

Fonaments matemàtics

Màxim Borrell Vidal (Coordinador)

PID_00152571

Material docent de la UOC



Universitat Oberta
de Catalunya

www.uoc.edu

**Màxim Borrell Vidal**

Coordinador
Catedràtic d'Economia Financera i Comptabilitat. Ha escrit diversos llibres i articles sobre finances i és expert en mercats financers.

**Margarida Coromines Bosch**

Llicenciada en Matemàtiques per la Universitat Autònoma de Barcelona. Màster en Economia i Empresa per la Universitat Pompeu Fabra.

**Anna Espinal Berenguer**

Llicenciada en Matemàtiques per la Universitat Autònoma de Barcelona. Màster en Anàlisi Econòmica organitzat pel Departament de Teoria i Història Econòmica de la UAB.

**Antoni Montes Lozano**

Professor titular de la Universitat Politècnica de Catalunya. L'àmbit en què desenvolupa la recerca és l'àlgebra computacional a la Facultat de Matemàtiques de la UPC.

**Jaume Paradís Balaux**

Llicenciat en Ciències Matemàtiques per la Universitat de Barcelona. Professor titular de l'Escola de Ciències Empresarials de la Universitat Pompeu Fabra.

**Ricard Torres Bargalló**

Doctorat en *Managerial Economics and Decision Sciences*, Universitat de Northwestern. Actualment és professor en la Universitat de Girona.

**Frederic Udina Abelló**

Professor de Matemàtica aplicada de la Universitat Pompeu Fabra des de l'any 1990, on imparteix assignatures de Matemàtiques i de Probabilitat a la Facultat d'Economia. Llicenciat en Matemàtiques per la Universitat Autònoma de Barcelona.

**Pelegrí Viader Canals**

Doctor per la Universitat Politècnica de Catalunya. Professor titular de l'Escola de Ciències Empresarials de la Universitat Pompeu Fabra.

Primera edició: febrer 2010

© Margarida Coromines Bosch, Anna Espinal Berenguer, Antoni Montes Lozano, Jaume Paradís Balaux, Ricard Torres Bargalló, Frederic Udina Abelló, Pelegrí Viader Canals

Tots els drets reservats

© d'aquesta edició, FUOC, 2010

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona

Disseny: Manel Andreu

Fotografies: Zardoya, Siglo XXI de España Editores, S.A., Enciclopèdia Catalana

Il·lustracions: Manel Andreu

Dipòsit legal: B-2.403-2010

ISBN: 978-84-692-8545-9

Cap part d'aquesta publicació, incloent-hi el disseny general i de la coberta, no pot ser copiada, reproduïda, emmagatzemada o transmesa de cap manera ni per cap mitjà, tant si és elèctric, com químic, mecànic, òptic, de gravació, de fotocòpia, o per altres mètodes, sense l'autorització prèvia per escrit dels titulars del copyright.



Arquimedes (cap al 287-212 aC) fou un dels grans savis grecs que utilitzà la matemàtica per a les aplicacions pràctiques

*Car ço que sabs no es tant com ço
que no sabs.*
Ramon Llull

*L'edat mitjana va tenir un enorme
avantatge sobre la nostra. Considerava
encara decorós, més aviat essencial per a la
vida, aprendre un ofici i aprendre'l bé. No
existien cursos breus ni ensenyaments
condensats.*

H. Van Loon (1931, pàg. 23)

*Puc comprendre, rei Geló, que aquestes
coses semblaran increïbles a la major part
dels qui no s'han dedicat a l'estudi de la
matemàtica.*
Arquimedes

Introducció

Els autors volen obrir-vos de bat a bat la porta d'entrada a una matèria fascinant (malgrat la mala premsa que ha tingut entre els qui no han gaudit d'un bon professor). La matèria és fascinant per si mateixa, com a estímul intel·lectual que incita a la reflexió i a la millora de l'hàbit de pensar.

Les matemàtiques fascinen i són pràctiques per les seves magnífiques aplicacions en diversos camps científics i tècnics, entre els quals es troba l'econòmic. No oblidem les paraules del *Gènesi*: "Jo he fet el Món amb la Mesura, el Número i els Pesos".

L'esperit que ens ha guiat i animat a escriure les planes que teniu per endavant es podria resumir amb les paraules següents:

"He preferit la utilitat de ser comprès a l'honor de passar per docte".

Marquès de Caracciolo, al pròleg de la seva obra *La conversación consigo mismo*, Madrid, 1786.

Suggeriments per a l'estudi

Començar a partir dels coneixements previs és una bona estratègia per continuar endavant. És evident que sempre hi haurà dubtes; però, davant d'un dubte tossut, no dubteu...: hi ha un consultor que us aclarirà la qüestió. Ens agradaria comprovar que cada vegada us interessin més les possibilitats d'aplicació d'aquesta àrea a l'economia.

Com veureu a l'índex, l'assignatura té 7 mòduls:

- Els mòduls "Matrius i sistemes d'equacions" i "Vectors i aplicacions lineals" desenvolupen de forma molt clara, pràctica i eficaç una problemàtica que segurament que ja havíeu estudiat parcialment (com ara els vectors, les matrius, els sistemes d'equacions...), però que convé aprofundir per a entendre qüestions i assignatures que veureu posteriorment (com ara l'anàlisi *input-output* i l'*Econometria*).
- El mòdul "Els nombres. La mesura de quantitats" desenvolupa les successions i sèries infinites, que encara no hem vist mai, i que inesperadament sorgeixen "aquí i allà" en estudiar temes econòmics tractats quantitativament.

- En el mòdul “Les funcions d’una variable” s’introdueix el concepte de funció real d’una variable i els de creixement i decreixement d’una funció. A més, es tracten alguns casos especialment importants de funcions com són la funció exponencial i la logarítmica.
- En el mòdul “Les idees bàsiques del càlcul” es presenten els conceptes de continuïtat i límits de funcions. En la segona part del mòdul, s’aborda la idea de derivada com a mesura del canvi d’una variable respecte d’una altra, i s’aprofundeixen alguns dels aspectes del càlcul diferencial. El mòdul es completa amb l’exposició del concepte d’integral d’una funció, de la seva interpretació econòmica, i d’algunes de les seves propietats.
- En el mòdul “Aplicuem les tècniques del càlcul” s’utilitzen de forma operativa els continguts de càlcul diferencial presentats en el mòdul anterior i s’aborda el problema de l’optimització de funcions.
- En l’últim mòdul, “Les funcions de diverses variables”, els conceptes bàsics de funció d’una variable s’estenen als de diverses variables, la qual cosa és imprescindible, perquè un fenomen econòmic depèn, en general, de diferents factors: per exemple, el volum de la collita d’arròs en un àmbit geogràfic determinat i corresponent a un any determinat depèn, entre altres factors, de la qualitat i la quantitat de la sembra, del clima, de la quantitat d’adob que s’utilitzi, de l’existència de malalties de la planta, de l’ús de plaguicides, etc., tot això relacionat amb el treball humà, el capital invertit, l’organització d’aquest treball i la comercialització del producte final (ja que una bona comercialització pot donar lloc a un augment de vendes i, per tant, a un augment de la superfície destinada a la collita d’arròs...).

Per acabar, direm alguna cosa sobre la confecció dels mòduls; com ja sabeu, consten de diverses parts:

- text amb exemples i exercicis proposats;
- solucionari dels exercicis;
- exercicis d’autoavaluació;
- i solucionari dels exercicis d’autoavaluació.

S’ha procurat ser gradual en l’avanç; per tant, en arribar a l’exercici d’autoavaluació, s’hauria de tenir la satisfacció de saber respondre correctament la majoria de les qüestions proposades. Però, així i tot, la solució detallada de l’exercici esperem que redueixi al *conjunt buit* les dificultats escadusseres.

Objectius

Els objectius que volem assolir mitjançant el material que presentem són els següents:

1. Completar el que ja sabeu sobre matrius, vectors, successions, etc.
2. Representar gràficament funcions d'una variable.
3. Aprofundir en la derivació i integració de funcions.
4. Introduir el tema de l'optimització.
5. Presentar les funcions de vàries variables.
6. Aportar una visió aplicada a l'economia de les matemàtiques.

Continguts

Mòdul didàctic 1

Matrius i sistemes d'equacions

Antoni Montes Lozano

1. Introducció
2. Matrius
3. El mètode de Gauss
4. Sistemes homogenis
5. Determinants i regla de Cramer
6. Matriu inversa
7. Exemples econòmics

Mòdul didàctic 2

Vectors i aplicacions lineals

Pelegrí Viader Canals

1. Vectors
2. Aplicacions lineals
3. Diagonalització de matrius

Mòdul didàctic 3

Els nombres. La mesura de quantitats

Jaume Paradís Balaux

1. Els nombres. La mesura de quantitats
2. La densitat dels nombres racionals
3. Aproximació d'un nombre irracional mitjançant racionals
4. Definició de nombre real mitjançant intervals encaixats
5. Successions de nombres reals
6. Sèries numèriques
7. Introducció a les sèries de potències
8. Exemple econòmic

Mòdul didàctic 4

Les funcions d'una variable

Frederic Udina Abelló, Margarida Coromines Bosch

i Anna Espinal Berenguer

1. Les funcions són models per a les relacions entre magnituds
2. Les funcions lineals
3. L'ordinador dibuixa funcions per nosaltres

4. No totes les corbes són rectes
5. Què podem fer amb tot el que ja sabem?
6. El creixement és la qüestió!
7. Les funcions exponencials i les logarítmiques

Mòdul didàctic 5

Les idees bàsiques del càlcul

Frederic Udina Abelló, Margarida Coromines Bosch
i Anna Espinal Berenguer

1. Les idees de continuïtat i de límit
2. Com podem mesurar el canvi, la variació?
3. El càlcul automàtic de derivades
4. La derivada dona molt de joc
5. Em pot dir el total dels beneficis dels dos darrers anys?
6. Relació entre la derivada i la integral
7. El càlcul automàtic d'integrals – I
8. El càlcul automàtic d'integrals. Mètodes generals
9. Els teoremes principals del càlcul

Mòdul didàctic 6

Apliquem les tècniques del càlcul

Frederic Udina Abelló, Margarida Coromines Bosch
i Anna Espinal Berenguer

1. Quan les coses semblen quietes
2. Que vénen corbes!
3. Optimització global
4. Exemples i problemes d'optimització
5. Última volta al voltant dels logaritmes

Mòdul didàctic 7

Les funcions de diverses variables

Ricard Torres Bargalló, Margarida Coromines Bosch
i Anna Espinal Berenguer

1. Una primera aproximació a funcions multivariants
2. Un viatge amb el Gnuplot per funcions de dues variables

Bibliografia

Apostol, T.M. (1972). *Calculus*. Barcelona: Reverté.

Chiang, A.C. (1996). *Métodos fundamentales de economía* (3a. ed.). Madrid: McGraw-Hill.

Howard, A. (1997). *Introducción al álgebra lineal* (2a. ed.). Mèxic: Limusa.

Salas, S.L. (1994). *Calculus: cálculo de una y varias variables*. Barcelona: Reverté.

Sydsaeter, K.; Hammond, P.J. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Madrid: Prentice Hall.