Filtratge analògic

Senyals i circuits en el domini de la freqüència

Olga Muñoz Medina

PID_00161694

Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

Índex

Introducció

Sistemes tan quotidians avui dia com l'ADSL resulten molt més senzills de comprendre quan "pensem" els senyals i circuits en el domini de la freqüència. Encara que les bases fonamentals per a entendre el funcionament dels circuits en el domini de la freqüència ja van ser introduïdes en el mòdul "Circuits en corrent altern", en aquest mòdul acabarem de consolidar-les.

En el mòdul "Circuits en corrent altern" vam estudiar la resposta en règim permanent per a una entrada sinusoïdal. Aquest és el cas del senyal transmès per la xarxa elèctrica. L'estudi que vam fer també és útil per als denominats senyals de banda estreta (veurem què són en aquest mòdul). En la majoria de les aplicacions, tanmateix, es treballa amb senyals més complicats, que contenen més d'una freqüència. En aquest mòdul, ampliarem per a aquests senyals el que vam aprendre en el mòdul "Circuits en corrent altern".

Començarem veient en l'apartat 1 com es descriuen els senyals en el domini freqüencial, és a dir, com podem descompondre un senyal complicat en sinusoides de diferent freqüència. A continuació, en l'apartat 2, veurem com calcular la sortida d'un circuit lineal per a aquest senyal. Il·lustrarem aquest estudi amb una aplicació tan coneguda com és l'ADSL.

Acabarem el mòdul descrivint, en l'apartat 3, els circuits en el domini de la freqüència. Encara que part d'aquest treball ja es va fer en el mòdul "Circuits en corrent altern", veurem quin nom reben els circuits segons quin sigui el seu comportament freqüencial i quins són els paràmetres característics que descriuen un circuit en el domini de la freqüència.

Objectius

Els objectius principals d'aquest mòdul són els següents:

1. Obtenir l'espectre d'amplitud i de fase d'un senyal a partir de la sèrie o transformada de Fourier (segons escaigui) corresponent.

2. Obtenir l'espectre d'amplitud i de fase del senyal de sortida d'un circuit a partir de les corbes d'amplificació i desfasament del circuit i de l'espectre d'amplitud i de fase de l'entrada.

3. Saber com es pot desplaçar en freqüència l'espectre d'un senyal passabaix.

4. Entendre, des de la perspectiva freqüencial, aplicacions com l'ADSL.

5. Transformar a dB (decibels) relacions d'amplitud i de potència.

6. Conèixer què s'entén per freqüència/es de tall, amplada de banda, freqüència de ressonància i factor de qualitat d'un filtre.

7. Conèixer quin sentit físic té la freqüència de tall a –3 dB i localitzar-la a partir de la corba d'amplificació d'un filtre.

8. Decidir, a partir del comportament asimptòtic dels components, de la corba d'amplificació o de la funció de xarxa d'un circuit, a quin tipus de filtre correspon aquest circuit.

1. Representació freqüencial de senyals

De l'anàlisi en règim permanent sinusoïdal (RPS) sabem obtenir la resposta d'un circuit a una entrada sinusoïdal. Però, com podrem obtenir la resposta a un senyal més complicat? Bé, si som capaços d'expressar aquest senyal com una suma de sinusoides, podrem aplicar superposició per a calcular la resposta. (Es pot aplicar el principi de superposició sempre que el circuit sigui lineal.)

La representació freqüencial...

... és una foma alternativa de representar una funció temporal, a vegades d'una manera molt més compacta. Per exemple, podem dir que passa un autobús a les 10, 10:10, 10:20, etc., o podem dir que la freqüència amb què passa és d'un cada deu minuts.

El fet de descompondre un senyal com una suma de sinusoides de diferents freqüències es denomina **anàlisi espectral**.

I, com podem descompondre un senyal qualsevol en una suma de sinusoides? L'anàlisi de Fourier ens dóna la resposta, com veurem a continuació. Començarem veient en el subapartat 1.1 la descomposició de senyals periòdics que es poden escriure com una suma discreta de sinusoides. Posteriorment, en el subapartat 1.2, veurem que hi ha senyals que s'escriuen, no com una suma discreta, sinó com una integral de sinusoides. D'aquesta manera, haurem vist que podem escriure qualsevol senyal en funció de senyals sinusoïdals.

1.1. Senyals periòdics

Un senyal que es repeteix cada T segons és un senyal **periòdic** de període T. És el cas del senyal $x_T(t)$ de l'equació 1 (el subíndex T indica que el senyal és periòdic de període T).

$$x_T(t) = x_T(t + T) = x_T(t + 2T) = \dots \qquad (1)$$

Un senyal periòdic de període T es pot escriure com una suma infinita d'exponencials complexes:

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t} \qquad (2)$$

(Llegim l'equació 2 de la manera següent: el senyal periòdic 'x sub T' és igual que el sumatori de menys infinit a infinit del coeficient 'c sub n' per l'exponencial complexa de freqüència 'n omega u'.)

En l'equació 2, n és un nombre enter: $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2\dots$, i els c_n són, en general, nombres complexos que tindran mòdul $|c_n|$ i fase $\angle c_n$:

$$c_n = |c_n| e^{j\angle c_n} \qquad (3)$$

L'expressió 2 correspon a la **descomposició en sèrie de Fourier** d'un senyal periòdic. Els coeficients c_n són els coeficients de la sèrie.

La freqüència $\omega_1 = 2\pi/T$, les unitats de la qual són rad/s (radiants per segon), es denomina **freqüència fonamental**. Cada freqüència múltiple de la fonamental, $n\omega_1$, es denomina **harmònic**. Concretament, el segon harmònic és la freqüència $2\omega_1$ (2 vegades la freqüència fonamental), el tercer harmònic és la freqüència $3\omega_1$ (3 vegades la freqüència fonamental) i així successivament. D'aquesta manera, l'harmònic n-èsim, $n\omega_1$, correspon a una freqüència n vegades la freqüència fonamental. Recordeu que n és un nombre enter.

Pulsació

La freqüència angular ω (rad/s) es denomina també **pulsació**.

Quan parlem de la freqüència lineal f (Hz) normalment parlem de freqüència a seques.

La freqüència de cada harmònic es pot mesurar en Hz (hertzs), simplement dividint la freqüència angular, les unitats de la qual són rad/s (radiants per segon), entre 2π:

$$nf_1 = \frac{n\omega_1}{2\pi} \tag{4}$$

Analíticament, s'acostuma a treballar amb la freqüència angular perquè és més compacte escriure ω que $2\pi f$ cada vegada que tenim un senyal cosinus o una exponencial complexa. Tanmateix, els aparells de mesura treballen amb la freqüència mesurada en hertzs (Hz). En aquest mòdul treballarem indistintament amb la freqüència en Hz, f, o en rad/s, ω. És important que us acostumeu a passar amb facilitat d'una magnitud a l'altra.

Els coeficients de la sèrie de Fourier s'obtenen fent la mitjana en un període (integral en un període dividida pel valor del període) del producte de la funció periòdica $x_T(t)$ per l'exponencial complexa de freqüència igual que la freqüència (amb signe menys) associada al coeficient:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \tag{5}$$

Noteu que, ja que considerem el règim permanent, suposem que el senyal periòdic comença abans de $t = 0$. Això ja ho fèiem en el mòdul "Circuits en corrent altern".

Per als senyals típics podeu trobar tabulats els coeficients c_n en multitud de llibres. Per exemple, a les obres de Thomas i Rosa. Per aquest motiu, el càlcul dels coeficients de la sèrie de Fourier no és un dels objectius del mòdul i no els calcularem. El que sí que és un objectiu és aprendre a interpretar la informació que donen aquests coeficients.

Lectures recomanades

Thomas, R. E.; Rosa, A. J. (2000). *Circuitos y señales: introducción a los circuitos lineales y de acoplamiento*. Barcelona: Reverté.

Thomas, R. E.; Rosa, A. J. (2004). *The analysis and design of linear circuits. Laplace early* (4a. ed.). Upper Saddle River, Nova Jersey: John Wiley & Sons.

Ens aturarem, tanmateix, en el càlcul del coeficient c_0, corresponent a la freqüència $\omega = 0$. Fixeu-vos que un corrent (o tensió) sinusoïdal de freqüència

$\omega = 0$ és un corrent (o tensió) constant, per exemple, $\cos(0t) = 1$. És a dir, és el que habitualment denominem *corrent* (*o tensió*) *continu* (DC).

El coeficient c_0 (corresponent a la freqüència $\omega = 0$) de la sèrie de Fourier d'un senyal periòdic és el component continu (DC) del senyal periòdic.

Si, a partir de l'expressió 5, calculem el valor del coeficient c_0 obtenim:

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)dt \qquad (6)$$

Veiem que el resultat correspon a la mitjana en un període del senyal periòdic.

Per tant, el valor mitjà del senyal $x_T(t)$ és el component de freqüència zero o component continu (DC) del senyal. !

Què podem dir sobre la resta de coeficients? Un aspecte important és el següent. Si la funció temporal o ona $x_T(t)$ és real, això és, sense part imaginària, els coeficients de la sèrie tenen **simetria hermítica**. Per simetria hermítica s'entén que el coeficient nombre $-n$ té el mateix mòdul que el coeficient nombre n i que la fase també és la mateixa, però canviada de signe:

$$\left.\begin{array}{l} |c_{-n}| = |c_n| \\ \angle c_{-n} = -\angle c_n \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Dit d'una altra manera, el coeficient nombre $-n$ és el complex conjugat del coeficient nombre n:

$$c_{-n} = c_n^* \qquad (8)$$

Complex conjugat

Recordeu que, tal i com s'explica a l'annex 4, el complex conjugat de $a + jb$ és $a - jb$, és a dir, la part real és igual i la part imaginària es canvia de signe.

El mòdul d'ambdós nombres és el mateix:

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

La fase d'ambdós nombres és de signe oposat. En un cas és arctg(b/a) i en un altre cas és $-$arctg(b/a).

Nosaltres normalment treballem amb senyals elèctrics que són senyals reals, és a dir, la funció temporal (ona) $x_T(t)$ és real, sense part imaginària. Què implica, des de la perspectiva freqüencial, que el senyal $x_T(t)$ sigui real? La simetria hermítica permet escriure la sèrie de Fourier com una suma de cosinus de diferent freqüència, amplitud i fase. Vegem-ho.

Considerem que $x_T(t)$ és un senyal periòdic real escrit com una suma infinita d'exponencials complexes.

$$x_T(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \cdot e^{jn\omega_1 t} + c_{-n} \cdot e^{-jn\omega_1 t}\right) \qquad (9)$$

En l'equació 9 s'han agrupat els termes corresponents a la freqüència -n i a la freqüència n de l'equació 2, per això el sumatori va des d'1 a infinit en lloc de des de menys infinit a més infinit.

Tal com es va indicar en l'equació 3, podem escriure els coeficients de la sèrie com a mòdul i fase:

$$x_T(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|c_n\right|e^{j\angle c_n} \cdot e^{jn\omega_1 t} + \left|c_{-n}\right|^{j\angle c_{-n}} \cdot e^{-jn\omega_1 t}\right) \tag{10}$$

Aplicant la propietat de simetria hermítica $\left\{\begin{array}{c}\left|c_{-n}\right| = \left|c_n\right| \\ \angle c_{-n} = -\angle c_n\end{array}\right\}$ obtenim que:

$$x_T(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|c_n\right|e^{j\angle c_n} \cdot e^{jn\omega_1 t} + \left|c_n\right|e^{-j\angle c_n} \cdot e^{-jn\omega_1 t}\right) \tag{11}$$

Noteu que en l'equació 11, utilitzant la propietat de simetria hermítica, s'ha canviat el segon terme del parèntesi respecte a com apareixia en l'equació 10.

Si ara traiem factor comú, el mòdul dels coeficients:

$$x_T(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n\right|\left(e^{j\angle c_n} \cdot e^{jn\omega_1 t} + e^{-j\angle c_n} \cdot e^{-jn\omega_1 t}\right) \tag{12}$$

tenim finalment:

$$x_T(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\left|c_n\right|\cos\left(n\omega_1 t + \angle c_n\right) \tag{13}$$

Amb l'equació 13, hem aconseguit escriure el senyal $x_T(t)$ com una suma de cosinus, cadascun amb la seva amplitud $2|c_n|$, freqüència $n\omega_1$ i fase $\angle c_n$ corresponents.

Fórmula d'Euler

Recordeu que la fórmula d'Euler ens diu que:

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

Encara que entre un sinus i un cosinus únicament hi ha una diferència de fase de $\pi/2$, un senyal s'escriu normalment com una suma de cosinus, cadascun amb la seva freqüència, amplitud i fase corresponents.

Resumim el que hem fet fins aquí. Vèiem en la primera expressió d'aquest apartat, equació 2, la descomposició en sèrie de Fourier d'un senyal periòdic. Aquesta descomposició permet escriure el senyal periòdic com una suma d'exponencials complexes de diferent freqüència. El resultat de la suma no ha de ser necessàriament un senyal real (sense part imaginària), ja que les exponencials complexes, com el seu propi nom indica, són complexes. El desenvolupament realitzat des de l'equació 9 fins a l'equació 13 ens ha servit per a comprovar que, quan el senyal periòdic és real, la sèrie de Fourier **també** es pot escriure com una suma de cosinus de diferent freqüència, cadascun amb la seva amplitud i fase corresponents. Aquesta és la idea amb què ens hem de quedar.

Imagineu que volem representar gràficament la informació sobre l'amplitud, freqüència i fase dels diferents cosinus, que hem escrit matemàticament, en l'equació 13. Com a mínim necessitarem dues gràfiques: una per a representar l'amplitud de cada senyal cosinus en funció de la freqüència (amplitud enfront de freqüència) i una altra per a representar la fase de cada senyal cosinus en funció de la freqüència (fase enfront de freqüència).

La figura 1 i la figura 2 representen, respectivament, l'amplitud i fase enfront de freqüència de cadascun dels senyals cosinus de l'equació 13. Per a la representació gràfica s'han considerat certs valors per a les amplituds i les fases, ja que aquests valors depenen de la forma temporal que tingui el senyal $x_T(t)$.

La representació amplitud enfront de freqüència és **l'espectre d'amplitud** del senyal, i la representació fase enfront de freqüència és **l'espectre de fase** del senyal. Per conveni, els angles de fase es prenen sempre respecte a la funció cosinus.

La figura 1 (espectre d'amplitud) conté la informació d'amplitud dels diferents harmònics: harmònic fonamental (ω_1), segon harmònic ($2\omega_1$), tercer harmònic ($3\omega_1$), etc., i també de la freqüència $\omega = 0$ de l'ona.

La figura 2 (espectre de fase) conté la informació de fase dels diferents harmònics: harmònic fonamental (ω_1), segon harmònic ($2\omega_1$), tercer harmònic ($3\omega_1$), etc., i també de la freqüència $\omega = 0$ de l'ona. Recordeu que el component continu és el valor mitjà del senyal. Per això, la fase a la freqüència $\omega = 0$ només pot valer 0 (si el valor mitjà del senyal periòdic és positiu) o π (si el valor mitjà del senyal periòdic és negatiu).

Figura 1. Espectre d'amplitud d'un senyal periòdic de freqüència ω_1

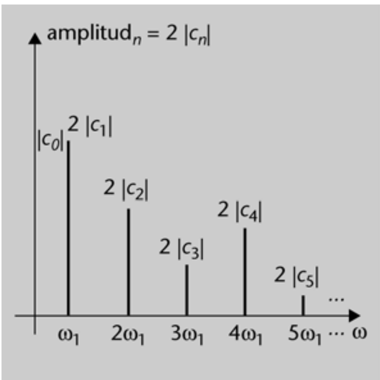
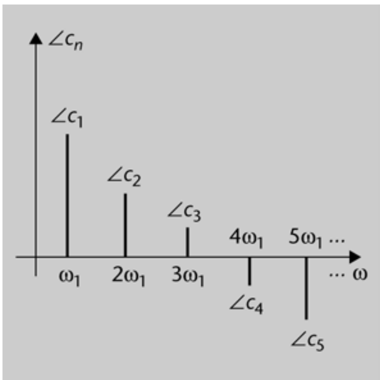


Figura 2. Espectre de fase d'un senyal periòdic de freqüència ω_1



També podem representar gràficament el mòdul $|c_n|$ i la fase $\angle c_n$ dels coeficients associats a les exponencials complexes.

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_1 t} \qquad (14)$$

En aquest cas, en la representació hem d'incloure també les freqüències negatives. Noteu que les freqüències negatives no deixen de ser una descripció matemàtica, resultat d'escriure la sèrie de Fourier com un sumatori d'exponencials complexes. Les freqüències que tenen sentit físic són les positives.

Quan representem les amplituds i fases associades a les freqüències positives i negatives parlem **d'espectre bilateral**, per a distingir-lo de la representació que només inclou freqüències positives. Per extensió, la representació amb només freqüències positives (figura 1 i figura 2) també s'anomena **espectre unilateral**.

La figura 3 mostra l'espectre bilateral d'amplitud del senyal $x_T(t)$, és a dir, el mòdul dels coeficients c_n (vegeu equació 14). La figura 4 mostra l'espectre bilateral de fase, és a dir, la fase dels coeficients c_n. Noteu que l'espectre d'amplitud és simètric respecte a la freqüència $\omega = 0$, i l'espectre de fase és antisimètric. Això només ocorre quan treballem amb senyals reals.

Recordeu que els coeficients de la sèrie...

... de Fourier d'un senyal periòdic **real** tenen simetria hermítica, és a dir, el coeficient nombre $-n$ té el mateix mòdul que el coeficient nombre n. Les fases d'ambdós coeficients també són iguals però canviades de signe, tal com escrivim en l'equació 7.

Figura 3. Espectre bilateral d'amplitud

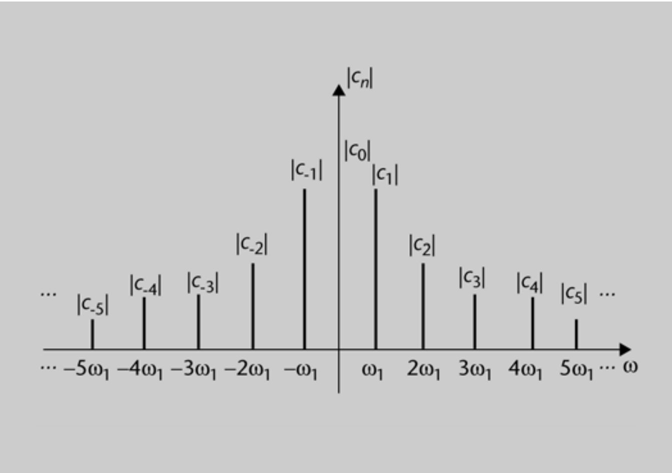
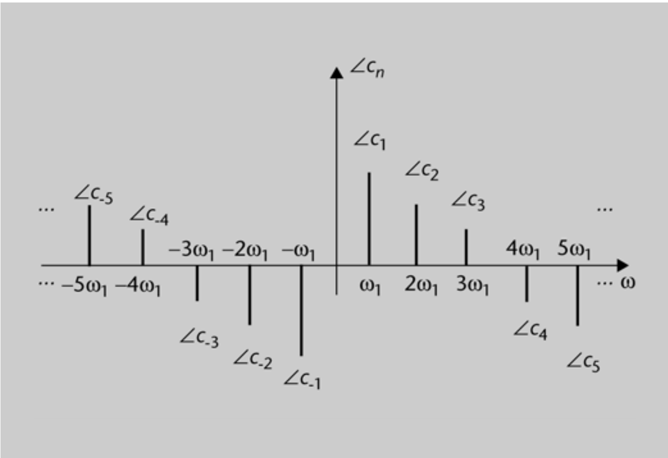


Figura 4. Espectre bilateral de fase



Sempre que treballem amb un senyal real l'espectre d'amplitud serà simètric respecte a la freqüència $\omega = 0$, i l'espectre de fase antisimètric. Això significa que si treballem amb senyals reals podem treballar tant amb l'espectre bilateral com amb l'espectre unilateral, ja que ambdós contenen la mateixa informació.

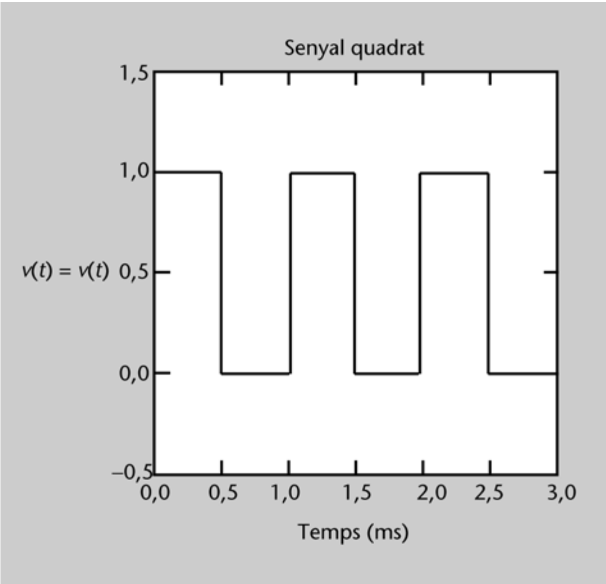
Com que els senyals elèctrics són senyals reals, nosaltres treballarem normalment amb l'espectre unilateral, és a dir, només amb les freqüències positives.

Exemple 1. Espectre d'un senyal quadrat

El senyal quadrat de la figura 5 correspon a una tensió periòdica que es repeteix cada mil·lisegon, és a dir, el seu període és $T = 1$ ms. Per a aquest senyal:

a) Calcularem la seva freqüència fonamental.
b) Calcularem el valor del seu component continu (DC).
c) Escriurem el senyal com una suma de sinusoides de diferent freqüència.
d) Representarem el seu espectre d'amplitud i de fase.

Figura 5. Senyal quadrat de tensió en el domini del temps



Solució

a) La freqüència fonamental d'un senyal periòdic de període $T = 1$ ms és:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi 10^3 \text{ rad/s} \tag{15}$$

En Hz, la freqüència fonamental serà l'anterior dividida per 2π:

$$f_1 = \frac{1}{T} = 10^3 \text{ Hz} = 1 \text{ kHz} \tag{16}$$

b) Quant val el valor mitjà del senyal quadrat de la figura 5? En un període, durant la meitat del temps la tensió val 1 V i durant l'altra meitat del temps la tensió val 0 V, així que la tensió mitjana en un període és 0,5 V. Aquest valor mitjà és el component continu (DC) de la tensió representada en la figura 5.

En general, si no veieu de manera immediata el valor del component continu d'un senyal periòdic, heu d'utilitzar l'equació 6, és a dir, integrar el senyal en un període i dividir-lo pel valor del període.

c) Com que $v(t)$ és un senyal periòdic i real, el podem escriure com la suma d'infinits cosinus, tal com es va veure en l'equació 13. Recordeu que cadascun d'aquests cosinus té una freqüència múltiple de la freqüència fonamental f_1, calculada en l'apartat *a*.

Per al senyal de l'exemple, l'amplitud dels senyals cosinus de la sèrie de Fourier l'obtenim a partir de l'expressió:

$$2|C_n| = \frac{1}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)) \qquad n = 1,2,3.... \qquad (17)$$

que s'obté a partir dels coeficients C_n, calculats segons l'equació (5), i que podeu trobar a Thomas-Rosa (2004).

Noteu que l'amplitud dels harmònics parells ($n = 2, 4, 6...$) és sempre 0. Per això, el senyal quadrat només tindrà contingut freqüencial a les freqüències $f = f_1$, $f = 3f_1$, $f = 5f_1$, etc. És a dir, les freqüències que són un múltiple senar de la freqüència fonamental.

Per al senyal de l'exemple, la fase dels coeficients de la sèrie de Fourier és –90°, de manera que finalment, podem escriure el senyal $v(t)$ com segueix:

$$v(t) = 0{,}5 + 0{,}64\cos(2\pi 10^3 t - 90°) + 0{,}21\cos(3 \cdot 2\pi 10^3 t - 90°) + ... \qquad (18)$$

El primer terme de l'equació 18 és el component continu o de freqüència zero de la tensió $v(t)$. La resta de termes són cosinus amb una freqüència que és un múltiple senar de la freqüència fonamental d'1 kHz (o equivalentment $2\pi 10^3$ rad/s).

Atès que $\cos(\omega t - 90°) = \sin(\omega t)$, també podríem escriure l'equació 18 com una suma infinita de sinus de fase inicial 0°.

$$v(t) = 0{,}5 + 0{,}64\sin(2\pi 10^3 t) + 0{,}21\sin(3 \cdot 2\pi 10^3 t) + ... \qquad (19)$$

d) Representarem ara l'espectre d'amplitud i de fase de la tensió $v(t)$, és a dir, l'amplitud i fase dels diferents harmònics en funció de la freqüència. Recordeu que el nombre d'harmònics, en principi, és infinit, així que limitarem la representació fins a l'harmònic número 30.

La figura 6 i la figura 7 representen, respectivament, l'espectre d'amplitud i de fase del senyal quadrat fins a l'harmònic 30. En ambdues figures només es representen les freqüències positives (espectre unilateral). Fixeu-vos que els valors de l'eix d'abscisses corresponen a kHz.

Observeu en la figura 6 que el component de freqüència 0 és 0,5 V que, tal com hem indicat anteriorment, és el valor mitjà de la tensió. Observeu també que, d'acord amb l'expressió 18, l'amplitud de l'harmònic fonamental, freqüència $f_1 = 1/T = 1$ kHz, és 0,64 V. L'amplitud del segon harmònic és 0. El tercer harmònic té amplitud 0,21 V, etc.

Observeu en la figura 7 que l'espectre de fase val sempre –90°, excepte per a la freqüència contínua, que val 0.

En l'espectre de fase, per conveni, la fase es representa sempre respecte al senyal cosinus.

Coeficient de la sèrie de Fourier per al senyal quadrat de la figura 5:

$$C_n = -j\frac{1}{n2\pi}(1 - \cos n\pi), \quad n = 1, 2, ...$$

Figura 6. Espectre (unilateral) d'amplitud del senyal quadrat de l'exemple 1

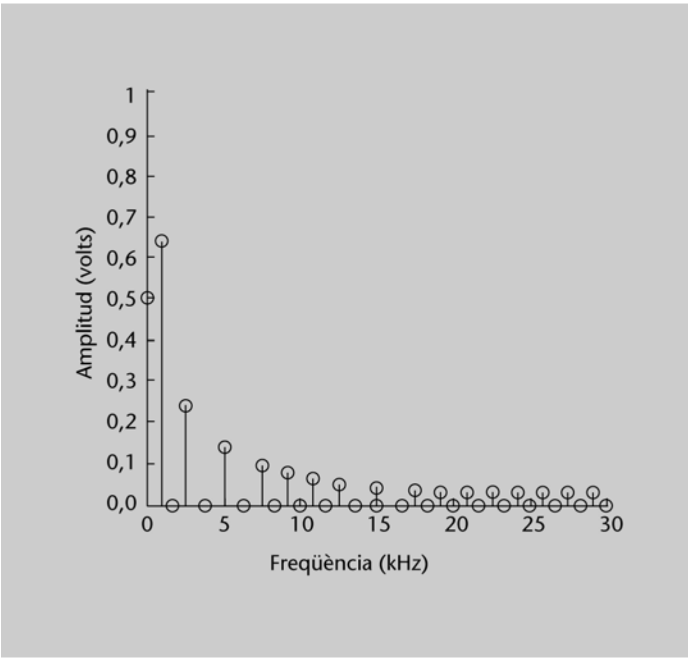
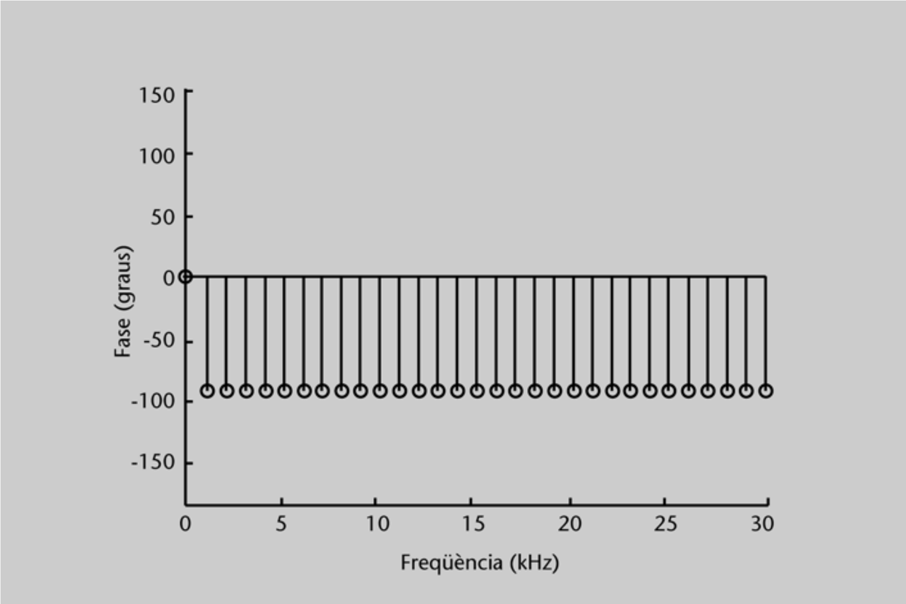


Figura 7. Espectre (unilateral) de fase del senyal quadrat de l'exemple 1



En l'exemple 1 hem vist que un senyal quadrat es pot descompondre en infinits senyals cosinus. Això implica, fent el camí invers, que podem reconstruir el senyal quadrat sumant infinits senyals cosinus cadascun amb el seu mòdul i fase corresponents. La figura 8, la figura 9 i la figura 10 corresponen a la reconstrucció del senyal quadrat sumant un senyal continu (DC) igual que el valor mitjà del senyal i diversos harmònics. El senyal reconstruït de la figura 8 inclou fins al tercer harmònic, és a dir, continu, harmònic fonamental i tercer harmònic, ja que el segon harmònic és 0. El senyal reconstruït de la figura 9 inclou fins al cinquè harmònic, és a dir, continu, harmònic fonamental, tercer harmònic i cinquè harmònic, ja que els harmònics parells són 0. El senyal reconstruït de la figura 10 inclou fins a l'harmònic 49.

Figura 8. Reconstrucció del senyal quadrat sumant el continu i els 3 primers harmònics

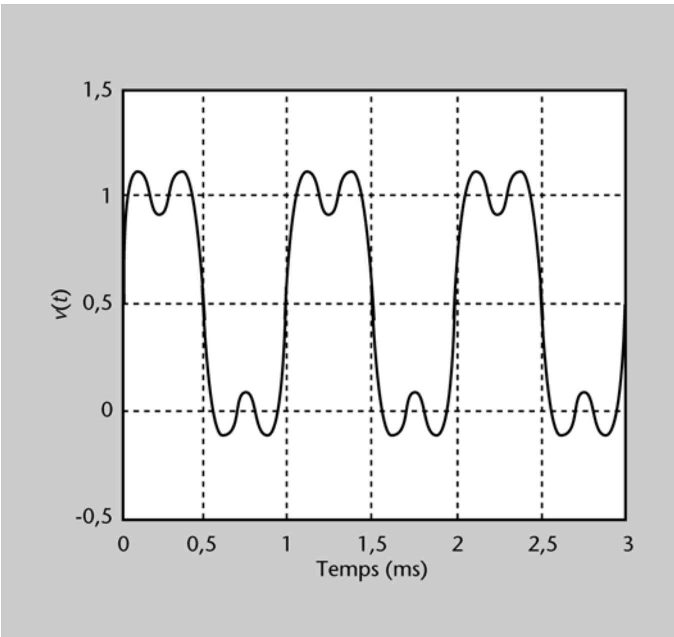


Figura 9. Reconstrucció del senyal quadrat sumant el continu
i els 5 primers harmònics

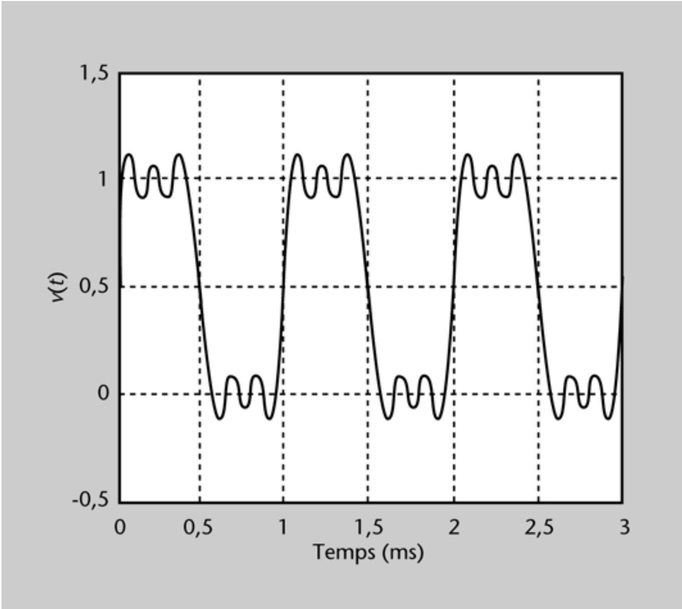
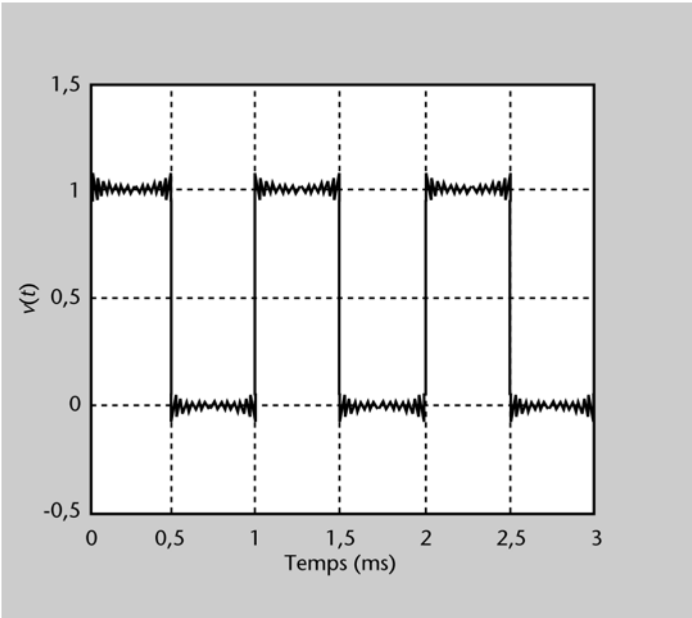


Figura 10. Reconstrucció del senyal quadrat sumant el continu
i els 49 primers harmònics



En la figura 10 tenim una reconstrucció més que acceptable del senyal quadrat. No obstant això, observeu que el major error es produeix als flancs de pujada i baixada del senyal quadrat, on apareix un arrissament major que a les zones planes del senyal quadrat. Com més harmònics incloguem en la reconstrucció del senyal quadrat, menor serà aquest arrissament. En qualsevol cas, l'arrissament no arribarà mai a desaparèixer del tot (per això hauríem d'incloure un nombre infinit d'harmònics). Això és el que es denomina **fenomen de Gibbs**.

Si afegim més harmònics, és a dir, freqüències més altes, aquests components d'alta freqüència serviran per a millorar l'aproximació als flancs de pujada i baixada del senyal quadrat.

En general, els canvis bruscos en qualsevol forma d'ona estan associats als components d'alta freqüència.

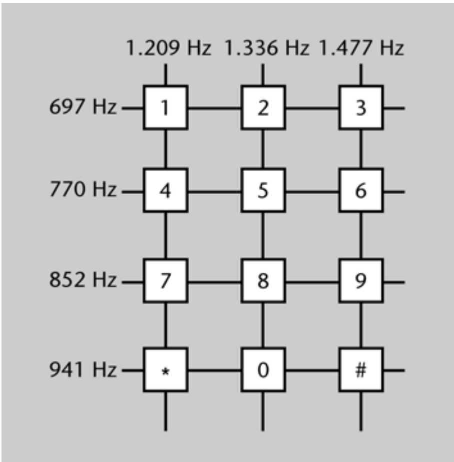
Exemple 2. Telèfon de tons

En marcar un número al teclat d'un telèfon, cada vegada que deixem anar un botó prèviament premut, es transmet una mescla de dues freqüències: una del grup {1.209 Hz, 1.336 Hz, 1.447 Hz} i una altra del grup {697 Hz, 770 Hz, 852 Hz, 941 Hz}. A cada dígit correspon una combinació diferent de freqüències com es mostra en la figura 11. D'aquesta manera, a través del contingut freqüencial del senyal transmès, a la central es pot saber el dígit marcat.

En aquest exemple:

a) Escriurem l'expressió temporal del senyal transmès en marcar l'1.
b) Dibuixarem l'espectre d'amplitud del senyal transmès en marcar l'1.

Figura 11. Teclat d'un telèfon i freqüències associades a cadascun dels dígits



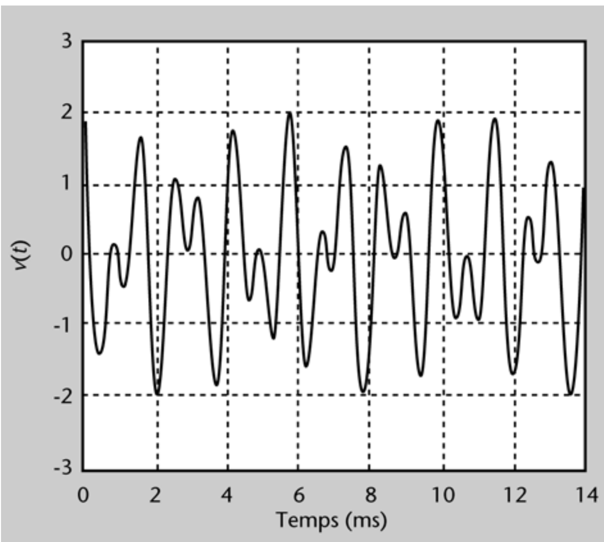
Solució

a) En prémer i deixar anar la tecla de l'1 es transmeten dues sinusoides: una de freqüència 697 Hz i una altra de freqüència 1.209 Hz. L'ona transmesa és:

$$x(t) = \cos(2\pi \cdot 697t) + \cos(2\pi \cdot 1.209t) \quad (20)$$

La figura 12 representa temporalment el senyal $x(t)$ de l'equació 20.

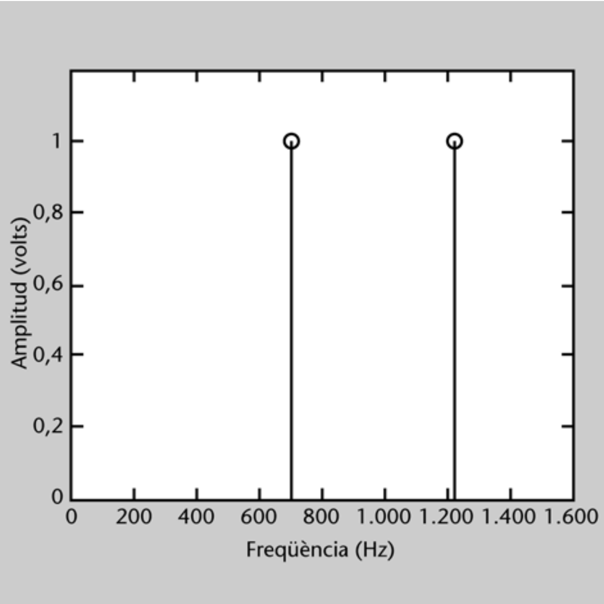
Figura 12. Ona transmesa en marcar el dígit 1 al telèfon



L'ona és el resultat de sumar dos tons (sinusoides): un de freqüència 697 Hz i un altre de freqüència 1.209 Hz.

b) El contingut freqüencial del senyal $x(t)$ de l'equació 20 es concentra en les freqüències 697 i 1.209 Hz. La figura 13 mostra l'espectre d'amplitud del senyal $x(t)$ de l'equació 20. L'espectre d'amplitud és 0, per a qualsevol freqüència diferent de 697 i 1.209 Hz. Es tracta, com succeïa amb el senyal de l'exemple 1, d'un **espectre discret**.

Figura 13. Especte d'amplitud



Espectre d'amplitud d'un senyal suma de dos tons (sinusoides): un de freqüència 697 Hz i un altre de freqüència 1.209 Hz

1.2. Senyals no periòdics

Els senyals dels exemples 1 i 2 tenen un espectre discret, és a dir, diferent de 0 només per a alguns valors concrets de freqüència. En general, això no succeeix per a senyals **no periòdics**.

Podem veure-ho intuïtivament de la manera següent: en un senyal periòdic la distància entre cada dues ratlles espectrals (harmònics) és la freqüència fonamental (observeu, per exemple, la figura 1). Si augmentem el període del senyal periòdic, la freqüència fonamental disminueix, per la qual cosa la distància entre cada dues ratlles espectrals disminuirà. En el límit, per a un període infinit, que és com dir que el senyal no es repeteix mai, les ratlles espectrals estaran infinitament juntes: tindrem un **espectre continu** en lloc de discret.

En general, podem escriure un senyal no periòdic com una suma contínua (integral) d'exponencials complexes a través de la seva transformada de Fourier $X(\omega)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{21}$$

L'equació 21 es coneix com a transformada inversa de Fourier. Fixeu-vos que en aquesta equació, el sumatori de l'equació 2 s'ha convertit en una integral.

El paper que abans feien els coeficients c_n de la sèrie de Fourier ara és exercit per:

$$\frac{1}{2\pi}X(\omega)d\omega \quad (22)$$

(L'equació anterior la llegim com a 'X d'omega per diferencial d'omega entre 2 pi'.) El factor $d\omega/2\pi$ en 22 té com a unitats Hz, ja que és igual a df ('llegiu-hi diferencial de f').

El factor $X(\omega)$ és la transformada de Fourier del senyal $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad (23)$$

Les unitats dels coeficients c_n de la sèrie de Fourier són V (volts) o A (amperes), depenent de si el senyal $x(t)$ és un senyal de tensió o de corrent. Les unitats de la magnitud en l'equació 22, que fa el mateix paper que els coeficients de la sèrie, són també volts o amperes, segons correspongui. Per tant, les unitats de la transformada de Fourier són V/Hz (volts per hertzs) o A/Hz (amperes per hertz), depenent de si es tracta d'un senyal elèctric de tensió o corrent.

En qualsevol cas, no és el nostre objectiu el càlcul matemàtic de la transformada de Fourier i no ho farem.

Únicament ens aturarem, com en el cas d'espectre discret, en el valor de la transformada de Fourier a la freqüència $\omega = 0$:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt \quad (24)$$

$X(0)$ és el component de freqüència zero o component continu (DC) del senyal no periòdic. Noteu que, per la pròpia definició d'integral, l'equació 24 correspon a l'àrea del senyal $x(t)$.

Complex conjugat

Recordeu que el complex conjugat de $a + jb$ és $a - jb$, és a dir, la part real és igual i la part imaginària es canvia de signe.

El mòdul d'ambdós nombres és el mateix:

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

La fase d'ambdós nombres és de signe oposat. En un cas és arctg(b/a) i en un altre cas és –arctg(b/a).

Com en el cas de senyals d'espectre discret, si el senyal és real, la transformada de Fourier té simetria hermítica:

$$X(\omega) = X^*(-\omega) \quad (25)$$

És a dir, el mòdul de la transformada és igual per a les freqüències ω i $-\omega$, mentre que la fase de la transformada canvia de signe.

Això significa que, igual que succeïa amb senyals periòdics, si el senyal és real, l'espectre bilateral d'amplitud és simètric respecte a la freqüència $\omega = 0$ i el de fase, antisimètric. I tal com ocorria amb els senyals periòdics, aquesta simetria permet treballar tant amb l'espectre unilateral, com amb el bilateral, perquè ambdós tenen la mateixa informació.

Quan els senyals no periòdics són molt complicats no és possible obtenir de manera analítica la seva transformada de Fourier. No obstant això, el seu contingut freqüencial es pot determinar experimentalment mitjançant **analitzadors d'espectre**.

Analitzador d'espectre

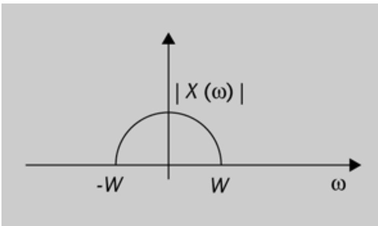
Per a visualitzar l'evolució temporal d'una ona utilitzem l'oscil·loscopi. Un analitzador d'espectre és un aparell que ens permet visualitzar el contingut freqüencial d'un senyal.

Aquells senyals el contingut freqüencial dels quals es concentra en freqüències que van des de la freqüència contínua (o freqüències properes com algunes desenes de Hz) fins una freqüència W, a partir de la qual l'espectre d'amplitud es redueix significativament, es denominen **senyals passabaix**.

El marge de freqüències dins del qual el senyal té un contingut significatiu es denomina **amplada de banda** del senyal (seria aproximadament W).

La figura 14 representa l'espectre bilateral d'un senyal passabaix (noteu que l'espectre no és discret, sinó continu). Per a veure que és un senyal passabaix ens fixem exclusivament en les freqüències positives. Observeu que el senyal conté freqüències que van des de les baixes freqüències fins a una freqüència màxima W. Per tant, direm que el senyal de la figura 14 és un senyal passabaix d'amplada de banda W.

Figura 14. Senyal passabaix d'amplada de banda W rad/s



És important que recordeu que per a mesurar l'amplada de banda d'un senyal només comptem les freqüències positives.

L'amplada de banda d'un senyal...

... està relacionada amb la quantitat d'informació que conté aquest senyal. Per exemple, en transmissió de dades, com més alta sigui la velocitat amb la qual es volen transmetre aquestes dades, major ha de ser l'amplada de banda del senyal que els transporta.

Un exemple de senyal passabaix és el senyal de veu que s'estén des de les baixes freqüències fins als 5 kHz (en realitat el seu espectre es concentra en l'interval que va entre els 100 Hz i els 5 kHz). Encara així, podríem reduir la seva amplada de banda i continuar entenent el que ens diuen. De fet, el senyal de la veu telefònica es limita a un interval comprès entre 300 i 3.300 Hz aproximadament, marge suficient per a garantir la intel·ligibilitat de la veu. En qualsevol cas, eliminar els components d'alta freqüència elimina aspectes diferenciadors del senyal; qui no ha notat alguna vegada com de semblants sonen les veus de dos germans des de l'altre costat del telèfon? I és que, encara que no siguin necessàries per a la intel·ligibilitat del missatge parlat, l'oïda humana és capaç de percebre freqüències de fins a uns 22 kHz. Aquesta és l'amplada de banda dels senyals d'àudio d'alta fidelitat, que també són senyals passabaix el contingut freqüencial dels quals arriba fins a uns 22 kHz. Un altre exemple de senyal passabaix és el senyal de vídeo de televisió, l'amplada de banda del qual és d'uns 4 MHz, molt major que la d'un senyal d'àudio.

D'altra banda, un **senyal passabanda** és aquell el contingut significatiu del qual va d'una freqüència $\omega_{\text{mín}}$, significativament major que 0, fins a una altra freqüència $\omega_{\text{màx}}$. L'amplada de banda B d'aquest senyal és la diferència entre ambdues freqüències:

$$B = \omega_{\text{màx}} - \omega_{\text{mín}} \text{ rad/s} \tag{26}$$

O equivalentment:

$$B = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2\pi} \text{ Hz} = f_{\max} - f_{\min} \text{ Hz} \tag{27}$$

Si la freqüència central del senyal és molt gran per comparació a l'amplada de banda B es parla de **senyal passabanda de banda estreta**. Per exemple, en el cas del sistema GSM (sistema global per a comunicacions mòbils) el senyal de cada usuari ocupa una amplada de banda de 200 kHz al voltant d'una freqüència central que és de l'ordre de 900 MHz, amb la qual cosa l'amplada de banda és menor que l'1 per 1.000 de la freqüència central.

En el cas de senyals passabanda de banda estreta, la manera com un circuit modifica el senyal es podria aproximar a la manera com actuaria sobre un senyal d'una única freqüència igual que la central. Però, què fem quan aquest no sigui el cas? Això ho estudiarem en l'apartat 2 d'aquest mòdul.

1.3. Desplaçament freqüencial (modulació)

No podem acabar aquest apartat on hem estat revisant la sèrie i la transformada de Fourier, sense recordar una de les seves propietats més importants: la del desplaçament freqüencial o modulació.

Hem vist en els apartats anteriors que, en general, un senyal qualsevol en el domini de la freqüència ocupa certes freqüències de l'espectre radioelèctric. Normalment, abans de transmetre un senyal a través d'una antena, l'espectre del senyal es desplaça a freqüències superiors a les inicialment ocupades. D'aquesta manera convertim un senyal passabaix en un senyal passabanda.

Una de les raons per les quals es fa això és per a poder tenir antenes més petites. Sense entrar en detalls sobre el comportament de les antenes (que no és l'objectiu d'aquesta assignatura), podem dir, *grosso modo*, que perquè una antena radiï ha de tenir unes dimensions superiors a la longitud d'ona dels senyals que ha de radiar. La longitud d'ona és inversament proporcional a la freqüència. De manera que, com més petita sigui la freqüència, més gran ha de ser l'antena perquè radiï. Per aquest motiu interessa que el senyal que s'ha de transmetre es concentri en les freqüències altes (per exemple, les emissores de ràdio transmeten a freqüències de l'ordre de MHz).

D'altra banda, si tenim diversos senyals d'àudio que han de compartir un mateix canal de transmissió (per exemple, senyals radiofònics emesos en zones geogràficament pròximes), si les transmetem en bandes de freqüències disjuntes, podrem diferenciar-les en el receptor.

Fins ara la descripció freqüencial no ha estat més que això, una descripció alternativa del senyal. Com fem per a desplaçar un senyal en freqüència? La transformada de Fourier té la propietat següent:

$$s(t) = x(t)\cos(\omega_p t) \leftrightarrow S(\omega) = \frac{X(\omega - \omega_p)}{2} + \frac{X(\omega + \omega_p)}{2} \qquad (28)$$

És a dir, si multipliquem una ona $x(t)$ per un cosinus de freqüència ω_p rad/s, la transformada de Fourier $S(\omega)$ del producte és igual que la transformada de Fourier del senyal $x(t)$, això és $X(\omega)$, reduït en un factor 2 i desplaçat en freqüència ω_p rad/s cap a dalt i cap a baix en l'eix de freqüències (o equivalentment $f_p = \omega_p/2\pi$ Hz).

Il·lustrarem la fórmula anterior amb les gràfiques de la figura 15 i la figura 16. Considereu, per exemple, que el senyal $x(t)$ té un espectre d'amplitud com el que s'ha dibuixat en la figura 15. El valor màxim de la transformada de Fourier de $x(t)$ és A_m. En multiplicar $x(t)$ per $\cos(\omega_p t)$ desplacem el seu espectre cap a dalt i cap a baix ω_p rad/s, tal com es mostra en la figura 16.

Quan treballeu amb desplaçaments freqüencials és convenient, per a evitar confusions, que utilitzeu l'espectre bilateral.

Figura 15. Espectre del senyal $x(t)$

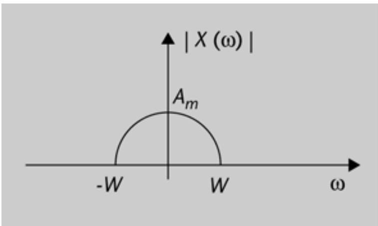
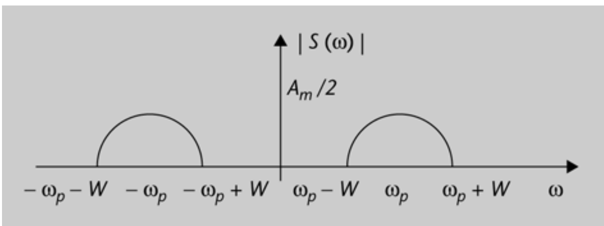


Figura 16. Espectre del senyal $s(t) = x(t)\cos(\omega_p t)$



Noteu que el valor màxim de l'espectre d'amplitud de $s(t)$ (figura 16) és $A_m/2$, ja que, en multiplicar pel cosinus, la transformada de Fourier es redueix en un factor 2. És important assenyalar que el factor 2 només afecta l'amplitud de la transformada de Fourier però no la seva forma, que és on hi ha la informació del senyal $x(t)$. Aquesta informació ara apareix duplicada: noteu que apareixen dues còpies, o **àlies**, de l'espectre original, una centrada en $-\omega_p$ i una altra centrada en ω_p.

El desplaçament freqüencial és habitual en qualsevol sistema de comunicacions, on sempre sol aparèixer un modulador. La funció del modulador és adaptar el senyal que conté la informació que es vol transmetre (senyal missatge) al mitjà pel qual es transmetrà. Això implica traslladar l'espectre del senyal missatge (espectre passabaix) a freqüències altes al voltant d'una freqüència ω_p denominada **portadora**. Per exemple, 93,9 MHz és la freqüència portadora usada per l'emissora 40 Principales.

En el receptor hi ha d'haver un desmodulador, que traslladi de nou l'espectre passabanda rebut, com el de la figura 16, a la banda de freqüències original.

2. Filtratge

En l'apartat 1 hem vist com podem descriure un senyal qualsevol, no necessàriament sinusoïdal, a través del seu contingut freqüencial. En aquest apartat utilitzarem aquesta descripció per a calcular la resposta en règim permanent d'un circuit lineal que tingui com a entrada aquest senyal.

Veurem en els subapartats 2.1 i 2.2 que el senyal de sortida és determinat per l'amplificació i desfasament del circuit a cadascuna de les freqüències que conté el senyal d'entrada. El subapartat 2.1 el dediquem als senyals periòdics i el subapartat 2.2, als senyals no periòdics.

L'amplificació i el desfasament d'un circuit a les diferents freqüències es representen mitjançant les corbes d'amplificació i desfasament. En el subapartat 2.3 veurem com es representen habitualment aquestes corbes.

2.1. Filtratge de senyals periòdics

Recordeu que en el mòdul "Circuits en corrent altern" (anàlisi en RPS, règim permanent sinusoïdal) vam veure que la resposta en règim permanent d'un sistema lineal i estable a un senyal sinusoïdal $x(t) = A\cos(\omega_x t + \phi)$ és:

> Recordeu que per a un circuit amb funció de xarxa $H(s)$, el mòdul de $H(j\omega_x)$ és l'amplificació del circuit a la freqüència ω_x i que l'argument de $H(j\omega_x)$ és el desfasament introduït pel circuit a la freqüència ω_x.

$$y(t) = A|H(j\omega_x)|\cos(\omega_x t + \phi + \angle H(j\omega_x)) \tag{29}$$

on $H(j\omega_x)$ és la funció de xarxa $H(s)$ del sistema particularitzada en $s = j\omega_x$.

D'altra banda, hem vist en el subapartat 1.1 d'aquest mòdul que els senyals periòdics reals (sense part imaginària) es poden escriure com una suma de senyals cosinus les freqüències dels quals són múltiples de la freqüència fonamental, cadascuna amb la seva amplitud i fase corresponents. Si denominem ω_1 aquesta freqüència fonamental, podem escriure un senyal periòdic de la manera següent:

$$x_T(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \tag{30}$$

Noteu que, per a calcular la resposta en règim permanent d'un sistema lineal al senyal $x_T(t)$, podem aplicar superposició, juntament amb l'equació 29. D'aquesta manera, calculem la resposta $y_T(t)$ com la suma de les respostes individuals a cadascun dels senyals cosinus en què descomponem $x_T(t)$:

$$y_T(t) = c_0 H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \cos(n\omega_1 t + \varphi'_n) \tag{31}$$

En l'equació 31, $H(0)$ és la resposta en continu (DC) del sistema i:

Recordeu que la resposta forçada d'un sistema a una entrada contínua és el mateix senyal continu multiplicat pel valor de $H(s)$ avaluat en $s = 0$.

$$A'_n = A_n \left| H\left(jn\omega_1\right) \right| \tag{32}$$

$$\varphi'_n = \varphi_n + \angle H\left(jn\omega_1\right) \tag{33}$$

És a dir, per a l'harmònic $n\omega_1$ l'amplitud de sortida és l'amplitud A_n, que aquest harmònic té a l'entrada, multiplicada per l'**amplificació** del circuit a la freqüència $n\omega_1$: $|H(jn\omega_1)|$ (equació 32).

La fase que té l'harmònic $n\omega_1$ a la sortida és la fase φ_n que aquest harmònic té a l'entrada més el **desfasament** que el circuit afegeix a la freqüència $n\omega_1$: $\angle H(jn\omega_1)$ (equació 33).

En l'expressió 31 podeu veure que la sortida $y_T(t)$ també és un senyal periòdic amb la mateixa freqüència fonamental ω_1 que el senyal d'entrada $x_T(t)$: només conté freqüències múltiples de la freqüència fonamental ω_1. Tanmateix, com hem vist, el sistema ha modificat l'amplitud i fase de cada harmònic. Es diu llavors que el sistema ha modificat el contingut freqüencial del senyal d'entrada i, en conseqüència, la seva forma d'ona temporal.

El procés pel qual un circuit o sistema modifica el contingut freqüencial d'un senyal d'entrada es coneix amb el nom de **filtratge** i aquest circuit o sistema rep el nom de **filtre**.

El procediment que hem aplicat per a calcular la resposta també ens serveix quan escrivim el senyal (sigui o no real) com una suma d'exponencials complexes (espectre bilateral). L'exponencial complexa corresponent a la freqüència ω, es pot escriure desglossada en part real i imaginària com a:

$$x(t) = Ae^{j\omega t} = A\cos(\omega t) + jA\sin(\omega t) \tag{34}$$

La resposta $y(t)$ en règim permanent a l'exponencial complexa de l'equació 34 d'un circuit amb funció de xarxa $H(s)$ és la suma de la resposta al cosinus més la resposta al sinus, i aquesta última multiplicada per j:

$$y(t) = |H(j\omega)|A\cos(\omega t + \angle H(j\omega)) + j|H(j\omega)|A\sin(\omega t + \angle H(j\omega)) \tag{35}$$

Realitzant el pas invers fet en l'equació 34, podem escriure també l'equació 35 com:

$$y(t) = |H(j\omega)|Ae^{j(\omega t + \angle H(j\omega))} \tag{36}$$

que és equivalent a:

$$y(t) = H(j\omega)Ae^{j\omega t} \tag{37}$$

Veiem en l'equació 36 que per a una entrada exponencial complexa de freqüència ω l'amplitud a la sortida és determinada per l'amplificació del circuit a la freqüència ω. També la fase de la sortida és la de l'entrada més el desfasament del circuit a la freqüència ω.

Si tenim el senyal escrit com una suma d'exponencials complexes, mitjançant superposició, arribarem també a la conclusió que l'espectre bilateral d'amplitud és l'espectre bilateral d'amplitud de l'entrada per la corba d'amplificació, que caldrà calcular també **per** a les freqüències negatives. També l'espectre bilateral de fase és l'espectre bilateral de fase de l'entrada **més** la corba de desfasament, que caldrà calcular també per a les freqüències negatives.

Com serà la corba d'amplificació i desfasament per a les freqüències negatives? Recordeu que en un circuit els zeros i els pols sempre apareixen en parells complexos conjugats. Això fa que, per a un circuit amb funció de xarxa $H(s)$, sempre es compleixi que:

$$H(-j\omega) = H^*(-j\omega) \tag{38}$$

És a dir, la funció $H(j\omega)$ té simetria hermítica, per la qual cosa la corba d'amplificació sempre serà simètrica respecte a la freqüència $\omega = 0$, i la corba de desfasament, antisimètrica.

Exemple 3. Filtratge d'un senyal quadrat

Repreneu el senyal quadrat de l'exemple 1. Hi hem vist que podem escriure aquest senyal com la suma de cosinus següent:

$$v_0(t) = 0{,}5 + 0{,}64\cos(2\pi 10^3 t - 90°) + 0{,}21\cos(3 \cdot 2\pi 10^3 t - 90°) + \ldots \tag{39}$$

(Tal com hem vist en l'exemple 1, l'amplitud dels harmònics parells és 0. Noteu també que la fase de tots els harmònics del senyal quadrat és la mateixa i igual que –90°, excepte en $\omega = 0$.)

Ara considereu que el senyal quadrat és l'entrada d'un filtre la funció de xarxa del qual és:

$$H_1(s) = 1{,}8 \cdot 2\pi \cdot 10^3 \frac{s}{s^2 + 1{,}8 \cdot 2\pi \cdot 10^3 s + \left(2\pi \cdot 10^3\right)^2} \tag{40}$$

Per a aquest filtre:

a) Calcularem la tensió de sortida $v_0(t)$.
b) Dibuixarem l'espectre d'amplitud i fase de la tensió de sortida.
c) Dibuixarem la tensió de sortida en el domini del temps.

Solució

a) Calcularem la sortida aplicant superposició i el que sabem de la resposta en RPS (equacions 31, 32 i 33):

$$\begin{aligned} v_0(t) &= H_1(0)0,5 + \left|H_1(j2\pi 10^3)\right| 0,64\cos\left(2\pi 10^3 t - 90° + \angle H_1(j2\pi 10^3)\right) + \\ &+ \left|H_1(j3\cdot 2\pi 10^3)\right| 0,21\cos\left(3\cdot 2\pi 10^3 t - 90° + \angle H_1(j3\cdot 2\pi 10^3)\right)... \end{aligned} \quad (41)$$

És a dir, l'amplitud de cada harmònic a la sortida del filtre és l'amplitud que té aquest harmònic a l'entrada del filtre multiplicada per l'amplificació (mòdul de $H(j\omega)$) a la freqüència de l'harmònic. També, a la sortida del filtre la fase de cada harmònic és la seva fase a l'entrada més el desfasament afegit pel filtre (argument de $H(j\omega)$) a la freqüència de l'harmònic.

Per tant, per a calcular la sortida necessitem calcular l'amplificació i desfasament introduïts pel filtre per a cadascun dels harmònics (en l'equació 41 només se n'han escrit 3, però són infinits, per això hi ha els punts suspensius).

Per a calcular l'amplificació i desfasament del filtre per a cada harmònic hem de particularitzar la funció de xarxa del filtre per a $s = j\omega$, on ω és la freqüència de l'harmònic en radiants per segon:

$$\begin{aligned} &f = 0 \Rightarrow H_1(s)\big|_{s=j0} = 0 \\ &f_1 = 1\text{ kHz} \Rightarrow H_1(s)\big|_{s=j2\pi 10^3} = 1 \\ &3f_1 = 3\text{ kHz} \Rightarrow H_1(s)\big|_{s=j2\pi\cdot 3\cdot 10^3} = 0,31 - j0,45 = 0,6e^{-j56°} \\ &... \end{aligned} \quad (42)$$

Substituint en l'equació 41 els valors calculats en la 42, obtenim que la tensió de sortida val:

$$v_0(t) = 0,64\cos(2\pi 10^3 t - 90°) + 0,12\cos(3\cdot 2\pi 10^3 t - 146°) + ... \quad (43)$$

Si compareu les equacions 39 i 43 corresponents al senyal d'entrada i sortida del filtre respectivament, veureu que a la sortida no hi ha component continu, ja que el filtre cancel·la el component continu. D'altra banda, l'harmònic fonamental queda exactament igual en el senyal de sortida. Per al següent harmònic, 3 kHz, l'amplitud es redueix (i també canvia la seva fase) i el mateix succeeix per a la resta d'harmònics. De fet, si continuéssim calculant veuríem que l'amplificació aniria decreixent a mesura que augmentés la freqüència de l'harmònic.

b) En l'apartat *a*, per a calcular l'amplitud de cada harmònic a la sortida del filtre hem multiplicat l'amplitud de l'harmònic a l'entrada del filtre per l'amplificació del filtre a la freqüència de l'harmònic. D'aquesta manera, multiplicant l'espectre d'amplitud del senyal d'entrada (figura 17), per la corba d'amplificació del filtre (figura 18), obtenim l'espectre d'amplitud de la sortida (figura 19). (Per raons d'espai, en la figura 17 només s'han representat 9 harmònics.)

La corba d'amplificació d'un filtre...

... no és més que la representació gràfica de l'amplificació del filtre en funció de la freqüència: $|H(j\omega)|$

És a dir, el mòdul de $H(s)$ per a $s = j\omega = j2\pi f$.

Observeu que encara que l'espectre d'amplitud del senyal d'entrada i de sortida és discret, la corba d'amplificació del filtre és contínua (en el sentit que està definida per a totes les freqüències).

La figura 17 i la figura 19 són la representació gràfica de les amplituds que apareixen en les equacions 39 i 43. Observeu que l'amplificació per al primer harmònic és 1, però el filtre atenua la resta d'harmònics (figura 18). L'atenuació és més important a mesura que augmenta la freqüència. Per això, en l'espectre d'amplitud del senyal de sortida (figura 19), la diferència entre l'amplitud de l'harmònic fonamental i la de la resta d'harmònics és encara més gran que la diferència que hi havia a l'entrada. A més, veureu que, tal i com ja havíem avançat a l'apartat a), en l'espectre de sortida no hi ha component continu.

D'altra banda, si a l'espectre de fase de l'entrada (figura 20) sumem la corba de desfasament del circuit (figura 21), obtenim l'espectre de fase de la sortida (figura 22). La figura 20 i la figura 22 són la representació gràfica de les fases que apareixen en les equacions 39 i 43.

La corba de desfasament d'un filtre...

no és més que la representació gràfica del desfasament introduït pel filtre en funció de la freqüència: $\angle H(j\omega)$

És a dir, l'argument de $H(s)$ per a $s = j\omega = j2\pi f$.

Observeu que encara que l'espectre de fase del senyal d'entrada i de sortida és discret, la corba de desfasament del filtre és contínua (en el sentit que està definida per a totes les freqüències).

Figura 17. Espectre d'amplitud d'un senyal quadrat d'1 kHz amb valor mitjà de 0,5 V

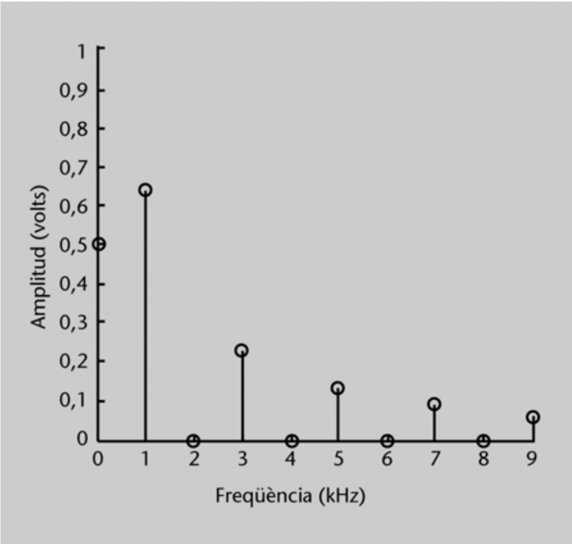


Figura 18. Corba d'amplificació del filtre de l'exemple 3

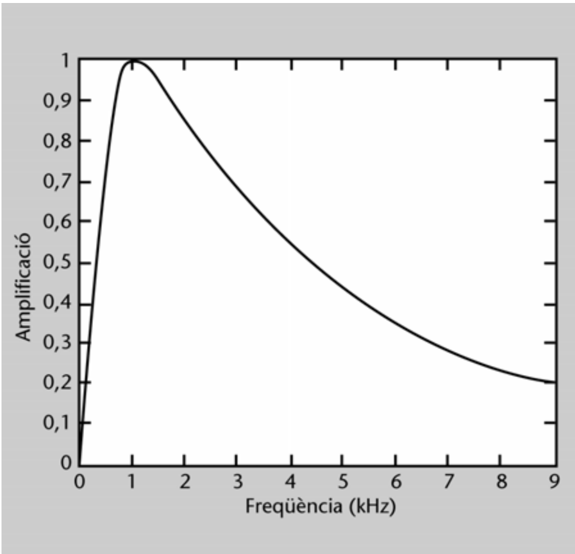


Figura 19. Espectre d'amplitud d'un senyal a la sortida del filtre de l'exemple 3

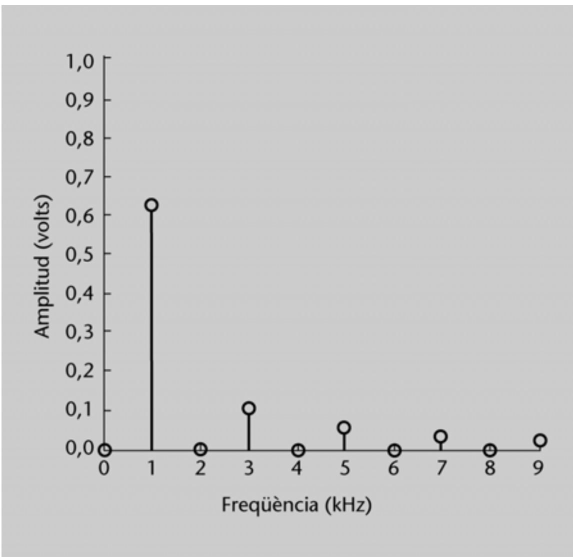


Figura 20. Espectre de fase d'un senyal quadrat d'1 kHz amb contínua de 0,5 V (valor de contínua positiu)

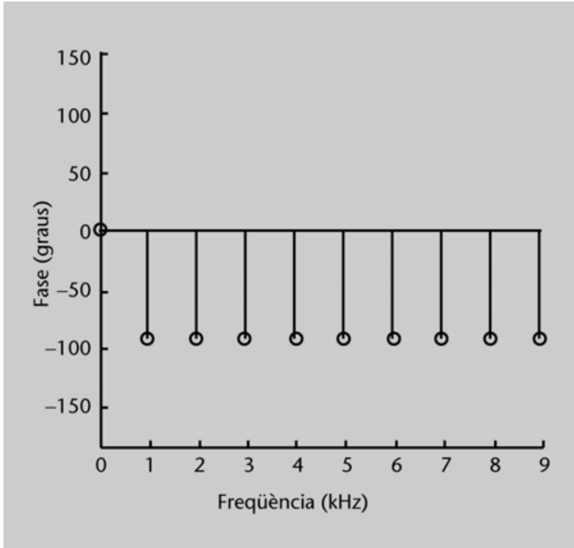


Figura 21. Corba de desfasament del filtre de l'exemple 3

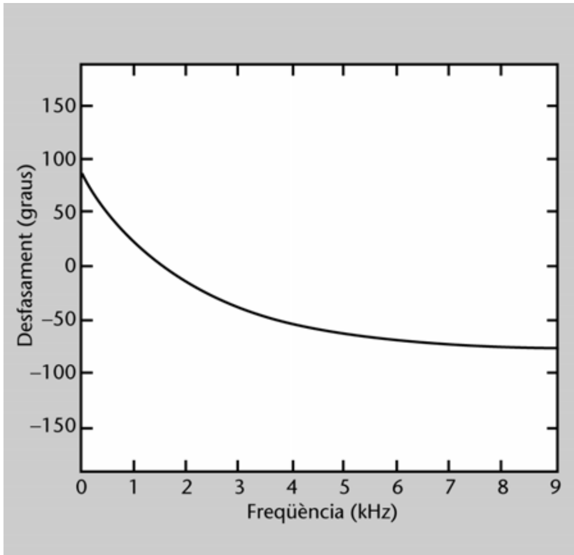
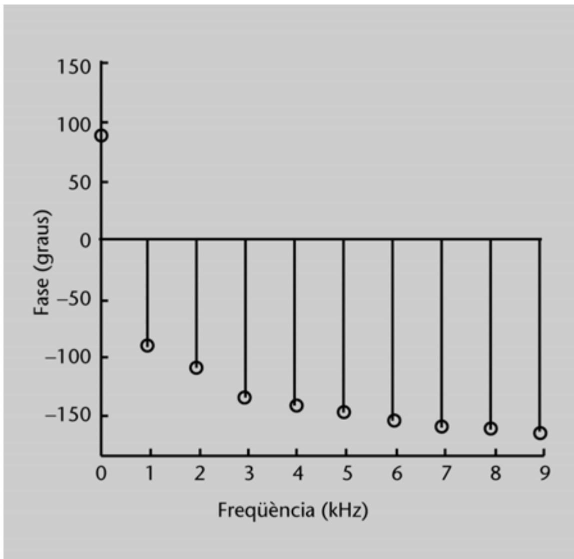
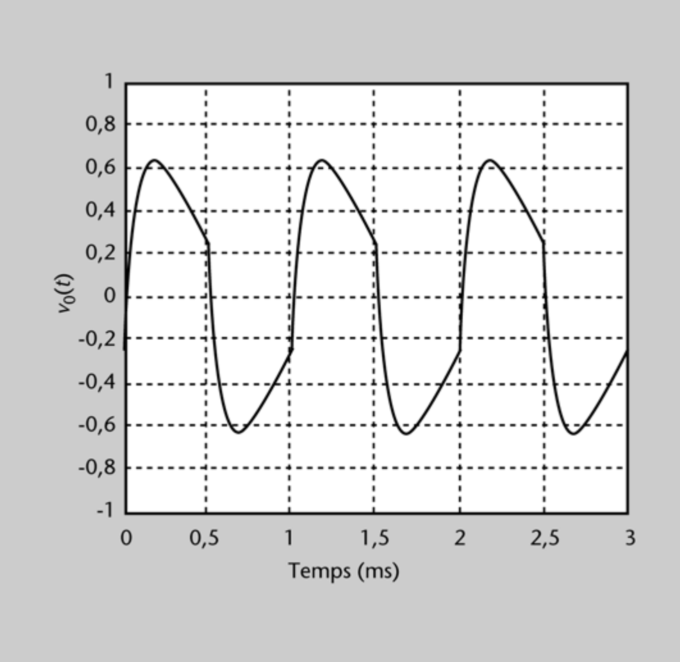


Figura 22. Espectre de fase del senyal a la sortida del filtre de l'exemple 3



c) En la figura 23 podeu veure la tensió de sortida en el domini temporal, obtinguda sumant els senyals cosinus en els quals es descompon el senyal quadrat, però amb l'amplitud i fase que tenen a la sortida. (Per limitacions de càlcul, per a obtenir $v_o(t)$ hem considerat els seus 50 primers harmònics). Noteu que, en el temps, el senyal de sortida s'assembla més a una sinusoide que a un senyal quadrat. Això és perquè, a la sortida del filtre, s'ha reduït l'amplitud dels harmònics diferents del fonamental (freqüència d'1 kHz). No obstant això, atès que a la sortida del filtre tenim altres harmònics a més del fonamental, encara que siguin d'amplitud molt més reduïda, la tensió de sortida no és exactament una sinusoide d'1 kHz.

Figura 23. Forma d'ona del senyal a la sortida del filtre de l'exemple 3



Exemple 4. Filtratge d'un senyal quadrat

Repetirem l'exemple 4 canviant el filtre. Considereu ara que el senyal quadrat és l'entrada d'un filtre la funció de xarxa del qual és:

$$H_2(s) = 0{,}18 \cdot 2\pi \cdot 10^3 \frac{s}{s^2 + 0{,}18 \cdot 2\pi \cdot 10^3 s + \left(2\pi \cdot 10^3\right)^2} \tag{44}$$

Per a aquest filtre també:

a) Calcularem la tensió de sortida $v_0(t)$.

b) Dibuixarem l'espectre d'amplitud i fase de la tensió de sortida.

c) Dibuixarem la tensió de sortida en el domini del temps.

Solució

a) Com en el cas anterior, calculem la sortida aplicant superposició i el que sabem de la resposta en RPS:

$$\begin{aligned} v_0(t) = H_2(0)0{,}5 + \left|H_2(j2\pi 10^3)\right| 0{,}64\cos\left(2\pi 10^3 t - 90° + \angle H_2(j2\pi 10^3)\right) + \\ + \left|H_2(j3 \cdot 2\pi 10^3)\right| 0{,}21\cos\left(3 \cdot 2\pi 10^3 t - 90° + \angle H_2(j3 \cdot 2\pi 10^3)\right) + \ldots \end{aligned} \tag{45}$$

L'amplificació i desfasament introduïts pel filtre per a cadascun dels harmònics són diferents dels que teníem en l'exemple anterior. Per a calcular-los, particularitzarem la funció de xarxa d'aquest segon filtre per a $s = j\omega$, on ω és la freqüència de l'harmònic en radiants per segon:

$$\begin{aligned} &f = 0 \Rightarrow H_2(s)\big|_{s=j0} = 0 \\ &f_1 = 1 \text{ kHz} \Rightarrow H_2(s)\big|_{s=j2\pi10^3} = 1 \\ &3f_1 = 3 \text{ kHz} \Rightarrow H_2(s)\big|_{s=j2\pi\cdot3\cdot10^3} = 0{,}0045 - j0{,}067 = 0{,}07e^{-j86^\circ} \\ &\ldots \end{aligned} \tag{46}$$

Substituint en l'equació 45 els valors calculats en la 46 obtenim que la tensió de sortida val:

$$v_0(t) = 0{,}64\cos(2\pi10^3t - 90^\circ) + 0{,}01\cos(3 \cdot 2\pi10^3t - 176^\circ) + \ldots \tag{47}$$

Si compareu les equacions 39 i 47 corresponents al senyal d'entrada i sortida del filtre, respectivament, veureu que també aquest filtre cancel·la el component continu i que l'harmònic fonamental queda exactament igual en el senyal de sortida. L'amplitud del segon harmònic es redueix encara més que per al primer filtre i el mateix passa per a la resta d'harmònics.

b) En l'apartat *a*, per a calcular l'amplitud de cada harmònic a la sortida del filtre hem multiplicat l'amplitud de l'harmònic a l'entrada del filtre per l'amplificació del filtre a la freqüència de l'harmònic. D'aquesta manera, multiplicant l'espectre d'amplitud del senyal quadrat (figura 24) per la corba d'amplificació del filtre (figura 25), obtenim l'espectre d'amplitud de la sortida (figura 26). D'altra banda, si a l'espectre de fase de l'entrada (figura 27) hi sumem la corba de desfasament del circuit (figura 28), obtenim l'espectre de fase de la sortida (figura 29). Observeu que la figura 24 i la figura 27 són, respectivament, l'espectre d'amplitud i fase del senyal quadrat d'entrada, així que són exactament iguals que les dibuixades en l'exemple 3, encara que s'han tornat a dibuixar aquí per claredat.

La corba d'amplificació d'un filtre...

... no és més que la representació gràfica de l'amplificació del filtre en funció de la freqüència: $|H(j\omega)|$

És a dir, el mòdul de $H(s)$ per a $s = j\omega = j2\pi f$.

Noteu que encara que l'espectre (d'amplitud i de fase) del senyal d'entrada i de sortida és discret, les corbes d'amplificació i desfasament del filtre són contínues (en el sentit que estan definides per a totes les freqüències).

La corba de desfasament d'un filtre...

... no és més que la representació gràfica del desfasament introduït per filtre en funció de la freqüència: $\angle H(j\omega)$

És a dir, l'argument de $H(s)$ per a $s = j\omega = j2\pi f$.

Observeu en la figura 25 que la corba d'amplificació d'aquest filtre és més estreta que la corba d'amplificació del filtre de l'exemple 3. Diem que aquest nou filtre és més **selectiu** que l'anterior. En estrènyer la corba d'amplificació, pràcticament tots els harmònics, excepte el fonamental, tenen amplitud 0.

c) El fet que ara, a la sortida, tots els harmònics, excepte el fonamental, siguin pràcticament 0, fa que en el temps el senyal de sortida tingui una forma pràcticament sinusoïdal. La figura 30 mostra el senyal de sortida en el domini del temps. (Per limitacions de càlcul, per a obtenir $v_o(t)$ hem considerat els seus 50 primers harmònics). La gràfica s'ha obtingut sumant els senyals cosinus en els quals es descompon el senyal quadrat, però amb l'amplitud i fase que tenen a la sortida. Podeu veure que, efectivament, el resultat és un senyal de sortida pràcticament sinusoïdal.

Figura 30. Forma d'ona del senyal a la sortida del filtre de l'exemple 4

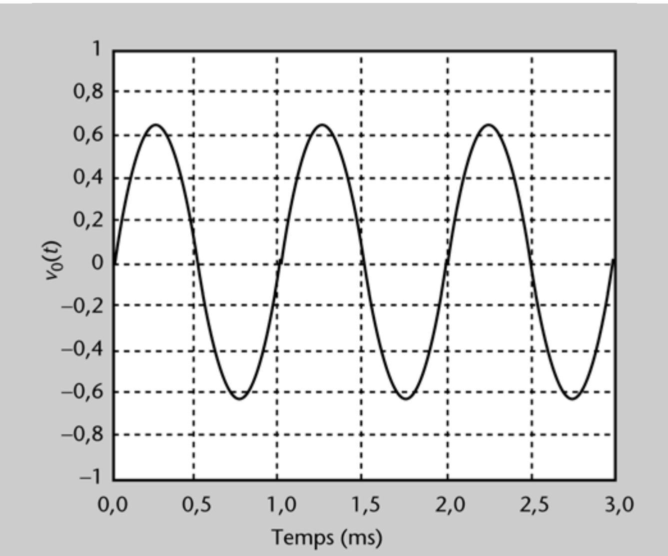


Figura 24. Espectre d'amplitud d'un senyal quadrat d'1 kHz amb contínua de 0,5 V

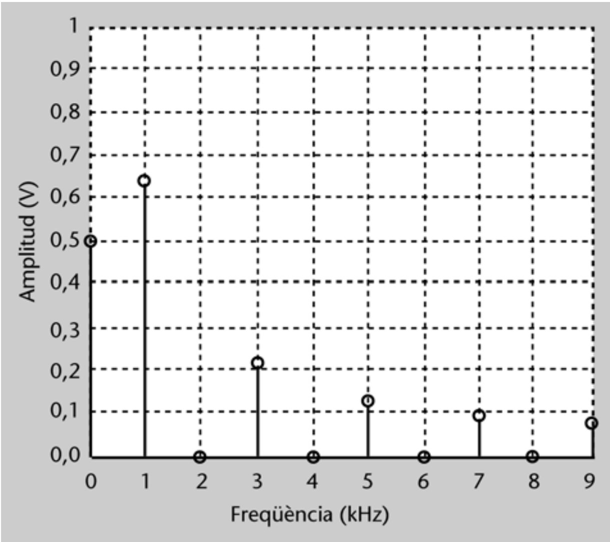


Figura 25. Corba d'amplificació del filtre de l'exemple 4

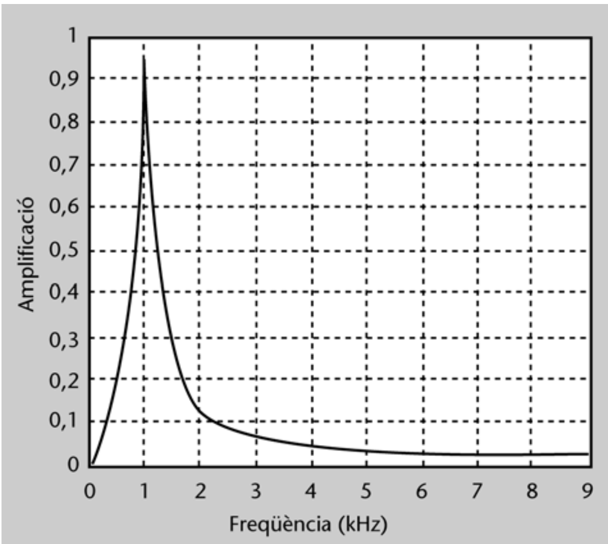


Figura 26. Espectre d'amplitud d'un senyal a la sortida del filtre de l'exemple 4

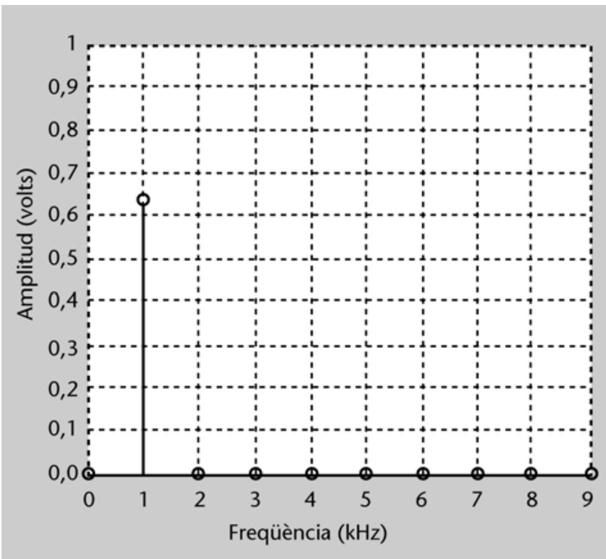


Figura 27. Espectre de fase d'un senyal quadrat d'1 kHz en contínua 0,5 V (valor de contínua positiu)

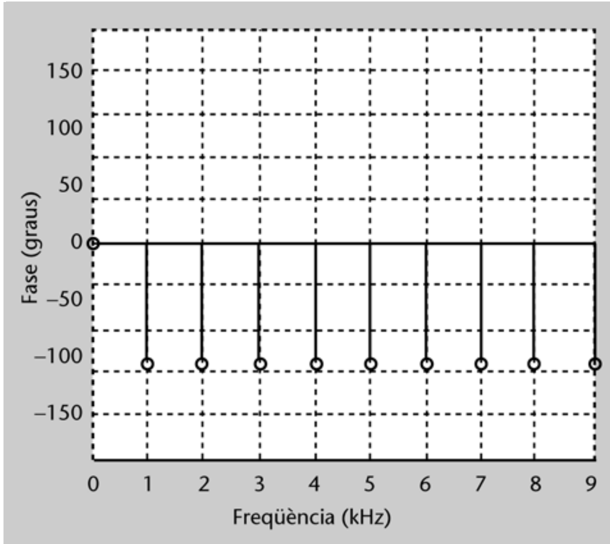


Figura 28. Corba de desfasament del filtre de l'exemple 4

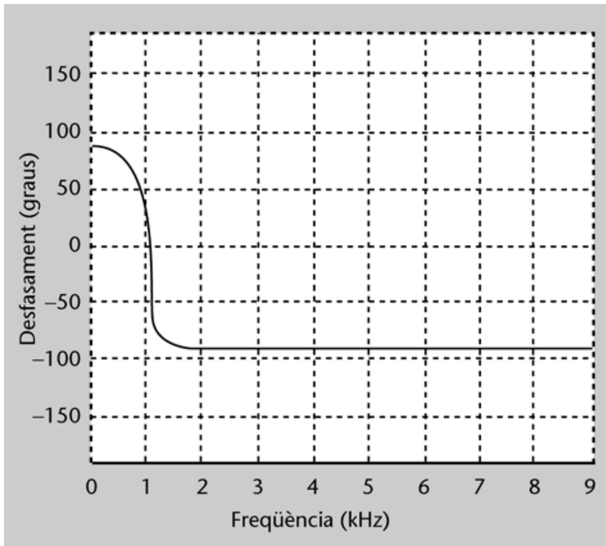
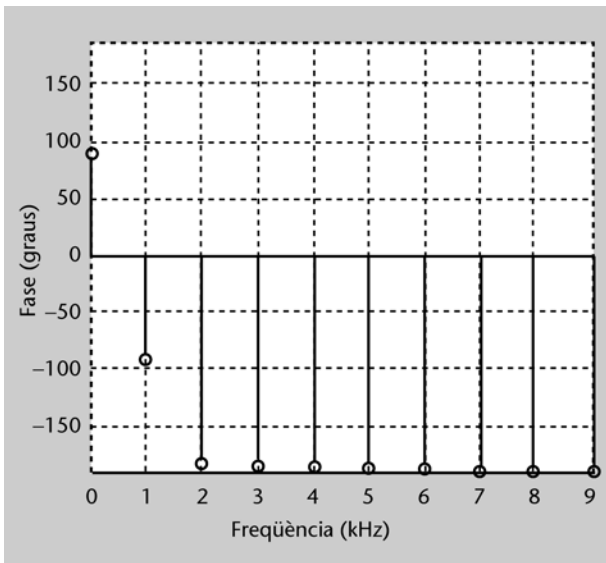


Figura 29. Espectre de fase del senyal a la sortida del filtre de l'exemple 4



2.2. Filtratge de senyals no periòdics

Hem vist com un circuit pot canviar el contingut freqüencial d'un senyal periòdic. Però, què ocorre amb senyals no periòdics?

Recordeu que per a senyals no periòdics treballem amb la transformada de Fourier en lloc de la sèrie de Fourier. Tal com vam veure en el subapartat 1.2, la transformada de Fourier ens permet escriure un senyal $x(t)$ de la manera següent:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (48)$$

on $X(\omega)$ és la transformada de Fourier de $x(t)$.

Per a calcular la resposta a l'entrada $x(t)$ d'un circuit amb funció de xarxa $H(s)$ també podem aplicar superposició, ja que la integral no deixa de ser una suma contínua. Aplicant superposició i la resposta a una exponencial complexa de freqüència ω escrita en l'equació 37, veiem que la sortida és:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (49)$$

Si comparem les equacions 49 i 48, podem concloure que l'espectre $Y(\omega)$ de la sortida és:

$$Y(\omega) = H(j\omega)X(\omega) \qquad (50)$$

on, en general, $X(\omega)$ i $H(j\omega)$ són complexos.

Com que en 50 tenim un producte de complexos el mòdul del producte és el producte dels mòduls i la fase del producte és la suma de les fases. Això significa que l'espectre d'amplitud de la sortida (mòdul de $Y(\omega)$) és l'espectre d'amplitud de l'entrada (mòdul de $X(\omega)$) multiplicat per la corba d'amplificació del circuit:

$$|Y(\omega)| = |H(j\omega)|\,|X(\omega)| \qquad (51)$$

D'altra banda, l'espectre de fase de la sortida (fase de $Y(\omega)$) és l'espectre de fase de l'entrada (fase de $X(\omega)$) més la corba de desfasament del sistema.

$$\angle Y(\omega) = \angle H(j\omega) + \angle X(\omega) \qquad (52)$$

En resum, podem concloure que:

Tant per a un espectre discret com per a un de continu es compleix que:

- L'espectre d'amplitud del senyal a la sortida d'un filtre es calcula **multiplicant** l'espectre d'amplitud del senyal d'entrada per la **corba d'amplificació** del filtre, és a dir, la funció $|H(j\omega)|$.
- L'espectre de fase del senyal a la sortida d'un filtre es calcula **sumant**, a l'espectre de fase del senyal d'entrada, la **corba de desfasament** del filtre, és a dir, la funció $\angle H(j\omega)$.

Exemple d'aplicació: l'ADSL

L'ADSL, sigla que correspon a *asymetric digital subscriber loop* ('bucle d'abonat digital asimètric'), és probablement la forma més usual avui en dia d'accedir a Internet. El terme a què correspon la sigla es deu al fet que el sistema està concebut per a suportar un trànsit asimètric, transmetent a més velocitat en sentit descendent (de la xarxa a l'usuari) que en sentit ascendent (de l'usuari a la xarxa). Però, què hi té a veure l'ADSL amb el que estem estudiant?

En ADSL les dades es transmeten de manera analògica sobre el mateix parell de coure utilitzat per a la comunicació telefònica. Encara que els senyals es poden transmetre simultàniament en el temps, en freqüència no es barregen. D'aquesta manera, amb circuits adequats, les podem separar al receptor.

En concret, el senyal telefònic es transmet en la banda compresa entre 300 i 3.300 Hz. La transmissió de les dades en ADSL utilitza freqüències més grans, concretament per al canal ascendent s'utilitza la banda de 30 kHz a 138 kHz i per al descendent, la banda de 138 kHz a 1.104 kHz. D'aquesta manera, es pot transmetre veu telefònica i dades simultàniament en el temps, cosa que els antics mòdems no permetien, ja que usaven la banda vocal per a transmetre dades. Atès que, a més, la banda vocal és estreta, les velocitats a les quals es podia transmetre en els antics mòdems eren inferiors que les que s'aconsegueixen actualment amb l'ADSL.

Recordeu que l'amplada de banda d'un senyal està relacionada amb la quantitat d'informació que conté.

Els senyals de veu i dades viatgen, doncs, en bandes freqüencials diferents, però tot i així les hem de separar d'alguna manera en el receptor. Si no les separéssim, el component de dades d'alta freqüència actuaria com a interferència per al senyal de veu i viceversa.

Per a permetre l'ús simultani de la connexió de dades ADSL i el servei telefònic bàsic de veu, és necessari eliminar les freqüències de banda vocal al mòdem i les freqüències de l'ADSL a l'entrada del telèfon. Per això, tal com s'observa en la figura 31, necessitem circuits que tinguin una corba d'amplificació tan constant com es pugui en les freqüències del senyal que interessin en cada cas i amplificació nul·la en les freqüències de l'altre senyal. D'aquesta manera, separem el senyal de veu i de dades.

Tal com s'indica en la figura 31, el filtre amb amplificació diferent de zero a la banda de veu i amplificació zero per a les freqüències altes es denomina **filtre passabaix**. El filtre amb amplificació zero a la banda de veu i amplificació diferent de zero per a les freqüències altes, en les quals es transmeten les dades, es denomina **filtre passaalt**.

El filtre separador passabaix s'ha de connectar necessàriament als dos extrems de la línia telefònica, un al costat de la central i l'altre, al domicili de l'usuari. El filtre al costat de la central l'instal·larà Telefónica, quan es cursi l'alta de la línia ADSL. A l'habitatge tenim dues alternatives i qualsevol de les dues ens permetrà escoltar el senyal telefònic lliure d'interferències. Aquestes dues alternatives són les següents:

- Col·locar un filtre a cadascun dels telèfons connectats: instal·lació amb microfiltres (figura 32). Aquesta és l'opció que s'usa quan es necessita una instal·lació ràpida i fàcil que no requereixi un cablatge específic.

- Col·locar el filtre a l'entrada de la instal·lació existent (normalment a l'entrada de l'habitatge): instal·lació amb separador (*splitter*) (figura 33). En una instal·lació amb separador, la instal·lació telefònica existent no es modifica, tanmateix, s'ha de realitzar una ampliació del cablatge. La instal·lació amb separador és recomanable quan en un habitatge es disposa de més de tres telèfons. També s'ha d'instal·lar el separador quan l'habitatge té alarma connectada a la xarxa telefònica.

Figura 31. Separació del senyal de veu i dades ADSL que arriben per la línia telefònica

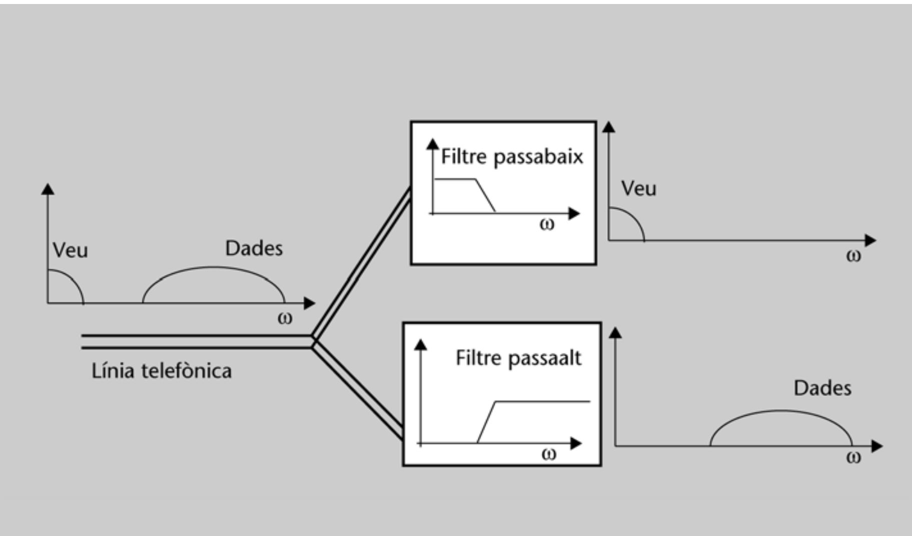
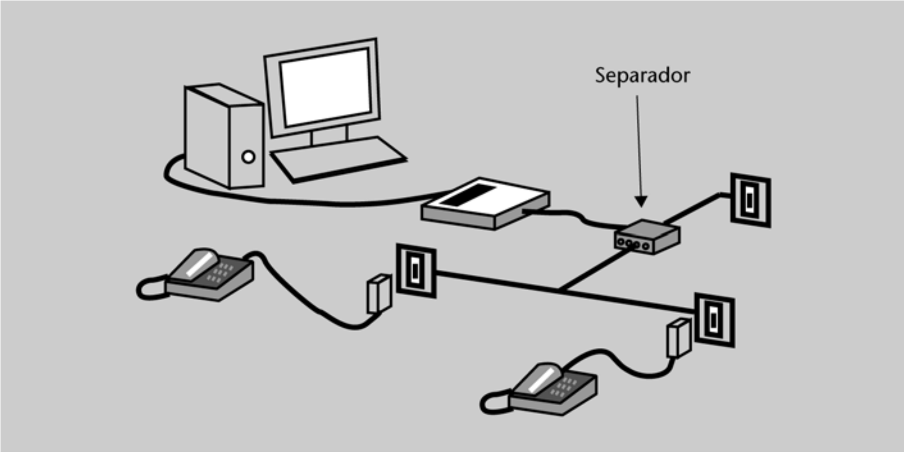


Figura 32. Microfiltres

S'han de connectar al telèfon, perquè el senyal telefònic estigui lliure d'interferència per part de l'ADSL.

Figura 33. Separador



La instal·lació centralitzada del separador requereix ampliació del cablatge, però és recomanable quan hi ha diversos telèfons en un habitatge.

2.3. Representació de la resposta en freqüència d'un filtre

En els subapartats 2.1 i 2.2 hem vist com un circuit és capaç de modificar el contingut freqüencial del senyal d'entrada i, en conseqüència, la seva forma d'ona temporal.

Recordeu que el mòdul de $H(j\omega)$ determina la corba d'amplificació del filtre en funció de la freqüència i que la fase de $H(j\omega)$ determina la corba de desfasament del filtre en funció de la freqüència.

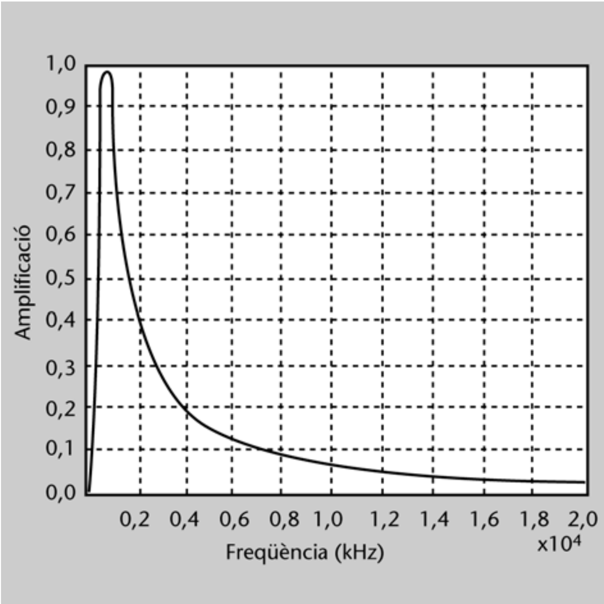
La manera com un filtre modifica el senyal d'entrada es denomina **resposta freqüencial**. La resposta freqüencial d'un filtre és determinada per $H(j\omega)$, que és la funció de xarxa $H(s)$ particularitzada per a $s = j\omega$.

En aquest subapartat comentarem com es representa habitualment la resposta freqüencial d'un filtre, és a dir, les corbes d'amplificació i desfasament.

El rang de freqüències en què té interès la resposta freqüencial d'un filtre sol ser bastant ampli. Per exemple, per als filtres d'àudio el rang de freqüències d'interès sol ser entre 20 Hz i 20 kHz, cosa que representa un marge de 1:1000. En la figura 34 podeu veure la corba d'amplificació d'un filtre en el marge de freqüències de 10 a 20 kHz. Observeu que el detall que s'obté de l'amplificació a freqüències baixes és molt menor que el que s'obté del comportament a freqüències altes.

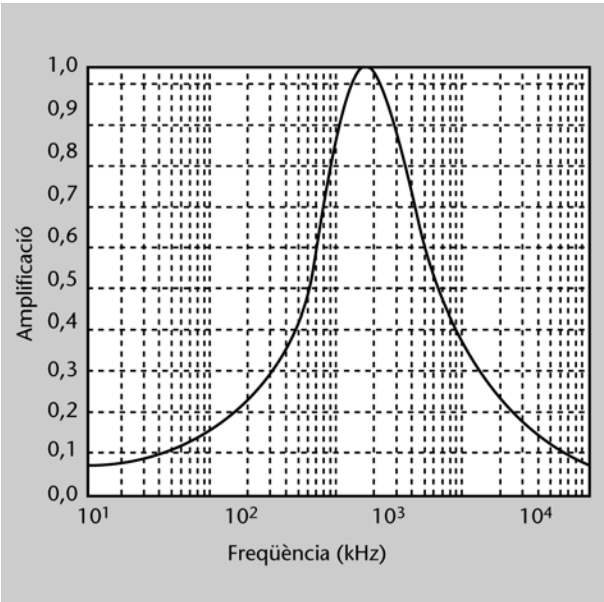
Per aquesta raó, és habitual representar la corba d'amplificació i la de desfasament amb l'eix de freqüències escalat en escala logarítmica. Amb això el que s'aconsegueix és que la corba s'expandeixi per a baixes freqüències i es comprimeixi per a altes freqüències, com podeu veure en la figura 35. Aquesta figura representa la corba d'amplificació del mateix filtre de la figura 34, també en el marge de 10 a 20 kHz, però amb l'eix de freqüències escalat logarítmicament. Fixeu-vos que amb escala logarítmica, podem visualitzar amb més claredat la resposta del filtre per a tot el marge de freqüències considerat.

Figura 34. Corba d'amplificació amb l'eix de freqüències escalat linealment



L'eix de freqüències va des de 10 Hz fins a 20 kHz

Figura 35. Corba d'amplificació amb l'eix de freqüències escalat logarítmicament



L'eix de freqüències va des de 10 Hz fins a 20 kHz

Quan escalem l'eix de freqüències en escala logarítmica, calculem els punts de l'eix d'abscisses (freqüència) com el logaritme en base de 10 del valor de freqüència, bé estigui mesurada en hertzs, f, o en radiants per segon, ω (hi hauria un factor 2π entre un cas i l'altre).

$$\log_{10} f \tag{53}$$

En escala logarítmica, la distància entre les freqüències 10 i 100 Hz ($\log_{10}100 - \log_{10}10 = 1$) és la mateixa que la distància entre les freqüències de 100 i 1.000 Hz ($\log_{10}1.000 - \log_{10}100 = 1$). Diem que les freqüències de 10 i 100 Hz estan separades una dècada, igual que les freqüències de 100 i 1.000 Hz.

Es diu que dues freqüències estan separades una dècada si $f_2 = 10f_1$.

Es diu que dues freqüències estan separades *n* dècades si $f_2 = 10^n f_1$.

Podem conèixer la distància en dècades entre dues freqüències calculant:

$$n = \log_{10}\frac{f_2}{f_1} \tag{54}$$

En qualsevol cas, en l'eix d'abscisses no escrivim el valor del logaritme sinó el valor de la freqüència a què correspon, tal com es pot observar en la figura 35. Es pot veure que és una escala logarítmica per l'espaiat entre marques.

Com hem dit la distància entre la freqüència 10 Hz, escrita en la gràfica com a 10^1, i la freqüència 100 Hz (escrita com a 10^2) és la mateixa que la que hi ha entre les freqüències 100 i 1.000 (escrita com a 10^3). Els punts intermedis (observeu la figura 35) corresponen a les freqüències 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 i 90. Els punts intermedis entre 100 i 1.000 corresponen a les freqüències 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 i 900. Noteu que, en escala logarítmica, la distància entre 10 i 20 és superior a la distància que hi ha entre 20 i 30.

És important tenir en compte que la freqüència $f = 0$ no es pot representar en escala logarítmica, ja que el logaritme de 0 (sigui quina sigui la base del logaritme) tendeix a menys infinit:

$$\log 0 \to -\infty \tag{55}$$

Cal llegir el símbol "→" com 'tendeix a'.

De vegades és necessari representar la corba d'amplificació i desfasament en punts intermedis entre 10 i 100 i no disposem d'un ordinador o paper semilogarítmic per a espaiar adequadament les freqüències. No obstant això, treballant amb logaritmes en base 10 (dècades), les freqüències $(1, 2, 5, 10)\cdot 10^n$ són aproximadament equidistants, ja que:

$$\log_{10}1 = 0; \quad \log_{10}2 = 0{,}3; \quad \log_{10}5 = 0{,}69; \quad \log_{10}10 = 1 \tag{56}$$

Per aquest motiu, les mesures se solen prendre d'acord amb la sèrie de freqüències següent: 100 Hz, 200 Hz, 500 Hz, 1 kHz, 2 kHz, 5 kHz, 10 kHz, etc.

A més d'escalar l'eix de freqüències en dècades com en el cas de la figura 35, també és possible escalar l'eix de freqüències en **octaves**. La diferència entre ambdues escales rau en la base del logaritme que en octaves no és 10 sinó 2 ($\log_2 f$). D'aquesta manera, es diu que dues freqüències estan separades *n* octaves si: $f_2 = 2^n f_1$.

En escalar l'eix de freqüències logarítmicament, parlem de dècades si la base del logaritme és 10 i d'octaves si la base del logaritme és 2.

D'altra banda, a més de representar l'eix de freqüències en escala logarítmica, és bastant usual representar la corba d'amplificació en **decibels (dB)**.

El decibel és una unitat pràctica de guany derivat del bel. El decibel s'usa per a mesurar potències relatives. La relació en dB entre una potència P i una potència de referència P_{ref} es calcula de la manera següent:

$$\text{Relació en dB} = 10\log_{10}\frac{P}{P_{ref}} \quad (57)$$

El bel...

... denominat així en honor d'Alexander Graham Bell, és la unitat logarítmica bàsica per a expressar relacions de guany o atenuació.

1 B (bel) és equivalent a un guany en potència de 10.

1 dB (decibel) és la unitat pràctica de guany, que equival a la desena part del bel:

1 dB = 0,1 B

10 dB = 1 B

És important que us adoneu que pot ser més significatiu mesurar les variacions de potència en termes relatius: no és el mateix augmentar 1 W de potència, si la potència inicial era 1 W que si eren 10 W. En el primer cas, es dobla i en el segon, varia un 10%. L'impacte és molt diferent. En termes de dB, diríem que en el primer cas la potència ha augmentat 3 dB i en el segon 0,4 dB.

Podem escriure l'equació 57 en funció de la tensió. Recordeu que la potència lliurada a una càrrega és proporcional al quadrat de la tensió. Això fa que puguem escriure la relació de l'equació 57 de la manera següent:

$$10\log_{10}\frac{P}{P_{ref}} = 10\log_{10}\frac{V^2}{V_{ref}^2} \quad (58)$$

Utilitzant la propietat que el logaritme d'un nombre elevat a n, és n vegades el logaritme d'aquest nombre ($\log a^n = n\log a$), obtenim que:

$$\text{Relació en dB} = 10\log_{10}\frac{P}{P_{ref}} = 20\log_{10}\frac{V}{V_{ref}} \quad (59)$$

És a dir, el dB també serveix per a mesurar nivells relatius de tensió, per exemple, a l'entrada i sortida d'un filtre. En aquest cas, en lloc de multiplicar per 10 el logaritme el multipliquem per 20.

El quocient entre l'amplitud de la tensió a la sortida i a l'entrada d'un circuit depèn de l'amplificació (mòdul de la funció de transferència). Per tant, el quocient entre l'amplitud de la tensió de sortida i d'entrada mesurat en dB és igual que:

$$20\log_{10}\frac{V_0}{V_i} = 20\log_{10}\left|H(j\omega)\right| \quad (60)$$

Per a obtenir la corba d'amplificació en dB calculem:

$$20\log_{10}\left|H(j\omega)\right| \quad (61)$$

Si l'amplificació val 10, l'amplitud de la tensió de sortida serà 10 vegades l'amplitud de la tensió d'entrada. La tensió haurà augmentat 20 dB a la sortida, ja que $20\log_{10}10 = 20$ dB.

Si l'amplificació val $\sqrt{2}$, la tensió augmentarà 3 dB a la sortida. Si l'amplificació val 2, la tensió augmentarà 6 dB a la sortida.

Si l'amplitud de sortida es redueix respecte a l'entrada, l'amplificació **mesurada en dB** serà negativa. Per exemple, si l'amplificació val 1/10, l'amplitud de la tensió de sortida serà l'amplitud de la tensió d'entrada dividida per 10. La tensió haurà **disminuït** a la sortida 20 dB, ja que $20\log_{10}1/10 = -20$ dB.

Si l'amplificació val $1/\sqrt{2}$, la tensió haurà disminuït 3 dB a la sortida. Si l'amplificació val 1/2, la tensió haurà disminuït 6 dB a la sortida.

La taula següent resumeix els nombres anteriors.

Amplificació (escala lineal)	1/10	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	10
Amplificació (en dB)	–20 dB	–6 dB	–3 dB	3 dB	6 dB	20 dB

El gran avantatge de treballar amb l'amplificació en dB el trobem quan tenim circuits en cascada (la sortida d'un és l'entrada del següent). Noteu que l'amplificació global del sistema (entre la primera entrada i l'última sortida) en escala lineal és el producte de les amplificacions intermèdies.

$$|H| = |H_1||H_2||H_3| \qquad (62)$$

En canvi, com que el logaritme d'un producte és igual que la suma de logaritmes, quan mesurem l'amplificació en dB veiem que:

$$20\log_{10}(|H_1||H_2||H_3|) = 20\log_{10}(|H_1|) + 20\log_{10}(|H_2|) + 20\log_{10}(|H_3|) \qquad (63)$$

L'amplificació global **mesurada en dB** de diversos sistemes en cascada és la suma de les amplificacions en dB individuals de cadascun.

I sumar sempre és més fàcil que multiplicar.

En resum, i per concloure aquest apartat, podem dir que:

Per a representar la resposta freqüencial d'un filtre és habitual representar l'amplificació en dB amb l'eix de freqüències en escala logarítmica. La corba de desfasament es mesura en graus o radiants també amb l'eix de freqüències en escala logarítmica. La representació de les dues corbes amb aquestes condicions s'anomena **diagrama de Bode.**

En l'apartat següent utilitzarem aquesta manera de representar la resposta freqüencial dels circuits.

A vegades, quan un fabricant especifica la resposta en freqüència d'un circuit ho fa en termes de la seva atenuació. L'atenuació d'un filtre, com la pròpia paraula fa intuir, és l'invers de l'amplificació:

$$\text{Atenuació} = \frac{1}{|H|} \tag{64}$$

Expressant l'atenuació en dB, obtenim que:

$$20\log_{10}(\text{Atenuació}) = 20\log_{10}\left(\frac{1}{|H|}\right) \tag{65}$$

Com que el logaritme d'un quocient és la resta de logaritmes i el logaritme de 1 val 0, resulta que l'atenuació en dB és igual que el guany en dB multiplicada per –1:

$$20\log_{10}(\text{Atenuació}) = 20\log_{10}(1) - 20\log_{10}(|H|) = -20\log_{10}(|H|) \tag{66}$$

L'atenuació en dB és igual que l'amplificació en dB canviada de signe.

Exemple 5

Les especificacions d'un microfiltre per a ADSL indiquen que: a) per a freqüències entre 200 Hz i 4 kHz l'atenuació del filtre oscil·la entre ±1 dB; b) entre 32 kHz i 70 kHz l'atenuació és major que 30 dB, i c) entre 70 kHz i 1,1 MHz l'atenuació és major que 50 dB. Calculeu en cada cas els valors d'amplificació en escala lineal.

Solució

a) Amplificació per a freqüències entre 200 Hz i 4 kHz.

A aquestes freqüències l'atenuació oscil·la entre 1 i –1 dB, o equivalentment, l'amplificació oscil·la entre –1 i 1 dB. Per a passar a escala lineal fem:

$$20\log_{10}(|H|) = -1 \Rightarrow \log_{10}(|H|) = -\frac{1}{20} \Rightarrow |H| = 10^{-\frac{1}{20}} = 0{,}9 \tag{67}$$

$$20\log_{10}(|H|) = 1 \Rightarrow \log_{10}(|H|) = \frac{1}{20} \Rightarrow |H| = 10^{\frac{1}{20}} = 1{,}1 \tag{68}$$

Noteu que si l'amplificació en dB és negativa, l'amplificació en escala lineal és menor que 1 i que si l'amplificació en dB és positiva en escala lineal és major que 1.

b) Per a freqüències entre 32 kHz i 70 kHz l'atenuació és major que 30 dB, o el que és el mateix, l'amplificació és menor que –30 dB.

$$20\log_{10}(|H|) < -30 \Rightarrow \log_{10}(|H|) < -\frac{30}{20} \Rightarrow |H| < 10^{-\frac{30}{20}} = 0{,}03 \tag{69}$$

c) Per a freqüències entre 70 kHz i 1,1 MHz l'atenuació és major que 50 dB, o el que és el mateix, l'amplificació és menor que –50 dB.

$$20\log_{10}\left(\left|H\right|\right) < -50 \Rightarrow \log_{10}\left(\left|H\right|\right) < -\frac{50}{20} \Rightarrow \left|H\right| < 10^{-\frac{50}{20}} = 0,003 \qquad (70)$$

Noteu que restar 20 dB equival a disminuir l'amplificació en un factor 10.

3. Filtres

Hem vist que un circuit que modifica el contingut freqüencial del senyal d'entrada es denomina *filtre*. El filtre "processa" el senyal d'entrada per a "deixar passar" una banda de freqüències i eliminar-ne una altra. O bé, pot modificar el contingut freqüencial de l'entrada per a realçar una/es banda/es de freqüència respecte a altres, com succeeix en un equalitzador.

Segons la seva corba d'amplificació, els filtres reben diferents noms. Alguns d'aquests noms, com el del *filtre passabaix* o *passaalt* ja han aparegut en el mòdul. En el subapartat 3.1 els recordarem i introduirem alguns noms nous. En els subapartats 3.2 i 3.3 definirem la freqüència de tall a –3 dB, la freqüència de ressonància i el factor de qualitat, que són paràmetres que s'utilitzen en la descripció dels filtres. Finalment, en el subapartat 3.4 veurem com implementar els filtres mitjançant estructures circuitals específiques.

3.1. Tipus de filtres

Els filtres es classifiquen en filtres passabaix, passaalt, passabanda i de banda eliminada (vegeu figura 36). El **filtre passabaix** només deixa passar les freqüències baixes però no les altes, ja que té amplificació diferent de zero per a les freqüències baixes i amplificació zero per a les freqüències altes. El **filtre passaalt** deixa passar les freqüències altes però no les baixes, ja que té amplificació zero per a les freqüències baixes i amplificació diferent de zero per a les freqüències altes. El **filtre passabanda** deixa passar una banda de freqüències intermèdia (ni molt baixes ni molt altes). El **filtre banda eliminada** elimina una banda de freqüències intermèdia (ni molt baixes ni molt altes).

La figura 36 mostra la corba d'amplificació ideal per a cada tipus de filtre.

Per a qualsevol tipus de filtre es denomina:

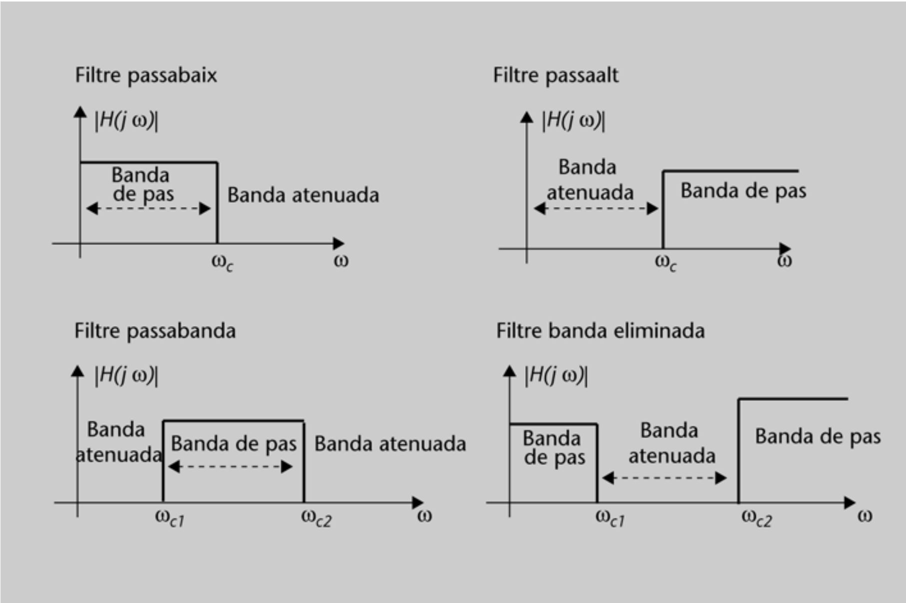
- **Banda/es de transmissió o passants**: aquella/es banda/es de freqüències que el filtre deixa passar. En el filtre passabaix, passaalt i passabanda només hi ha una banda passant, mentre que en el filtre banda eliminada n'hi ha dues.

- **Banda/es de detenció o atenuada**: aquella/es banda/es de freqüències que el filtre elimina. En el filtre passabaix, passaalt i de banda eliminada només hi ha una banda atenuada, mentre que en el filtre passabanda n'hi ha dues.

- **Freqüència de tall**: és la freqüència que marca la frontera entre les bandes de transmissió i atenuada. En el filtre passabaix i passaalt hi ha únicament una freqüència de tall (ω_c en la figura 36), mentre que en el de passabanda i de banda eliminada hi ha dues freqüències de tall (ω_{c_1} i ω_{c_2} en la figura 36).

- **Amplada de banda**: és l'extensió de la banda passant en els filtres passabaix i passabanda, o l'extensió de la banda atenuada en els filtres passaalt i banda eliminada. En el filtre passabaix i passaalt coincideix amb la freqüència de tall. En el passabanda i banda eliminada és la diferència entre les dues freqüències de tall.

Figura 36. Corbes d'amplificació ideals dels filtres típics



A més de passaalt, passabaix, etc., els filtres també es classifiquen en filtres de primer ordre, segon ordre, etc. d'acord amb l'ordre del circuit utilitzat per a implementar el filtre.

Ordre d'un circuit

Recordeu que en el mòdul "Circuits dinàmics" vam veure que l'ordre d'un circuit és el grau del denominador de la seva funció de transferència.

Normalment, l'ordre del circuit coincideix amb el nombre total de condensadors i bobines (per a alguns circuits l'ordre pot ser inferior, però no serà mai superior al nombre total de condensadors i bobines).

Quin interès pot tenir augmentar l'ordre d'un filtre? Penseu que les corbes d'amplificació de la figura 36 són ideals perquè l'amplificació a la banda passant és constant, l'amplificació a la banda atenuada és 0 i la transició entre la banda passant i atenuada és instantània. A la pràctica, l'amplificació a la banda passant no serà estrictament constant, ni l'amplificació a la banda atenuada serà estrictament zero, ni la transició entre ambdues bandes serà instantània. No obstant això, a mesura que augmentem l'ordre del filtre ens aproparem cada vegada més a la resposta ideal (encara que no la podrem assolir del tot mai).

Com més gran sigui l'ordre del filtre, més semblant serà la corba en freqüència del filtre a la resposta ideal.

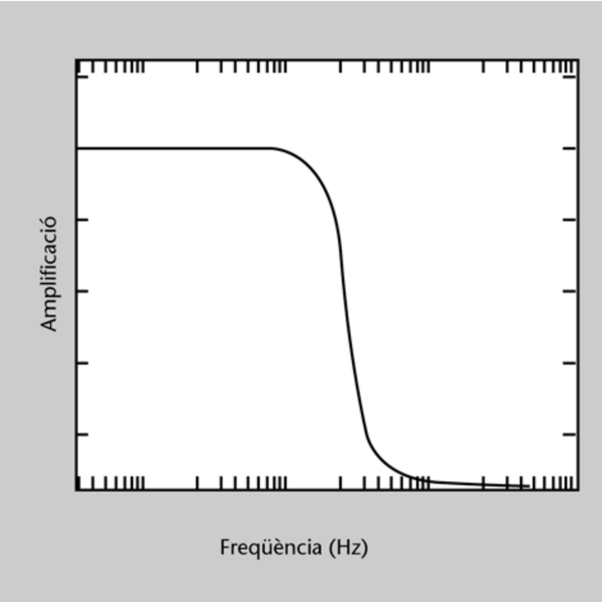
Ara bé, com més gran sigui l'ordre, més gran serà el nombre de components del filtre i, per tant, més complicat serà fer-lo.

En qualsevol cas, no és possible construir filtres passabanda i banda eliminada amb circuits de primer ordre. Per a construir filtres passabanda i banda eliminada necessitem com a mínim un circuit de segon ordre.

3.2. Freqüència de tall a –3 dB

Hem dit en l'apartat anterior que en un filtre real la transició entre ambdues bandes no és instantània. És el cas del filtre passabaix a què correspon la corba d'amplificació de la figura 37.

Figura 37. Corba d'amplificació d'un filtre passabaix real



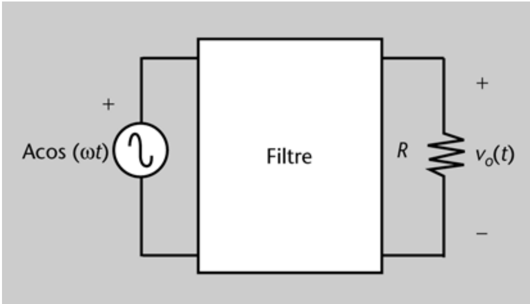
La qüestió ara és si la transició entre la banda passant i atenuada en un filtre real no és instantània, on posem la frontera entre ambdues bandes?

Hi ha diversos criteris. Un dels més utilitzats és definir la freqüència de tall de la manera següent:

La freqüència de tall és aquella freqüència per a la qual l'amplificació és la màxima possible entre $\sqrt{2}$. Dividir per un factor $\sqrt{2}$ equival, aproximadament, a multiplicar per 0,7.

Però, quin sentit físic té definir la freqüència de tall d'aquesta manera? Vegem-ho amb el circuit de la figura 38 on a un filtre amb amplificació $|H(j\omega)|$ li hem connectat una càrrega de valor *R*. Aquesta càrrega pot ser una resistència de valor *R* o bé un circuit més complex amb resistència d'entrada *R*.

Figura 38. Generador connectat a una càrrega R a través d'un filtre d'amplificació $|H(j\omega)|$



Si l'amplificació màxima del filtre, diguem a la freqüència ω_r, val M; a la freqüència de tall ω_c l'amplificació del filtre val(M / $\sqrt{2} \cong 0{,}7$ M.).

Per a cada freqüència ω, l'amplitud de la tensió de sortida del filtre és l'amplitud de l'entrada per l'amplificació a aquesta freqüència $|H(j\omega)|$. És a dir, si l'entrada és una sinusoide de freqüència ω i amplitud A:

$$v_i(t) = A\cos(\omega t) \tag{71}$$

la tensió de sortida val:

$$v_0(t) = A|H(j\omega)| \cos(\omega t + \angle H(j\omega)) \tag{72}$$

Per tant, a la freqüència ω_r a la qual l'amplificació és màxima, $|H(j\omega_r)| = M$, la tensió de sortida és:

$$v_0(t) = A \cdot M \cos(\omega_r t + \angle H(j\omega_r)) \tag{73}$$

La potència lliurada a la càrrega a la freqüència ω_r és la màxima que podem lliurar. Calculem aquesta potència com l'amplitud de la tensió al quadrat dividida pel valor de la resistència i per 2 (vegeu mòdul "Circuits en corrent altern"):

$$P_R = \frac{(AM)^2}{2R} = P_{\max} \tag{74}$$

A la freqüència de tall ω_c, la tensió de sortida és:

$$v_0(t) = A\frac{M}{\sqrt{2}}\cos(\omega_c t + \angle H(j\omega_c)) \tag{75}$$

I la potència lliurada a la càrrega és l'amplitud de la tensió al quadrat dividida pel valor de la resistència i per 2:

$$P_R = \frac{\left(\frac{AM}{\sqrt{2}}\right)^2}{2R} = \frac{P_{\max}}{2} \tag{76}$$

Si comparem les expressions 74 i 76, veiem que a la freqüència de tall, la potència que lliurem a la càrrega és la meitat de la potència màxima.

En resum, si a la càrrega lliurem una potència superior a la meitat de la potència màxima que podem lliurar: som dins de la banda passant. Si la potència lliurada és inferior a la meitat de la màxima possible: som fora de la banda passant.

A la freqüència de tall (tal com l'hem definit) la potència lliurada a la resistència de càrrega és la meitat que la que es lliuraria si l'amplificació fos màxima.

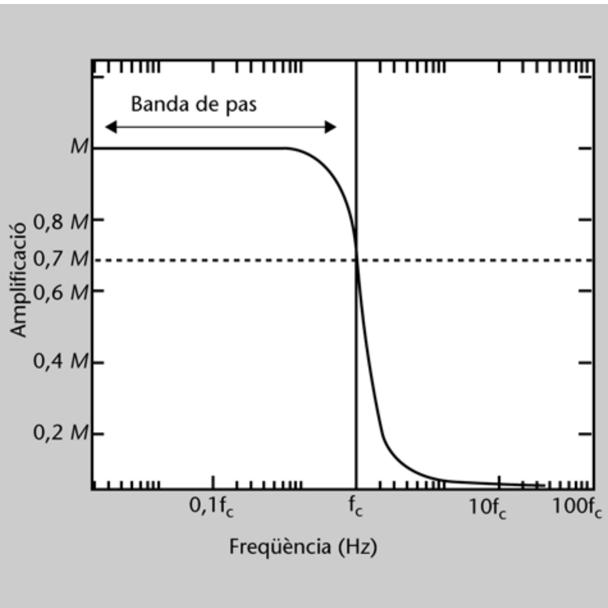
Treballant en dB, a la freqüència de tall la potència lliurada a la càrrega es redueix, aproximadament, 3 dB respecte a la potència màxima.

$$10\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cong -3 \text{ dB}$$

Per aquest motiu, la freqüència de tall, tal com l'hem definit, també es denomina **freqüència de potència meitat o freqüència de tall a –3 dB**.

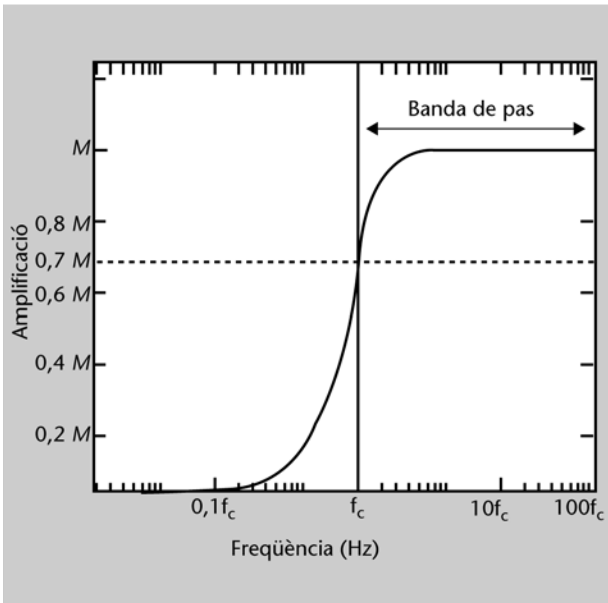
Les figures 39, 40, 41 i 42 corresponen a la corba d'amplificació de filtres reals passabaix, passaalt, passabanda i banda eliminada, respectivament. En cada cas, la/les freqüència/es de tall és/són aquella/es freqüència/es a la/les qual/s l'amplificació és aproximadament 0,7 *M*, és a dir, l'amplificació màxima *M* per 0,7. Noteu que l'eix de freqüències s'ha escalat logarítmicament, per això les freqüències $0{,}1f_c$, f_c, $10f_c$ i $100f_c$ són equidistants.

Figura 39. Corba d'amplificació d'un filtre passabaix real



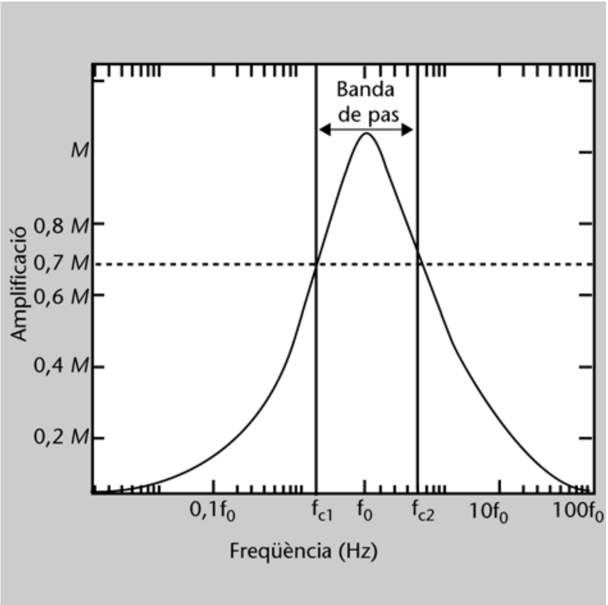
A la freqüència de tall f_c l'amplificació és la màxima entre $\sqrt{2}$, és a dir, $M / \sqrt{2} \cong 0{,}7\ M$.

Figura 40. Corba d'amplificació d'un filtre passaalt real



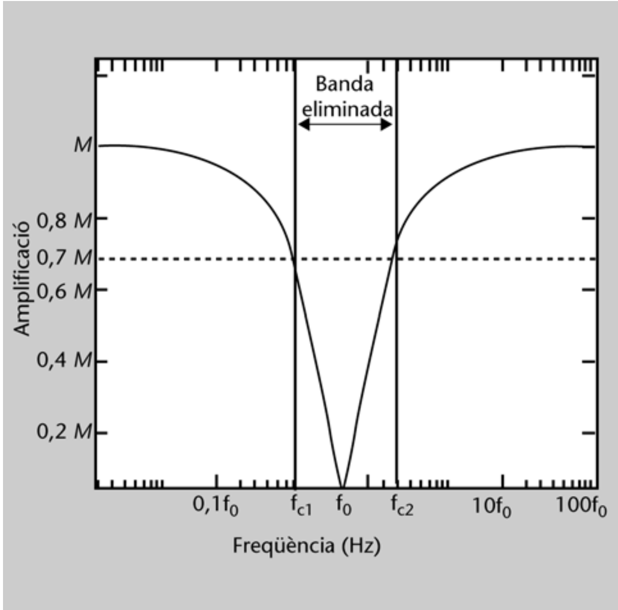
A la freqüència de tall f_c l'amplificació és la màxima entre $\sqrt{2}$, és a dir, $M / \sqrt{2} \cong 0{,}7\ M$.

Figura 41. Corba d'amplificació d'un filtre passabanda real



Hi ha dues freqüències de tall f_{c_1} i f_{c_2} (una per sobre i una altra per sota de la freqüència central f_0), a les quals l'amplificació és la màxima entre $\sqrt{2}$, és a dir, $M / \sqrt{2} \cong 0{,}7\ M$.

Figura 42. Corba d'amplificació d'un filtre banda eliminada real



Hi ha dues freqüències de tall f_{c_1} i f_{c_2} (una per sobre i una altra per sota de la freqüència central f_0), a les quals l'amplificació és la màxima entre $\sqrt{2}$, és a dir, $M / \sqrt{2} \cong 0{,}7\ M$.

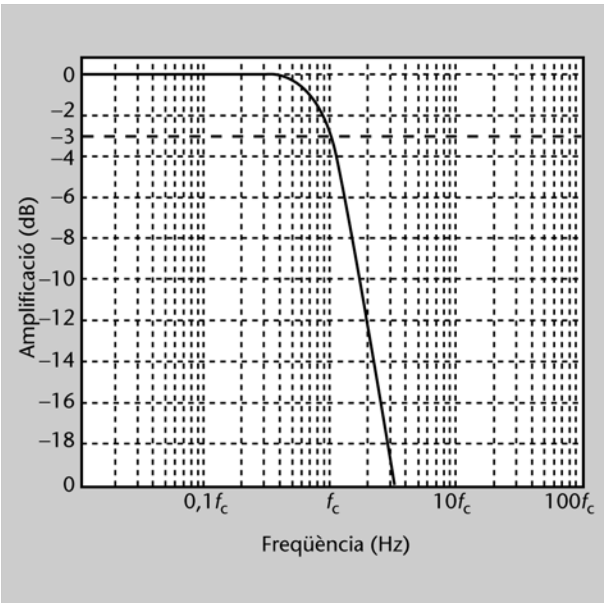
En les figures 43, 44, 45 i 46 podeu veure la corba d'amplificació mesurada en dB per al filtre passabaix, passaalt, passabanda i banda eliminada, respectivament. Observeu que l'eix de freqüències s'ha escalat logarítmicament. Per a fer més simple la gràfica s'ha considerat que el màxim d'amplificació és 0 dB, encara que en la realitat l'amplificació màxima d'un filtre pot ser 0 dB ($|H(j\omega)| = 1$) o un altre valor més gran o més petit que 0 dB. Sigui quina sigui l'amplificació màxima, a la/les freqüència/es de tall l'amplificació serà la màxima menys 3 dB.

Una amplificació de 0 dB...

... correspon a una amplificació (en escala lineal) igual que 1.

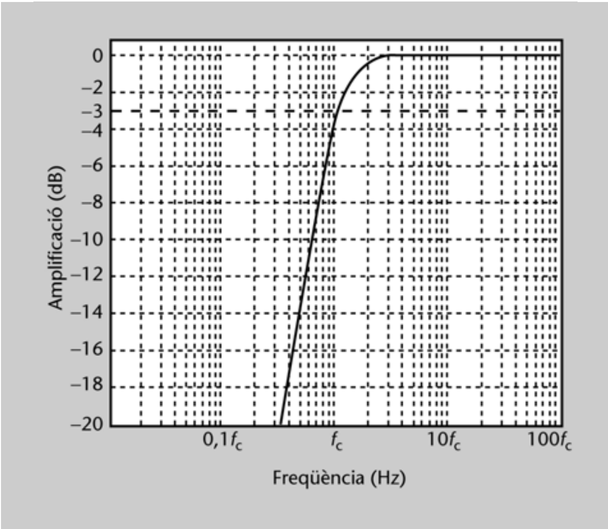
Una amplificació de –3 dB correspon a multiplicar l'amplitud del senyal d'entrada per $1/\sqrt{2}$.

Figura 43. Corba d'amplificació en dB d'un filtre passabaix real



A la freqüència de tall f_c el guany és el màxim menys 3 dB.

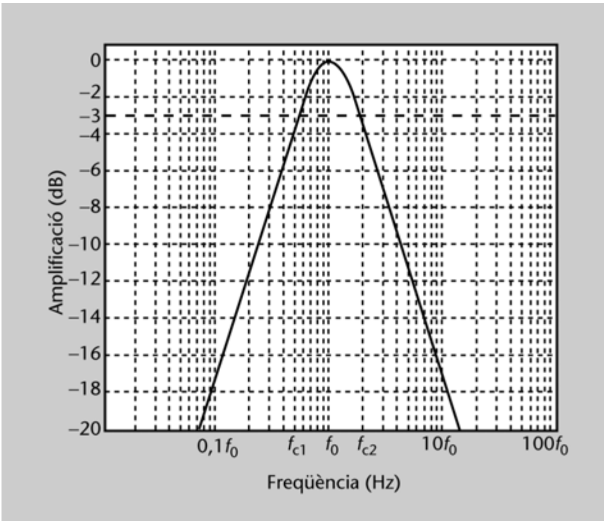
Figura 44. Corba d'amplificació en dB d'un filtre passaalt real



A la freqüència de tall f_c el guany és el màxim menys 3 dB.

Recordeu que amb l'eix de freqüències escalat en escala logarítmica, la distància entre la freqüència 0,1fc i la freqüència f_c, serà la mateixa que entre la freqüència f_c i la freqüència 10f_c. En ambdós casos, tenim una dècada de diferència.

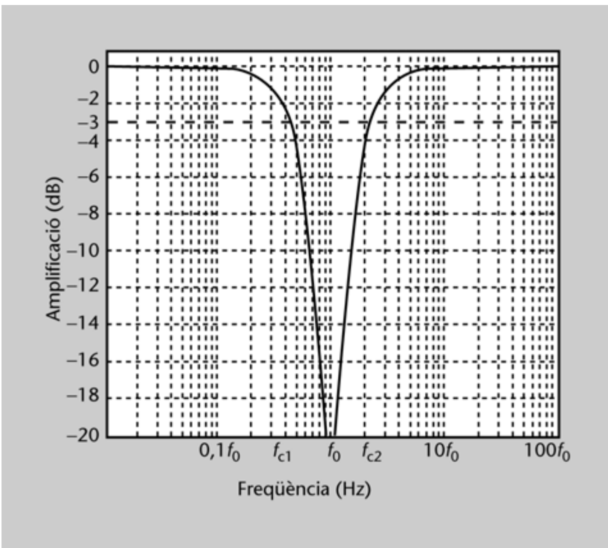
Figura 45. Corba d'amplificació en dB d'un filtre passabanda real



Hi ha dues freqüències de tall, una per sobre i una altra per sota de la freqüència central indicada com a f_0. A les freqüències de tall el guany és el màxim menys 3 dB.

Recordeu que en un filtre passabanda i en un filtre banda eliminada tenim dues freqüències de tall.

Figura 46. Corba d'amplificació en dB d'un filtre banda eliminada real



Hi ha dues freqüències de tall, una per sobre i una altra per sota de la freqüència central indicada com a f_0. A les freqüències de tall el guany és el màxim menys 3 dB.

3.3. Freqüència de ressonància i factor de qualitat

A més de la freqüència de tall a –3 dB, un altre paràmetre important és la **freqüència de ressonància**.

Quan la corba d'amplificació d'un filtre presenta un màxim per a alguna freqüència, diferent de $\omega = 0$ i $\omega \to \infty$, es diu que el filtre presenta una ressonància a aquesta freqüència.

En el context de filtres, s'entén per **freqüència de ressonància** aquella freqüència (diferent de $\omega = 0$ i $\omega \to \infty$) a la qual un filtre presenta un màxim d'amplificació.

En el cas de filtres passabanda també s'utilitza com a paràmetre característic la **selectivitat** del filtre. Un filtre passabanda amb una amplada de banda d'1 kHz és més selectiu que un altre amb una amplada de banda de 10 kHz.

La dificultat d'implementar filtres selectius augmenta a mesura que augmenta la freqüència central del filtre. D'aquesta manera, no és el mateix un filtre d'amplada de banda d'1 kHz la freqüència central del qual sigui 10 kHz que un altre amb la mateixa amplada de banda que treballi a una freqüència central de 100 kHz. Si pensem en escala logarítmica, la corba serà més estreta (més selectiva) en el segon cas. El factor de qualitat d'un filtre és una mesura de selectivitat que té en compte aquest aspecte.

Es defineix el **factor de qualitat** Q **d'un filtre passabanda** com el quocient entre freqüència de ressonància (freqüència de màxima amplificació, $\omega_{\text{ressonància}}$) i l'amplada de banda del filtre (B_W).

$$Q = \frac{\omega_{\text{resonància}}}{B_W} \tag{77}$$

El factor de qualitat és la mesura habitual de la selectivitat d'un filtre.

Si el factor de qualitat és menor que 1 parlem de **banda ampla** i si és major que 1 parlem de **banda estreta**.

El concepte de factor de qualitat es pot estendre també a filtres banda eliminada, com el quocient entre la freqüència central i l'amplada de banda del filtre. Fixeu-vos que, en el filtre banda eliminada, a la freqüència central l'amplificació no serà màxima sinó zero.

Un filtre banda eliminada molt selectiu es denomina també filtre ***notch***, paraula anglesa que significa 'ranura'.

3.4. Implementació de filtres mitjançant circuits

Per a acabar l'apartat dedicat als filtres, veurem possibles circuits per a implementar-los. Començarem amb filtres de primer ordre, seguirem amb filtres de segon ordre i, finalment, veurem quines estructures se solen adoptar per a filtres d'ordre superior a dos.

Totes les estructures que veurem corresponen a filtres passius, és a dir, fets només amb components passius: resistències, bobines i condensadors. Podem usar un altre tipus de components no passius com ara amplificadors operacionals i en aquest cas tindríem un filtre actiu.

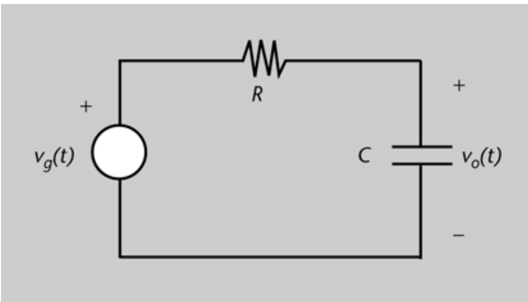
Un filtre actiu pot amplificar i a més resulta més fàcil ajustar els seus paràmetres. Ara bé, si hem de treballar a freqüències molt altes se solen utilitzar els filtres passius, ja que tenen millor funcionament que els actius per a aquest tipus de freqüències.

3.4.1. Filtres de primer ordre

Filtre passabaix

El filtre passabaix més senzill que podeu implementar és el circuit de primer ordre de la figura 47.

Figura 47. Filtre passabaix de primer ordre



Amb la simple inspecció d'aquest circuit podem intuir que es tracta d'un filtre passabaix, ja que el condensador és un curtcircuit per a les freqüències altes (el comportament asimptòtic d'aquest circuit a freqüències molt baixes i molt altes es va estudiar en el mòdul "Circuits en corrent altern").

Si calculem la funció de xarxa del circuit RC de la figura 47 obtindrem:

$$H_1(s) = \frac{V_0(s)}{V_g(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \tag{78}$$

En general, la funció de xarxa d'un filtre passabaix de primer ordre (amb un únic pol) té la forma:

$$H_1(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{k}{s+p} \quad (79)$$

Observeu que la funció de xarxa de l'equació 79 té un pol real i negatiu de valor $-p$, i cap zero.

És fàcil comprovar que la funció de xarxa de l'equació 79 correspon a un filtre passabaix. Per això, substituïm s per $j\omega$ i observem el seu comportament a freqüències molt baixes i freqüències molt altes:

També podem fer un filtre passabaix amb un circuit RL. Penseu on hauríem de mesurar la sortida perquè el circuit es comportés com un filtre passabaix.

$$H_1(j\omega) = \frac{k}{j\omega + p}\begin{cases} \omega \to 0 & H_1(j\omega) \to \dfrac{k}{p} \\ \omega \to \infty & H_1(j\omega) \to 0 \end{cases} \quad (80)$$

Cal llegir el símbol "→" com 'tendeix a'.

A freqüències molt baixes l'amplificació (mòdul de H_1 $(j\omega)$) tendeix a k/p, que és diferent de zero. A freqüències molt altes tendeix a 0. Es tracta, per tant, d'un filtre passabaix.

Per a qualsevol freqüència, l'amplificació, és a dir, el mòdul d'H_1 $(j\omega)$, val:

$$|H_1(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + p^2}} \quad (81)$$

Aquesta funció és **sempre** decreixent (matemàticament es diu monòtona decreixent). Això significa que l'amplificació màxima, que val k/p, la tenim a la freqüència $\omega = 0$, com podeu veure en la figura 48.

La corba d'amplificació en filtres passabaix...

... de primer ordre és sempre decreixent. En filtres passabaix d'ordre dos o superior no ha de ser així forçosament. És a dir, en filtres passabaix d'ordre dos o superior la màxima amplificació pot ocórrer a una freqüència diferent de 0 de la banda passant.

Per a la freqüència $\omega = p$ rad/s, l'amplificació és:

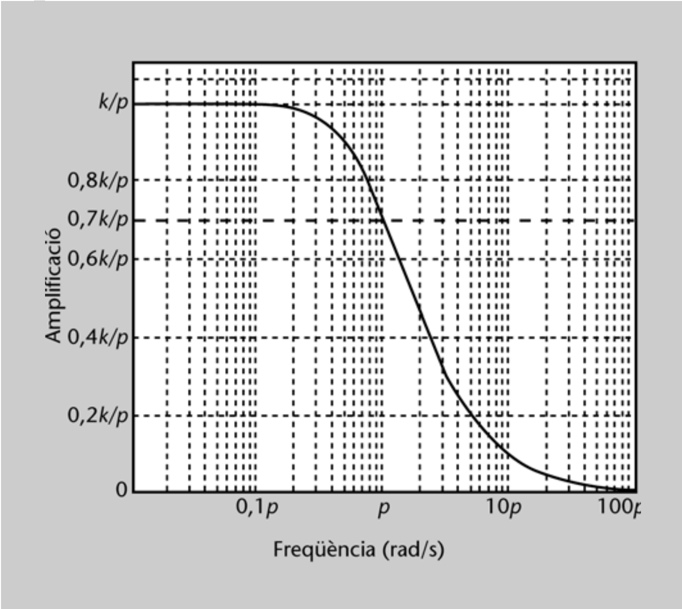
$$|H_1(jp)| = \frac{k}{\sqrt{p^2 + p^2}} = \frac{k}{p\sqrt{2}} \quad (82)$$

Noteu que aquest valor coincideix amb l'amplificació màxima a $\omega = 0$ dividida per $\sqrt{2}$. Per tant, la freqüència de tall és $\omega_c = p$.

En un filtre passabaix de primer ordre la freqüència de tall en radiants per segon coincideix amb el valor absolut del pol, és a dir, $\omega_c = p$.

Si volem la freqüència de tall en Hz hem de dividir p entre 2π.

Figura 48. Corba d'amplificació d'un filtre passabaix de primer ordre



La freqüència de tall a –3 dB coincideix amb el valor absolut del pol: $\omega_c = p$ rad/s (o equivalentment $f_c = p/2\pi$ Hz).

Exemple 6

Per al circuit RC de la figura 47, calculeu la freqüència de tall per a R = 10 kΩ i C = 10 nF.

Solució

Observant la funció de transferència del filtre RC (equació 78) veiem que la freqüència de tall val:

$$\omega_c = \frac{1}{RC} = 10^4 \text{ rad/s} \tag{83}$$

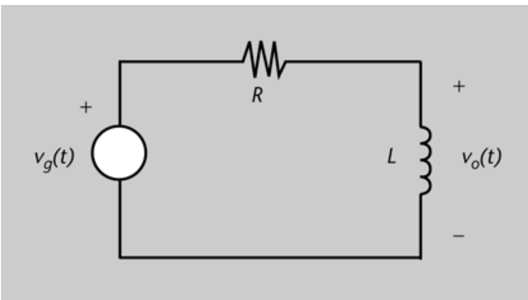
que és el mateix que dir que la freqüència de tall del filtre és:

$$f_c = \frac{10^4}{2\pi} = 1{,}6 \text{ kHz} \tag{84}$$

Filtre passaalt

Un filtre passaalt de primer ordre és, per exemple, el circuit de la figura 49:

Figura 49. Filtre passaalt de primer ordre



Amb la simple inspecció d'aquest circuit podem intuir que es tracta d'un filtre passaalt, ja que l'inductor és un curtcircuit en contínua (el comportament

També podem fer un filtre passaalt amb un circuit RC. Penseu on hauríem de mesurar la sortida perquè el circuit es comportés com un filtre passaalt.

asimptòtic d'aquest circuit a freqüències molt baixes i molt altes es va estudiar en el mòdul "Circuits en corrent altern").

Per al circuit RL de la figura 49 la funció de xarxa és:

$$H_2(s) = \frac{V_0(s)}{V_g(s)} = \frac{Ls}{R + Ls} = \frac{s}{s + \frac{R}{L}} \tag{85}$$

En general, la funció de xarxa d'un filtre passaalt de primer ordre (amb un sol pol) té la forma:

$$H_2(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{ks}{s + p} \tag{86}$$

Fixeu-vos que la funció de xarxa de l'equació 86, té un zero en l'origen. Per tant, $H(0)$ val 0, cosa que significa que el filtre passaalt anul·la el continu (DC).

És fàcil comprovar que la funció de xarxa de l'equació 86 correspon a un **filtre passaalt**. Per això, substituïm s per $j\omega$ i observem el comportament a freqüències molt baixes i freqüències molt altes:

$$H_2(j\omega) = k\frac{j\omega}{j\omega + p}\begin{cases} \omega \to 0 & H_2(j\omega) \to 0 \\ \omega \to \infty & H_2(j\omega) \to k \end{cases} \tag{87}$$

A freqüències molt baixes, l'amplificació (mòdul de H_1 $(j\omega)$) tendeix a zero. A freqüències molt altes, tendeix a k, diferent de zero. Es tracta, per tant, d'un filtre passaalt.

La corba d'amplificació en filtres passaalt...

... de primer ordre és sempre creixent. En filtres passaalt d'ordre dos o superior no ha de ser així forçosament. És a dir, en filtres passaalt d'ordre dos o superior la màxima amplificació pot ocórrer a una freqüència finita (diferent d'infinit) de la banda passant.

Per a qualsevol freqüència l'amplificació, mòdul d'H_2 $(j\omega)$, val:

$$|H_2(j\omega)| = k\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + p^2}} \tag{88}$$

Aquesta funció és sempre creixent (matemàticament es diu monòtona creixent). Això significa que l'amplificació màxima la tenim a $\omega \to \infty$, com podem veure en la figura 50, i val k.

Per a la freqüència $\omega = p$ radiants per segon, l'amplificació és:

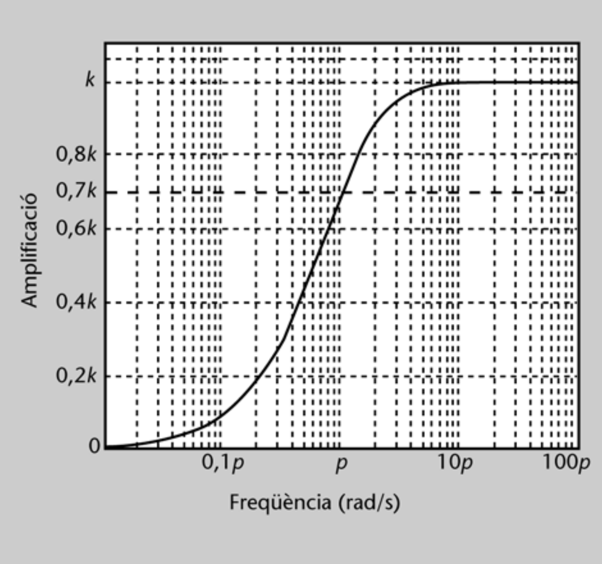
$$|H_2(jp)| = \frac{kp}{\sqrt{p^2 + p^2}} = \frac{k}{\sqrt{2}} \tag{89}$$

Fixeu-vos que aquest valor coincideix amb l'amplificació màxima a $\omega \to \infty$ dividida per $\sqrt{2}$. Per tant, la freqüència de tall és $\omega_c = p$.

En un filtre passaalt de primer ordre la freqüència de tall en radiants per segon coincideix amb el valor absolut del pol, és a dir, $\omega_c = p$.

Si volem la freqüència de tall en Hz hem de dividir p entre 2π.

Figura 50. Corba d'amplificació d'un filtre passaalt de primer ordre



La freqüència de tall a –3 dB coincideix amb el valor absolut del pol: $\omega_c = p$ rad/s.

Exemple 7

Per al circuit RL de la figura 49, calculeu la freqüència de tall per a R = 1 kΩ i L = 33 mH.

Solució

Observant la funció de transferència del filtre RC, veiem que la freqüència de tall val:

$$\omega_c = \frac{R}{L} = 3 \cdot 10^4 \text{ rad/s} \tag{90}$$

que és el mateix que dir que la freqüència de tall del filtre és:

$$f_c = \frac{3 \cdot 10^4}{2\pi} = 4{,}8 \text{ kHz} \tag{91}$$

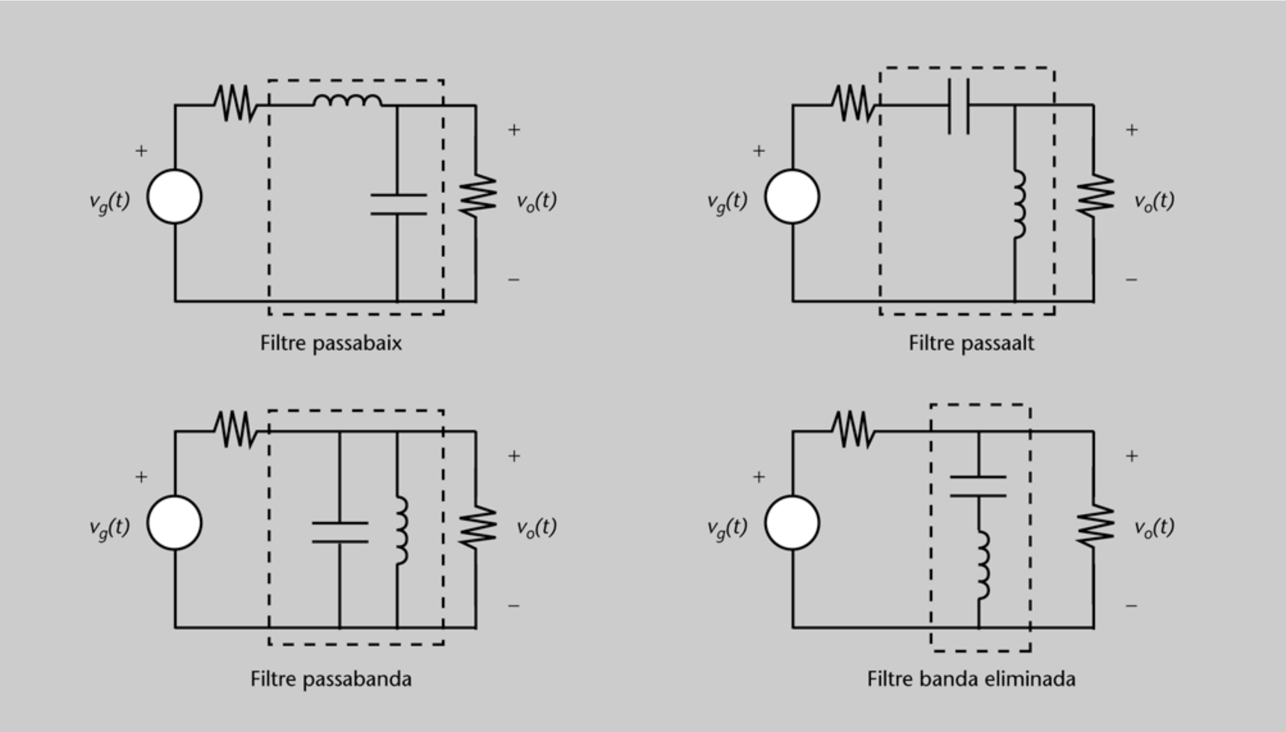
3.4.2. Filtres de segon ordre

Amb circuits de primer ordre no podem aconseguir filtres passabanda i banda eliminada. Necessitem com a mínim un circuit de segon ordre (dos pols) per a aconseguir aquest tipus de filtres.

També podem millorar la corba d'amplificació de filtres passabaix i passaalt si utilitzem un circuit de segon ordre en lloc d'un circuit de primer ordre.

Possibles estructures circuitals de segon ordre per a implementar filtres passabaix, passaalt, passabanda i banda eliminada són les que es mostren en la figura 51.

Figura 51. Filtres d’ordre dos passabaix, passaalt, passabanda i banda eliminada



En la part quadriculada de la figura hi ha els elements que fan pròpiament de filtre, ja que la primera resistència és, juntament amb el generador, el model de Thevenin de les etapes prèvies, i la resistència als borns de la qual mesurem la sortida és la resistència de càrrega (o resistència equivalent d’entrada de les etapes posteriors).

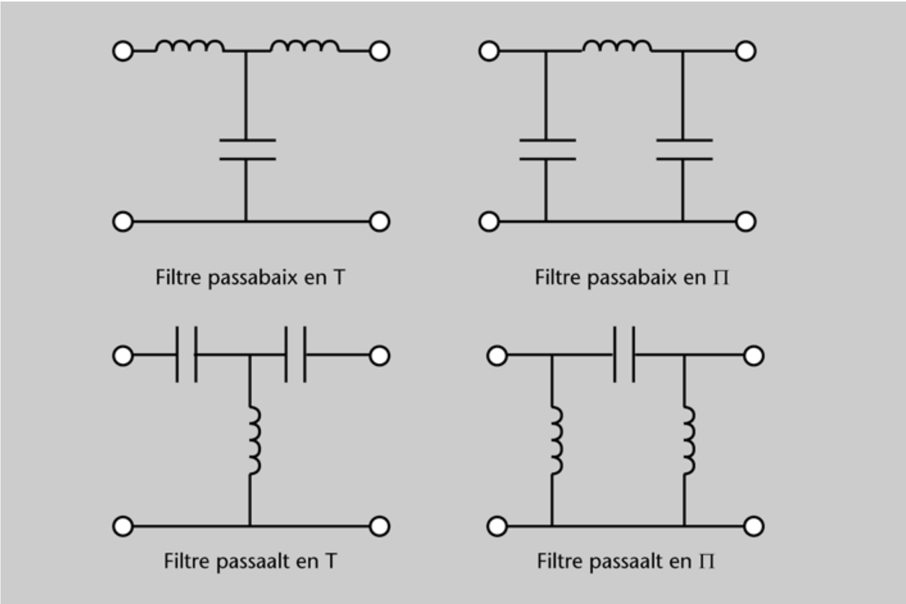
El comportament asimptòtic d’aquests circuits (i similars) es va estudiar en el mòdul “Circuits en corrent altern”.

3.4.3. Filtres d’ordre superior

Per a filtres passius de major ordre se solen usar els denominats filtres en T o en Π (llegiu-hi ‘pi’) o connexions en cascada d’aquests. Encara que l’estudi en profunditat d’aquests circuits va més enllà dels objectius de l’assignatura, en la figura 52 podeu veure aquest tipus de filtres. Per claredat s’ha omès aquí la font i la seva resistència interna, així com la resistència de càrrega que modela les etapes posteriors.

L’elecció d’un filtre en T o en Π és determinada per la resistència de càrrega i la impedància de la font d’entrada. Si la resistència de càrrega és molt més gran que la impedància de la font s’usa l’estructura en T. Si la resistència de càrrega és molt més petita que la impedància de la font, llavors s'usa l'estructura en Π.

Figura 52. Filtres passabaix i passaalt en T i en Π



4. Problemes resolts

4.1. Enunciats

Problema 1

Per al circuit amb funció de transferència següent:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{2 \cdot 10^6}{s^2 + 6 \cdot 10^3 s + 4 \cdot 10^6} \quad (92)$$

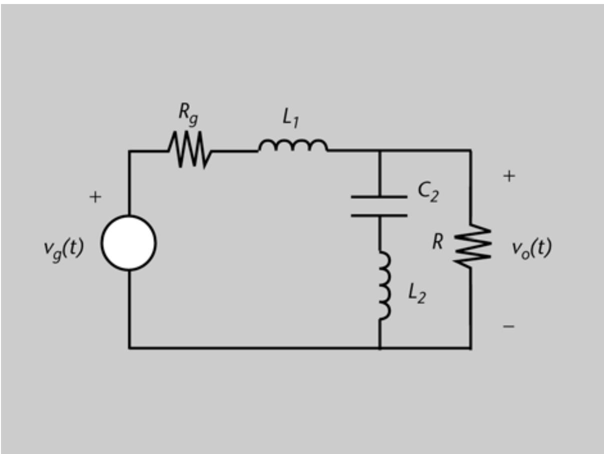
trobeu la resposta en règim permanent al senyal d'entrada:

$$v_i(t) = 4 + \cos(10^3 t) + 2\cos(2 \cdot 10^3 t + 45°) \quad (93)$$

Problema 2

Donat el circuit de la figura 53 amb R_g = 10 Ω, R = 100 Ω, L_1 = 1 mH, L_2 = 1,2 mH, C_2 = 2,5 μF.

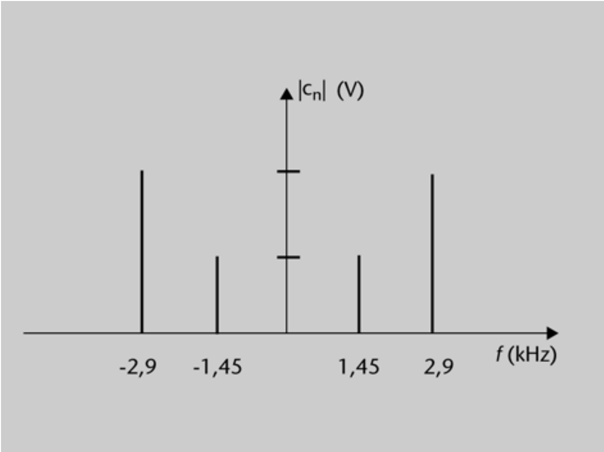
Figura 53. Circuit del problema 2



a) Dibuixeu de manera aproximada, i sense calcular $H(s)$, la corba d'amplificació. Per a això, heu de recordar el comportament asimptòtic dels components (a freqüències molt baixes i molt altes) i el comportament a la freqüència $1/\sqrt{L_2 C_2}$ de l'estructura ressonant sèrie present en el circuit.

b) El senyal d'entrada $v_g(t)$ és un senyal periòdic els coeficients de Fourier del qual proporcionen l'espectre d'amplitud de la figura 54. Quina forma d'ona (en el domini temporal) tindrà la tensió de sortida $v_o(t)$?

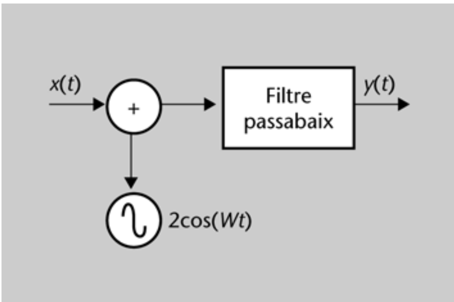
Figura 54. Espectre d'amplitud del senyal d'entrada en el problema 2



Problema 3

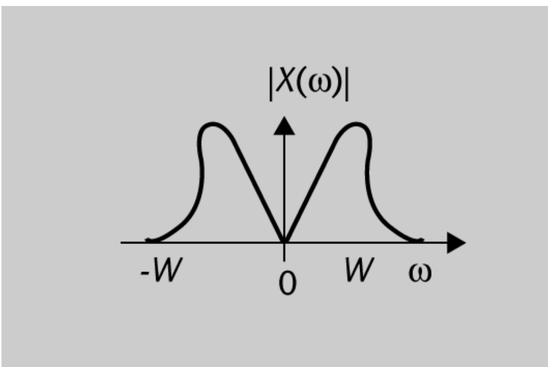
El codificador d'àudio de Canal + està basat en el que es coneix com un *speech scrambler* (batedor de veu), representat en la figura 55, que permet convertir el senyal de veu $x(t)$ en un senyal $y(t)$ inintel·ligible.

Figura 55. Diagrama de blocs d'un *speech scrambler*



El senyal d'entrada $x(t)$ és un senyal passabaix d'amplada de banda W radiants per segon, l'espectre del qual es mostra en la figura 56. S'ha representat l'espectre bilateral, ja que és més convenient quan es treballa amb operacions de modulació.

Figura 56. Espectre d'amplitud del senyal d'entrada en el problema 3



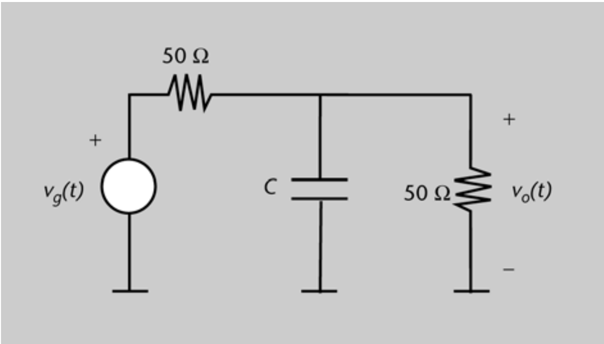
Considerant el filtre passabaix ideal i d'amplada de banda W:

a) Esbosseu l'espectre d'amplitud dels senyals a l'entrada i sortida del filtre.
b) Expliqueu per què el senyal de sortida $y(t)$ és inintel·ligible.
c) Com es podria recuperar $x(t)$ a partir d'$y(t)$?

Problema 4

Per al circuit de la figura 57:

Figura 57. Circuit del problema 4

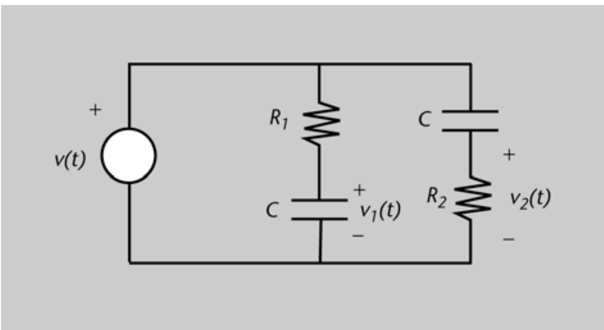


a) Calculeu la funció de transferència del sistema global $H(s)$. Indiqueu l'ordre del circuit i la posició dels seus pols.
b) A partir d'$H(s)$, avalueu $H(j\omega)$ per a freqüències molt baixes i molt altes. De quin tipus de filtre es tracta?
c) El circuit s'utilitza per a filtrar un senyal de veu. Sabent que, per sobre de 4 kHz, els components freqüencials de la veu no són importants per a la intel·ligibilitat del senyal, calculeu el valor del condensador que hem d'utilitzar.
d) Per a calcular com redueix el sistema proposat l'amplitud de possibles interferències respecte al senyal de veu, calculeu la relació que hi ha entre l'amplificació a 0 Hz i a la freqüència 16 kHz. Indiqueu també aquesta relació en dB.

Problema 5

Es vol separar un senyal de veu que ocupa la banda de 300 Hz a 3.300 Hz d'un senyal de dades que ocupa la banda de 30 kHz a 1.104 kHz. Per això, utilitzarem el muntatge de la figura 58.

Figura 58. Circuit del problema 5

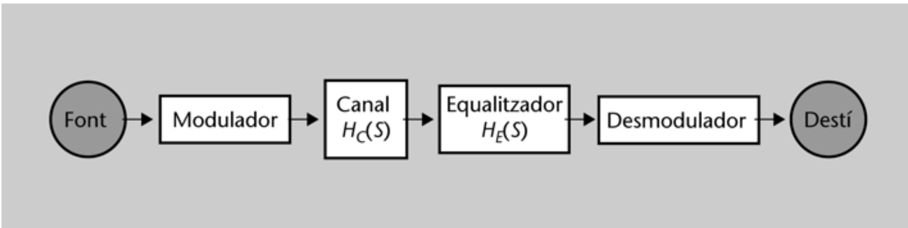


Indiqueu on s'ha de mesurar cada senyal i el valor dels components necessaris per a separar correctament ambdós senyals.

Problema 6

Un canal de comunicacions es diu que és selectiu en freqüència quan presenta una atenuació no uniforme amb la freqüència. Per a compensar la resposta freqüèncial d'aquests canals (equalitzar) és necessari incorporar un circuit equalitzador en el receptor (vegeu figura 59), l'objectiu del qual és obtenir una atenuació plana en freqüència per al senyal rebut.

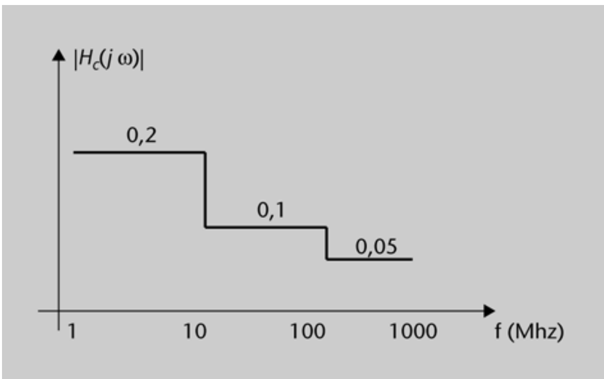
Figura 59. Diagrama de blocs d'un sistema de comunicacions que inclou un equalitzador en el receptor



a) Quina relació hi ha d'haver entre les corbes d'amplificació del canal i l'equalitzador perquè la funció de xarxa equivalent (de canal i equalitzador) sigui plana?

b) Considerant que el canal presenta la corba d'amplificació de la figura 60, dibuixeu la corba de guany en dB del canal. Dibuixeu també la corba de guany de l'equalitzador per a corregir la distorsió del canal.

Figura 60. Resposta en freqüència del canal del problema 6



Problema 7

Un senyal d'informació amb un contingut freqüencial significatiu per a $f \leq 100$ Hz és interferit per un to de 10 kHz.

a) Proposeu un circuit de primer ordre que permeti reduir l'amplitud de la interferència, indicant clarament on s'ha de mesurar l'entrada i la sortida.

b) Escriviu la funció de xarxa del filtre.

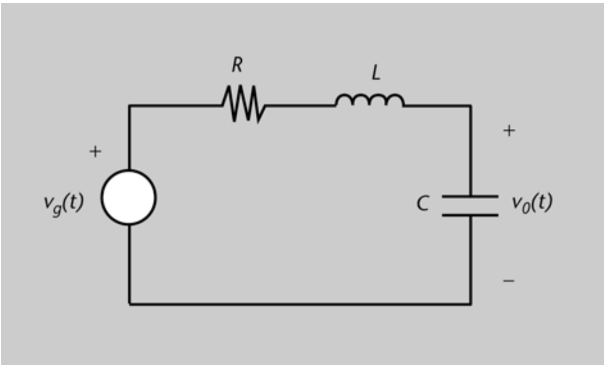
c) Calculeu el valor dels components per a situar la freqüència de tall a 1 kHz.

d) Calculeu la relació que hi ha entre l'amplificació en contínua i a la freqüència de la interferència. Indiqueu aquesta relació en lineal i en dB.

Problema 8

El circuit de la figura 61 correspon a un filtre de 2n. ordre:

Figura 61. Circuit del problema 8



$C = 1\ \mu F$, $L = 25\ mH$, $R = 220\ \Omega$

a) Calculeu la funció de xarxa en funció dels components del circuit.

b) Avalueu la funció de xarxa per a freqüències molt baixes i molt altes. De quin tipus de filtre es tracta?

c) Calculeu el valor de la freqüència natural en Hz.

d) Per als valors dels components, el coeficient d'esmorteïment és 0,7. Es pot comprovar que si el coeficient d'esmorteïment és 0,7 (filtre de Butterworth), l'amplificació màxima del filtre succeeix a freqüència contínua i que la freqüència de tall a –3 dB és la freqüència natural. Comproveu que la freqüència de tall a –3 dB coincideix amb la freqüència natural, sabent que l'amplificació màxima succeeix a freqüència 0.

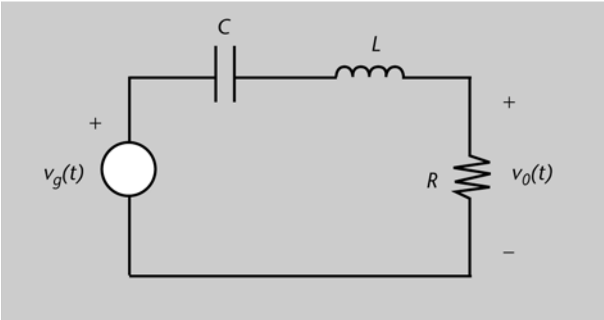
e) Calculeu per a aquest circuit l'amplificació en lineal i en dB en contínua i a la freqüència de 10 kHz.

f) Tenint en compte l'apartat anterior i l'últim apartat del problema 7, quin dels filtres, el del problema 7 o el d'aquest problema, resulta més convenient per a la situació plantejada en el problema 7 i per què?

Problema 9

Per al circuit RLC de la figura 62,

Figura 62. Circuit del problema 9



on C = 10 nF, L = 33 mH, R = 1kΩ:

a) Dibuixeu de manera aproximada, a partir de la inspecció visual del circuit, la corba d'amplificació del circuit.

b) Calculeu $H(s)$. De quin tipus de filtre es tracta?

c) En un filtre passabanda de 2n. ordre, la màxima amplificació sempre es produeix a la freqüència natural i l'amplada de banda coincideix amb el coeficient de la s en el denominador de la funció de xarxa. Per al valor dels components donat, calculeu en Hz la freqüència de ressonància, l'amplada de banda i el factor de qualitat del filtre.

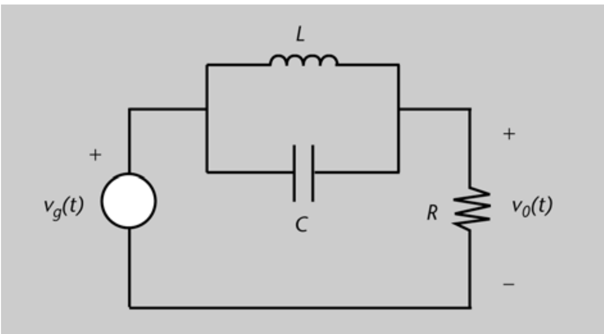
d) Indiqueu quin/s component/s podríem variar per a fer el filtre més selectiu sense modificar la freqüència de ressonància del filtre.

Problema 10

El circuit de la figura 63 presenta com a funció de xarxa:

$$H(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \tag{94}$$

Figura 63. Circuit del problema 10



a) Indiqueu la posició dels zeros de la funció de xarxa.

b) Calculeu el valor de L i C perquè el filtre cancel·li la freqüència de 8,76 kHz.

4.2. Solucions

Problema 1

Hem d'avaluar la funció de xarxa a les freqüències contingudes en el senyal d'entrada:

$$
\begin{aligned}
&\omega = 0 \Rightarrow H(0) = 0,5 \\
&\omega = 10^3 \Rightarrow H\left(j10^3\right) = \frac{2\cdot 10^6}{-10^6 + 6\cdot 10^3\cdot j10^3 + 4\cdot 10^6} = \frac{2}{3+j6} = 0,3e^{-j63,4^\circ} \\
&\omega = 2\cdot 10^3 \Rightarrow H\left(j2\cdot 10^3\right) = \frac{2\cdot 10^6}{-4\cdot 10^6 + 6\cdot 10^3\cdot j2\cdot 10^3 + 4\cdot 10^6} = \frac{2}{j12} = 0,17e^{-j90^\circ}
\end{aligned} \tag{95}
$$

Ara, per a cada senyal cosinus, multipliquem l'amplitud per l'amplificació (mòdul de $H(j\omega)$) a la freqüència del cosinus. A la fase de cada senyal cosinus hi sumem el desfasament (argument de $H(j\omega)$) a la freqüència del cosinus.

D'aquesta manera, la tensió de sortida queda:

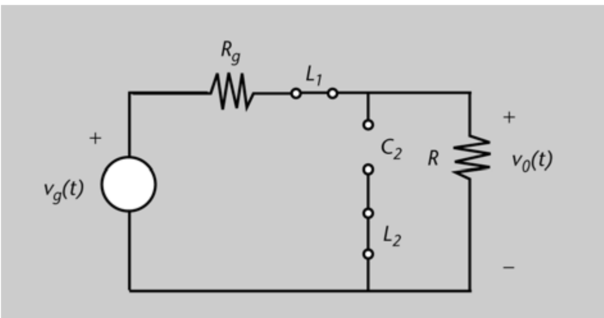
$$v_0(t) = 2 + 0,3\cos(10^3 t - 63,4^\circ) + 0,34\cos(2\cdot 10^3 t - 45^\circ) \tag{96}$$

Problema 2

a)

- Freqüències molt baixes. Recordeu (ho vam veure en el mòdul "Circuits en corrent altern") que a freqüències molt baixes els inductors es poden aproximar per curtcircuits i els condensadors per circuits oberts, tal com es mostra en la figura 64.

Figura 64. Circuit del problema 1 equivalent a freqüència ω = 0



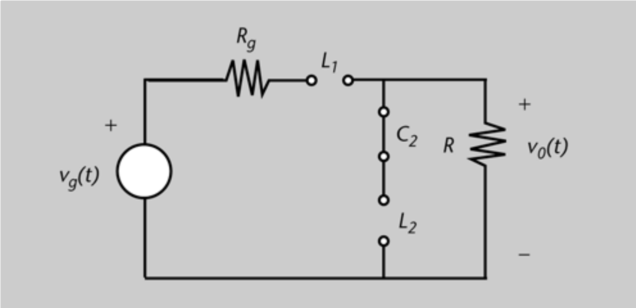
Aplicant un divisor de tensió, resulta que la relació entre les amplituds de la tensió i sortida a freqüència ω = 0 (amplificació en contínua) serà:

$$H(0) = \frac{R}{R_g + R} = \frac{100}{110}$$

- Freqüències molt altes. A freqüències molt altes els inductors es poden aproximar per circuits oberts i els condensadors per curtcircuits (figura 65).

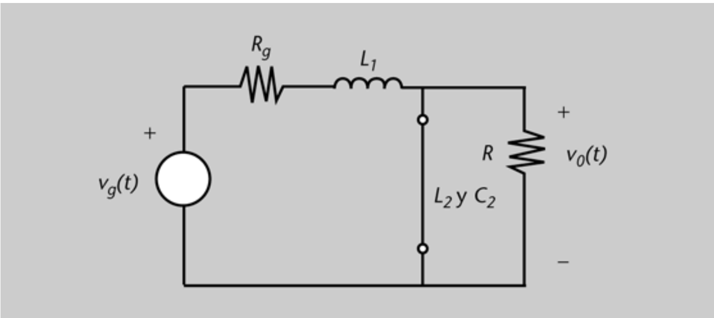
La tensió de sortida és 0, ja que no circula corrent pel circuit. Per tant, la relació entre les amplituds de la tensió i sortida a freqüències molt altes (amplificació a freqüències molt altes) és 0.

Figura 65. Circuit del problema 1 equivalent a freqüència $\omega \to \infty$



A la freqüència $1/\sqrt{L_2C_2}$ rad/s, els dos elements de l'estructura ressonant L-C sèrie, L_2 i C_2, es comporten com un curtcircuit (els dos elements conjuntament)(figura 66). A causa del curtcircuit en paral·lel amb la resistència de sortida, la tensió de sortida és 0 a aquesta freqüència. Per tant, a la freqüència $1/\sqrt{L_2C_2}$ rad/s l'amplificació també és 0.

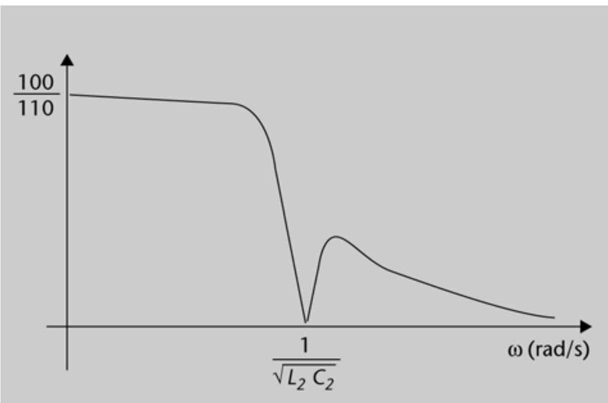
Figura 66. Circuit del problema 1 equivalent a freqüència $1/\sqrt{L_2C_2}$ rad/s



Fixeu-vos que a la freqüència $1/\sqrt{L_2C_2}$ rad/s, la bobina L_1 serà una reactància inductiva, el valor de la qual depèn del valor de L_1 i de la freqüència. Però no serà un curtcircuit ni un circuit obert. Per això, l'hem continuat representant com una bobina.

Amb les dades anteriors ja podem esbossar la corba d'amplificació (figura 67).

Figura 67. Corba d'amplificació, $|H(j\omega)|$, (aproximada) en funció de la freqüència per al circuit del problema 2



El circuit presenta un zero de transmissió a la freqüència:

$$\omega_z = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}2 \cdot 10^{-3} 2{,}5 \cdot 10^{-6}}} = 1{,}83 \cdot 10^4 \text{ rad/s} \quad (97)$$

Fixeu-vos que el circuit presenta un 0 en $s = j\omega_z$ $\left(H(s)\big|_{s=j\omega_z} = 0\right)$ i també en $s = -j\omega_z$, ja que els zeros apareixen, igual que els pols, en parells complexos conjugats.

b) Heu d'anar amb compte ja que els components freqüencials de l'entrada estan especificats en Hz. Per a escriure la freqüència anterior en Hz hem de dividir entre 2π:

$$f_z = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_2}} = 2{,}9 \cdot 10^3 \text{ Hz} \quad (98)$$

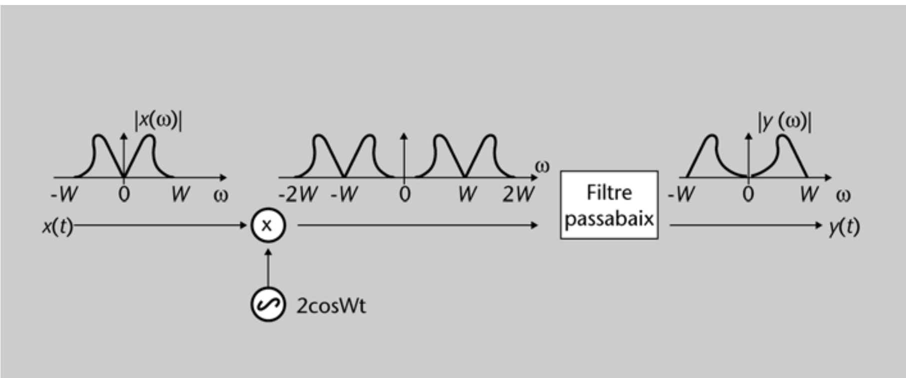
Per a calcular l'espectre d'amplitud de la sortida hem de multiplicar l'espectre d'amplitud de l'entrada per la corba d'amplificació. D'acord amb el resultat anterior, el circuit té amplificació zero a la freqüència 2,9 kHz. Per tant, el circuit cancel·la el component freqüencial de 2,9 kHz de l'entrada. Per tant, la sortida serà un senyal sinusoïdal de freqüència 1,45 kHz.

Problema 3

a) En multiplicar pel cosinus de freqüència W rad/s, desplacem l'espectre de $x(t)$ W rad/s cap a dalt i cap a baix. També dividim per 2, però com el cosinus també està multiplicat per 2, l'amplitud queda igual.

En filtrar amb el filtre passabaix d'amplada de banda W, ens quedem amb la banda lateral inferior del senyal. Observeu el resultat en la figura 68.

Figura 68. Solució del problema 3, apartat **a**



b) L'espectre d'amplitud del senyal $y(t)$ és diferent del del senyal $x(t)$. Fixeu-vos que el sistema ha girat l'espectre del senyal original. Encara que el senyal $y(t)$ conté les mateixes freqüències que el senyal $x(t)$ l'amplitud de cadascuna d'aquestes freqüències és diferent de la que tenen en el senyal $x(t)$. Per aquesta raó, la forma d'ona temporal serà diferent.

c) Per a recuperar el senyal original hem de tornar a girar l'espectre del senyal $y(t)$. Per això podem usar un sistema exactament igual que l'utilitzat per a girar l'espectre del senyal $x(t)$.

Problema 4

a) El càlcul de la funció de xarxa d'aquest circuit es va fer en el problema 6 del mòdul "Circuits dinàmics". La funció de xarxa és:

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 2} = \frac{1/RC}{s + \frac{2}{RC}} \tag{99}$$

Es tracta d'un circuit de primer ordre, amb un sol pol de valor

$$\text{pol} = -\frac{2}{RC} \tag{100}$$

b) La funció de xarxa és del tipus:

$$H(s) = \frac{k}{s+p} \qquad \text{amb } k = 1/RC \text{ i } p = 2/RC \tag{101}$$

Per a veure de quin tipus de filtre es tracta, substituïm s per $j\omega$ i observem el comportament a freqüències molt baixes i freqüències molt altes:

$$H(j\omega) = \frac{k}{j\omega + p}\begin{cases} \omega \to 0 & H(j\omega) \to \frac{k}{p} = 0,5 \\ \omega \to \infty & H(j\omega) \to 0 \end{cases} \tag{102}$$

Com el sistema deixa passar les baixes freqüències i cancel·la les altes, es tracta d'un filtre passabaix.

c) La freqüència de tall la situarem en f_c = 4 kHz, aquesta freqüència en radiants per segon és:

$$\omega_c = 2\pi f = 2\pi 4 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \tag{103}$$

Hem vist que la freqüència de tall coincideix amb el valor absolut del pol, és a dir:

$$\omega_c = \frac{2}{RC} \tag{104}$$

Per tant, C ha de valer:

$$\omega_c = 2\pi 4\cdot 10^3 = \frac{2}{RC} \Rightarrow C = \frac{1}{50\pi 4\cdot 10^3} = 1{,}6\ \mu\text{F} \qquad (105)$$

d) La funció de xarxa és:

$$H(s) = \frac{1/RC}{s+2/RC} = \frac{2\pi 2\cdot 10^3}{s+2\pi 4\cdot 10^3} \qquad (106)$$

En contínua:

$$H(0) = 0{,}5 \qquad (107)$$

La funció de xarxa avaluada a la freqüència de 16 kHz val:

$$H\left(j2\pi 16\cdot 10^3\right) = \frac{2\pi 2\cdot 10^3}{j2\pi 16\cdot 10^3 + 2\pi 4\cdot 10^3} = \frac{1}{j8+2} \qquad (108)$$

Per la qual cosa l'amplificació a aquesta freqüència és:

$$\left|H\left(j2\pi 16\cdot 10^3\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{64+4}} = \frac{1}{\sqrt{68}} = 0{,}12 \qquad (109)$$

D'aquesta manera, el quocient d'amplificacions a 0 i 16 kHz és:

$$\frac{\left|H(0)\right|}{\left|H\left(j2\pi 16\cdot 10^3\right)\right|} = \frac{0{,}5}{0{,}12} = 4{,}1 \qquad (110)$$

És a dir, la freqüència 16 kHz s'atenua un factor 4,1 respecte a la contínua. En dB l'atenuació és de:

$$20\log_{10} 4{,}1 = 12{,}26\ \text{dB} \qquad (111)$$

Problema 5

A freqüències altes els condensadors es comporten com a curtcircuits. Per tant, podem intuir que el senyal d'alta freqüència l'haurem de mesurar als borns de la resistència R_2.

Si calculem la funció de xarxa mesurant la tensió de sortida als borns del condensador obtenim que:

$$H_1(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R_1 + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{R_1Cs+1} = \frac{1/R_1C}{s+1/R_1C} \qquad (112)$$

Es tracta, per tant, d'un filtre passabaix de primer ordre amb freqüència de tall $1/R_1C$ rad/s.

Si calculem la funció de xarxa mesurant la tensió de sortida als borns de la resistència R_2, obtenim que:

$$H_2(s) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{R_2Cs}{R_2Cs+1} = \frac{s}{s+1/R_2C} \quad (113)$$

Es tracta, per tant, d'un filtre passaalt de primer ordre amb freqüència de tall $1/R_2C$ rad/s.

Podem situar la freqüència de tall d'ambdós filtres, per exemple, a 5 kHz, que està entre les dues bandes que volem separar (multipliquem per 2π per a expressar-la en rad/s).

$$\omega_c = \frac{1}{RC} = 2\pi 5 \cdot 10^3 \ \text{rad/s} \quad (114)$$

Si triem, per exemple, que la resistència sigui d'1 KΩ, el valor del condensador ha de ser:

$$C = \frac{1}{10^3 \cdot 2\pi 5 \cdot 10^3} = 32 \text{ nF} \quad (115)$$

Problema 6

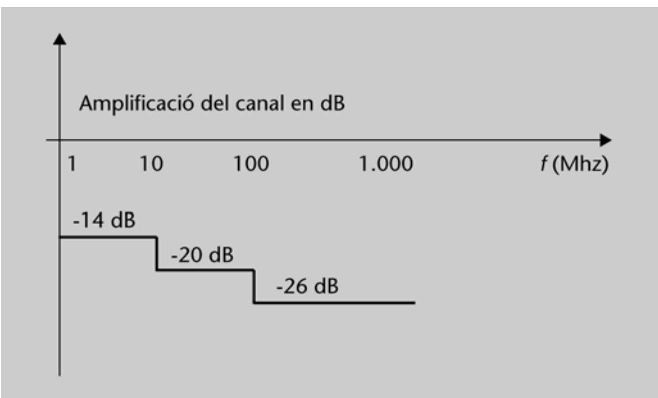
a) La corba d'amplificació del canal multiplicada per la corba d'amplificació de l'equalitzador ha de ser constant per a totes les freqüències.

$$|H_C(j\omega)|\,|H_E(j\omega)| = \text{constant} \quad (116)$$

Per exemple, la constant pot ser 1.

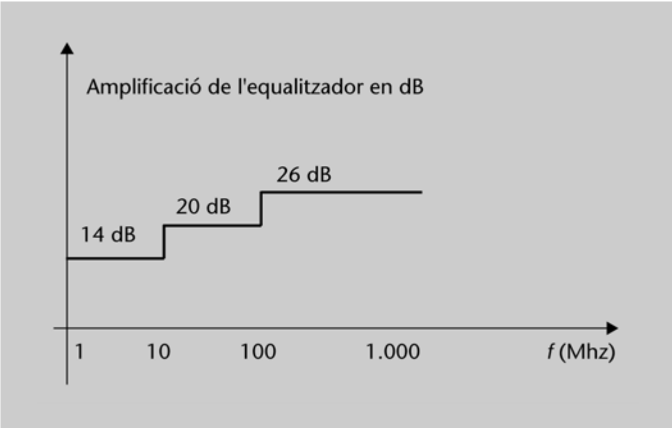
b) L'amplificació en dB es calcula com a $20\log_{10}$(amplificació). Per tant:

Figura 69. Amplificació en dB del canal del problema 6



En dB, el guany del canal i de l'equalitzador se sumen. Una amplificació igual que 1, equival a 0 dB. Per a aconseguir un guany total de 0 dB, la corba de guany de l'equalitzador ha de ser:

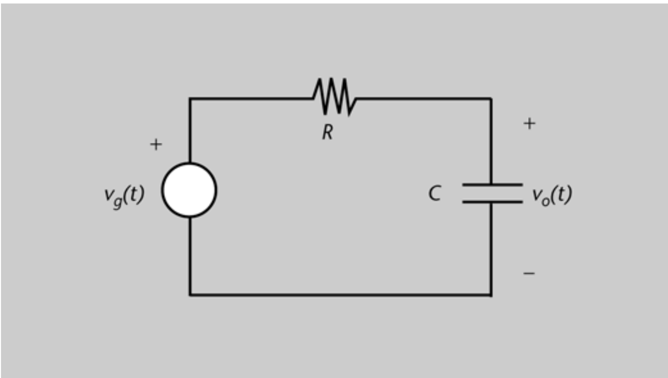
Figura 70. Amplificació en dB de l'equalitzador del problema 6



Problema 7

a) Necessitem un filtre passabaix, per exemple, el següent circuit RC.

Figura 71. Circuit del problema 6



b) La funció de xarxa és:

$$H(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \tag{117}$$

Per la qual cosa la freqüència de tall i l'amplada de banda són iguals que $1/RC$ rad/s.

c) La freqüència de tall és $1/RC$ en rad/s. Si volem que la freqüència de tall sigui a 1 kHz, s'ha de complir que:

$$\omega_c = \frac{1}{RC} = 2\pi 10^3 \ \text{rad/s} \tag{118}$$

Triant, per exemple, la resistència d'1 kΩ, perquè la freqüència de tall sigui a 1 kHz necessitem que:

$$C = \frac{1}{10^3 \cdot 2\pi 10^3} = 0{,}159\ \mu\text{F} \tag{119}$$

d) En contínua, l'amplificació del filtre és 1. Si la freqüència de tall és 1 kHz, llavors $1/RC = 2\pi 10^3$ rad/s. La funció de xarxa avaluada a 10 kHz és:

$$H\left(j2\pi 10 \cdot 10^3\right) = \frac{2\pi 10^3}{j2\pi 10 \cdot 10^3 + 2\pi 10^3} = \frac{1}{j10+1} \tag{120}$$

L'amplificació a 10 kHz és, per tant:

$$\left|H\left(j2\pi 10 \cdot 10^3\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{100+1}} \cong 0{,}1 \tag{121}$$

Aquesta amplificació és 20 dB inferior a l'amplificació en contínua.

Problema 8

a) La funció de xarxa en funció dels components del circuit és:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{RCs + LCs^2 + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \tag{122}$$

b) Veiem que $H(0) = 1$ i que $H(\infty) \to 0$, per la qual cosa el circuit deixa passar la contínua i cancel·la les freqüències altes. Es tracta d'un filtre passabaix.

c) La freqüència natural és:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 6{,}28 \cdot 10^3\ \text{rad/s} \tag{123}$$

Dividint entre 2π, obtenim que la freqüència natural en Hz és:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 10^3\ \text{Hz} \tag{124}$$

d) El filtre de Butterworth és màximament pla, no presenta màxims locals a la banda passant, amb la qual cosa l'amplificació màxima succeeix a freqüència contínua i val:

$$H(0) = \frac{k}{\omega_0^2} = 1 \tag{125}$$

Avaluem $H(s)$ a la freqüència natural, substituint s per $j\omega_0$. També substituïm el coeficient d'esmorteïment per $0{,}7\ (\simeq 1/\sqrt{2})$, ja que es tracta d'un filtre de Butterworth.

$$H\left(j\omega_0\right)=\frac{k}{-\omega_0^2+2\zeta\omega_0 j\omega_0+\omega_0^2}=\frac{k}{j\dfrac{2}{\sqrt{2}}\omega_0^2}=\frac{k}{\sqrt{2}\omega_0^2}e^{-j90^\circ}=-\frac{j}{\sqrt{2}} \quad (126)$$

on hem fet servir que $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ i que $\frac{k}{\omega_0^2}=1$ (equació 125).

Veiem, doncs, que l'amplificació és l'amplificació en contínua (la màxima) dividida per arrel de 2. Per tant, la freqüència natural és la freqüència de tall a –3 dB.

e) La freqüència de 10 kHz és 10 vegades la freqüència natural. Avaluant la funció de xarxa a la freqüència de 10 kHz veiem que:

$$H\left(j\omega_0\right)=\frac{k}{-100\omega_0^2+\dfrac{2}{\sqrt{2}}j10\omega_0^2+\omega_0^2}\approx\frac{k}{-100\omega_0^2}=\frac{-1}{100} \quad (127)$$

L'amplificació a la freqüència de 10 kHz és (recordant l'equació 125):

$$\left|H\left(j\omega_0\right)\right|\cong\frac{H(0)}{100} \quad (128)$$

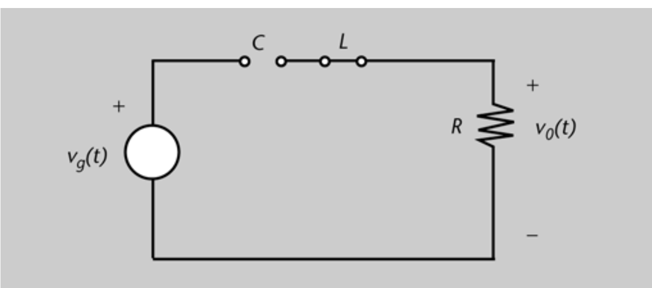
Com que $20\log_{10}100 = 40$, tenim una atenuació de 40 dB respecte a la contínua. És a dir, una atenuació 20 dB major que per al filtre de primer ordre del problema anterior.

f) Veiem que la corba d'amplificació decau molt més ràpid en el filtre de segon ordre, ja que la interferència s'atenua 100 vegades respecte a la contínua en lloc de 10 vegades com succeïa amb el filtre de primer ordre.

Problema 9

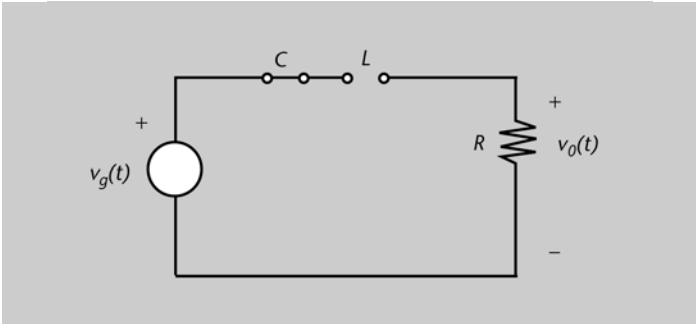
a) A freqüències baixes, la bobina es comporta com un curtcircuit i el condensador com un circuit obert (figura 72). En no circular corrent pel circuit, la tensió que cau en la resistència és 0.

Figura 72. Circuit del problema 9 equivalent a freqüència $\omega = 0$



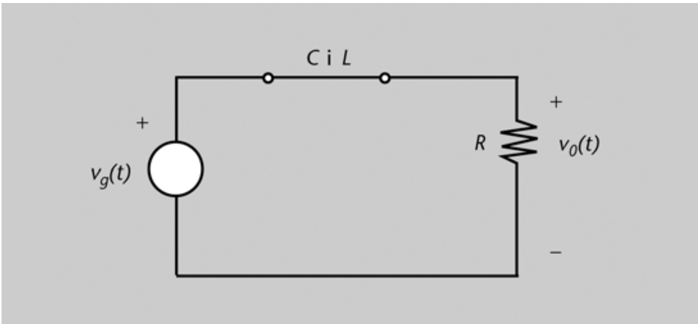
A freqüències altes, la bobina es comporta com un circuit obert i el condensador com un curtcircuit (figura 73). En no circular corrent pel circuit, la tensió que cau en la resistència és 0.

Figura 73. Circuit del problema 9 equivalent a freqüència $\omega \to \infty$



A la freqüència de ressonància, bobina i condensador, els dos conjuntament, es comporten com un curtcircuit (figura 74). La tensió de sortida és igual que la tensió d'entrada.

Figura 74. Circuit del problema 9 equivalent a la freqüència $\omega = 1/\sqrt{LC}$



El circuit no deixa passar les freqüències baixes ni les altes, es tracta d'un filtre passabanda.

b) La funció de xarxa per al circuit considerat és:

$$H(s) = \frac{R}{R + Ls + \dfrac{1}{Cs}} = \frac{RCs}{RCs + LCs^2 + 1} = \frac{\dfrac{R}{L}s}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}} \qquad (129)$$

Veiem que $H(0) = 0$ i que $H(\infty) \to 0$, per la qual cosa el circuit cancel·la la contínua i també les freqüències altes. Es tracta d'un filtre passabanda.

c) $L = 33$ mH, $C = 10$ nF, $R = 1$ kΩ

La freqüència de ressonància és:

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 8{,}76 \text{ kHz} \qquad (130)$$

L'amplada de banda, B_W, en rad/s és el terme que multiplica la s en el denominador de la funció de xarxa. En Hz és:

$$B_W = \frac{1}{2\pi}\frac{R}{L} = 4{,}8 \text{ kHz}$$

El factor de qualitat, Q, és una mesura de la selectivitat d'un filtre, és inversament proporcional al B_W i directament proporcional a la freqüència de ressonància, i és adimensional:

$$Q = \frac{\omega_0}{B_W} = 1{,}82 \tag{131}$$

d) Per a fer el circuit més selectiu sense variar la freqüència de ressonància, hem de disminuir l'amplada de banda. Per a aquesta configuració, l'amplada de banda és R/L, per la qual cosa per a aquest circuit, en concret, podem disminuir l'amplada de banda disminuint el valor de la resistència.

Problema 10

a) El filtre presenta un parell de zeros complexos conjugats a $s = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Com que $H\left(j\frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = 0$, a la freqüència $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ el filtre presenta un zero de transmissió.

b) Si volem cancel·lar la freqüència de 8,76 kHz, hem de fer que:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi 8{,}76 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \tag{132}$$

Si escollim un condensador de 10 nF la bobina ha de valer:

$$L = \frac{1}{10 \cdot 10^{-9}\left(2\pi 8{,}76 \cdot 10^3\right)^2} = 33 \text{ mH} \tag{133}$$

Resum

En aquest tema hem caracteritzat els senyals i els circuits en el domini de la freqüència.

Hem vist que els senyals periòdics es poden escriure com una suma de sinusoides de freqüències múltiples de la freqüència fonamental del senyal periòdic. L'espectre és, doncs, discret, perquè només conté informació a algunes freqüències concretes. En canvi, els senyals no periòdics tenen, en general, un espectre continu que és determinat per la transformada de Fourier del senyal.

En senyals reals, tant periòdics com no periòdics, l'espectre d'amplitud és simètric respecte a la freqüència contínua i el de fase antisimètric. Per aquesta raó se sol treballar únicament amb la informació relativa a les freqüències positives (espectre unilateral).

Tant en l'espectre discret com en el continu, l'espectre de la sortida s'obté multiplicant l'espectre de l'entrada per $H(j\omega)$. D'aquesta manera, l'espectre d'amplitud de la sortida és l'espectre d'amplitud de l'entrada pel mòdul de $H(j\omega)$, conegut com a amplificació del circuit. L'espectre de fase de la sortida és l'espectre de fase de l'entrada més l'argument de $H(j\omega)$, conegut com a desfasament del circuit.

Segons la resposta del circuit a les diferents freqüències, es distingeix entre filtres passabaix, passaalt, passabanda i banda eliminada. Per al filtre passabaix i passabanda es defineix l'amplada de banda com el marge de freqüències que el filtre deixa passar. Al contrari, per al filtre passaalt i banda eliminada, l'amplada de banda es defineix com el marge de freqüències que el filtre no deixa passar.

La frontera entre les freqüències que el filtre deixa o no deixa passar se sol situar en aquella freqüència on la potència lliurada a la càrrega es redueix a la meitat (3 dB) respecte a la potència lliurada a la freqüència de màxima amplificació.

El paràmetre característic dels filtres passabaix i passaalt és la freqüència de tall, que determina l'amplada de banda del filtre. En un primer ordre coincideix amb el valor del pol.

Per a un filtre passabanda, els paràmetres característics són la freqüència de ressonància, que és la freqüència de màxima amplificació, l'amplada de banda i el factor de qualitat del filtre. El factor de qualitat és una mesura de la selectivitat del filtre passabanda, i és inversament proporcional a l'amplada de banda i proporcional a la freqüència de ressonància.

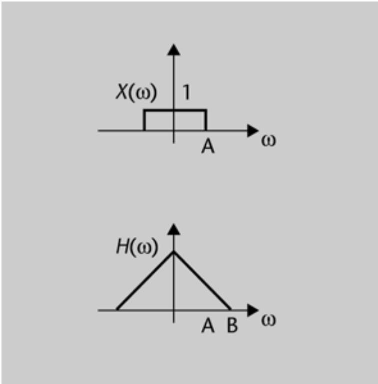
Hem vist també possibles circuits per a implementar filtres passabaix, passaalt, passabanda i banda eliminada. En el cas de filtres passabaix o passaalt és especialment senzill, ja que podem aconseguir-los amb un simple circuit RC o RL. Per a implementar filtres passabanda i banda eliminada, en canvi, l'ordre del circuit ha de ser com a mínim igual que 2.

La introducció de la representació freqüencial dels senyals i el comportament en freqüència dels circuits (filtres) ens ha permès, a més, conèixer alguns detalls del funcionament de l'ADSL, detalls que resulten més fàcils de comprendre des de la perspectiva freqüencial.

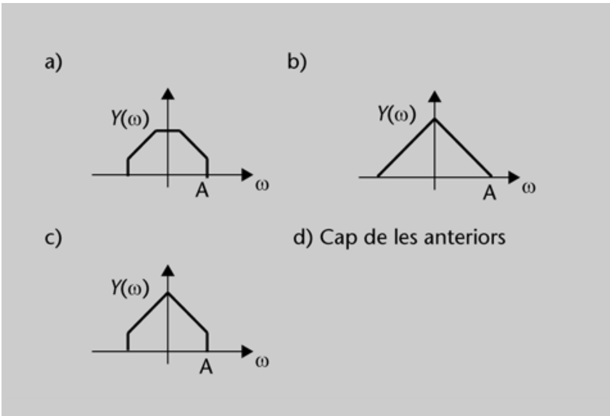
Exercicis d'autoavaluació

1. El senyal $x(t)$ s'aplica a un filtre amb resposta en freqüència $H(j\omega)$, ambdós indicats en la figura següent:

Figura 75. Qüestió d'autoavaluació 1



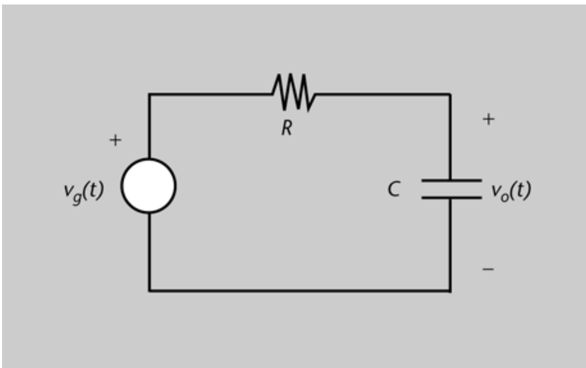
L'espectre del senyal a la sortida del filtre serà:



2. Indiqueu quina de les afirmacions següents és falsa:
a) A partir d'un senyal quadrat podem obtenir un senyal sinusoïdal d'una única freqüència.
b) A partir d'un senyal sinusoïdal d'una única freqüència podem obtenir un senyal quadrat.
c) L'espectre d'amplitud d'un senyal real és simètric respecte a la freqüència contínua.
d) Amb l'eix de freqüències escalat logarítmicament, la corba s'expandeix per a les freqüències baixes i es comprimeix per a les freqüències altes.

3. El circuit de la figura 76, amb R = 1 kΩ i C = 10 nF, correspon a...

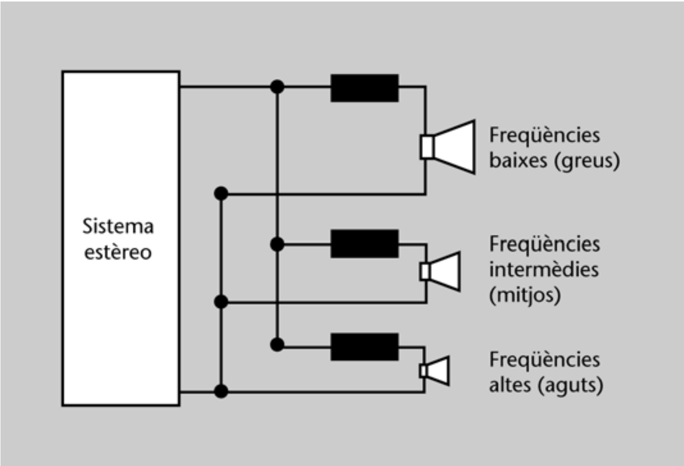
Figura 76. Circuit per a la qüestió d'autoavaluació 3



a) ... un filtre passabaix de freqüència de tall 100 kHz.
b) ... un filtre passabaix de freqüència de tall 15,9 kHz.
c) ... un filtre passaalt de freqüència de tall 100 kHz.
d) ... un filtre passaalt de freqüència de tall 15,9 kHz.

4. Un sistema d'estèreo disposa per a cada canal (dret o esquerre) de tres altaveus: un per a les baixes freqüències (greus), un altre per a les freqüències intermèdies (mitjans) i un altre per a les altes freqüències (aguts), tal com podeu veure en la figura 77. Per a evitar que es malgasti potència, es procura que a cada altaveu només arribin les freqüències per a la reproducció de les quals s'ha dissenyat (observeu que, d'acord amb la figura 77, l'element que es connecta a l'entrada de l'amplificador es connecta en sèrie). Per a aconseguir-ho podem:
a) Connectar un condensador a l'entrada de l'amplificador de greus i una bobina a l'entrada d'aguts.
b) Connectar una bobina a l'entrada de l'amplificador de greus i un condensador a l'entrada de l'amplificador de freqüències intermèdies.
c) Connectar una bobina a l'entrada de l'amplificador de greus i un condensador a l'entrada de l'amplificador d'aguts.
d) Cap de les anteriors.

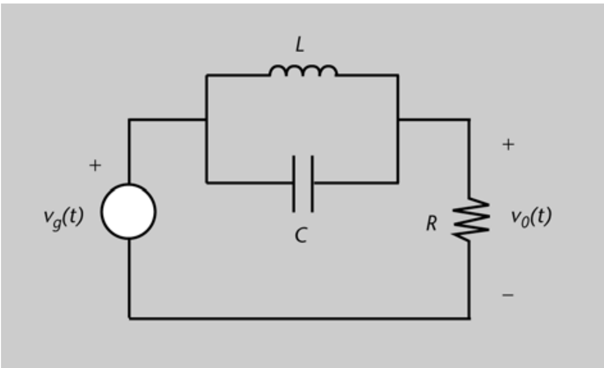
Figura 77. Altaveus per a la qüestió d'autoavaluació 4



5. Quina de les següents funcions de transferència correspon a un filtre passaalt amb freqüència de tall de 100 Hz?
a) $H(s) = 1/\ (s + \alpha)$ amb $\alpha = 2\,\pi 100$.
b) $H(s) = s/(s + \alpha)$ amb $\alpha = 2\,\pi 100$.
c) $H(s) = (s - \alpha)/(s + \alpha)$ amb $\alpha = 2\,\pi 100$.
d) Cap de les anteriors.

6. El circuit de la figura 78...

Figura 78. Circuit per a la qüestió d'autoavaluació 6

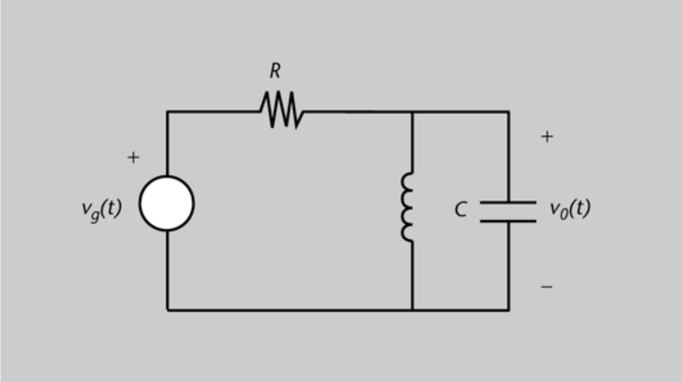


a) ... és un filtre passabaix.
b) ... és un filtre passabanda.
c) ... és un filtre passaalt.
d) ... és un filtre banda eliminada.

7. Per a una entrada: $x(t) = \cos(t) + \sin(2t + \pi/3)$ un filtre *notch* de segon ordre produeix una sortida: $y(t) = A\sin(t + \phi)$. Podem afirmar, per tant, que el seu $H(s)$...
a) ... conté el factor $s^2 + 2$ en el numerador d'$H(s)$.
b) ... conté el factor $s^2 - 2$ en el numerador d'$H(s)$.
c) ... conté el factor $s^2 + 4$ en el numerador d'$H(s)$.
d) ... conté el factor $s^2 - 4$ en el numerador d'$H(s)$.

8. El circuit de la figura 79 és un filtre passabanda:

Figura 79. Filtre passabanda de la qüestió d'autoavaluació 8



L'amplada de banda d'un filtre passabanda de segon ordre coincideix amb el coeficient de la 's' en el denominador. Quin valor de la resistència dóna lloc a un filtre més selectiu?
a) $R = 1$ K.
b) $R = 2$ K.
c) $R = 8$ K.
d) $R = 32$ K.

9. Donades dues potències $P_1 = 1$ W, $P_2 = 50$ W...
a) ... la diferència de nivell de potència és de 17 dB.
b) ... la diferència de nivell de potència és de 20 dB.
c) ... la diferència de nivell de potència és de 23 dB.
d) ... la diferència de nivell de potència és de 34 dB.

10. Les freqüències 100 Hz i 10 kHz, estan separades...
a) ... 10 dècades.
b) ... 2 dècades.
c) ... 1 dècada.
d) ... 100 dècades.

Solucionari

1. c, **2.** b, **3.** b, **4.** c , **5.** b, **6.** d, **7.** c, **8.** a, **9.** a, **10.** b.

Glossari

ADSL *m* Sistema de transmissió utilitzat habitualment en les connexions a Internet. Les sigles corresponen a *asymetric digital subscriber loop* ('bucle d'abonat digital asimètric').

amplada de banda d'un senyal *f* Marge de freqüències dins del qual el senyal té un contingut significatiu.

amplificació *f* Relació entre l'amplitud del senyal de sortida d'un circuit i l'amplitud del senyal d'entrada, per a una freqüència determinada.

anàlisi espectral *f* Descomposició d'un senyal en els seus diferents components freqüencials (sinusoides o exponencials complexes de freqüència diferent).

B *m Vegeu* **bel**.

banda atenuada d'un filtre *f* Banda de freqüències que un filtre atenua per sobre d'un cert valor.

banda passant d'un filtre *f* Banda de freqüències que deixa passar un filtre.

bel *m* Unitat logarítmica bàsica per a expressar relacions de guany o atenuació. 1 bel és equivalent a un guany en potència de 10.
símbol **B**

dB *m Vegeu* **decibel**.

dècada *f* Logaritme en base 10 de la relació entre dues freqüències. Dues freqüències estan separades una dècada quan una és un factor 10 de l'altra.

decibel *m* Unitat pràctica de guany, que equival a la desena part del bel: 1 dB = 0,1 B.
símbol **dB**

desfasament *m* Diferència entre la fase del senyal de sortida d'un circuit i la fase del senyal d'entrada, per a una freqüència determinada.

espectre d'amplitud *m* Representació de l'amplitud de cadascun dels components freqüencials d'un senyal.

espectre de fase *m* Representació de la fase de cadascun dels components freqüencials d'un senyal.

factor de qualitat *m* Mesura habitual per a indicar com de selectiu és un filtre. En un filtre passabanda, el factor de qualitat és la relació entre la freqüència de màxima amplificació i l'amplada de banda del filtre. Per a un filtre banda eliminada és la relació entre la freqüència central de la banda atenuada i l'amplada de banda del filtre.

filtratge *m* Procés pel qual un circuit o sistema modifica el contingut freqüencial d'un senyal d'entrada.

filtre *m* Circuit o sistema capaç de modificar el contingut freqüencial d'un senyal d'entrada.

filtre banda eliminada *m* Circuit que elimina una banda de freqüències intermèdies (freqüències ni molt baixes ni molt altes).

filtre ideal *m* Filtre amb amplificació constant a la banda passant, nul·la en la banda atenuada i transició instantània entre les bandes passants i atenuades.

filtre *notch* *m* Filtre banda eliminada molt selectiu.
sin. **filtre ranura**

filtre passaalt *m* Circuit que deixa passar les freqüències altes i que elimina les freqüències baixes.

filtre passabaix *m* Circuit que deixa passar les freqüències baixes i que elimina les freqüències altes.

filtre passabanda *m* Circuit que deixa passar una banda de freqüències intermèdies (freqüències ni molt baixes ni molt altes).

filtre ranura *m Vegeu* **filtre *notch***.

freqüència de ressonància *f* En el context de filtres, aquella freqüència (diferent de 0 i de ∞) a la qual un filtre presenta amplificació màxima.

freqüència de tall *f* Freqüència que marca la frontera entre les bandes passants i atenuades d'un filtre.

freqüència de tall a –3 dB *f Vegeu* **freqüència de tall de potència meitat**.

freqüència de tall de potència meitat *f* Freqüència per a la qual l'amplificació d'un filtre és la màxima possible entre arrel de 2, cosa que equival a dir que la potència a la sortida és la meitat que la potència màxima que pot lliurar el filtre.
sin. **freqüència de tall a –3 dB**

freqüència fonamental *f* Freqüència d'un senyal periòdic. Mesurada en Hz és directament la inversa del període del senyal periòdic.

freqüència portadora *f* Freqüència, generalment alta, al voltant de la qual es trasllada l'espectre d'un senyal abans de ser transmès per un determinat canal de comunicacions.

harmònic *m* Freqüència múltiple d'una freqüència denominada fonamental.

octava *f* Logaritme en base 2 de la relació entre dues freqüències. Dues freqüències estan separades una octava quan una és el doble de l'altra.

resposta freqüencial *f* Manera com un circuit modifica el contingut freqüencial d'un senyal a la seva entrada.

senyal passabaix *m* Senyal el contingut freqüencial del qual es concentra en freqüències que van des de la freqüència contínua (o freqüències properes com algunes desenes de Hz) fins a una freqüència W, a partir de la qual l'espectre d'amplitud es redueix significativament.

senyal passabanda *m* Senyal el contingut significatiu del qual va des d'una freqüència mínima, significativament major que 0, fins a una altra freqüència màxima.

senyal passabanda de banda estreta *m* Senyal la freqüència central del qual és molt gran comparada amb la seva amplada de banda.

senyal periòdic *m* Senyal que es repeteix cada T segons, on T és el període del senyal.

sèrie de Fourier *f* Suma infinita d'exponencials complexes les freqüències de les quals són harmònics.

Bibliografia

Bertrán E.; Montoro, G. (2000). *Circuitos y Sistemas Lineales. Curso de laboratorio.* Barcelona: Edicions UPC.

Buchala, D. (1993). *Experiments in Basic Circuits. Theory and Application.* McMillan Publishing Company.

Carlson, A. B.; Gisser, D. G. (1990). *Electrical Engineering. Concepts and Applications.* Addison-Wesley Publishing Company.

Franco, S. (1988). *Design with Operacional Amplifiers and Analog Integrated Circuits.* McGraw-Hill International Editions.

Hayt, W. H.; Kemmerly, J. E. (1993). *Engeenering Circuit Analysis.* McGraw-Hill.

Thomas, R. E.; Rosa, A. J. (2000). *Circuitos y señales: introducción a los circuitos lineales y de acoplamiento.* Barcelona: Reverté.

Thomas, R. E.; Rosa, A. J. (2004). *The analysis and design of linear circuits. Laplace early* (4a. ed.). Upper Saddle River, Nova Jersey: John Wiley & Sons.

http://www.zonagratuita.com/a-cursos/internet/TecnologiaADSL.htm