Circuits dinàmics

Anàlisi en el domini de Laplace

Olga Muñoz Medina

PID_00161692

Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

Índex

Introducció

En el mòdul “Circuits RLC” van aparèixer per primera vegada els condensadors i les bobines. A diferència d’una resistència, on la tensió i el corrent poden variar de manera instantània amb l’entrada, en un condensador no hi pot haver canvis bruscos de tensió i en una bobina no hi pot haver canvis bruscos de corrent. D’aquesta manera, en apagar o encendre la font d’entrada, la tensió i el corrent en condensadors i bobines trigaran una mica de temps a assolir el seu valor definitiu. La manera com evolucionen la tensió i el corrent fins a assolir el règim permanent és el que s’entén per dinàmica del circuit. Aquesta és la raó per la qual els circuits amb condensadors i/o bobines els anomenem, també, circuits dinàmics.

Com afecta en l’anàlisi d’un circuit la presència de condensadors i bobines? La presència del condensador i la bobina fa que apareguin integrals i derivades en les equacions del circuit. Treballar amb aquestes equacions en el circuit LC va ser, si més no, molest. Imagineu-vos llavors el que hauria estat treballar, per exemple, amb cinc elements dinàmics en lloc de dos. Penseu en el nombre d’integrals i derivades que això implicaria.

Reviseu l’exemple del circuit LC en el mòdul “Circuits RLC”.

Clarament necessitem una eina per a simplificar l’anàlisi de circuits amb condensadors i bobines. Aquesta eina, de fet, ja la coneixeu: és la transformada de Laplace. La transformada de Laplace té el gran avantatge que permet convertir equacions integrodiferencials en equacions algebraiques, és a dir, equacions sense integrals ni derivades. D’aquesta manera, la recerca de la solució resulta molt més senzilla. Noteu que només per això ja val la pena estudiar la transformada de Laplace.

En el nostre cas, tanmateix, no ens limitarem a usar la transformada de Laplace com una eina matemàtica per a resoldre equacions diferencials. Anirem més enllà, transformant no solament les equacions, sinó directament el circuit. Això és el que es denomina treballar en el domini transformat de Laplace.

En el circuit transformat de Laplace les equacions seran algebraiques, de l’estil de les que apareixen en circuits resistius. Però, a més, si treballem en el domini transformat, obtindrem més informació sobre el circuit que quan treballem en el domini del temps. I és que aspectes com ara l’estabilitat del sistema que, d’alguna manera, queden “ocults” en el domini del temps, apareixen de manera natural en el domini transformat.

En aquest mòdul, analitzarem circuits amb condensadors i bobines tant per a entrada contínua (DC) com per a alterna (AC), utilitzant la transformada de Laplace. En l’apartat 1 del mòdul aprendrem a transformar els components que ja coneixem (fonts, resistències, condensadors i bobines). Després, en l'apartat 2, definirem la funció de xarxa, un concepte fonamental per a la caracterització, anàlisi i disseny de circuits i sistemes lineals. En l'apartat 3, veurem com queda la resposta en el domini temporal i els seus diferents components. En l'apartat 4, aprendrem a determinar si un circuit serà o no capaç d'arribar a un règim permanent, és a dir, si s'estabilitza o no. En els apartats 5 i 6 aprofundirem en els diferents components de la resposta. Amb tot això podrem caracteritzar la dinàmica d'un circuit, és a dir, la manera com evoluciona cap al règim permanent; i també la resposta que en règim permanent oferirà un circuit per a una entrada DC o AC.

Objectius

Els objectius principals d'aquest mòdul són els següents:

1. Obtenir per a qualsevol circuit lineal el seu equivalent en el domini transformat de Laplace.

2. Operar amb el circuit transformat, fent servir les eines vistes en mòduls anteriors per a circuits resistius.

3. Obtenir la resposta temporal de circuits amb elements dinàmics, fent la transformada inversa de Laplace de la resposta obtinguda per al circuit transformat de Laplace.

4. Trobar la impedància i admitància d'entrada d'un element o circuit.

5. Caracteritzar un circuit mitjançant la seva funció de transferència i resposta impulsional.

6. Avaluar l'estabilitat d'un circuit mitjançant la inspecció de la seva funció de transferència i/o diagrama de pols.

7. Determinar els paràmetres característics associats a la resposta temporal de sistemes de primer i segon ordre: constant de temps, coeficient d'esmorteïment i freqüència natural.

8. Determinar la forma de resposta lliure d'un circuit mitjançant inspecció de la funció de transferència i/o pols del circuit.

9. Saber calcular la resposta forçada d'un circuit per a entrades de tipus esglaó i sinusoïdal.

1. Anàlisi de circuits en el domini transformat de Laplace

La transformada de Laplace és una eina de gran utilitat per a avaluar la resposta de sistemes lineals. Es pot aplicar tant a sistemes elèctrics com d'una altra naturalesa, sempre que siguin lineals. La qüestió ara és la següent: podrem aplicar-la llavors als circuits que ja coneixem?

Les equacions que relacionen tensió i corrent en resistències, condensadors i inductors són lineals, tal com hem vist en els mòduls "Circuits elèctrics" i "Circuits RLC". Per tant, tots els circuits elèctrics implementats mitjançant resistències, bobines i condensadors són lineals. Com que en aquest mòdul treballarem només amb aquests elements, qualsevol circuit que aparegui en el mòdul serà lineal.

Utilitzarem la transformada de Laplace per a transformar el circuit i obtenir l'anomenat **circuit transformat de Laplace**, en el qual les equacions que relacionen tensió i corrent ja no seran diferencials sinó algebraiques. Això ho farem en el subapartat 1.1. En el subapartat 1.2 definirem el concepte d'impedància, molt utilitzat en l'anàlisi de circuits.

Domini transformat

En aquest mòdul parlarem indistintament de *domini transformat de Laplace* o, simplement, de *domini transformat. Transformar* un element de circuit és veure com queda aquest element en el domini transformat de Laplace.

1.1. El circuit transformat de Laplace

En aquest subapartat veurem com transformar els elements que hem vist en els mòduls anteriors. Per això, necessitem saber primer com queden la tensió i el corrent en el domini transformat i les relacions entre ells, o, el que és el mateix, les lleis de Kirchhoff.

1.1.1. Variables en el circuit transformat de Laplace

En el domini del temps, les variables de treball eren la tensió o voltatge (v) i la intensitat o corrent (i), que eren funció del temps ($v(t)$ i $i(t)$). En el domini transformat treballarem amb les transformades de Laplace d'aquestes variables. D'aquesta manera, tensió i corrent en el domini transformat seran funció de la variable complexa $s = \sigma + j\omega$, que té una part real, σ (sigma), i una part imaginària, ω (omega), és a dir, seran $V(s)$ i $I(s)$:

$$\begin{aligned} v(t) &\leftrightarrow V(s) \\ i(t) &\leftrightarrow I(s) \end{aligned} \qquad (1)$$

Per a distingir-les, a partir d'ara utilitzarem minúscules per a les tensions i/o corrents en el domini del temps, i majúscules per a les tensions i/o corrents en el domini de Laplace.

1.1.2. Lleis de Kirchhoff en el circuit transformat de Laplace

Ara que ja hem transformat les variables, se'ns plantegen algunes preguntes: en el domini del temps les tensions i corrents han de complir les lleis de Kirchhoff, però, i en el domini transformat? Quines són les equacions que han de complir les tensions i els corrents en el domini de Laplace?

En el mòdul "Circuits elèctrics" vam veure que en el domini del temps la suma algebraica de les intensitats que entren en un node és zero per a qualsevol instant t (llei de Kirchhoff dels corrents). Per exemple, en el cas de tenir tres corrents que conflueixen en un node, es compleix que:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 \tag{2}$$

Apliquem la transformada de Laplace en ambdós costats de l'equació anterior. Com que la transformada de Laplace és una de transformada lineal, la transformada d'una suma és igual que la suma de transformades (equació 9 de l'annex 3). En l'altre costat de l'equació, tindrem la transformada de 0 que també és 0. Per tant:

$$I_1(s) + I_2(s) + I_3(s) = 0 \tag{3}$$

Què ens està dient l'equació 3? Doncs que la llei de Kirchhoff dels corrents es continua complint en el domini transformat.

De la mateixa manera, també es continuarà complint la llei de Kirchhoff de les tensions, o segona llei de Kirchhoff. Tal com vam veure en el mòdul "Circuits elèctrics", la llei de Kirchhoff de les tensions implica que la suma algebraica de les tensions a qualsevol camí tancat del circuit és zero per a qualsevol instant t. Per exemple, en el cas de tenir tres tensions en un camí tancat, es compleix que:

$$v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = 0 \tag{4}$$

Si apliquem la transformada de Laplace en ambdós costats de l'equació, obtenim:

$$V_1(s) + V_2(s) + V_3(s) = 0 \tag{5}$$

Per tant, concloem que:

> En el circuit transformat, les lleis de Kirchhoff es compleixen per a les transformades de Laplace de les tensions i els corrents.

1.1.3. Lleis dels elements en el circuit transformat de Laplace

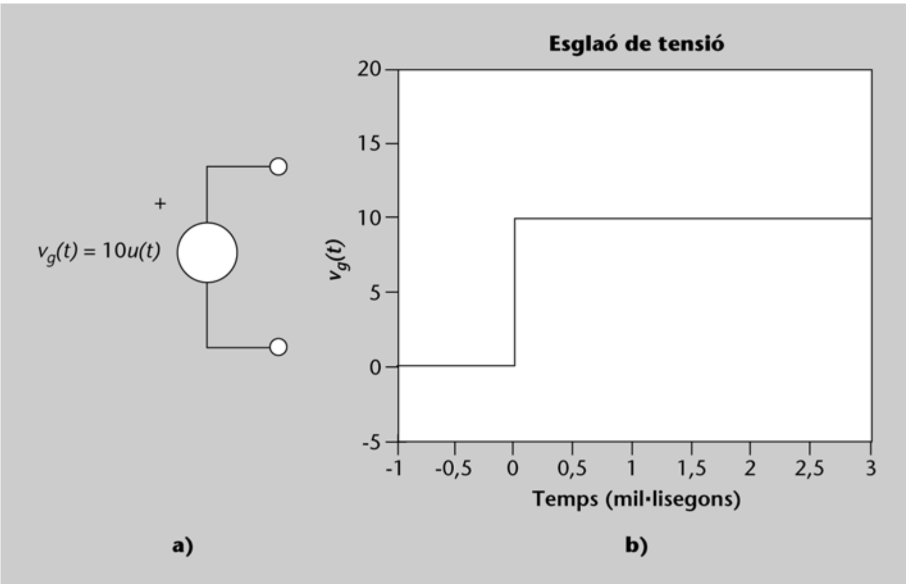
Ara que ja sabem com queden les tensions i els corrents en el domini transformat, i que aquests continuen complint les lleis de Kirchhoff, veurem com es transformen els elements. Començarem per les fonts (incloent tant les de tensió com les de corrent) i seguirem amb les resistències, condensadors i bobines.

Fonts

En el mòdul "Circuits elèctrics" vau veure que les fonts de tensió poden proporcionar una tensió constant (contínua) o variable en el temps (com és el cas de tensió alterna). També les fonts d'intensitat poden proporcionar un corrent constant o variable. La manera de transformar unes i altres és exactament la mateixa, com veurem a continuació.

Començarem amb un exemple, considerant una font de tensió que proporciona una tensió contínua de 10 V. En la figura 1a podeu veure el símbol d'aquesta font. El subíndex *g* a $v_g(t)$ es refereix a generador, que és una altra manera de denominar una font. D'aquesta manera distingim la tensió proporcionada per la font, d'una altra tensió genèrica $v(t)$.

Figura 1. Esglaó de tensió



a) Font de tensió $v_g(t)$ b) Tensió lliurada per la font: esglaó de tensió de 10 V d'amplitud

La funció $u(t)$ és la funció esglaó. La utilitzem per a indicar que connectem la font en l'instant $t = 0$. Per conveni, considerem 0 l'instant inicial. És a dir, posem el nostre comptador de temps a zero en el moment en què connectem la font. D'aquesta manera, la tensió de la font és 0 fins a $t = 0$ i a partir de $t = 0$ val 10 V. En la figura 1b podeu veure la representació, en funció del temps, de la tensió proporcionada per la font.

La funció esglaó $u(t)$ és:
0 per a $t < 0$
1 per a $t > 0$

La transformada de Laplace de la tensió $v_g(t)$ = 10 *u(t)* és:

$$V_g(s) = \frac{10}{s} \tag{6}$$

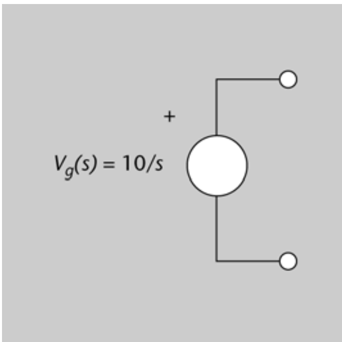
Si no recordeu la transformada de Laplace de la funció esglaó, reviseu la llista de transformades bàsiques de l'annex 3.

Cosa que significa que, en el domini transformat de Laplace, la tensió que lliura la font és 10/*s*.

Un aclariment: la transformada 10/*s* no és la transformada de 10, sinó la transformada de 10 *u*(*t*). És a dir, la transformada 10/*s* correspon a una funció que és zero fins a $t = 0$ i que val 10 a partir de $t = 0$.

Com representarem aquesta font en el domini transformat? Doncs exactament igual que en el domini del temps (figura 2). No obstant això, quan analitzem el circuit en el domini transformat, considerarem que la tensió lliurada per la font val 10/*s*.

Figura 2. Font de tensió en el domini de Laplace, per a $v_g(t) = 10\ u(t)$



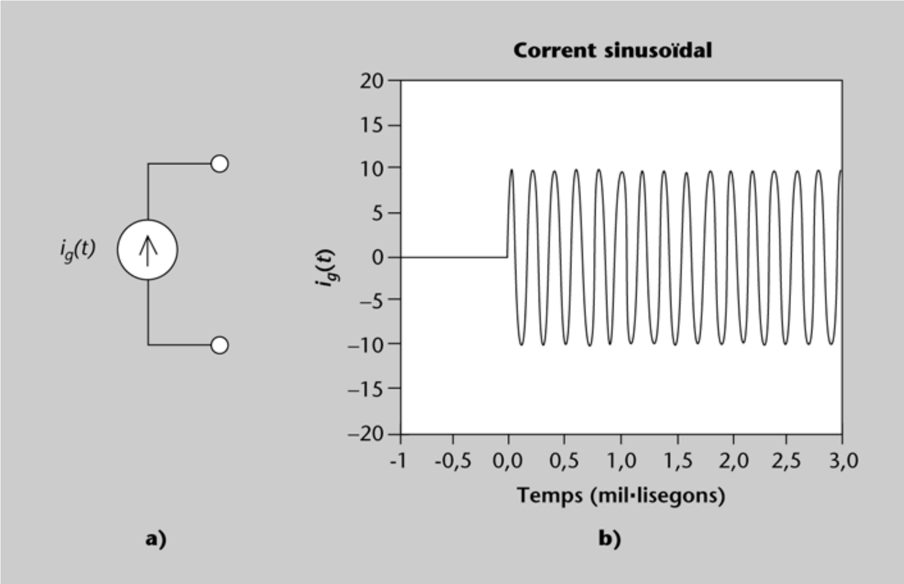
La font de tensió anterior era una font de contínua. Com transformaríem una font que proporciona una tensió o un corrent variable en el temps?

Ho veurem considerant un altre exemple: una font d'intensitat que lliura un corrent sinusoïdal (recordeu que el corrent sinusoïdal és el corrent altern més habitual, tal com es va comentar en el mòdul "Circuits elèctrics"). Suposem que el corrent i_g lliurat per la font és un cosinus d'amplitud 10 i freqüència ω_0 (llegiu 'omega subzero'). Com en el cas anterior, utilitzem la funció *u*(*t*) per a indicar que connectem la font en l'instant $t = 0$. D'aquesta manera obtenim que:

$$i_g(t) = 10\cos(\omega_0 t)u(t) \tag{7}$$

En la figura 3b podeu veure la representació, en funció del temps, del corrent proporcionat per la font i, en la figura 3a, el símbol de la font de corrent en el domini del temps tal com el vam veure en el mòdul "Circuits elèctrics".

Figura 3. Corrent sinusoïdal



a) Font de corrent $i_g(t)$ b) Corrent sinusoïdal d'amplitud 10 que comença en $t = 0$

La transformada de Laplace del corrent $i_g(t)$ és:

Si no recordeu la transformada de Laplace de la funció cosinus, reviseu la llista de transformades bàsiques de l'annex 3, "Revisió de la transformada de Laplace".

$$I_g(s) = 10\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}. \tag{8}$$

En el domini transformat representarem la font amb el mateix símbol utilitzat en el domini del temps. En el circuit transformat, tanmateix, considerarem que el corrent lliurat per la font és $I_g(s)$.

Hem vist dos exemples concrets de transformació de fonts. Per a transformar qualsevol altra font de corrent o tensió treballaríem de la mateixa manera, aplicant la transformada de Laplace a la funció $i_g(t)$ o a la funció $v_g(t)$ segons sigui el cas.

En resum, per a transformar una font que proporciona un corrent definit per una funció temporal, transformarem directament aquesta funció. Anàlogament, per a transformar una font de tensió, transformarem la funció que determina la tensió lliurada per la font. Matemàticament això s'expressa:

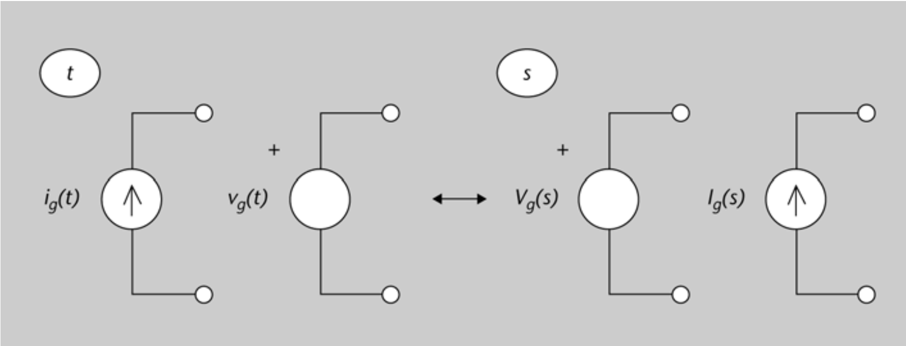
$$\begin{aligned} i_g(t) &\leftrightarrow I_g(s) \\ v_g(t) &\leftrightarrow V_g(s) \end{aligned} \tag{9}$$

Utilitzarem els mateixos símbols utilitzats per a les fonts en el domini del temps.

La figura 4 conté símbols habituals per a les fonts en el domini del temps (t). Al costat s'indica com representaríem aquestes fonts en el domini de Laplace (s).

Veiem que el símbol és el mateix, només canvia la manera d'escriure la tensió o el corrent proporcionat per la font.

Figura 4. Fonts en el domini del temps (t) i en el domini transformat de Laplace (s)



Resistència

Recordeu la relació entre la tensió i el corrent en una resistència en el domini del temps. Sabem que podem obtenir la tensió a partir del corrent mitjançant la llei d'Ohm, que per a una resistència de valor R és:

$$v(t) = Ri(t) \tag{10}$$

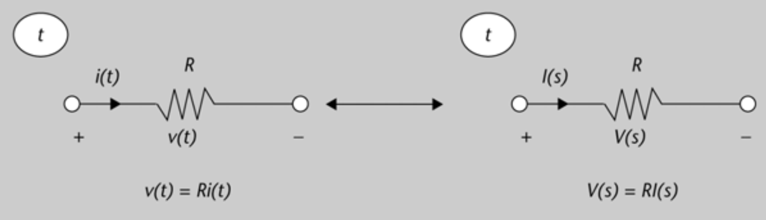
Apliquem la transformada de Laplace en ambdós costats de l'equació anterior. Tenint en compte que R és una constant que no depèn del temps, la transformada de Laplace de la tensió és igual que la constant R per la transformada de Laplace del corrent:

$$V(s) = RI(s) \tag{11}$$

Noteu que, per a una resistència, les transformades de la tensió i el corrent continuen verificant la llei d'Ohm, la qual cosa significa que una resistència es comporta igual en el domini del temps que en el domini transformat.

Per a representar la resistència en el domini transformat (s) utilitzem el mateix símbol que utilitzàvem en el domini del temps (t):

Figura 5. Resistència en el domini del temps (t) i en el circuit transformat de Laplace (s)



En la figura 5 s'ha indicat amb una fletxa el sentit **suposat** per a la intensitat que circula per la resistència. El sentit ha de ser el mateix en el domini del temps (t) i en el domini de Laplace (s). Recordeu que la llei d'Ohm és vàlida quan suposem que el corrent entra pel terminal positiu de la tensió. Si no és així, en les equacions 10 i 11 (llei d'Ohm) caldria posar un signe menys.

Fins aquí les coses no han canviat gaire respecte al que teníem en el domini del temps. De fet, si els nostres circuits només tinguessin fonts i resistències no ens hauríem plantejat mai utilitzar Laplace. Si utilitzem Laplace és per a fer més senzilla l'anàlisi de circuits que contenen condensadors i inductors. Veurem que per a aquests elements sí que apareixen diferències substancials, diferències que ens facilitaran molt la feina.

Circuits amb memòria

Els condensadors i bobines són components amb memòria: "recorden" valors de tensió i de corrent. Gràcies a això, podem fer circuits amb sortides que depenguin de les entrades presents i passades, és a dir, circuits amb memòria. Els circuits amb memòria són útils en nombroses aplicacions. Per exemple, per a equalitzar un senyal.

Condensador

En el domini del temps, podem calcular el corrent que circula per un condensador de capacitat C com el producte d'aquesta capacitat per la derivada de la tensió en borns del condensador:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{12}$$

Com vam fer per a la resistència, apliquem la transformada de Laplace en ambdós costats de l'equació. Obtenim llavors (vegeu equació 11 de l'annex 3 del mòdul "Annexos"):

$$I(s) = C[sV(s) - v(0)] \tag{13}$$

on $v(0)$ és la tensió del condensador en l'instant inicial $t = 0$. Noteu que ara ja no apareixen derivades en l'equació. És a dir, l'equació que relaciona tensió i corrent al condensador ja és algebraica.

Ens serà més fàcil interpretar el comportament del condensador en el domini transformat si, a partir de l'equació 13, aïllem la tensió i l'expressem en funció del corrent:

$$V(s) = \frac{I(s)}{Cs} + \frac{v(0)}{s} \tag{14}$$

Analitzem el que hem obtingut. Si la tensió inicial del condensador és 0 ($v(0) = 0$), la transformada de la tensió és: $V(s) = I(s)/Cs$. Si pensem en la llei d'Ohm, és com si tinguéssim una "resistència" de valor $1/Cs$.

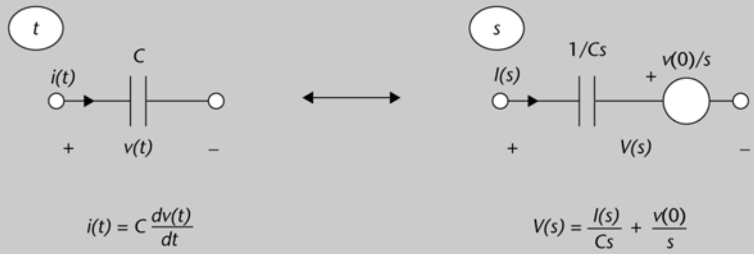
Cal anar amb compte de no confondre les s. $I(s)$ vol dir que la tensió I depèn de s. Cs és el producte de C per s.

Si la tensió inicial del condensador és zero, podríem tractar el condensador en el domini transformat com una resistència de valor $1/Cs$.

Si la tensió inicial no és zero, apareix un terme de tensió addicional que és independent del corrent: $v(0)/s$. Aquest terme el podem modelar com una font de tensió de valor $v(0)/s$.

En resum, en el domini transformat (s) el condensador és equivalent a un component que es comporta com una resistència de valor $1/Cs$ i una font de tensió de valor $v(0)/s$.

Figura 6. Condensador en el domini del temps (t) i en el domini transformat de Laplace (s)



Polaritat de la font

És important que no ens equivoquem en definir la polaritat de la font de condició inicial. Fixeu-vos com n'és de fàcil: només hem de seguir l'ordre + - de la tensió del condensador en el domini del temps.

En la figura 6 s'ha indicat amb una fletxa el sentit **suposat** per a la intensitat que circula pel condensador. El sentit ha de ser el mateix en el domini del temps (t) i en el domini de Laplace (s). El mateix podem dir de la tensió als borns. Noteu que, perquè es compleixi l'equació 14, el component $1/Cs$ (**que es comporta com una resistència**) i la font $v(0)/s$ s'han de connectar en sèrie. A més, el corrent ha d'entrar pel born positiu de la font, tal com s'ha indicat en la figura 6. D'aquesta manera, la tensió $V(s)$ és la tensió que cau en el component $1/Cs$, això és $I(s) \cdot (1/Cs)$, més la caiguda de tensió $v(0)/s$ (ja que entrem pel terminal positiu de la font).

És important que recordeu que, encara que en el domini de Laplace utilitzem el símbol del condensador, el component del domini transformat es comporta com una resistència de valor $1/Cs$.

Inductor

En el domini del temps, l'equació que relaciona tensió i corrent en un inductor és:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{15}$$

Si hi apliquem, com vam fer per al condensador, la transformada de Laplace en ambdós costats de l'equació, obtenim que (vegeu equació 11 de l'annex 3):

$$V(s) = L[sI(s) - i(0)] \tag{16}$$

on $i(0)$ és el corrent que circula per l'inductor en l'instant inicial $t = 0$.

Per a l'inductor ens serà més fàcil interpretar el seu comportament en el domini transformat si aïllem el corrent en l'equació 16:

$$I(s) = \frac{V(s)}{Ls} + \frac{i(0)}{s} \tag{17}$$

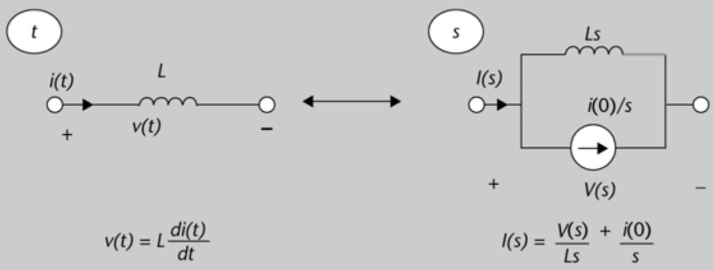
Vegem què és el que hem obtingut per a l'inductor. Si el corrent inicial a l'inductor és 0 ($i(0) = 0$), la transformada del corrent és: $I(s) = V(s)/Ls$, que és equivalent a $V(s) = I(s)\cdot Ls$. Si pensem en la llei d'Ohm, veiem que és com si tinguéssim una "resistència" de valor Ls.

Si el corrent inicial a l'inductor és zero, podríem tractar-lo en el domini transformat com una resistència de valor Ls.

Si el corrent inicial no és zero, apareix un terme de corrent addicional que és independent de la tensió: $i(0)/s$. Aquest terme el podem modelar com una font de corrent de valor $i(0)/s$.

En resum, en el domini transformat l'inductor és equivalent a un component que es comporta com una resistència de valor Ls i una font que lliura un corrent de valor $i(0)/s$.

Figura 7. Inductor en el domini del temps (t) i en el circuit transformat de Laplace (s)



Sentit de la intensitat

És important que no ens equivoquem en definir el sentit de la intensitat de la font de condició inicial. Vegeu com n'és de fàcil: només hem de prendre el mateix sentit definit, en el domini del temps, per al corrent de l'inductor.

En la figura 7 s'ha indicat amb una fletxa el sentit **suposat** per a la intensitat que circula per l'inductor. El sentit ha de ser el mateix en el domini del temps (t) i en el domini de Laplace (s). El mateix podem dir de la tensió als borns. Noteu que, perquè es compleixi l'equació 17, en el domini de Laplace el component Ls i la font de corrent s'han de connectar en paral·lel, tal com s'ha fet en la figura 7. D'aquesta manera $I(s)$ és la suma del corrent que circula per Ls, això és el corrent $V(s)/Ls$, més el corrent $i(0)/s$ de la font.

És important que recordeu que, encara que utilitzem el símbol de l'inductor, el component del domini transformat es comporta com una resistència de valor Ls.

1.2. Conceptes d'impedància i admitància

Com hem dit en el subapartat anterior, si les condicions inicials són zero, condensadors i inductors es comporten en el domini transformat com a resistències de valor $1/Cs$ i Ls respectivament. No obstant això, no són resistències i, per tant, no les anomenem així. El seu nom correcte és **impedància**, que ve a ser l'equivalent en el domini transformat a la resistència en el domini del temps.

La impedància d'un element es defineix com el quocient entre la transformada de Laplace de la tensió als seus borns i la transformada de Laplace del corrent que hi circula, considerant condicions inicials iguals a zero:

$$Z(s) = \left.\frac{V(s)}{I(s)}\right|_{C.I.=0} \tag{18}$$

Les impedàncies tenen el mateix paper en el domini transformat que les resistències en el domini del temps. No obstant això, el concepte d'impedància és més general perquè inclou, a més de les resistències, els condensadors i els inductors.

Utilitzant el concepte d'impedància, escriurem la llei d'Ohm en el domini transformat com:

$$V(s) = Z(s) \cdot I(s) \tag{19}$$

De la mateixa manera que per a un circuit resistiu calculàvem la resistència d'entrada vista des de dos terminals, també podem calcular la impedància d'entrada del circuit transformat.

D'altra banda, l'admitància es defineix com:

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \left.\frac{I(s)}{V(s)}\right|_{C.I.=0} \tag{20}$$

i té, en el domini transformat, el mateix paper que vam veure en el mòdul "Circuits elèctrics" per a les conductàncies en el domini del temps.

D'acord amb les definicions anteriors, les impedàncies d'una resistència de valor R, un inductor d'autoinductància L i un condensador de capacitat C són, respectivament:

$$Z_R(s) = R; \qquad Z_L(s) = Ls; \qquad Z_C(s) = \frac{1}{Cs} \tag{21}$$

Les admitàncies corresponents són:

$$Y_R(s) = \frac{1}{R} = G \qquad Y_L(s) = \frac{1}{Ls} \qquad Y_C(s) = Cs \tag{22}$$

Tot el que podem fer amb les resistències i conductàncies en el domini del temps, podem aplicar-ho, en el domini transformat, a les impedàncies i admitàncies, respectivament. !

Per exemple, en el domini de Laplace les impedàncies en sèrie se sumen de la mateixa manera que les resistències en sèrie se sumen en el domini del temps. Anàlogament, en el domini de Laplace, les admitàncies en paral·lel se sumen de la mateixa manera que les conductàncies en paral·lel se sumen en el domini del temps.

Podem aplicar al circuit transformat totes les eines que hem après per a circuits resistius en el domini del temps, com ara superposició, divisors de tensió i corrent, equivalents de Thevenin i Norton, etc.

Mitjançant aquestes eines podrem obtenir qualsevol variable del circuit en el domini transformat. Una vegada obtinguda, aplicant la transformada inversa de Laplace, podrem determinar l'expressió temporal d'aquesta variable.

Per a acabar de fixar tots els conceptes que hem vist fins al moment, a continuació veurem alguns exemples.

Exemple 1

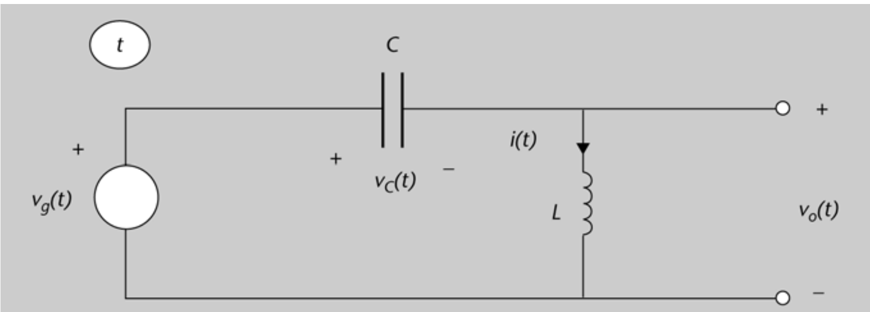
Al circuit de la figura 8 , la tensió de la font passa de 0 V a 1 V en l'instant $t = 0$. Analitzarem el circuit a partir d'aquell moment, per a determinar l'evolució de:

a) La tensió de sortida $v_o(t)$. (La *o* correspon a *output*, és a dir, sortida en anglès).
b) El corrent que circula per l'inductor i(t).
c) La tensió en borns del condensador $v_C(t)$.

Els valors de L i de C són, respectivament, 1 mH i 1 μF.

Per a això transformarem el circuit. En el domini transformat, calcularem les variables que ens interessen. Una vegada tinguem calculades aquestes variables en el domini de Laplace, calcularem la seva transformada inversa. D'aquesta manera obtindrem les tensions i corrents que busquem en el domini del temps.

Figura 8. Circuit LC en el domini del temps connectat a una font de tensió



Solució

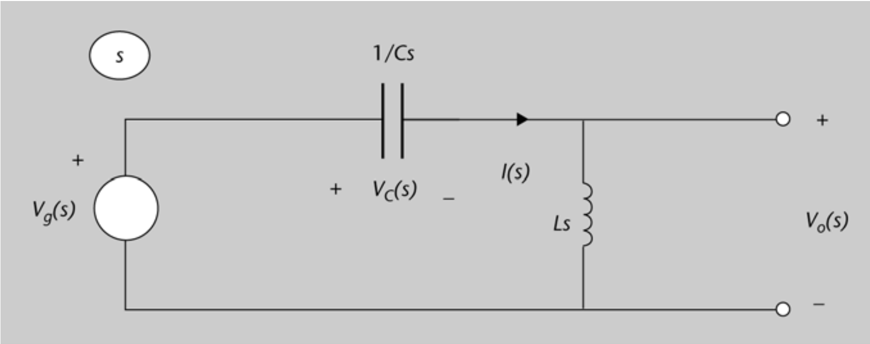
El primer que hem de fer és transformar el circuit de la figura 8.

Una tensió contínua d'1 V a partir de $t = 0$ és una tensió esglaó: $v_g(t) = u(t)$. En el domini transformat, tal com hem explicat en el subapartat 1.1.3, continuarem tenint una font esglaó la transformada de la qual és: $V_g(s) = 1/s$.

Atès que inicialment la tensió de la font és 0 i que la tensió al condensador i el corrent a l'inductor no poden variar bruscament, a $t = 0$ la tensió v_C i el corrent i seran zero. En ser les condicions inicials zero, $v_C(0) = 0$ i $i(0) = 0$, el condensador es transforma en una impedància de valor $1/Cs$ i l'inductor en una impedància de valor Ls (reviseu la figura 6 i la figura 7 en els quadres recordatoris corresponents).

Per tant, el circuit transformat de Laplace és el que podeu veure en la figura 9.

Figura 9. Circuit LC en el domini de Laplace connectat a una font de tensió



a) Per a calcular la tensió de sortida $v_o(t)$, calcularem en el circuit transformat la tensió $V_o(s)$. Quan tinguem $V_o(s)$, calcularem la seva transformada inversa que és $v_o(t)$.

Observeu en la figura 9 que les impedàncies Ls i $1/Cs$ estan en sèrie. Recordeu ara que en el domini transformat, les impedàncies tenen el mateix comportament que les resistències en el domini del temps. Això significa que, en el domini transformat, podem fer amb les impedàncies tot el que fèiem amb les resistències en el domini del temps, per exemple, aplicar un divisor de tensió quan les impedàncies estan en sèrie.

Recordeu que dos elements estan en sèrie quan per tots dos hi circula el mateix corrent.

Feta aquesta reflexió, per a calcular la tensió de sortida en el circuit transformat de la figura 9, aplicarem un divisor de tensió per a les impedàncies Ls i $1/Cs$, tal com fèiem en el mòdul "Circuits elèctrics" per a les resistències en el domini del temps:

$$V_o(s) = \frac{Ls}{Ls + \frac{1}{Cs}} V_g(s) = \frac{Ls}{Ls + \frac{1}{Cs}} \frac{1}{s} \tag{23}$$

Per a calcular la transformada inversa amb més facilitat, intentarem sempre deixar l'expressió anterior com un quocient de polinomis en s, per la qual cosa podem multiplicar numerador i denominador per Cs (en multiplicar numerador i denominador pel mateix factor el quocient no canvia):

$$V_o(s) = \frac{LCs^2}{\left(LCs^2 + 1\right)} \frac{1}{s} = \frac{LCs}{LCs^2 + 1} \tag{24}$$

Ara dividim numerador i denominador per LC perquè el coeficient de s^2 sigui 1 (en dividir numerador i denominador pel mateix factor el quocient no canvia):

$$V_o(s) = \frac{s}{s^2 + \frac{1}{LC}} \tag{25}$$

Observeu que $V_o(s)$ és directament la transformada de Laplace d'un senyal cosinus. Per tant, la tensió de sortida en el domini temporal és:

Si no recordeu la transformada de Laplace de la funció cosinus, reviseu la llista de transformades bàsiques de l'annex 3.

$$v_o(t) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) u(t) \tag{26}$$

on la funció esglaó $u(t)$ indica que la tensió de sortida és zero per a instants anteriors a $t = 0$ (origen de temps) i que, a partir de $t = 0$, moment en què connectem la font, la tensió de sortida és sinusoïdal d'amplitud 1 i freqüència $\omega = 1/\sqrt{LC}$ (llegiu 'omega igual que 1 entre arrel de LC').

Els valors de la bobina i el condensador són L = 1 mH i C = 1 μF. Per a calcular la freqüència ω és convenient que treballem amb unitats del sistema internacional ($L = 10^{-3}$ H i $C = 10^{-6}$ F):

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3}10^{-6}}} = 31{,}6 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \tag{27}$$

En el sistema internacional les unitats de la freqüència ω són radiants per segon, que abreujadament escrivim rad/s, tal com hem fet en l'equació 27. El valor calculat per a la freqüència, el podem escriure també com 31,6 krad/s (quiloradiants per segon).

b) Per a calcular el corrent que circula per l'inductor $i(t)$, calcularem primer el corrent $I(s)$ en el circuit transformat (figura 9), i després calcularem la seva transformada inversa.

Observeu (figura 9), que el corrent *I(s)* és el corrent que circula per les impedàncies Ls i $1/Cs$, que estan en sèrie. Sobre el conjunt d'ambdues impedàncies cau una tensió igual que la de la font: $V_g(s)$. Per tant, podem calcular el corrent *I(s)* dividint la tensió de la font $V_g(s)$ per la suma de les impedàncies Ls i $1/Cs$:

La llei d'Ohm, en el domini de Laplace, ens diu que **la tensió és igual que el corrent per la impedància**, tal com vam veure en l'equació 19.

$$I(s) = \frac{V_g(s)}{Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{\left(Ls + \frac{1}{Cs}\right)} \frac{1}{s} \tag{28}$$

Per a calcular la transformada inversa de $I(s)$ amb major facilitat, multipliquem numerador i denominador per Cs (d'aquesta manera no apareixen trencats en el denominador):

$$I(s) = \frac{Cs}{\left(LCs^2 + 1\right)} \frac{1}{s} = \frac{C}{LCs^2 + 1} \tag{29}$$

Ara dividim numerador i denominador per LC perquè el coeficient de s^2 sigui 1:

$$I(s) = \frac{\frac{1}{L}}{s^2 + \frac{1}{LC}} \tag{30}$$

Si consulteu l'equació 20 de l'annex 3, veureu que la transformada d'un sinus de freqüència $\omega = 1/\sqrt{LC}$ és:

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) u(t) \xleftrightarrow{F(s)} \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{s^2 + \frac{1}{LC}} \tag{31}$$

Veiem llavors que la transformada inversa de $I(s)$ serà una funció sinus, encara que la constant del numerador en *I(s)* no és $1/\sqrt{LC}$. Si multipliquem el numerador i denominador de l'equació per $1/\sqrt{LC}$, el quocient no canviarà:

$$I(s) = \frac{\frac{1}{L}}{\left(s^2 + \frac{1}{LC}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} \tag{32}$$

però haurem aconseguit tenir escrita $I(s)$ com la transformada de la funció sinus que apareix en l'equació 20 de l'annex 3, multiplicada per la constant:

$$\frac{\frac{1}{L}}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} = \sqrt{\frac{C}{L}} \tag{33}$$

amb la qual cosa finalment, l'expressió del corrent en el domini del temps és:

$$i(t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) u(t) \tag{34}$$

Com abans, $u(t)$ indica que el corrent és nul per a instants anteriors a 0 (origen de temps), i que, a partir de $t = 0$, moment en què es connecta la font d'entrada, tenim un corrent sinusoïdal d'amplitud $\sqrt{C/L}$ i freqüència $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Per a calcular l'amplitud $\sqrt{C/L}$ i la freqüència $\omega = 1/\sqrt{LC}$ del corrent, hem de substituir L i C pels seus valors. Els valors de la bobina i el condensador són, respectivament, L = 1 mH i C = 1 μF. Per a fer els càlculs, és convenient que treballem amb unitats del sistema internacional ($L = 10^{-3}$ H i $C = 10^{-6}$ F). D'aquesta manera l'amplitud del corrent és:

$$\text{amplitud} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \sqrt{\frac{10^{-6}}{10^{-3}}} = 0{,}0316 \text{ A} \tag{35}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3}10^{-6}}} = 31{,}6 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \tag{36}$$

En el sistema internacional les unitats de l'amplitud són A (amperes) i les de la freqüència ω són rad/s (radiants per segon). Els valors calculats per a l'amplitud i la freqüència, els podem escriure també com 31,6 mA i 31,6 krad/s, respectivament.

Noteu que la freqüència del corrent és la mateixa que la freqüència de la tensió de sortida calculada en l'apartat *a*.

c) Com en els casos anteriors, calcularem la tensió $V_C(s)$ en el circuit transformat i després calcularem la seva transformada inversa.

Com ja vam fer en l'apartat *a*, atès que les impedàncies Ls i $1/Cs$ estan en sèrie, podem aplicar un divisor de tensió per a calcular la tensió en borns de la impedància $1/Cs$:

$$V_C(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs} + Ls} V_g(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs} + Ls} \cdot \frac{1}{s} \tag{37}$$

En l'expressió anterior, multipliquem numerador i denominador per Cs per evitar fraccions en numerador i denominador. Posteriorment, dividim numerador i denominador per LC. D'aquesta manera obtenim:

$$V_C(s) = \frac{1}{1 + LCs^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\frac{1}{LC}}{\left(s^2 + \frac{1}{LC}\right)s} \tag{38}$$

Noteu que no hem desenvolupat el producte del denominador multiplicant el primer factor $s^2 + \frac{1}{LC}$ per s. És convenient deixar-lo d'aquesta manera, sense desenvolupar, ja que per a calcular la transformada inversa l'haurem de descompondre en fraccions parcials d'acord amb les arrels del denominador. Resulta molt més senzill obtenir les arrels del denominador quan el tenim expressat com un producte de factors que a partir d'un polinomi de tercer grau, que és el que resultaria si desenvolupéssim el producte.

Procedim ara al càlcul de la transformada inversa de la tensió en l'equació 38. Per a això, descomponem $V_C(s)$ en fraccions parcials:

$$V_C(s) = \frac{A}{s - j\frac{1}{\sqrt{LC}}} + \frac{A^*}{s + j\frac{1}{\sqrt{LC}}} + \frac{B}{s} \tag{39}$$

Si teniu dubtes sobre el càlcul de la transformada inversa de l'exemple o no recordeu com es fa el càlcul de residus, consulteu l'annex 3.

Denotant el mòdul del residu A com a $|A|$ i el seu argument com a $\angle A$, l'expressió temporal de la tensió en borns del condensador es pot expressar de la manera següent:

$$v_C(t) = 2|A|\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \angle A\right)u(t) + Bu(t) \tag{40}$$

Calculem ara els residus A i B:

Recordeu que: $\sqrt{-1} = j$
i per tant: $j \cdot j = -1$

$$A = \left.\frac{\frac{1}{LC}}{\left(s + j\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)s}\right|_{s=j\frac{1}{\sqrt{LC}}} = \frac{\frac{1}{LC}}{2j\frac{1}{\sqrt{LC}}j\frac{1}{\sqrt{LC}}} = -\frac{1}{2} \tag{41}$$

$$B = \left.\frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{LC}}\right|_{s=0} = 1 \quad (42)$$

Substituint el valor obtingut per als residus en l'expressió 40 obtenim:

$$v_C(t) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + 180°\right)u(t) + u(t) \quad (43)$$

Un desfasament de 180° és equivalent a un canvi de signe, per la qual cosa l'expressió 43 es pot reescriure de la manera següent:

Un desfasament de 180° equival a un canvi de signe:
cos(x +180°) = −cos(x)

$$v_C(t) = -\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)u(t) + u(t) \quad (44)$$

Finalment, traient factor comú de la funció u(t), obtenim que la tensió en borns del condensador en el domini del temps és:

$$v_C(t) = \left[1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)\right]u(t) \quad (45)$$

La manera com hem obtingut la tensió $v_C(t)$ ens ha permès recordar com es fa el càlcul de transformades inverses de Laplace. Tanmateix, hi ha un camí molt més curt per a arribar a l'expressió de la tensió en borns del condensador. Vegem-ho.

En el circuit transformat (figura 9), podem calcular la tensió $V_C(s)$ aplicant la llei de Kirchhoff de les tensions: la tensió en borns del condensador és la tensió de la font $1/s$ menys la tensió en borns de l'inductor calculada en l'apartat *a*, equació 25:

$$V_C(s) = V_g(s) - V_o(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \frac{1}{LC}} \quad (46)$$

La transformada inversa de Laplace de l'expressió anterior ens dóna l'evolució temporal de la tensió en borns del condensador:

$$v_C(t) = \left[1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)\right]u(t) \quad (47)$$

D'aquesta manera hem arribat d'una manera molt més ràpida al resultat prèviament obtingut en l'equació 45.

Exemple 2

Calculeu la impedància d'entrada vista per la font de l'exemple 1.

Solució

La impedància vista per la font és la combinació sèrie de les impedàncies del condensador i inductor:

$$Z_{in}(s) = Ls + \frac{1}{Cs} = \frac{LCs^2 + 1}{Cs} \quad (48)$$

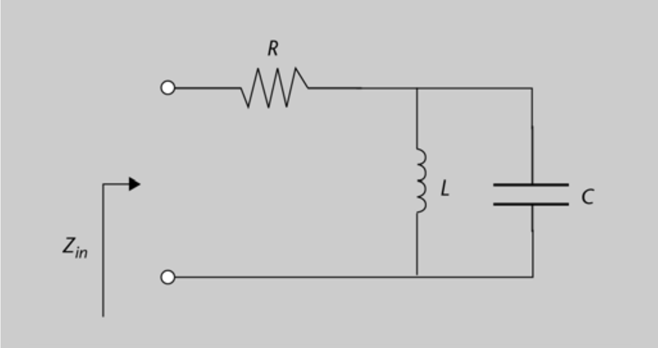
Recordeu que la impedància es calcula sempre per a condicions inicials iguals a 0.

Penseu que la impedància d'entrada és un paràmetre característic del circuit, que no depèn del fet que condensador o inductor puguin estar carregats o no estar-ho en moments determinats.

Exemple 3

Calculeu la impedància d'entrada (Z_{in}) del circuit de la figura 10, és a dir, la impedància vista des dels terminals indicats amb la fletxa:

Figura 10. Circuit compost de *R*, en sèrie amb el paral·lel de *L* i *C*.



Solució

La impedància vista des dels terminals d'entrada és la impedància de la resistència en sèrie amb el paral·lel de les impedàncies *Ls* i 1/*Cs*:

$$Z_{in}(s) = R + \left(Ls \| \frac{1}{Cs} \right) \tag{49}$$

La impedància equivalent de dues impedàncies en paral·lel es calcula exactament igual que la resistència equivalent de dues resistències en paral·lel, que vau veure en el mòdul "Circuits elèctrics". D'aquesta manera, podem desenvolupar l'expressió anterior de la manera següent:

$$Z_{in}(s) = R + \frac{Ls\frac{1}{Cs}}{Ls + \frac{1}{Cs}} \tag{50}$$

En l'expressió anterior, multipliquem el numerador i denominador per *Cs*, d'aquesta manera el quocient no canvia:

$$Z_{in}(s) = R + \frac{Ls}{LCs^2 + 1} \tag{51}$$

Si fem les operacions, obtenim finalment que:

$$Z_{in}(s) = \frac{RLCs^2 + Ls + R}{LCs^2 + 1} \tag{52}$$

2. Funció de xarxa

Ara ja sabem com analitzar un circuit amb condensadors i bobines, mitjançant la transformada de Laplace, sense necessitat d'utilitzar equacions diferencials. A vegades interessa fer aquesta anàlisi d'una manera general, de manera que no hàgim de refer tots els càlculs si canviem la font d'entrada del circuit. Per a aquest propòsit resulta molt útil definir la funció de xarxa del circuit. Això és el que farem en el subapartat 2.1, on veurem què s'entén per funció de xarxa i quines propietats té la funció de xarxa d'un circuit. En el subapartat 2.2 veurem la relació entre la funció de xarxa d'un circuit i la resposta del circuit a un impuls de tensió o corrent. En el subapartat 2.3 veurem la relació entre la funció de xarxa i la resposta del circuit a un esglaó de tensió o corrent.

2.1. Definició i propietats de la funció de xarxa

Si treballem en el domini transformat podem calcular la **funció de xarxa** d'un circuit. La funció de xarxa és un concepte de gran utilitat en la caracterització de circuits i sistemes lineals, no necessàriament elèctrics, sinó també mecànics, tèrmics, etc., i és fonamental per a l'anàlisi i disseny d'aquests circuits i sistemes. En particular, per a sistemes elèctrics, la funció de xarxa permet determinar i dissenyar paràmetres com amplificació i ample de banda que es veuran en mòduls posteriors.

Normalment, en un circuit connectem una font de tensió que proporciona una tensió, o una font de corrent que proporciona un corrent. Diem que aquesta tensió (o corrent) és l'**entrada** del circuit. Representarem aquesta entrada (sigui tensió o corrent) com $x(t)$. Analitzant el circuit podrem obtenir la seva **sortida** $y(t)$. Aquesta sortida $y(t)$ serà la tensió o corrent en algun dels components del circuit.

Matemàticament la funció de xarxa d'un circuit o sistema lineal es calcula com el quocient entre la transformada de Laplace de la sortida $Y(s)$ i la transformada de Laplace de l'entrada $X(s)$, per a condicions inicials (CI) iguals a 0:

$$H(s) = \left.\frac{Y(s)}{X(s)}\right|_{C.I.=0}$$

Desactivar una font de tensió i una de corrent

Tant en el domini del temps, com en el domini de Laplace, desactivar una font de tensió equival a substituir-la per un curtcircuit i desactivar una font de corrent equival a substituir-la per un circuit obert.

En el cas que el circuit tingui més d'una entrada, es calcula una funció de xarxa per a cadascuna de les entrades, considerant la resta d'entrades desactivades.

Les arrels del numerador de la funció de xarxa, és a dir, aquells valors de la variable s que anul·len el numerador, es denominen **zeros**.

Les arrels del denominador de la funció de xarxa, és a dir, aquells valors de la variable s que fan zero el denominador, es denominen **pols**.

El nombre de pols o, equivalentment, el grau del denominador determina **l'ordre de la funció de xarxa** (o ordre del circuit).

El terme funció de xarxa inclou les funcions immitància (nom genèric per a referir-se a impedància i admitància) en les quals sortida, $Y(s)$, i entrada, $X(s)$, es mesuren en el mateix parell de terminals; així com les denominades **funcions de transferència** en les quals sortida, $Y(s)$, i entrada, $X(s)$, es mesuren en diferents parells de terminals del circuit. En la resta del mòdul, ens ocuparem de les funcions de transferència que denominarem indistintament funcions de transferència o funcions de xarxa.

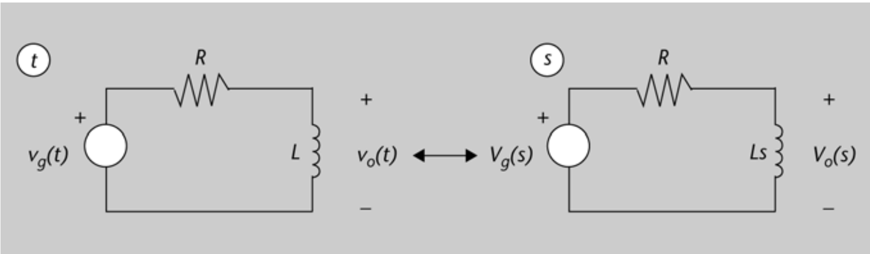
Impedància d'entrada d'un circuit

Podem veure la impedància d'entrada d'un circuit, $Z(s)$, com una funció de xarxa igual a $V(s)/I(s)$. La tensió seria la sortida i el corrent seria l'entrada del circuit.

Exemple 4

Calculeu la funció de transferència per al circuit RL de la figura 11. La figura representa el circuit en el domini del temps (t) i en el domini transformat de Laplace (s). Hem anomenat v_g la tensió de la font i v_o la tensió de sortida (la 'o' correspon a *output*, és a dir, sortida).

Figura 11. Circuit RL en el domini del temps (t) i en el domini transformat de Laplace (s)



Solució

Apliquem un divisor de tensió per calcular la tensió $V_o(s)$ en el circuit RL del domini transformat (figura 11):

$$V_o(s) = \frac{Ls}{R + Ls} V_g(s) \tag{53}$$

Dividint la sortida $V_o(s)$ entre l'entrada $V_g(s)$, obtindrem la funció de xarxa $H(s)$:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_g(s)} = \frac{Ls}{R + Ls} \tag{54}$$

Ara dividim numerador i denominador per L perquè el coeficient de la s (terme de major grau del denominador) sigui 1:

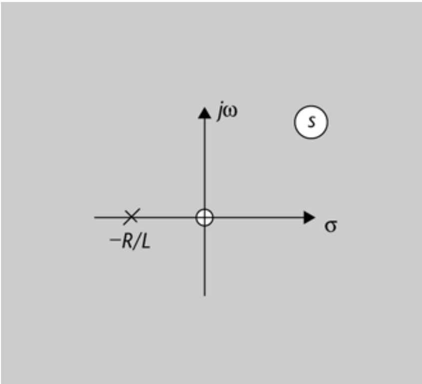
$$H(s) = \frac{s}{s + \frac{R}{L}} \tag{55}$$

Noteu que en l'equació 55 hem ordenat també el denominador. És habitual escriure les funcions de xarxa d'aquesta manera: amb els termes del numerador i denominador ordenats segons el grau de la s, de major a menor.

Ara que ja hem resolt l'exemple, aprofundirem una mica més en el seu resultat. Observeu que la funció de xarxa calculada té un zero a l'origen, això és, a $s = 0$, i un pol a $s = -R/L$. Com que té un únic pol, es tracta d'un circuit de primer ordre.

La representació en el **pla** *s* (de part real sigma, σ, i part imaginària omega, ω) dels pols i zeros ens proporciona el denominat **diagrama de zeros i pols**. En el diagrama de zeros i pols, els zeros es representen amb un cercle i els pols amb un aspa. Per a la funció de xarxa de l'exemple obtindríem el diagrama de zeros i pols de la figura 12. En la figura l'eix d'abscisses correspon a la part real de la variable *s*, això és σ, i l'eix d'ordenades correspon a la part complexa de la variable *s*, és a dir ω:

Figura 12. Diagrama de zeros i pols del circuit RL de la figura 11



Què hauria passat si haguéssim mesurat la sortida del circuit en borns de la resistència? I si la sortida del circuit fos el corrent circulant en lloc d'una tensió? La funció de xarxa que tindríem en cada cas seria diferent i diferent de la que hem calculat.

Comproveu que les funcions de xarxa que obtindríem si la sortida fos $V_R(s)$ (tensió en borns de la resistència) o si la sortida fos $I_L(s)$ (corrent que circula pel circuit) són, respectivament:

$$H_2(s) = \frac{V_R(s)}{V_i(s)} = \frac{R}{R + Ls} = \frac{R/L}{s + \frac{R}{L}} \tag{56}$$

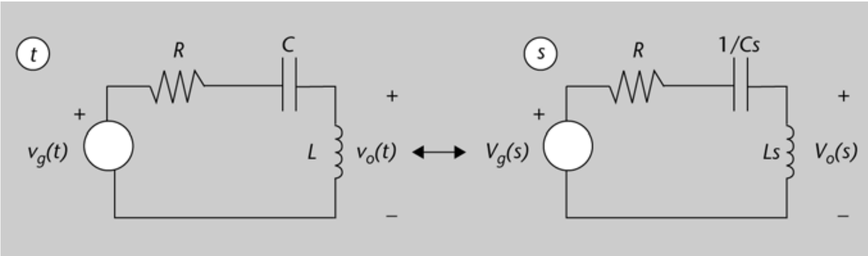
$$H_3(s) = \frac{I_L(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{R + Ls} = \frac{1/L}{s + \frac{R}{L}} \tag{57}$$

Què tenen en comú les tres funcions de xarxa calculades? Noteu que les tres tenen el mateix denominador (vegeu equacions 55, 56 i 57). En qualsevol de les tres el pol sempre és el mateix: $-R/L$.

Exemple 5

Calculeu la funció de xarxa per al circuit RLC de la figura 13.

Figura 13. Circuit RLC en el domini del temps (*t*) i en el domini transformat de Laplace (*s*)



Solució

Igual que en l'exemple anterior, podem aplicar un divisor de tensió per a calcular la tensió $V_o(s)$ en el circuit RLC de la figura 13:

$$V_o(s) = \frac{Ls}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} V_g(s) \quad (58)$$

Dividint $V_o(s)$ entre $V_g(s)$ obtindrem la funció de xarxa:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_g(s)} = \frac{Ls}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{LCs^2}{RCs + LCs^2 + 1} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (59)$$

on, a partir de l'expressió inicial, hem multiplicat numerador i denominador per Cs per evitar trencats, i després hem dividit numerador i denominador per LC perquè el coeficient de s^2 en el denominador (el terme de major grau del denominador) sigui 1.

Ara que ja hem resolt l'exemple, aprofundim una mica més en el seu resultat. Noteu que el grau del denominador de la funció de xarxa és 2, per la qual cosa es tracta d'un circuit de segon ordre.

Observeu el càlcul que hem fet en l'equació 59 per obtenir la funció de xarxa. Adoneu-vos que el condensador i l'inductor aporten cadascun una s al denominador, de manera que ens queda un denominador de grau 2. Normalment, el grau del denominador de la funció de xarxa coincideix amb el nombre total de condensadors i inductors. D'aquesta manera, observant el circuit, podem saber ràpidament quin ordre tindrà la seva funció de transferència. Noteu que el circuit RL de l'exemple 4 era de primer ordre ja que només hi havia un inductor.

Tornem al circuit RLC de la figura 13. Per calcular els pols hem d'igualar el denominador a zero i resoldre l'equació de segon grau resultant. Com que el denominador és un polinomi d'ordre 2, tindrem dos pols. Aquests dos pols podran ser reals o complexos depenent dels valors dels components. Comproveu, per exemple, que per als següents valors de resistència, inductància i capacitat els dos pols, p_1 i p_2, del circuit RLC de la figura 13 són: a) imaginaris purs, b) complexos conjugats amb part real negativa o c) reals. Les unitats dels pols són rad/s (radiants/segon):

a) $R = 0$, $L = 10$ mH i $C = 10$ nF:
$p_1 = j10^5$ rad/s, $p_2 = -j10^5$ rad/s

b) $R = 100\ \Omega$, $L = 10$ mH i $C = 10$ nF:

$p_1 = (-0{,}5 + j10) \cdot 10^4$ rad/s, $p_2 = (-0{,}5 - j10) \cdot 10^4$ rad/s

c) $R = 2{,}2\ \text{k}\Omega$, $L = 10$ mH i $C = 10$ nF:

$p_1 = -1{,}6 \cdot 10^5$ rad/s, $p_2 = -0{,}6 \cdot 10^5$ rad/s

Calculem ara les funcions de xarxa que obtindríem si la sortida fos $V_R(s)$ (tensió en borns de la resistència), $V_C(s)$ (tensió en borns del condensador) o $I_L(s)$ (corrent que circula pel circuit). En cadascun d'aquests casos, la funció de xarxa seria respectivament:

$$H_2(s) = \frac{V_R(s)}{V_g(s)} = \frac{R}{R + Ls + \dfrac{1}{Cs}} = \frac{RCs}{RCs + LCs^2 + 1} = \frac{\dfrac{R}{L}s}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}} \tag{60}$$

$$H_3(s) = \frac{V_C(s)}{V_g(s)} = \frac{\dfrac{1}{Cs}}{R + Ls + \dfrac{1}{Cs}} = \frac{1}{RCs + LCs^2 + 1} = \frac{1/LC}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}} \tag{61}$$

$$H_4(s) = \frac{I_L(s)}{V_g(s)} = \frac{1}{R + Ls + \dfrac{1}{Cs}} = \frac{Cs}{RCs + LCs^2 + 1} = \frac{\dfrac{1}{L}s}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}} \tag{62}$$

De nou, totes les funcions de xarxa definides en aquest circuit tenen alguna cosa en comú: el denominador, que sempre és el mateix sigui quina sigui la funció de xarxa definida en el circuit. Si el denominador sempre és el mateix també els pols seran sempre els mateixos.

Podem extreure algunes conclusions a partir dels exemples 4 i 5. Són les següents (tot i que algunes ja les hem comentat, les repetirem a fi de ser complets):

1) En l'expressió **final** de cap de les funcions de xarxa calculades apareix la transformada de Laplace de l'entrada. Per tant, la funció de xarxa només depèn del circuit i no de l'entrada.

2) Donat un circuit, qualsevol funció de transferència que s'hi defineixi té el mateix denominador (llevat de constants de proporcionalitat). Això significa que els pols d'un circuit són sempre els mateixos, independentment d'on mesurem la sortida del circuit.

3) Cada condensador i cada inductor introdueix una s en el denominador. Això fa que, normalment, l'ordre del circuit coincideixi amb el nombre total de condensadors i bobines. Hi ha algunes excepcions: per exemple, si tenim diversos condensadors/inductors en sèrie o en paral·lel, o si el valor d'un zero coincideix amb el d'un pol (en aquest cas, el pol i el zero es cancel·len). El que sí que podem dir amb total seguretat és que el grau del denominador mai no serà superior al nombre total de condensadors i inductors. La majoria de les vegades, no obstant això, ambdós nombres coincideixen.

4) Els coeficients de numerador i denominador de $H(s)$ són sempre reals, ja que els valors dels elements de circuit (resistències, capacitats i inductàncies) són reals. Com que els coeficients del denominador sempre són reals, en circuits de primer ordre l'únic pol serà real i en circuits de segon ordre els dos pols seran reals o apareixeran en parells complexos conjugats. El mateix podem dir per als zeros.

Aquestes quatre característiques són extrapolables a qualsevol circuit sigui de primer ordre, de segon ordre o d'un ordre superior.

2.2. Resposta impulsional

Ja hem vist què s'entén per funció de xarxa. Vegem ara la relació entre la funció de xarxa i la resposta impulsional.

La resposta impulsional és la resposta a la funció delta, $\delta(t)$. Físicament, una delta (o impuls) de tensió o corrent es pot interpretar com una tensió o corrent de gran amplitud que s'aplica durant un interval de temps molt curt.

La transformada de Laplace de la funció delta, $\delta(t)$, és igual que 1 (equació 15 de l'annex 3), per tant, la resposta a la funció $\delta(t)$ en el domini de Laplace és:

$$Y(s) = H(s) \cdot 1 = H(s) \tag{63}$$

La transformada inversa de $Y(s)$ proporciona la resposta en el domini del temps. Per tant, la resposta impulsional és la transformada inversa de la funció de xarxa.

$$y(t) = h(t) \leftrightarrow Y(s) = H(s) \tag{64}$$

Noteu que a partir de la resposta impulsional podem conèixer directament la funció de xarxa. Per tant, la resposta impulsional permet caracteritzar perfectament un circuit o sistema. D'aquí, el gran interès teòric de la resposta impulsional.

A partir de la resposta impulsional, podem calcular la resposta en el domini del temps $y(t)$ per a qualsevol entrada $x(t)$ mitjançant el que s'anomena un **producte de convolució** (indicat amb el símbol *) entre la resposta impulsional $h(t)$ i l'entrada $x(t)$. La convolució entre la resposta impulsional $h(t)$ i l'entrada $x(t)$ en el domini del temps és equivalent al producte de la funció de xarxa $H(s)$ i la transformada de l'entrada $X(s)$ en el domini transformat:

$$y(t) = h(t) * x(t) \leftrightarrow Y(s) = H(s)X(s) \tag{65}$$

El càlcul de la resposta temporal $y(t)$ mitjançant convolució té un interès pràctic en sistemes digitals. Tanmateix, en sistemes analògics (que és el cas que ens ocupa) resulta més senzill trobar la resposta $Y(s)$ en el domini de Laplace i calcular després la seva inversa $y(t)$. Per tant, en la resta del mòdul operarem d'aquesta manera i no amb la convolució.

Exemple 6

Calculeu la funció de transferència del sistema la resposta impulsional del qual és:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \tag{66}$$

on R i C són constants.

Solució

Tal com acabem de veure, la funció de xarxa d'aquest sistema és la transformada de Laplace de la resposta impulsional. D'acord amb l'equació 17 de l'annex 3, aquesta transformada és:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \tag{67}$$

2.3. Resposta a l'esglaó

Encara que a la pràctica podríem aproximar la funció delta mitjançant un pols molt estret, a nivell experimental s'utilitza més la resposta a un senyal esglaó.

La resposta a l'esglaó, anomenada també **resposta indicial**, és la resposta a un esglaó unitari, això és, d'amplitud 1: $x(t) = u(t)$. La resposta a l'esglaó permet conèixer com respon un circuit a canvis bruscos, per exemple, en connectar o desconnectar la font d'entrada.

La resposta a l'esglaó és una mesura experimental molt utilitzada perquè permet avaluar ràpidament aspectes del circuit com ara l'estabilitat i la durada del transitori, que es veuran en els apartats 4 i 5 d'aquest mòdul. En amplificadors d'àudio, per exemple, la resposta a l'esglaó, essent un test molt simple, és capaç de revelar efectes indesitjables que afectaran la reproducció d'un senyal musical.

Ja sabem que la transformada d'un esglaó unitari és $1/s$. A partir de la funció de xarxa, i amb $x(t) = u(t)$, la resposta $Y(s)$ en el domini de Laplace és:

$$Y(s) = H(s)X(s) = H(s)\frac{1}{s} \tag{68}$$

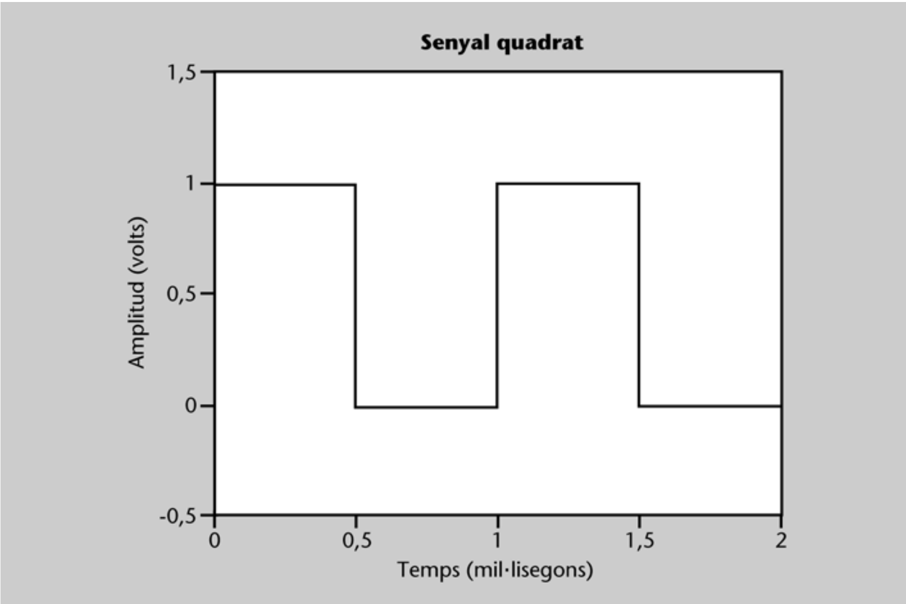
per la qual cosa, d'acord amb l'equació 12 de l'annex 3, en el domini del temps la resposta a l'esglaó coincidirà amb la integral entre l'instant 0 i l'instant t de la resposta impulsional $h(t)$:

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau \tag{69}$$

En l'equació 69 la variable d'integració s'ha indicat com a τ (tau) per a distingir-la del límit de la integral t.

A la pràctica, per a mesurar experimentalment la resposta a l'esglaó es genera un senyal quadrat com, per exemple, el de la figura 14. Entre 0 i 0,5 mil·lisegons, el senyal quadrat de la figura 14 és equivalent a un senyal esglaó unitari (d'amplitud 1).

Figura 14. Forma temporal d'una tensió, $v(t)$, quadrada



3. Components de la resposta en circuits amb memòria

En aquest punt del mòdul ja hem après a calcular la resposta d'un circuit amb condensadors i bobines, treballant directament amb el circuit transformat o multiplicant la funció de xarxa per la transformada de Laplace de l'entrada. En aquest apartat veurem quins components podem trobar en aquesta resposta.

Atès que els circuits pràctics es dissenyen per a actuar sobre un senyal d'entrada i realitzar-hi alguna funció, per exemple, amplificar-lo, reproduir-lo, equalitzar-lo, etc., en la resposta n'hauríem de trobar una versió amplificada, equalitzada, etc. d'aquest senyal d'entrada.

El que succeeix és que els circuits que contenen condensadors i inductors "semblen tenir criteri propi". Per què diem això? Ho diem perquè els circuits amb condensadors i bobines afegeixen una resposta addicional a la resposta desitjada, per a la qual s'han dissenyat (vegeu paràgraf anterior). Si parlem col·loquialment podríem dir que el circuit afegeix la seva pròpia "firma". Aquesta "firma" és el que es denomina resposta lliure o pròpia.

Resposta lliure i resposta transitòria

En la majoria de circuits, la resposta lliure és transitòria, com veurem més endavant. Però no sempre és així: resposta lliure i resposta transitòria són conceptes diferents.

La resposta lliure, afegida pel circuit a la resposta desitjada, pot desaparèixer o no amb el temps, depenent dels pols del circuit. Un altaveu, per exemple, al qual s'ha enviat un determinat senyal (imaginem, per exemple, el so d'un instrument) afegeix la seva pròpia resposta al senyal amplificat i, de vegades, continua vibrant una vegada finalitzada l'entrada. Aquest efecte és el que es denomina *ringing* i és totalment indesitjat, ja que l'altaveu produeix sons que no formen part del senyal original.

Per què ocorre això? La resposta $Y(s)$ en el domini de Laplace es pot descompondre en una sèrie de termes (fraccions parcials), cadascun dels quals correspon a una de les arrels del denominador d'$Y(s)$. Com que $Y(s)$ és el producte d'$X(s)$ i $H(s)$, algunes d'aquestes arrels provenen de l'entrada $X(s)$ i d'altres provenen d'$H(s)$. Les arrels procedents d'$H(s)$, els pols del circuit, són precisament les que provoquen l'aparició de la resposta lliure.

Per a veure això matemàticament, considerem una funció de xarxa el denominador de la qual, $Q(s)$, té com a arrels: $p_1, p_2, \cdots, p_n$ (aquestes arrels són els pols del circuit). Si s'indica el polinomi del numerador com a $P(s)$, la funció de transferència es pot escriure com a:

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \tag{70}$$

Considerem també una entrada, la transformada de Laplace $X(s)$ de la qual és el quocient de dos polinomis $N(s)$ i $D(s)$. Si el denominador $D(s)$ té com a arrels $s_1, s_2, \cdots, s_m$, podem escriure la transformada de Laplace $X(s)$ com a:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_m)} \tag{71}$$

La resposta *Y(s)* del circuit amb funció de xarxa *H(s)* per a l'entrada *X(s)* és:

$$Y(s) = H(s)X(s) \tag{72}$$

Utilitzant les equacions 70 i 71, *Y(s)* es pot escriure:

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{P(s)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)} \frac{N(s)}{(s-s_1)\cdots(s-s_m)} \tag{73}$$

Podem descompondre *Y(s)* en fraccions parcials de la manera següent:

$$Y(s) = H(s)X(s) = \underbrace{\frac{A_1}{(s-p_1)} + \ldots + \frac{A_n}{(s-p_n)}}_{\text{Termes procedents de la funció de xarxa}} + \underbrace{\frac{B_1}{(s-s_1)} + \ldots + \frac{B_m}{(s-s_m)}}_{\text{Termes procedents de la transformada de l'entrada}} \tag{74}$$

Les constants $A_1, \ldots, A_n$ i $B_1, \ldots, B_m$ les calcularíem tal com s'explica en l'annex 3.

Noteu que *Y(s)* conté uns termes procedents de la funció de xarxa (són les fraccions parcials corresponents als pols del circuit ($p_1, \cdots, p_n$)) i uns altres que procedeixen de l'entrada (són les fraccions parcials corresponents a les arrels del denominador de l'entrada ($s_1, \cdots, s_m$)).

Els termes corresponents als pols del circuit (procedents de la funció de xarxa) donaran lloc en el domini del temps a la denominada **resposta lliure o pròpia**. La resposta lliure seria la solució a l'equació homogènia quan analitzem el circuit mitjançant equacions diferencials.

Els termes que provenen de l'entrada donaran lloc en el domini del temps a la denominada **resposta forçada**, la forma de la qual depèn de les arrels en el denominador de la transformada de l'entrada (pols forçats). La resposta forçada seria la solució particular que obtenim quan analitzem el circuit mitjançant equacions diferencials.

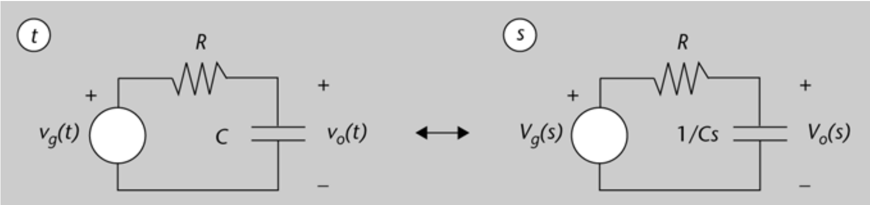
En resum, la resposta completa d'un circuit té dos components: la resposta lliure o natural, que representa la "firma" del circuit, i la resposta forçada, la forma de la qual depèn de l'entrada que se li aplica externament.

Exemple 7

Per al circuit de la figura 15, on R val 1 kΩ i C val 1 μF, calculeu la tensió de sortida $v_o(t)$, distingint entre resposta lliure i forçada, per a una entrada esglaó i una entrada sinusoïdal de freqüència ω_0 (llegiu-hi 'omega subzero'):

a) $v_i(t) = 10u(t)$
b) $v_i(t) = 10\sin(\omega_0 t)u(t)$

Figura 15. Circuit RC en el domini del temps (*t*) i en el domini transformat de Laplace (*s*)



Solució

Calculem, en primer lloc, la funció de xarxa que, una vegada calculada, ens servirà per a qualsevol de les dues entrades. Per això calculem la tensió $V_o(s)$ en funció de $V_g(s)$ mitjançant un divisor de tensió, i dividim el resultat per $V_g(s)$. D'aquesta manera obtenim:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_g(s)} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \tag{75}$$

Una vegada obtinguda la funció de xarxa, podrem trobar la resposta del circuit en el domini transformat sense haver de tornar a analitzar el circuit de nou, simplement multiplicant la funció de xarxa per la transformada de la tensió esglaó (apartat *a*) i de la tensió sinus (apartat *b*) i calculant després la transformada inversa del resultat.

a) La transformada de l'entrada d'aquest apartat (esglaó d'amplitud 10 V) és $10/s$. Multiplicant $H(s)$ per la transformada de l'entrada, obtenim que la tensió $V_o(s)$ és:

$$V_0(s) = H(s)V_g(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \frac{10}{s} \tag{76}$$

Les arrels del denominador de $V_o(s)$ són $s = -1/RC$, que és el pol del circuit, i $s = 0$ que és el pol forçat. Per tant, podem descompondre $V_0(s)$ en fraccions parcials de la manera següent:

$$V_0(s) = H(s)V_g(s) = \frac{A}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{B}{s} \tag{77}$$

on A i B són constants. El primer terme a $V_0(s)$ prové del circuit, per la qual cosa es correspon amb la resposta lliure. D'acord amb la llista de transformades bàsiques de l'annex 3, en el temps, la resposta lliure serà una exponencial decreixent (primer sumand de l'equació 78).

L'últim terme prové de l'entrada, i donarà lloc a la resposta forçada, que en el domini del temps serà un esglaó, **com l'entrada**, però d'amplitud B (segon sumand de l'equació 78).

Per tant, en el domini del temps, $v_o(t)$ és:

$$v_o(t) = \underbrace{Ae^{-t/RC}u(t)}_{\text{Resposta lliure}} + \underbrace{Bu(t)}_{\text{Resposta forçada}} \tag{78}$$

D'acord amb l'expressió 29 de l'annex 3, A i B són:

$$A = \left. \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \frac{10}{s} \left(s + \frac{1}{RC} \right) \right|_{s=-1/RC} = -10 \tag{79}$$

$$B=\left.\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}\frac{10}{s}s\right|_{s=0}=10 \tag{80}$$

Com, a més, $RC = 10^3 10^{-6} = 10^{-3}$, la tensió de sortida en el domini del temps és:

$$v_o(t)=\underbrace{-10e^{-t/10^{-3}}u(t)}_{\text{Resposta lliure}}+\underbrace{10u(t)}_{\text{Resposta forçada}}=10\left(1-e^{-t/10^{-3}}\right)u(t) \tag{81}$$

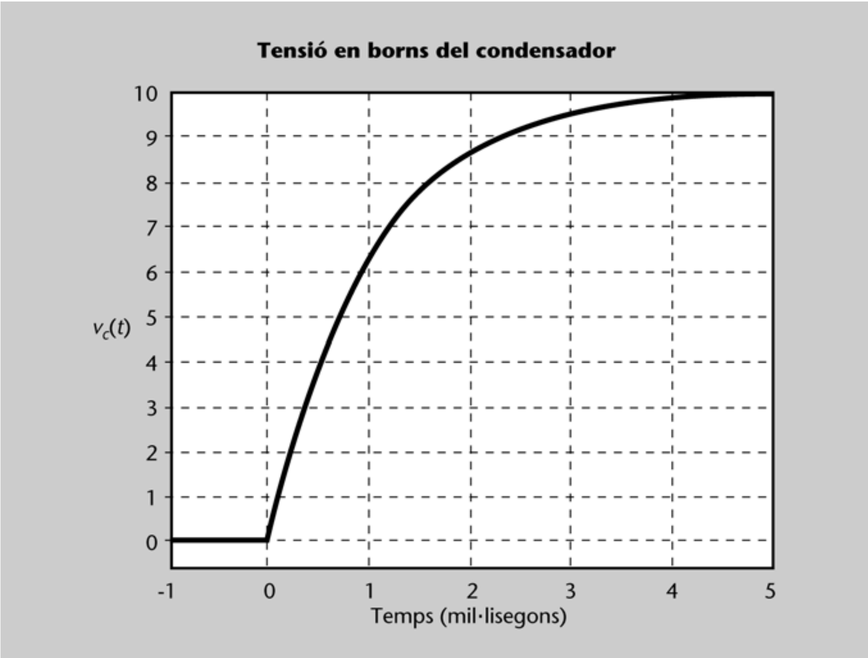
La tensió $v_o(t)$ als borns del condensador està formada per una tensió exponencial (resposta lliure) que desapareixerà amb el temps i una tensió constant (resposta forçada).

En la figura 16 es representa l'evolució temporal de l'amplitud de la tensió de sortida, és a dir, la funció $v_o(t)$. Aquesta tensió és zero abans de $t = 0$. A partir de $t = 0$ la tensió $v_o(t)$ és la suma d'una tensió exponencial i una tensió contínua, és a dir, constant.

Règim transitori

Recordeu que en el mòdul "Circuits RLC" vam veure que el règim transitori en un circuit RL, RC o RLC amb entrada contínua (DC) va des que es connecta o desconnecta l'entrada fins que la sortida del circuit (tensió o corrent) assoleix un valor constant. Durant el transitori la resposta del circuit conté resposta lliure i resposta forçada. Quan la resposta lliure es fa zero acaba el transitori, és a dir, el règim transitori acaba quan acaba la resposta lliure.

Figura 16. Evolució temporal de la tensió als borns del condensador per a un circuit RC amb entrada esglaó



La corba de la figura 16 ja la coneixíem, l'havíem vist quan estudiàvem la manera com es carrega un condensador. Ara sabem que la tensió als borns del condensador segueix aquesta evolució exponencial a causa de la resposta lliure. El circuit afegeix aquesta resposta lliure a la contínua que prové de l'entrada.

b) La transformada de la tensió sinusoïdal d'aquest apartat és:

Si no recordeu la transformada de Laplace de la funció sinus, reviseu la llista de transformades bàsiques de l'annex 3.

$$V_g(s)=\frac{10\omega_0}{\left(s^2+\omega_0{}^2\right)} \tag{82}$$

La resposta per a aquesta entrada és:

$$V_o(s)=H(s)V_g(s)=\frac{\frac{1}{RC}}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}\frac{10\omega_0}{\left(s^2+\omega_0{}^2\right)} \tag{83}$$

Per a calcular la transformada inversa de $V_0(s)$, primer descomponem $V_0(s)$ en fraccions parcials:

$$V_o(s)=\frac{A}{s+\frac{1}{RC}}+\frac{B}{s-j\omega_0}+\frac{B^*}{s+j\omega_0} \tag{84}$$

El primer terme de $V_0(s)$ en l'equació 84 prové de la funció de xarxa per la qual cosa es correspon amb la resposta lliure. La transformada inversa d'aquest primer terme és una exponencial decreixent. És a dir, en el temps, la resposta lliure torna a ser una exponencial decreixent com en l'apartat *a*. És lògic, ja que el pol del circuit no pot canviar amb l'entrada: no depèn d'ella, només del circuit.

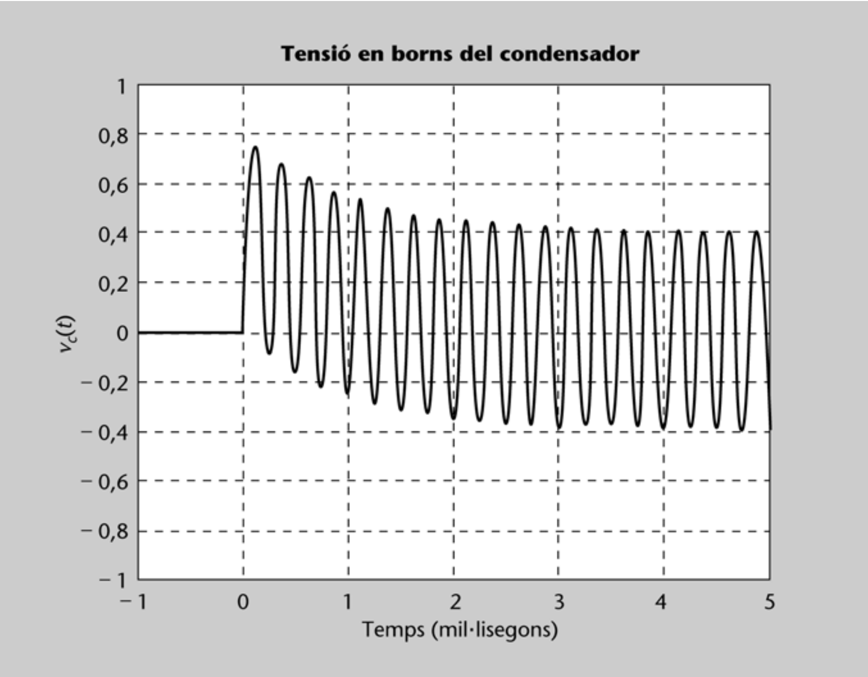
Els dos últims termes en 84 provenen de l'entrada, i donaran lloc a la resposta forçada que serà una sinusoide de freqüència ω_0, **com l'entrada**, però amb diferent fase i diferent amplitud.

En el domini del temps $v_o(t)$ serà per tant:

$$v_o(t) = \underbrace{Ae^{-t/RC}u(t)}_{\text{Resposta lliure}} + \underbrace{2|B|\cos(\omega_o t + \angle B)u(t)}_{\text{Resposta forçada}} \tag{85}$$

No calcularem els residus perquè no aporten informació addicional respecte al que estem estudiant en aquest apartat. No obstant això, observeu la forma que tindria ara la tensió $v_o(t)$ en la figura 17. Aquesta tensió està formada per una tensió sinusoïdal de freqüència ω_0 (com l'entrada) més una tensió exponencial (resposta lliure). Observeu que l'exponencial acaba tendint a zero i només queda la sinusoide.

Figura 17. Evolució temporal de la tensió als borns del condensador per a un circuit RC amb entrada sinusoïdal



Finalitzats els apartats *a* i *b*, podem concloure l'exemple dient que:

- Tant per a entrada constant com sinusoïdal, el circuit RC sempre afegeix en la resposta una exponencial decreixent. Aquesta és la "firma" del circuit: **la resposta lliure o pròpia**.
- A més de la resposta lliure, quan l'entrada és constant, apareix un component constant a la sortida. Aquesta és la **resposta forçada**. Quan l'entrada és una sinusoïdal, en lloc d'una constant, apareix un component sinusoïdal a la sortida, de la mateixa freqüència que la de l'entrada, encara que amb diferent fase i diferent amplitud.

Què passaria si apaguéssim la font?

Sabem que quan apaguem la font en un circuit amb condensadors i/o bobines, la inèrcia d'aquests components fa que la tensió o corrent que circula pel circuit no desaparegui immediatament. Per exemple, quan mesurem el corrent que circula pel circuit amb un amperímetre, de vegades s'observa, en apagar la font, com l'agulla oscil·la abans de detenir-se finalment en el zero. Això succeeix perquè la resposta lliure torna a arrencar cada vegada que hi ha un canvi en el circuit. Per tant, en apagar la font d'entrada, no tindrem un component forçat a la sortida, però la resposta lliure del circuit arrencarà de nou. Per al circuit de l'exemple 7 veuríem llavors que la tensió de sortida és una exponencial que tendeix a zero.

Exemple 8

Per a una tensió d'entrada d'1 V connectada en $t = 0$, això és, $v_g(t) = u(t)$, un circuit proporciona la resposta següent:

$$v_o(t) = 3e^{-t}u(t) + 2e^{-4t}u(t) + 0{,}5u(t) \qquad (86)$$

Indiqueu quins termes corresponen a la resposta lliure i quins termes corresponen a la resposta forçada.

Solució

La resposta forçada procedeix de les arrels introduïdes pel senyal d'entrada en $V_o(s)$. Això fa que la resposta forçada a un senyal esglaó com l'entrada, sigui un altre senyal esglaó amb diferent amplitud. Observant l'expressió 86, veiem que hi ha un esglaó d'amplitud 0,5: aquest és la resposta forçada.

$$v_{o,forçada}(t) = 0{,}5u(t) \qquad (87)$$

La resta de components en la resposta només poden procedir del circuit: són la resposta lliure.

$$v_{o,lliure}(t) = 3e^{-t}u(t) + 2e^{-4t}u(t) \qquad (88)$$

4. Estabilitat

En l'apartat anterior hem vist que un circuit amb condensadors i bobines, dissenyat per a realitzar una certa funció sobre l'entrada, proporciona, a més de la resposta per a la qual s'ha dissenyat, una resposta lliure addicional. Aquesta resposta lliure és, per tant, indesitjada i interessaria que desaparegués com més aviat millor. Això ens porta directament al concepte d'estabilitat.

Quan la resposta lliure és transitòria, és a dir, desapareix amb el temps, es diu que el circuit és **estable**. El règim transitori d'un circuit estable acaba quan acaba la resposta lliure.

Si la resposta lliure no desapareix amb el temps però sí que està afitada, és a dir, el seu valor màxim i mínim no excedeixen d'uns certs límits, es diu que el circuit és **marginalment estable**.

Si la resposta lliure divergeix (tendeix a créixer indefinidament en avançar el temps), es diu que el circuit és **inestable**. A la pràctica la resposta lliure creixerà fins a un cert valor de saturació.

En circuits inestables no podem parlar de règim transitori, ja que el circuit no arriba mai al règim permanent.

En resum, segons la seva estabilitat, els circuits es classifiquen en:

- circuits estables (la resposta lliure és transitòria);
- circuits marginalment estables (la resposta lliure no és transitòria però està afitada);
- circuits inestables (la resposta lliure divergeix).

Tal com ja hem dit, els circuits pràctics estan dissenyats per a fer alguna funció: transmetre, rebre, reproduir, equalitzar, etc. un senyal d'entrada. La part de la resposta que interessa és la resposta forçada, que és la que ve de l'entrada, i com més aviat desaparegui la resposta lliure millor. Per aquest motiu els circuits que processen senyals han de ser circuits estables.

Els circuits marginalment estables tenen també interès pràctic, ja que és el cas, per exemple, dels oscil·ladors, imprescindibles per a implementar el modulador i desmodulador d'un sistema de comunicacions.

I els circuits inestables? Per a què serveix un circuit inestable? Absolutament per a res. La sortida d'un circuit inestable tendeix a créixer amb independència de l'entrada, de manera que a la seva sortida no podrem discernir l'entrada processada, ja que únicament mesurarem una tensió de saturació. Si el nostre propòsit era obtenir aquesta tensió, la podríem haver pres directament de la font d'alimentació. Per això, els circuits inestables no tenen cap interès pràctic: són el resultat d'un disseny o muntatge erroni del circuit.

En el cas de circuits passius (implementats només amb components passius: resistències, bobines i condensadors), no és necessari preocupar-se: un circuit passiu no pot tenir mai un comportament inestable. Això és lògic, ja que un circuit passiu no pot donar a la sortida més energia que la que té a l'entrada, i per aquesta raó la sortida no pot créixer sense control amb independència del senyal d'entrada.

Tots els circuits que hem vist fins ara són passius. L'únic component vist prèviament que no ha sortit en aquest mòdul és el díode, que no és lineal, però sí passiu. Els components actius com, per exemple, el transistor (que no estudiareu aquí) poden oferir a la sortida una energia més gran que la que tenen a la seva entrada, per la qual cosa la sortida pot divergir, encara que l'entrada estigui afitada.

Un circuit implementat amb components actius pot ser inestable. La qüestió ara és la següent: tots els circuits actius seran inestables? Certament no, ja que si fos així no existirien i, sens dubte, no ens plantejaríem utilitzar-los, però hem de tenir una cura especial en el seu disseny perquè no tinguin un comportament inestable.

5. Resposta lliure o natural

Hem vist que la resposta d'un circuit amb memòria conté un component forçat que ve de l'entrada i un component lliure afegit pel circuit. També hem estudiat que, tret dels oscil·ladors, els circuits d'interès pràctic són aquells que tenen una resposta lliure transitòria, és a dir, els circuits estables.

En aquest apartat aprofundirem una mica més en la resposta lliure dels circuits i en la relació entre la resposta lliure i la funció de xarxa. L'objectiu d'aquest apartat és que siguem capaços de discernir ràpidament en un circuit quina forma i quina durada tindrà la seva resposta lliure, per a saber quant trigarà el circuit a donar una resposta estable (si és que arriba a fer-ho).

En el subapartat 5.1 treballarem amb els circuits més senzills, que són els de primer ordre. Seguirem amb els circuits de segon ordre en el subapartat 5.2 i, finalment, en el subapartat 5.3 extrapolarem els resultats obtinguts a circuits d'ordre superior a dos.

5.1. Circuits de primer ordre

Els circuits de primer ordre tenen un únic pol. Per tant, el denominador de la funció de xarxa serà un polinomi de grau 1. Indicant com a $N(s)$ el numerador de la funció de xarxa, podem escriure la funció de xarxa així:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_g(s)} = \frac{N(s)}{s+p} \tag{89}$$

L'únic pol de la funció de xarxa de l'equació 89 serà real i igual a $-p$. A causa d'aquest pol, la resposta contindrà un component exponencial que serà la resposta lliure.

En un circuit de primer ordre la resposta lliure és una exponencial:

$$V_{o,lliure}(s) = \frac{A}{s+p} \rightarrow v_{o,lliure}(t) = Ae^{-pt}u(t) \tag{90}$$

Depenent de si el pol és positiu, negatiu o nul tindrem diferents formes per a la resposta lliure:

- Pol positiu. Si el pol és positiu, la resposta lliure és una exponencial creixent, sigui quina sigui l'entrada. Tindrem, per tant, un circuit inestable, sense ús pràctic.

- Pol nul. Si el pol és nul, la resposta lliure serà un senyal continu (constant) i el circuit serà marginalment estable.

- Pol negatiu. Si el pol és negatiu, la resposta lliure és una exponencial decreixent, per tant el sistema serà estable. És el cas dels circuits RL i RC, l'únic pol dels quals val $-R/L$ i $-1/RC$ respectivament.

En circuits estables, la resposta lliure exponencial de l'equació 90 se sol escriure també com a:

$$v_{o,lliure}(t) = Ae^{-t/\tau}u(t) \tag{91}$$

on τ (llegiu-hi tau) és la constant de temps de l'exponencial, que és igual que l'invers del valor absolut del pol: $\tau = 1/p$. (Tal com hem escrit la funció de xarxa, el pol és a $s = -p$ i, per tant, el seu valor absolut és p.)

Per a circuits RL i RC la constant de temps (τ) serà L/R i RC respectivament (reviseu el mòdul "Circuits RLC"). Si pensem en valors comercials habituals: kΩ per a resistències, mH per a bobines, i nF per a condensadors, la constant de temps en circuits RL i RC serà de l'ordre de 10^{-6} segons, és a dir, de l'ordre de μs (microsegons).

Valor del pol en circuits RL i RC

No cal que memoritzeu el valor del pol en circuits RL i RC. És immediat calcular-lo. Per exemple, en el circuit RL, qualsevol divisor de tensió que plantegem en el circuit, tindrà com a denominador: $R + Ls$. Si dividim per L perquè la s quedi amb coeficient 1, ja tenim que el pol és a $-R/L$.

Qüestió

Si es vol disminuir la durada del transitori en un circuit RL, què hem de fer, augmentar o disminuir el valor de la resistència?

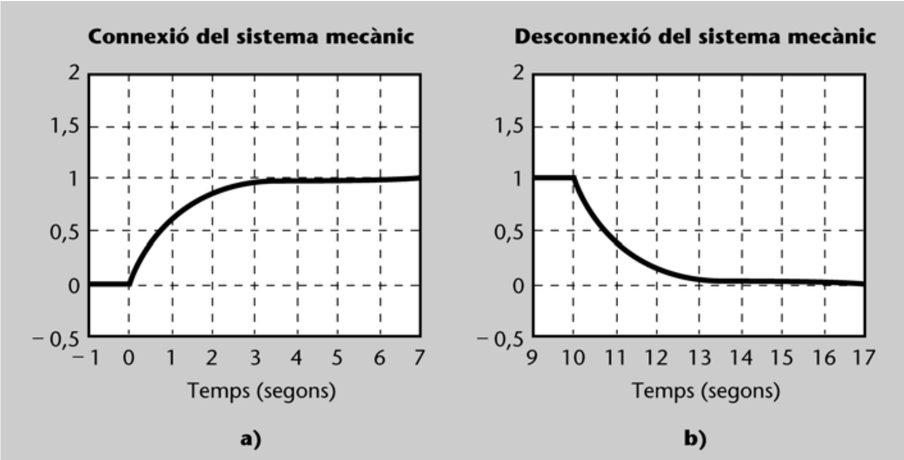
Resposta

El transitori és molt més llarg com major sigui la constant de temps. Com que la constant de temps en un circuit RL és L/R, per a disminuir la durada del transitori hem d'augmentar el valor de la resistència.

En sistemes estables, la **constant de temps** és una mesura estàndard de la resposta temporal de circuits elèctrics, electrònics, mecànics i altres sistemes. Per exemple, si un sistema mecànic té una constant de temps d'1 segon, sabrem que, **en connectar-lo**, la transició entre el valor inicial de la resposta i el valor que assolirà en règim permanent s'haurà completat aproximadament fins al 63% després d'1 segon i que el transitori haurà finalitzat a tots els efectes pràctics després de 5 segons (5 vegades la constant de temps). **En desconnectar-lo**, la resposta haurà decaigut aproximadament un 37% després d'1 segon i serà pràcticament 0 després de 5 segons (5 vegades la constant de temps).

La figura 18 mostra l'evolució de la resposta d'aquest sistema en connectar-lo en $t = 0$ (figura 18a) i en desconnectar-lo en $t = 10$ segons (figura 18b). Observeu que el transitori ha desaparegut transcorreguts 5 segons (**5 vegades la constant de temps**) des de la connexió o la desconnexió.

Figura 18. Resposta en connectar (a) i desconnectar (b) un sistema mecànic de constant de temps 1 s



Exemple 9

Per a una tensió d'entrada d'1 V connectada en t = 0, és a dir $v_g(t) = u(t)$, un circuit de primer ordre proporciona la resposta següent:

$$v_o(t) = -0{,}5e^{-10^6 t}u(t) + 0{,}5u(t) \tag{92}$$

a) Discutiu l'estabilitat del circuit.
b) Calculeu el valor del pol del circuit.
c) Indiqueu la durada del transitori.

Solució

a) El component lliure a $v_o(t) = -0{,}5e^{-10^6 t}u(t) + 0{,}5u(t)$ és l'exponencial. És una exponencial que tendeix a 0. En ser transitòria la resposta lliure, el circuit és estable.

b) Com que la resposta lliure és originada pels pols del circuit, podem dir que el circuit té un pol de valor -10^6 rad/s.

c) La constant de temps de l'exponencial és 10^{-6} segons (l'invers del valor absolut del pol). El règim transitori finalitzarà quan desaparegui la resposta lliure, aproximadament després de 5 vegades la constant de temps. Per tant, podem dir que la durada del transitori és aproximadament $5 \cdot 10^{-6}$ segons, és a dir, 5 μs.

5.2. Circuits de segon ordre

Si la constant de temps és el paràmetre característic de la resposta temporal en circuits de primer ordre, en circuits de segon ordre els paràmetres característics són:

- el coeficient d'esmorteïment (o factor d'esmorteïment) que s'indica amb la lletra grega: ζ (zeta).
- la freqüència natural: ω_0 (llegiu-hi 'omega zero').

La funció de xarxa de qualsevol sistema de segon ordre es pot escriure en funció del coeficient d'esmorteïment ζ i la freqüència natural ω_0 de la manera següent ($N(s)$ denota el polinomi del numerador):

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{N(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \tag{93}$$

Aquesta manera d'escriure la funció de xarxa es denomina **forma canònica de segon ordre**.

Per a calcular els pols igualem a zero el denominador de la funció de xarxa i resolem l'equació de segon grau resultant. D'aquesta manera, obtenim que els pols són:

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad (94)$$

L'equació de segon grau té dues solucions (a causa del ± de la fórmula), per la qual cosa tenim dos pols.

Importància de la forma canònica

Quan es calcula la funció de transferència d'un circuit, convé passar-la sempre a la seva forma canònica, perquè en cas contrari els càlculs d'estabilitat sortiran incorrectes. També es poden produir errors en el càlcul de la transformada inversa de Laplace si no es passa primer la funció de xarxa a forma canònica.

Depenent del valor del coeficient d'esmorteïment els pols prendran diferent valor i, en conseqüència, la resposta lliure tindrà diferent forma. Els casos que podem distingir són:

- Circuit estable: subesmorteït ($0 < \zeta < 1$), amb esmorteïment crític ($\zeta = 1$) o sobreesmorteït ($\zeta > 1$).
- Circuit marginalment estable: oscil·lador ($\zeta = 0$).
- Circuit inestable ($\zeta < 0$).

A continuació, explicarem en detall els cinc casos: a) subesmorteït, b) sobreesmorteït, c) esmorteïment crític, d) oscil·lador i e) inestable.

a) Circuit subesmorteït

Un sistema amb esmorteïment entre 0 i 1 ($0 < \zeta < 1$) té un esmorteïment positiu, per la qual cosa intuïtivament interpretarem que oferirà una resposta lliure esmorteïda.

Vegem-ho més formalment. Per a esmorteïment entre 0 i 1 es compleix que $\zeta^2 < 1$ per la qual cosa el radicand en l'expressió general dels pols, equació 94, és negatiu. Si el radicand és negatiu, els pols són complexos. Utilitzant que $\sqrt{-1} = j$, podem escriure els pols de la manera següent:

Nombres complexos

Per a recordar què són i com es treballa amb nombres complexos, reviseu l'annex 4, "Nombres complexos".

$$0 < \zeta < 1 \Rightarrow p_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2} \qquad (95)$$

Noteu, a més, que si $0 < \zeta < 1$ la part real dels pols és negativa.

En tenir dos pols, podrem descompondre la resposta lliure $V_{o,lliure}(s)$ en dues fraccions parcials, una per cadascun dels pols.

$$V_{o,lliure}(s) = \frac{A}{s + \zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{A^*}{s + \zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (96)$$

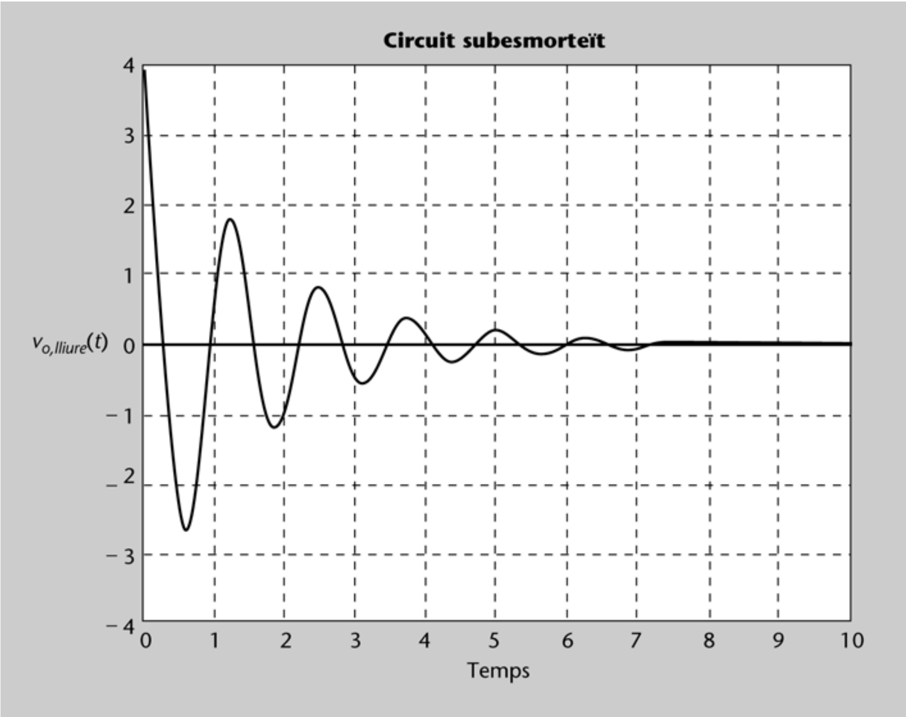
Com els pols són complexos la transformada inversa de la resposta lliure (vegeu equacions 31-34 de l'annex 3) és:

$$v_{o,lliure}(t) = 2|A|e^{-\zeta\omega_0 t}\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \angle A\right)u(t) \qquad (97)$$

on $|A|$ i $\angle A$ denoten el mòdul i la fase del residu A, respectivament.

La resposta lliure, per tant, és una sinusoide multiplicada per una exponencial negativa. La seva amplitud, per tant, està esmorteïda exponencialment. En la figura 19 s'ha esbossat la forma de $v_{o,lliure}(t)$.

Figura 19. Resposta lliure en funció del temps d'un circuit subesmorteït



> Si el coeficient d'esmorteïment és entre 0 i 1 ($0 < \zeta < 1$), la resposta lliure oscil·la, i les oscil·lacions s'esmorteeixen exponencialment. Es diu que **el circuit està subesmorteït**.

b) Circuit sobreesmorteït

Si el coeficient d'esmorteïment és major que 1 ($\zeta > 1$), intuïtivament pensarem que el circuit està encara més esmorteït que quan és menor que 1. De fet, ho està tant com perquè la resposta no oscil·li: es diu que el circuit està **sobreesmorteït**.

Vegem-ho formalment. Per a esmorteïment major que 1, els pols del circuit (equació 94) són reals, ja que $\zeta^2 - 1 > 0$.

A més, els dos pols són negatius. Podem comprovar-ho fàcilment ja que, per a $\zeta > 1$, es compleix que $\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \leq \omega_0\zeta$. Per tant, el resultat de la suma en l'expressió general dels pols (equació 94) és, igual que el de la resta, negatiu.

$$\zeta > 1 \Rightarrow \; p_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} = \begin{cases} -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{cases} \tag{98}$$

Podem descompondre $V_{o,lliure}(s)$ en dos termes, un per cada pol. Si anomenem $-\alpha_1$ la primera solució en l'equació 98 i $-\alpha_2$ la segona solució, $V_{o,lliure}(s)$ és:

$$V_{o,lliure}(s) = \frac{A}{s + \alpha_1} + \frac{B}{s + \alpha_2} \tag{99}$$

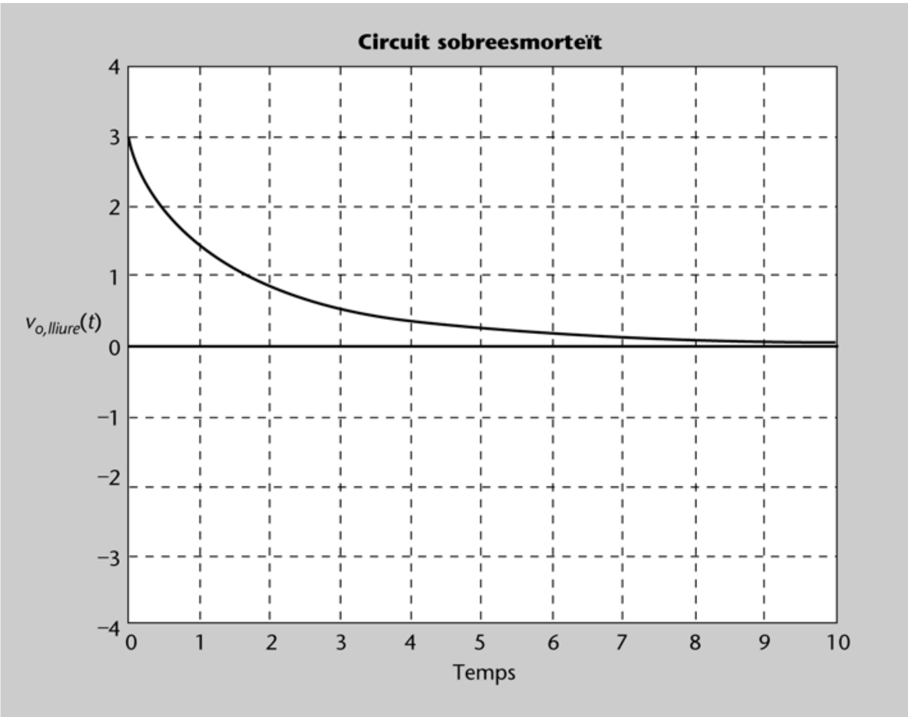
En ser els pols reals i negatius, la resposta lliure és la suma de dos exponencials decreixents (equacions 28-30 de l'annex 3):

$$v_{o,lliure}(t) = \left(Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}\right)u(t) \tag{100}$$

Normalment, una de les exponencials decreixerà molt més ràpid que l'altra, per la qual cosa el comportament del circuit serà similar al d'un circuit de primer ordre. ❗

En la figura 20 s'ha esbossat la forma de $v_{o,lliure}(t)$. Observeu que la figura mostra una resposta lliure amb forma exponencial.

Figura 20. Resposta lliure en funció del temps d'un circuit sobreesmorteït



Encara que en el dibuix la resposta lliure comença en un valor positiu, l'amplitud de les exponencials en l'equació 100 pot ser positiva o negativa, sumant-se o restant-se, respectivament, en la resposta global.

Si el coeficient d'esmorteïment és major 1 ($\zeta > 1$), la resposta lliure s'esmorteeix exponencialment sense oscil·lar. Es diu que el circuit està **sobreesmorteït**.

c) Esmorteïment crític

Noteu que el cas de coeficient d'esmorteïment igual que 1 ($\zeta = 1$) determina la frontera entre el cas subesmorteït ($0 < \zeta < 1$) i sobreesmorteït ($\zeta > 1$). Es parla llavors d'esmorteïment crític.

Si $\zeta = 1$, els dos pols són iguals i valen $p_{1,2} = -\omega_0$. Però no dedicarem més atenció a aquest cas, simplement recordeu que l'esmorteïment crític és la frontera on el circuit deixa de presentar **oscil·lacions esmorteïdes (pols complexos)** per a **oferir una resposta exponencial (pols reals)**, o viceversa.

d) Oscil·lador

Si diem que un sistema té un esmorteïment zero, intuïtivament interpretarem que la seva resposta no s'esmorteeix.

Formalment, si prenem l'expressió general dels pols (equació 94) i substituïm el coeficient d'esmorteïment per 0, els pols valen:

$$\zeta = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \pm j\omega_0 \qquad (101)$$

Observeu que la part real dels pols és zero i la part imaginària és més i menys, respectivament, la freqüència natural.

En tenir dos pols podrem descompondre la resposta lliure $V_{lliure}(s)$ en dues fraccions parcials, una per cadascun dels pols.

$$V_{o,lliure}(s) = \frac{A}{s - j\omega_0} + \frac{A^*}{s + j\omega_0} \qquad (102)$$

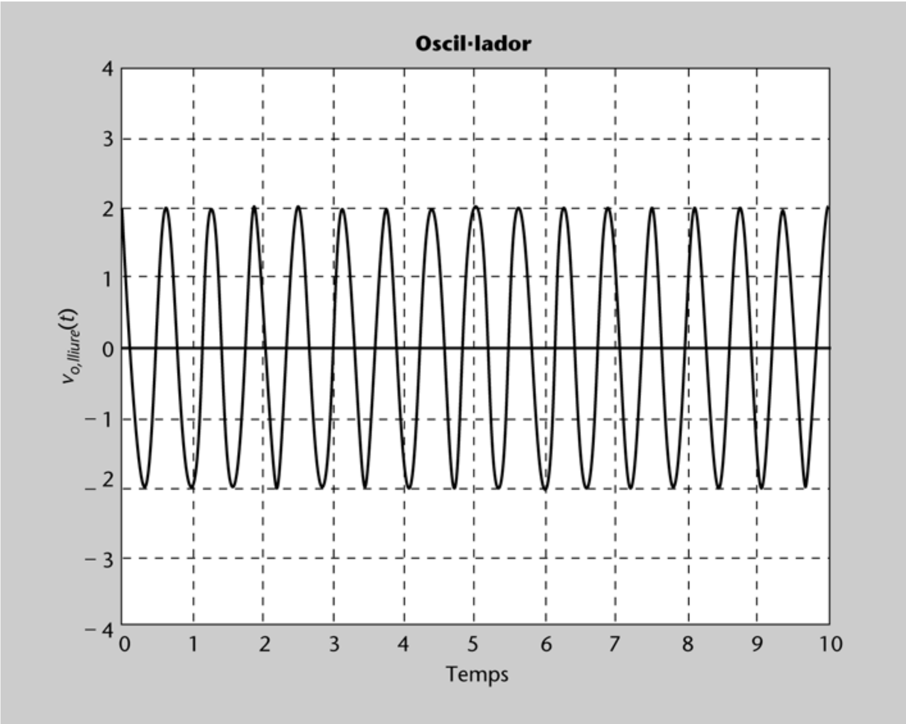
Com que els pols són complexos, la transformada inversa (vegeu equacions 31-34 de l'annex 3) de l'equació 102 és:

$$v_{o,lliure}(t) = 2|A|\cos(\omega_0 t + \angle A)\, u(t) \qquad (103)$$

on $|A|$ i $\angle A$ indiquen, respectivament, el mòdul i la fase del residu A.

La resposta lliure, per tant, és una sinusoide d'amplitud constant. En la figura 21 s'ha esbossat la forma de $v_{o,lliure}(t)$.

Figura 21. Resposta lliure en funció del temps d'un oscil·lador



En resum, un oscil·lador és un circuit la resposta lliure del qual és una sinusoide (senyal sinus o cosinus) d'amplitud constant, és a dir, no esmorteïda.

En qualsevol cas, noteu que les oscil·lacions, esmorteïdes (circuit subesmorteït) o no esmorteïdes (oscil·lador), van associades sempre a pols complexos.

Si el coeficient d'esmorteïment és zero ($\zeta = 0$), la resposta lliure no s'esmorteeix, però tampoc no tendeix a créixer indefinidament. Per a coeficient d'esmorteïment nul ($\zeta = 0$), el circuit serà un **oscil·lador**.

e) Circuit inestable

Finalment, si diem que un sistema té un esmorteïment negatiu, intuïtivament interpretarem que la seva resposta no s'esmorteeix sinó que fa el contrari.

Formalment, podem comprovar que si $\zeta < 0$, els pols tenen part real positiva (tant si són reals com si són complexos), per la qual cosa la resposta lliure creixerà indefinidament. Per comprovar-ho podeu refer els casos subesmorteït i sobreesmorteït, canviant el signe de la part real dels pols: llavors les exponencials tindran exponent positiu per la qual cosa tendiran a infinit quan el temps tendeixi a infinit.

Quedeu-vos amb la idea que en un sistema inestable la resposta lliure divergeix i que, si divergeix, poc importa que la resposta lliure creixi oscil·lant o sense oscil·lar.

Si el coeficient d'esmorteïment d'un circuit és negatiu ($\zeta < 0$), la resposta lliure, lluny d'esmorteir-se, tendeix a créixer. Per tant, si el coeficient d'esmorteïment és negatiu el circuit serà inestable, sense interès pràctic.

Ara que ja hem vist tots els casos, noteu que simplement avaluant el coeficient d'esmorteïment d'un segon ordre podem saber quin tipus de resposta lliure té el circuit. Tot el desenvolupament que hem fet per als diferents valors del coeficient d'esmorteïment es resumeix en la figura 22. En aquesta figura es representen les possibles posicions dels pols en el pla s (d'eix real σ i eix imaginari ω) segons el valor del coeficient d'esmorteïment.

Observeu que hem dibuixat els pols complexos sobre una circumferència de radi igual que la freqüència natural, ω_0. Es pot comprovar que el mòdul dels pols complexos sempre val ω_0 (per a qualsevol valor del coeficient d'esmorteïment). Això significa que els pols complexos sempre són a una distància de l'origen igual a la freqüència natural, i per això els hem dibuixat sobre una circumferència de radi igual a la freqüència natural.

Mòdul d'un nombre complex

Recordeu que el mòdul d'un nombre complex $a + jb$ el calculem com l'arrel quadrada de la part real al quadrat més la part imaginària al quadrat:

$$|a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Al costat de cada possible posició dels pols en el pla s, s'ha dibuixat també l'evolució temporal de la resposta lliure. Per tant, tota la informació que heu de recordar sobre els circuits de segon ordre, i que resumim a continuació, és continguda en la figura:

- Si l'esmorteïment és negatiu, $\zeta < 0$, el circuit és **inestable**. Els pols tenen part real positiva, per la qual cosa ocupen el semiplà dret del pla s (zona ratllada de la figura). Si els pols són en aquesta zona, el circuit serà inestable: la resposta lliure creixerà (amb o sense oscil·lacions).

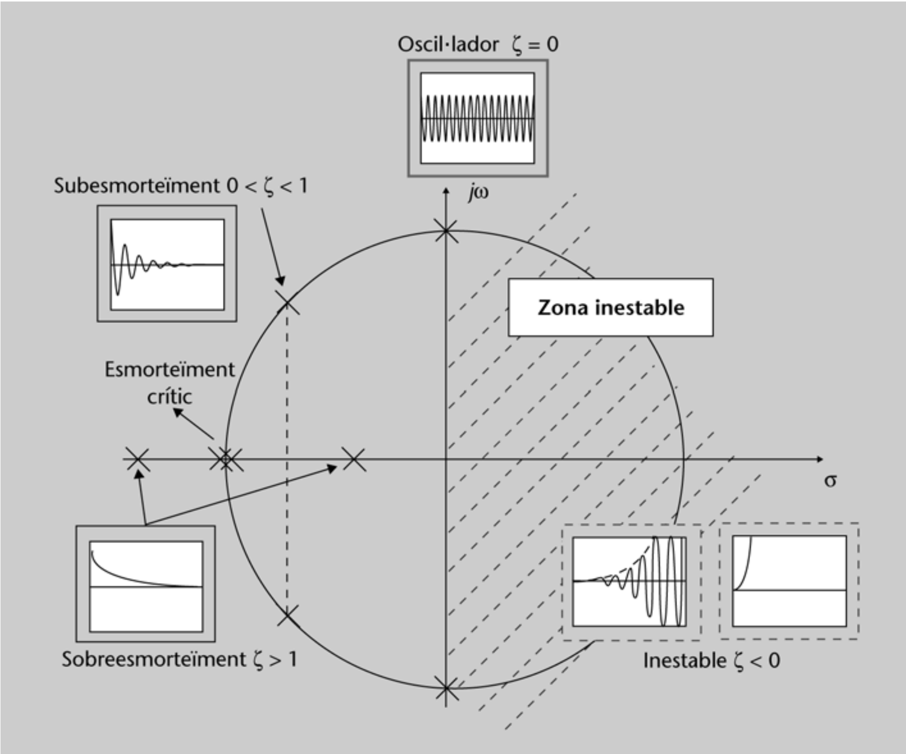
- Si l'esmorteïment és zero, $\zeta = 0$, tenim un **oscil·lador**. Els dos pols, en aquest cas, són sobre l'eix imaginari a una distància de l'origen igual que la freqüència natural ω_0, un a $+j\omega_0$ i un altre a $-j\omega_0$. La resposta lliure és una sinusoide d'amplitud constant.

- Si el coeficient d'esmorteïment és entre 0 i 1 (**subesmorteïment**), $0 < \zeta < 1$, els pols són complexos conjugats amb part real negativa. La resposta lliure és una sinusoide esmorteïda exponencialment. (Es pot comprovar que els pols complexos sempre són a una distància de l'origen igual que la freqüència natural, i per això els hem dibuixat sobre una circumferència de radi igual que la freqüència natural).

- Si el coeficient d'esmorteïment és major que 1 (**sobreesmorteïment**), $1 < \zeta$, tenim dos pols diferents reals i negatius. La resposta lliure és la suma de dues exponencials. Generalment, la resposta es podrà aproximar a l'exponencial que triga més a desaparèixer.

- Un esmorteïment igual que 1 (**esmorteïment crític**) és el cas frontera entre el comportament subesmorteït i sobreesmorteït. En aquest cas, tenim dos pols iguals reals i negatius a una distància de l'origen igual que la freqüència natural ω_0.

Figura 22. Posició dels pols en el pla *s* segons el valor del coeficient d'esmorteïment en un sistema de segon ordre



Per a cada cas es representa evolució temporal de la resposta lliure

Resposta impulsional

Recordeu que la resposta impulsional és la transformada inversa de la funció de xarxa, per la qual cosa la seva forma només depèn dels pols del circuit. Això implica que la resposta impulsional té **la mateixa forma** que la resposta lliure.

Noteu que:

- Si $\zeta < 0$ (esmorteïment negatiu), la resposta lliure divergeix. El circuit és inestable.
- Si $\zeta = 0$ (esmorteïment zero), la resposta lliure no desapareix però està afitada. El circuit és marginalment estable.
- Si $\zeta > 0$ (esmorteïment positiu), la resposta lliure és transitòria. El circuit és estable.

Funció de xarxa en forma canònica

Recordeu que la funció de xarxa de qualsevol circuit de segon ordre es pot escriure en forma canònica com a:

$$H(s) = \frac{\dots}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

La forma canònica no afecta el numerador, que es pot escriure com vulguem, per això hi ha els punts suspensius.

Observeu llavors que tenim una manera de decidir l'estabilitat d'un sistema a partir de la funció de xarxa: únicament hem d'observar el signe del coeficient que acompanya la s en el denominador, és a dir, el signe de $2\zeta\omega_0$ i podrem saber si el circuit és estable o no.

Exemple 10

Per a la següent funció de xarxa:

$$H(s) = \frac{3}{s^2 + 6s + 13} \tag{104}$$

Indiqueu el valor de la freqüència natural, ω_0, i el coeficient d'esmorteïment ζ.

Indiqueu el tipus d'esmorteïment i la forma de la resposta lliure. Dibuixeu-la.

Solució

a) Recordem que la forma canònica per a la funció de xarxa d'un circuit de segon ordre és:

$$H(s) = \frac{N(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \tag{105}$$

Igualant els termes independents del denominador en 104 i 105, obtenim que la freqüència natural és $\omega_0 = \sqrt{13}$.

Igualant ara els coeficients de la s (la s de primer grau) del denominador en 104 i 105, podem calcular el coeficient d'esmorteïment de la manera següent:

$$2\zeta\sqrt{13} = 6 \Rightarrow \zeta = \frac{3}{\sqrt{13}} \tag{106}$$

b) El coeficient d'esmorteïment és positiu però menor que 1. Per tant, el circuit està subesmorteït. La resposta lliure oscil·larà, amb oscil·lacions que s'esmorteeixen. La forma de la resposta lliure és la de la figura 19.

Exemple 11

Per a la següent funció de xarxa:

$$H(s) = \frac{10}{s^2 + (2-k)s + 4} \tag{107}$$

a) Indiqueu per a quins valors de k el circuit és inestable.
b) Indiqueu el valor de la freqüència natural, ω_0, i el coeficient d'esmorteïment ζ.
c) Indiqueu per a quin valor de k el sistema és estable i no presenta oscil·lacions.

Solució

a) Per a $k > 2$, el terme que multiplica la s en el denominador serà negatiu. Per tant, per a $k > 2$, el sistema serà inestable.

b) Si procedim com en l'exemple 10, la freqüència natural és l'arrel del terme independent en el denominador de la funció de xarxa: $\omega_0 = \sqrt{4} = 2$.

El coeficient d'esmorteïment el calculem igualant $2\zeta\omega_0$ al coeficient que multiplica la s del denominador de la funció de xarxa. Com $\omega_0 = 2$ obtenim:

$$2\zeta 2 = 2 - k \Rightarrow \zeta = \frac{2-k}{4} \tag{108}$$

c) Per a quin valor de k el sistema és estable i no presenta oscil·lacions?

Perquè un sistema estable no oscil·li ha d'estar sobreesmorteït. Per això, el coeficient d'esmorteïment ha de ser superior a 1. Per tant:

$$\zeta = \frac{2-k}{4} > 1 \Rightarrow 2 - k > 4 \Rightarrow 2 - 4 > k \Rightarrow k < -2 \tag{109}$$

5.3. Circuits d'ordre superior

El que hem vist en els subapartats 5.1 i 5.2 es pot generalitzar per a circuits d'ordre superior, on els pols seran també reals o apareixeran en parells complexos conjugats.

Per a un circuit de primer ordre, segon ordre o ordre superior, la condició necessària perquè el circuit sigui estable és que **tots els pols tinguin part real negativa.**

Si hi ha algun pol amb part real zero (i la resta amb part real negativa), el circuit serà marginalment estable.

Si hi ha algun pol amb part real positiva, el circuit serà inestable.

En circuits estables se sol utilitzar el concepte de **pol dominant**. Quan en un sistema estable de diversos pols, hi ha un pol la constant de temps del qual és molt més gran que la resta, aquest pol domina la forma i durada de la resposta temporal. Quan això succeeix diem que tenim un pol **dominant** i que el circuit té una resposta de primer ordre dominant. En aquesta situació, la funció de xarxa es pot aproximar per una funció de xarxa de primer ordre, la qual cosa simplifica molt l'anàlisi del sistema.

Altres vegades hi ha un parell de pols complexos conjugats, la constant de temps dels quals és molt major que la resta. En aquest cas és el parell de pols el que domina la forma i durada de la resposta temporal. En aquesta situació, la funció de xarxa es pot aproximar per una funció de xarxa de segon ordre.

Això s'utilitza a la pràctica per a modelar sistemes complicats, de manera que gairebé sempre podem acabar treballant amb funcions de xarxa de primer o de segon ordre (encara que el sistema sigui més complicat que un simple circuit RC o RLC). Per aquesta raó, en els problemes ens cenyirem a circuits de primer i segon ordre exclusivament.

Exemple 12

Un circuit té la funció de xarxa següent:

$$H(s) = \frac{10}{(s+3)(s+20)(s+50)} \tag{110}$$

a) Indiqueu l'estabilitat del circuit.
b) Indiqueu la forma de la resposta lliure.
c) Calculeu la durada del transitori.

Solució

a) El circuit té tres pols:

$$p_1 = -3 \text{ rad/s}; \; p_2 = -20 \text{ rad/s}; \; p_3 = -50 \text{ rad/s}$$

Com que els tres pols són en el semiplà esquerre del pla *s* (són reals i negatius) el circuit és estable.

b) La resposta lliure serà la suma de tres exponencials que tendeixen a zero. Com que l'exponencial associada al pol $p_1 = -3$ rad/s ($Ae^{-3t}u(t)$) desapareixerà bastant més tard que la resta podem aproximar la resposta lliure per aquesta exponencial. Tenim un pol dominant a $p_1 = -3$ rad/s.

Observeu que el pol (amb part real negativa) que triga més a desaparèixer és el que és més a prop de l'eix imaginari. El cas límit el tindríem per a un pol en l'origen (part real 0), en aquest cas el component associat seria un esglaó, que no desapareix mai.

c) La durada del transitori està determinada per l'exponencial que triga més a desaparèixer, és a dir, pel pol dominant. La constant de temps associada és 1/3 segons. L'exponencial tendirà a zero aproximadament després de 5 vegades la constant de temps. Per tant, la durada del transitori és aproximadament de 5/3 segons.

6. Resposta forçada

Sabem que la resposta d'un circuit es pot separar en resposta forçada i resposta lliure. En l'apartat 5 hem aprofundit en aquesta última. És important tenir en compte que, en la majoria dels casos en els quals caracteritzem un circuit o sistema, estem interessats a determinar la forma i durada de la resposta lliure, per a determinar així l'estabilitat i durada del transitori. No ens interessa tant el càlcul exacte de l'amplitud de la resposta lliure. Normalment, estarem interessats a calcular el valor exacte únicament per a la resposta forçada, que és aquella part de la sortida que procedeix de l'entrada.

En aquest apartat veurem com podem calcular ràpidament la resposta forçada, sense necessitat de calcular tota la resposta (és a dir, lliure més forçada). En el subapartat 6.1 ho farem per a una entrada contínua (tensió o corrent constant) i en el subapartat 6.2, per a una entrada alterna (tensió o corrent sinusoïdal).

6.1. Entrada esglaó

Suposem una entrada esglaó, que, com ja sabem, no és més que un senyal (de tensió o de corrent) constant (DC) connectat a partir de $t = 0$:

$$x(t) = u(t) \tag{111}$$

La transformada de Laplace de la sortida es calcula multiplicant la transformada de Laplace de l'entrada, $1/s$, per la funció de xarxa, $H(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{s} H(s) \tag{112}$$

Tal com vam veure en l'apartat 3, podem descompondre la sortida $Y(s)$ en un component forçat $Y_{forçada}(s)$ i un component lliure $Y_{lliure}(s)$. El component forçat és el que procedeix de l'entrada i el lliure, el que procedeix del circuit:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{A}{s}}_{Y_{forçada}(s)} + Y_{lliure}(s) \tag{113}$$

Calculem el residu A associat al component forçat. Per això multipliquem l'expressió de $Y(s)$ per s i particularitzem el resultat per a $s = 0$:

$$A = \frac{1}{s} H(s) s \Big|_{s=0} = H(0) \tag{114}$$

En el domini del temps, la resposta forçada és la transformada inversa del primer terme de l'equació 113. Per tant:

$$y_{forçada}(t) = H(0)u(t) \tag{115}$$

La resposta forçada a una entrada DC és el mateix senyal DC amplificat per *H*(*0*).

Exemple 13

El circuit LC de l'exemple 1 (figura 8) té la funció de xarxa que s'indica en l'equació 116. Podeu comprovar-ho calculant $V_o(s)$ mitjançant un divisor de tensió, i dividint $V_o(s)$ per $V_g(s)$. Calculeu la resposta forçada (en el domini del temps) per a un esglaó de tensió.

$$H(s) = \frac{LCs^2}{LCs^2 + 1} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{LC}} \tag{116}$$

Solució

La resposta forçada a un esglaó de tensió serà 0, ja que *H(0)* = 0. La sortida només tindrà component lliure.

Noteu que, si bé la forma de la resposta forçada depèn de l'entrada, l'amplitud (donada pels residus) dependrà de l'entrada i del circuit, i es podrà fer zero en alguns casos com en aquest exemple. Quan això passa per a una entrada esglaó diem que el circuit no deixa passar la contínua.

Exemple 14

La funció de xarxa d'un circuit RC és:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_g(s)} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \tag{117}$$

Calculeu la resposta forçada a un esglaó de tensió de 10 V.

Solució

La resposta forçada a un esglaó de tensió de 10 V serà un esglaó de tensió de valor *H*(*0*) · 10 = 10, ja que *H*(*0*) = 1. En aquest cas, el circuit sí que deixa passar la contínua.

6.2. Entrada sinusoïdal

Ara que ja sabem com calcular directament la resposta forçada per a una entrada esglaó, calcularem la resposta forçada per a una entrada (corrent o tensió) sinusoïdal.

Suposem que la sinusoide, que connectem a $t = 0$, té amplitud 1, freqüència ω_0 i fase θ (theta):

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta)u(t) \tag{118}$$

El cosinus de la suma de dos angles...

... el podem escriure com el producte dels cosinus de cada angle menys el producte dels sinus de cada angle:

$\cos(a + b) =$
$= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

El cosinus de la suma de $\omega_0 t$ i θ es pot escriure també de la manera següent:

$$x(t) = [\cos(\omega_0 t)\cos(\theta) - \sin(\omega_0 t)\sin(\theta)]u(t) \tag{119}$$

A partir de 119, obtenim la transformada de Laplace d'$x(t)$ que és:

Si no recordeu la transformada de Laplace d'una funció cosinus i/o d'una funció sinus, consulteu la llista de transformades bàsiques de l'annex 3 del mòdul "Annexos".

$$X(s) = \frac{s\cos(\theta) - \omega_0 \sin(\theta)}{s^2 + \omega_0^2} \tag{120}$$

Calculem la transformada de Laplace de la sortida multiplicant la transformada de Laplace de l'entrada per la funció de xarxa:

Relacions útils

Les relacions següents us poden ser d'utilitat:

1) $(s + j\omega)(s - j\omega) = s^2 + \omega^2$
2) $1/j = -j$
3) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
4) $\sin\theta/\cos\theta = \mathrm{tg}\,\theta$

$$Y(s) = \frac{s\cos(\theta) - \omega_0 \sin(\theta)}{s^2 + \omega_0^2} H(s) \tag{121}$$

Podem descompondre la sortida $Y(s)$ en un component forçat $Y_{forçada}(s)$ i un component lliure $Y_{lliure}(s)$, com es mostra en l'equació següent:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{A}{s - j\omega_0} + \frac{A^*}{s + j\omega_0}}_{Y_{forçada}(s)} + Y_{lliure}(s) \tag{122}$$

Calculem ara el residu associat al component forçat:

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{s\cos(\theta) - \omega_0\sin(\theta)}{s + j\omega_0} H(s)\right|_{s = j\omega_0} = \\ &= \frac{j\omega_0\cos(\theta) - \omega_0\sin(\theta)}{2j\omega_0} H(j\omega_0) = \frac{\cos(\theta) + j\sin(\theta)}{2} H(j\omega_0) \end{aligned} \tag{123}$$

A partir del residu podem escriure l'expressió de la resposta forçada:

Producte i divisió de dos nombres complexos

Quan multipliquem dos nombres complexos, el mòdul del producte és el producte dels mòduls. I la fase del producte és la suma de les fases.

Quan dividim dos nombres complexos, dividim els mòduls i restem les fases.

Podeu trobar una explicació més detallada de les operacions bàsiques amb nombres complexos al subapartat 4.4 de l'annex 4.

$$y_{forçada}(t) = 2|A|\cos(\omega_0 t + \angle A)u(t) \tag{124}$$

Podeu comprovar que el mòdul d'A és:

$$|A| = \frac{\sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}}{2}|H(j\omega_0)| = \frac{|H(j\omega_0)|}{2} \tag{125}$$

I la fase d'A és:

$$\angle A = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) + \angle H(j\omega_0) = \theta + \angle H(j\omega_0) \tag{126}$$

Per tant, substituint en l'equació 124, obtenim que:

La resposta forçada a una entrada sinusoïdal és una sinusoide de la mateixa freqüència que l'entrada, ω_0, amplificada pel mòdul d'*H(s)* per a $s = j\omega_0$. La fase de la sinusoide de sortida és la fase de l'entrada, θ, més la fase de $H(s)$ per a $s = j\omega_0$.

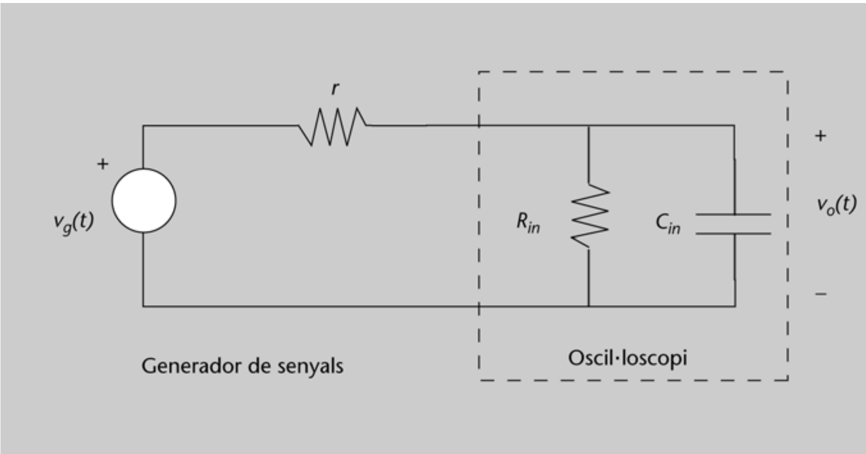
$$y_{forçada}(t) = |H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \theta + \angle H(j\omega_0))u(t) \qquad (127)$$

Fixeu-vos que l'amplitud del cosinus de l'entrada és 1.

Exemple 14

La figura 23 modela un generador de funcions i l'entrada d'un oscil·loscopi de raigs catòdics, on $r \approx 50\ \Omega$, $R_{in} \approx 1\ \text{M}\Omega$ i $C_{in} \approx 25$ pF.

Figura 23. Model circuital d'un generador de funcions connectat a un oscil·loscopi de raigs catòdics



La funció de xarxa del circuit de la figura 23 és:

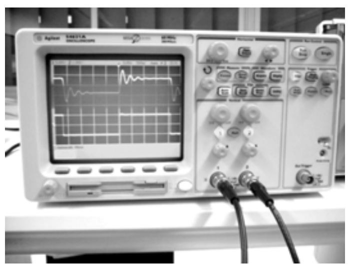
$$H(s) = \frac{\frac{1}{rC_{in}}}{s + \frac{r + R_{in}}{rR_{in}C_{in}}} \qquad (128)$$

Com que r és molt més petita que R_{in}, la suma $r + R_{in}$ és pràcticament R_{in}. De fet, aquesta aproximació se sol fer quan sumem dues resistències i una és 10 (o més) vegades més gran que l'altra. Amb aquesta aproximació la funció de xarxa quedaria:

$$H(s) \approx \frac{\frac{1}{rC_{in}}}{s + \frac{1}{rC_{in}}} = \frac{8 \cdot 10^8}{s + 8 \cdot 10^8} \qquad (129)$$

L'oscil·loscopi de raigs catòdics és un instrument molt utilitzat per a mesurar i analitzar senyals variables en el temps. Al tub de raigs catòdics es genera un feix d'electrons que es dirigeix cap a la pantalla de l'oscil·loscopi recoberta interiorment de material fluorescent. L'eix d'abscisses de la pantalla representa l'interval de temps transcorregut des d'un punt de referència, mentre que l'eix d'ordenades de la pantalla representa l'amplitud del senyal que s'ha de visualitzar en l'interval de temps representat. El feix d'electrons realitza un escombratge periòdic sobre la pantalla, de manera que el que s'observa a la pantalla són superposicions de diferents segments del senyal que s'ha de mesurar. Un circuit disparador (*trigger*) fa que cada escombratge que es realitza sobre la pantalla s'iniciï sempre

Figura 24. Oscil·loscopi per a la visualització de formes d'ona



que el senyal passi per un cert valor de tensió (i no es produeix cap disparament mentre s'està realitzant un escombratge). D'aquesta manera s'aconsegueix una representació persistent de senyals repetitius, que produeix l'efecte que s'està visionant un únic segment de senyal.

Com que la persistència de cadascun dels traços sobre la pantalla té una durada limitada, l'oscil·loscopi no permet veure transitoris, atès que aquests són presents únicament en el primer dels traços. Per aquest motiu, si es vol estudiar la dinàmica d'un circuit per a una entrada esglaó, s'utilitza un senyal quadrat, de manera que els canvis es van repetint amb cada flanc de pujada i baixada del senyal quadrat (observeu la figura 24).

En aquest exemple, heu de calcular la resposta visualitzada a l'oscil·loscopi per a un senyal sinusoïdal de freqüència 100 Hz i 100 MHz d'amplitud 10 V. És a dir,

a) $v_g(t) = 10\cos(2\pi 100 t)$
b) $v_g(t) = 10\cos(2\pi 10^8 t)$

Noteu que cal multiplicar per 2π per a passar d'hertzs a radiants per segon que són les unitats d'ω, és a dir, la freqüència en rad/s (ω) és 2π vegades la freqüència en hertzs (f): $\omega = 2\pi f$ (tornarem sobre aquest aspecte en el mòdul "Circuits en corrent altern").

El circuit és un circuit passiu de primer ordre (un sol pol), per la qual cosa la resposta lliure és una exponencial decreixent que desapareix amb el temps. A causa de la persistència limitada de cadascun dels traços a la pantalla de l'oscil·loscopi, no podem visualitzar el traç que es produeix immediatament després de connectar el senyal sinusoïdal que s'ha de mesurar $v_g(t)$, quan l'exponencial és encara present. El que veiem a la pantalla de l'oscil·loscopi és el règim permanent del senyal capturat $v_o(t)$ i, en règim permanent, $v_o(t)$ només conté resposta forçada.

Lectura recomanada

Pallás Areny, R. (1987). *Instrumentación electrónica básica*. Barcelona: Marcombo.

Solució

Hem de calcular la resposta forçada per a les sinusoides de freqüència 100 Hz i 10 MHz. Per això, hem d'avaluar $H(s)$ per a $s = j\omega_x$, on $\omega_x = 2\pi 100$ (apartat *a*) i $\omega_x = 2\pi 10^8$ (apartat *b*), $\omega_x = 2\pi 10^8$.

a)

$$H(j2\pi 100) = \frac{8\cdot 10^8}{j2\pi 100 + 8\cdot 10^8} \approx 1 \qquad (130)$$

D'acord amb el que hem vist en aquest subapartat (equació 127), la resposta forçada és:

$$v_{o,\text{forçada}}(t) = 10\cos(2\pi 100 t) \qquad (131)$$

És a dir, el senyal que visualitzarem a l'oscil·loscopi per al senyal de baixa freqüència és el mateix senyal generat pel generador de funcions.

b)

$$H(j2\pi\cdot 10^8) = \frac{8\cdot 10^8}{j2\pi 10^8 + 8\cdot 10^8} = 0{,}62 \; - \; 0{,}49j \begin{cases} \left|H(j2\pi\cdot 10^8)\right| = 0{,}79 \\ \angle H(j2\pi\cdot 10^8) = -38{,}32° \end{cases} \qquad (132)$$

D'acord amb el que hem vist en aquest subapartat (equació 127), la resposta forçada és una sinusoide de freqüència la de l'entrada, 10^8 Hz, l'amplitud de la qual és l'amplitud d'entrada multiplicada per 0,79 i la fase de la qual és la fase de l'entrada menys 38,32°:

$$v_{o,\text{forçada}}(t) = 0{,}79\cdot 10\cos(2\pi 10^8 t - 38{,}32°) = 7{,}9\cos(2\pi 10^8 t - 30{,}32°) \qquad (133)$$

Per tant, l'amplitud (7,9 V) visualitzada per al senyal d'alta freqüència no és correcta, ja que hem generat una sinusoide de 10 V d'amplitud. A més, el senyal visualitzat a l'oscil·loscopi tindrà una fase addicional (de –38,32°) a la generada.

Figura 25. Sonda de mesura per a utilitzar amb l'oscil·loscopi

Veiem llavors que la mesura de senyals d'alta freqüència en un oscil·loscopi es veu distorsionada a causa de l'efecte de la seva capacitat interna. Això se soluciona a la pràctica utilitzant una sonda de mesura que, a més de fer més còmoda la mesura de les diferents tensions en un circuit, permet compensar l'efecte de la capacitat interna de l'oscil·loscopi.

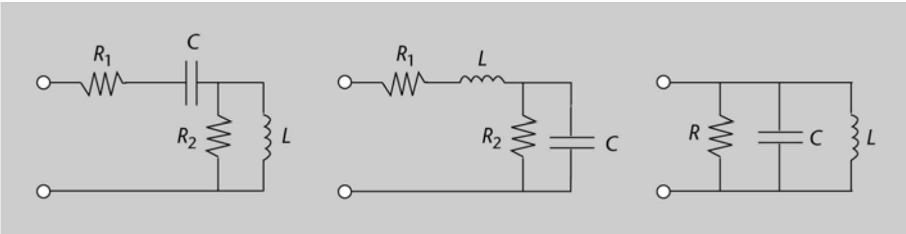
7. Problemes resolts

7.1. Enunciats

Problema 1

Calculeu la impedància d'entrada per als circuits de la figura 26.

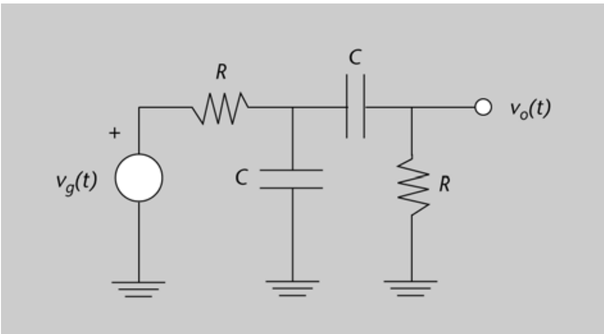
Figura 26. Circuits del problema 1



Problema 2

Per al circuit de la figura 27, obteniu $V_o(s)$ en funció de $V_g(s)$, quan les condicions inicials són nul·les (és a dir, la tensió inicial als condensadors és zero). Apliqueu el mètode d'anàlisi sistemàtica dels corrents de malla.

Figura 27. Circuit del problema 2



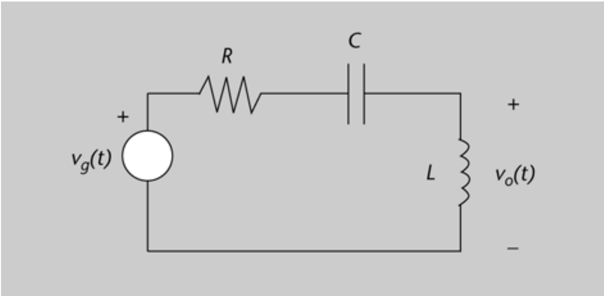
Problema 3

Repreneu l'exemple 1 del mòdul. Transcorreguts $\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$ segons des que es va connectar l'entrada, desconnectem la font i la substituïm per un curtcircuit. Calculeu la tensió del condensador i el corrent de la bobina a partir d'aquest instant. Calculeu també l'evolució de la tensió de sortida.

Problema 4

Per a un circuit RLC sèrie amb una entrada esglaó (figura 28), calculeu la tensió als borns de la inductància, distingint entre resposta lliure i forçada. Feu els càlculs a) per a $R = 100\ \Omega$; i b) per a $R = 2{,}2\ k\Omega$. Considereu en ambdós casos $L = 10$ mH i $C = 10$ nF.

Figura 28. Circuit del problema 4

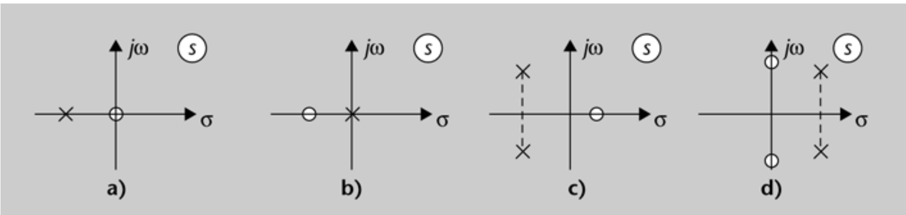


Problema 5

Per als diagrames de zeros i pols de la figura 29:

a) Indiqueu quin/s correspon/en a circuits estables, quin/s a marginalment estables i quin/s a inestables.
b) Indiqueu en cada cas l'ordre del circuit.

Figura 29. Diagrames de zeros i pols del problema 5

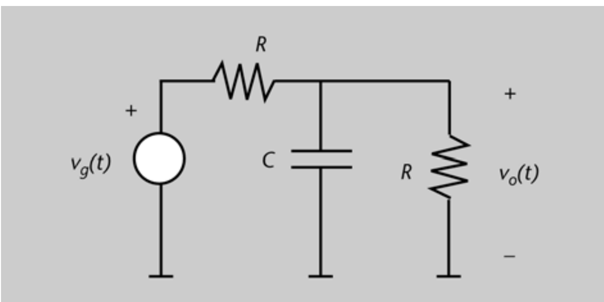


Problema 6

Per al circuit de la figura 30, on $R = 50\ \Omega$ i $C = 10$ nF

a) Calculeu la funció de transferència $H(s)$, indicant l'ordre del circuit i posició dels seus pols.
b) Indiqueu la forma i durada de la resposta lliure.
c) Discutiu l'estabilitat del circuit.
d) Calculeu la resposta forçada per a una entrada contínua de 10 V que es connecta en $t = 0$ (senyal esglaó).

Figura 30. Circuit del problema 6



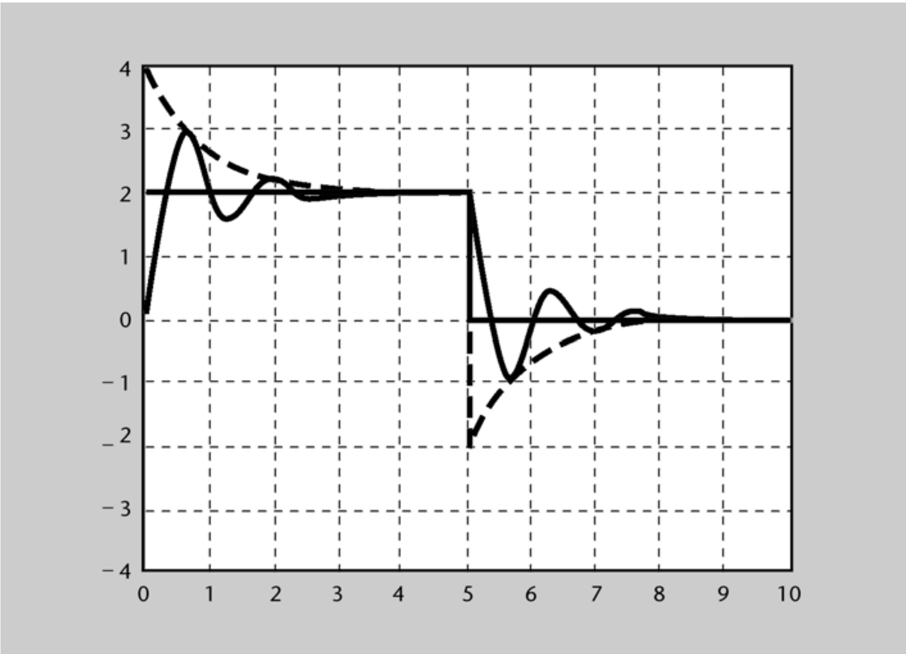
Problema 7

La figura 31 representa la tensió de sortida d'un circuit tal com la visualitzem a l'oscil·loscopi. Observeu que es tracta d'un tensió sinusoïdal esmorteïda exponencialment.

L'entrada és un senyal quadrat (representada també en la figura). Observeu que el primer semiperíode del senyal quadrat ens permet conèixer la resposta del circuit en connectar-hi una contínua (el mateix que quan treballem amb un senyal esglaó). El segon semiperíode ens permet conèixer la resposta del circuit en desconnectar-hi la contínua (i substituir-la per un curcircuit).

L'eix horitzontal representa l'eix de temps (50 μs/divisió) mentre que l'eix vertical representa la tensió (0,5 V/divisió). Entenem per divisió cadascun dels requadres en què es divideix la pantalla (els números de la figura indiquen el número de requadre).

Figura 31. Pantalla de l'oscil·loscopi per al problema 7

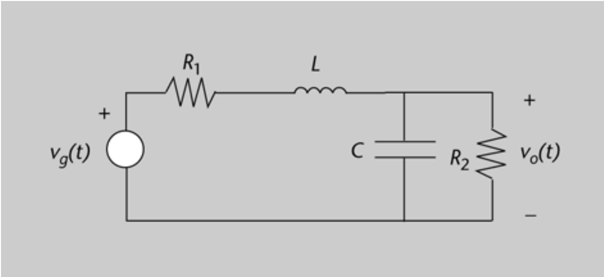


a) Sabent que la freqüència de l'oscil·lació és de 15,4 kHz i que l'envolupant exponencial té una τ de 42,5 μs, escriviu l'expressió analítica de la resposta, sense donar numèricament el valor de l'amplitud ni de la fase de la sinusoide.
b) Calculeu el valor dels pols del circuit.
c) Quin tipus d'esmorteïment presenta el circuit?
d) La resposta anterior correspon a un circuit RLC sèrie amb condicions inicials zero. Indiqueu de manera raonada i breu si la sortida s'ha mesurat als borns del condensador, la bobina o la resistència.
e) Si volem que la resposta del circuit deixi de presentar oscil·lacions, és a dir, que el circuit passi a estar sobreesmorteït, hem de disminuir o augmentar el valor de la resistència?

Problema 8

Calculeu la funció de xarxa del circuit de la figura 32 i la resposta forçada a una contínua de 10 V.

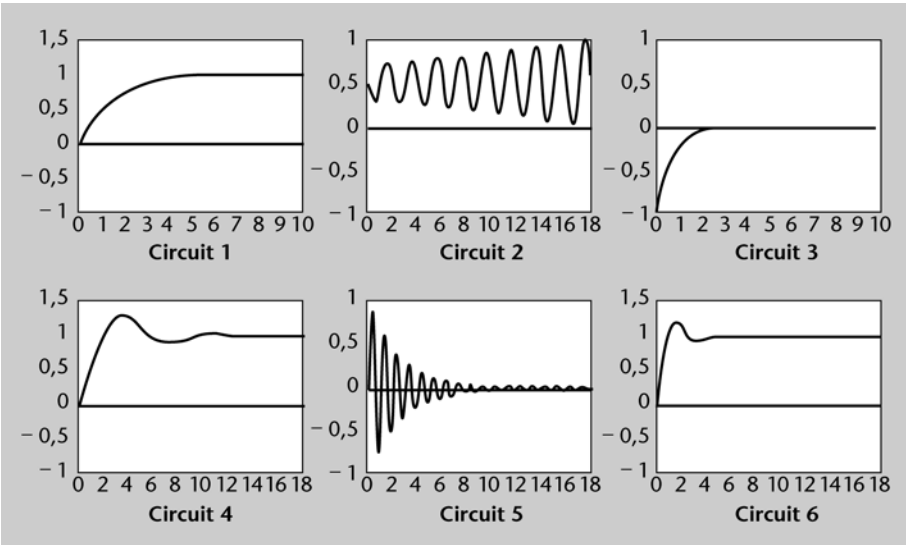
Figura 32. Circuit del problema 8



Problema 9

La figura 33 mostra la resposta a l'esglaó visualitzada a l'oscil·loscopi per a 6 circuits diferents. L'eix d'abscisses representa l'eix de temps i l'eix d'ordenades representa valors de tensió.

Figura 33. Respostes a l'esglaó per al problema 9



Responeu de forma raonada i breu les qüestions següents:

a) Quin/s circuit/s no deixa/en passar el component continu?
b) Quin/s circuit/s presenta/en almenys un zero en l'origen?
c) Quina/es resposta/es podria/en correspondre a un circuit de primer ordre?
d) Quin/s circuit/s presenta/en un coeficient d'esmorteïment major o igual que un?
e) Quin nom reben el tipus de respostes de l'apartat anterior? (No és necessari justificar aquesta resposta.)
f) Quin/s circuit/s presenta/en un comportament inestable? Quina/es resposta/es correspon/en a un oscil·lador sinusoïdal?

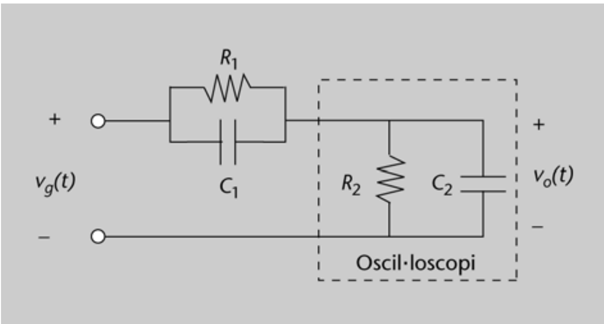
g) Quina/es resposta/es pot/poden correspondre a un circuit passiu?
h) Quina/es resposta/es pot/poden correspondre a un circuit RLC amb un sol condensador i un sol inductor, sense elements actius?
i) Indiqueu una expressió analítica general per a les respostes 1 i 5, indicant en cada cas quina és la resposta lliure i la resposta forçada. No és necessari indicar el valor exacte dels diferents paràmetres: constant de temps, freqüència, etc.

Problema 10

Una sonda de mesura (figura 25) és un instrument molt utilitzat quan visualitzem tensions mitjançant un oscil·loscopi. Les mesures són més còmodes de fer si usem una sonda. A més, permet compensar l'efecte capacitatiu de l'oscil·loscopi.

El circuit de la figura 34 modela una sonda de mesura (R_1 i C_1) i l'entrada d'un oscil·loscopi de raigs catòdics (R_2 i C_2), on $v_g(t)$ és la tensió que volem mesurar.

Figura 34. Model circuital per a una sonda de mesura i un oscil·loscopi per al problema 10



a) Trobeu $V_o(s)$ en funció de $V_g(s)$.
b) Les sondes disponibles al laboratori tenen una resistència R_1 de 9 MΩ, mentre que la capacitat s'haurà d'ajustar fent servir un tornavís. Suposem que ajustem la capacitat de la sonda de manera que C_1 sigui 0. Calculeu $H(s)$ i la resposta temporal per a un senyal esglaó. Considereu R_2 = 1 MΩ i C_2 = 25 pF.
c) Ajustem la capacitat de la sonda de manera que $C_1 = R_2C_2/R_1$, calculeu $H(s) = V_o(s) / V_g(s)$. Comproveu que en aquest cas no hi ha resposta lliure i calculeu la resposta forçada per a un senyal esglaó.

7.2. Solucions

Problema 1

a) La impedància d'entrada és la combinació sèrie de les impedàncies R_1, $1/Cs$ i el paral·lel $R_2||Ls$:

$$Z_{in}(s) = R_1 + \frac{1}{Cs} + \frac{R_2Ls}{R_2 + Ls} \tag{134}$$

b) La impedància d'entrada és la combinació sèrie de les impedàncies R_1, Ls i el paral·lel $R_2 \| \frac{1}{Cs}$:

$$Z_{in}(s) = R_1 + Ls + \frac{\frac{R_2}{Cs}}{R_2 + \frac{1}{Cs}} = R_1 + Ls + \frac{R_2}{R_2 Cs + 1} \tag{135}$$

c) Calcularem l'admitància ja que, en estar els tres elements en paral·lel, resulta més fàcil de calcular que la impedància:

$$Y_{in}(s) = G + Cs + \frac{1}{Ls} = \frac{GLs + LCs^2 + 1}{Ls} \tag{136}$$

La impedància és l'invers de l'admitància:

$$Z_{in}(s) = \frac{Ls}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1} \tag{137}$$

Problema 2

Apliquem el mètode sistemàtic dels corrents de malla al circuit transformat de Laplace:

$$\begin{bmatrix} R + \frac{1}{Cs} & -\frac{1}{Cs} \\ -\frac{1}{Cs} & R + \frac{2}{Cs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g(s) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{138}$$

Resolem el sistema d'equacions mitjançant Cramer:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R + \frac{1}{Cs} & V_g(s) \\ -\frac{1}{Cs} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R + \frac{1}{Cs} & -\frac{1}{Cs} \\ -\frac{1}{Cs} & R + \frac{2}{Cs} \end{vmatrix}} \tag{139}$$

Desenvolupem els determinants. Per evitar errors escrivim la funció $V_g(s)$ només com a V_g:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\frac{1}{Cs}V_g}{\left(R + \frac{1}{Cs}\right)\left(R + \frac{2}{Cs}\right) - \left(\frac{1}{Cs}\right)^2} = \frac{\frac{1}{Cs}V_g}{R^2 + \frac{2R}{Cs} + \frac{R}{Cs} + 2\left(\frac{1}{Cs}\right)^2 - \left(\frac{1}{Cs}\right)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{Cs}V_g}{R^2 + \frac{3R}{Cs} + \left(\frac{1}{Cs}\right)^2} \end{aligned} \tag{140}$$

Per a simplificar, primer multipliquem numerador i denominador per $(Cs)^2$, d'aquesta manera no quedaran fraccions al numerador ni al denominador. Després dividim numerador i denominar per R^2C^2, per a deixar el terme en s^2 (el de major grau) del denominador amb coeficient igual que 1:

$$I_2 = \frac{CsV_g}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1} = \frac{\frac{1}{R^2C}s}{s^2 + \frac{3}{RC}s + \frac{1}{R^2C^2}} V_g(s) \tag{141}$$

En el resultat final tornem a indicar que V_g és una funció de la variable complexa s, és a dir, és $V_g(s)$.

Finalment, la tensió de sortida és:

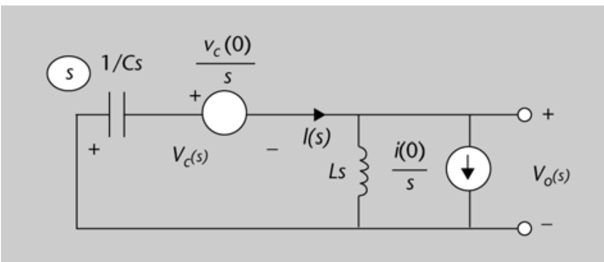
$$V_o(s) = RI_2 = \frac{\frac{1}{RC}s}{s^2 + \frac{3}{RC}s + \frac{1}{R^2C^2}} V_g(s) \tag{142}$$

Problema 3

En l'instant en què se'ns indica que es desconnecta la font, la tensió als borns del condensador pren el seu valor màxim $v_C(t_0) = 1$ i el corrent que circula per l'inductor val $i(t_0) = \sqrt{\frac{C}{L}}$. Per facilitat, posarem el comptador de temps a 0, és a dir, considerarem $t_0 = 0$.

El circuit que tenim en el domini transformat es mostra en la figura 35.

Figura 35. Circuit del problema 3 en el domini transformat de Laplace (*s*)



Fixeu-vos que, com que les condicions inicials ara no són zero, el condensador en el circuit transformat s'ha transformat en una impedància de valor $1/Cs$ en sèrie amb una font de tensió de valor $v_C(0)/s$. La polaritat de la font de tensió ha de coincidir amb la polaritat amb què s'ha definit la tensió del condensador en el domini del temps.

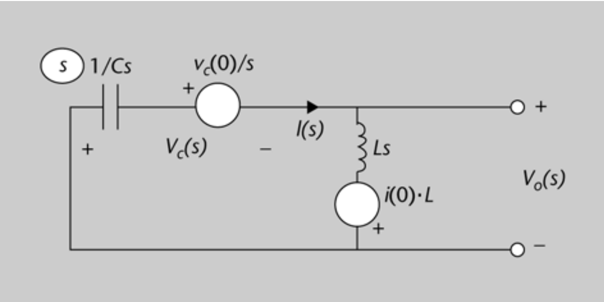
En el circuit transformat, l'inductor s'ha convertit en una impedància de valor Ls en paral·lel amb una font de corrent de valor $i(0)/s$. El sentit de la font de corrent ha de ser el mateix que el sentit amb què s'ha definit el corrent de l'inductor en el domini del temps.

Analitzarem el circuit transformat de Laplace convertint la forma Norton (font de corrent $i(0)/s$ en paral·lel amb la impedancia Ls) en una forma Thevenin (font de tensió en sèrie amb la impedància Ls). Recordeu que la tensió de la font de Thevenin ha de ser igual que el corrent per la impedància. D'aquesta manera, el circuit queda com s'indica en la figura 36.

Transformació de Norton a Thévenin

Una **font de corrent** I_g en **paral·lel** amb una **resistència** R (forma Norton) és equivalent a una font de tensió de valor I_gR en sèrie amb la resistència R (forma Thévenin). En el domini de Laplace, en lloc d'R (resistència), treballem amb el valor de Z (impedància) i amb la transformada de Laplace de la tensió i el corrent.

Figura 36. Circuit del problema 3 en el domini transformat de Laplace (*s*)



Per a trobar la tensió de sortida podem aplicar superposició de la manera següent:

1) Calculem primer la contribució a la tensió de sortida de la font de condició inicial del condensador, curtcircuitant la font de condició inicial de l'inductor. L'anomenarem $V_{0,1}(s)$:

$$V_{0,1}(s) = -\frac{Ls}{Ls+\frac{1}{Cs}}\frac{v_c(0)}{s} = -v_c(0)\frac{LCs}{LCs^2+1} = -1\frac{s}{s^2+\frac{1}{LC}} \tag{143}$$

2) Calculem la contribució a la tensió de sortida de la segona font. L'anomenarem $V_{0,2}(s)$. Noteu que l'inductor que teníem en el domini del temps, en el domini de Laplace, s'ha transformat en una impedància de valor Ls i una font de condició inicial, per la qual cosa la tensió que calculem ha d'incloure-les totes dues. Per la configuració del circuit, aquesta tensió és la mateixa que la tensió en borns de la impedància $1/Cs$ (que està en paral·lel amb Ls i font). Per tant, aplicant un divisor de tensió en borns d'$1/Cs$:

$$V_{0,2}(s) = -\frac{\frac{1}{Cs}}{Ls+\frac{1}{Cs}}Li(0) = -Li(0)\frac{1}{LCs^2+1} = -\frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{1}{s^2+\frac{1}{LC}} \tag{144}$$

La tensió de sortida conté les contribucions d'ambdues fonts de condició inicial, per la qual cosa hem de sumar les dues tensions que acabem de calcular:

$$V_0(s) = -v_c(0)\frac{s}{s^2+\frac{1}{LC}} - \frac{i(0)}{C}\frac{1}{s^2+\frac{1}{LC}} = -\left(\frac{s+\frac{1}{\sqrt{LC}}}{s^2+\frac{1}{LC}}\right) \tag{145}$$

La transformada inversa de Laplace d'aquesta tensió és:

$$v_0(t) = -\left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) + \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)\right]u(t) \tag{146}$$

on hem utilitzat que la tensió inicial al condensador val 1 i que el corrent inicial de la bobina val $i(t_0) = \sqrt{\frac{C}{L}}$.

L'expressió 146 es pot escriure també com a:

$$v_0(t) = -\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t - 45°\right)\right]u(t) \tag{147}$$

Recordeu que
$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
i que $\sin(45°) = \cos(45°) = \sqrt{2}/2$.

En realitat, per tenir en compte que la font s'apaga en t_0 i que l'expressió anterior és vàlida a partir de llavors l'hauríem d'escriure:

$$v_0(t) = -\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}(t - t_0) - 45°\right)\right] \quad \text{per a } \; t > t_0 \tag{148}$$

Fixeu-vos que si escrivim el marge de temps per al qual la tensió té la forma donada per la funció, no cal escriure el senyal esglaó.

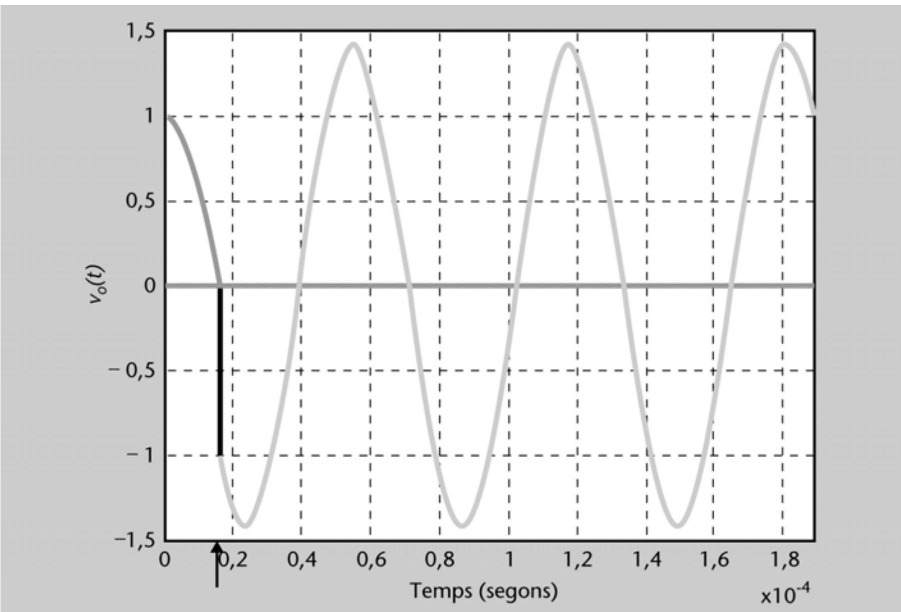
La tensió entre 0 i t_0 és la calculada en l'exemple 1:

$$v_0(t) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) \;\; \text{per a } 0 < t < t_0 \tag{149}$$

Noteu un cop més que si escrivim el marge de temps per al qual la tensió té la forma donada per la funció no fa falta que escriguem el senyal esglaó.

Les equacions 148 i 149 es representen en la figura 37. Observeu que en l'instant en què s'apaga la font (indicat a la figura) la tensió de sortida experimenta un canvi brusc (ho pot fer perquè la sortida és la tensió als borns de la bobina).

Figura 37. Resposta temporal del circuit LC abans i després d'apagar la font



L'instant en què s'apaga la font està marcat en la figura amb una fletxa.

Veiem que una vegada apagada la font (instant indicat amb la fletxa), el circuit continua oscil·lant indefinidament. A la pràctica, si connectem una bobina real i un condensador, veurem que, en desconnectar la font, la sortida no oscil·la indefinidament sinó que s'acaba extingint. Això es deu al fet que les pèrdues al fil conductor de la bobina dissipen l'energia emmagatzemada en el circuit. D'aquesta manera, l'energia inicialment emmagatzemada per condensador i/o bobina acabarà desapareixent, tret que el circuit inclogui algun element actiu capaç de compensar l'energia dissipada.

Un model més realista d'una bobina real és aquell que inclou una resistència que modela les pèrdues del fil conductor (resistència paràsita).

Normalment, no és necessari tenir en compte aquesta resistència paràsita ja que, en ser el seu valor de l'ordre d'uns quants ohms (Ω), el seu efecte sol ser menyspreable quan existeixen resistències comercials en el circuit, el valor de les quals és de l'ordre de kΩ.

Problema 4

La tensió de sortida calculada en el domini de Laplace és:

$$V_o(s) = \frac{Ls}{R + \frac{1}{Cs} + Ls} V_g(s) = \frac{LCs^2}{LCs^2 + RCs + 1} V_g(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} V_g(s) \tag{150}$$

Per a una entrada esglaó veiem que:

$$V_o(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \frac{1}{s} = \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \tag{151}$$

a) Particularitzant l'expressió 151 per als valors dels components de l'apartat *a* (R = 100 Ω, L = 10 mH i C = 10 nF) obtenim que:

$$V_o(s) = \frac{s}{s^2 + 10^4 s + 10^{10}} \tag{152}$$

Els pols són en $(-0{,}5 \pm j10) \cdot 10^4$, de manera que podem factoritzar el denominador de $V_o(s)$ de la manera següent:

$$V_o(s) = \frac{s}{(s + 0{,}5 \cdot 10^4 - j10^5)(s + 0{,}5 \cdot 10^4 + j10^5)} \tag{153}$$

Podem descompondre'l en fraccions simples de la manera següent:

$$V_o(s) = \frac{A}{(s + 0{,}5 \cdot 10^4 - j10^5)} + \frac{A^*}{(s + 0{,}5 \cdot 10^4 + j10^5)} \tag{154}$$

La transformada inversa de 154 és la resposta temporal:

$$v_o(t) = 2|A|e^{-0,5\cdot 10^4 t}\cos\left(10^5 t + \angle A\right)u(t) \tag{155}$$

El valor del residu *A* és:

$$A = \left.\frac{s}{(s + 0,5\cdot 10^4 + j10^5)}\right|_{s=-0,5\cdot 10^4 + j10^5} = 0,5 + j0,025 = 0,5e^{j2,9^\circ} \tag{156}$$

Substituint el mòdul i la fase d'*A* en 155, obtenim que:

$$v_o(t) = e^{-0,5\cdot 10^4 t}\cos\left(10^5 t + 2,9^\circ\right)u(t) \tag{157}$$

Noteu que la resposta forçada és nul·la, només hi ha resposta lliure. !

b) Particularitzant l'expressió anterior per als valors dels components de l'apartat *b* (R = 2,2 KΩ, L = 10 mH i C = 10 nF) veiem que:

$$V_o(s) = \frac{s}{s^2 + 22\cdot 10^4 s + 10^{10}} \tag{158}$$

En modificar el valor de la resistència, s'ha modificat la posició dels pols en el pla *s*. Per al nou valor de la resistència, els pols són en $p_1 = -1,6 \cdot 10^5$ i $p_2 = -0,6 \cdot 10^5$, de manera que podem factoritzar el denominador de $V_o(s)$ de la manera següent:

$$V_o(s) = \frac{s}{(s + 1,6\cdot 10^5)(s + 0,6\cdot 10^5)} \tag{159}$$

Podem descompondre'l en fraccions simples de la manera següent:

$$V_o(s) = \frac{A}{(s + 1,6\cdot 10^5)} + \frac{B}{(s + 0,6\cdot 10^5)} \tag{160}$$

El valor del residus és A = 1,7 i B = –0,7.

La resposta temporal és, per tant:

$$v_o(t) = \left(1,7e^{-1.6\cdot 10^5 t} - 0,7e^{-0.6\cdot 10^5 t}\right)u(t) \tag{161}$$

Fixeu-vos que la resposta forçada és nul·la: tota la resposta és lliure. !

Problema 5

a) Un circuit estable ha de tenir tots els pols en el semiplà esquerre, de manera que la part real d'aquests pols sigui negativa. Per tant, els diagrames *a* i *c* corresponen a circuits estables. El *b* correspon a un circuit marginalment estable, ja que hi ha un pol amb part real igual que zero. El *d* correspon a un circuit inestable, ja que hi ha dos pols amb part real positiva.

És important que tingueu clar que els zeros no influeixen en l'estabilitat.

b) L'ordre del circuit és determinat pel nombre de pols (o equivalentment, el grau del denominador). Per tant, són de primer ordre l'*a* i el *b*, (hi ha un únic pol), i el *c* i el *d* són de segon ordre (hi ha dos pols).

Problema 6

a) En el domini transformat el condensador es converteix en una impedància de valor $1/Cs$. Si la font en sèrie amb la primera resistència la transformem al seu equivalent Norton, les tres impedàncies presents en el circuit queden en paral·lel. Aquesta combinació és equivalent a una resistència de valor R/2 en paral·lel amb la impedància $1/Cs$.

Transformació de Thévenin a Norton

Una **font de tensió** V_g en **sèrie** amb una **resistència** R (forma Thévenin) és equivalent a una font de tensió de valor V_g/R en paral·lel amb la resistència R (forma Norton). En el domini de Laplace, en lloc d'R (resistència), treballem amb el valor de Z (impedància) i amb la transformada de Laplace de la tensió i el corrent.

La tensió de sortida és, per tant:

$$V_o(s) = \frac{V_g(s)}{R}\frac{\frac{R}{2}\frac{1}{Cs}}{\frac{R}{2}+\frac{1}{Cs}} = \frac{V_g(s)}{R}\frac{R}{RCs+2} = V_g(s)\frac{1}{RCs+2} \qquad (162)$$

on, després d'obtenir la primera expressió per a tensió de sortida, n'hem multiplicat numerador i denominador per $2Cs$ per evitar trencats. Posteriorment, hem simplificat la R comuna a numerador i denominador. Dividint $V_o(s)$ per $V_g(s)$, obtenim finalment la funció de xarxa:

$$H(s) = \frac{1}{RCs+2} = \frac{1/RC}{s+\frac{2}{RC}} \qquad (163)$$

Noteu que, per a obtenir l'expressió final de la funció de xarxa, hem dividit el numerador i denominador per RC, per forçar que el coeficient de la s del denominador (terme de major grau) sigui igual que 1.

Es tracta d'un circuit de primer ordre, ja que té un sol pol de valor $-2/RC$ rad/s.

b) Forma i durada de la resposta lliure.
Atès que tenim un sol pol real i negatiu, la resposta lliure serà una exponencial decreixent de constant de temps $RC/2$ (l'invers del valor absolut del pol).

A tots els efectes pràctics l'exponencial haurà desaparegut després de 5 vegades la constant de temps. Per tant, la durada del transitori és aproximadament $5\tau = 5\frac{RC}{2}$ segons. Per a R = 50 Ω i C = 10 nF, 5τ = 1,25 μs

c) El circuit és estable ja que la seva resposta lliure, una exponencial decreixent, desapareix amb el temps. És lògic, ja que es tracta d'un circuit format per 2 resistències i 1 condensador, que són components passius (la font d'entrada és externa al circuit), per la qual cosa el circuit ha de ser estable.

d) La resposta forçada és l'esglaó d'entrada multiplicat per $H(0)$ = 0,5. A la sortida s'obté, per tant, un component continu de 5 V.

Problema 7

a) Per a passar 15,4 kHz a radiants per segon hem de multiplicar per 2π. D'aquesta manera obtenim:

$$\omega = 2\pi 15{,}4 \text{ krad/s} = 96{,}8 \text{ krad/s} = 96{,}8 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \tag{163b}$$

La sortida és la suma d'una sinusoide esmorteïda exponencialment més una tensió constant de valor 1. Aquesta constant és el senyal que queda quan desapareix la sinusoide esmorteïda. Per tant, l'expressió analítica del senyal de sortida és:

$$y(t) = \left[Ae^{-t/\left(42{,}5\cdot 10^{-6}\right)}\cos(96{,}8\cdot 10^3 t + \theta) + 1\right]u(t) \tag{164}$$

Si l'entrada és constant (cenyint-nos exclusivament a un semiperíode de la quadrada), la resposta forçada serà un senyal constant. Per tant, l'1 correspon a la resposta forçada.

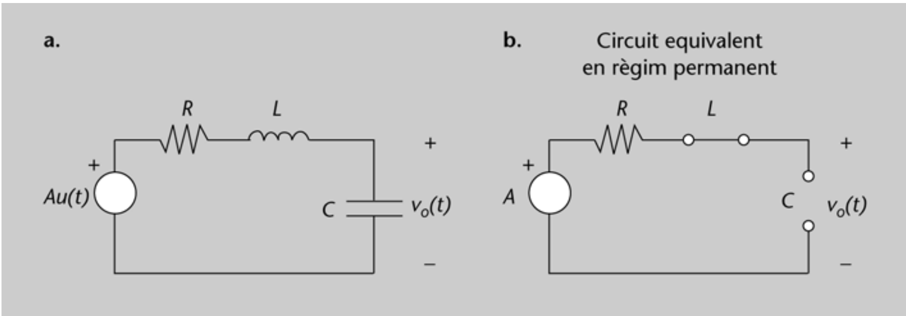
b) La part real dels pols és l'invers de la constant de temps de la sinusoide esmorteïda, mentre que la part imaginària determina la pulsació (freqüència en radiants per segon) d'aquesta sinusoide. Per tant, el valor dels pols és:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega = -\frac{1}{42{,}5\cdot 10^{-6}} \pm j96{,}8\cdot 10^3 = (-23{,}5 \pm j96{,}8)10^3 \text{ rad/s} \tag{165}$$

c) El circuit presenta oscil·lacions esmorteïdes exponencialment ja que té dos pols complexos conjugats amb part real negativa. Es tracta, per tant, d'un circuit subesmorteït.

d) En t = 0, la tensió als borns del condensador serà zero, ja que no hi pot haver canvis bruscos de tensió als borns d'un condensador. Quan hagi passat molt de temps des que es va connectar l'entrada contínua, una vegada finalitzat el transitori, totes les tensions i corrents del circuit seran continus. Això fa que el corrent que circula pel condensador (que és el mateix dels altres elements en sèrie) i la tensió als borns de l'inductor siguin zero. Per això, la bobina és equivalent a un curtcircuit i el condensador és equivalent a un circuit obert, com s'ha representat en la figura 38b. En la figura 38a s'ha dibuixat el circuit per a tot instant de temps, perquè vegeu la correspondència de cada element amb el seu equivalent en règim permanent:

Figura 38. Correspondència d'un circuit amb el seu equivalent en règim permanent



a) Esquerra: Circuit RLC sèrie amb entrada esglaó (contínua connectada en $t = 0$) b) Dreta: Circuit equivalent en règim permanent per al circuit RLC sèrie amb entrada contínua

Per tant, una vegada finalitzat el règim transitori, la tensió als borns de la resistència i l'inductor seran zero, mentre que la tensió als borns del condensador prendrà el mateix valor de l'entrada. Això significa que la tensió de sortida s'ha mesurat **en borns del condensador**.

e) La funció de xarxa del circuit és:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs} + Ls} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \qquad (166)$$

El coeficient que acompanya a la s del denominador és:

$$2\zeta\omega_0 = \frac{R}{L} \qquad (167)$$

Si volem que desapareguin les oscil·lacions, hem d'incrementar el coeficient d'esmorteïment fins que sigui major que 1. Per tant, perquè el circuit deixi de presentar oscil·lacions hem d'augmentar el valor de la resistència.

Problema 8

Calculem en primer lloc la impedància als borns de la qual mesurem la tensió de sortida.

$$Z = \frac{\frac{R_2}{Cs}}{R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{R_2}{R_2 Cs + 1} \qquad (168)$$

Aplicant un divisor de tensió per a calcular $V_o(s)$ i dividint per $V_g(s)$, obtenim que la funció de xarxa és:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{V_o(s)}{V_g(s)} = \frac{\dfrac{R_2}{R_2Cs+1}}{R_1 + Ls + \dfrac{R_2}{R_2Cs+1}} = \frac{R_2}{(R_1+Ls)(R_2Cs+1)+R_2} \\ &= \frac{R_2}{LCR_2s^2 + (R_1R_2C+L)s + R_1 + R_2} = \frac{\dfrac{1}{LC}}{s^2 + \left(\dfrac{R_1}{L} + \dfrac{1}{CR_2}\right)s + \left(\dfrac{R_1}{LCR_2} + \dfrac{1}{LC}\right)} \end{aligned} \tag{169}$$

Per a obtenir el component continu hem d'avaluar la funció de xarxa per a $s = 0$; veiem que:

$$H(0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{170}$$

Per tant, el component continu a la sortida serà:

$$10\frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{171}$$

Problema 9

Per a totes les preguntes: les figures representen la resposta temporal de diversos circuits per a una entrada esglaó (senyal continu que comença en $t = 0$). Per tant, els senyals representats són la suma de la resposta forçada, que per a un senyal continu serà un altre senyal continu, i de la resposta lliure, que dependrà dels pols de cada circuit concret.

a) Els circuits que a la sortida no presenten nivell de contínua són el 3 i el 5. Observeu que són els únics que, una vegada finalitzat el transitori, proporcionen una tensió igual que 0.

b) Un zero (o més) en $s = 0$ implica que $H(0) = 0$, per tant, el component continu a la sortida és nul. Aquells que no deixen passar el component continu a la sortida, com s'ha dit en l'apartat *a*, són el 3 i el 5.

c) Un circuit de primer ordre proporciona una resposta lliure exponencial. Els circuits amb resposta lliure exponencial són l'1 i el 3.

d) Un sistema d'ordre 2 amb $\zeta > 1$ (sistema sobreesmorteït) presenta dos pols reals negatius i diferents. Això implica que la resposta lliure serà la suma de dos exponencials. En general, la suma es pot aproximar per l'exponencial corresponent al pol més proper a l'origen, que és la que triga més a desaparèixer.

El comportament és, per tant, similar al d'un circuit de primer ordre amb un pol real negatiu. Els circuits amb resposta lliure exponencial són, com s'ha dit en l'apartat anterior, l'1 i el 3.

e) Sobreesmorteït. Recordeu que aquest és el nom que reben els sistemes quan el coeficient d'esmorteïment és major que 1.

f) Inestable és el 2, ja que proporciona una resposta lliure que tendeix a créixer indefinidament a mesura que avança el temps.
Oscil·lador no n'hi ha cap, ja que no hi ha cap resposta lliure que sigui una sinusoide d'amplitud constant.

g) Aquells en els quals la resposta lliure desapareix amb el temps: tots excepte el 2.

h) Un circuit RLC és un circuit passiu que pot oscil·lar o no, ja que té dos pols que poden ser complexos o reals, però sempre serà estable. Totes les respostes podrien correspondre a diferents circuits RLC, excepte la 2.

i) La resposta 1 conté una exponencial (que acaba desapareixent) i una contínua. Per tant, la seva expressió analítica serà del tipus:

$$v_1(t) = A\left(1 - e^{-t/\tau}\right)u(t) = \underbrace{Au(t)}_{\text{Resposta forçada}} \underbrace{-Ae^{-t/\tau}u(t)}_{\text{Resposta lliure}} \tag{172}$$

La resposta 5 conté una sinusoide esmorteïda exponencialment (que acaba desapareixent). Aquí no hi ha component continu. Per tant, la seva expressió analítica serà del tipus:

$$v_5(t) = \underbrace{Ae^{-t/\tau}\cos(\omega t + \theta)u(t)}_{\text{Resposta lliure}} \tag{173}$$

Problema 10

a) La impedància de la sonda és:

$$Z_1(s) = \frac{R_1}{R_1C_1s + 1} \tag{174}$$

La impedància d'entrada de l'oscil·loscopi és:

$$Z_2(s) = \frac{R_2}{R_2C_2s + 1} \tag{175}$$

Aplicant un divisor de tensió per a calcular $V_o(s)$ obtenim:

$$V_o(s) = \frac{\dfrac{R_2}{R_2C_2s+1}}{\dfrac{R_1}{R_1C_1s+1} + \dfrac{R_2}{R_2C_2s+1}} V_g(s) \tag{176}$$

b) Substituïm C_1 per 0 en l'equació 176. Després dividim la transformada de Laplace de la sortida, $V_o(s)$, entre la transformada de Laplace de l'entrada, $V_g(s)$, per obtenir la funció de xarxa:

$$H(s) = \frac{\dfrac{R_2}{R_2C_2s+1}}{R_1 + \dfrac{R_2}{R_2C_2s+1}} = \frac{R_2}{R_1R_2C_2s + R_1 + R_2} = \frac{\dfrac{R_2}{R_1R_2C_2}}{s + \dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2C_2}} = \frac{k}{s+p} \tag{177}$$

on $k = \dfrac{10^6}{225}$ i $p = 10\dfrac{10^6}{225}$ rad/s.

La resposta a una entrada esglaó en el domini transformat és:

$$V_0(s) = \frac{k}{s+p}\frac{1}{s} = \frac{A}{s+p} + \frac{B}{s} \tag{178}$$

Els residus prenen el valor següent:

$$A = \frac{k}{s+p}\frac{1}{s}(s+p)\bigg|_{s=-p} = -\frac{k}{p} = -\frac{1}{10} \tag{179}$$

$$B = \frac{k}{s+p}\frac{1}{s}s\bigg|_{s=0} = \frac{k}{p} = \frac{1}{10} \tag{180}$$

La resposta a una entrada esglaó en el domini del temps és:

$$v_0(t) = \underbrace{-\frac{k}{p}e^{-pt}u(t)}_{\text{Resposta lliure}} + \underbrace{\frac{k}{p}u(t)}_{\text{Resposta forçada}} = \frac{1}{10}\left(1 - e^{-t/(22{,}5\cdot 10^{-6})}\right)u(t) \tag{181}$$

c) La funció de xarxa val:

$$H(s) = \frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{1}{10} \tag{182}$$

En aquest cas, la sortida és simplement l'entrada dividida per 10.

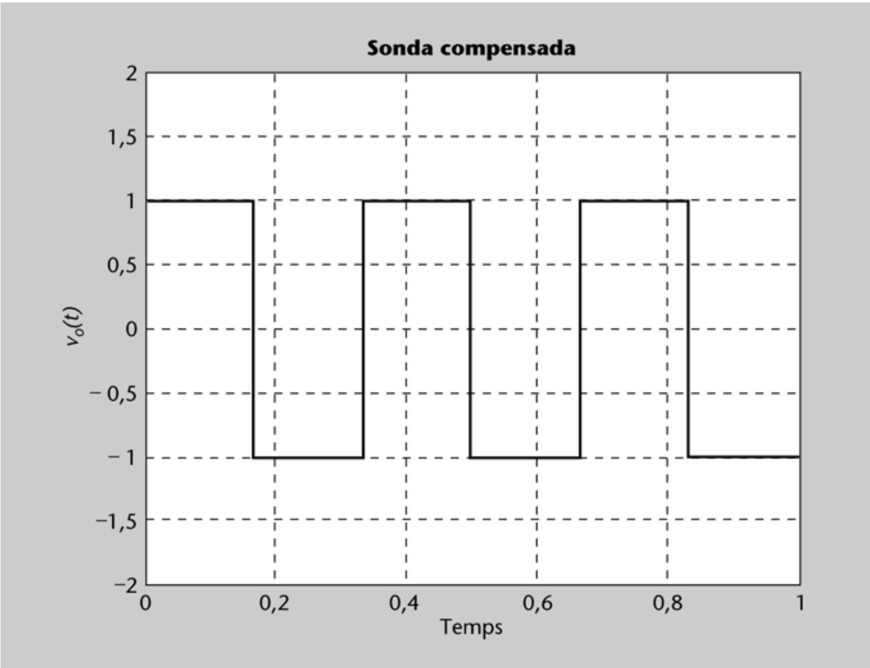
$$v_0(t) = \frac{1}{10}u(t) \tag{183}$$

El circuit no té dinàmica i, per tant, no té resposta lliure.

Nota addicional:

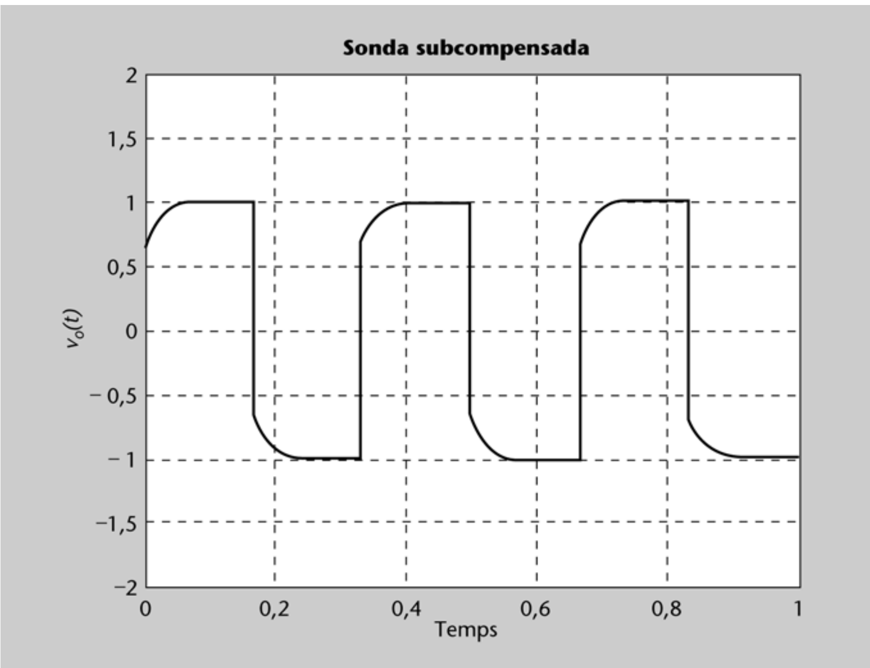
- Per a $C_1 = R_2C_2/R_1$ es diu que la sonda està **compensada**. En aquest cas, el circuit no té dinàmica. En mesurar el senyal test de la sonda (un senyal quadrat), la resposta que visualitzaríem a l'oscil·loscopi seria el propi senyal de test escalat (figura 39).

Figura 39. Resposta visualitzada a l'oscil·loscopi en calibrar una sonda quan aquesta està compensada



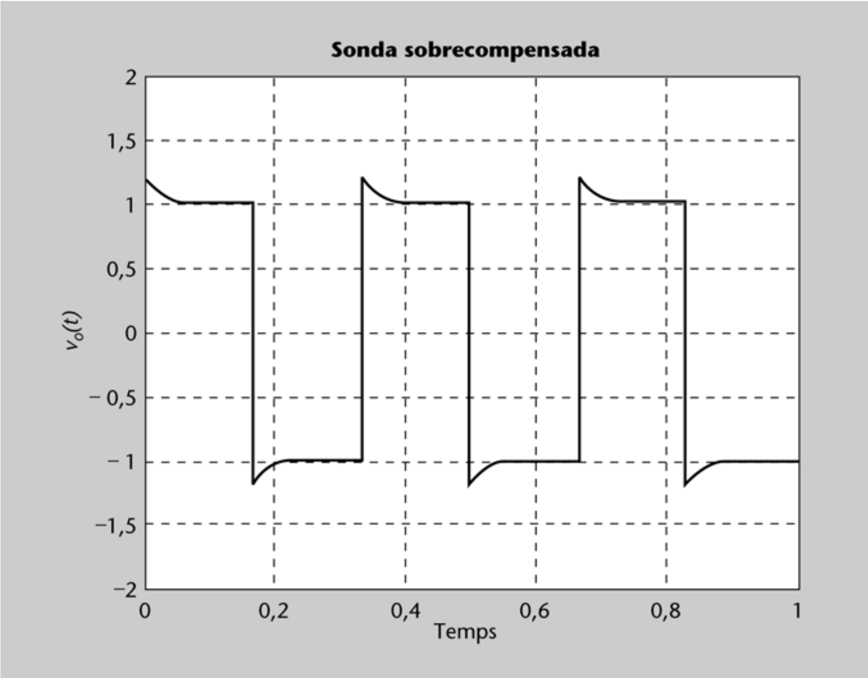
- Per a valors de C_1 entre 0 i R_2C_2/R_1 es diu que la sonda està **subcompensada**. En mesurar el senyal test de la sonda (un senyal quadrat), la resposta que visualitzaríem a l'oscil·loscopi seria similar a la de la figura 40.

Figura 40. Resposta visualitzada a l'oscil·loscopi en calibrar una sonda quan aquesta està subcompensada



- Per a valors de C_1 superiors a R_2C_2/R_1 es diu que la sonda està **sobrecompensada**. En mesurar el senyal test de la sonda (un senyal quadrat), la resposta que visualitzaríem a l'oscil·loscopi seria similar a la de la figura 41.

Figura 41. Resposta visualitzada a l'oscil·loscopi en calibrar una sonda quan aquesta està sobrecompensada



La funció de xarxa general del circuit analitzat es pot escriure, en general, de la manera següent:

$$H(s) = k\frac{s+z}{s+p} \tag{184}$$

on $k = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}$ i el valor del pol i el zero:

$$\begin{aligned} \text{pol} &= -p = -\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2(C_1 + C_2)}; \\ \text{zero} &= -z = -\frac{1}{R_1C_1}; \end{aligned} \tag{185}$$

La resposta a una entrada esglaó en el domini de Laplace és:

$$V_0(s) = k\frac{s+z}{s+p}\frac{1}{s} = \frac{A}{s+p} + \frac{B}{s} \tag{186}$$

$$A = k\frac{s+z}{s+p}\frac{1}{s}(s+p)\bigg|_{s=-p} = k\frac{z-p}{-p} \tag{187}$$

$$B = k\frac{s+z}{s+p}\frac{1}{s}s\bigg|_{s=0} = k\frac{z}{p} \tag{188}$$

Quan el valor absolut del zero és major que el del pol ($z > p$) la sonda està subcompensada ($A < 0$), si $z = p$ la sonda està compensada ($A = 0$) i si $z < p$ la sonda està sobrecompensada ($A > 0$).

Resum

En aquest tema hem après a determinar, per a qualsevol circuit, el seu equivalent en el **domini transformat de Laplace**. Hem vist que, si bé les resistències queden igual, en el circuit transformat els **condensadors i inductors es transformen en impedàncies de valor** $1/Cs$ **i** Ls respectivament. Això, sempre que les condicions inicials siguin zero, és a dir, tensió inicial al condensador igual a zero i corrent inicial a la bobina igual a zero. Si el condensador i/o l'inductor estan inicialment carregats, les condicions inicials s'inclouen en el domini transformat com a fonts de tensió o corrent.

En el domini transformat, hem après a calcular la **funció de xarxa** d'un circuit com el quocient entre la transformada de Laplace de la sortida i la transformada de Laplace de l'entrada, considerant condicions inicials iguals a zero. A partir de la funció de xarxa podem obtenir analíticament la resposta temporal multiplicant la transformada de Laplace de l'entrada per la funció de xarxa i fent la transformada inversa del resultat.

La funció de xarxa ens ha permès obtenir conclusions sobre l'evolució temporal de la resposta. Hem vist que un circuit amb memòria, a més de la **resposta** forçada per a la qual s'ha dissenyat, afegeix la seva pròpia firma: la **resposta lliure**. La forma de la resposta lliure depèn dels pols del circuit.

A excepció dels oscil·ladors, la resposta lliure és un component indesitjat. Per això, sempre hem de treballar amb circuits estables. En circuits estables, la resposta lliure acaba desapareixent. La condició necessària perquè un circuit sigui estable és que tots els pols tinguin part real negativa. Per a un circuit de segon ordre això ocorrerà si el coeficient d'esmorteïment és positiu.

Finalitzat el transitori en un circuit estable, amb la resposta lliure desapareguda, només tenim una resposta forçada. La resposta forçada a una entrada DC és el propi senyal DC multiplicat per $H(0)$. La resposta forçada a un senyal sinusoïdal de freqüència ω és el mateix senyal sinusoïdal amplificat i desfasat segons el mòdul i argument, respectivament, de la funció de xarxa avaluada en $s = j\omega$.

Exercicis d'autoavaluació

1. Completeu:

En el domini transformat, un condensador sense condicions inicials es converteix en una impedància de valor...............i un inductor sense condicions inicials es converteix en una impedància de valor...............

Les condicions inicials del condensador es modelen com una font independent de ....de valor ...., connectada................amb la impedància equivalent del condensador.

Les condicions inicials d'un inductor es modelen com una font independent de ....de valor..............., connectada................amb la impedància equivalent de l'inductor.

2. Un circuit que respon a un esglaó de tensió amb la sortida següent:

$$v_o(t) = \left[e^{-3t} - e^{-8t}\right]u(t)$$

té com a funció de xarxa:

a) $H(s) = \dfrac{1}{s+3}$

b) $H(s) = \dfrac{s}{s+3}$

c) $H(s) = \dfrac{5}{(s+3)(s+8)}$

d) $H(s) = \dfrac{5s}{(s+3)(s+8)}$

3. Per a una entrada sinusoïdal de freqüència 1 kHz, un circuit ofereix la resposta següent:

$$v_o(t) = \left[A\cos(2\pi 10^3 t + \frac{\pi}{4}) + Be^{-5\cdot 10^{-3}t} + Ce^{-10^3 t}\right]u(t)$$

mentre que per a una entrada esglaó la resposta és:

$$v_o(t) = \left[De^{-5\cdot 10^{-3}t} + Ee^{-10^3 t}\right]u(t)$$

on A, B, C, D i E són constants.
a) El circuit té dos pols reals i un zero en l'origen.
b) El circuit té dos pols reals i un parell de pols imaginaris purs en $\pm j2\pi 10^3$.
c) El circuit té dos pols reals i no podem dir res sobre els zeros.
d) Cap de les respostes anteriors no és correcta.

4. Un circuit format per una resistència en sèrie amb una inductància té una constant de temps de valor...
a) ... *RL*.
b) ... R/*L*.
c) ... 1/*RL*.
d) ... L/*R*.

5. En un circuit format per una resistència en sèrie amb un condensador la durada del transitori és aproximadament...
a) ... 5*RC*.
b) ... 5*R*/C.
c) ... 5/*RC*.
d) És un circuit inestable, per la qual cosa la resposta lliure té durada infinita.

6. Un circuit de segon ordre té com a resposta lliure una sinusoide esmorteïda exponencialment, llavors el circuit ...
a) ... està subesmorteït.
b) ... està sobreesmorteït.
c) ... és un oscil·lador.
d) ... és inestable.

7. Un circuit actiu de segon ordre és subesmorteït quan...
a) ... el coeficient d'esmorteïment és negatiu.
b) ... el coeficient d'esmorteïment és nul.
c) ... el coeficient d'esmorteïment és major que 1.
d) ... el coeficient d'esmorteïment és entre 0 i 1.

8. Un circuit *RLC* sèrie està sobreesmorteït si...

a) $2R\sqrt{\frac{C}{L}} > 1$

b) $0 < 2R\sqrt{\frac{C}{L}} < 1$

c) $\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} > 1$

d) $0 < \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} < 1$

9. Un circuit amb funció de xarxa $H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2(2-k)s + 100}$ és...

a) ... estable per a tots els valors de *k*.
b) ... estable per a $k > 2$.
c) ... estable per a $k < 2$.
d) ... estable per a $k > 0$.

10. Per a una entrada contínua de valor 10, la resposta forçada d'un circuit amb funció de xarxa

$$H(s) = 2\frac{s^2 + 41 \cdot 10^8}{s^2 + 10^4 s + 41 \cdot 10^8}$$

a) ... és una contínua de valor 20.
b) ... és una sinusoide de freqüència igual que la freqüència natural.
c) ... és una contínua de valor 10 i una sinusoide de freqüència 40 krad/segon.
d) ... és una contínua de valor 20 i una sinusoide de freqüència 64 krad/segon (freqüència natural).

Solucionari

1.

$\frac{1}{Cs}$, Ls

tensió, $\frac{v(0)}{s}$, en sèrie.

corrent, $\frac{i(0)}{s}$, en paral·lel.

2. d.

3. a.

4. d.

5. a.

6. a.

7. d.

8. c.

9. c.

10. a.

Glossari

circuit estable *m* Circuit la resposta lliure del qual és transitòria.

circuit inestable *m* Circuit que mai no assoleix el règim permanent perquè la seva resposta lliure divergeix.

circuit marginalment estable *m* Circuit la resposta lliure del qual no és transitòria però està afitada.

constant de temps *f* Paràmetre que s'utilitza per a determinar la durada del transitori d'un circuit de primer ordre, és a dir, per a determinar quant triga el circuit a estabilitzar-se.

funció de transferència *f Vegeu* **funció de xarxa**.

funció de xarxa *f* El quocient entre les transformades de Laplace de la sortida i l'entrada d'un circuit.

impedància *f* En el domini transformat de Laplace, el concepte equivalent a la resistència del domini del temps.

ordre d'un circuit *m* Nombre de pols del circuit.

oscil·lador *m* Circuit la resposta lliure del qual és una sinusoide d'amplitud constant.

oscil·loscopi *m* Instrument per a la visualització de formes d'ona.

pol dominant *m* El pol que determina la forma i durada de la resposta lliure.

pols *m pl* Arrels del denominador de la funció de xarxa.

resposta forçada *f* Component en la resposta global d'un circuit introduït per les arrels del denominador de la transformada de Laplace de l'entrada. Per a les entrades bàsiques, esglaó i sinusoide, té la forma de l'entrada encara que possiblement amb una altra amplitud i fase.

resposta impulsional *f* Resposta a un senyal (de tensió o corrent) impuls unitat ($\delta(t)$).

resposta indicial *f* Resposta a un senyal (de tensió o corrent) esglaó unitat ($u(t)$).

resposta lliure *f* Component en la resposta global d'un circuit introduït pels pols del circuit.

sobreesmorteïment *m* Tipus d'esmorteïment d'un circuit de segon ordre que presenta una resposta lliure decreixent sense oscil·lacions.

sonda *f* Instrument per a realitzar mesures de tensió mitjançant un oscil·loscopi.

subesmorteïment *m* Tipus d'esmorteïment d'un circuit de segon ordre que presenta oscil·lacions esmorteïdes exponencialment.

zeros *m pl* Arrels del numerador de la funció de xarxa.

Bibliografia

Bertrán, E.; Montoro, G. (2000). *Circuitos y Sistemas Lineales*. *Curso de laboratorio*. Barcelona: Edicions UPC.

Huelsman, L. P. (1991). *Basic Circuit Theory* (3a. ed.). Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Pallás Areny, R. (1987). *Instrumentación electrónica básica*. Barcelona: Marcombo.

Thomas, R. E.; Rosa, A. J. (2002). *Circuitos y señales: introducción a los circuitos lineales y de acoplamiento*. Barcelona: Reverté.

Thomas, R. E.; Rosa, A. J. (2004). *The analysis and design of linear circuits. Laplace early* (4a. ed.). Upper Saddle River: Jonh Wiley & Sons.