pot obtenir de forma molt fàcil a partir de la relació (47) utilitzant la linealitat de la TL.

$$\begin{aligned} L\{\cos(t+c)\} &= L\{\cos(t)\cos(c) - \sin(t)\sin(c)\} = \cos(c)L\{\cos(t)\} - \sin(c)L\{\sin(t)\} = \\ &= \cos(c)\frac{s}{s^2+1} - \sin(c)\frac{1}{s^2+1} = \frac{\cos(c)\cdot s - \sin(c)}{s^2+1} \end{aligned}$$

Si tenim en compte que:

$$g(t) = \cos(t+5) \qquad \Rightarrow \qquad g(t-5) = \cos(t-5+5)$$

podem calcular de forma senzilla la tranformada del segon terme.

c) Aquest cas no resulta tan complicat com podria semblar. En primer lloc, l'escrivim en termes de funcions de Heaviside:

$$\begin{aligned} h(t) &= t^4 + 3u_5(t)\sin\left(\frac{t}{10} - \frac{1}{2}\right) \\ &= t^4 + 3u_5(t)\sin\left(\frac{1}{10}(t-5)\right) \end{aligned}$$

Com que la potència t^4 és en els dos termes de la funció $h(t)$, no cal fer res quan hi afegim la funció de Heaviside. Tan sols hem d'introduir el desplaçament en la funció sinus.

Ara calculem la TL:

$$H(s) = \frac{4!}{s^5} + \frac{3\left(\frac{1}{10}\right)\mathrm{e}^{-5s}}{s^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{24}{s^5} + \frac{\frac{3}{10}\mathrm{e}^{-5s}}{s^2 + \frac{1}{100}}$$

d) Novament, l'únic que hem de fer és escriure la funció en termes de funcions de Heaviside:

$$f(t) = t + \left(-8 - t + (t-6)^2\right)u_6(t)$$

Hem hagut d'afegir –8 en el segon terme perquè apareix en la segona part, i també hem hagut de treure una *t* en el segon terme, perquè ja no hi ha una *t* en el primer. Però ara cal desplaçar correctament el segon terme:

$$\begin{aligned} f(t) &= t + \left(-8 - (t-6+6) + (t-6)^2\right)u_6(t) \\ &= t + \left(-8 - (t-6) - 6 + (t-6)^2\right)u_6(t) \\ &= t + \left(-14 - (t-6) + (t-6)^2\right)u_6(t) \end{aligned}$$

Per tant, la funció del segon terme que estem desplaçant és del tipus

$$g(t) = t^2 - t - 14$$

i la TL global resulta:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \left(\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2} - \frac{14}{s}\right)e^{-6s}$$

A39

En el càlcul de les TL inverses la funció exponencial no es té en compte pràcticament fins al final del procés.

a) Convé reescriure la funció de manera que l'exponencial quedi al marge:

$$H(s) = e^{-4s}\frac{s}{(3s+2)(s-2)} = e^{-4s}F(s)$$

i ens hem de concentrar en el càlcul de $f(t)$.

Descomponem $F(s)$ en fraccions simples:

$$F(s) = \frac{s}{(3s+2)(s-2)} = \frac{A}{3s+2} + \frac{B}{s-2}$$

i si eliminem denominadors dels dos membres de la igualtat:

$$s = A(s-2) + B(3s+2)$$

Podem calcular *A* i *B* fàcilment si donem els valors següents a la variable *s*:

$$\begin{aligned} &s = 2: && 2 = 8B && \Rightarrow \quad B = \frac{1}{4} \\ &s = -\frac{2}{3}: && -\frac{2}{3} = -\frac{8}{3}A && \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Per tant,

$$F(s) = \frac{1/4}{3\left(s + \frac{2}{3}\right)} + \frac{1/4}{s-2}$$

en què hem tret el 3 com a factor comú en el denominador del primer terme per a facilitar el càlcul de la TL inversa, que resulta:

$$f(t) = \frac{1}{12}e^{-\frac{2}{3}t} + \frac{1}{4}e^{2t}$$

Ara podem tornar al problema inicial. La transformada original era:

$$H(s) = e^{-4s}F(s)$$

en què no cal que tornem a escriure explícitament $F(s)$. Si usem la relació (41) podem escriure simbòlicament la TL inversa com

$$h(t) = u_4(t)f(t-4)$$

on:

$$f(t) = \frac{1}{12}e^{-\frac{2}{3}t} + \frac{1}{4}e^{2t}$$

En general, no cal escriure $f(t-4)$ explícitament, perquè és trivial:

$$f(t-4) = \frac{1}{12}e^{-\frac{2}{3}(t-4)} + \frac{1}{4}e^{2(t-4)}$$

b) Com que hi ha dues exponencials, en aquest cas les hem de tractar separadament. Això ens podria fer pensar que convé separar la funció de la manera següent:

$$G(s) = e^{-6s}\frac{5}{(s+2)(s^2+9)} - e^{-11s}\frac{3}{(s+2)(s^2+9)}$$

però com que tenim el mateix denominador en les dues fraccions, és millor escriure-ho així:

$$\begin{aligned} G(s) &= \left(5e^{-6s} - 3e^{-11s}\right)\frac{1}{(s+2)(s^2+9)} \\ &= \left(5e^{-6s} - 3e^{-11s}\right)F(s) \end{aligned}$$

Podem fer la descomposició en fraccions simples de $F(s)$:

$$F(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+9}$$

i en igualar els numeradors obtenim:

$$1 = A\left(s^2+9\right) + (s+2)(Bs+C) = (A+B)s^2 + (2B+C)s + 9A + C$$

Ara identifiquem els coeficients de les potències de s del mateix grau en els dos membres:

$$\left.\begin{array}{ll} s^2: & A+B=0 \\ s^1: & 2B+C=0 \\ s^0: & 9A+2C=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A = \frac{1}{13}, \quad B = -\frac{1}{13}, \quad C = \frac{2}{13}$$

i si tornem a la TL i arreglem els numeradors, obtenim:

$$F(s) = \frac{1}{13}\left(\frac{1}{s+2} + \frac{-s+2}{s^2+9}\right) = \frac{1}{13}\left(\frac{1}{s+2} + \frac{-s}{s^2+9} + \frac{2\frac{1}{3}}{s^2+9}\right)$$

La TL inversa val:

$$f(t) = \frac{1}{13}\left(e^{-2t} - \cos(3t) + \frac{2}{3}\sin(3t)\right) \tag{48}$$

I ara tornem al problema original:

$$G(s) = \left(5e^{-6s} - 3e^{-11s}\right)F(s) = 5e^{-6s}F(s) - 3e^{-11s}F(s)$$

en què hem deixat cada terme en la forma d'una d'única exponencial multiplicada per una sola TL.

La inversa ja és immediata:

$$g(t) = 5u_6(t)f(t-6) - 3u_{11}(t)f(t-11)$$

amb $f(t)$ determinada per l'expressió (48).

c) En aquest cas, sí que caldrà separar la transformada en un terme constant i un altre que té el factor s:

$$F(s) = \frac{4s}{(s-1)(s+2)} + e^{-s}\frac{1}{(s-1)(s+2)} = G(s) + e^{-s}H(s)$$

Comencem per descompondre $G(s)$ en fraccions simples:

$$G(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2}$$

i igualem els numeradors:

$$4s = A(s+2) + B(s-1)$$

Ara fem:

$$s=-2: \qquad -8=-3B \qquad \Rightarrow \quad B=\frac{8}{3}$$

$$s=1: \qquad 4=3A \qquad \Rightarrow \quad A=\frac{4}{3}$$

de manera que

$$G(s)=\frac{4/3}{s-1}+\frac{8/3}{s+2}$$

i

$$g(t)=\frac{4}{3}\mathrm{e}^{t}+\frac{8}{3}\mathrm{e}^{-2t} \tag{49}$$

Fem el mateix amb $H(s)$:

$$H(s)=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}$$

i els numeradors són:

$$1=A(s+2)+B(s-1)$$

Calculem els coeficients:

$$s=-2: \qquad 1=-3B \qquad \Rightarrow \quad B=-\frac{1}{3}$$

$$s=1: \qquad 1=3A \qquad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{3}$$

de manera que

$$H(s)=\frac{1/3}{s-1}-\frac{1/3}{s+2}$$

i

$$h(t)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{t}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t} \tag{50}$$

Finalment, ho reunim tot i arribem a:

$$F(s)=G(s)+\mathrm{e}^{-s}H(s)$$

$$f(t)=g(t)+u_1(t)h(t-1)$$

en què $g(t)$ és determinada per l'expressió (49) i per $h(t)$, la (50).

d) Aquesta expressió és menys complicada del que sembla. Reescrivim el numerador:

$$G(s)=\frac{s\left(3-2\mathrm{e}^{-3s}\right)+\left(8\mathrm{e}^{-20s}+6\mathrm{e}^{-7s}\right)}{s^2(s+3)}$$

i així només caldrà introduir-hi dues descomposicions en fraccions simples i ens estalviarem feina.

$$\begin{aligned}G(s)&=\left(3-2\mathrm{e}^{-3s}\right)\frac{1}{s(s+3)}+\left(8\mathrm{e}^{-20s}+6\mathrm{e}^{-7s}\right)\frac{1}{s^2(s+3)}\\&=\left(3-2\mathrm{e}^{-3s}\right)F(s)+\left(8\mathrm{e}^{-20s}+6\mathrm{e}^{-7s}\right)H(s)\end{aligned}$$

Escrivim

$$F(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+3}$$

i eliminem els denominadors en els dos membres de la igualtat:

$$1=A(s+3)+Bs$$

amb:

$$s=-3: \qquad 1=-3B \qquad \Rightarrow \quad B=-\frac{1}{3}$$

$$s=0: \qquad 1=3A \qquad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{3}$$

de manera que

$$F(s) = \frac{1/3}{s} + \frac{-1/3}{s+3}$$

i

$$f(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}$$

Ara escrivim $H(s)$:

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+3}$$

i en igualar els numeradors, obtenim:

$$1 = As(s+3) + B(s+3) + Cs^2$$

Els coeficients són:

$$\begin{array}{lll} s=-3: & 1 = 9C & \Rightarrow \quad C = \frac{1}{9} \\ s=0: & 1 = 3B & \Rightarrow \quad B = \frac{1}{3} \\ s=1: & 1 = 4A + 4B + C = 4A + \frac{13}{9} & \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{9} \end{array}$$

De manera que

$$H(s) = \frac{-1/9}{s} + \frac{1/3}{s^2} + \frac{1/9}{s+3}$$

i

$$h(t) = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3t}$$

La funció original és:

$$G(s) = 3F(s) - 2\mathrm{e}^{-3s}F(s) + 8\mathrm{e}^{-20s}H(s) + 6\mathrm{e}^{-7s}H(s)$$

i la TL inversa:

$$g(t) = 3f(t) - 2u_3(t)f(t-3) + 8u_{20}(t)h(t-20) + 6u_7(t)h(t-7)$$

A40

$$\begin{array}{ll} n=1, & L\{y'\} = sY(s) - y(0) \\ n=2, & L\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \end{array}$$

A41

Prenem la TL de cada terme de l'EDO:

$$L\{y''\} - 10L\{y'\} + 9L\{y\} = L\{5t\}$$

i segons la taula de TL escrivim:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 10(sY(s) - y(0)) + 9Y(s) = \frac{5}{s^2}$$

Introduïm les condicions inicials i recollim tots els termes que contenen la funció $Y(s)$:

$$(s^2 - 10s + 9)Y(s) + s - 12 = \frac{5}{s^2}$$

i aïllem $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{5}{s^2(s-9)(s-1)} + \frac{12-s}{(s-9)(s-1)} \tag{52}$$

Ara només cal calcular la TL inversa per a obtenir la solució de l'EDO, amb els valors inicials donats. Si sumem les dues fraccions de l'equació (52) arribem a:

$$Y(s)=\frac{5+12s^2-s^3}{s^2(s-9)(s-1)}$$

i només haurem de fer una vegada la descomposició en fraccions simples:

$$Y(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{(s-9)}+\frac{D}{(s-1)} \tag{53}$$

En igualar els numeradors,

$$5+12s^2-s^3=As(s-9)(s-1)+B(s-9)(s-1)+Cs^2(s-1)+Ds^2(s-9)$$

Com sempre, triem valors convenients de s i obtenim les constants:

$$\begin{array}{lll} s=0 & 5=9B & \Rightarrow\; B=\dfrac{5}{9} \\ s=1 & 16=-8D & \Rightarrow\; D=-2 \\ s=9 & 248=648C & \Rightarrow\; C=\dfrac{31}{81} \\ s=2 & 45=-14A+\dfrac{4345}{81} & \Rightarrow\; A=\dfrac{50}{81} \end{array}$$

Ara, en portar les constants a (53) i calcular la TL inversa, obtenim la solució:

$$y(t)=\frac{50}{81}+\frac{5}{9}t+\frac{31}{81}\mathrm{e}^{9t}-2\mathrm{e}^{t}$$

A42

Calculem la TL de tots els termes:

$$2\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+3\left(sY(s)-y(0)\right)-2Y(s)=\frac{1}{(s+2)^2}$$

i hi substituïm les condicions inicials:

$$\left(2s^2+3s-2\right)Y(s)+4=\frac{1}{(s+2)^2}$$

Si aïllem $Y(s)$, arribem a:

$$Y(s)=\frac{1}{(2s-1)(s+2)^3}-\frac{4}{(2s-1)(s+2)}$$

Ara sumem les fraccions, com en l'exemple (52):

$$\begin{aligned} Y(s)&=\frac{1-4(s+2)^3}{(2s-1)(s+2)^3} \\ &=\frac{-4s^2-16s-15}{(2s-1)(s+2)^3} \end{aligned}$$

i escrivim la descomposició en fraccions simples:

$$Y(s)=\frac{A}{2s-1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{(s+2)^2}+\frac{D}{(s+1)^3}$$

Igualem els denominadors:

$$\begin{aligned} -4s^2-16s-15&=A(s+2)^3+B(2s-1)(s+2)^2+C(2s-1)(s+2)+D(2s-1) \\ &=(A+2B)s^3+(6A+7B+2C)s^2+(12A+4B+3C+2D)s+ \\ &\quad +8A-4B-2C-D \end{aligned}$$

En aquest cas, probablement és més senzill igualar els coeficients de les potències de s i resoldre el sistema d'equacions resultant, en lloc de donar valors a s. En aquest cas, doncs, obtenim:

$$\left.\begin{array}{ll} s^3: & A+2B=0 \\ s^2: & 6A+7B+2C=-4 \\ s: & 12A+4B+3C+2D=-16 \\ s^0: & 8A-4B-2C-D=-15 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=-\dfrac{192}{125} \\[2ex] B=\dfrac{96}{125} \\[2ex] C=-\dfrac{2}{25} \\[2ex] D=-\dfrac{1}{5} \end{array}$$

Podem treure el denominador 125, comú a totes les fraccions, i també arreglar el primer i l'últim denominadors per a adequar-los a les expressions de la taula de TL:

$$Y(s)=\frac{1}{125}\left(\frac{-192}{2\left(s-\frac{1}{2}\right)}+\frac{96}{s+2}-\frac{10}{(s+2)^2}-\frac{25\frac{2!}{2!}}{(s+2)^3}\right)$$

Finalment, calculem la TL inversa:

$$y(t)=\frac{1}{125}\left(-96\mathrm{e}^{t/2}+96\mathrm{e}^{-2t}-10t\mathrm{e}^{-2t}-\frac{25}{2}t^2\mathrm{e}^{-2t}\right)$$

A43

Prenem la TL de tota l'expressió i hi inserim les condicions inicials:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-6\big(sY(s)-y(0)\big)+15Y(s)=2\frac{3}{s^2+9}$$
$$\left(s^2-6s+15\right)Y(s)+s-2=\frac{6}{s^2+9}$$

Ara aïllem $Y(s)$ i ho combinem en un sol terme, com hem fet en les dues activitats prèvies:

$$Y(s)=\frac{-s^3+2s^2-9s+24}{\left(s^2+9\right)\left(s^2-6s+15\right)}$$

Plantegem la descomposició en fraccions parcials:

$$Y(s)=\frac{As+B}{s^2+9}+\frac{Cs+D}{s^2-6s+15}$$

i igualem els numeradors:

$$\begin{aligned}-s^3+2s^2-9s+24&=(As+B)\left(s^2-6s+15\right)+(Cs+D)\left(s^2+9\right)\\&=(A+C)s^3+(-6A+B+D)s^2+(15A-6B+9C)s+15B+9D\end{aligned}$$

Identifiquem els coeficients de les potències de la variable s del mateix grau i resolem les equacions:

$$\left.\begin{array}{ll} s^3: & A+C=-1 \\ s^2: & -6A+B+D=2 \\ s^1: & 15A-6B+9C=-9 \\ s^0: & 15B+9D=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} A=\dfrac{1}{10} & B=\dfrac{1}{10} \\[2ex] C=-\dfrac{11}{10} & D=\dfrac{5}{2} \end{array}$$

Ara introduïm els valors en la descomposició, completem els quadrats dels denominadors del segon terme i arreglem els numeradors per a acabar el procés amb el càlcul de la TL inversa.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{10}\left(\frac{s+1}{s^2+9} + \frac{-11s+25}{s^2-6s+15}\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(\frac{s+1}{s^2+9} + \frac{-11(s-3+3)+25}{(s-3)^2+6}\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(\frac{s}{s^2+9} + \frac{1\frac{3}{3}}{s^2+9} - \frac{11(s-3)}{(s-3)^2+6} - \frac{8\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}}{(s-3)^2+6}\right) \end{aligned}$$

Finalment, calculem la TL inversa:

$$y(t) = \frac{1}{10}\left(\cos(3t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - 11\mathrm{e}^{3t}\cos\left(\sqrt{6}t\right) - \frac{8}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{3t}\sin\left(\sqrt{6}t\right)\right)$$

A44

El primer que hem de fer és tenir en compte que els valors inicials no els coneixem en $t=0$, però els necessitem per a calcular les TL de les derivades. Aquesta complicació es resol fàcilment amb un canvi de variable. Definim

$$z = t-3 \qquad \Rightarrow \qquad t = z+3$$

i escrivim l'equació diferencial

$$y''(t) + 4y'(t) = \cos(t-3) + 4t$$

en què hem fet explícita la dependència de les derivades per a controlar bé què estem fent. En funció de z,

$$y''(z+3) + 4y'(z+3) = \cos(z) + 4(z+3)$$

Per a simplificar les coses definim

$$u(z) = y(z+3)$$

i observem que, per la regla de la cadena, la primera derivada és

$$u'(z) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} = y'(z+3)$$

i, anàlogament, la segona derivada és

$$u''(z) = y''(z+3)$$

i les condicions inicials per a $u(z)$ són

$$\begin{aligned} u(0) &= y(0+3) = y(3) = 0 \\ u'(0) &= y'(0+3) = y'(3) = 7 \end{aligned}$$

Per tant, el problema de valors inicials transformat és ara

$$u'' + 4u' = \cos(z) + 4z + 12, \qquad u(0) = 0 \quad u'(0) = 7$$

Ja podem calcular la TL de tota l'expressió:

$$\begin{aligned} &s^2U(s) - su(0) - u'(0) + 4\left(sU(s) - u(0)\right) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s} \\ &\left(s^2+4s\right)U(s) - 7 = \frac{s}{s^2+1} + \frac{4+12s}{s^2} \end{aligned}$$

Aïllem $U(s)$:

$$\begin{aligned} \left(s^2+4s\right)U(s) &= \frac{s}{s^2+1} + \frac{4+12s+7s^2}{s^2} \\ U(s) &= \frac{1}{(s+4)\left(s^2+1\right)} + \frac{4+12s+7s^2}{s^2\left(s^2+4s\right)} \end{aligned}$$

Fixeu-vos que, en contra del que hem fet en exercicis anteriors, no hem combinat tots els termes en un de sol. En els casos anteriors, ho hem fet perquè el denominador d'un dels termes era denominador comú de tots ells. Per això, en combinar-los, hem obtingut un numerador una mica més complicat i hem reduït el nombre de fraccions parcials de dues a una. Fixeu-vos que tots els termes d'aquesta transformada, que tenien només potències de *s* en el denominador, s'han combinat per la mateixa raó.

Però si combinem en la TL actual els dos termes restants en un de sol, ens trobem amb un problema de fraccions parcials ben complex. Per aquest motiu, en aquest cas serà probablement més senzill fer dues vegades la descomposició en fraccions simples. No en donarem més detalls, perquè el procés l'hem vist diverses vegades; en definitiva, arribem a:

$$\frac{1}{(s+4)\left(s^2+1\right)} = \frac{1/17}{s+4} + \frac{1}{17}\frac{-s+4}{s^2+1}$$

$$\frac{4+12s+7s^2}{s^3(s+4)} = \frac{1}{s^3} + \frac{11/4}{s^2} + \frac{17/16}{s} - \frac{17/16}{s+4}$$

que, una vegada substituït en l'expressió inicial $U(s)$, dóna:

$$U(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{11/4}{s^2} + \frac{17/16}{s} - \frac{273/272}{s+4} + \frac{1}{17}\left(\frac{-s+4}{s^2+1}\right)$$

$$= \frac{1\frac{21}{21}}{s^3} + \frac{11/4}{s^2} + \frac{17/16}{s} - \frac{273/272}{s+4} + \frac{1}{17}\left(\frac{-s}{s^2+1} + \frac{4}{s^2+1}\right)$$

i calculem les TL inverses (recordem que treballem amb la variable *z*, no la *t*)

$$u(z) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{11}{4}z + \frac{17}{16} - \frac{273}{272}e^{-4z} + \frac{1}{17}\left(4\sin(z) - \cos(z)\right)$$

i com que

$$y(t) = y(z+3) = u(z) = u(t-3)$$

obtenim, finalment:

$$y(t) = \frac{1}{2}(t-3)^2 + \frac{11}{4}(t-3) + \frac{17}{16} - \frac{273}{272}e^{-4(t-3)} + \frac{1}{17}\left(4\sin(t-3) - \cos(t-3)\right)$$

o bé:

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{43}{16} - \frac{273}{272}e^{-4(t-3)} + \frac{1}{17}\left(4\sin(t-3) - \cos(t-3)\right)$$