Annexos

Juan Antonio Martínez Carrascal
Olga Muñoz Medina

PID_00161695

Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

Índex

1. Unitats i conversió d'unitats 5
1.1. El sistema internacional d'unitats 5
1.2. La notació científica 6
1.3. Múltiples i submúltiples 7
1.4. Conversió d'unitats 8

2. Lletres gregues 10

3. Revisió de la transformada de Laplace 11
3.1. Propietats 11
3.2. Transformada de Laplace 11
3.3. Transformada inversa de Laplace 12

4. Nombres complexos 16
4.1. Els nombres complexos 16
4.2. Notacions dels nombres complexos 17
4.2.1. Notació cartesiana d'un nombre complex 17
4.2.2. Representació gràfica d'un nombre complex 18
4.2.3. Notació polar d'un nombre complex 20
4.3. Equivalència entre notació cartesiana i notació polar 21
4.3.1. Canvi de notació cartesiana a notació polar 22
4.3.2. Canvi de notació polar a notació cartesiana 23
4.4. Operacions amb nombres complexos 24
4.4.1. Suma (i resta) de nombres complexos 24
4.4.2. Multiplicació de nombres complexos 25
4.4.3. Divisió de nombres complexos 26

1. Unitats i conversió d'unitats

En una activitat tan quotidiana com la compra, sabem que no n'hi ha prou d'anar a la fruiteria i demanar cinc a seques. Cinc què?, ens preguntaran, ja que podrien ser cinc taronges o cinc plàtans. Podríem dir llavors, "de cireres, dóna-me'n cinc", i tornarien a preguntar-nos, cinc què?, perquè podrien ser cinc quilograms, cinc grams o cinc cireres. És a dir, no n'hi ha prou de dir un nombre, és important saber sempre a què correspon aquest nombre, **en quines unitats es mesura**.

Les ciències i les enginyeries no són una excepció a aquesta regla per la qual cosa totes les magnituds (intensitat, resistència, voltatge, etc.) es mesuren en unes unitats determinades.

En el subapartat 1.1 d'aquest annex, recollirem quines són les unitats de les magnituds de física. Posteriorment, en el subapartat 1.2 introduirem la notació científica. En el subapartat 1.3 veurem que es pot treballar amb múltiples i submúltiples d'aquestes unitats per a poder adaptar-les als nombres que tenim. Finalment, en el subapartat 1.4, veurem com es pot passar d'unes unitats a les altres.

1.1. El sistema internacional d'unitats

Si heu vist alguna pel·lícula ambientada en algun país anglosaxó, o si hi heu estat, us haureu adonat que mesuren les distàncies en milles, no en quilòmetres, com nosaltres. La milla i el quilòmetre formen part de diferents sistemes d'unitats: la primera és del sistema anglosaxó, i la segona del sistema internacional (SI). Nosaltres treballarem amb el sistema internacional.

1 milla terrestre equival a 1,609 km.

En el sistema internacional, les **unitats bàsiques** són les que s'indiquen en la taula 1. En la primera columna podeu veure la magnitud, en la segona, el nom de la unitat i en la tercera, el símbol que s'utilitza per a la unitat.

Taula 1. Unitats en el sistema internacional (SI)

Magnitud	Unitat bàsica	Símbol
Longitud	metre	m
Massa	quilogram	kg
Temps	segon	s
Corrent elèctric	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Intensitat lluminosa	candela	cd

Els símbols escrits en majúscules (A, K, etc.) deuen el seu nom a algun personatge important.

Per unitats bàsiques s'entenen aquelles a partir de les quals es poden obtenir les de la resta de magnituds, i aquestes són les que s'anomenen **unitats derivades**. Per aquest motiu s'utilitzen les fórmules que relacionen les unes amb les altres, com la llei d'Ohm, que ja hem vist. En la taula 2 podeu veure les unitats derivades. En la primera columna, la magnitud a què corresponen, en la segona, el nom de la unitat, en la tercera, el seu símbol, i en la quarta, la fórmula que mostra la relació amb les unitats bàsiques o amb les unitats derivades, la relació de les quals amb les primeres ja s'ha mostrat.

Taula 2. Unitats derivades en el SI

Magnitud	Unitat	Símbol	Fórmula
Freqüència	hertz	Hz	s^{-1}
Força	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Energia o treball	joule	J	N·m
Potència	watt	W	J/s
Càrrega elèctrica	coulomb	C	A·s
Potencial elèctric	volt	V	J/C
Resistència elèctrica	ohm	Ω	V/A
Conductància elèctrica	siemens	S	A/V
Capacitància elèctrica	farad	F	C/V
Flux magnètic	weber	Wb	V·s
Inductància	henry	H	Wb/A

La notació exponent negatiu és equivalent a dividir per la base elevada a l'exponent, és a dir: $x^{-2} = 1/x^2$.

1.2. La notació científica

Una taula pot mesurar 2 m (dos metres), la distància entre dos pobles pot ser de 5.000 m (cinc mil metres), i la longitud d'una formiga pot ser 0,005 m.

Com podeu veure, si mesurem coses molt grans ens veurem obligats a utilitzar molts zeros; en canvi, en el cas de mesurar coses molt petites, haurem de posar molts zeros després de la coma, cosa que pot conduir a error i és tediós d'escriure. Seria molt còmode poder disposar d'un sistema de representació més compacte. Aquest sistema existeix i es coneix com a notació científica.

La notació científica consisteix a escriure els nombres en potències de 10. En la taula 3 podeu veure una identificació de diversos nombres en potències de 10. Així, els nombres que hem escrit abans en notació científica seran: $5.000 = 5 \cdot 10^3$ i $0{,}005 = 5 \cdot 10^{-3}$, que és una notació molt més compacta. La potència 10^0 no s'utilitza perquè el seu valor és 1.

Taula 3. Escriptura en potències de 10 d'alguns valors numèrics

Valor	Potència de 10
0,000001	$1 \cdot 10^{-6}$
0,00001	$1 \cdot 10^{-5}$
0,0001	$1 \cdot 10^{-4}$
0,001	$1 \cdot 10^{-3}$
0,01	$1 \cdot 10^{-2}$
0,1	$1 \cdot 10^{-1}$
1	$1 \cdot 10^{0}$
10	$1 \cdot 10^{1}$
100	$1 \cdot 10^{2}$
1.000	$1 \cdot 10^{3}$
10.000	$1 \cdot 10^{4}$
100.000	$1 \cdot 10^{5}$
1.000.000	$1 \cdot 10^{6}$

1.3. Múltiples i submúltiples

Cadascuna de les unitats que heu vist en el subapartat 1.1, tant les bàsiques (taula 1) com les derivades (taula 2), tenen el que s'anomena múltiples i submúltiples. Per exemple, la unitat de resistència és l'ohm (Ω), però es fan servir sovint els quiloohms (kΩ o K).

Per què són útils aquests múltiples i submúltiples? Perquè així podem "adaptar" les unitats als nombres amb què estem treballant. De fet, això ja ho fem en la nostra vida quotidiana, penseu si no que diem que dos municipis disten vint quilòmetres (20 km) i no vint mil metres ($2 \cdot 10^4$ m). En aquest cas, utilitzem el múltiple *quilo*, que equival a 1.000 m. En la taula 4 podeu veure un llistat dels múltiples i submúltiples. En la primera columna s'indica el nom, en la segona, el símbol, i en la tercera, la potència de 10 a què correspon.

Fixeu-vos que la unitat bàsica de massa en el sistema internacional no és el gram, sinó el quilogram.

Taula 4. Múltiples i submúltiples

Prefix	Símbol	Potència
Femto	f	$1 \cdot 10^{-15}$
Pico	p	$1 \cdot 10^{-12}$
Nano	n	$1 \cdot 10^{-9}$
Micro	μ (lletra mu)	$1 \cdot 10^{-6}$
Mil·li	m	$1 \cdot 10^{-3}$
Centi	c	$1 \cdot 10^{-2}$
Deci	d	$1 \cdot 10^{-1}$
Deca	da	$1 \cdot 10^{1}$
Hecto	h	$1 \cdot 10^{2}$
Quilo	k	$1 \cdot 10^{3}$
Mega	M	$1 \cdot 10^{6}$
Giga	G	$1 \cdot 10^{9}$
Tera	T	$1 \cdot 10^{12}$

Ús de múltiples i submúltiples

Els múltiples i submúltiples s'escriuen davant de la unitat. Així, parlem de *quilòmetres* per a dir que utilitzem la unitat *metre* amb el múltiple *quilo*. Amb els símbols fem el mateix, així, tenint en compte que el símbol de quilo és k i el símbol de metre és m, el símbol de quilòmetre és km. Per això podem dir que actuen com a prefixos.

Cal tenir en compte que en el cas d'unitats elevades a alguna potència, aquests factors de conversió també s'eleven a la potència. Així, per exemple, en el cas de metres quadrats (m^2) s'elevarien al quadrat les potències indicades en la taula 4, i en el cas de metre cúbics (m^3), s'elevarien al cub. En la taula 5 podeu veure l'equivalència entre 1 m^2 i alguns dels seus múltiples i submúltiples; en la taula 6 podeu veure el mateix, però amb el metre cúbic.

Taula 5. Equivalència d'alguns dels múltiples i submúltiples del metre quadrat (m^2)

Unitat	1 m^2
mm^2	$1 \cdot 10^{-6}$
cm^2	$1 \cdot 10^{-4}$
dm^2	$1 \cdot 10^{-2}$
dam^2	$1 \cdot 10^{2}$
hm^2	$1 \cdot 10^{4}$
km^2	$1 \cdot 10^{6}$

Taula 6. Equivalència d'alguns dels múltiples i submúltiples del metre cúbic (m^3)

Unitat	1 m^3
mm^2	$1 \cdot 10^{-9}$
cm^2	$1 \cdot 10^{-6}$
dm^2	$1 \cdot 10^{-3}$
dam^2	$1 \cdot 10^{3}$
hm^2	$1 \cdot 10^{6}$
km^2	$1 \cdot 10^{9}$

1.4. Conversió d'unitats

Un tema fonamental és treballar sempre en el mateix sistema d'unitats. No té sentit sumar metres i quilòmetres. Per això, quan feu un problema heu d'anar molt amb compte de transformar les unitats adequadament.

La manera de fer-ho és multiplicar el nombre per una fracció. En el cas que les unitats estiguin en el numerador (per exemple, en el cas de km/h, i vulguem transformar els quilòmetres a metres), en el numerador posem les unitats "a les quals volem arribar" i en el denominador, les que volem transformar, i escrivim l'equivalència entre elles. Així, tenint en compte que 1 km són 10^3 m, la fracció per a transformar quilòmetres en metres és:

$$\frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} \qquad (1)$$

En el cas que les unitats estiguin en el denominador (per exemple, si volem transformar les hores en segons en els km/h), en el denominador posem les unitats "a les quals volem arribar" i en el numerador, les unitats que volem transformar, i escrivim l'equivalència entre elles. Així, tenint en compte que 1 h són 3.600 segons, la fracció per a transformar les hores en segons seria:

$$\frac{1\ \text{h}}{3.600\ \text{s}} \qquad (2)$$

A continuació, veurem alguns exemples on podeu veure com s'opera.

Exemple 1

Passeu 0,03 kΩ a Ω.

$$0{,}03\ \text{k}\Omega = 0{,}03\ \cancel{\text{k}\Omega} \cdot \frac{10^3\ \Omega}{1\ \cancel{\text{k}\Omega}} = 30\ \Omega \qquad (3)$$

Noteu que com que les unitats que volem transformar (kΩ) són en el numerador i el denominador, se simplifiquen, i queden només les que volem obtenir.

Exemple 2

Passeu 30.000 mA a A.

$$30.000\ \text{mA} = 30.000\ \cancel{\text{mA}} \cdot \frac{1\ \text{A}}{10^3\ \cancel{\text{mA}}} = 30\ \text{A} \qquad (4)$$

Noteu que com que les unitats que volem transformar (mA) són en el numerador i el denominador, se simplifiquen, i queden només les que volem obtenir.

Exemple 3

Passeu 15 km/h a m/segon, tenint en compte que 1 hora són 3.600 segons.

$$15\ \text{km/h} = 15\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{10^3\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3{,}6 \cdot 10^3\ \text{s}} = 4{,}17\ \text{m/s} \qquad (5)$$

Noteu que les unitats que volem transformar estan posades en el numerador o el denominador perquè es puguin transformar. Fixeu-vos també que hem escrit 3.600 en notació científica, com hem mostrat en el subapartat 1.2.

2. Lletres gregues

És molt comú utilitzar en ciència i enginyeria lletres gregues per a referir-se a diverses magnituds. Per això en aquest apartat incloem un resum de les lletres gregues, tant en majúscula com en minúscula, amb els seus respectius noms.

Taula 7. Lletres gregues

Nom	**Símbol**		**Nom**	**Símbol**	
	Minúscula	**Majúscula**		**Minúscula**	**Majúscula**
Alfa	α	A	Ni	ν	N
Beta	β	B	Ksi	ξ	Ξ
Gamma	γ	Γ	Òmicron	o	O
Delta	δ	Δ	Pi	π	Π
Èpsilon	ε	E	Rho	ρ	P
Zeta	ζ	Z	Sigma	σ, ς	Σ
Eta	η	H	Tau	τ	T
Theta	θ,ϑ	Θ	Ípsilon	υ	Υ
Iota	ι	I	Fi	ϕ,φ	Φ
Kappa	κ	K	Khi	χ	X
Lambda	λ	Λ	Psi	ψ	Ψ
Mi	μ	M	Omega	ω	Ω

Les lletres mi, ni i ípsilon se solen anomenar amb el seu nom en anglès: *mu*, *nu* i *upsilon*, respectivament.

3. Revisió de la transformada de Laplace

En aquest annex s'inclouen les qüestions bàsiques sobre la transformada de Laplace que s'utilitzen en aquesta assignatura.

La transformada de Laplace d'una funció $f(t)$ es defineix com la integral de 0 a infinit de la funció $f(t)$ multiplicada per l'exponencial e^{-st} (llegiu-hi '*e* elevat a menys *s t*'):

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \tag{6}$$

on s és la variable complexa de part real σ (sigma) i part imaginària ω (omega):

$$s = \sigma + j\omega \tag{7}$$

Es considera $f(t) = 0$ per a $t < 0$.

3.1. Propietats

La transformada de Laplace compleix les propietats següents:

Unicitat	$f(t) \leftrightarrow F(s)$	(8)
Linealitat	$af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(s) + bF_2(s)$	(9)
Desplaçament temporal	$f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} F(s) \quad t_0 > 0$	(10)
Diferenciació	$\frac{d}{dt} f(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$	(11)
Integració	$\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} F(s)$	(12)
Teorema del valor final	$\lim_{t \to \infty} f(t) \leftrightarrow \lim_{s \to 0} sF(s)$	(13)
Teorema del valor inicial	$\lim_{t \to 0^+} f(t) \leftrightarrow \lim_{s \to \infty} sF(s)$	(14)

3.2. Transformada de Laplace

Alguns parells de transformades comunes són les següents:

Taula 8. Transformades de Laplace més habituals

$f(t)$	$F(s)$	
$\delta(t)$	1	(15)
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	(16)

$f(t)$	$F(s)$	
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	(17)
$e^{j\omega_0 t}u(t)$	$\frac{1}{s-j\omega_0}$	(18)
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	(19)
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	(20)
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	(21)
$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	(22)
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	(23)
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	(24)

3.3. Transformada inversa de Laplace

A continuació, recordarem com obtenir la transformada inversa de Laplace mitjançant el seu desenvolupament en fraccions parcials.

Normalment, la funció $F(s)$ la transformada inversa de la qual hem de calcular serà un quocient de polinomis en s:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{25}$$

on $N(s)$ denota el polinomi en s del numerador i $D(s)$ denota el polinomi en s del denominador.

Per a trobar l'expressió de la inversa $f(t)$, s'han de distingir dues situacions:

a) Si el grau del numerador $N(s)$ és major que el grau del denominador $D(s)$, es divideix fins a obtenir un polinomi en s, $Q(s)$, més un reste $R(s)$:

$$F(s) = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)} \tag{26}$$

La transformada inversa de $Q(s)$ es pot obtenir directament i la del terme $R(s)/D(s)$ s'obté tal com s'indica a continuació per al cas *b*.

b) Si el grau del numerador $N(s)$ és menor que el grau del denominador $D(s)$ obtindrem les arrels del denominador (aquells valors de s que el fan zero): $-s_k$, i descompondrem $D(s)$ d'acord amb aquestes arrels. Aquestes poden ser totes diferents (bé sigui reals o complexes) o hi pot haver arrels múltiples. Recordarem com treballar quan totes les arrels siguin diferents, que és el cas habitual.

Quan les arrels són totes diferents el polinomi del denominador, *D(s)*, es pot escriure com s'indica a continuació:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\ldots(s+s_n)} \tag{27}$$

Podem descompondre la funció en fraccions parcials de la manera següent:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{A_1}{(s+s_1)} + \frac{A_2}{(s+s_2)} + \ldots + \frac{A_n}{(s+s_n)} \tag{28}$$

La constant A_k (residu en l'arrel $-s_k$) es calcula multiplicant la funció que s'ha de transformar, *F(s)*, pel denominador de la fracció parcial per a la qual estem calculant el residu, és a dir, per $(s + s_k)$. El resultat de la multiplicació es particularitza per a s igual que l'arrel, és a dir $s = -s_k$:

$$A_k = F(s)(s+s_k)\Big|_{s=-s_k} \tag{29}$$

La transformada inversa de Laplace de *F(s)* és:

$$f(t) = \left(A_1 e^{-s_1 t} + A_2 e^{-s_2 t} + \ldots + A_n e^{-s_n t}\right) u(t) \tag{30}$$

Si apareixen arrels complexes, aquestes apareixen en parells conjugats, ja que els coeficients del denominador *D(s)* són sempre reals per a qualsevol circuit (també ho són els del numerador *N(s)*). Els residus corresponents a dues arrels complexes conjugades també seran l'un el conjugat de l'altre, per tant, només cal calcular-ne un.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\ldots(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)\ldots} = \ldots \frac{A}{(s+\alpha-j\beta)} + \frac{A^*}{(s+\alpha+j\beta)} + \ldots \tag{31}$$

A l'annex 4 trobareu una explicació detallada dels nombres complexos.

La transformada inversa dels dos termes corresponents a la parella de pols complexos conjugats és:

$$\left(Ae^{(-\alpha+j\beta)t} + A^* e^{(-\alpha-j\beta)t}\right) u(t) \tag{32}$$

Expressant el residu A en funció del seu mòdul ($|A|$) i argument ($\angle A$): $A = |A| e^{j\angle A}$, podem escriure l'expressió anterior de la manera següent:

$$\begin{aligned}&\left(Ae^{(-\alpha + j\beta)t} + A^{*}e^{(-\alpha - j\beta)t} \right) u(t) = \\ &= \left(|A| e^{j\angle A} e^{(-\alpha + j\beta)t} + |A| e^{-j\angle A} e^{(-\alpha - j\beta)t} \right)\end{aligned} \tag{33}$$

I si agrupem termes podem escriure aquesta expressió com a:

$$|A| e^{-\alpha t} \left(e^{j(\beta t + \angle A)} + e^{-j(\beta t + \angle A)} \right) u(t) = 2|A| e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \angle A) u(t) \tag{34}$$

Exemple 4

Calculeu la transformada inversa de Laplace de la següent funció:

$$F(s) = \frac{s + 350}{s^2 + 200s + 5 \cdot 10^4} \tag{35}$$

Solució

Per a trobar la transformada inversa de Laplace, primer hem de calcular les arrels del denominador:

$$s = \frac{-200 \pm \sqrt{200^2 - 4 \cdot 5 \cdot 10^4}}{2} = \frac{-200 \pm \sqrt{-16 \cdot 10^4}}{2} \tag{36}$$

Aquesta equació té dues solucions per a s:

$$s_1 = -100 + j200 \; ; \; s_2 = -100 - j200 \tag{37}$$

A partir d'aquests valors, ja podem deduir que la transformada inversa de Laplace serà una exponencial d'exponent $-100t$ multiplicat per una sinusoide de pulsació 200. El que ens falta trobar és l'amplitud que tindrà aquesta transformada inversa i la fase inicial de la sinusoide. Per trobar-los, continuem amb la resolució. Amb el que hem obtingut fins ara, podem escriure:

$$\frac{s + 350}{s^2 + 200s + 5 \cdot 10^4} = \frac{A}{s - (-100 + 200j)} + \frac{A^{*}}{s - (-100 - 200j)} \tag{38}$$

Calculem el valor de A:

$$A = \frac{s + 350}{s^2 + 200s + 5 \cdot 10^4} \left(s - (-100 + 200j) \right) \Big|_{s = -100 + 200j} \tag{39}$$

$$A = \frac{s + 350}{s + 100 + 200j} \Big|_{s = -100 + 200j} = \frac{-100 + 200j + 350}{-100 + 200j + 100 + 200j} \tag{40}$$

$$A = \frac{250 + 200j}{400j} = \frac{200j}{400j} + \frac{250}{400j} = 0{,}5 - j0{,}625 = 0{,}8 \cdot e^{-j0{,}896} \tag{41}$$

Hem passat el resultat a notació fasorial perquè així podem obtenir directament la transformada inversa:

$$f(t) = 2|A| e^{\alpha t} \cos(\beta t + < A) = 1{,}6 e^{-100t} \cos(200t - 0{,}986) \tag{42}$$

Apart d'aquest, hi ha un mètode alternatiu per a trobar el valor d'A. Cal partir de la fórmula 38, i desenvolupem la suma de fracciona a què hem arribat:

$$\frac{s+350}{s^2+200s+5\cdot 10^4}=\frac{A\left(s+100+200j\right)+A^*\left(s+100-200j\right)}{s^2+200s+5\cdot 10^4} \tag{43}$$

$$\frac{s+350}{s^2+200s+5\cdot 10^4}=\frac{\left(A+A^*\right)s+A\left(100+200j\right)+A^*\left(100-200j\right)}{s^2+200s+5\cdot 10^4} \tag{44}$$

En aquesta última fórmula, ens fixem únicament en els numeradors, perquè els denominadors són iguals. Tot el que en el numerador de la segona fracció està multiplicant a s, ha de ser igual al que està multiplicant a s en la primera fracció. Passa el mateix amb el que no té cap s. O sigui, que:

$$1 = A + A^* \tag{45}$$
$$350 = A(\ 100 + 200j\ ) + A^*(\ 100 - 200j\ ) \tag{46}$$

A més, cal tenir en compte que A i A^* són nombres complexos conjugats, de manera que els podem descompondre en la seva part real i imaginària:

$$A = x + jy \tag{47}$$
$$A^* = x - jy \tag{48}$$

Substituïm aquests dos valors a les fórmules 45 i 46 per obtenir el valor d'A:

$$1 = x + jy + x - jy = 2x \Rightarrow x = 0{,}5 \tag{49}$$
$$350 = 100x + j100y + j200x - 200y + 100x - j100y - j200x - 200y \tag{50}$$
$$350 = 200x - j400y = 100 - j400y \tag{51}$$

$$y=\frac{100-350}{j400}=-j\frac{250}{400}=-j0{,}625 \tag{52}$$

A partir dels valors obtinguts per a x i y, el valor d'A és:

$$A = 0{,}5 - j0{,}625 = 0{,}8 \cdot e^{-j0{,}986} \tag{53}$$

És a dir, obtenim el mateix valor per a A que a la fórmula 41 amb l'altre mètode. Per tant, també arribarem a la mateixa funció en el domini temporal a què havíem arribat a la fórmula 42.

4. Nombres complexos

Per a l'anàlisi de circuits electrònics s'utilitzen de forma habitual els nombres complexos, sobretot quan s'analitzen els circuits en el domini de Laplace i en el domini transformat fasorial. En aquest annex es farà una introducció als nombres complexos, centrant aquesta explicació en la part que és necessària per a l'estudi de circuits electrònics.

En el subapartat 4.1 d'aquest annex veurem les nocions bàsiques dels nombres complexos i la necessitat de la seva definició. En el subapartat 4.2 explicarem les diferents notacions amb què podem representar els nombres complexos (notació cartesiana i polar) i com es representen gràficament en el pla complex. En el subapartat 4.3 veurem com es poden calcular matemàticament les equivalències entre les diferents notacions dels nombres complexos. Per últim, al subapartat 4.4 veurem com es realitzen les operacions bàsiques amb nombres complexos.

4.1. Els nombres complexos

En el domini dels nombres reals, hi ha la limitació que no es pot calcular l'arrel quadrada d'un nombre negatiu. És a dir, no existeix solució per a la següent equació:

$$x = \sqrt{-9} \tag{54}$$

En canvi, en el domini dels nombres complexos, s'introdueix la constant *j* (en alguns textos apareix la constant com a *i*) que es defineix com a l'arrel quadrada de –1. Dit d'altra manera, *j* elevat al quadrat val –1:

$$j = \sqrt{-1} \tag{55}$$

$$j^2 = -1 \tag{56}$$

D'aquesta manera, el càlcul de la fórmula 54 sí que té solució vàlida en els nombres complexos, que seria:

$$x = \sqrt{-9} = \sqrt{(-1)\cdot 9} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{9} = j\cdot 3 \rightarrow x = 3j \tag{57}$$

Els nombres complexos tenen generalment dos components, la part real (que no depèn de *j*) i la part imaginària (que depèn de *j*). Els nombres complexos que només tenen part real són directament el conjunt dels nombres reals. És a dir, els nombres reals són un subconjunt dels nombres complexos.

Els nombres complexos que només tenen component imaginari s'anomenen imaginaris purs.

4.2. Notacions dels nombres complexos

Un mateix nombre complex es pot escriure de diferents maneres. És el que s'anomenen les notacions dels nombres complexes. En el subapartat 4.2.1 veurem la notació més directa a partir de la definició del nombre *j*, la notació cartesiana. En el subapartat 4.2.2 veurem com es representa gràficament un nombre complex. Per últim, en el subapartat 4.2.3 explicarem la notació polar.

4.2.1. Notació cartesiana d'un nombre complex

Aquesta notació és la més intuïtiva en un nombre complex. En aquesta, s'escriu directament el nombre complex com la suma del component real del nombre més *j* multiplicat per la part imaginària. És a dir:

$$A = a + jb \tag{58}$$

On a és la part real del nombre i b és la part imaginària. Escriurem matemàticament aquesta "part real" i "part imaginària" com a:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{A\} &= a \\ \mathrm{Im}\{A\} &= b \end{aligned} \tag{59}$$

Veurem d'on surten aquests nombres d'un exemple molt típic a partir del qual ens pot sortir un nombre imaginari.

Exemple 6

Calculeu el valor de x en la següent equació de segon grau:

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \tag{60}$$

Solució

Comencem la resolució:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \tag{61}$$

En aquest punt, si ens emmarquem en el domini dels nombres reals, no podríem trobar solució a l'equació, perquè no podem calcular l'arrel quadrada d'un nombre negatiu. En els nombres complexos, en canvi, podem continuar:

$$x = \frac{-2 \pm j\sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4j}{2} = 1 \pm 2j \tag{62}$$

En aquest cas, com en totes les equacions de segon grau, tenim dues solucions:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2j \\ x_2 &= 1 - 2j \end{aligned} \tag{63}$$

D’aquest resultat també podem extreure una definició important:

Nombres complexos conjugats: Dos nombres complexos són conjugats si tenen la mateixa part real, i la part imaginària té el mateix valor, però de signe contrari. Per mostrar que un nombre és el conjugat d’un altre, ho escriurem de la següent manera:

$$x_2 = x_1^* \tag{64}$$

Una característica molt important, i que tornarem a veure més endavant és que el resultat de multiplicar un nombre pel seu complex conjugat és un nombre real pur.

4.2.2. Representació gràfica d’un nombre complex

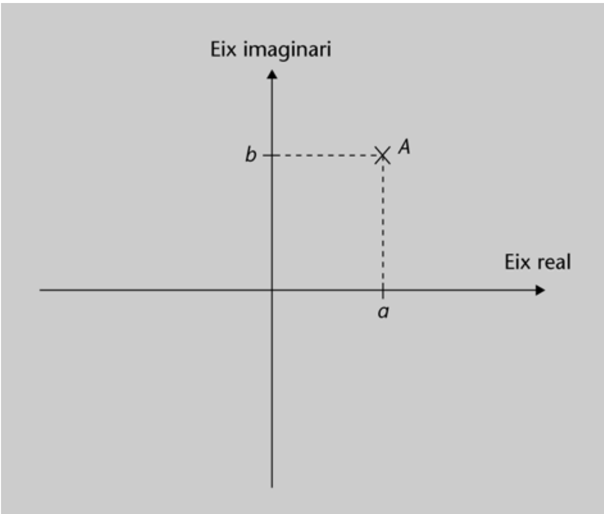
Els nombres complexos es poden representar gràficament en uns eixos de coordenades (el pla complex). En aquest pla, l’eix d’abcises (l’horitzontal) s’identifica amb la part real del nombre complex, i l’eix d’ordenades (el vertical) conté la part imaginària del nombre complex.

En el pla complex, un nombre real (que no té part imaginària) està representat directament sobre l’eix real, i un nombre imaginari pur (no té part real) està directament sobre l’eix imaginari. És a dir, un nombre complex genèric:

$$A = a + jb \tag{65}$$

es representaria en el pla complex de la següent manera:

Figura 1. Representació gràfica d'un nombre complex



Veurem la representació gràfica de nombres complexos en el següent exemple.

Exemple 7

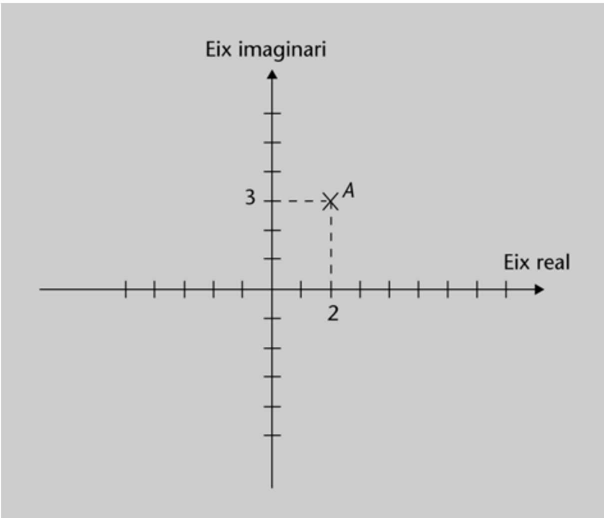
Representeu gràficament en el pla complex els següents nombres:

$$\begin{aligned}
&A = 2 + 3j \\
&B = -3 + 5j \\
&C = 2 - 4j \\
&D = -2 - 3j \\
&E = 5 \text{ (nombre real pur)} \\
&F = -3j \text{ (nombre imaginari pur)} \\
&G = 4 + 3j \\
&H = 4 - 3j = G^{*}
\end{aligned} \tag{66}$$

Solució

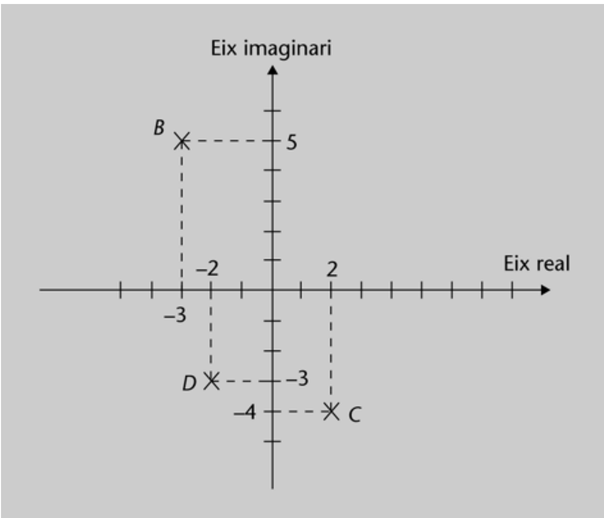
Primer, representarem només el nombre A:

Figura 2. Representació gràfica del nombre *A* de l'exemple 7



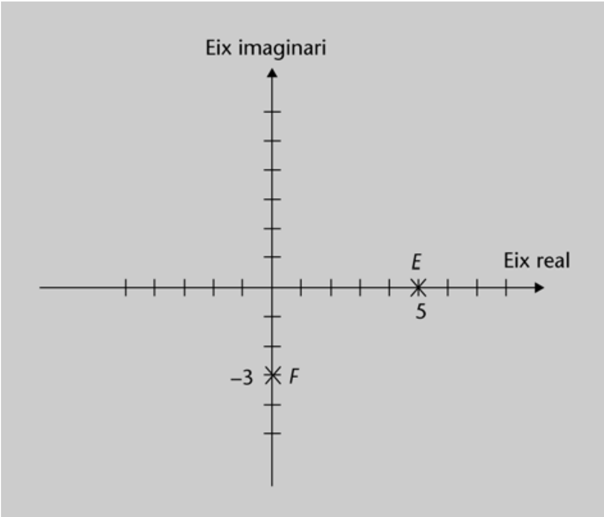
A la figura 3, representarem els nombres B, C i D.

Figura 3. Representació gràfica dels nombres *B*, *C* i *D* de l'exemple 7



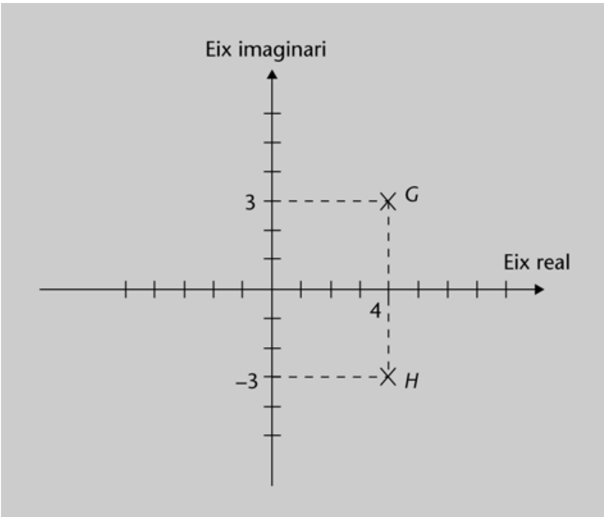
A la figura 4 representarem E i F (nombre real i nombre imaginari pur, respectivament).

Figura 4. Representació gràfica d'*E* (nombre real) i *F* (nombre imaginari pur)



Per últim, representem G i H (que és el complex conjugat de G).

Figura 5. Representació gràfica del nombre *G* i el seu complex conjugat (*H*)



4.2.3. Notació polar d'un nombre complex

A partir de la representació gràfica d'un nombre complex, també podem escriure'l de la forma següent:

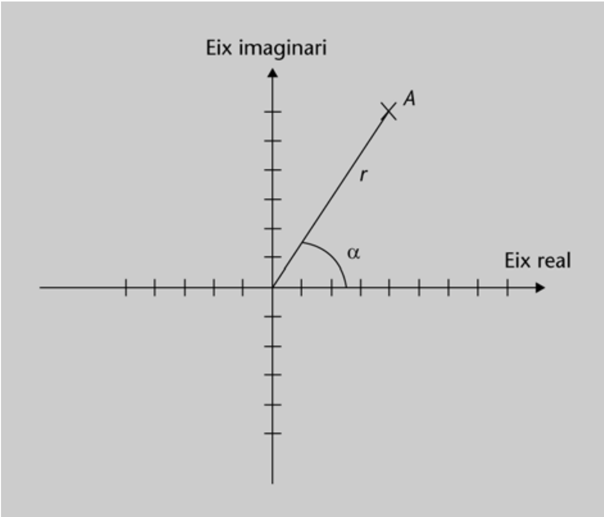
$$r \cdot e^{j\alpha} \tag{67}$$

A aquesta representació dels nombres complexos se l'anomena **notació polar**. En aquest cas, r és el mòdul del nombre complex (o la distància entre el punt i l'origen de coordenades) i α és la fase, o l'angle que forma aquest punt amb l'eix de coordenades. És a dir, si tenim un nombre complex genèric (expressat en notació polar):

$$A = r \cdot e^{j\alpha} \tag{68}$$

La seva representació en el pla complex serà:

Figura 6. Representació al pla complex d'un nombre en notació polar



En molts casos, el mòdul d'un nombre complex A s'escriu $|A|$ i la fase s'escriu $<A$.

En notació polar, el conjugat d'un nombre complex és aquell que té el mateix mòdul, i la fase igual, però de signe contrari.

Per norma general, la fase es representa en radiants. Però també es pot indicar la fase en graus sempre i quan s'indiqui el signe de grau (°) amb el valor numèric. És a dir, el nombre complex A de mòdul 5 i fase $\pi/4$ rad (45°), s'ha d'escriure de la següent manera:

$$A = 5 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = 5 \cdot e^{j45^\circ} \qquad (69)$$

En un nombre real, la fase és de 0 rad (o π rad si el nombre és negatiu). En un nombre imaginari pur, la fase és de $\pi/2$ rad (o $3\pi/2$ rad si és un imaginari pur negatiu).

Per transformar un angle entre graus i radiants, es pot utilitzar l'equivalència següent:

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ \rightarrow \alpha_{\text{rad}} = \alpha^\circ \frac{\pi}{180} \rightarrow \alpha^\circ = \alpha_{\text{rad}} \frac{180}{\pi} \qquad (70)$$

4.3. Equivalència entre notació cartesiana i notació polar

Molts cops ens interessarà passar un nombre complex que tenim escrit en forma cartesiana a notació polar, o a l'inrevés. Per posar un exemple, algunes operacions són més senzilles de realitzar en notació polar i d'altres, en notació cartesiana. En el subapartat 4.3.1 veurem com es transforma a notació polar un nombre que està expressat en notació cartesiana. En el subapartat 4.3.2 explicarem el canvi invers. És a dir, com passar de notació polar a cartesiana.

4.3.1. Canvi de notació cartesiana a notació polar

Suposem que tenim un nombre complex escrit en notació cartesiana:

$$A = a + jb \tag{71}$$

Podem obtenir la seva equivalència en notació polar de la següent manera:

$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{72}$$

$$< A = \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \tag{73}$$

Respecte d'aquestes equivalències, només hem de tenir en compte un detall. Quan calculem la fase $<A$, el resultat serà un angle entre $-\pi/2$ i $\pi/2$. En canvi un nombre complex pot tenir una fase en tot l'espectre de 2π. Per acabar de fer la conversió correcta, si la part real del nostre nombre en notació cartesiana era positiva, la fase obtinguda és correcta. Si la part real del nostre nombre en notació cartesiana era negativa, la fase correcta ($<A'$) del nombre complex serà:

$$<A' = \pi + <A \tag{74}$$

Amb aquesta fórmula, trobarem un angle entre $-\pi/2$ i $3\pi/2$ (és a dir, mirant tota la "volta" de 2π).

Exemple 9

Passar a notació polar els següents nombres complexos:

a) $A = 3 + j4$
b) $B = 3 - j4$
c) $C = -3 + j4$

Solució

a) Calculem el mòdul i la fase d'aquest nombre complex:

$$\begin{aligned} |A| &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \\ < A &= \text{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) = 0{,}93 \text{ rad} \end{aligned} \tag{75}$$

Com que la part real d'A és 3 (positiu), el nombre A en notació polar serà:

$$A = 5 \cdot e^{j0{,}93} \tag{76}$$

b) Observem que aquest nombre és el complex conjugat del nombre de l'apartat a).

$$\begin{aligned} |B| &= \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \\ < B &= \text{arctg}\left(\frac{(-4)}{3}\right) = -0{,}93 \text{ rad} \end{aligned} \tag{77}$$

Com que la part real de B ($\mathrm{Re}\{B\} = 3$) és positiva, l'angle trobat és correcte. Amb aquest exemple, podem comprovar que un nombre complex i el seu conjugat, en notació polar, tenen el mateix mòdul, i fase amb sentit contrari:

$$B = A^* = 5 \cdot e^{-j0,93} \tag{78}$$

c) Realitzem els càlculs de mòdul i fase

$$\begin{aligned} |C| &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \\ < C &= \mathrm{arctg}\left(\frac{4}{(-3)}\right) = -0,93 \text{ rad} \end{aligned} \tag{79}$$

Com que la part real de C és negativa ($\mathrm{Re}\{C\} = -3$), llavors la fase correcta del nombre C és:

$$<C = \pi + (-0,93) = 2,21 \text{ rad} \tag{80}$$

I, escrit en forma polar:

$$C = 5 \cdot e^{j2,21} \tag{81}$$

4.3.2. Canvi de notació polar a notació cartesiana

Per passar un nombre complex de forma polar a forma cartesiana, s'utilitza la **fórmula d'Euler**:

$$A = |A| \cdot e^{j<A} = |A| \cdot (\cos(<A) + j\sin(<A)) = |A|\cos(<A) + j \cdot |A|\sin(<A) \tag{82}$$

Si ho separem per components, tenim:

$$\mathrm{Re}\{A\} = |A| \cdot \cos(<A) \tag{83}$$

$$\mathrm{Im}\{A\} = |A| \cdot \sin(<A) \tag{84}$$

Sobretot, heu de tenir en compte de posar la fase ($<A$) amb el signe corresponent.

Exemple 10

Passeu a notació cartesiana els següents nombres complexos.

a) $A = 4 \cdot e^{j\pi/3}$

Per a passar un nombre complex de notació polar a notació cartesiana, s'ha d'aplicar directament la fórmula d'Euler:

$$\mathrm{Re}\{A\} = 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot 0,5 = 2 \tag{85}$$

$$\mathrm{Im}\{A\} = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot 0,866 = 3,46 \tag{86}$$

$$A = 2 + j3,46 \tag{87}$$

b) $B = 3 \cdot e^{-j\pi/4}$

$$\mathrm{Re}\{B\} = 3 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3 \cdot 0{,}707 = 2{,}12 \tag{88}$$

$$\mathrm{Im}\{B\} = 3 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3 \cdot (-0{,}707) = -2{,}12 \tag{89}$$

$$B = 2{,}12 - j2{,}12 \tag{90}$$

4.4. Operacions amb nombres complexos

Amb els nombres complexos es poden fer les mateixes operacions bàsiques que amb els nombres reals. De tota manera, depenent de l'operació que intentem calcular, ens serà més fàcil fer-ho amb els nombres complexos representat en notació cartesiana o polar. En molts casos serà molt pràctic canviar la notació dels nombres per posteriorment fer el càlcul corresponent. En el subapartat 4.4.1 veurem com es sumen i resten els nombres complexos. En el subapartat 4.4.2 explicarem el producte de nombres complexos i en el subapartat 4.4.3 veurem com dividir nombres complexos.

4.4.1. Suma (i resta) de nombres complexos

Per sumar dos nombres complexos, ens interessa tenir-los en forma cartesiana. La suma en notació polar és força més complicada. Un cop tenim els nombres en notació cartesiana, només ens cal sumar (o restar) component a component. És a dir, la part real del resultat és la suma (o resta) de les parts reals dels dos nombres, i la part imaginària del resultat és la suma (o resta) de les parts imaginàries dels dos nombres.

Si definim:

$$A = a + jb \tag{91}$$

$$B = c + jd \tag{92}$$

I volem obtenir la suma d'$A + B$ (que anomenarem Z), tindrem:

$$Z = A \pm B \tag{93}$$

$$\mathrm{Re}\{Z\} = \mathrm{Re}\{A\} \pm \mathrm{Re}\{B\} = a \pm c \tag{94}$$

$$\mathrm{Im}\{Z\} = \mathrm{Im}\{A\} \pm \mathrm{Im}\{B\} = b \pm d \tag{95}$$

$$Z = (a \pm c) + j(b \pm d) \tag{96}$$

Aquesta suma (o resta) la podem realitzar també directament:

$$Z = (a + jb) \pm (c + jd) = (a \pm c) + j(b \pm d) \tag{97}$$

Exemple 11

Realitzeu la suma i la resta dels dos nombres complexos següents:

$A = 3 + j5$
$B = 2 - j$

Solució

Per sumar aquests dos nombres complexos, sumem per separat cadascun dels seus components:

$$A + B = (3 + 2) + j(5 + (-1)) = 5 + j4 \tag{98}$$

Per a realitzar la seva resta, també ho fem de forma separada pera cada component:

$$A - B = (3 - 2) + j(5 - (-1)) = 1 + j6 \tag{99}$$

4.4.2. Multiplicació de nombres complexos

La multiplicació de nombres complexos es pot fer tant en la seva forma cartesiana com en la seva forma polar (tot i que és una mica més senzill fer-ho en forma polar). En notació cartesiana, el producte de dos nombres complexos es fa de forma semblant a si es tractés d'un polinomi (tenint en compte al final el valor bàsic de $j^2 = -1$. Si definim:

$$A = a + jb \tag{100}$$

$$B = c + jd \tag{101}$$

I volem obtenir el producte d'A per B (que anomenarem Z), tindrem:

$$Z = A \cdot B \tag{102}$$

$$Z = (a + jb) \cdot (c + jd) = (a \cdot c) + a \cdot jd + jb \cdot \mathrm{c} + jb \cdot jd \tag{103}$$

$$Z = ac + j(ad + cb) + j^2 \cdot bd \tag{104}$$

Si substituïm $j^2 = -1$ obtenim:

$$Z = ac + j(ad + cb) + (-1) \cdot bd = (ac - bd) + j(ad + cb) \tag{105}$$

En canvi, si tenim els dos nombres en forma polar, aquesta operació és força més senzilla, perquè el mòdul del producte de dos nombres complexos és el producte dels seus mòduls, i la fase del producte és igual a la suma de fases dels nombres que multipliquem. És a dir, si tenim:

$$A = |A| \cdot e^{j\angle A} \tag{106}$$

$$B = |B| \cdot e^{j\angle B} \tag{107}$$

I volem obtenir el producte d'A per B (que anomenarem Z), tindrem:

$$Z = A \cdot B \tag{108}$$

$$A = (|A| \cdot e^{j\angle A}) \cdot (|B| \cdot e^{j\angle B}) = (|A| \cdot |B|) \cdot e^{j(\angle A + \angle B)} \tag{109}$$

Una propietat que convé recordar dels nombres complexos és que el producte d'un nombre complex pel seu conjugat sempre serà un nombre real, perquè tenen la mateixa fase amb signe oposat i, per tant, la fase resultant del seu producte és nul·la.

Exemple 12

Calculeu el producte dels següents nombres complexos:

a) $A = 2 + j5$; $B = 1 - j3$
b) $C = 4 \cdot e^{j\pi/4}$; $D = 3 \cdot e^{-j\pi/6}$
c) $E = 2 + j$; $F = 2 - j$

Solució

a) Tot i que ens seria més senzill passar primer els dos nombres a notació polar, calculem el producte d'aquests dos nombres complexos directament a partir del producte dels seus components:

$$A \cdot B = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-j3) + j5 \cdot 1 + j5 \cdot (-j3) = 2 + j((-6) + 5) - 15j^2 \quad (110)$$

Aquí substituïm $j^2 = -1$:

$$A \cdot B = 2 + j((-6) + 5) - 15(-1)) = 17 - j \quad (111)$$

b) En aquest cas, ja tenim els dos nombres en notació polar, de forma que calculem el seu producte directament:

$$C \cdot D = (4 \cdot 3) \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = 12 \cdot e^{j0,083} \quad (112)$$

c) En aquest cas, observem que són dos nombres complexos conjugats. Calculem el seu producte:

$$E \cdot F = (2 \cdot 2) + j(2 - 2) - 1j^2 = (4 + 1) + j\,0 = 5 \quad (113)$$

Veurem més clar el càlcul si abans passem E i F a la notació polar:

$$E = \sqrt{2^2 + 1^2} \cdot e^{j \cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{5} \cdot e^{j0,464} \quad (114)$$

$$F = \sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot e^{j \cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{(-1)}{2}\right)} = \sqrt{5} \cdot e^{-j0,464} \quad (115)$$

I fem el producte:

$$E \cdot F = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot e^{j(0,464 - 0,464)} = 5 \cdot e^0 = 5 \quad (116)$$

En el resultat observem que, tal i com ja havíem anunciat abans, el producte de dos nombres complexos conjugats dóna com a resultat un nombre real pur.

4.4.3. Divisió de nombres complexos

A l'hora de calcular el quocient entre dos nombres complexos, convé tenir-los en forma polar. En cas que tinguem els nombres en notació cartesiana, el millor és primer transformar-los primer a notació polar i, posteriorment, fer el càlcul corresponent. El mòdul del quocient de dos nombres complexos serà el quocient dels seus mòduls. La fase del quocient serà la resta de les dues fases. Suposem que definim aquests dos nombres complexos:

$$A = |A| \cdot e^{j\angle A} \quad (117)$$

$$B = |B| \cdot e^{j\angle B} \quad (118)$$

El quocient d'aquests dos nombres complexos serà:

$$\frac{A}{B} = \frac{|A|}{|B|} \cdot e^{j(<A - <B)} \qquad (119)$$

Mostrem-ho amb uns exemples.

Exemple 13

Calculeu el quocient dels següents nombres complexos.

a) $A = 6 \cdot e^{j2\pi/3}$; $B = 2 \cdot e^{j\pi/4}$
b) $C = 4$; $D = 2 \cdot e^{j\pi/4}$
c) $E = 2 + j5$; $F = -1 - j3$

Solució

a) Com que tenim els dos nombres expressats en notació polar, podem calcular directament el seu quocient:

$$\frac{A}{B} = \frac{6}{2} \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = 3 \cdot e^{j1,31} \qquad (120)$$

b) En aquest cas, un dels dos nombres (C) és real. Recordem que un nombre real és també un nombre complex amb fase de 0 rad.

$$\frac{C}{D} = \frac{4}{2} \cdot e^{j\left(0 - \frac{\pi}{4}\right)} = 2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \qquad (121)$$

c) Com que els dos nombres estan expressats en notació cartesiana, primer hem de passar els dos nombres a forma polar.

$$E = \sqrt{2^2 + 5^2} \cdot e^{j \cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{5}{2}\right)} = \sqrt{29} \cdot e^{j1,19} \qquad (122)$$

$$F = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} \cdot e^{j \cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{(-3)}{(-1)}\right)} = \sqrt{10} \cdot e^{j1,25} \qquad (123)$$

Cal anar amb compte amb aquest últim resultat. Com que la part real d'F era negativa, hem de tenir en compte que la seva fase serà realment:

$$<F = \pi + 1,25 = 4,39 \text{ rad} \qquad (124)$$

I, per tant:

$$F = \sqrt{10} \cdot e^{j4,39} \qquad (125)$$

Fem ara el càlcul:

$$\frac{E}{F} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{10}} \cdot e^{j(1,19 - 4,39)} = \sqrt{\frac{29}{10}} \cdot e^{-j3,2} = 1,7 \cdot e^{-j3,2} \qquad (126)$$