Circuits en corrent altern

Anàlisi en règim permanent sinusoïdal

Olga Muñoz Medina

PID_00161693

Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

Índex

Introducció

En el mòdul “Circuits dinàmics” vam aprendre que la resposta completa d’un circuit conté un component de la forma de l’entrada (resposta forçada) i un component propi del circuit (resposta lliure). Quan encenem l’equip de música, volem escoltar el senyal gravat al CD i quan connectem el televisor hi volem veure un dels senyals, sense interferències, d’entre els que tenim a l’entrada de l’antena. Aquesta informació està únicament en la resposta forçada, que és la que depèn de l’entrada aplicada externament.

Per tant, la resposta lliure, a excepció dels oscil·ladors, és un component indesitjat. Vam veure en el mòdul “Circuits dinàmics”, que en circuits estables la resposta lliure desapareix al cap d’un temps. Per això, a partir d’ara ens centrarem en el règim permanent de circuits estables, és a dir, el règim on la resposta lliure ha desaparegut i només tenim la part que procedeix de l’entrada: la resposta forçada.

D’entre tots els possibles senyals d’entrada n’hi ha un d’especialment important: l’entrada sinusoïdal. La seva importància rau en el fet que apareix en moltes aplicacions d’enginyeria, que inclouen des de la generació i transmissió d’energia elèctrica fins a aplicacions de comunicacions. En aquest mòdul treballarem l’anàlisi de circuits en règim permanent sinusoïdal o, com es coneix més popularment, **l’anàlisi de circuits en corrent altern**.

En l’apartat 1 del mòdul veurem com s’analitzen els circuits en corrent altern. Un paper clau en el comportament dels circuits en corrent altern és el de la impedància complexa (o impedància en corrent altern) que veurem en l’apartat 2. D’entre les diferents aplicacions del corrent altern, una de fonamental és la distribució de l’energia elèctrica. Per això, l’apartat 3 es dedica a la potència elèctrica alterna, el transport de la qual requereix l’ús de transformadors a la central i a l’entrada de les estacions de consum. El transformador, component que no hem vist abans en l’assignatura, s’introdueix en l’apartat 4. Finalment, acabarem el mòdul presentant un altre concepte important relacionat amb els circuits en corrent altern com és l’adaptació d’impedàncies. Aquest concepte té gran interès en l’enginyeria de telecomunicacions, en la qual de vegades s’ha de treballar amb senyals de baixa potència com, per exemple, els que tenim a l’entrada d’una antena.

L’estudi en corrent altern es fonamenta en el concepte de fasor que s’introduirà en aquest mòdul. Matemàticament, aquest es basa en els nombres complexos, de manera que, per a l’estudi d’aquest mòdul, és aconsellable revisar l’annex 4, en què es resumeix el funcionament d’aquest tipus de nombres.

Objectius

Els objectius principals d'aquest mòdul són els següents:

1. Obtenir per a qualsevol circuit lineal el seu equivalent en el domini freqüencial: el denominat circuit transformat fasorial.

2. Operar amb el circuit transformat fasorial.

3. Obtenir l'expressió temporal d'una tensió o corrent altern a partir del seu fasor associat i viceversa.

4. Obtenir impedàncies equivalents i analitzar el seu comportament a freqüències molt baixes, a freqüències molt altes i a la freqüència de ressonància.

5. Conèixer què s'entén per factor de potència.

6. Calcular la potència activa i reactiva consumida en circuits que treballen amb corrent altern.

7. Entendre el funcionament d'un transformador i com actua dins d'un circuit.

8. Decidir si hi ha o no adaptació d'impedàncies entre font i càrrega, i calcular la potència que arriba a la càrrega en cas d'adaptació.

9. Dissenyar una xarxa d'adaptació.

1. Anàlisi en corrent altern

En aquest apartat aprendrem a analitzar circuits que treballen amb corrent altern. Segurament, el terme corrent altern us resulta familiar. Sabem que l'energia elèctrica produïda a les centrals s'obté en forma de corrent altern. Però, què és en realitat un corrent altern? Això és el primer que veurem en aquest apartat, concretament en el subapartat 1.1, abans d'abordar l'anàlisi dels circuits en corrent altern.

Veurem, en el subapartat 1.2, que en corrent altern hi ha una relació directa entre la funció de xarxa d'un circuit i la seva resposta en règim permanent. Això ens permet simplificar l'anàlisi en corrent altern utilitzant el concepte de fasor. Aquest concepte, utilitzat en l'enginyeria elèctrica des dels seus inicis cap al segle XIX, el presentarem en el subapartat 1.3. Amb això ja estarem en condicions de presentar i treballar en el subapartat 1.4 amb el circuit anomenat transformat fasorial. Utilitzarem el circuit transformat fasorial per a fer l'anàlisi en corrent altern.

1.1. Corrent altern

Podem definir el corrent altern (AC) com un corrent variable en el qual les magnituds associades (tensió i intensitat de corrent) canvien de magnitud i de sentit periòdicament. El cas més habitual és el d'un corrent altern sinusoïdal, que és el que es genera en els alternadors utilitzats a les centrals elèctriques.

A partir d'ara, ens centrarem exclusivament en corrent altern sinusoïdal. En corrent altern sinusoïdal, la intensitat de corrent (i la tensió) canvia periòdicament de positiva a negativa i viceversa, seguint cicles, com es mostra en la figura 1.

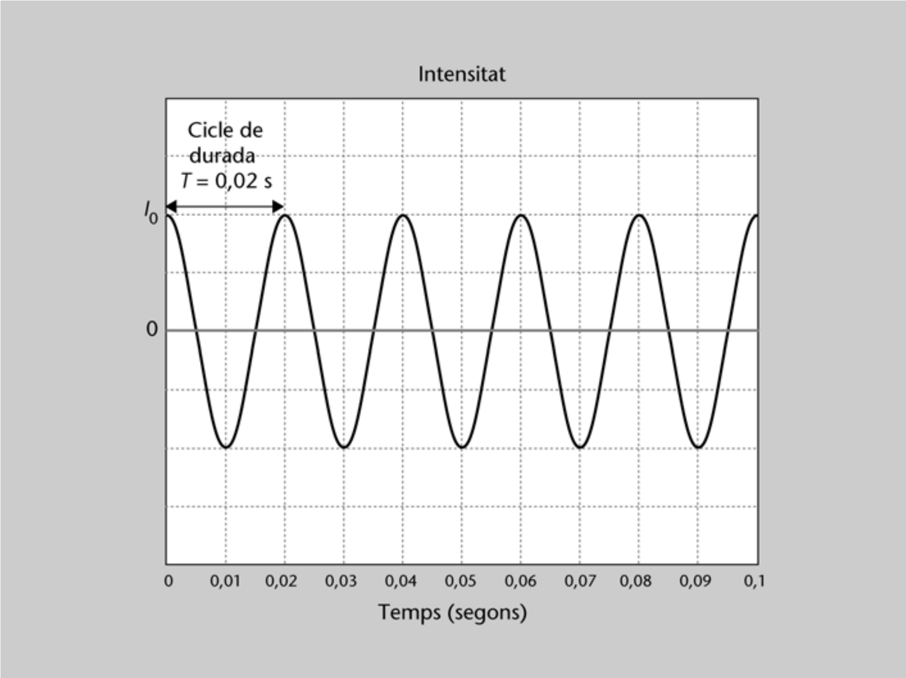
El nombre de cicles per unitat de temps determina la **freqüència** f del senyal altern i es mesura en hertzs (Hz). Per exemple, el corrent altern de la xarxa elèctrica té una freqüència de 50 Hz, el que significa que la intensitat canvia de sentit 100 vegades per segon.

Freqüència de la xarxa elèctrica

La freqüència de la xarxa elèctrica és de 50 Hz a la major part del món. Als Estats Units, tanmateix, és de 60 Hz.

El temps que triga un senyal altern a completar un cicle és el **període** T i, per tant, es pot calcular com l'invers de la freqüència. Per exemple, per al corrent altern de la xarxa elèctrica en cada segon tenim 50 cicles. Per tant, cada cicle requereix 1/50 segons o, equivalentment, 0,02 segons (20 mil·lisegons). Aquest és el cas del corrent representat en la figura 1.

Figura 1. Evolució temporal d'un CA sinusoïdal de període T = 0,02 segons (freqüència de 50 Hz)



Matemàticament, escrivim l'expressió del corrent i en funció del temps t:

$$i(t) = I_0 \cos(2\pi ft) \tag{1}$$

on I_0 és l'amplitud o valor màxim de la intensitat i f és la freqüència.

En un instant t, l'angle o **fase** del corrent de l'equació 1 és $2\pi ft$. En cada cicle la fase de la sinusoide recorre 2π radiants.

És bastant habitual escriure el corrent sinusoïdal en funció de la seva **freqüència angular o pulsació** ω (llegiu-hi 'omega'):

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t) \tag{2}$$

La freqüència angular és una mesura de velocitat angular, ja que determina l'angle recorregut per unitat de temps. Sabent que en cada cicle la fase de la sinusoide recorre 2π radiants i que el període T és el temps que triga la sinusoide a completar un cicle, tenim que la freqüència angular és:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{3}$$

Les unitats de la freqüència angular són radiants per segon que, abreujadament, escriurem com a rad/s.

Noteu que les unitats de la freqüència angular ω (rad/s) són diferents de les unitats de la freqüència lineal f, que es mesura en Hz.

L'angle recorregut per una sinusoide és el producte de la freqüència angular pel temps transcorregut: ωt. A vegades, l'angle en l'instant inicial és diferent de zero com en:

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) \tag{4}$$

on l'angle en $t = 0$ val ϕ (llegiu-hi 'fi'). Aquest angle és el que es denomina **fase inicial**.

Si volem descriure el retard d'una ona sinusoïdal respecte a un punt de referència, podem fer-ho en termes del temps transcorregut o bé de l'angle recorregut. Ambdues mesures són equivalents i es poden utilitzar indistintament: un període T és equivalent a 2π radiants o també a 360°. D'aquesta manera podem convertir segons, radiants o graus a qualsevol de les altres dues magnituds mitjançant factors de conversió. Per exemple, un retard de Δt segons és equivalent a:

Treball amb radiants

Cal tenir especial cura quan es treballa amb graus, ja que diverses aproximacions que s'utilitzen en física només són vàlides si els angles són en radiants. Per això se sol preferir treballar amb radiants.

$$\Delta t\ \text{s} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{T\ \text{s}} = \Delta t \cdot \frac{2\pi}{T} \text{rad} \tag{5}$$

En altern, els valors mitjans de tensió i corrent en un període són zero, com es pot observar en la figura 1. Per això, s'han d'utilitzar altres mesures per a caracteritzar la magnitud d'un senyal altern com, per exemple, el seu valor d'amplitud (també denominat valor de pic), el seu valor de pic a pic o el seu valor eficaç:

- **L'amplitud o valor de pic** d'un corrent (o una tensió) sinusoïdal és el valor màxim de corrent (o tensió). En el corrent de la figura 1 el valor de pic és I_0.
- El **valor de pic a pic** d'un corrent (o tensió) sinusoïdal és 2 vegades el seu valor de pic. Aquesta definició és vàlida, de fet, per a qualsevol forma d'ona simètrica. En el corrent de la figura 1 el valor de pic a pic és $2I_0$.
- La **intensitat eficaç** d'un corrent altern es defineix com la intensitat d'un corrent continu (DC) que, passant pel mateix conductor durant el mateix temps, produiria la mateixa quantitat de calor.

Hem definit el que s'entén per valor eficaç però, com es calcula a la pràctica per a una intensitat o tensió concretes? Vegem-ho.

Pensem en un conductor de resistència R. En qualsevol instant de temps, la potència instantània lliurada al conductor és proporcional a la seva resistència i al quadrat del corrent que hi circula:

La potència instantània...

... lliurada a un element en un instant t és el producte de la tensió en borns i el corrent que hi circula:

$$p(t) = v(t)\,i(t)$$

$$p(t) = i^2(t)R \tag{6}$$

Si treballem en corrent continu, el corrent és constant en el temps i, per tant, la potència instantània (p_{DC}) també:

$$p_{DC}(t) = I^2R \tag{7}$$

En canvi, si treballem amb corrent altern la potència variarà amb el temps. Si considerem un corrent altern d'amplitud I_0, pulsació ω i fase inicial ϕ, utilitzant l'expressió 6, obtenim que la potència (p_{AC}) consumida en la resistència és:

$$i(t) = I_o \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow p_{AC}(t) = I_o^2 \cos^2(\omega t + \phi) R \quad (8)$$

Podem escriure el cosinus al quadrat com u més el cosinus de l'angle doble dividit entre 2:

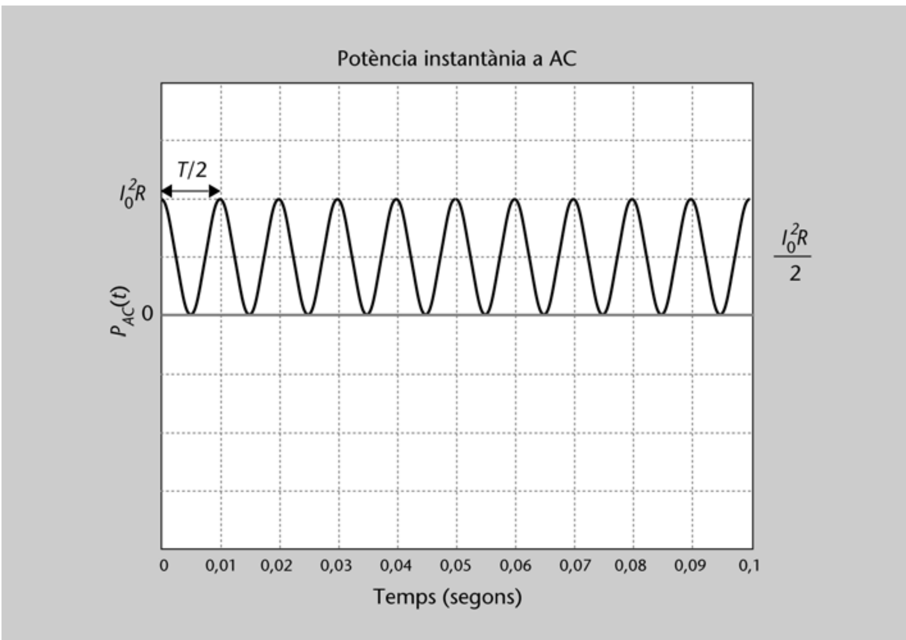
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \quad (9)$$

Si apliquem 9 en l'equació 8, on l'angle α (llegiu-hi 'alfa') és ($\omega t + \phi$), veiem que la potència instantània lliurada a la resistència treballant en corrent altern és:

$$p_{AC}(t) = I_o^2 R \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\phi)}{2} \quad (10)$$

Fixeu-vos que la potència instantània és també periòdica. Si no ho veieu a partir de la fórmula, observeu la figura 2, on s'ha representat la potència instantània en funció del temps, és a dir, l'equació 10. La freqüència de la potència instantània és el doble de la freqüència ω del corrent i, per tant, el seu període és la meitat del període T del corrent. Per exemple, si el corrent altern té una freqüència de 50 cicles/segon (hertzs, Hz) i, per tant, un període T = 1/50 = 0,02 segons, el període de la potència instantània és 0,01 segons. Aquest és el cas de la potència instantània representada en la figura 2, on s'observa que cada cicle té una durada de 0,01 segons.

Figura 2. Evolució temporal de la potència instantània per a un corrent altern de període T = 0,02 segons (50 Hz)



Calculem ara l'energia consumida en forma de calor durant un període T per la resistència. En corrent continu, com que la potència instantània és constant, només hem de multiplicar aquesta potència pel període T, és a dir, l'energia consumida per una resistència al llarg d'un període és:

En general, ...

... l'enegia consumida (W_{DC}) per una resistència en corrent continu en un temps t és $W_{DC} = I^2Rt$. Aquesta energia es dissipa en forma de calor (la resistència s'escalfa).

En general, en un instant molt petit (dt), es consumirà una quantitat molt petita d'energia (dW), per la qual cosa podem dir que:

$$dW = I^2Rdt.$$

$$W_{DC} = I^2RT \tag{11}$$

En corrent altern, com la potència instantània varia, per a calcular l'energia consumida en un període hem d'integrar la potència instantània (equació 10) des de 0 fins a T.

El resultat de la integral des de 0 fins a T del cosinus de freqüència 2ω és 0:

$$\int_0^T \cos(2\omega t)dt = \int_0^T \cos\left(2\frac{2\pi}{T}t\right)dt = 0 \tag{12}$$

Amb la qual cosa, l'energia consumida entre 0 i T és:

$$W_{AC} = \frac{I_0^2R}{2}T \tag{13}$$

Intuïtivament podíem haver deduït aquest valor a partir de la figura 2: entre 0 i T, a causa de la simetria respecte al valor mitjà $I_0^2R/2$, l'àrea de la funció és el valor mitjà de la funció per T.

Perquè la quantitat de calor dissipada sigui la mateixa en altern (equació 13) que en continu (equació 11), l'amplitud del corrent continu hauria de ser $I = I_0/\sqrt{2}$. Veiem llavors que la intensitat eficaç és el valor de pic del corrent entre arrel de 2 o, equivalentment, multiplicat, aproximadament, per 0,7. De la mateixa manera podem calcular la tensió eficaç a partir de la tensió de pic.

El factor $\sqrt{2}$ és un nombre irracional que s'aproxima per 0,7.

Podem passar de valors de pic (I_0, V_0) a valors eficaços (I_{ef}, V_{ef}), simplement dividint els valors de pic per $\sqrt{2}$ (o, aproximadament, multiplicant els valors de pic per 0,7):

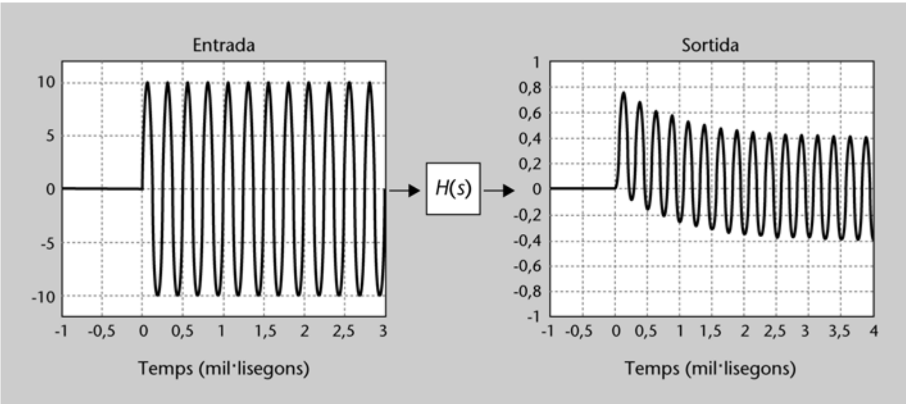
$$I_{ef} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} \cong 0{,}7I_o \qquad V_{ef} = \frac{V_o}{\sqrt{2}} \cong 0{,}7V_o \tag{13b}$$

Els conceptes d'intensitat eficaç i tensió eficaç són molt utilitzats quan es treballa amb corrent altern. De fet, quan diem que una tensió és de 220 V (volts), en realitat es tracta del valor eficaç d'una tensió sinusoïdal d'amplitud 311 V ($220\sqrt{2}$ V). Els valors que ens indiquen els aparells utilitzats per a mesurar corrents i tensions alterns són sempre valors eficaços.

1.2. Resposta en règim permanent sinusoïdal

Quan excitem un circuit lineal amb corrent altern, a la resposta forçada per l'entrada, el circuit afegeix la seva pròpia "firma" (la resposta lliure). En un circuit estable la resposta lliure només és present durant un període de temps transitori. Una vegada finalitzat aquest transitori, únicament queda la resposta forçada: un senyal altern de la mateixa freqüència que l'entrada.

Figura 3. Resposta d'un circuit estable a una entrada sinusoïdal



Recordeu el que s'ha vist en el mòdul "Circuits dinàmics": la resposta en règim permanent d'un circuit lineal estable és la resposta forçada. La resposta forçada per a una entrada sinusoïdal és un altre senyal sinusoïdal de la mateixa freqüència.

En qualsevol circuit lineal estable excitat amb una entrada sinusoïdal, tots els corrents i tensions del circuit acabaran essent sinusoides de la **mateixa freqüència** que la de l'entrada, segurament amb una altra amplitud i una altra fase inicial, però de la mateixa freqüència.

La resposta d'un circuit lineal estable en règim permanent per a una entrada alterna es denomina resposta en **règim permanent sinusoïdal (RPS).** Atès que en RPS tots els senyals presents en un circuit lineal tindran la mateixa freqüència, per a descriure'ls n'hi ha prou d'especificar l'amplitud i fase inicial de cadascun d'aquests. La freqüència ja la coneixem: és la del senyal d'entrada! Això permet utilitzar una notació més simple. La veurem en el subapartat 1.3.

Abans, tanmateix, un aclariment: a partir d'ara, ja no escriurem els senyals multiplicats per $u(t)$. La raó és la següent: com que estem interessats únicament en el règim permanent, considerarem l'entrada connectada molt abans de $t = 0$. D'aquesta manera, qualsevol instant t, inclòs $t = 0$, forma part del règim permanent.

1.3. Fasors

Considerem una tensió sinusoïdal d'amplitud V_o i fase inicial ϕ:

$$v(t) = V_o \cos(\omega_o t + \phi) \tag{14}$$

En RPS, tots els corrents i tensions en el circuit on hem mesurat $v(t)$ tindran la mateixa freqüència: ω_o. El que distingirà $v(t)$ de la resta de tensions i corrents serà la seva amplitud i fase inicial. Per aquesta raó, podem representar la tensió $v(t)$ d'una altra manera. Aquesta altra manera es diu **fasor**.

El fasor s'indica amb lletra majúscula i negreta: **V**, per a distingir-lo de la tensió temporal. I què és el fasor **V**? Doncs no és més que un nombre complex el mòdul del qual és l'amplitud de la tensió $|\mathbf{V}| = V_o$ i l'argument del qual és la fase inicial de la sinusoide $\angle\mathbf{V} = \phi$. Observeu que el fasor no porta informació de la freqüència.

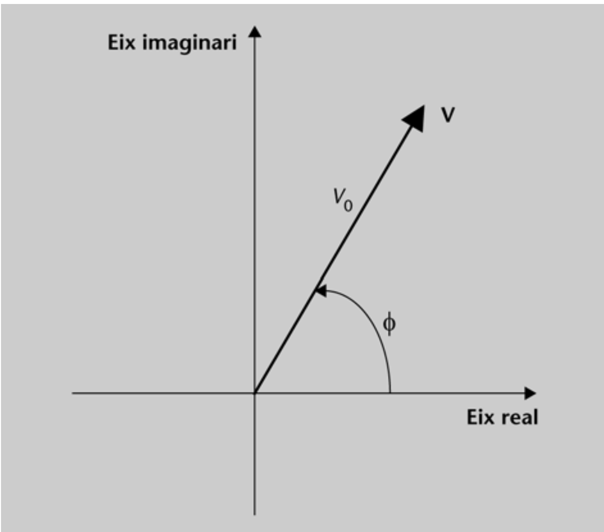
És habitual indicar els fasors en majúscula i negreta **V**, o bé, amb lletra majúscula i entre parèntesis $j\omega_o$. Per exemple, el fasor es representaria com a $V(j\omega_o)$.

Per a qualsevol corrent sinusoïdal podem operar de la mateixa manera.

Podem representar els fasors com a vectors en el pla complex. Aquesta representació es denomina **diagrama fasorial**. La figura 4 mostra el diagrama fasorial per al fasor **V**, associat a la tensió $v(t)$. La longitud del vector és el mòdul del fasor i l'angle que forma el vector amb l'eix d'abscisses (eix real) és l'argument del fasor.

A l'annex 4 hi ha una revisió del funcionament dels nombres complexos.

Figura 4. Diagrama fasorial per a una tensió d'amplitud V_o i fase inicial ϕ



Com que el fasor no deixa de ser un nombre complex, com qualsevol nombre complex, el podem escriure en forma exponencial $V_o e^{j\phi}$ (llegiu-hi '*V* zero per *e* elevat a jota fi') o en forma cartesiana, és a dir, com a part real i imaginària: $V_o \cos(\phi) + jV_o \sin(\phi)$.

Si no recordeu les diferents notacions dels nombres complexos, reviseu el subapartat 4.2 de l'annex 4.

En règim permanent sinusoïdal, tensions i corrents es poden representar mitjançant fasors, el mòdul i argument dels quals són, respectivament, l'amplitud i la fase inicial de la sinusoide:

Senyal temporal	**Fasor**
$v(t) = V_o \cos(\omega_o t + \phi)$	$\mathbf{V} = V_o e^{j\phi} = V_o \cos(\phi) + jV_o \sin(\phi)$
$i(t) = I_o \cos(\omega_o t + \theta)$	$\mathbf{I} = I_o e^{j\phi} = I_o \cos(\theta) + jI_o \sin(\theta)$

En règim permanent sinusoïdal, la relació entre l'amplitud i la fase del senyal d'entrada i la de qualsevol tensió o corrent que mesurem en el circuit serà determinada per la funció de xarxa que les relaciona totes dues:

Recordeu el que s'ha vist en el mòdul "Circuits dinàmics": la resposta forçada a un senyal sinusoïdal (l'única que queda en règim permanent en circuits estables) es calcula particularitzant la funció de xarxa en $s = j\omega$, on ω és la freqüència de l'entrada.

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \Rightarrow y(t) = A\left|H(j\omega_0)\right|\cos\left(\omega_0 t + \phi + \angle H(j\omega_0)\right) \qquad (15)$$

El mòdul de la funció de xarxa particularitzat en $s = j\omega_0$: $|H(j\omega_0)|$ és **l'amplificació** (o **guany**) del circuit a la freqüència ω_0.

L'argument de la funció de xarxa particularitzat en $s = j\omega_0$: $\angle H(j\omega_0)$ és el **desfasament** introduït pel circuit a la freqüència ω_0.

D'aquesta manera el fasor que representa el senyal $y(t)$ és:

$$\mathbf{Y} = A\left|H\left(j\omega_0\right)\right|e^{j\left(\phi+\angle H\left(j\omega_0\right)\right)} \qquad (16)$$

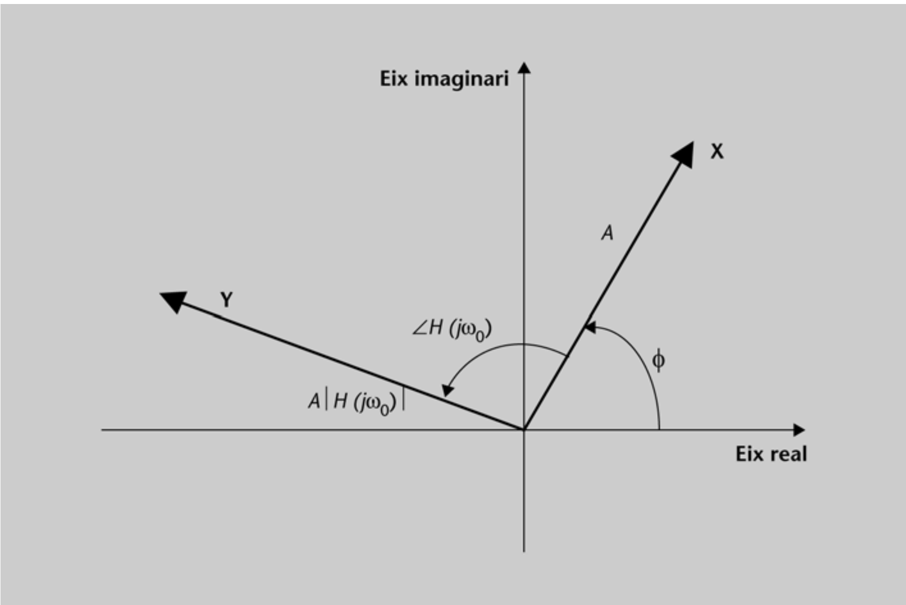
Quan multipliquem dos nombres complexos, multipliquem els seus mòduls i sumem els seus arguments. Per tant, el fasor **Y** es pot calcular directament multiplicant el fasor associat a l'entrada $\mathbf{X} = Ae^{j\phi}$ pel nombre complex $H(j\omega_0)$:

Al subapartat 4.4 de l'annex 4 hi ha un resum de les operacions amb nombres complexos.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}H\left(j\omega_0\right) = A\left|H\left(j\omega_0\right)\right|e^{j\left(\phi+\angle H\left(j\omega_0\right)\right)} \qquad (17)$$

En la figura 5 podeu veure el diagrama fasorial per als fasors d'entrada **X** i de sortida **Y.** Observeu en la figura que l'angle del vector **Y** és l'angle ϕ del vector **X** més l'argument de $H(j\omega_0)$. Pel que fa a la longitud del vector **Y**, és igual que la longitud del vector **X** multiplicada pel mòdul de $H(j\omega_0)$.

Figura 5. Diagrama fasorial per a l'entrada i sortida d'un circuit amb funció de xarxa *H*(*s*)



Exemple 1

A un circuit amb funció de xarxa $H(s)=\dfrac{s}{s+2\pi 10^3}$ se li aplica una tensió de 10 V, fase inicial $\pi/4$ rad i freqüència 1 kHz.

a) Escriviu l'expressió de la tensió d'entrada en el domini del temps. Escriviu també el fasor associat a aquesta tensió.

b) Calculeu el fasor associat a la tensió de sortida i l'expressió temporal de la tensió de sortida.

Solució

a) La tensió d'entrada té una amplitud de 10 V, pulsació $\omega = 2\pi f = 2\pi 10^3$ rad/s i fase inicial $\pi/4$ rad. L'expressió temporal d'aquesta tensió és la següent (vegeu l'equació 4):

$$v_g(t)=10\cos\left(2\pi 10^3 t+\frac{\pi}{4}\right)\ \text{V} \tag{18}$$

Observeu que ja no escrivim la funció $u(t)$ multiplicant la tensió.

> Si estem estudiant el règim permanent no posarem mai la funció $u(t)$ multiplicant el senyal d'entrada o sortida.

El fasor associat a $v_g(t)$ conté informació només sobre l'amplitud i la fase inicial. El seu mòdul és l'amplitud 10 i el seu argument és la fase inicial $\pi/4$:

$$\mathbf{V}_g=10e^{j\frac{\pi}{4}}\ \text{V} \tag{19}$$

b) Per a calcular la tensió de sortida en RPS, treballant a una freqüència d'1 kHz, hem d'avaluar la funció de xarxa per a $s = j\omega_0 = j2\pi 10^3$.

$$H\left(j2\pi 10^3\right)=\frac{j2\pi 10^3}{\left(j2\pi 10^3\right)+2\pi 10^3}=\frac{j}{j+1} \tag{20}$$

> **Divisió de nombres complexos**
>
> Recordeu que en **dividir** dos nombres complexos dividim els seus mòduls i restem les seves fases tal i com s'explica al subapartat 4.4.3 de l'annex 4.
>
> Calculem el mòdul d'un nombre complex $a + jb$ com l'arrel quadrada de la part real al quadrat més la part imaginària al quadrat:
>
> $$\sqrt{a^2+b^2}$$
>
> La fase d'un nombre complex és l'angle la tangent del qual és la part imaginària entre la part real.
>
> $$\text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Calcularem el mòdul de $H(j2\pi 10^3)$ dividint el mòdul del numerador entre el mòdul del denominador, i calcularem la fase de $H(j2\pi 10^3)$ restant a l'argument del numerador l'argument del denominador:

$$H\left(j2\pi 10^3\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)} \tag{21}$$

La tensió de sortida $v_0(t)$ tindrà com a amplitud la de l'entrada (10 V) multiplicada pel mòdul de $H(j2\pi 10^3)$, que val $1/\sqrt{2}$ (vegeu equació 15). La fase inicial de $v_0(t)$ serà la de l'entrada més la fase de $H(j2\pi 10^3)$, que val $\pi/4$:

$$v_0(t)=\frac{10}{\sqrt{2}}\cos\left(2\pi 10^3 t+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=7{,}1\cos\left(2\pi 10^3 t+\frac{\pi}{2}\right) \tag{22}$$

El fasor associat a la tensió de sortida $v_0(t)$ és:

$$\mathbf{V}_0=7{,}1e^{j\frac{\pi}{2}}=j7{,}1\ \text{V} \tag{23}$$

que coincideix amb el resultat de multiplicar el fasor $\mathbf{V}_g$ (equació 19) per $H(j2\pi 10^3)$ (equació 21):

$$\mathbf{V}_g H\left(j2\pi 10^3\right)=10e^{j\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}}=\frac{10}{\sqrt{2}}e^{j\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}=7{,}1e^{j\frac{\pi}{2}}\ \text{V} \tag{24}$$

1.4. El circuit transformat fasorial

Tal com hem vist en el subapartat anterior, en règim permanent sinusoïdal podem treballar directament amb els fasors tensió i corrent, i només necessitem conèixer la funció de xarxa $H(s)$ en $s = j\omega$. Això és precisament el que ens permet definir **el circuit transformat fasorial**. El circuit transformat fasorial és un circuit equivalent per a l'anàlisi directa en RPS.

El circuit transformat fasorial...

... només permet calcular la resposta en règim permanent per a una entrada sinusoïdal. No serveix per a calcular la resposta lliure ni per a determinar l'estabilitat.

Tal com vam fer quan vam veure el circuit transformat de Laplace, veurem amb quines variables treballem en el circuit transformat fasorial i com queden les lleis de Kirchhoff i les lleis dels elements en el circuit transformat fasorial.

1) Variables en el circuit transformat fasorial

En el circuit transformat fasorial treballarem directament amb els fasors associats als corrents i tensions sinusoïdals, en lloc de treballar amb l'expressió temporal d'aquestes variables.

2) Lleis de Kirchhoff

La representació fasorial és lineal, de manera que les lleis de Kirchhoff es compleixen també per a tensions i corrents representats com a fasors.

3) Lleis dels elements

En el domini de Laplace, la relació entre tensió i corrent per als tres elements passius s'escriu en funció de les seves impedàncies de la manera següent:

Resistència: $$V(s) = Z_R(s)I(s) = RI(s) \qquad (25)$$

Inductor: $$V(s) = Z_L(s)I(s) = LsI(s) \qquad (26)$$

Condensador: $$V(s) = Z_C(s)I(s) = \frac{1}{Cs}I(s) \qquad (27)$$

Les impedàncies dels elements són funcions de xarxa que relacionen el corrent i tensió dels elements. Particularitzant la funció de xarxa en $s = j\omega$, podem obtenir la relació entre els fasors tensió i corrent. D'aquesta manera obtenim:

Resistència $$\mathbf{V} = \mathbf{I}R \qquad (28)$$

Inductor $$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \qquad (29)$$

Condensador $$\mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I} \qquad (30)$$

La impedància $Z(s)$ particularitzada per a $s = j\omega$, $Z(j\omega)$, s'anomena **impedància complexa** o **impedància en AC** .

Analitzarem cada element amb més detall. Per aquest motiu, considerarem un corrent altern d'amplitud I_0, freqüència angular ω i fase inicial ϕ:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (31)$$

Representarem aquest corrent mitjançant un fasor de mòdul I_0 i argument ϕ:

$$\mathbf{I} = I_0 e^{j\phi} \quad (32)$$

Resistència

Si el corrent $i(t)$ circula per una resistència de valor R, podem obtenir el fasor tensió **V** multiplicant el fasor corrent **I** pel valor de la resistència R.

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}R \quad (33)$$

Multiplicació de nombres complexos

Recordeu que en **multiplicar** dos nombres complexos fem el producte dels seus mòduls i sumem les seves fases, tal i com s'explica al subapartat 4.4.2 de l'annex 4.

Quan multipliquem dos nombres complexos, els seus mòduls es multipliquen i les seves fases se sumen. D'aquesta manera, el mòdul del fasor tensió $|\mathbf{V}|$ (que representa el valor de pic de la tensió) serà igual que el mòdul del fasor corrent $|\mathbf{I}|$ (que representa el valor de pic del corrent) per R.

$$|\mathbf{V}| = |\mathbf{I}|R \quad (34)$$

Això és el mateix que dir que el valor de pic (o amplitud) de la tensió és el valor de pic del corrent pel valor de la resistència:

$$V_0 = I_0 R \quad (35)$$

La mateixa relació es compleix per als valors eficaços.

Com que R és un nombre real i positiu té fase 0. Per això, l'argument del fasor tensió és igual que el del fasor corrent.

$$\angle\mathbf{V} = \angle\mathbf{I} \quad (36)$$

Si escrivim la tensió en la seva forma temporal, veiem que és simplement el corrent multiplicat per R.

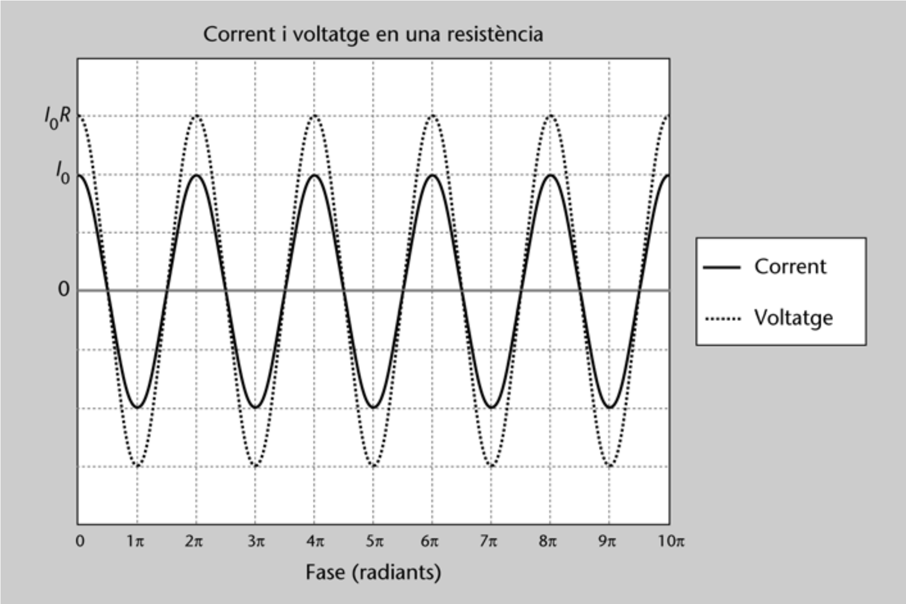
$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (37)$$

$$v(t) = I_0 R\cos(\omega t + \phi) = i(t)R \quad (38)$$

Lògicament, hem obtingut la llei d'Ohm en la seva forma original.

En la figura 6 podeu veure la forma temporal del corrent i la tensió als borns de la resistència en RPS.

Figura 6. Evolució temporal en RPS del corrent i tensió en una resistència



Veiem en la figura 6 que la intensitat assoleix els seus valors màxims, nuls i mínims alhora que la tensió, ja que la fase de totes dues és la mateixa. Quan això s'esdevé es diu que tensió i corrent **estan en fase.**

En una resistència, la tensió i el corrent estan en fase.

Inductor

Si el corrent $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ circula per un inductor d'autoinductància L, podem obtenir el fasor tensió **V** multiplicant el fasor corrent **I** per $j\omega L$ (equació 29).

$$\mathbf{V} = \mathbf{I} j\omega L \tag{39}$$

El mòdul del fasor tensió $|\mathbf{V}|$ (que representa el valor de pic de la tensió) serà igual que el mòdul del fasor corrent $|\mathbf{I}|$ (que representa el valor de pic del corrent) per ωL.

Recordeu que en multiplicar dos nombres complexos els seus mòduls es multipliquen i les seves fases se sumen.

$$|\mathbf{V}| = |\mathbf{I}|\,\omega L \tag{40}$$

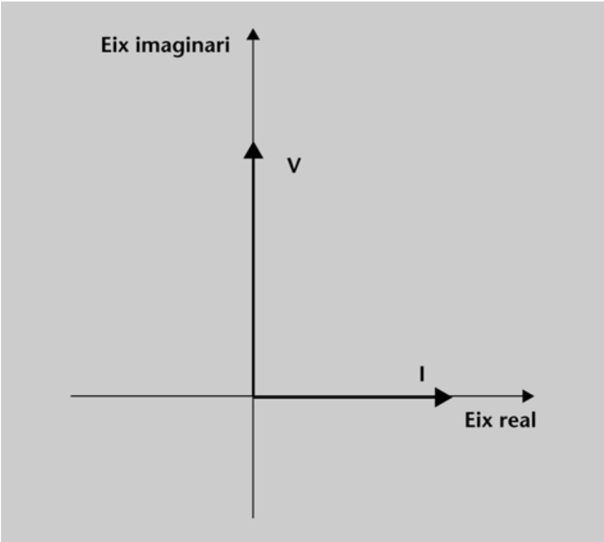
Això és el mateix que dir que l'amplitud (o valor de pic) de la tensió és l'amplitud del corrent pel valor ωL:

$$V_0 = I_0 \omega L \tag{41}$$

Fixeu-vos que el valor de ωL augmenta amb la freqüència i, per tant, també el valor de V_0.

D'altra banda, l'argument serà la suma d'arguments, ja que $j\omega L$ és un nombre imaginari pur, la seva fase és $\pi/2$ (o 90°). D'aquesta manera, l'argument del fasor tensió és el del fasor corrent més $\pi/2$ radiants, tal com podeu veure en el diagrama fasorial de la figura 7.

Figura 7. Diagrama fasorial per a la tensió i corrent en un inductor



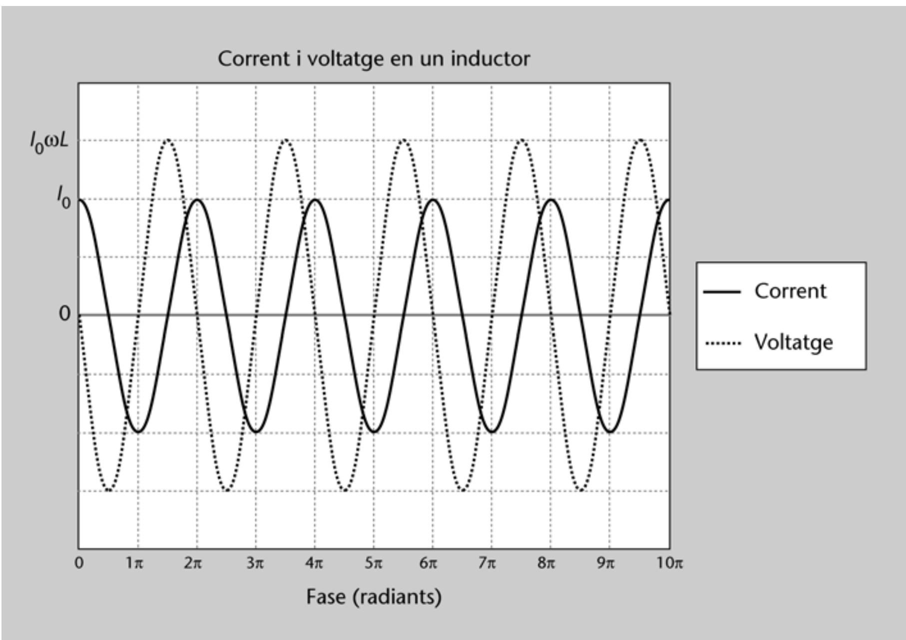
En resum, d'acord amb el que acabem de veure, la forma temporal del corrent i la tensió als borns de l'inductor és:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (42)$$

$$v(t) = I_0 \omega L \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (43)$$

En la figura 8 podeu veure la forma temporal, en RPS, del corrent i la tensió als borns d'un inductor d'autoinductància L.

Figura 8. Evolució temporal en RPS del corrent i tensió en un inductor



Veiem en la figura 8 que la tensió i corrent **estan desfasats**, ja que la tensió és avançada en $\pi/2$ respecte a la intensitat. Els valors màxims de la tensió es produeixen un quart de període ($\pi/2$) abans que els del corrent.

Recordeu que un període són 2π radiants.

En un inductor, la tensió va avançada $\pi/2$ respecte a la intensitat o, equivalentment, la intensitat va retardada $\pi/2$ respecte a la tensió.

Condensador

Si el corrent $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ circula per un condensador de capacitat C, podrem obtenir el fasor tensió **V** multiplicant el fasor corrent **I** per $1/j\omega C$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}\frac{1}{j\omega C} \quad (44)$$

que també es pot escriure de la manera següent, si a 44 multipliquem numerador i denominador per j:

$$\mathbf{V} = -\mathbf{I}\frac{j}{\omega C} \quad (45)$$

El mòdul del fasor tensió $|\mathbf{V}|$ (que representa l'amplitud de la tensió) serà igual que el mòdul del fasor corrent $|\mathbf{I}|$ (que representa l'amplitud del corrent) entre ωC:

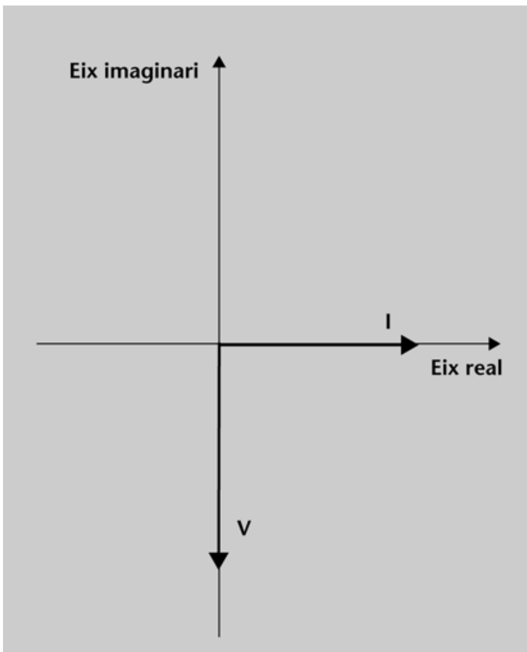
$$|\mathbf{V}| = \frac{|\mathbf{I}|}{\omega C} \quad (46)$$

Això és el mateix que dir que l'amplitud (o valor de pic) de la tensió és l'amplitud del corrent dividida entre ωC:

$$V_0 = \frac{I_0}{\omega C} \quad (47)$$

D'altra banda, l'argument serà la suma d'arguments, $-j/\omega C$ és un nombre imaginari pur negatiu, per la qual cosa la seva fase és $-\pi/2$ (o $-90°$). D'aquesta manera, l'argument del fasor tensió és el del fasor corrent menys $\pi/2$ (o menys 90°), tal com podeu veure en el diagrama fasorial de la figura 9.

Figura 9. Diagrama fasorial per a la tensió i el corrent en un condensador



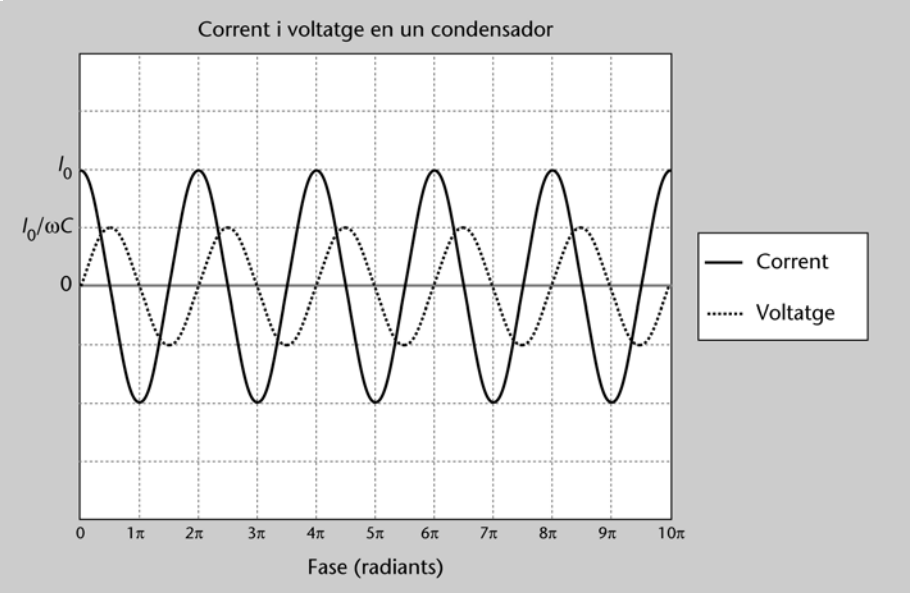
En resum, d'acord amb el que acabem de veure, en RPS, la forma temporal de corrent i tensió als borns del condensador és:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (48)$$

$$v(t) = \frac{I_0}{\omega C}\cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right) \quad (49)$$

Podeu veure en la figura 10 la forma temporal, en RPS, del corrent i la tensió als borns d'un condensador de capacitat *C*.

Figura 10. Evolució temporal en RPS del corrent i la tensió en un condensador



Veiem que tensió i corrent **estan desfasats**, ja que la tensió està retardada π/2 respecte a la intensitat. Els valors màxims de la tensió es produeixen un quart de període (π/2) després que els del corrent.

En un condensador, la tensió va retardada π/2 respecte a la intensitat o, equivalentment, la intensitat va avançada π/2 respecte a la tensió.

Exemple 2

Apliquem una tensió alterna de 50 Hz i valor eficaç 220 V a una resistència d'1 kΩ. La fase inicial de la tensió és π.

a) Calculeu el valor de pic de la tensió aplicada i l'expressió analítica d'aquesta tensió.
b) Calculeu el corrent eficaç que circula per la resistència i la fase d'aquest corrent.
c) Repetiu l'apartat *b* per a un inductor de 33 mH.
d) Repetiu l'apartat *b* per a un condensador d'1 μF.

Solució

a) El valor eficaç s'obté dividint l'amplitud per $\sqrt{2}$ (equació 13b). Per tant, l'amplitud és el valor eficaç multiplicat per $\sqrt{2}$:

$$V_g = 220\sqrt{2} = 311 \text{ V} \tag{50}$$

L'expressió analítica de la tensió d'entrada és:

$$v_g(t) = V_g \cos(2\pi ft + \pi) = 311 \cos(2\pi 50t + \pi) \tag{51}$$

b) Calculem el valor de pic del corrent que circula per la resistència dividint el valor de pic de la tensió entre el valor de la resistència. La mateixa relació es compleix per a valors eficaços. Per tant, el valor eficaç que circula per la resistència és:

$$I_{R,ef} = \frac{220}{10^3} = 0{,}22 \text{ A} \tag{52}$$

En una resistència, tensió i corrent estan en fase, per tant, si la tensió té fase π el corrent tindrà fase π.

c) En RPS, la llei d'Ohm per a un inductor (equació 29) s'escriu: $\mathbf{V} = \mathbf{I}j\omega L$.

Calculem el valor d'ωL per a 50 Hz:

$$\omega L = 2\pi 50 \cdot 33 \cdot 10^{-3} = 3{,}3\pi\ \Omega \tag{53}$$

Aquest valor és la "resistència efectiva" de l'inductor a 50 Hz. El valor de pic del corrent que circula per l'inductor el calculem dividint el valor de pic de la tensió entre ωL. La mateixa relació es compleix per a valors eficaços. Per tant, el corrent eficaç que circula per l'inductor és:

$$I_{L,ef} = \frac{V_{ef}}{\omega L} = \frac{220}{3{,}3\pi} = 21{,}2 \quad \text{A} \tag{54}$$

En un inductor, la tensió avança $\pi/2$ rad al corrent, o el que és el mateix, el corrent retarda $\pi/2$ rad la tensió. Per tant, la fase del corrent és la de la tensió, π rad, menys $\pi/2$ rad, de manera que la fase del corrent és igual a $\pi/2$ rad.

Multiplicar per j equival a sumar una fase de $\pi/2$.

Veiem a quant de temps correspon aquest desfasament. Per a un corrent altern de 50 Hz, el període T val 0,02 segons (recordeu que $T = 1/f$). Per tant, l'avançament de fase calculat és equivalent a un avançament de:

$$\frac{\pi}{2}\ \text{rad} \cdot \frac{T\ \text{s}}{2\pi\ \text{rad}} = \frac{\pi}{2}\ \text{rad} \cdot \frac{0{,}02\ \text{s}}{2\pi\ \text{rad}} = 0{,}005\ \text{s} = 5\ \text{ms} \tag{55}$$

d) En RPS la llei d'Ohm per a un condensador (equació 30) s'escriu: $\mathbf{V} = \mathbf{I}\dfrac{1}{j\omega C}$.

Calculem el valor d'$1/\omega C$ per a 50 Hz:

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi 50 \cdot 10^{-6}} = 3{,}2 \cdot 10^{3}\ \Omega \tag{56}$$

Aquest valor és la "resistència efectiva" del condensador a 50 Hz. El valor de pic del corrent que circula pel condensador el calculem dividint el valor de pic de la tensió entre $1/\omega C$. La mateixa relació es compleix per a valors eficaços. Per tant:

$$I_{C,ef} = \frac{V_{ef}}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{220}{3{,}2 \cdot 10^{3}} = 0{,}07 \quad \text{A} \tag{57}$$

Dividir per j equival a restar una fase de $\pi/2$.

En un condensador, la tensió retarda $\pi/2$ el corrent, o el que és el mateix el corrent avança $\pi/2$ la tensió. Per tant, la fase del corrent és la de la tensió π més $\pi/2$, de manera que la fase del corrent és igual a $3\pi/2$ rad.

Per a un corrent altern de 50 Hz, el període T val 0,02 segons. Per tant, l'avançament de fase calculat és equivalent a un avançament de:

$$\frac{3\pi}{2}\ \text{s} \cdot \frac{T\ \text{s}}{2\pi\ \text{rad}} = \frac{3\pi}{2}\ \text{rad} \cdot \frac{0{,}02\ \text{s}}{2\pi\ \text{rad}} = 0{,}015\ \text{s} = 15\ \text{ms} \tag{58}$$

2. Impedància i admitància en AC

Un paper clau en el comportament dels circuits en corrent altern és el de la impedància complexa (o impedància en corrent altern). La impedància complexa, que definirem formalment en el subapartat 2.1, ens permetrà, en el subapartat 2.2, determinar de manera intuïtiva el comportament d'un circuit a freqüències baixes i freqüències altes i definir conceptes tan importants com la ressonància.

2.1. Definició

En el domini transformat fasorial podem definir, igual que en el domini de Laplace, la impedància d'un element o d'un circuit.

En el domini freqüencial la impedància d'un element o circuit és el nombre complex que resulta de dividir els fasors associats a la tensió als borns i el corrent que circula per aquest element o circuit:

$$Z(j\omega) = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \tag{59}$$

El seu valor coincidirà amb la impedància que teníem en el domini de Laplace, substituint s per $j\omega$.

Anàlogament, l'admitància (complexa) es defineix com a:

$$Y(j\omega) = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} \tag{60}$$

I el seu valor coincidirà amb l'admitància que teníem en el domini de Laplace, substituint s per $j\omega$.

Convé destacar que, encara que la impedància en RPS pot ser un nombre complex, la impedància no és un fasor. Un fasor descriu l'amplitud i fase d'una tensió o corrent sinusoïdal. Una impedància caracteritza un element o circuit en règim permanent sinusoïdal.

Com que la impedància en RPS és un nombre complex es pot escriure desglossat en part real i imaginària:

$$Z(j\omega) = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R(\omega) + jX(\omega) \tag{61}$$

La part real, $R(\omega)$, es denomina **resistència** i la part imaginària, $X(\omega)$, **reactància**.

La impedància complexa per als tres elements bàsics (subapartat 1.4) és:

$$Z_R(j\omega) = R; \qquad Z_L(j\omega) = j\omega L; \qquad Z_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} \tag{62}$$

Com es pot veure en les expressions de l'equació 62 per a un inductor la reactància és positiva, ωL; mentre que per a un condensador, la reactància és negativa, $-1/\omega C$.

També l'admitància es pot desglossar en part real i imaginària:

$$Y(\omega) = G(\omega) + jB(\omega) \tag{63}$$

En aquest cas, la part real, $G(\omega)$, es denomina **conductància** i la part imaginària, $B(\omega)$, **susceptància**.

Sabem que l'admitància és l'invers de la impedància:

$$Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{R(\omega) + jX(\omega)} \tag{64}$$

Però, quina relació hi ha entre la part real i imaginària d'impedància i admitància? Ho sabrem si multipliquem el numerador i denominador en l'equació 64 pel complex conjugat del denominador:

$$Y(\omega) = \frac{R(\omega)}{R^2(\omega) + X^2(\omega)} - j\frac{X(\omega)}{R^2(\omega) + X^2(\omega)} = G(\omega) + jB(\omega) \tag{65}$$

Noteu que si la reactància $X(\omega)$ és positiva, la susceptància $B(\omega)$ és negativa i viceversa.

És important tenir en compte que les associacions d'impedàncies es tracten com si fossin associacions de resistències, és a dir, les equacions vistes en el mòdul "Circuits elèctrics" per a associacions de resistències continuen essent vàlides aquí.

Associació de *n* impedàncies en sèrie:

$$Z_{eq} = \sum_{i=1}^{n} Z_i \tag{66}$$

Associació de *n* impedàncies en paral·lel:

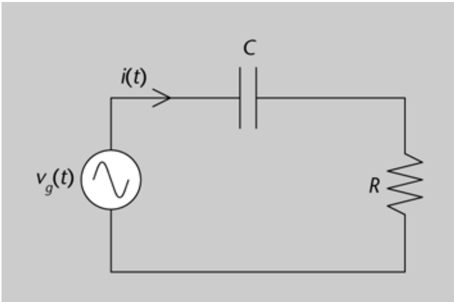
$$Z_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Z_i}} \tag{67}$$

Abans de prosseguir, repassarem tot el que hem vist fins ara en el mòdul mitjançant els exemples 3, 4 i 5.

Exemple 3

El circuit RC de la figura 11 és alimentat per una tensió alterna de 50 Hz, i la tensió de pic és de 311 V. Per a R = 240 Ω i C = 8,2 μF, calculeu en RPS el corrent $i(t)$ que entra en el circuit.

Figura 11. Circuit RC amb tensió d'entrada alterna



Solució

Per a calcular el corrent d'entrada al circuit en RPS treballarem amb les tensions i corrents en forma fasorial: $\mathbf{V}_g$ i $\mathbf{I}$ i amb la impedància complexa dels elements (condensador i resistència): $1/j\omega C$ i R.

Recordeu que indiquem els fasors amb lletra majúscula i negreta.

El fasor $\mathbf{V}_g$ associat a la tensió d'entrada és un nombre complex el mòdul del qual és l'amplitud de la tensió, 311, i l'argument del qual és la fase inicial de la tensió, 0:

$$\mathbf{V}_g = 311e^{j0} = 311 \text{ V} \tag{68}$$

Tenint en compte que el condensador i la resistència estan en sèrie, la impedància (complexa) d'entrada del circuit és:

$$Z_{in}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} + R \tag{69}$$

Si treballem a una freqüència de 50 Hz, multiplicant per 2π obtindrem la freqüència angular o pulsació:

$$\omega = 2\pi 50 = 100\pi \text{ rad/s} \tag{70}$$

Donant valors a R i a C tenim que la impedància complexa és:

$$Z_{in}(j\omega) = R + \frac{1}{j\omega C} = 240 - j388 \;\; \Omega \tag{71}$$

Fixeu-vos que la impedància d'entrada del circuit té part real (resistència d'entrada) i part imaginària (reactància). La reactància en aquest circuit és negativa, -388, a causa del condensador.

La llei d'Ohm en el domini de la freqüència és:

$$\mathbf{V}_g = \mathbf{I}Z_{in}(j\omega) \tag{72}$$

d'on podem aïllar el fasor corrent:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_g}{Z_{in}(j\omega)} \tag{73}$$

Quan dividim dos nombres complexos, el mòdul del quocient és el quocient dels mòduls. D'aquesta manera, el mòdul del fasor corrent (amplitud o valor de pic del corrent) és igual que el mòdul del fasor tensió (amplitud o valor de pic de la tensió) entre el mòdul de la impedància:

$$|\mathbf{I}| = \frac{|\mathbf{V}_g|}{|Z_{in}(j\omega)|} \tag{74}$$

Calcularem el mòdul de la impedància com l'arrel quadrada de la resistència al quadrat més la reactància al quadrat. Noteu que aquest mòdul mesura l'oposició ("resistència" efectiva) que presenta el circuit al pas del corrent altern de 50 Hz:

$$|Z_{in}(j\omega)| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{240^2 + 388^2} = 456{,}4\ \Omega \tag{75}$$

Per tant, substituint en l'equació 74, obtenim el valor de pic de la intensitat:

$$I = \frac{311}{456{,}4} = 0{,}68\ \text{A} \tag{76}$$

Recordeu que els mòduls dels fasors tensió i corrent ($|\mathbf{V}_g|$,$|\mathbf{I}|$) són el valor de pic de tensió i corrent, respectivament (V_g,I).

La relació de l'equació 74 és igualment vàlida si treballem amb valors eficaços. Una tensió de pic de 311 V correspon a una tensió eficaç de 220 V ($311/\sqrt{2}$). D'aquesta manera, el valor eficaç del corrent d'entrada és:

$$I_{ef} = \frac{220}{456{,}4} = 0{,}48\ \text{A} \tag{77}$$

D'altra banda, el desfasament entre corrent i tensió és determinat per la fase de la impedància d'entrada:

> Recordeu que el desfasament entre els fasors tensió i corrent coincideix amb la fase de la impedància:
> $\mathbf{V} = Z(j\omega)\mathbf{I} \Rightarrow$
> $\angle\mathbf{V} = \angle Z(j\omega) + \angle\mathbf{I}$

$$\angle\mathbf{I} = \angle\mathbf{V}_g - \angle Z_{in}(j\omega) \tag{78}$$

La fase de $Z_{in}(j\omega)$ és l'angle la tangent del qual (arctg) és la part imaginària de la impedància (reactància) entre la part real (resistència):

$$\angle Z(j\omega) = \text{arctg}\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \tag{79}$$

En general, $R(\omega)$, $X(\omega)$ i $Z(j\omega)$ seran funció de la freqüència de treball, per aquest motiu s'ha utilitzat aquesta notació: (ω). Per al circuit considerat $R(\omega) = R$ i $X(\omega) = -1/\omega C$. Per als valors d'ω, R i C del circuit obtenim que:

$$\angle Z_{in} = \text{arctg}\left(\frac{-388}{240}\right) = -1\ \text{rad} = -58{,}3° \tag{80}$$

Noteu que si la resistència hagués estat zero, la fase de la impedància seria $-\pi/2$ (–90°), tal com obteníem per a un condensador. Com que la part real de la impedància, $R(\omega)$, és diferent de 0 i la part imaginària, $X(\omega)$, és negativa l'angle de la impedància és al quart quadrant, és a dir, entre 0 i $-\pi/2$.

Per tant, substituint 80 en l'equació 78, obtenim que la intensitat va avançada 1 rad respecte a la tensió. L'expressió analítica del corrent és finalment:

$$i(t) = I\cos(\omega t + \angle\mathbf{I}) = 0{,}68\cos(2\pi 50t + 1)\ \text{A} \tag{81}$$

> Recordeu que $1/j\omega C = -j/\omega C$.

Un aclariment important: no podem sumar el desfasament de la resistència i el desfasament del condensador directament. Només se sumen les fases quan tenim el producte de dos nombres complexos.

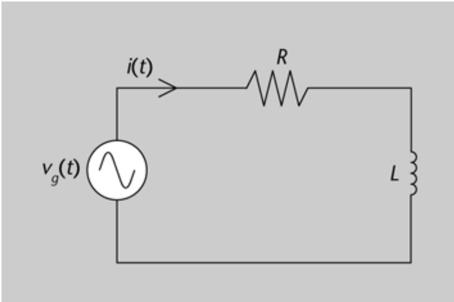
En aquest cas tenim $\mathbf{V} = (R - j/\omega C)\mathbf{I}$. Com que la impedància (resistència més condensador) té part real positiva i part imaginària negativa, la tensió als borns està retardada un angle entre 0 i $\pi/2$ respecte a la intensitat. Equivalentment, podem dir que la intensitat està avançada un angle entre 0 i $\pi/2$.

Exemple 4

Considerem ara el circuit RL de la figura 12. Veurem que a causa de l'inductor la tensió $v_g(t)$ als borns del circuit va avançada respecte a la intensitat $i(t)$ (o equivalentment la intensitat va retardada respecte a la tensió).

Per això, calculeu en RPS el corrent $i(t)$ que entra en el circuit si $v_g(t)$ és una tensió alterna de 50 Hz i 311 V de pic. Considereu R = 240 Ω i L = 180 mH.

Figura 12. Circuit RL amb tensió d'entrada alterna



Solució

Com en l'exemple 3, treballarem amb tensions i corrents en forma fasorial: $\mathbf{V}_g$ i $\mathbf{I}$ i amb la impedància complexa dels elements: R i $j\omega L$.

Recordeu que els fasors els indiquem amb lletra majúscula i negreta.

El fasor $\mathbf{V}_g$ té mòdul 311 (l'amplitud de $v_g(t)$) i fase 0° (la fase inicial de $v_g(t)$):

$$\mathbf{V}_g = 311e^{j\,0} = 311 \text{ V} \tag{82}$$

Atès que la resistència i l'inductor estan en sèrie, la impedància (complexa) d'entrada del circuit és:

$$Z_{in}(j\omega) = R + j\omega L \tag{83}$$

Donant valors a R, ω i L veiem que la impedància complexa és:

$$Z_{in}(j\omega) = R + j\omega L = 240 + j56{,}5\ \Omega \tag{84}$$

Noteu que, a diferència del circuit RC, la reactància ara és positiva (56,5) perquè tenim un inductor en lloc d'un condensador.

Calculem el mòdul de la impedància com l'arrel quadrada de la resistència al quadrat més la reactància al quadrat. Aquest mòdul mesura l'oposició ("resistència" efectiva) que presenta el circuit RL de l'exemple al pas del corrent altern de 50 Hz:

$$\left|Z_{in}(j\omega)\right| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{240^2 + 56{,}5^2} = 246{,}6\ \Omega \tag{85}$$

La fase de $Z_{in}(j\omega)$ és l'angle la tangent del qual és la part imaginària (reactància) de la impedància entre la part real. Aquesta fase determina el retard entre la tensió i el corrent del circuit:

Recordeu que el desfasament entre els fasors tensió i corrent coincideix amb la fase de la impedància:

$$\mathbf{V} = Z(j\omega)\mathbf{I} \Rightarrow$$
$$\angle\mathbf{V} = \angle Z(j\omega) + \angle\mathbf{I}$$

$$\angle Z(j\omega) = \operatorname{arctg}\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \tag{86}$$

Per al circuit considerat $R(\omega) = R$ i $X(\omega) = \omega L$. Per als valors de R i L del circuit obtenim que:

$$\angle Z_{in}(j\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{56{,}5}{240}\right) = 0{,}23 \text{ rad} = 13{,}3° \tag{87}$$

Noteu que si la resistència hagués estat zero, la fase de la impedància seria π/2 (90°), tal com teníem per a un inductor. Com que la part real de la impedància, $R(\omega)$, és diferent de 0 i la part imaginària, $X(\omega)$, és positiva, l'angle de la impedància és al primer quadrant, és a dir, entre 0 i π/2.

Ara calcularem el corrent. El fasor corrent és:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_g}{Z_{in}(j\omega)} \tag{88}$$

El mòdul del fasor corrent és l'amplitud del corrent i el calculem com el mòdul del fasor tensió, que és l'amplitud de la tensió, entre el mòdul de la impedància. Substituint valors obtenim que:

$$I = \frac{|\mathbf{V}_g|}{|Z_{in}(j\omega)|} = 1{,}26 \text{ A} \tag{89}$$

D'altra banda, el desfasament entre corrent i tensió és determinat per la fase de la impedància d'entrada. Substituint valors veiem que:

$$\angle\mathbf{I} = \angle\mathbf{V}_g - \angle Z_{in}(j\omega) = -0{,}23 \text{ rad} \tag{90}$$

L'expressió analítica del corrent és finalment:

$$i(t) = 1{,}26\cos(2\pi 50t - 0{,}23) \text{ A}$$

La intensitat va retardada respecte a la tensió (o equivalentment, la tensió va avançada respecte a la intensitat).

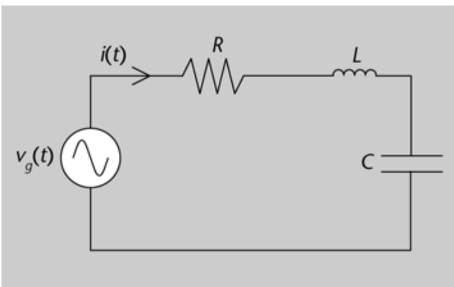
Un aclariment important: no podem sumar el desfasament de la resistència i el desfasament de l'inductor directament. Només se sumen les fases quan tenim el producte de dos nombres complexos.

En aquest cas, tenim $\mathbf{V} = (R + j\omega L)\mathbf{I}$. Com que la impedància (resistència més inductor) té part real positiva i part imaginària positiva, la tensió als borns està avançada un angle entre 0 i $\pi/2$ respecte a la intensitat. Equivalentment, podem dir que la intensitat està retardada un angle entre 0 i $\pi/2$.

Exemple 5

Considerem ara el circuit RLC de la figura 13. Calculeu en RPS el corrent $i(t)$ que entra en el circuit si $v_g(t)$ és una tensió alterna de 50 Hz i 311 V de pic. Considereu R = 240 Ω, L = 180 mH i C = 8,2 μF.

Figura 13. Circuit RLC amb tensió d'entrada alterna



Solució

El fasor $\mathbf{V}_g$ té mòdul 311 i fase 0:

$$\mathbf{V}_g = 311e^{j0} = 311 \text{ V} \tag{91}$$

Com que la resistència, l'inductor i el condensador estan en sèrie, la impedància complexa d'entrada del circuit és:

$$Z_{in}(j\omega) = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \tag{92}$$

Donant valors a R, ω i L obtenim que la impedància complexa és:

$$Z_{in}(j\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 240 - j331{,}6\ \Omega \qquad (93)$$

La reactància d'entrada és negativa, -331,6, perquè a la freqüència de treball, ωL és menor que $1/\omega C$. Si augmentem la freqüència, arribarà un moment en què passarem a la situació contrària.

Calculem el mòdul de la impedància com l'arrel quadrada de la resistència al quadrat més la reactància al quadrat. Aquest mòdul mesura l'oposició ("resistència" efectiva) que presenta el circuit RLC de l'exemple al pas del corrent altern de 50 Hz:

$$\left|Z_{in}(j\omega)\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{240^2 + 331{,}6^2} = 409{,}37\ \Omega \qquad (94)$$

La fase de $Z_{in}(j\omega)$ és l'angle la tangent del qual és la part imaginària de la impedància entre la part real. Aquesta fase determina el retard entre la tensió i el corrent del circuit:

$$\angle Z(j\omega) = \text{arctg}\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \qquad (95)$$

Per al circuit considerat $R(\omega) = R$ i $X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$.

Fixeu-vos que:

- Si $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ la fase és positiva i la tensió va avançada respecte a la intensitat: tenim un circuit amb comportament inductiu.
- Si $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ la fase és negativa i la tensió va retardada respecte a la intensitat: tenim un circuit amb comportament capacitatiu.

Per als valors de R, L i C del circuit veiem que:

$$\angle Z_{in}(j\omega) = \text{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = \text{arctg}\left(\frac{-331{,}6}{240}\right) = -0{,}94\ \text{rad} = -54{,}1° \qquad (96)$$

Noteu que si la resistència hagués estat zero, la fase de la impedància seria $-\pi/2$ (-90°). Com que la part real de la impedància, $R(\omega)$, és diferent de 0 i la part imaginària, $X(\omega)$, és negativa, l'angle de la impedància és al quart quadrant, és a dir, entre 0 i $-\pi/2$.

Ara calcularem el corrent. El fasor corrent és:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_g}{Z_{in}(j\omega)} \qquad (97)$$

El mòdul del fasor corrent és l'amplitud del corrent i el calculem com el mòdul de fasor tensió, que és l'amplitud de la tensió, entre el mòdul de la impedància (equació 94). Substituint valors obtenim que:

$$I = \frac{\left|\mathbf{V}_g\right|}{\left|Z_{in}(j\omega)\right|} = 0{,}76\ \text{A} \qquad (98)$$

D'altra banda, el desfasament entre corrent i tensió és determinat per la fase de la impedància d'entrada. Substituint valors veiem que:

$$\angle\mathbf{I} = \angle\mathbf{V}_g - \angle Z_{in}(j\omega) = 0{,}94\ \text{rad} \qquad (99)$$

L'expressió analítica del corrent és finalment:

$$i(t) = 0{,}76\cos(2\pi 50t + 0{,}94)\ \text{A} \qquad (100)$$

La intensitat va avançada respecte a la tensió (o equivalentment, la tensió va retardada respecte a la intensitat).

2.2. Comportament dels elements segons la freqüència

Un dels fets més quotidians de la nostra vida diària és sintonitzar una determinada emissora de ràdio o seleccionar un canal de televisió. A l'antena receptora arriben barrejats el senyal que volem escoltar o veure i els senyals de les altres emissores i canals que actuen com a senyals interferents. Com podem separar-los?

El fet de poder separar una emissora de l'altra es basa en una característica fonamental dels circuits: la possibilitat d'oposar-se al pas del corrent d'una manera diferent segons quina sigui la freqüència. Aquesta característica és la que ens permet discriminar una emissora de l'altra si totes dues transmeten a diferent freqüència. Ho tindrem més clar quan finalitzem aquest subapartat.

Encara que ja hem vist que la impedància d'inductors i condensadors depèn de la freqüència ω a què es treballa, en aquest subapartat veurem com podem intuir de manera ràpida el comportament d'un circuit segons quina sigui aquesta freqüència. En concret, en el subapartat 2.2.1 veurem el comportament a freqüències molt baixes i molt altes, i en el subapartat 2.2.2 veurem els circuits ressonants, que són la base dels circuits de sintonia.

2.2.1. Comportament dels elements a freqüències molt baixes i freqüències molt altes

Hem vist que la "resistència" efectiva d'un circuit ve determinada pel mòdul de la impedància. També hem vist que la relació entre l'amplitud de la tensió i el corrent és precisament aquest mòdul.

Podem calcular el mòdul de la impedància com l'arrel quadrada de la seva part real (resistència) al quadrat més la seva part imaginària (reactància) al quadrat:

$$|Z(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \tag{101}$$

Per a impedàncies reals i imaginàries pures, el mòdul és directament el valor absolut de la part real o imaginària, segons el cas.

Fixeu-vos que una resistència sempre presenta una oposició R al pas del corrent, amb independència de la freqüència. En canvi, un inductor ofereix més oposició ("resistència" efectiva) a mesura que augmenta la freqüència, ja que el mòdul de la seva impedància és ωL.

D'altra banda, el mòdul de la impedància d'un condensador és $1/\omega C$. Per tant, el condensador ofereix més oposició a corrents de baixa freqüència que a corrents d'alta freqüència.

Segons això, si connectem un condensador o una bobina en paral·lel podem separar una mescla de corrents d'alta i baixa freqüència: el corrent d'alta freqüència passarà pel condensador, mentre que el de baixa freqüència passarà per la bobina. Aquests muntatges s'anomenen *filtres*.

Els condensadors i inductors s'oposen al flux del corrent igual que un resistor. No obstant això, en una resistència convencional l'oposició al corrent no varia amb la freqüència i només depèn del valor de la resistència. Tanmateix, en aplicar una tensió alterna a un condensador o inductor, l'oposició al corrent depèn del valor de la capacitat o inductància i de la freqüència de treball.

Si considerem valors extrems de freqüència, a freqüències molt baixes un inductor oferirà una oposició pràcticament nul·la al pas del corrent, mentre que a freqüències molt altes, l'oposició serà molt elevada fins al punt que no podrà passar el corrent. Al condensador passarà el contrari.

En l'equació 102 es calcula el mòdul de la impedància per als casos límit: $\omega \to 0$ i $\omega \to \infty$, tant per a un inductor com per a un condensador:

$$Z(\omega) = jL\omega \quad \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\omega\to 0}|Z(\omega)| = 0 \\ \\ \lim\limits_{\omega\to\infty}|Z(\omega)| = \infty \end{cases} \qquad Z(\omega) = -j\frac{1}{C\omega} \quad \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\omega\to 0}|Z(\omega)| = \infty \\ \\ \lim\limits_{\omega\to\infty}|Z(\omega)| = 0 \end{cases} \tag{102}$$

Una oposició zero al pas del corrent equival a un curtcircuit. Una oposició infinita al pas del corrent equival a un circuit obert.

Fixeu-vos llavors que:

Per a $\omega = 0$ (freqüència contínua), els condensadors es poden substituir per circuits oberts i les inductàncies per curtcircuits.

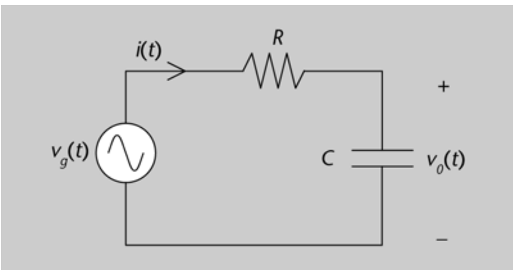
Per a $\omega \to \infty$ (freqüències molt altes), els condensadors es poden substituir per curtcircuits i les inductàncies per circuits oberts.

Amb el muntatge de condensador i bobina en paral·lel podem, per tant, separar un corrent altern d'un altre de continu.

Exemple 6

Considereu de nou un circuit RC (figura 14) i dibuixeu de manera aproximada l'amplificació (guany) del circuit en funció de la freqüència.

Figura 14. Circuit RC amb tensió d'entrada alterna



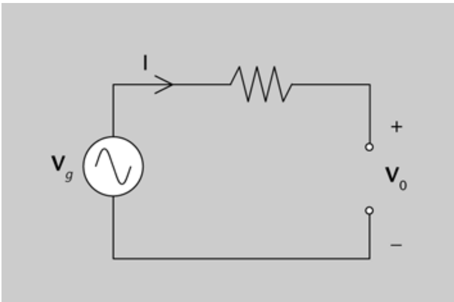
Solució

A freqüències molt baixes el condensador ofereix una oposició molt gran al pas de la intensitat.

Per a recordar aquest comportament només heu de pensar que $Z(j\omega) = -j\dfrac{1}{C\omega}$ i adonarvos que, per a freqüències petites, el mòdul de la impedància del condensador serà molt gran (encara que la fase sempre és $-\pi/2$). En el límit, per a $\omega = 0$, el mòdul de la impedància és infinit, per la qual cosa el condensador serà equivalent a un circuit obert.

En la figura 15 podeu veure el circuit equivalent per a $\omega = 0$ (freqüència contínua) del circuit RC de la figura 14. Observeu que el condensador s'ha substituït per un circuit obert. La resistència, en canvi, queda igual:

Figura 15. Circuit RC equivalent per a $\omega = \mathbf{0}$



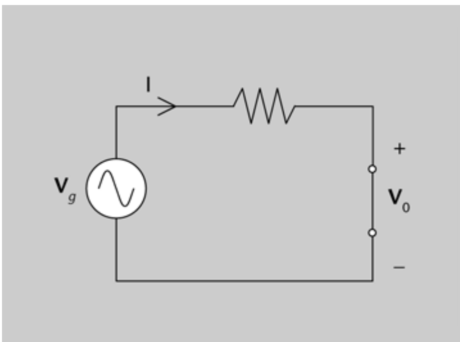
Si el condensador és un circuit obert, el corrent en el circuit és 0. Llavors no cau tensió a la resistència. Per tant, en continu, la tensió de sortida és igual que la tensió de la font.

A freqüències molt altes el condensador ofereix una oposició molt petita al pas de la intensitat.

Recordeu que $Z(j\omega) = -j\dfrac{1}{C\omega}$. Per a freqüències molt grans, el mòdul de la impedància del condensador serà molt petit (**encara que la fase del condensador sempre és** $-\pi/2$). En el límit, per a $\omega \to \infty$, el mòdul de la impedància és zero, per la qual cosa el condensador serà equivalent a un curtcircuit.

En la figura 16 podeu veure el circuit equivalent al circuit RC de la figura 14 per a $\omega \to \infty$. Observeu que el condensador s'ha substituït per un curtcircuit. La resistència, en canvi, queda igual:

Figura 16. Circuit RC equivalent per a $\omega \to \infty$



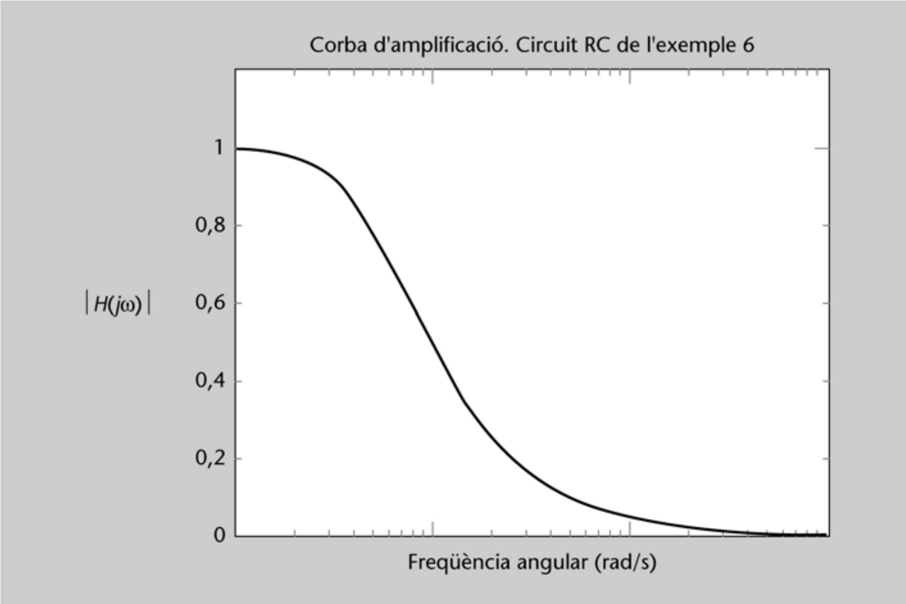
L'amplitud de la tensió de sortida en aquest cas és 0.

Recordeu que en un curtcircuit la tensió és zero per a qualsevol valor del corrent.

El quocient entre l'amplitud de la tensió de sortida i d'entrada és l'amplificació (o guany) del circuit, és a dir, el mòdul de $H(j\omega)$ (si no ho recordeu, reviseu l'equació 15).

Tenint en compte el comportament a freqüències molt baixes i molt altes, en la figura 17 hem esbossat la corba d'amplificació en funció de la freqüència per al circuit RC de l'exemple. A freqüència $\omega = 0$, la sortida i l'entrada són iguals, és a dir, l'amplificació és 1. En $\omega \to \infty$, la sortida és 0, és a dir, l'amplificació del circuit és 0.

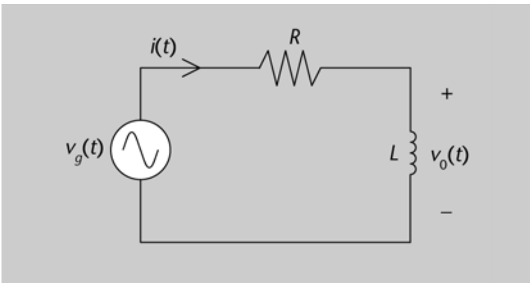
Figura 17. Amplificació en funció de la freqüència per al circuit RC de l'exemple 6



Exemple 7

Considereu ara el circuit passiu RL de la figura 18 i dibuixeu de manera aproximada l'amplificació (guany) del circuit en funció de la freqüència.

Figura 18. Circuit RL amb tensió d'entrada alterna



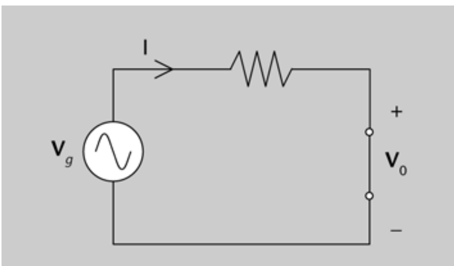
Solució

A freqüències molt baixes l'inductor ofereix una oposició molt petita al pas de la intensitat.

Per a recordar aquest comportament només heu de pensar que $Z(j\omega) = j\omega L$ i adonar-vos (**encara que la fase de l'inductor sempre és** $\pi/2$) que, per a freqüències petites, el mòdul de la impedància de l'inductor serà molt petit. En el límit, per a $\omega = 0$, el mòdul de la impedància és zero, per la qual cosa l'inductor és equivalent a un curtcircuit.

En la figura 19 podeu veure el circuit equivalent al circuit RL de la figura 18 per a $\omega = 0$. Observeu que l'inductor s'ha substituït per un curtcircuit. La resistència, en canvi, queda igual.

Figura 19. Circuit RL equivalent per a $\omega = \mathbf{0}$

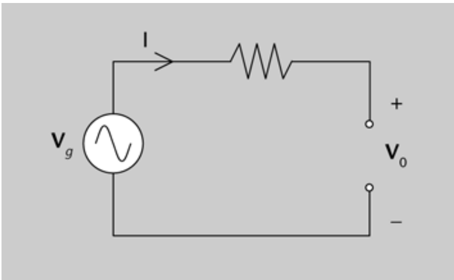


Fixeu-vos que per a $\omega \to 0$, la tensió de sortida és zero.

A freqüències molt altes l'inductor ofereix una oposició molt gran al pas de la intensitat. Recordeu que $Z(j\omega) = j\omega L$. Per a freqüències grans, el mòdul de la impedància de l'inductor serà molt gran (encara que la fase sempre és $\pi/2$). En el límit, per a $\omega \to \infty$, el mòdul de la impedància és infinit, per la qual cosa l'inductor és equivalent a un circuit obert.

En la figura 20 podeu veure el circuit equivalent al circuit RL de la figura 18 per a $\omega \to \infty$. Observeu que l'inductor s'ha substituït per un circuit obert. La resistència, en canvi, queda igual:

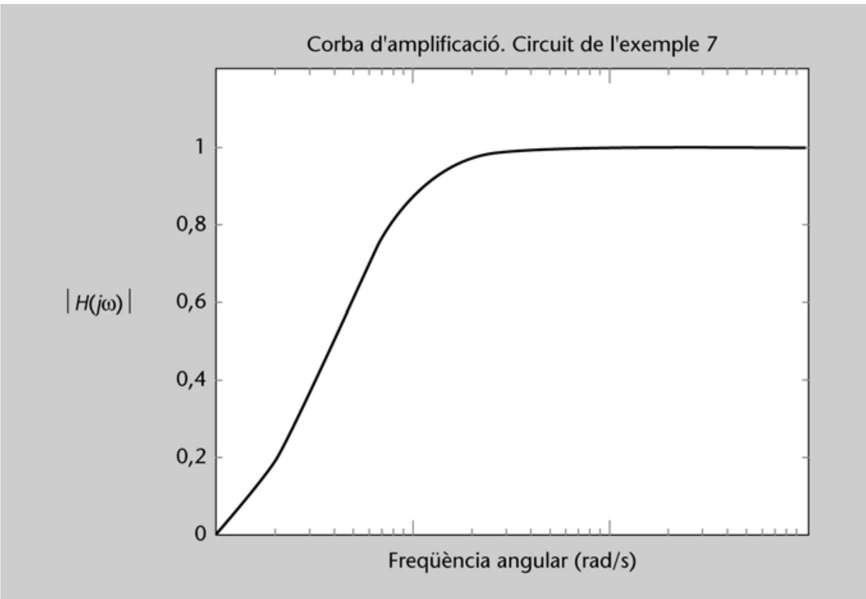
Figura 20. Circuit RL equivalent per a $\omega \to \infty$



Si l'inductor és un circuit obert, el corrent en el circuit és 0. Per tant, la tensió de sortida per a $\omega \to \infty$ és igual que la tensió de la font.

El quocient entre l'amplitud de la tensió de sortida i entrada és precisament l'amplificació del circuit (mòdul de $H(j\omega)$). En la figura 21 hem esbossat la corba d'amplificació en funció de la freqüència per al circuit RL de l'exemple. A freqüència $\omega = 0$, la sortida és 0, això vol dir que l'amplificació del circuit és 0. En $\omega \to \infty$, la sortida i l'entrada són iguals, és a dir, l'amplificació és 1.

Figura 21. Amplificació en funció de la freqüència per al circuit RL de l'exemple 7



2.2.2. Circuits ressonants

Hem vist que la impedància d'un circuit en corrent altern depèn de la freqüència del corrent utilitzat. Per a freqüències baixes, la reactància capacitativa ($-1/\omega C$) serà més important que la inductiva (ωL). Per a freqüències altes ocorre el contrari. Doncs bé, aquella freqüència per a la qual les reactàncies inductiva i capacitativa són iguals s'anomena **freqüència de ressonància**.

Direm que un circuit té:

– comportament inductiu si la seva reactància d'entrada és positiva: $X(\omega) > 0$

– comportament capacitatiu si la seva reactància d'entrada és negativa: $X(\omega) < 0$

– està en ressonància si la seva reactància d'entrada és zero: $X(\omega) = 0$

Reactància i susceptància

Recordeu que la reactància $X(\omega)$ és la part imaginària de la impedància:

$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

I que la susceptància $B(\omega)$ és la part imaginària de l'admitància:

$$Y(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$$

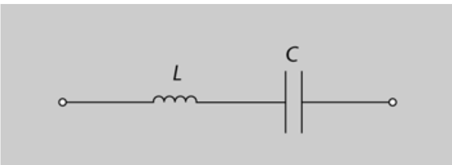
Analíticament, buscarem la freqüència de ressonància buscant la freqüència a què s'anul·la la reactància o la susceptància, segons el que sigui més fàcil de calcular.

Hi ha circuits que es dissenyen per a funcionar a la freqüència de ressonància: són els denominats circuits ressonants. Les estructures típiques són les següents:

a) circuit ressonant LC sèrie,
b) circuit ressonant LC paral·lel.

Circuit ressonant LC sèrie

Figura 22. Circuit ressonant LC sèrie



Quina és la impedància equivalent del circuit LC sèrie?

En el circuit de la figura 22, inductor i condensador estan en sèrie: calcularem la impedància equivalent del circuit sumant les impedàncies d'inductor i condensador.

Impedància d'inductor i de condensador

Recordeu que la impedància d'un inductor:

$$Z_L(j\omega) = j\omega L$$

té reactància positiva i fase $\pi/2$.

La impedància d'un condensador:

$$Z_C(j\omega) = 1/j\omega C = -j/\omega C$$

té reactància negativa i fase $-\pi/2$.

$$Z(j\omega) = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (103)$$

Depenent de la freqüència, serà més important la reactància de l'inductor o del condensador:

- a freqüències baixes $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, per la qual cosa la reactància equivalent serà negativa (comportament capacitatiu);

- a freqüències altes $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, per la qual cosa la reactància equivalent serà positiva (comportament inductiu).

Observeu que la fase de la impedància equivalent serà sempre $-\pi/2$ o $\pi/2$ depenent de si treballem per sota o per sobre de la freqüència de ressonància.

Podeu veure el comportament del circuit intuïtivament: si tenim dues impedàncies en sèrie, sempre dominarà la més gran. Per tant, és lògic que a freqüències baixes el circuit de la figura 22 tingui un comportament capacitatiu, mentre que a freqüències altes, tot el contrari, aquest circuit té un comportament inductiu.

Hi ha una freqüència ω_r, la **freqüència de ressonància** sèrie, per a la qual la reactància de l'inductor és igual que la reactància del condensador (encara que de signe contrari):

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C} \tag{104}$$

Per a obtenir el valor la freqüència de ressonància, únicament hem d'aïllar la freqüència ω_r en l'expressió 104:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A aquesta freqüència la reactància és 0. La impedància del circuit ressonant LC sèrie no té part real, per aquest motiu la impedància equivalent és 0 a la freqüència de ressonància.

La impedància del circuit LC sèrie és zero a la freqüència de ressonància:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{105}$$

Per tant, a aquesta freqüència, el circuit LC sèrie equival a un curtcircuit.

Si expressem la inductància L de l'inductor en H (henrys) i la capacitat C del condensador en F (farads), les unitats de la freqüència de ressonància seran rad/s.

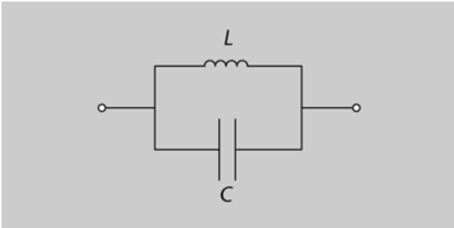
Per a obtenir la freqüència de ressonància en Hz (hertzs), f_r, hem de dividir ω_r entre 2π:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{106}$$

Circuit ressonant LC paral·lel

Una altra estructura ressonant típica és el circuit ressonant LC paral·lel (figura 23). Aquest circuit es denomina també *circuit tanc*.

Figura 23. Circuit ressonant LC paral·lel



Recordeu que l'admitància de dos elements en paral·lel es calcula com la suma d'admitàncies.

Per al circuit LC paral·lel resulta més fàcil treballar amb admitàncies. L'admitància del circuit LC paral·lel és la suma de les admitàncies d'inductor i condensador:

$$Y(j\omega) = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \tag{107}$$

Si la susceptància és negativa, la reactància és positiva, i viceversa.
Si no ho recordeu, reviseu l'expressió 65.

Observeu que:

- a freqüències baixes $\omega C < \dfrac{1}{\omega L}$, per la qual cosa la susceptància serà negativa (comportament inductiu);
- a freqüències altes $\omega C > \dfrac{1}{\omega L}$, per la qual cosa la susceptància serà positiva (comportament capacitatiu).

Fixeu-vos que la fase de l'admitància equivalent serà sempre $-\pi/2$ o $\pi/2$ depenent de si treballem per sota o per sobre de la freqüència de ressonància. Com que l'admitància és l'invers de la impedància, la fase de la impedància és $\angle Z = -\angle Y$.

Podeu veure el comportament del circuit intuïtivament: si tenim dues impedàncies en paral·lel, sempre dominarà la més petita. Per tant, és lògic que a freqüències baixes, el circuit de la figura 23 tingui un comportament inductiu, mentre que a freqüències altes, tot el contrari, aquest circuit té un comportament capacitatiu.

A la freqüència de ressonància, la reactància del condensador serà igual que la reactància de l'inductor però de signe contrari. Com en el circuit LC sèrie, és fàcil comprovar que la freqüència de ressonància és:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{108}$$

A la freqüència de ressonància, el circuit LC paral·lel té admitància (equació 107) igual que 0. Si l'admitància té mòdul zero, la impedància (que és el seu invers) té mòdul infinit. Per tant, a la freqüència de ressonància, el circuit és equivalent a un circuit obert.

La impedància del circuit LC paral·lel és infinita a la freqüència de ressonància

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Per tant, a aquesta freqüència, el circuit LC paral·lel equival a un circuit obert.

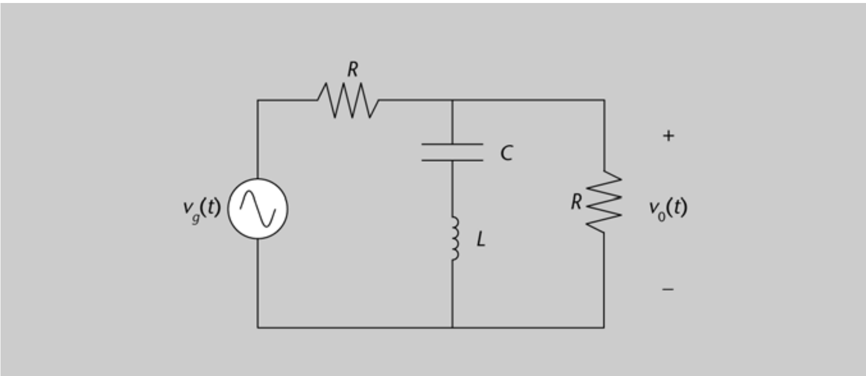
Per a obtenir la freqüència de ressonància, f_r, en Hz (hertzs), hem de dividir ω_r entre 2π: !

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{109}$$

Exemple 8

Considereu el circuit de la figura 24 i dibuixeu de manera aproximada l'amplificació (guany) del circuit en funció de la freqüència.

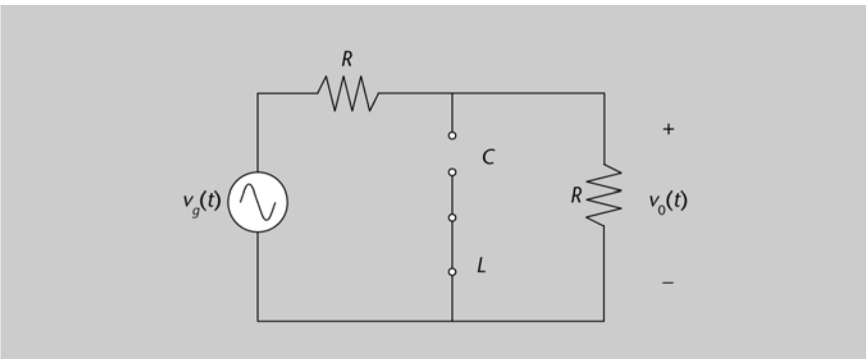
Figura 24. Circuit amb estructura ressonant LC sèrie



Solució

En continu, $\omega = 0$, podem substituir l'inductor per un curtcircuit i el condensador per un circuit obert. Podeu veure en la figura 25 el circuit equivalent per a $\omega = 0$.

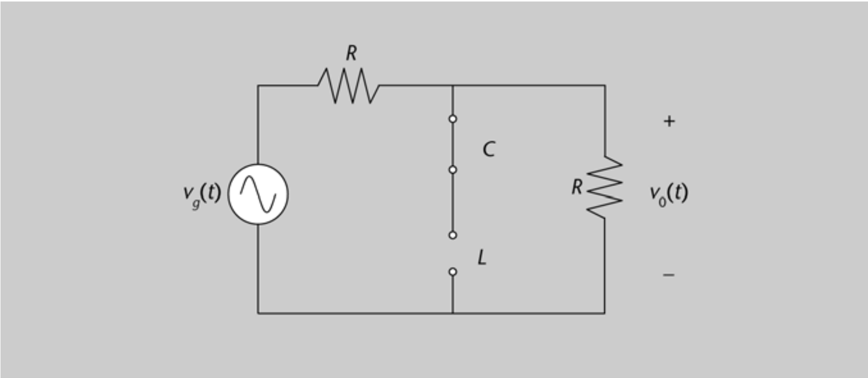
Figura 25. Circuit equivalent al de la figura 24 per a $\omega = 0$



Observeu que si el condensador es comporta com un circuit obert, per les dues resistències circula el mateix corrent i hi podem aplicar un divisor de tensió. Com que les dues resistències són iguals, la tensió de sortida és la d'entrada dividida per 2. Per tant, per a $\omega = 0$ l'amplificació és 0,5.

Si la freqüència tendeix a infinit, $\omega \to \infty$ (freqüències molt altes), podem substituir l'inductor per un circuit obert i el condensador per un curtcircuit. Podeu veure en la figura 26 el circuit equivalent per a $\omega \to \infty$.

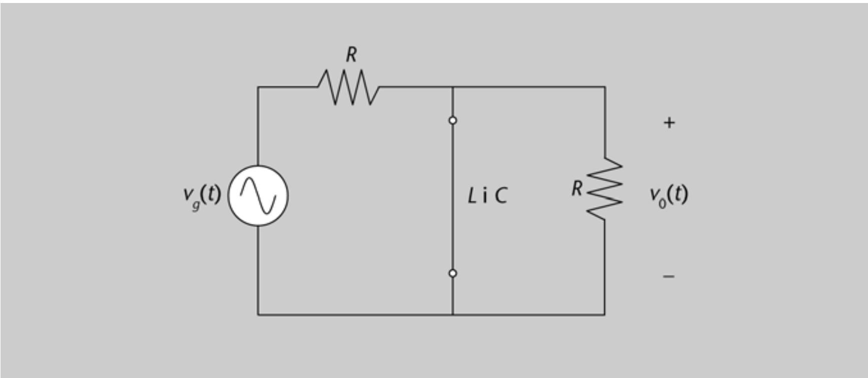
Figura 26. Circuit equivalent al de la figura 24 per a $\omega \to \infty$



Observeu que si l'inductor es comporta com un circuit obert, per les dues resistències circula el mateix corrent i hi podem aplicar un divisor de tensió. Com que les dues resistències són iguals la tensió de sortida és la d'entrada dividida per 2. Per tant, per a $\omega \to \infty$ l'amplificació torna a ser 0,5.

A la freqüència $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$, l'inductor i el condensador (**els dos conjuntament**) es comporten com un curtcircuit. En la figura 27 podeu veure el circuit equivalent per a $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$:

Figura 27. Circuit equivalent al de la figura 24 per a $\omega = 1/\sqrt{LC}$



En el circuit equivalent per a $\omega = 1/\sqrt{LC}$ (figura 27), la resistència de sortida està en paral·lel amb un curtcircuit, per la qual cosa la tensió de sortida és zero. Això significa que si a l'entrada del circuit posem una tensió sinusoïdal de freqüència igual que la freqüència de ressonància $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ la sortida serà nul·la.

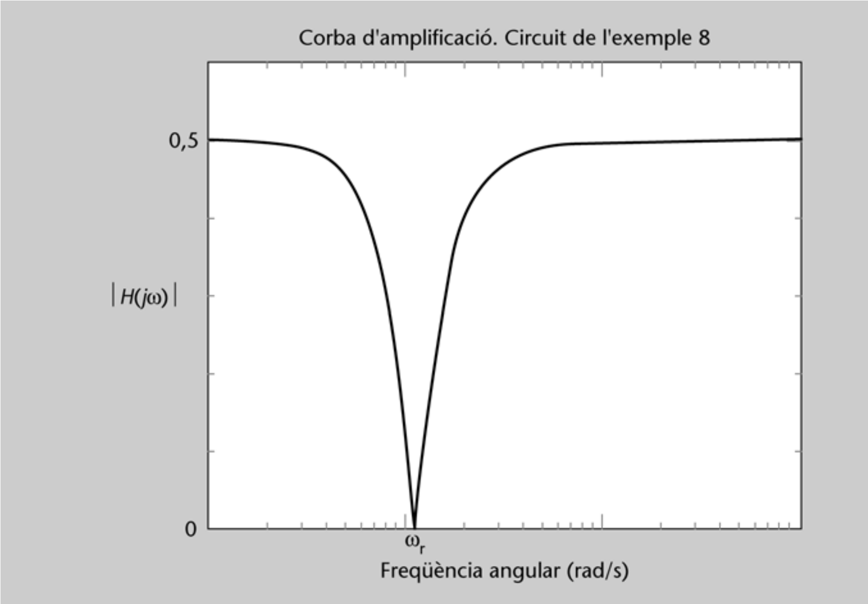
Quan tenim una resistència en paral·lel amb un curtcircuit (com en el circuit de la figura 27), la tensió als borns de la resistència és 0. Segons la llei d'Ohm, si la tensió en una resistència és 0, no hi circula corrent. Això significa que **tot el corrent se'n va pel curtcircuit.**

Veiem llavors que l'amplificació és zero a la freqüència de ressonància. Diem llavors que aquest circuit no deixa passar la freqüència de ressonància o que, a la freqüència de ressonància, el circuit presenta **un zero de transmissió**.

Hem vist que l'amplificació del circuit a $\omega = 0$ i $\omega \to \infty$ és 0,5. A la freqüència de ressonància $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ l'amplificació és 0. Amb aquestes dades podem esbossar la corba d'amplificació del circuit. La podeu veure en la figura 28.

Observeu que el guany del circuit són 0,5 a freqüències baixes i altes i que a la freqüència $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ el circuit presenta un zero de transmissió.

Figura 28. Amplificació en funció de la freqüència



Quin interès pot tenir un circuit com el que acabem de veure en l'exemple 8? Imagineu que tenim un sistema que treballa a una certa freqüència i la sortida es contamina amb un senyal indesitjat. Aquest senyal indesitjat es denomina interferència. Per exemple, és habitual captar, encara que no es desitgi, el senyal de 50 Hz de la xarxa elèctrica. Podríem eliminar aquesta interferència mitjançant un circuit com el que acabem de veure, si triem el valor de l'inductor i el condensador de manera que $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ coincideixi amb la freqüència del senyal que s'ha de cancel·lar.

De vegades, la interferència o interferències ocupen més d'una freqüència. Des d'un punt de vista pràctic, no és possible tenir amplificació zero a tota una banda de freqüències. Això requeriria infinits zeros de transmissió. El que es fa és distribuir diversos zeros de transmissió a la banda de freqüències que es vol cancel·lar. Per aquest motiu, s'utilitzen diverses estructures ressonants en cascada (una darrere de l'altra), bé siguin combinacions LC sèrie en paral·lel amb la sortida (com en el circuit anterior), o bé combinacions LC paral·lel en sèrie amb l'entrada. Podeu veure un exemple en els circuits de la figura 29 i la figura 30.

Figura 29. Circuit amb estructures ressonants LC paral·lel

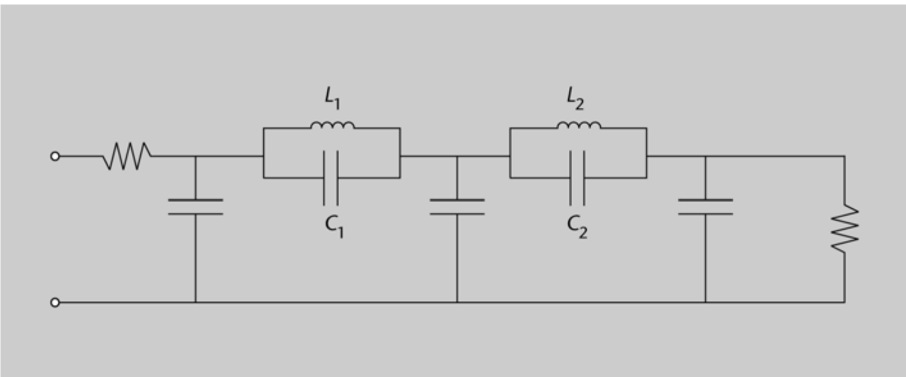
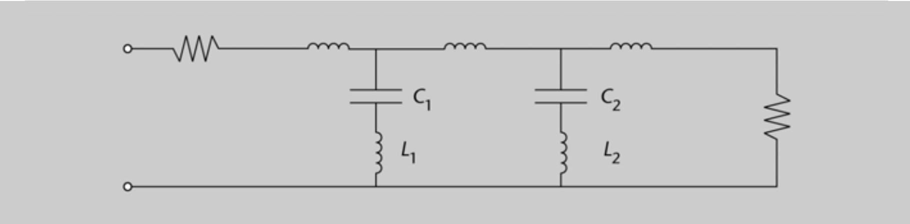


Figura 30. Circuit amb estructures ressonants LC sèrie

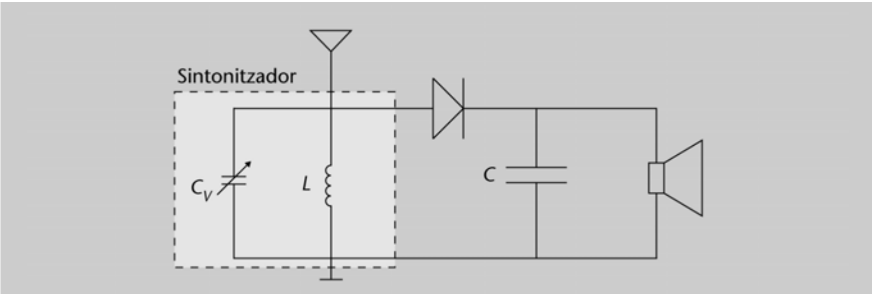


Es deixa com a exercici l'esbós de les corbes d'amplificació en ambdós circuits.

Exemple 9

Ara estem en condicions d'entendre el circuit de sintonia del receptor AM que ja coneixem (va aparèixer per primera vegada en el mòdul "Circuits RLC"). En el circuit de la figura 31 podem modelar l'antena com una font de tensió en sèrie amb una resistència (equivalent de Thevenin). Esbosseu la corba de guany que relaciona la tensió a l'entrada del díode i la tensió proporcionada per l'antena.

Figura 31. Receptor d'AM

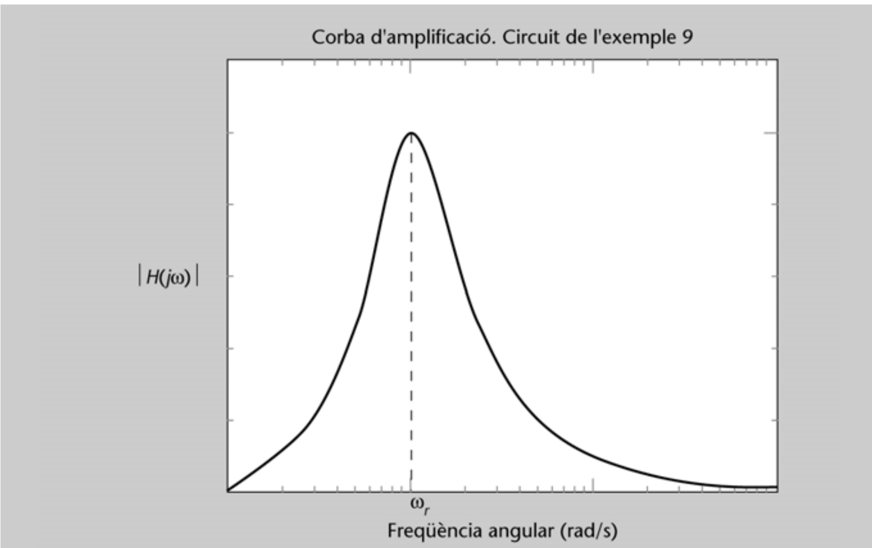


Solució

Fixeu-vos que el sintonitzador (dins del requadre de la figura 31) no és més que un circuit ressonant LC paral·lel (L està en paral·lel amb C_v). Com més baixa sigui la freqüència, més s'assemblarà la bobina a un curtcircuit. Com més alta sigui la freqüència, més s'assemblarà el condensador a un curtcircuit. A la freqüència de ressonància, el paral·lel bobina i condensador (els dos elements conjuntament) són equivalents a un circuit obert, per la qual cosa és com si no hi fossin.

L'amplitud del senyal a l'entrada del díode varia amb la freqüència tal com s'assenyala en la figura 32. Observeu que a freqüències baixes i altes l'amplificació és 0, i que l'amplificació és màxima a la freqüència de ressonància: $\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{LC_v}}$.

Figura 32. Corba d'amplificació en funció de la freqüència per a un circuit ressonant LC paral·lel (circuit tanc)



El condensador C_v és un condensador variable. En girar el comandament de sintonia el que fem és variar la capacitat del condensador del circuit de l'entrada. D'aquesta manera, variem la freqüència de ressonància del circuit, per deixar passar únicament el senyal de l'emissora que ens interessi en cada moment.

3. Potència en AC

D'entre les diferents aplicacions del corrent altern, una fonamental és la distribució de l'energia elèctrica. Si observem en detall qualsevol aparell elèctric del nostre entorn podrem llegir dades com ara:

220-240 V 50-60 Hz
770-900 W

En aquest apartat entendrem què signifiquen aquests nombres. Esbrinarem quina relació guarden amb el corrent i la impedància d'entrada de l'aparell elèctric.

Placa de característiques d'un adaptador

Per això començarem definint en el subapartat 3.1 conceptes fonamentals com la potència activa, potència aparent i factor de potència i, en el subapartat 3.2, introduirem el concepte de potència complexa.

3.1. Potència mitjana o activa

Sabem que la potència instantània lliurada a un conductor de resistència R és proporcional al quadrat del corrent:

Recordeu que la potència instantània lliurada a un element és el producte de la tensió als borns i el corrent que hi circula:

$p(t) = v(t)i(t)$

$$p(t) = i^2(t)R \qquad (110)$$

Si integrem tota la potència lliurada a la resistència en un període T coneixerem l'energia que en aquell període es transformarà en calor (subapartat 1.1 d'aquest mòdul)(equació 13):

$$W_{AC} = \int_0^T I_o^2 R \cos^2(\omega_o t) dt = \frac{I_o^2 R}{2} T \qquad (111)$$

L'energia dissipada de mitjana durant un període és la potència mitjana:

$$P_m = \frac{1}{T} W_{AC} = \frac{I_o^2 R}{2} \qquad (112)$$

La potència mitjana, també denominada *potència activa*, es mesura en watts (W) i és una mesura de l'energia elèctrica que es pot transformar en una altra forma d'energia: en energia calorífica (en un calefactor), mecànica (en un motor), etc.

Reviseu l'annex 1 sobre unitats.

Si en un circuit, a més de resistències, tenim inductors i condensadors, la impedància no serà real, sinó que tindrà un component imaginari, és a dir, reactiu. La relació entre els fasors tensió i corrent depèn de la impedància complexa:

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = Z(j\omega) = |Z|e^{j\theta} \tag{113}$$

L'amplitud de la tensió serà la del corrent multiplicada pel mòdul de la impedància i la fase de la tensió serà la del corrent més la fase de la impedància:

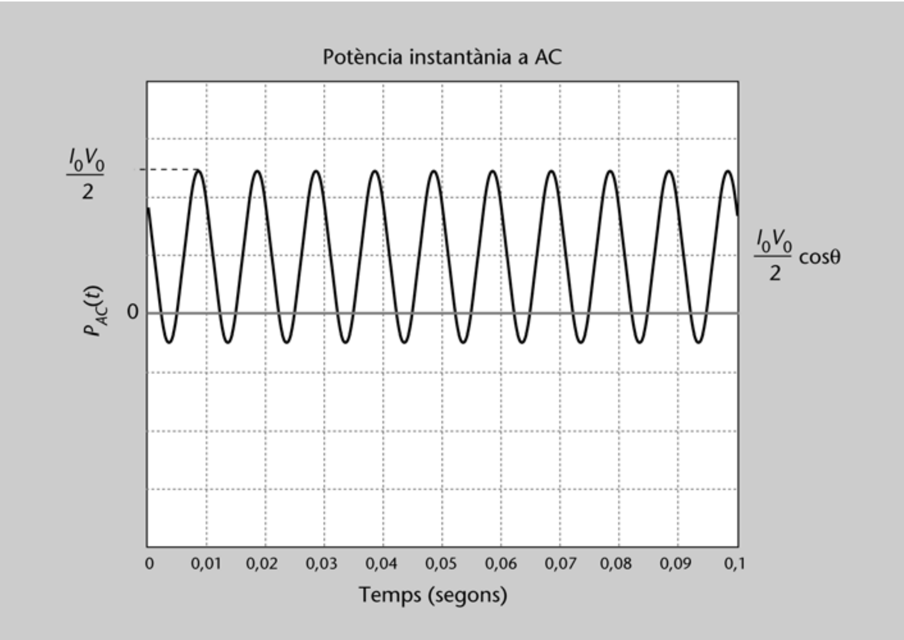
$$i(t) = I_O \cos(\omega_O t) \Rightarrow v(t) = \underbrace{I_O|Z|}_{V_O}\cos(\omega_O t + \theta) \tag{114}$$

En cada instant de temps, calcularem la potència instantània com el producte del corrent altern i la tensió alterna calculada en 114:

$$p(t) = i(t)v(t) = \frac{I_o V_o}{2}\cos(2\omega_o t + \theta) + \frac{I_o V_o}{2}\cos(\theta) \tag{115}$$

En la figura 33 es representa aquesta potència en funció del temps. S'hi pot veure que la potència instantània és periòdica i que és simètrica respecte al seu valor mitjà: $\frac{I_o V_o}{2}\cos\theta$.

Figura 33. Potència instantània en corrent altern (la freqüència del corrent és 50 Hz)



La mitjana en un període de la potència instantània serà el seu valor mitjà, és a dir:

$$P_m = \frac{I_o V_o}{2}\cos(\theta) \tag{116}$$

Algunes relacions amb el cosinus

Per a dos angles α i β, el producte de cosinus és igual a:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \\ = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Recordeu que el cosinus és una funció parella: $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

La potència instantània...

... consumida en una resistència és sempre positiva.

En canvi, per a una impedància amb part reactiva la potència instantània pot ser negativa en alguns instants de temps. La part reactiva està associada als condensadors i bobines. Penseu que els condensadors i bobines poden emmagatzemar energia i tornar-la més tard. D'aquesta manera, en alguns instants de temps poden estar emmagatzemant energia (llavors la potència instantània és positiva) o lliurant energia prèviament emmagatzemada (la potència instantània és, en aquests instants, negativa).

Si escrivim els valors de pic de tensió i corrent en funció dels seus valors eficaços, el 2 de l'expressió 116 desapareix:

$$P_m = \frac{I_{ef}\sqrt{2}V_{ef}\sqrt{2}}{2}\cos(\theta) = I_{ef}V_{ef}\cos(\theta) \qquad (117)$$

El factor cos(θ) es denomina **factor de potència**, on θ (theta) és la fase de la impedància.

És important que recordeu que la fase θ que apareix en el factor de potència és la fase de la impedància. Això significa que, per a una tensió i un corrent d'una amplitud determinada, la potència mitjana consumida per la càrrega depèn de la seva naturalesa, ja que: !

- cos(θ) = 1 per a una impedància real (resistència pura);
- cos(θ) = 0 per a una impedància imaginària (reactància pura).

Físicament això té sentit, ja que tota la potència mitjana es dissipa en la resistència òhmica. Un condensador (o un inductor) es carrega i es descarrega periòdicament. D'aquesta manera, l'energia que emmagatzema en carregar-se la torna quan es descarrega, amb la qual cosa l'energia mitjana consumida en un període (en potència mitjana) és nul·la.

En general, si la impedància té component resistiu i reactiu alhora, el factor de potència estarà comprès entre 0 i 1. La majoria dels aparells que es connecten a la xarxa elèctrica són de tipus òhmic, formats per resistències (radiadors, bombetes, etc.), o de tipus òhmic inductiu (motors). Com més inductiva és la càrrega, més gran és el desfasament entre tensió i intensitat i, per tant, més petit és el factor de potència.

El problema de tenir un factor de potència petit rau en el fet que, com més petit sigui el factor de potència, més gran ha de ser la intensitat subministrada per a aconseguir una determinada potència activa en la impedància de càrrega (la que connectem a la xarxa). Quin és el problema d'utilitzar una intensitat més gran? Ho veureu clarament si penseu que, com més gran sigui la intensitat, més energia es perd per efecte Joule a la xarxa de transport i distribució, de manera que les companyies elèctriques han de generar més potència per a un mateix aprofitament. (Es pot augmentar el gruix dels cables per a disminuir les pèrdues per calor, però això també implica més costos.)

Per a evitar les pèrdues per efecte Joule en línies de transport d'energia, s'ha de mantenir un factor de potència elevat en la càrrega.

La potència que, vista des de fora, s'aporta al circuit es denomina **potència aparent**:

$$P_{\text{aparent}} = I_{ef} V_{ef} \tag{118}$$

El rendiment que s'obté d'aquesta potència aparent és determinat directament pel factor de potència:

$$\cos(\theta) = \frac{P_m}{P_{\text{aparent}}} \tag{119}$$

Observació: La potència aparent té unitats de potència, VA (volts per ampere), i el factor de potència és adimensional.

Exemple 10

Es connecta a la xarxa elèctrica (50 Hz i valor eficaç 220 V) una màquina elèctrica que consumeix 2.450 W i que té un factor de potència que val 1.

a) Calculeu el corrent elèctric necessari per al seu funcionament.
b) Repetiu el càlcul si el factor de potència val 0,866 (impedància inductiva).

Solució

a) La potència mitjana consumida per una càrrega depèn del factor de potència de la càrrega, així com de la tensió i corrent en aquesta càrrega. Treballant amb valors eficaços tenim:

$$P_m = I_{ef} V_{ef} \cos(\theta) \tag{120}$$

Si aïllem el corrent eficaç en l'expressió anterior ens queda:

$$I_{ef} = \frac{P_m}{V_{ef}\cos(\theta)} = \frac{2.450 \text{ W}}{220 \text{ V}} = 11{,}14 \text{ A} \tag{121}$$

b) Si el factor de potència val 0,866 (impedància inductiva), el corrent eficaç val:

$$I_{ef} = \frac{P_m}{V_{ef}\cos(\theta)} = 12{,}86 \text{ A} \tag{122}$$

La potència considerada correspon al consum d'un assecador de mans dels lavabos de la universitat, per la qual cosa es tracta d'un consum moderat. Imagineu-vos llavors el que pot representar un factor de potència petit en una màquina industrial.

Per a passar d'un factor de potència de 0,866 a un factor de potència d'1 podem fer servir, per exemple, un condensador en paral·lel amb la màquina. D'aquesta manera, a l'entrada de la màquina continuem tenint 220 V.

Exemple 11

Per a la màquina de l'exemple anterior, calculeu el valor del condensador que hem de posar en paral·lel amb la màquina perquè la impedància d'entrada inductiva amb factor de potència 0,866 passi a ser una impedància de factor de potència 1.

Solució

La impedància d'entrada de la màquina té mòdul:

$$|Z| = \frac{V_{ef}}{I_{ef}} = \frac{220}{12{,}86} = 17{,}1 \ \Omega \tag{123}$$

i fase:

$$\angle Z = \arccos 0{,}866 = \frac{\pi}{6}\ \text{rad} = 30^\circ \qquad (124)$$

Com que connectarem el condensador en paral·lel amb la màquina, resulta més senzill treballar amb admitàncies.

L'admitància d'entrada de la màquina tindrà com a mòdul l'invers del mòdul de la impedància i com a fase la mateixa que la impedància canviada de signe.

$$Y = \frac{1}{|Z|e^{j\theta}} = \frac{1}{|Z|}e^{-j\theta} \qquad (125)$$

Si expressem l'admitància com a part real i imaginària obtenim que:

$$Y = \frac{1}{|Z|}\cos\theta - j\frac{1}{|Z|}\sin\theta = 0{,}05 - j0{,}03\ \Omega^{-1} \qquad (126)$$

Recordeu que les unitats d'admitància són Ω^{-1} (mhos).

El condensador té admitància:

$$Y_C = j\omega C \qquad (127)$$

de manera que l'admitància total serà l'admitància equivalent de la màquina més l'admitància del condensador:

Recordeu que l'admitància de dos elements en paral·lel es calcula com la suma d'admitàncies.

$$Y_{TOTAL} = 0{,}05 - j0{,}03 + j\omega C \qquad (128)$$

Per tant, per a compensar el component inductiu de la màquina necessitem que:

$$\omega C = 0{,}03\ \Omega^{-1} \qquad (129)$$

Ara hem d'aïllar el valor del condensador en l'expressió anterior. Atès que treballem a 50 Hz, per a compensar el component inductiu de la màquina necessitem un condensador de valor:

$$C = \frac{0{,}03}{2\pi 50} = 95{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{F} = 95{,}5\ \mu\text{F} \qquad (130)$$

3.2. Potència complexa

A efectes de càlcul resulta còmode definir la potència complexa.

La potència complexa, **S**, es defineix com el producte del fasor tensió, **V**, pel conjugat del fasor corrent, **I**, dividit per 2. Si escrivim els valors de pic en funció dels valors eficaços ($\mathbf{V}_{ef}$ i $\mathbf{I}_{ef}$, respectivament) desapareix el 2:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{V}\,\mathbf{I}^*}{2} = \mathbf{V}_{ef}\ \mathbf{I}^*_{ef} \qquad (131)$$

Recordeu

A partir de la llei d'Ohm en freqüència:

$$\mathbf{V} = Z(j\omega)\mathbf{I}$$

veiem que la fase de la tensió és la fase de la impedància més la fase del corrent:

$$\angle\mathbf{V} = \angle Z(j\omega) + \angle\mathbf{I}$$

Per tant, el desfasament entre els fasors tensió i corrent coincideix amb la fase de la impedància.

La potència complexa tindrà com a mòdul el producte dels mòduls dels fasors tensió i corrent (entre 2 si treballem amb valors de pic).

La fase de la potència complexa serà la fase de la tensió menys la fase del corrent (atès que en la fórmula apareix el conjugat del fasor corrent). Aquí és important que recordem que la diferència de fases entre la tensió i el corrent és directament la fase de la impedància.

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{ef}\mathbf{I}_{ef}^{*} = V_{ef}I_{ef}e^{j\theta} \qquad (132)$$

La fase de la potència complexa és la mateixa que la de la impedància que absorbeix la potència complexa.

Podem desglossar la potència complexa també en una part real i una d'imaginària:

$$\mathbf{S} = \underbrace{V_{ef}I_{ef}\cos\theta}_{P_m} + j\underbrace{V_{ef}I_{ef}\sin\theta}_{Q} \qquad (133)$$

Us resulta familiar la part real de la potència complexa? Efectivament, ja la coneixem, es tracta de la **potència mitjana**, P_m (equació 117), (que també s'anomena **potència activa**). Recordeu que la potència mitjana es mesura en watts (W).

Els volts amperes reactius...

... són volts amperes, igual que els wats. El qualificatiu "reactiu" s'utilitza perquè no hi hagi confusió sobre a què es refereixen.

Així, en realitat, no hi ha dues unitats diferents per a potència: totes són volts amperes.

La part complexa, que indicarem amb la lletra Q, és el que es denomina **potència reactiva**. La potència reactiva és una mesura de l'energia elèctrica successivament emmagatzemada i tornada per condensadors i inductors, (i que no es podrà convertir en cap altra forma d'energia com, per exemple, calorífica o mecànica). Les unitats de la potència reactiva, per a distingir-la de la potència activa, són VAr (volts amperes reactius).

Adoneu-vos que si el circuit és inductiu o capacitatiu pur, la seva fase és $\pi/2$ o $-\pi/2$ respectivament. Com que $\sin(\pi/2) = 1$ i $\sin(-\pi/2) = -1$, la potència reactiva consumida en un inductor és positiva mentre que la potència reactiva consumida en un condensador és negativa (vegeu equació 133).

Recordeu que en un inductor, el fasor tensió és $\mathbf{V} = \mathbf{I}j\omega L$.
En un condensador, el fasor tensió és $\mathbf{V} = \mathbf{I}/j\omega C$.

La potència reactiva consumida en un inductor pur és:

$$Q_L = V_{ef}I_{ef} = I_{ef}^2\omega L \qquad (134)$$

Mentre que la potència reactiva consumida en un condensador pur és:

$$Q_C = -V_{ef}I_{ef} = -I_{ef}^2\frac{1}{\omega C} \qquad (135)$$

Encara ens queda trobar una relació entre la potència complexa i un altre paràmetre ja conegut: la **potència aparent**, que vam veure en el subapartat 3.1. Per això, cal que tinguem en compte la relació trigonomètrica:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad (136)$$

Aquesta expressió és vàlida per a qualsevol angle. Ara calculem el mòdul de la potència complexa. Aquest mòdul serà l'arrel quadrada de la suma del quadrat de la part real, potència activa, i el quadrat de la part imaginària, potència reactiva (vegeu equació 133).

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{\left(V_{ef} I_{ef}\right)^2 \cos^2\theta + \left(V_{ef} I_{ef}\right)^2 \sin^2\theta} = V_{ef} I_{ef} \tag{137}$$

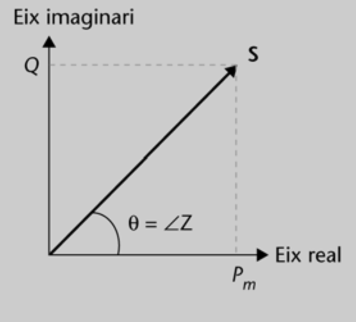
Què hem obtingut en l'equació 137? Doncs, exactament, l'expressió de la potència aparent.

En un circuit resistiu pur, el factor de potència és 1. Per tant, la potència aparent i l'activa coincideixen, ja que no hi ha consum de potència reactiva.

En la figura 34 representem el denominat **triangle de potències**, que representa la potència complexa, l'activa i la reactiva en el pla complex. Us resultarà més fàcil recordar la relació entre les diferents potències a partir d'aquest triangle.

La longitud del vector que representa la potència complexa representa el mòdul, és a dir, la potència aparent. L'angle que forma el vector amb l'eix d'abscisses és la fase de la potència complexa. Recordeu que aquesta fase és igual que la fase de la impedància consumidora d'aquesta potència.

Figura 34. Triangle de potències



La potència complexa S es mesura a VA, i:

- La seva part real P_m s'anomena **potència activa** o **mitjana** i es mesura a W.
- La seva part imaginària Q s'anomena **potència reactiva** i es mesura a VAr.
- El mòdul de la potència complexa $|\mathbf{S}|$ s'anomena **potència aparent** i les seves unitats són VA.

Les unitats de potència donades són les unitats del sistema internacional. No obstant això, en aplicacions elèctriques els valors freqüents són de l'ordre de kVA, kW i kVAr, per a la potència complexa, potència activa i potència reactiva respectivament.

Si consulteu una factura de la companyia elèctrica, veureu que aquesta cobra una quantitat fixa al mes per cada kW contractat (potència contractada) i una quantitat variable que depèn de l'energia consumida i que es mesura en kWh (aquesta abreviatura correspon a quilowatts hora que és una unitat d'energia, no de potència). A algunes tarifes se'ls aplica, a més, un complement per energia reactiva. Aquest complement pretén compensar o evitar el consum d'energia reactiva que pugui tenir una determinada instal·lació elèctrica d'AC a causa d'un factor de potència més petit que 1. Tal com ja hem comentat, un factor de potència més petit que 1 obliga la companyia elèctrica a sobredimensionar les seves instal·lacions, perquè ha d'aportar una potència més gran que la necessària.

Una propietat que us pot ser molt útil per al càlcul de la potència activa i reactiva en un circuit és la de la **conservació de la potència complexa**. Aquest principi ens diu que la potència activa total consumida en un circuit és la suma de la potència activa consumida individualment per cada element (per a qualsevol tipus d'interconnexió entre els elements). La mateixa propietat es compleix per a la potència reactiva.

$$P_{m,\text{TOTAL}} = \sum_{\substack{\text{en tots}\\ \text{els elements}\\ \text{del circuit}}} P_{m,i} \tag{138}$$

$$Q_{\text{TOTAL}} = \sum_{\substack{\text{en tots}\\ \text{els elements}\\ \text{del circuit}}} Q_i \tag{139}$$

Com la potència complexa és la suma de potència activa i reactiva (aquesta multiplicada prèviament per j) es compleix que:

$$\mathbf{S}_{\text{TOTAL}} = \sum_{\substack{\text{en tots}\\ \text{els elements}\\ \text{del circuit}}} \mathbf{S}_i \tag{140}$$

S'ha d'anar amb compte a l'hora de calcular la potència reactiva, ja que s'ha de respectar el seu signe (positiu per a un inductor i negatiu per a un condensador).

Exemple 12

Un circuit RLC s'alimenta mitjançant una tensió alterna de 50 Hz i 220 V (valor eficaç de la tensió). El corrent d'entrada al circuit és $i(t) = 0{,}77\cos(2\pi 50t + 0{,}94)$. (El valor de la fase inicial és 0,94 radiants.)

Calculeu la potència activa i reactiva consumida pel circuit i el seu factor de potència.

Solució

Els fasors tensió i corrent eficaç són:

$$\mathbf{V}_{ef} = 220 \text{ V} \tag{141}$$

$$\mathbf{I}_{ef} = \frac{0{,}77}{\sqrt{2}} e^{j0{,}94} \text{ A} \tag{142}$$

Per tant, la potència complexa és:

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{ef}\mathbf{I}^{*}_{ef} = 220\frac{0{,}77}{\sqrt{2}} e^{-j0{,}94} \tag{143}$$

Reescrivint l'exponencial desglossada en part real i imaginària, podem escriure la potència complexa com a:

$$\mathbf{S} = 220\frac{0,77}{\sqrt{2}}\left(\cos(-0,94) + j\sin(-0,94)\right) = 70,65 - j96,73 \text{ VA} \tag{144}$$

La part real de la potència complexa és la potència activa i la part imaginària és la potència reactiva:

$$P = 70,65 \text{ W} \tag{145}$$
$$Q = -96,73 \text{ VAr} \tag{146}$$

El factor de potència és cos(–0,94) = 0,6.

4. Transformador

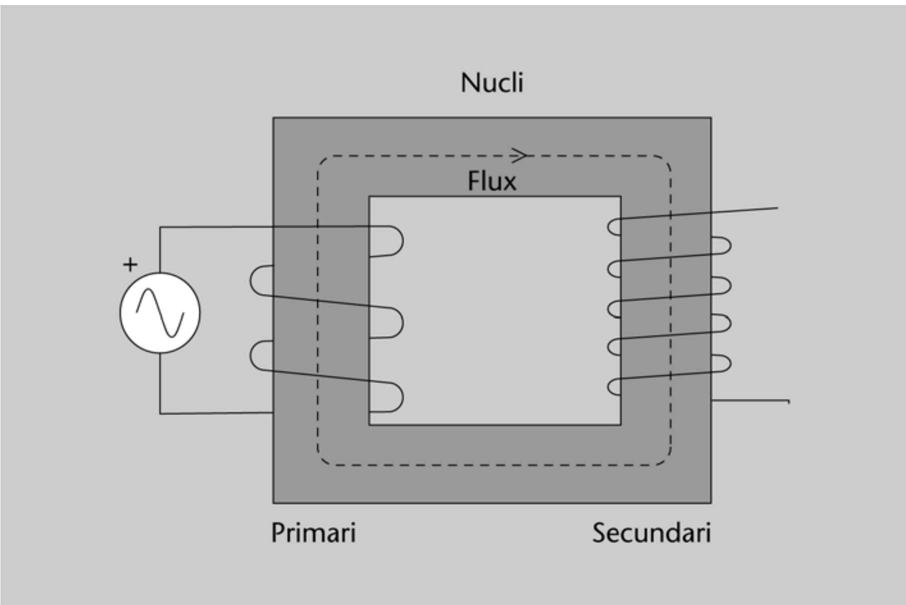
Ja hem comentat que l'energia elèctrica es transporta en forma de corrent altern. Però, per què altern?

El corrent altern té un avantatge important respecte al corrent continu: mitjançant transformadors, que només funcionen en altern, és possible passar fàcilment i amb un rendiment elevat de corrents alterns de petit voltatge a corrents d'alt voltatge, i viceversa. Interessa realitzar el transport d'energia elèctrica mitjançant potencials elevats perquè d'aquesta manera, per a una potència fixada, la intensitat pot ser més petita. Com més reduïm la intensitat del corrent, més petites seran les pèrdues a la línia per efecte Joule.

A les centrals elèctriques es produeixen corrents amb una tensió de l'ordre de milers de volts. Mitjançant transformadors, aquesta tensió s'eleva encara més, fins a uns 500.000 V, per a ser transportada en línies d'alta tensió. Al lloc de consum es fa servir un altre transformador per a reduir la tensió fins als valors estàndard de 220 o 380 V, adequats per a la utilització domèstica o industrial.

El transformador és, per tant, un element imprescindible en el transport de la potència elèctrica. Però, en què consisteix en realitat un transformador? Un transformador no és més que una parella de bobines, cadascuna amb un cert nombre d'espires, que comparteixen un nucli comú de material ferromagnètic, com en el transformador dibuixat en la figura 35.

Figura 35. Transformador



Per una de les bobines del transformador, denominada **primari**, circula el corrent altern la tensió del qual es vol modificar. El corrent que circula pel primari

Corrent DC o AC?

Al final del segle XIX es va discutir molt sobre si l'energia elèctrica s'havia de transmetre mitjançant corrent DC o AC. Thomas Edison, que era partidari del corrent DC, va patrocinar estudis per demostrar els riscos que tenia l'alta tensió alterna per a les persones. Això, finalment, va portar a utilitzar la "cadira elèctrica" com a mètode d'execució que alguns van voler anomenar *westinghousar*, ja que va ser George Westinghouse, juntament amb Nicolas Tesla, qui va desenvolupar el sistema de corrent altern per a la distribució d'energia elèctrica.

La potència dissipada per efecte Joule...

en la línia de transport del corrent elèctric altern es pot calcular utilitzant l'expressió $P_m = I_{ef}^2 R$, on I_{ef} és la intensitat eficaç que circula per línia i R la resistència òhmica de la línia. Encara que es treballi amb bons conductors, aquesta resistència pot ser important a causa de la gran longitud dels fils de la línia.

crea un camp magnètic altern. La majoria de les línies d'aquest camp magnètic travessen l'altra bobina, denominada **secundari**. Com que el corrent és altern, el flux del camp magnètic varia. En variar el flux del camp magnètic s'indueix un corrent altern en el secundari de la mateixa freqüència que el corrent del primari.

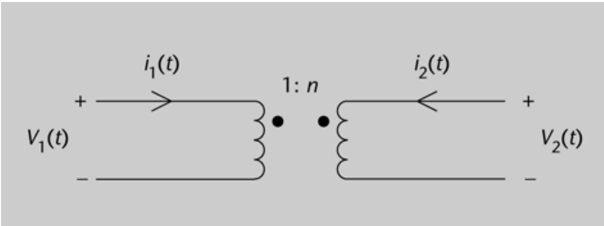
Un material ferromagnètic...

... és un material que condueix el camp magnètic amb facilitat. Per al nucli dels transformadors se sol usar ferrita.

En corrent continu no hi ha variacions de flux, per la qual cosa no es pot induir un corrent en el secundari. Aquesta és la raó per la qual els transformadors no funcionen en corrent continu.

Un transformador ideal (més endavant veurem què s'entén per ideal) es representa amb el símbol que podeu veure en la figura 36:

Figura 36. Símbol circuital d'un transformador ideal

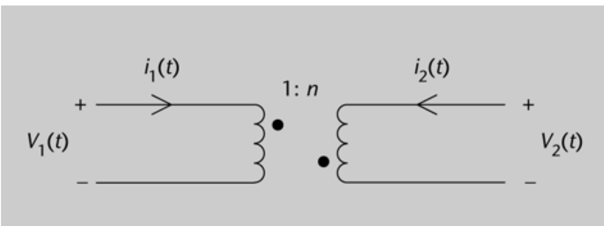


on s'ha seguit el conveni per a definir tensions i intensitats: la intensitat a cada bobina ha d'entrar pel terminal positiu de la tensió.

En realitat, podeu definir la polaritat de les tensions del transformador (v_1 i v_2) com vulgueu però, una vegada definides les tensions, els corrents s'han de definir entrant pel terminal positiu de la tensió.

Depenent del sentit amb què s'hagin debanat les espires, les tensions en primari i secundari poden estar en fase (les dues tensions tenen el mateix signe) o en contrafase (les dues tensions tenen signe contrari). Els dos punts en la figura 36, al costat del primari i el secundari, s'utilitzen per a indicar si les tensions estan en fase o en contrafase. És el que es denomina **conveni del punt**. Consisteix en el següent: si els corrents entren tots dos pel punt (com en la figura 36), significa que les tensions estan en fase. Si un corrent entra pel punt i l'altre surt pel punt significa que les tensions estan en contrafase, com en la figura 37.

Figura 37. Símbol circuital d'un transformador ideal amb les tensions en primari i secundari en contrafase



Considerarem a partir d'ara que les tensions estan en fase, és a dir, tenen el mateix signe (com en el transformador de la figura 36).

Sobre el símbol del transformador s'ha indicat la **relació de transformació** com a $1 : n$. Això indica que per cada espira en el primari tenim n espires en el secundari.

Si no hi ha pèrdues per efecte Joule ni hi ha fugues de flux, les tensions en primari i secundari compleixen que:

$$v_2(t) = nv_1(t) \tag{147}$$

Si un transformador real verifica l'equació 147, es diu que és **perfecte**. El fet que el transformador sigui perfecte depèn del nucli (bàsicament del tipus de material utilitzat).

Es diu que el transformador és **ideal** si, a més de verificar l'equació 147, els corrents verifiquen:

$$i_2(t) = -\frac{1}{n} i_1(t) \tag{148}$$

Noteu que la relació de corrents és la inversa de les tensions. A més, si les tensions estan en fase, els corrents estan en contrafase (per això, el signe menys en l'expressió 148).

Hem dit que el fet que el transformador sigui perfecte depèn del nucli. El fet que un transformador sigui ideal depèn també de la càrrega, del nombre d'espires i de la freqüència de treball. Tot i que no entrarem en detalls, quedeu-vos amb la idea que com més baixa sigui la freqüència a la qual es treballa, més espires ha de tenir el transformador per a comportar-se com a ideal. A freqüències altes (per exemple, en aplicacions de comunicacions) amb molt poques espires, és possible tenir un transformador ideal.

Les equacions d'un transformador ideal relacionen la tensió $v_1(t)$ i corrent $i_1(t)$ en el primari del transformador amb la tensió $v_2(t)$ i corrent $i_2(t)$ en el secundari del transformador de la manera següent:

$$v_2(t) = \frac{n_2}{n_1} v_1(t) \tag{149}$$

$$i_2(t) = -\frac{n_1}{n_2} i_1(t) \tag{150}$$

on n_1 és el nombre d'espires en el primari del transformador i n_2 el nombre d'espires en el secundari.

El quocient n_2 / n_1 és la **relació de transformació** del transformador.

Si $n_2 < n_1$, llavors l'amplitud de la tensió en el secundari és més petita que l'amplitud de la tensió en el primari ($V_2 < V_1$) i el transformador actua com un **reductor** de tensió.

Si $n_2 > n_1$ llavors l'amplitud de la tensió en el secundari és més gran que l'amplitud de la tensió en el primari ($V_2 > V_1$) i el transformador actua com un **elevador** de tensió.

La potència instantània absorbida pel transformador en qualsevol instant de temps t és:

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) \tag{151}$$

Podem escriure la tensió i el corrent del primari en funció de la tensió i el corrent del secundari mitjançant les equacions del transformador (equacions 149 i 150). Així, l'equació 151 queda de la manera següent:

$$p(t) = \frac{n_1}{n_2} v_2(t)\left(-\frac{n_2}{n_1} i_2(t)\right) + v_2(t)i_2(t) = 0 \tag{152}$$

És a dir, el transformador no absorbeix potència: tota la potència que entra pel primari surt instantàniament pel secundari.

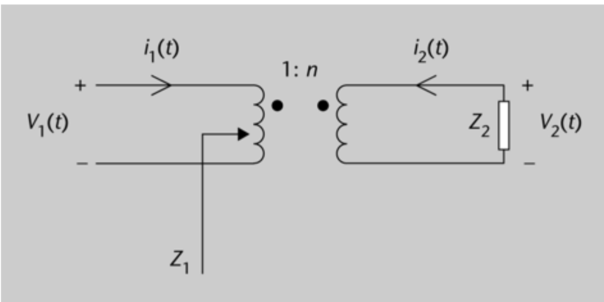
Exemple 13

El primari del transformador ideal de la figura 38 té 1.000 espires i el secundari 4.000. Al primari es connecta un generador d'altern que lliura una tensió de valor eficaç 220 V, fase 0 i freqüència 50 Hz. Al secundari es connecta una càrrega inductiva la impedància complexa de la qual és $Z_2 = 160 + j80\ \Omega$.

a) Calculeu la relació de transformació expressada com a 1:n i la tensió als borns del secundari.

b) Calculeu la impedància vista des del primari del transformador Z_1.

Figura 38. Transformador ideal amb impedància de càrrega Z_2



Solució

a) La relació entre el nombre d'espires de primari i secundari és:

$$n_1 : n_2 = 1000 : 4000 = 1 : 4 \tag{153}$$

Com que per cada espira en el primari tenim 4 espires en el secundari, la tensió als borns de secundari tindrà una amplitud 4 vegades més gran que la tensió en el primari: es tracta d'un transformador elevador de tensió. (Recordeu l'equació 149 del transformador ideal.)

D'acord amb el conveni del punt, en entrar els dos corrents pel punt, les tensions en primari i secundari estan en fase. Per tant, el fasor tensió als borns del secundari, treballant amb valors eficaços, és:

$$\mathbf{V}_{2,ef} = 4\mathbf{V}_{1,ef} \Rightarrow \mathbf{V}_{2,ef} = 880 \text{ V} \tag{154}$$

La tensió als borns del secundari escrita en forma temporal és:

$$v_2(t) = 880\sqrt{2}\cos(2\pi 50t) \text{ V} \tag{155}$$

on hem utilitzat el factor $\sqrt{2}$ per a passar del valor eficaç 220 a valor de pic i el 2π per a passar de f a ω.

b) Calculem la impedància vista des del primari del transformador com el quocient entre la tensió i el corrent en el primari:

$$Z_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{\mathbf{V}_{1,ef}}{\mathbf{I}_{1,ef}} \tag{156}$$

Hem vist en l'apartat *a* que $\mathbf{V}_{2,ef} = 4\mathbf{V}_{1,ef}$.

La relació dels corrents és inversa (vegeu equació 150 del transformador ideal). A més, si les tensions estan en fase (el mateix sentit), els corrents estan en contrafase: una és invertida respecte a l'altra.

$$\mathbf{I}_{2,ef} = -\frac{1}{4}\mathbf{I}_{1,ef} \tag{157}$$

Si escrivim en l'expressió 156 per a Z_1 la tensió i el corrent del primari en funció de la tensió i el corrent del secundari, obtenim que la impedància vista des del primari del transformador és igual que:

$$Z_1 = \frac{\mathbf{V}_{1,ef}}{\mathbf{I}_{1,ef}} = \frac{\mathbf{V}_{2,ef}/4}{-\mathbf{I}_{2,ef}4} = \frac{-\mathbf{V}_{2,ef}/\mathbf{I}_{2,ef}}{16} \tag{158}$$

La tensió que cau als borns de Z_2 és:

$$\mathbf{V}_2 = -\mathbf{I}_2 Z_2 \tag{159}$$

Recordeu que la llei d'Ohm en una resistència (o impedància) és $V = IR$, sempre que el sentit del corrent I s'hagi definit entrant pel terminal positiu de la tensió.

ja que el corrent entra a Z_2 pel terminal negatiu de la tensió.

Aquesta relació és igual treballant en valors eficaços. Per tant:

$$Z_2 = -\mathbf{V}_{2,ef}/\mathbf{I}_{2,ef} \tag{160}$$

El que significa que la impedància vista des del primari del transformador (equació 158) és:

$$Z_1 = \frac{Z_2}{16} = \frac{160 + j80}{16} = 10 + j5 \tag{161}$$

5. Màxima transferència de potència. Adaptació d'impedàncies

En l'apartat 4, hem vist que mitjançant transformadors és possible elevar o reduir tensió per a distribuir adequadament l'energia elèctrica. A més d'aquesta aplicació, el transformador té una aplicació molt important: l'adaptació d'impedàncies.

Quan traspassem la potència d'un circuit a un altre, cal fer una adaptació d'impedàncies. L'adaptació d'impedàncies ens assegura que tota la potència disponible arribi al circuit de càrrega.

Pot ser un problema que no hi hagi adaptació d'impedàncies? Certament, sí. Pensem que la potència mitjana captada per una antena pot ser de l'ordre de 10^{-12} W (watts). Amb una potència tan reduïda, no ens podem permetre malgastar-la gens ni mica.

Començarem aquest apartat veient en el subapartat 5.1 el principi de màxima transferència de potència. Aquest principi ens dirà quina condició s'ha de verificar perquè hi hagi adaptació d'impedàncies. En el subapartat 5.2 veurem què és el que podem fer si els dos circuits que connectem no verifiquen la condició d'adaptació.

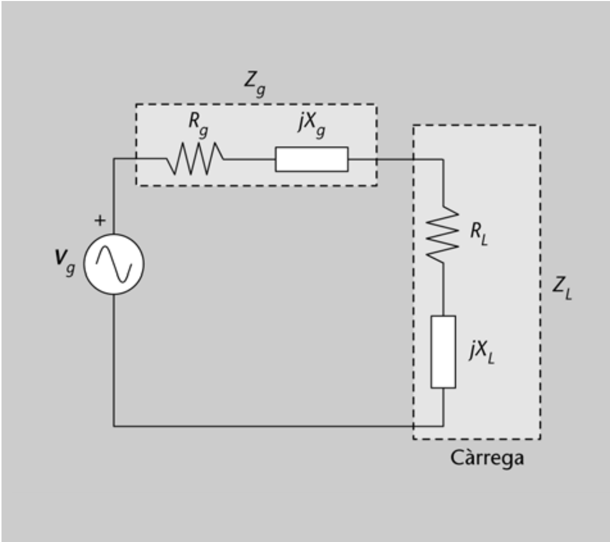
5.1. Principi de màxima transferència de potència

Suposem una antena receptora que modelem mitjançant el seu equivalent de Thevenin. L'equivalent de Thevenin inclou una font independent de tensió $v_g(t)$ (que modela el senyal captat) i una impedància Z_g. En general, la impedància tindrà part real R_g i part imaginària X_g, tal com es representa en la figura 39.

A l'antena connectem un receptor. Aquest receptor el modelarem mitjançant la seva impedància equivalent Z_L. La impedància de càrrega Z_L també tindrà, en general, una part real R_L i una altra d'imaginària, X_L, com també es representa en la figura 39.

La potència reactiva en la reactància X_L del circuit de la figura 39 modela la potència que roman en el circuit de càrrega, emmagatzemant-se i desemmagatzemant-se periòdicament. La potència mitjana (o potència activa) consumida per la càrrega dóna informació de l'energia elèctrica que podem transformar en una altra forma d'energia, per exemple, sonora. Aquesta potència mitjana correspon a la potència mitjana consumida en la R_L del model.

Figura 39. Acoblament font i càrrega en el domini transformat fasorial



Per a calcular la potència mitjana consumida en R_L necessitem el corrent i/o tensió en R_L. Podem calcular fàcilment el fasor tensió $\mathbf{V}_{R_L}$ als borns de la resistència R_L, aplicant un divisor de tensió en el circuit transformat fasorial de la figura 39:

$$\mathbf{V}_{R_L} = \mathbf{V}_g \frac{R_L}{R_g + jX_g + R_L + jX_L} \tag{162}$$

L'amplitud de la tensió $\mathbf{V}_{R_L}$ als borns de la resistència de càrrega és el mòdul del fasor associat a aquesta tensió:

$$\left|\mathbf{V}_{R_L}\right| = \left|\mathbf{V}_g\right| \frac{R_L}{\sqrt{\left(R_g + R_L\right)^2 + \left(X_g + X_L\right)^2}} \tag{163}$$

I l'amplitud del corrent que circula per la resistència és el mòdul del fasor corrent $\mathbf{I}_{R_L}$:

$$\left|\mathbf{I}_{R_L}\right| = \frac{\left|\mathbf{V}_{R_L}\right|}{R_L} \tag{164}$$

En una resistència, el factor de potència és 1, de manera que la potència mitjana és directament el producte de les amplituds de la tensió i el corrent dividit per 2 (si escrivim els valors d'amplitud en funció dels valors

Potència consumida per una impedància

Vam veure en l'apartat 3 d'aquest mòdul que la potència mitjana consumida per una impedància és el producte de l'amplitud de la tensió i el corrent (entre 2), multiplicat pel factor de potència:

$$P_m = \frac{|\mathbf{V}||\mathbf{I}|}{2}\cos\theta$$

Treballant amb valors eficaços el 2 desapareix.

eficaços el 2 desapareix). A partir de les equacions 163 i 164 la potència mitjana és:

$$P_{R_L} = \frac{|\mathbf{V}_{R_L}|^2}{2R_L} = \frac{|\mathbf{V}_g|^2}{2} \frac{R_L}{(R_g + R_L)^2 + (X_g + X_L)^2} \qquad (165)$$

Si la font té potència disponible limitada, com podríem fer que aquesta potència arribés tota a la càrrega? O dit d'una altra manera, fixades $\mathbf{V}_g$ i Z_g, com hauria de ser la impedància de la càrrega, Z_L, per a maximitzar la potència mitjana que hi arriba?

Si observem l'expressió de la potència mitjana, P_{R_L}, en l'equació 165, veiem que en el denominador apareix la suma de X_g i X_L. Si les reactàncies de font X_g i de càrrega X_L són iguals i de signe contrari, minimitzarem el denominador i, per tant, maximitzarem la potència mitjana.

Ja tenim una primera condició que hem d'imposar sobre la càrrega: la seva reactància ha de ser igual que la del generador però de signe contrari: $X_L = -X_g$. !

Si fem $X_L = -X_g$, la potència mitjana queda en funció de les resistències de generador i càrrega. Es pot comprovar que, derivant l'expressió que queda respecte a R_L i igualant-la a 0, el valor de la resistència de càrrega que permet maximitzar la potència activa que arriba fins a ella és R_g, és a dir, el valor la resistència de generador.

Ja tenim la segona condició que hem d'imposar sobre la càrrega: la seva resistència ha de ser la mateixa que la resistència de la font: $R_L = R_g$. !

En resum, per a aprofitar al màxim la potència de la font, la impedància de càrrega ha de tenir part real igual que la del generador i part imaginària igual que la del generador però de signe contrari. Dit d'una altra manera, la impedància de càrrega ha de ser igual que el conjugat de la impedància de font. Quan això ocorre, es diu que hi ha **adaptació d'impedàncies**.

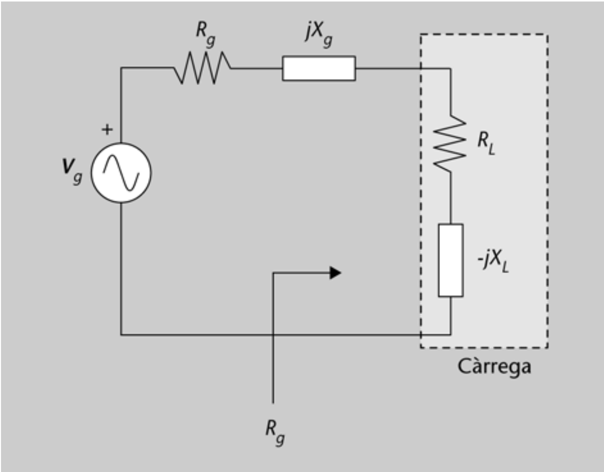
Entre una font d'impedància Z_g i una càrrega d'impedància Z_L hi ha adaptació d'impedàncies si es verifica que la impedància de càrrega és la conjugada de la impedància del generador:

$$Z_L = Z_g^*$$

Si hi ha adaptació la font transfereix a la càrrega la màxima potència possible.

En condicions d'adaptació, com que les reactàncies de generador i càrrega són iguals i de signe contrari, als terminals indicats amb la fletxa en el circuit de la figura 40 es veu una impedància de valor R_g:

Figura 40. Adaptació d'impedàncies entre font i càrrega. Circuit equivalent en el domini transformat fasorial



Si les resistències són iguals, la tensió als borns de la resistència de càrrega serà la meitat de la tensió lliurada pel generador. Podem veure-ho matemàticament aplicant-hi un divisor de tensió:

$$\mathbf{V}_{R_L} = \mathbf{V}_g \frac{R_L}{R_g + jX_g + R_L + jX_L} \tag{166}$$

Si substituïm R_L per R_g i X_L per $-X_g$ (condició d'adaptació), la tensió als borns de la resistència de càrrega és:

$$\mathbf{V}_{R_L} = \mathbf{V}_g \frac{R_g}{2R_g} = \frac{\mathbf{V}_g}{2} \tag{167}$$

A partir de l'equació 167, veiem que el corrent que circula per la resistència de càrrega és:

$$\mathbf{I}_{R_L} = \frac{\mathbf{V}_{R_L}}{R_g} = \frac{\mathbf{V}_g}{2R_g} \tag{168}$$

La potència mitjana consumida en la resistència de càrrega en condicions d'adaptació és la màxima possible. La calculem, d'acord amb l'equació 116, multiplicant l'amplitud de la tensió per l'amplitud del corrent (ja que en una resistència el factor de potència és 1) i dividint el producte per 2:

$$P_{\max} = \frac{\left|\frac{\mathbf{V}_g}{2}\right|\left|\frac{\mathbf{V}_g}{2R_g}\right|}{2} = \frac{|\mathbf{V}_g|^2}{8R_g} \tag{169}$$

Si en l'equació 169 substituïm els valors de pic per valors eficaços el factor 8 es converteix en un 4.

La potència calculada en 169 s'anomena **potència disponible**. És la màxima potència mitjana que pot lliurar la font a la càrrega.

5.2. Adaptació d'impedàncies mitjançant xarxes d'adaptació

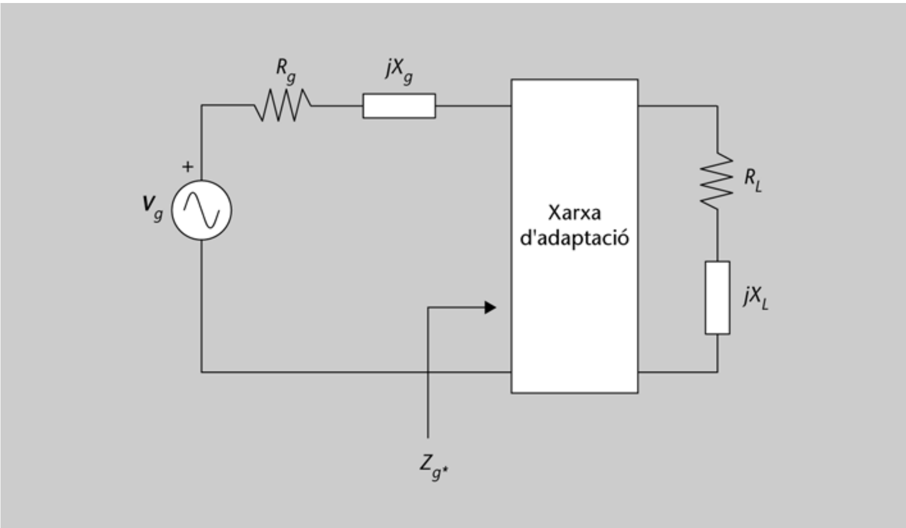
Acabem de veure que per a aprofitar al màxim la potència d'una font és necessari que la impedància de la càrrega sigui igual que el conjugat de la impedància del generador.

El problema és que en la majoria de les aplicacions pràctiques no solament tenim fixada la impedància del generador (en l'equivalent de Thevenin) sinó també la impedància equivalent de la càrrega Z_L.

Què podem fer si tenim Z_L fixada i aquesta és diferent de Z_g^* ?

Si ens trobem en aquesta situació, no connectarem generador i càrrega directament sinó mitjançant el que s'anomena **xarxa d'adaptació**, com en la figura 41.

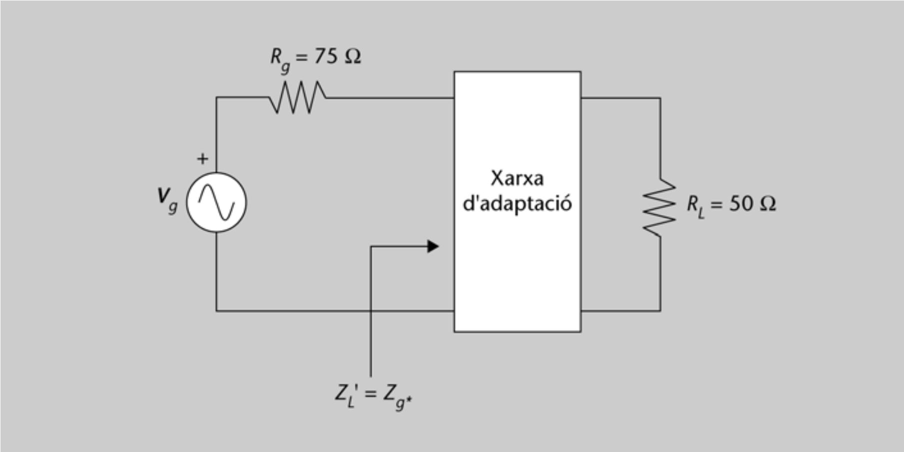
Figura 41. Acoblament de font i càrrega mitjançant xarxa d'adaptació



Com es dissenya una xarxa d'adaptació? Imaginem-nos, per exemple, un generador d'impedància real R_g = 75 Ω, i una càrrega d'impedància real R_L = 50 Ω (figura 42). Què podríem utilitzar com a xarxa d'adaptació perquè la impedància vista des dels terminals d'entrada de la xarxa d'adaptació fos $Z_L^{'} = Z_g^* = 75\ \Omega$?

El complex conjugat d'un nombre real és ell mateix.

Figura 42. Acoblament de font amb resistència de 75 Ω i càrrega de 50 Ω mitjançant xarxa d’adaptació



A simple vista, potser heu pensat a utilitzar una resistència de valor 25 com a xarxa d’adaptació. Bé, doncs aquesta no és una bona idea. Sabeu per què?

Si utilitzem com a xarxa d’adaptació una resistència de 25 Ω, haurem aconseguit que la font vegi una impedància de 75 Ω. Per tant, la font lliura tota la potència disponible als terminals indicats amb la fletxa en la figura 42. On hi ha el problema llavors?

El problema és que, efectivament, transferim tota la potència disponible a l’entrada de la xarxa d’adaptació, però aquesta potència no arriba a la càrrega. Per què? Perquè una part d’aquesta potència es dissipa en la resistència utilitzada com a xarxa d’adaptació. D’aquesta manera, des del punt de vista de la càrrega no hem guanyat absolutament res.

En conclusió, hem d’imposar a la xarxa d’adaptació una condició tan important com la condició d’adaptació: **la xarxa d’adaptació no ha de consumir potència activa**. Només si aconseguim que, a més que hi hagi adaptació d’impedàncies, la xarxa transfereixi a la càrrega tota la potència activa que li arriba, haurem aconseguit aprofitar tota la potència disponible.

Una xarxa d’adaptació no ha de consumir potència activa, per la qual cosa no pot tenir resistències.

Si la xarxa d’adaptació no pot tenir resistències, una possibilitat és construir-la mitjançant condensadors i bobines. També podem incloure-hi un component que acabem d’estudiar: el transformador. Tal com hem vist en l’apartat anterior, la potència instantània consumida en qualsevol instant de temps és 0, per la qual cosa la potència activa o potència mitjana consumida pel transformador també és 0.

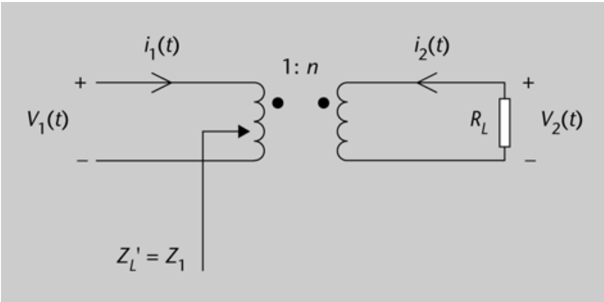
Exemple 14

Dissenyeu una possible xarxa d'adaptació mitjançant transformador per adaptar el generador i la càrrega de la figura 42. Per això, heu de trobar la relació de transformació del transformador.

Solució

Calcularem primer la impedància vista a l'entrada de la xarxa d'adaptació, $Z_L^{'}$, de la figura 43, és a dir, la impedància vista des del primari del transformador.

Figura 43. Xarxa d'adaptació (transformador) més carrega (Z_2)



La impedància vista des del primari del transformador la calculem com el quocient entre la tensió i el corrent en el primari.

$$Z_L^{'} = Z_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} \tag{170}$$

Per cada espira en el primari tenim n espires en el secundari, per tant, per cada volt en el primari tenim n volts en el secundari. La relació dels corrents és inversa. A més, si les tensions estan en fase (en el mateix sentit) els corrents estan en contrafase. En forma fasorial, les equacions del transformador queden:

$$\mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1 \tag{171}$$

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{1}{n}\mathbf{I}_1 \tag{172}$$

Si aïllem en les equacions anteriors la tensió i el corrent del primari en funció de la tensió i el corrent del secundari, i les utilitzem en l'expressió de la impedància vista des del primari, Z_1, obtenim que:

$$Z_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{\mathbf{V}_2 / n}{-\mathbf{I}_2 n} = \frac{R_L}{n^2} \tag{173}$$

on hem utilitzat que la tensió als borns de R_L val:

$$\mathbf{V}_2 = -\mathbf{I}_2 R_L \tag{174}$$

ja que el corrent $\mathbf{I}_2$ entra pel terminal negatiu de la tensió $\mathbf{V}_2$ ($\mathbf{V}_2$ és la tensió que cau en R_L).

Perquè es compleixi la condició d'adaptació, la impedància vista des de l'entrada de la xarxa d'adaptació ha de ser igual que la impedància conjugada de la font:

$$Z_L^{'} = Z_g^{*} \tag{175}$$

Per tant, s'ha de complir que:

$$\frac{R_L}{n^2} = R_g \tag{176}$$

Si aïllem n obtenim que:

$$n^2 = \frac{R_L}{R_g} \Rightarrow n = \sqrt{\frac{50}{75}} = 0{,}82 \tag{177}$$

Per la qual cosa, per a adaptar impedàncies, hem d'utilitzar un transformador que per cada espira del primari tingui 0,82 espires en el secundari. Per exemple, 11 espires en el primari i 9 en el secundari.

En el circuit d'aquest exemple, el generador i la càrrega tenen impedàncies reals. Si triem la relació de transformació adequada, aconseguim que la resistència vista a l'entrada del transformador sigui igual que la de la font. D'aquesta manera, hi ha adaptació d'impedàncies.

En algunes situacions, generador i càrrega tindran impedàncies complexes. En aquest cas, amb el transformador podrem fer que es compleixi la condició d'adaptació per a la part real de $Z_L^{'}$ i necessitarem un condensador o un inductor per a ajustar la part imaginària de $Z_L^{'}$.

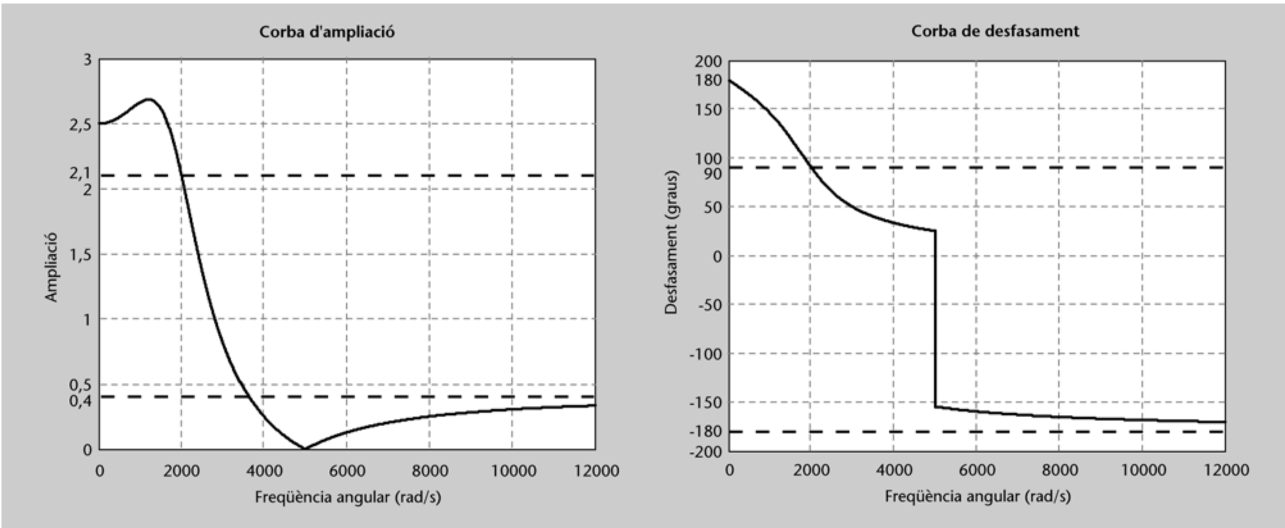
6. Problemes resolts

6.1. Enunciats

Problema 1

Les corbes de la figura 44 corresponen a les corbes d'amplificació (mòdul de $H(j\omega)$) i desfasament (argument de $H(j\omega)$) d'un circuit.

Figura 44. a) Corba d'amplificació b) Corba de desfasament



a) Calculeu la resposta en règim permanent sinusoïdal per a les entrades següents:

$$x_1(t) = 10 \tag{178}$$

$$x_2(t) = \cos(2 \cdot 10^3 t + 30°) \tag{179}$$

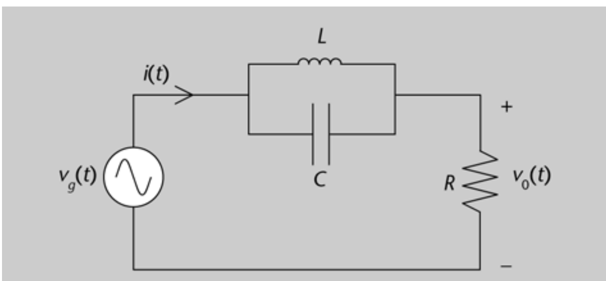
$$x_3(t) = \cos(5 \cdot 10^3 t) \tag{180}$$

b) El circuit té algun zero en l'eix imaginari? En quines posicions?

Problema 2

El circuit de la figura 45 es connecta a una font alterna de tensió $v_g(t) = 2\cos(\omega t)$:

Figura 45. Circuit per al problema 2



a) Calculeu $H(j\omega) = \mathbf{V}_o / \mathbf{V}_g$ per a $\omega = 0$. Calculeu el fasor tensió de sortida i l'expressió de $v_o(t)$ en RPS.

b) Calculeu $H(j\omega) = \mathbf{V}_o / \mathbf{V}_g$ per a $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Calculeu el fasor tensió de sortida i l'expressió de $v_o(t)$ en RPS.

Problema 3

Per a un cert valor d'ω la impedància d'entrada d'un circuit és:

$$Z_{in} = 22 \cdot 10^3 + j22 \cdot 10^3\ \Omega.$$

a) La tensió d'entrada té una amplitud (valor de pic) de 10 V, quant val el valor de pic del corrent?

b) Discutiu el comportament inductiu, capacitiu o resistiu del circuit a aquesta freqüència.

c) Quin serà el desfasament entre la tensió i el corrent d'entrada a la freqüència de treball?

Problema 4

Per al circuit de la figura 46, raoneu quin dels diagrames de la figura 47 correspon al diagrama fasorial de $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{I}_1$ i $\mathbf{I}_2$.

Figura 46. Circuit per al problema 4

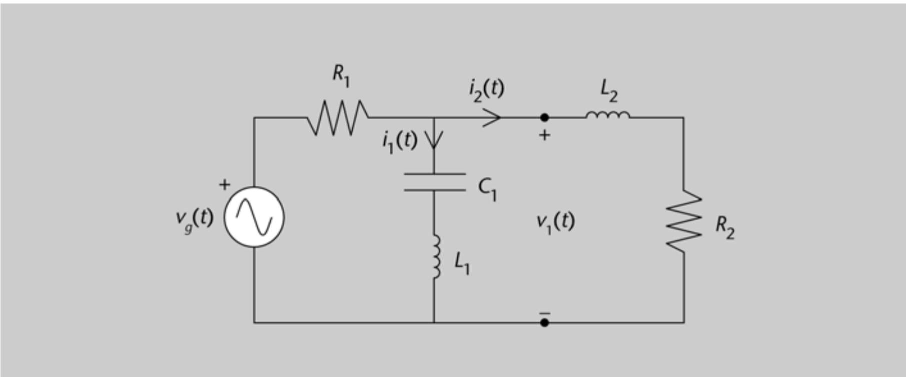
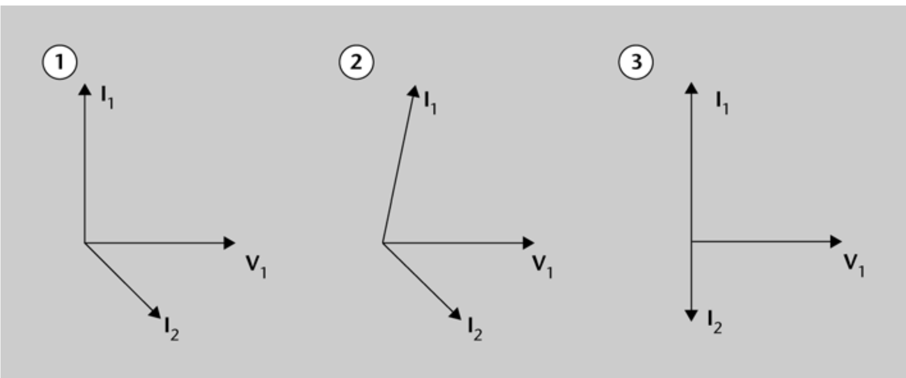


Figura 47. Diagrames fasorials per al circuit del problema 4



Problema 5

A l'entrada d'un sistema tenim el senyal $x(t)$ indicat a l'equació 181, mentre que a la resistència de càrrega (R_L) tenim el senyal $y(t)$ de l'equació 182 (on ϕ és una fase arbitrària):

$$x(t) = 3 + 2\cos(2\pi 10^3 t + 30°) + 5\sin(2\pi 5 \cdot 10^3 t + 70°) \tag{181}$$

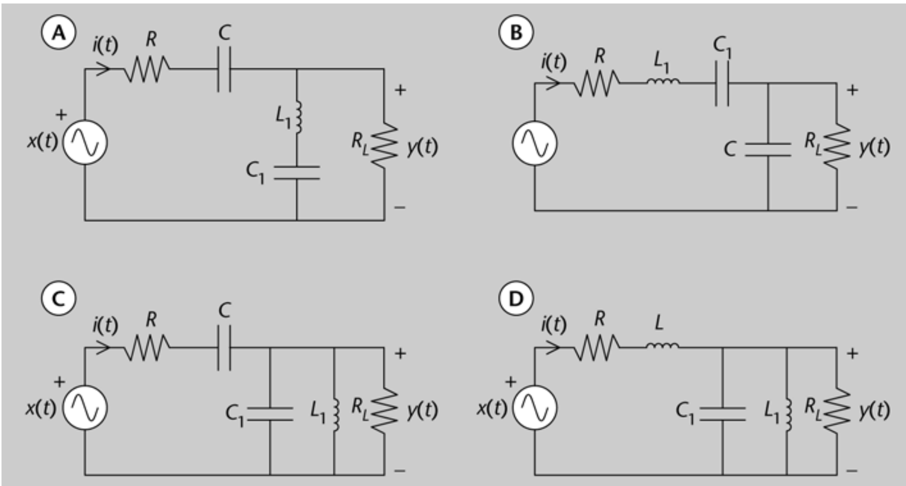
$$y(t) = 2\sin(2\pi 5 \cdot 10^3 t + \phi) \tag{182}$$

a) Justifiqueu, sense fer càlculs, quina de les estructures de la figura 48 realitza la funció anterior i calculeu els valors de L_1 i C_1 adequats, sabent que $L_1 / C_1 = 10^4$.

b) Per a l'estructura triada, indiqueu, a partir de la inspecció del circuit: ordre de $H(s)$, estabilitat i posició dels zeros en els casos en què sigui possible.

Pista: Avaluant el comportament a freqüència contínua i a la freqüència de ressonància de L i C (si hi ha combinacions sèrie o paral·lel de L i C) podem determinar si hi ha un zero de transmissió a aquestes freqüències.

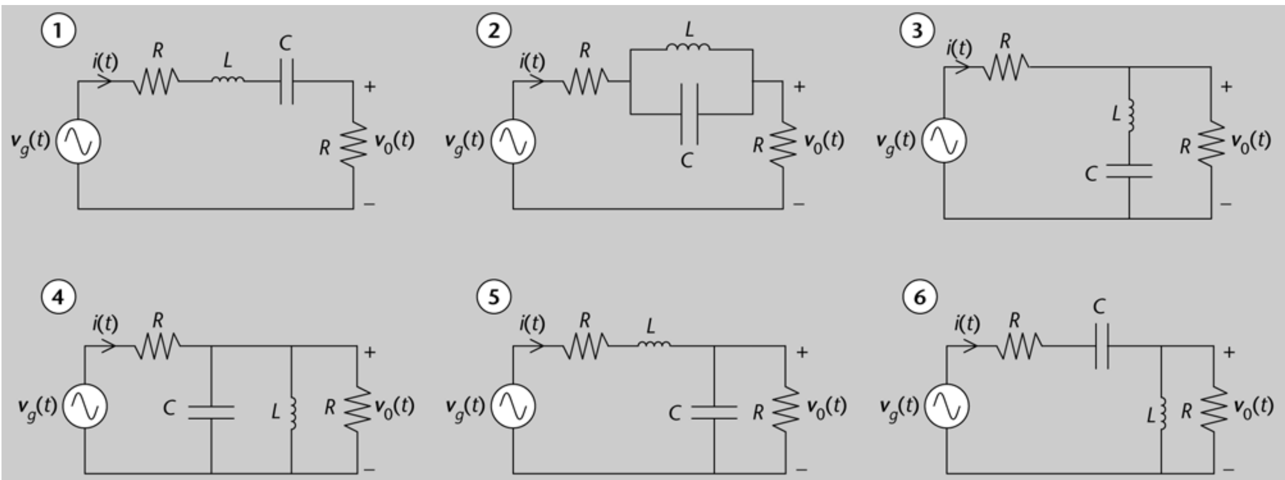
Figura 48. Circuits del problema 5



Problema 6

Esbosseu la corba d'amplificació per als circuits de la figura 49.

Figura 49. Circuits del problema 6

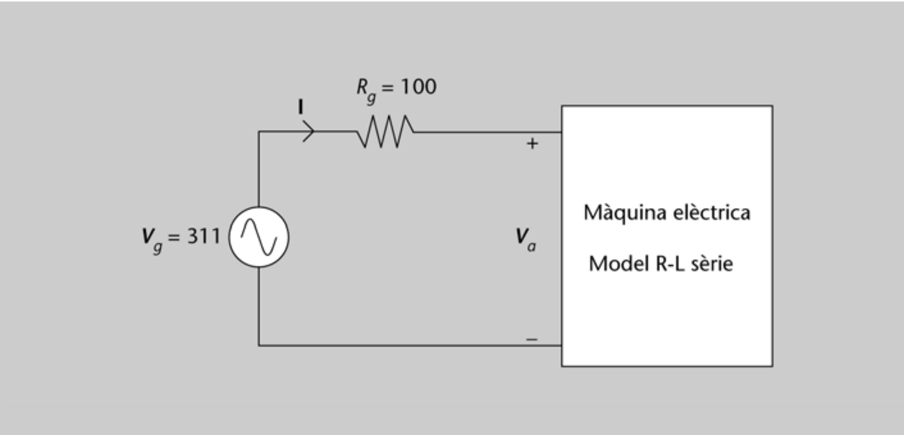


Problema 7

Tenim una màquina elèctrica que hem modelat com una resistència en sèrie amb un inductor, tal com s'indica en la figura 50. El fasor tensió a l'entrada de la màquina és:

$$\mathbf{V}_a = 300e^{j8,6°} = 296,69 + j44,9 \text{ V} \tag{183}$$

Figura 50. Circuit del problema 7



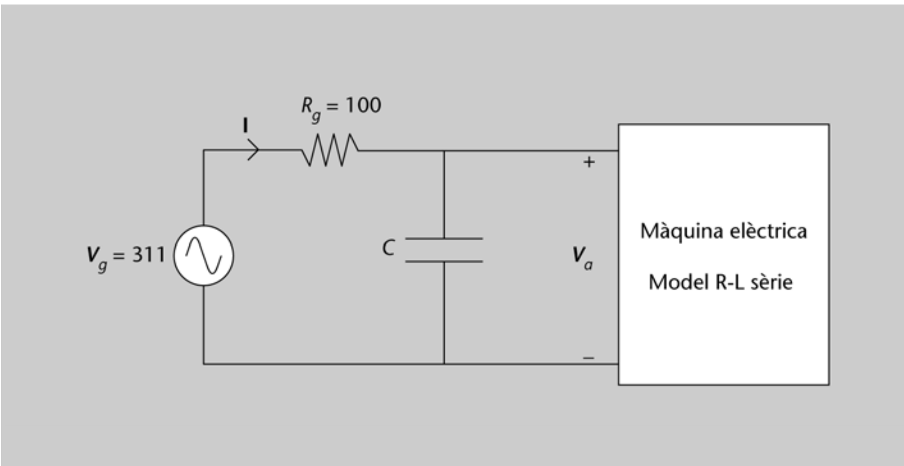
a) Calculeu el fasor **I** associat al corrent d'entrada.

b) Calculeu la potència complexa, aparent, activa i reactiva del sistema.

c) Sabent que el sistema es pot modelar com l'associació sèrie d'una inductància d'1 mH i una resistència, determineu el valor de la resistència i la freqüència de treball.

d) Justifiqueu si és possible reduir el valor del component reactiu, utilitzant un condensador en paral·lel amb l'entrada, tal com s'indica en la figura 51.

Figura 51. Compensació del factor de potència per al circuit del problema 7

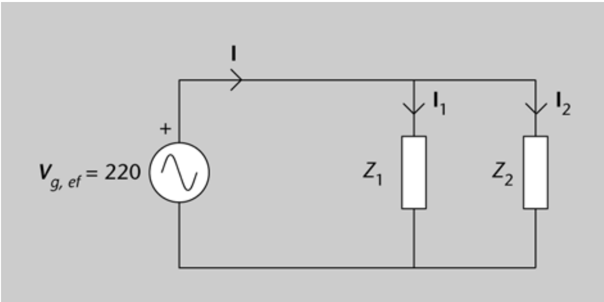


Problema 8

Una xarxa de 220 V (valor eficaç) i 50 Hz alimenta les càrregues següents connectades en paral·lel. La figura 52 representa l'esquema del circuit.

- Càrrega 1. Potència complexa = 10 kW + j13,3 kVAr, Factor de potència = 0,6 (inductiu)
- Càrrega 2. Potència complexa = 2 kW

Figura 52. Circuit del problema 8



a) Calculeu la potència aparent i el corrent eficaç necessari per a la potència consumida en cada cas.

b) Calculeu el mòdul i fase de Z_1 i Z_2.

c) Calculeu el fasor corrent total **I**.

d) Calculeu la potència aparent a l'entrada del sistema

Problema 9

Encara que els endolls corrents de les cases tenen cadascun una fase i el neutre per al camí de retorn del corrent (sistema monofàsic), l'energia elèctrica es genera i transporta en forma de corrent trifàsic. Una xarxa trifàsica genera tres tensions de valor eficaç 220 V i fases 0, –120° i –240°:

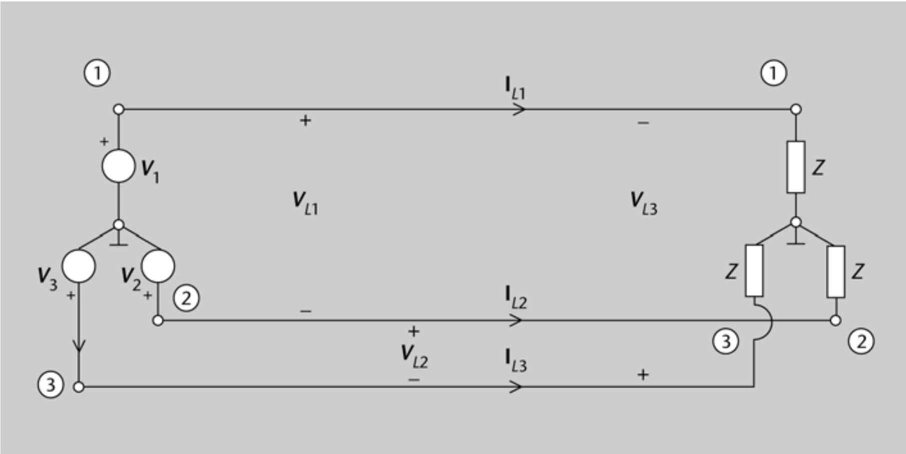
$$\mathbf{V}_{1,ef} = 220e^{j0°}\ \text{V};\quad \mathbf{V}_{2,ef} = 220e^{-j120°}\ \text{V} \quad \text{i} \quad \mathbf{V}_{3,ef} = 220e^{-j240°}\ \text{V} \qquad (184)$$

Aquestes tres tensions es distribueixen a través dels tres fils que solem veure en les línies de transmissió d'alta tensió.

En la figura 53 podeu veure representat el model del generador d'AC trifàsic (les fonts), les tres línies d'alta tensió: $L1$, $L2$ i $L3$ i la càrrega formada per tres impedàncies inductives de valor:

$$Z(j\omega) = 50 + j86,6\ \Omega \qquad (185)$$

Figura 53. Circuit del problema 9



a) Calculeu el mòdul i la fase de cada impedància.

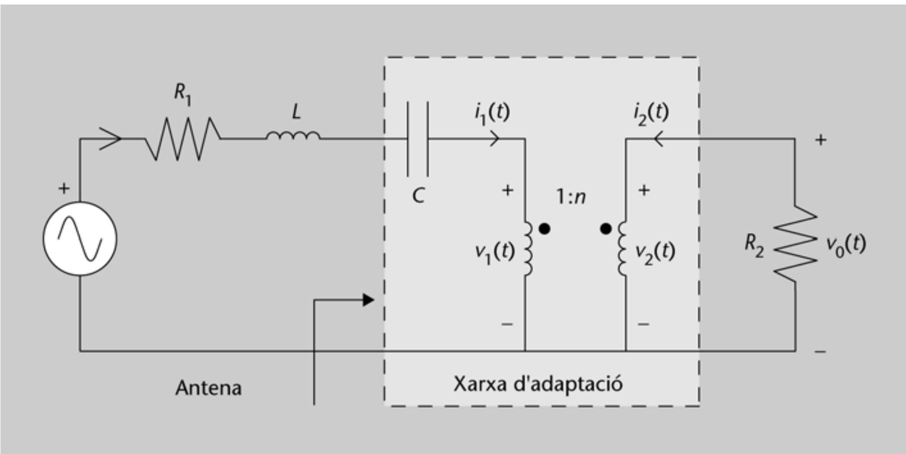
b) Calculeu la potència activa, reactiva i aparent lliurada a les tres càrregues.

c) Determineu el valor de la tensió de línia: v_{L1}, que és la tensió de la línia 1 respecte a la línia 2.

Problema 10

Es desitja adaptar una antena amb les etapes prèvies del receptor (que modelem a través de la seva impedància d'entrada R_2 = 50 Ω). Per aquest motiu, es fa ús d'una xarxa d'adaptació que inclou un transformador ideal i un condensador. La freqüència de treball és 1 MHz.

Figura 54. Circuit del problema 10



a) El model de l'antena receptora inclou el generador de tensió, la resistència R_1 = 75 Ω i l'inductor L = 56,3 μH. Calculeu la impedància equivalent de l'antena.

b) Calculeu la impedància vista a l'entrada de la xarxa d'adaptació (des dels terminals indicats amb la fletxa) en funció de la reactància del condensador, la relació de transformació del transformador i la resistència de la càrrega R_2 a la qual pretenem adaptar l'antena.

c) Dissenyeu la xarxa perquè hi hagi adaptació, és a dir, calculeu el valor del condensador i la relació de transformació del transformador perquè hi hagi adaptació.
d) En condicions d'adaptació, quina serà la potència dissipada per la càrrega? Considereu que l'amplitud de la tensió d'antena és 0,1 V.
e) Calculeu l'amplitud de la tensió $v_o(t)$, considerant que l'amplitud de la tensió d'antena és 0,1 V.

6.2. Solucions

Problema 1

a) A $\omega = 0$ (contínua) l'amplificació del circuit és 2,5 i el desfasament 180° (o π rad). Un canvi de fase de 180° equival a una inversió de signe. Per tant, en règim permanent tenim:

$$y_1(t) = -25 \tag{186}$$

A $\omega = 2 \cdot 10^3$ rad/s, l'amplificació del circuit és 2,1 i el desfasament 90° (o $\pi/2$ rad). Per tant, en règim permanent tenim:

$$y_2(t) = 2{,}1\cos\left(2 \cdot 10^3 t + 30° + 90°\right) = 2{,}1\cos\left(2 \cdot 10^3 t + 120°\right) \tag{187}$$

A $\omega = 5 \cdot 10^3$ rad/s l'amplificació del circuit és 0. Per tant, en règim permanent tenim:

$$y_3(t) = 0 \tag{188}$$

A la freqüència $\omega = 5 \cdot 10^3$ radiants/segon, diem que tenim un **zero de transmissió**.

b) La funció de xarxa $H(j\omega)$ és zero per a $\omega = 5 \cdot 10^3$ rad/s, és a dir:

$$H(s)\big|_{s=j5\cdot 10^3} = 0 \tag{189}$$

Cosa que significa que el circuit té un zero a $j5 \cdot 10^3$. Com que els zeros apareixen en parells complexos conjugats també tenim un zero a $-j5 \cdot 10^3$ rad/s.

Problema 2

Per a calcular $H(j\omega) = \mathbf{V}_o / \mathbf{V}_g$, podem treballar en el domini de Laplace i, una vegada trobada la funció de xarxa, substituirem s per $j\omega$.

La impedància de la combinació L-C paral·lel és en el domini de Laplace:

$$Z_p(s) = \frac{\frac{Ls}{Cs}}{Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{Ls}{LCs^2 + 1} \tag{190}$$

La funció de xarxa és:

$$H(s) = \frac{R}{Z_p + R} = \frac{R}{\frac{Ls}{LCs^2 + 1} + R} = \frac{\left(LCs^2 + 1\right)R}{LCRs^2 + Ls + R} = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \tag{191}$$

a) Substituint s per $j0$:

$$\mathbf{V}_o / \mathbf{V}_g = H(0) = 1 \tag{192}$$

El fasor tensió de sortida és:

$$\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_g \tag{193}$$

En el domini del temps:

$$v_o(t) = 2 \text{ V} \tag{194}$$

b) Substituint s per $j\frac{1}{\sqrt{LC}}$:

$$\mathbf{V}_o / \mathbf{V}_g = H\left(j\frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = 0 \tag{195}$$

El fasor tensió de sortida és:

$$\mathbf{V}_0 = 0 \tag{196}$$

En el domini del temps:

$$v_o(t) = 0 \tag{197}$$

Problema 3

a) La "resistència" efectiva al pas del corrent (quocient entre amplitud de la tensió i el corrent) és el mòdul de la impedància:

$$|Z_{in}| = 22 \cdot 10^3 |1 + j| = 22 \cdot 10^3 \sqrt{2} \ \Omega \tag{198}$$

La llei d'Ohm en el domini de la freqüència és:

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}Z_{in} \tag{199}$$

d'on podem aïllar l'amplitud del corrent, que és el mòdul del fasor corrent:

$$I_o = \frac{V_o}{|Z_{in}|} = \frac{10}{22 \cdot 10^3 \sqrt{2}} = 3{,}2 \cdot 10^{-4}\,\text{A} = 0{,}32 \text{ mA} \tag{200}$$

b) El circuit té un comportament inductiu, ja que la seva reactància és positiva.

c) El desfasament entre tensió i corrent és determinat per la fase de la impedància:

$$\angle Z_{in} = \text{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} = 45° \tag{201}$$

Per tant, la tensió va avançada respecte al corrent 45°.

Problema 4

La impedància L_1–C és purament reactiva (sense part real), per tant, el desfasament entre la tensió als borns i el corrent que hi circula serà $\pi/2$ o $-\pi/2$, depenent del signe de $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$.

La impedància L_2–R_2 és inductiva però amb una part real, per tant la tensió als borns avança el corrent un angle inferior a $\pi/2$.

El diagrama fasorial correcte és l'1.

Problema 5

a) L'estructura adequada és la A: el condensador en sèrie amb R impedeix la transmissió del component continu i l'associació sèrie entre L_1 i C_1 actua com a curtcircuit a la freqüència $\omega = 1/\sqrt{L_1C_1}$.

Seleccionant els valors de L_1 i C_1 adequats podem cancel·lar el component a $\omega = 2\pi 10^3$ rad/s, fent que:

$$2\pi 10^3 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} \tag{202}$$

En l'enunciat ens diuen, a més, que:

$$L_1 / C_1 = 10^4 \Rightarrow L_1 = 10^4 C_1 \tag{203}$$

Substituint 203 en 202 obtenim el valor de C_1:

$$2\pi 10^3 = \frac{1}{\sqrt{10^4 C_1^2}} = \frac{1}{10^2 C_1} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2\pi 10^5}\ \text{F} = 1{,}6\ \mu\text{F} \tag{204}$$

Ara substituint C_1 en l'equació 203 obtenim el valor de L_1:

$$L_1 = \frac{1}{2\pi 10}\text{H} = 15{,}9\ \text{mH} \tag{205}$$

b)

- El circuit té dos condensadors i una bobina, que en transformar-los introdueixen termes en s, per la qual cosa l'ordre del circuit és 3.

- El circuit és estable, ja que tots els seus elements són passius.

- Existeix un zero en l'origen (cancel·la la contínua) que introdueix el condensador que està en sèrie amb la resistència R. Els elements L_1 i C_1 donen amplificació nul·la a la freqüència $\omega = 2\pi 10^3$ rad/s. A Laplace suposa un parell de zeros en $s = \pm j2\pi 10^3$.

Problema 6

Per a tots els circuits:

- a freqüències molt baixes els inductors es poden aproximar per curtcircuits i els condensadors per circuits oberts;

- a freqüències molt altes els inductors es poden aproximar per circuits oberts i els condensadors per curtcircuits.

Per als circuits amb combinacions L–C sèrie (1,3). A la freqüència $\omega = 1/\sqrt{LC}$, inductor i condensador (els dos conjuntament) es comporten com un curtcircuit.

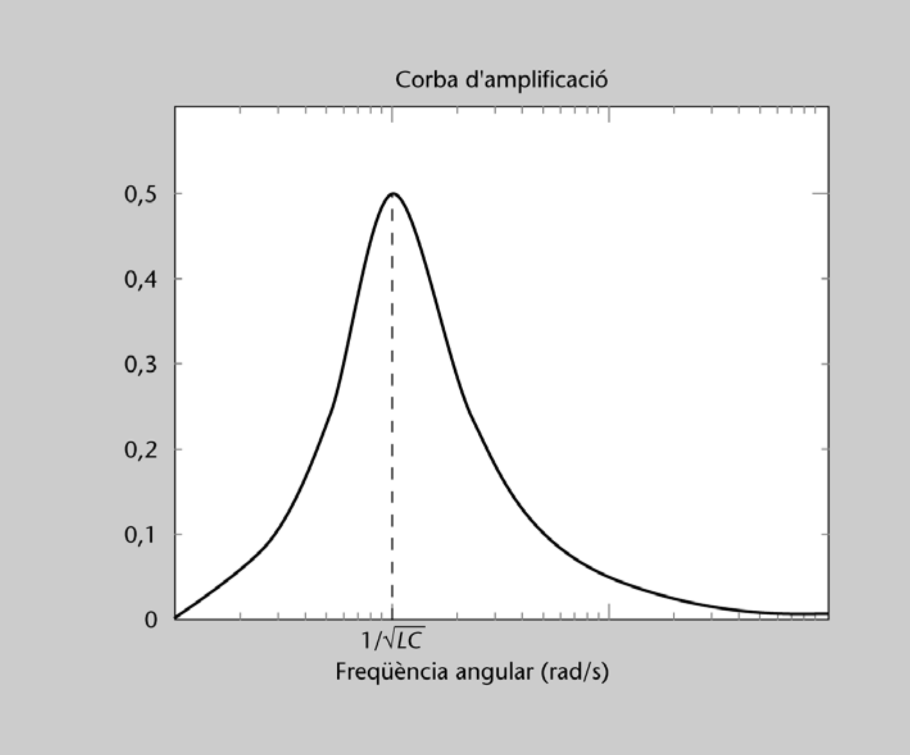
Per als circuits amb combinacions L–C paral·lel (2,4). A la freqüència $\omega = 1/\sqrt{LC}$, inductor i condensador (els dos conjuntament) es comporten com un circuit obert.

Els circuits 5 i 6 no tenen cap estructura ressonant, per la qual cosa només podem intuir el seu comportament a freqüències baixes i freqüències altes.

Per tant:

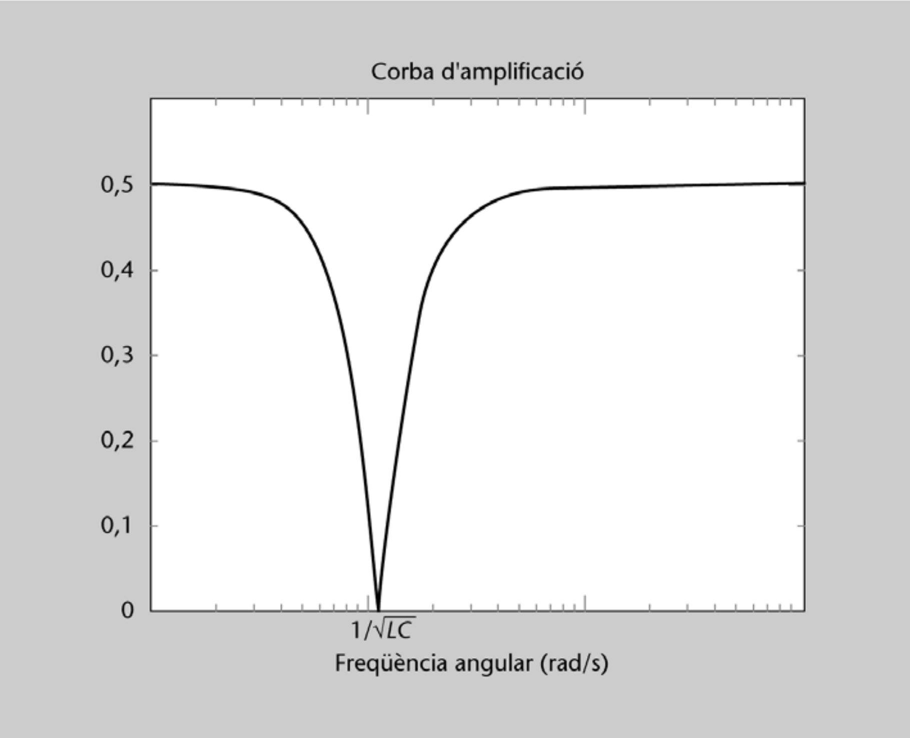
Els circuits 1 i 4 presenten la corba d'amplificació en funció de la freqüència de la figura 55, on el màxim d'amplificació es produeix a la freqüència $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Figura 55. Problema 6, corba d'amplificació en funció de la freqüència dels circuits 1 i 4



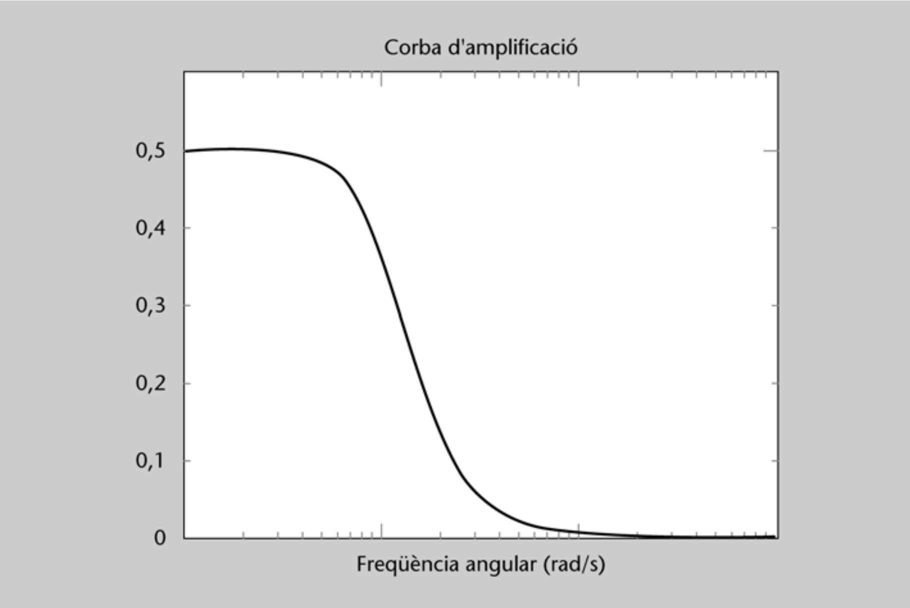
Els circuits 2 i 3 presenten la corba d'amplificació en funció de la freqüència de la figura 56, on el zero de transmissió es produeix a la freqüència $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Figura 56. Problema 6, corba d'amplificació en funció de la freqüència dels circuits 2 i 3



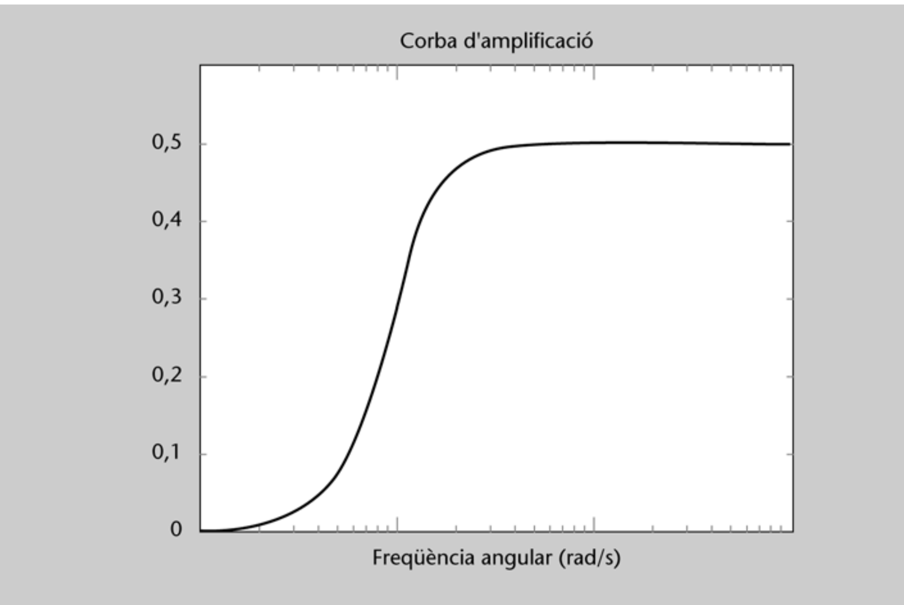
El circuit 5 presenta la corba d'amplificació en funció de la freqüència de la figura 57.

Figura 57. Problema 6, corba d'amplificació en funció de la freqüència del circuit 5



El circuit 6 presenta la corba d'amplificació en funció de la freqüència de la figura 58.

Figura 58. Problema 6, corba d'amplificació en funció de la freqüència del circuit 6



Problema 7

a) El fasor associat al corrent d'entrada del sistema es pot calcular de la manera següent:

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= \frac{\mathbf{V}_g - \mathbf{V}_a}{R} = \frac{311 - 296{,}6 - j44{,}9}{100} = \frac{14{,}4 - j44{,}9}{100} \\ &= 0{,}144 - j0{,}449 = 0{,}47e^{-j72{,}2^\circ}\ \mathrm{A}\end{aligned} \qquad (206)$$

b) La potència complexa serà:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{V}_a \mathbf{I}^*}{2} = \frac{300e^{j8,6°} \cdot 0,47e^{j72,2°}}{2} = 70,5e^{j80,8°} = P + jQ \tag{207}$$

Potència activa: P = 11,3 W
Potència reactiva: Q = 69,6 VAr
Potència aparent: $|\mathbf{S}|$ = 70,5 VA

c) La impedància del sistema és:

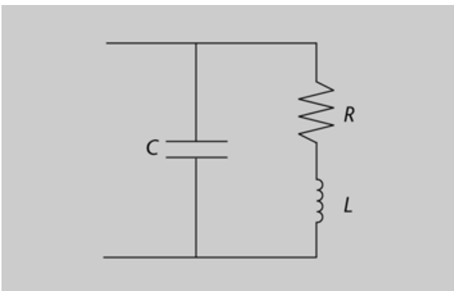
$$Z(j\omega) = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{I}} = \frac{300e^{j8,6°}}{0,47e^{-j72,2°}} = 638,3e^{j80,8°} = 102 + j630,1\ \Omega \tag{208}$$

$$R = 102\ \Omega; \tag{209}$$

$$\omega L = 630,1\ \Omega \Rightarrow f = \frac{630,1}{2\pi 10^{-3}} = 100,3\ \text{kHz} \tag{210}$$

d) En aquest cas, tindríem una impedància d'entrada del tipus indicat a la figura 59.

Figura 59. Circuit per a la solució del problema 7



L'admitància vista des de l'entrada (on s'han multiplicat numerador i denominador per $R - j\omega L$) seria:

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \tag{211}$$

que indica que amb el valor de C apropiat es pot cancel·lar el component imaginari causat per la bobina.

Problema 8

a) La potència aparent és el mòdul de la potència complexa.

Per a la càrrega 1, calculem el mòdul de la potència complexa com l'arrel quadrada del quadrat de les parts real i imaginària:

$$|\mathbf{S}_1| = \sqrt{\left(10 \cdot 10^3\right)^2 + \left(13,3 \cdot 10^3\right)^2} = 16,64 \cdot 10^3\ \text{VA} \tag{212}$$

La càrrega 2 només absorbeix potència activa, per la qual cosa el mòdul de la potència complexa és directament la potència activa.

$$|\mathbf{S}_2| = 2 \cdot 10^3 \ \text{VA} \tag{213}$$

La relació entre la tensió i corrent eficaç amb la potència aparent és determinada per:

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{V}_{ef}\mathbf{I}_{ef}^*| = V_{ef}I_{ef} \tag{214}$$

Per tant, el valor eficaç del corrent que circula per les càrregues 1 i 2 és:

$$I_{ef_1} = \frac{16{,}64 \cdot 10^3}{220} = 75{,}6 \ \text{A} \tag{215}$$

$$I_{ef_2} = \frac{2 \cdot 10^3}{220} = 9{,}1 \ \text{A} \tag{216}$$

b) El mòdul de la impedància és determinat per la relació d'amplituds (o valors eficaços) de tensió i corrent. Per tant:

$$|Z_1| = \frac{220}{75{,}6} = 2{,}91 \ \Omega \tag{217}$$

$$|Z_2| = \frac{220}{9{,}1} = 24{,}18 \ \Omega \tag{218}$$

La fase de la potència complexa coincideix amb la fase de la impedància consumidora d'aquesta potència. Per tant, com que la potència reactiva positiva és a la càrrega 1, la càrrega és inductiva i la seva fase val:

$$\angle Z_1 = \text{arctg}\frac{P_{\text{reactiva}}}{P_{\text{activa}}} = \text{arctg}\frac{13{,}3 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3} = 53° \tag{219}$$

La càrrega 2 és purament resistiva, ja que no consumeix potència reactiva, per la qual cosa la seva fase és 0.

c) El fasor corrent total és igual que la suma dels corrents que circulen per la càrrega 1 i 2 expressades en **forma fasorial**.

Si la fase de la tensió és 0°, la fase del corrent que circula per la càrrega 1 és –53°.

La fase del corrent que circula per la càrrega 2 és 0°.

Per tant, els fasors associats als corrents que circulen per les càrregues 1 i 2 són:

$$\mathbf{I}_{1,ef} = 75{,}6e^{-j53°} \text{ A} \tag{220}$$

$$\mathbf{I}_{2,ef} = 9{,}1 \text{ A} \tag{221}$$

El corrent total en forma fasorial és:

$$\mathbf{I}_{ef} = \mathbf{I}_{1,ef} + \mathbf{I}_{2,ef} = 75{,}6e^{-j53°} + 9{,}1 \text{ A} \tag{222}$$

Si escrivim els complexos com a part real i imaginària obtenim que:

$$\mathbf{I}_{ef} = \mathbf{I}_{1,ef} + \mathbf{I}_{2,ef} = 75{,}6\left(0{,}6 - j0{,}8\right) + 9{,}1 = 54{,}46 - j60{,}48 \text{ A} \tag{223}$$

Expressant de nou el corrent total com a mòdul i fase obtenim que:

$$\mathbf{I}_{ef} = \mathbf{I}_{1,ef} + \mathbf{I}_{2,ef} = 81{,}4e^{-j48°} \text{ A} \tag{224}$$

Podem calcular la potència aparent que circula per les càrregues a partir de la tensió eficaç i el corrent total eficaç:

$$|\mathbf{S}| = \left|\mathbf{V}_{ef}\mathbf{I}_{ef}^{*}\right| = V_{ef}I_{ef} = 220 \cdot 81{,}4 = 17{,}9 \cdot 10^{3} \text{ VA=17,9 KVA} \tag{225}$$

També podríem haver calculat la potència complexa total consumida per les dues càrregues:

$$\mathbf{S} = \left(P_1 + P_2\right) + j\left(Q_1 + Q_2\right) = 12 \cdot 10^{3} + j13{,}3 \cdot 10^{3} \text{ VA} \tag{226}$$

Calculant el seu mòdul obtindrem la potència aparent total que coincideix amb el resultat de l'equació 225:

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{\left(12 \cdot 10^{3}\right)^{2} + \left(13{,}3 \cdot 10^{3}\right)^{2}} = 17{,}9 \cdot 10^{3} \text{ VA} \tag{227}$$

Problema 9

a) El mòdul de la impedància és l'arrel quadrada de la suma del quadrat de la part real (resistència) i la part imaginària (reactància):

$$|Z| = \sqrt{50^{2} + 86{,}6^{2}} = 100\ \Omega \tag{228}$$

La fase de la impedància és l'angle la tangent del qual és el quocient entre la part real i la part imaginària:

$$\angle Z = \text{arctg}\frac{86,6}{50} = 60° \tag{229}$$

Per tant, la impedància és:

$$Z = 100e^{j60°}\Omega \tag{230}$$

b) El corrent I_F que circula per cada impedància (denominat *corrent de fase*) és igual que el corrent que circula per la línia. Observeu que la tensió als borns de cada impedància (denominada *tensió de fase*) V_F és igual que una de les tres tensions generades.

Per tant, podem calcular el corrent que circula per cada càrrega dividint l'amplitud de la tensió als borns de la càrrega pel mòdul de la impedància ("resistència" efectiva al pas del corrent):

$$I_{F,ef} = I_{L,ef} = \frac{V_{F,ef}}{|Z|} = \frac{220}{100} = 2,2 \text{ A} \tag{231}$$

La potència activa i reactiva lliurada a cada una de les càrregues és:

$$P_1 = V_{F,ef} I_{F,ef} \cos\theta = 220 \cdot 2,2 \cdot \cos(60°) = 242\text{W} \tag{232}$$

$$Q_1 = V_{F,ef} I_{F,ef} \sin\theta = 220 \cdot 2,2 \cdot \sin(60°) = 419,2 \text{ VAr} \tag{233}$$

La potència activa i reactiva per a les altres dues càrregues serà exactament igual que la calculada, de manera que la potència activa i reactiva total és:

$$P_T = 3V_{F,ef} I_{F,ef} \cos\theta = 726 \text{ W} \tag{234}$$

$$Q_T = 3V_{F,ef} I_{F,ef} \sin\theta = 1.257,6 \text{ VAr} \tag{235}$$

La potència aparent total és:

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = 1.452,1 \text{ VA} \tag{236}$$

c) Aplicant la llei de Kirchhoff de les tensions en forma fasorial, podem escriure la tensió de línia $\mathbf{V}_{L1}$ com la suma de les tensions $\mathbf{V}_1$ i $-\mathbf{V}_2$:

$$\mathbf{V}_{L1} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 \tag{237}$$

Per a entendre l'equació 237, observeu que $\mathbf{V}_1$ és la tensió del node 1 respecte al node de referència (neutre) i que $\mathbf{V}_2$ és la tensió del node 2 respecte node de referència (neutre).

El fasor tensió eficaç associat a la tensió de línia 1 és igual que:

$$\mathbf{V}_{L1,ef} = 220e^{j0°} - 220e^{-j120°} \qquad (238)$$

Per poder sumar els fasors de tensió escrivim les exponencials complexes desglossades en part real i imaginària:

$$\mathbf{V}_{L1,ef} = 220(1 + j0) - 220\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 220\left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad (239)$$

Recordeu:
sin(30°) = –cos(–120°) = 1/2
cos(30°) = –sin(–120°) = $\sqrt{3}/2$

Operant, obtindrem que la tensió de línia té una amplitud igual que $220\sqrt{3}$ i una fase de 30°

$$\mathbf{V}_{L1,ef} = 220\sqrt{3}e^{j30°} = 381e^{j30°} \text{ V} \qquad (240)$$

Problema 10

a) $Z_g = R_1 + j\omega L = 75 + j2\pi 10^6 56{,}3 \cdot 10^{-6} = 75 + j353{,}74\ \Omega$ (241)

b) La impedància a l'entrada de la xarxa és la combinació sèrie de la impedància del condensador C i la impedància vista des dels terminals del primari del transformador.

La impedància vista des dels terminals del primari és:

$$Z_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{\mathbf{V}_2/n}{-\mathbf{I}_2 n} = \frac{R_2}{n^2} \qquad (242)$$

on hem fet servir que $\mathbf{V}_2 = -\mathbf{I}_2 \cdot R_2$.

Per tant, a l'entrada de la xarxa d'adaptació veiem:

$$Z_L' = -j\frac{1}{\omega C} + \frac{R_2}{n^2} \qquad (243)$$

c) Perquè hi hagi adaptació s'ha de complir:

$$Z_L' = Z_g^* = 75 - j353{,}74\ \Omega \qquad (244)$$

Igualant la part real de Z_L' a 75 obtenim el valor de n és:

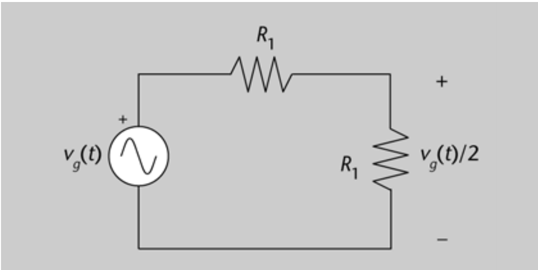
$$\frac{R_2}{n^2} = 75 \Rightarrow n = \sqrt{\frac{50}{75}} \qquad (245)$$

Igualant la part imaginària de $Z_L^{'}$ a -353,74 obtenim que el valor del condensador ha de ser:

$$-\frac{1}{\omega C} = -353{,}74 \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi 10^6 \cdot 353{,}74} = 4{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{F} = 0{,}45\ \text{nF} \qquad (246)$$

d) En condicions d'adaptació es transfereix la màxima potència a la càrrega. Com que hem dissenyat $Z_L^{'} = Z_g^{*} = 75 - j353{,}74\ \Omega$, un model simplificat del circuit és:

Figura 60. Circuit per a la solució del problema 10



on la segona R_1 és una resistència fictícia que modela l'inductor, la xarxa d'adaptació i la càrrega.

Atès que totes dues resistències són iguals, el voltatge a la sortida serà $V_g/2$. La potència activa dissipada per aquesta resistència "fictícia" és:

$$P_{R_1} = \frac{\left|\frac{\mathbf{V}_g}{2}\right|^2}{2R_1} \qquad (247)$$

Aquesta potència és la potència disponible: la màxima que es pot lliurar a la càrrega. Com que l'inductor i la xarxa no dissipen potència, aquesta es dissiparà tota a la càrrega.

Atès que totes dues resistències són iguals, el voltatge a la sortida serà $\mathbf{V}_g/2$. La potència disponible, per tant, val:

$$P_{\text{màx}} = \frac{\left(\frac{0{,}1}{2}\right)^2}{2 \cdot 75} = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\ \text{W} \qquad (248)$$

e) Sabem que hi ha adaptació, per tant, a R_2 es dissipa la potència màxima que acabem de calcular. La potència dissipada a R_2 ha de verificar també que:

$$P_{R_2} = \frac{|\mathbf{V}_o|^2}{2R_2} \qquad (249)$$

Si aïllem l'amplitud de la tensió de sortida en l'expressió anterior:

$$|\mathbf{V}_o| = \sqrt{P_{R_2} 2R_2} = \sqrt{P_{\max} 2R_2} = \sqrt{1{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 50} = 0{,}04\ \text{V} \qquad (250)$$

Resum

En aquest tema hem estudiat el **règim permanent** de circuits que treballen amb **corrent altern**. Per a simplificar l'anàlisi hem definit el **circuit transformat fasorial**. En el circuit transformat fasorial les tensions i els corrents se substitueixen per fasors i les **resistències, inductors i condensadors se substitueixen per les impedàncies complexes corresponents que són R, $j\omega L$ i $-j/\omega C$, respectivament**.

Hem vist que inductors i condensadors es comporten de manera diferent segons quina sigui la freqüència de treball. En concret, hem vist que els inductors a baixa freqüència es comporten com curtcircuits i els condensadors com circuits oberts. A altes freqüències, tenen el comportament contrari.

Hem estudiat també estructures típiques **ressonants**, base entre altres coses dels circuits de sintonia. Hem vist que a la freqüència de ressonància la combinació sèrie L–C es comporta com un curtcircuit i la combinació paral·lel L–C es comporta com un circuit obert.

Un altre tema inclòs en el mòdul ha estat el del consum de potència en altern. Subministrada una tensió determinada, per exemple, la tensió eficaç de 220 V de la xarxa elèctrica, la **potència activa** que s'acaba finalment aprofitant en el circuit és proporcional al factor de potència. El **factor de potència** es defineix com el cosinus de la fase de la impedància d'entrada del circuit.

En circuits amb impedància d'entrada complexa, a més de potència activa, es consumeix **potència reactiva**. L'energia que finalment es pot transformar en una altra forma d'energia, per exemple calorífica o mecànica, és la potència activa. Una potència reactiva diferent de zero obliga a subministrar més corrent per a poder obtenir la mateixa potència activa.

Hem presentat també un nou component: el **transformador**. El transformador s'utilitza per a elevar o reduir nivells de tensió amb alt rendiment (sense pèrdua de potència). El transformador s'utilitza també per a adaptar impedàncies.

La **condició d'adaptació d'impedàncies** entre un generador i la càrrega és que la impedància de la càrrega sigui igual que la impedància conjugada del generador. Si hi ha adaptació d'impedàncies la font lliura la màxima potència possible a la càrrega. Si generador i càrrega no estan adaptats, es pot utilitzar un transformador (i si fa falta, un condensador o un inductor) per a aconseguir que es compleixi la condició d'adaptació.

Exercicis d'autoavaluació

1. Donat un circuit amb la funció de transferència següent:

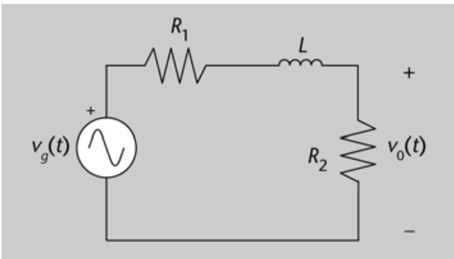
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s}{s^2 + 6s + 9}$$

La resposta en règim permanent sinusoïdal al senyal d'entrada $v_i\,(t) = 2\cos\,(3t + 45°)$ és:
a) $v_0(t) = 2\cos(3t + 45°)$.
b) $v_0(t) = 2\cos(3t)$.
c) $v_0(t) = (1/3)\cos(3t + 45°)$.
d) $v_0(t) = (1/3)\sin(3t + 45°)$.

2. Digueu quina de les afirmacions següents és certa.
a) En una bobina el corrent avança la tensió.
b) En un condensador la tensió avança el corrent.
c) En una resistència la tensió i el corrent estan desfasats un angle igual que la fase de la tensió d'entrada.
d) En un circuit RL la tensió d'entrada està avançada respecte al corrent un angle major que 0 i menor que 90°.

3. En el circuit de la figura, per a $R_1 = R_2 = 50\ \Omega$, $L = 100\ \mu$H i $v_g(t) = \cos(10^6 t)$, la tensió de sortida és (tensió en borns de la resistència)...

Figura 61. Circuit de la qüestió 3 d'autoavaluació



a) $v_o(t) = \frac{0,5}{\sqrt{2}}\cos(10^6 t - 45°)$.

b) $v_o(t) = 0,25\cos(10^6 t - 45°)$.

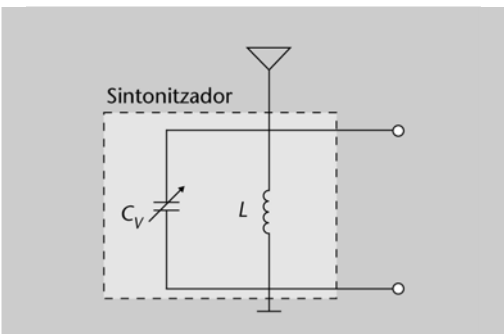
c) $v_o(t) = 0,25\cos(10^6 t + 45°)$.

d) $v_o(t) = \frac{0,5}{\sqrt{2}}\cos(10^6 t + 45°)$.

4. Es pot afirmar que:
a) Una bobina és equivalent a un curtcircuit a freqüències molt baixes i a un circuit obert a freqüències molt altes.
b) Si la tensió retarda el corrent el circuit té un comportament capacitatiu.
c) Si la reactància és 0, tensió i corrent estan en fase.
d) Totes les afirmacions anteriors són certes.

5. Per a $L = 33$ mH, $C_v = 10$ nF. Quina és la freqüència de ressonància del circuit de sintonia següent?

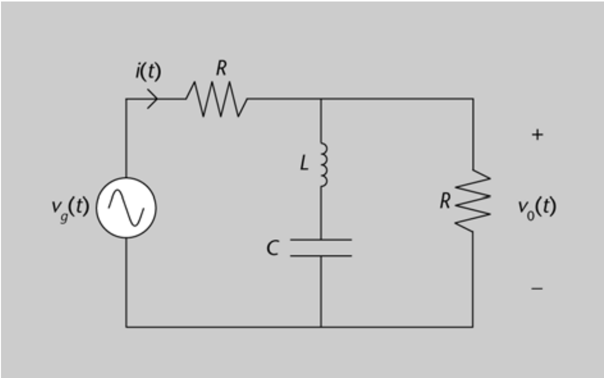
Figura 62. Circuit de la qüestió 5 d'autoavaluació



a) 55 kHz.
b) 181 kHz.
c) 8,7 kHz.
d) 28,8 kHz.

6. Per al circuit de la figura per a $L = 1/4$ mH i $C = 1/4$ nF (valors normalitzats) podem afirmar que en RPS l'entrada: $x(t) = \cos(4 \cdot 10^6 t) + \sin(16 \cdot 10^6 t)$ produirà la sortida:

Figura 63. Circuit de la qüestió 6 d'autoavaluació



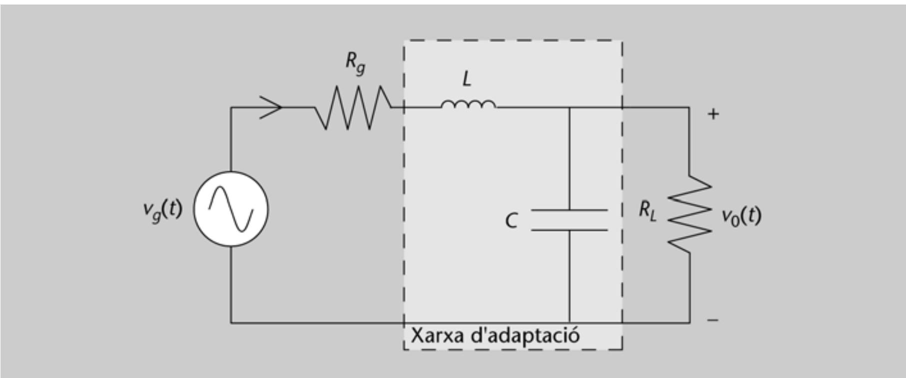
a) $y(\mathrm{t}) = A\cos(4 \cdot 10^6 t + \phi) + B\cos(16 \cdot 10^6 t + \theta)$, A i B ambdues diferents de zero.
b) $y(\mathrm{t}) = A\cos(16 \cdot 10^6 t + \theta)$, A diferent de zero.
c) $y(\mathrm{t}) = A\cos(4 \cdot 10^6 t + \phi)$, A diferent de zero.
d) Cap de les anteriors.

7. Una xarxa monofàsica de 220 V i 50 Hz alimenta una càrrega que necessita 2,5 kW de potència. Quina de les afirmacions següents és certa?
a) Si el factor de potència és 0,6, la xarxa ha de proporcionar 1,4 kW.
b) Si el factor de potència és 0,6, la xarxa ha de proporcionar 3,1 kW.
c) La càrrega necessita un corrent de 18,9 A si el factor de potència és 1 i d'11,4 A si el factor de potència és 0,6.
d) La càrrega necessita un corrent d'11,4 A si el factor de potència és 1 i de 18,9 A si el factor de potència és 0,6.

8) Una càrrega inductiva de mòdul 20 Ω amb factor de potència 0,6 alimentada amb una tensió eficaç de 220 V i una freqüència de 220 V i una freqüència de 50 Hz consumeix...
a) 1.452 W i –1.936 VAr.
b)1.452 W i 1.936 VAr.
c) 726 W i –968 VAr.
d) 726 W i 968 VAr.

9) En el circuit de la figura $R_g = 50\ \Omega$, $R_L = 10\ \Omega$, $C = 10$ nF i $L = 6\ \mu$H. Considerant una tensió d'entrada de 10 V de pic i pulsació de $\omega = 10$ Mrad/s, indiqueu quina de les afirmacions següents és correcta.

Figura 64. Circuit de la qüestió 9 d'autoavaluació

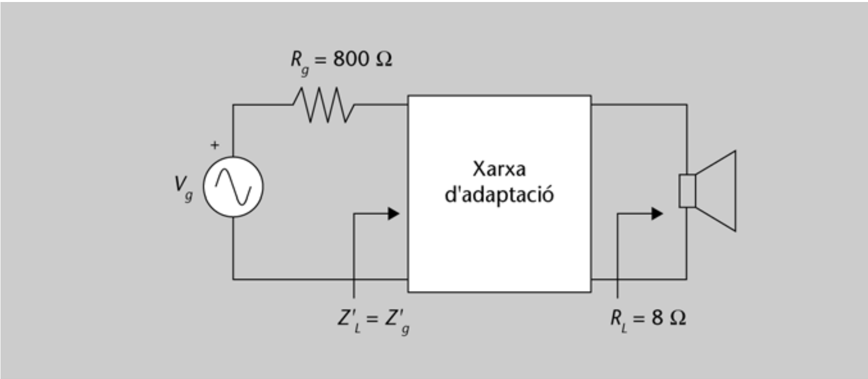


a) En condicions d'adaptació, la potència mitjana transferida a la càrrega R_L és d'1 W, però a la pulsació de $\omega = 10$ Mrad/s no hi ha adaptació.
b) En condicions d'adaptació, la potència mitjana transferida a la càrrega R_L és de 0,5 W, però a la pulsació de $\omega = 10$ Mrad/s no hi ha adaptació.

c) En condicions d'adaptació, la potència mitjana transferida a la càrrega R_L és de 0,25 W, però a la pulsació de ω = 10 Mrad/s no hi ha adaptació.
d) Hi ha adaptació d'impedàncies i la potència mitjana transferida a la càrrega R_L és de 0,5 W.

10) Volem adaptar mitjançant un transformador un amplificador d'àudio que presenta una resistència de 800 Ω a un altaveu de resistència d'entrada de 8 Ω. La relació de transformació ha de ser de...

Figura 65. Circuit de la qüestió 10 d'autoavaluació



a) 1:0,01 = 100:1.
b) 1:100.
c) 1:0,1 = 10:1.
d) 1:10.

Solucionari

1. c, **2.** d ,**3.** a , **4.** d , **5.** c , **6.** b , **7.** d , **8.** b , **9.** c , **10.** c.

Glossari

AC *m Vegeu* **corrent altern**.

admitància complexa *f* En RPS, el quocient entre els fasors corrent i tensió. Coincideix amb l'invers de la impedància complexa.
sin. **admitància en AC**

admitància en AC *f Vegeu* **admitància complexa**.

amplificació *f* Factor pel qual es multiplica l'amplitud de l'entrada per a obtenir l'amplitud de la sortida.
sin. **guany**

amplitud *f* Per a un corrent o tensió sinusoïdal és el valor màxim de corrent o tensió.
sin. **valor de pic**

circuit ressonant *m* Circuit dissenyat per a operar a la freqüència de ressonància.

circuit transformat fasorial *m* Circuit equivalent per a l'anàlisi directa en RPS.

comportament asimptòtic dels elements en RPS *m* Comportament dels elements de circuit a molt baixa i molt alta freqüència.

conductància *f* Part real de l'admitància complexa.

corrent altern *m* Corrent variable en el qual les magnituds associades (força electromotriu, tensió i intensitat de corrent) canvien de magnitud i de sentit periòdicament.
sigla **AC**

desfasament *m* El canvi que introdueix un circuit en la fase de la sortida respecte a la fase de l'entrada.

diagrama fasorial *m* Representació en el pla complex de fasors.

factor de potència *m* Rendiment que s'obté de la potència aparent subministrada a un circuit.

fasor *m* Nombre complex associat a una tensió o corrent sinusoïdal el mòdul del qual és l'amplitud de la tensió o corrent i la fase del qual és la fase de la tensió o corrent. A vegades, en lloc del valor d'amplitud es pren el valor eficaç per al mòdul del fasor.

freqüència *f* Per a un senyal periòdic, és el nombre de cicles per unitat de temps.

freqüència de ressonància *f* En RPS, freqüència a la qual s'anul·la la part imaginària de la impedància complexa, o bé a la qual s'anul·la la part imaginària de l'admitància complexa.

guany *m Vegeu* **amplificació**.

impedància complexa *f* En RPS, el quocient entre els fasors tensió i corrent. Coincideix amb la impedància $Z(s)$ particularitzada per a $s = j\omega$, $Z(j\omega)$.
sin. **impedància en AC**

impedància en AC *f Vegeu* **impedància complexa**.

intensitat eficaç *f* Per a un corrent altern, és la intensitat d'un corrent continu (DC) que, passant pel mateix conductor durant el mateix temps, produiria la mateixa quantitat de calor.

període *m* Per a un senyal periòdic, és la durada de cada cicle.

potència activa *f Vegeu* **potència mitjana**.

potència aparent *f* La potència que, vista des de fora, s'aporta al circuit.

potència complexa *f* Nombre complex la part real i la part complexa del qual són, respectivament, la potència activa i reactiva consumida en una impedància o circuit.

potència mitjana *f* En RPS, potència dissipada en un circuit de mitjana durant un període del senyal d'entrada. És una mesura de l'energia elèctrica mitjana que es pot convertir en una altra forma d'energia: mecànica, calorífica, etc.
sin. **potència activa**

potència reactiva *f* Mesura de l'energia elèctrica successivament emmagatzemada i tornada per condensadors i inductors. A diferència de la potència mitjana o activa, no es podrà convertir en cap altra forma d'energia com, per exemple, calorífica o mecànica.

primari *m* En un transformador, bobina per la qual circula el corrent altern, la tensió del qual es vol modificar.

reactància *f* Part complexa de la impedància complexa.

relació de transformació *f* En un transformador, quocient entre el nombre d'espires en primari i secundari.

resistència *f* Part real de la impedància complexa.

secundari *m* En un transformador, bobina on es connecta la càrrega.

susceptància *f* Part imaginària de l'admitància complexa.

transformador *m* Dispositiu que s'usa per a elevar o reduir el nivell d'una tensió elèctrica.

triangle de potències *m* Representació de la potència complexa, l'activa i la reactiva en el pla complex.

valor de pic *m* *Vegeu* **amplitud**.

xarxa d'adaptació *f* Circuit dissenyat per a aconseguir adaptació d'impedàncies entre un generador i una càrrega.

Bibliografia

Bertrán, E.; Montoro, G. (2000). *Circuitos y Sistemas Lineales*. *Curso de Laboratorio*. Barcelona: Edicions UPC.

Hayt, W. H.; Kemmerly J. E. (1993). *Engeenering Circuit Analysis*. Mèxic DF: McGraw-Hill.

Huelsman, L. P. (1991). *Basic Circuit Theory* (3a. ed.). Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Ruiz Vasallo, F. (1991). *Componentes electrónicos*. *Enciclopedia de la radio y la televisión*. CEAC.

Thomas, R. E.; Rosa, A. J. (2002). *Circuitos y señales: introducción a los circuitos lineales y de acoplamiento*. Barcelona: Reverté.

Thomas, R. E.; Rosa, A. J. (2004). *The analysis and design of linear circuits*. *Laplace early* (4a. ed.). Upper Saddle River: John Wiley & Sons.