

# Àlgebra

Gerard Fortuny Anguera  
Alfonsa García López  
Àngel Alejandro Juan Pérez  
Àgata Lapedriza Garcia  
Núria Parés Mariné  
Francesc Pozo Montero  
Cristina Steegmann Pascual  
Yolanda Vidal Seguí

Coordinació a càrrec de:  
M. Antonia Huertas Sánchez  
Àgata Lapedriza Garcia  
Carles Serrat Piè

PID\_00151928

Material docent de la UOC



Universitat Oberta  
de Catalunya

[www.uoc.edu](http://www.uoc.edu)

**M. Antonia Huertas Sánchez**

Doctora en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona (1994). Ha estat professora agregada del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya i professora associada del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. Des de 2002, és professora dels Estudis d'Informàtica i Multimèdia de la UOC.

**Àgata Lapedriza Garcia**

Llicenciada en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona i doctora en Informàtica per la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB). Ha estat professora a la UAB de 2003 a 2008 i, arran de la seva experiència professional, ha publicat diversos articles sobre innovació docent en l'àmbit universitari. Des de 2008 és professora dels Estudis d'Informàtica, Multimèdia i Telecomunicació de la UOC, on coordina assignatures de Matemàtiques i Informàtica. Com a investigadora, la seva línia de recerca se centra en el reconeixement facial i l'aprenentatge artificial, dins de l'àmbit de la intel·ligència artificial.

**Carles Serrat Piè**

Doctor en Matemàtiques per la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) (2001) i professor titular d'universitat del Departament de Matemàtica Aplicada I de la UPC. Col·labora amb la UOC des de 1996, com a consultor de Matemàtiques en diferents titulacions de grau i màster. Coautor de diverses publicacions docents de la UPC i de la UOC. La seva línia de recerca se centra en l'àrea de l'estadística, concretament en l'anàlisi de la supervivència, tant des del punt de vista metodològic com aplicat.

**Gerard Fortuny Anguera**

Llicenciat en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona el 1998, ha cursat estudis de tercer cicle a la Universitat Politècnica de Catalunya. Entre 2000 i 2003, ha estat membre del cos de professors d'ensenyament secundari i col·laborador de la UOC. Des de l'any 2003, és professor titular d'escola universitària a la Universitat Rovira i Virgili.

**Alfonsa García López**

Doctora en Matemàtiques per la Universitat Complutense de Madrid. És catedràtica de l'Escola Universitària d'Informàtica de la Universitat Politècnica de Madrid en l'Àrea de Matemàtica Aplicada. Va ser pionera en l'ús, en la docència universitària, dels sistemes informàtics de càlcul matemàtic com Derive i Maple, i és autora d'algunes publicacions sobre aquests sistemes. També ha publicat altres llibres de text i diversos articles d'investigació.

**Ángel Alejandro Juan Pérez**

Llicenciat en Matemàtiques per la Universitat de València, màster en Tecnologies de la Informació per la UOC i doctor en Enginyeria Industrial per la UNED. Ha cursat postgraus a les universitats de Harvard, Alacant i València. Ha estat professor i director acadèmic en una *high school* de Boston, professor associat a la Universitat d'Alacant i professor coordinador a la UOC. Des de l'any 2003, és professor associat d'Estadística aplicada a la Universitat Politècnica de Catalunya i professor d'Informàtica en CFGS.

**Núria Parés Mariné**

Llicenciada en Matemàtiques per la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) (1999) i doctora en Matemàtica Aplicada per la UPC (2005). Des de l'any 2000 és professora del Departament de Matemàtica Aplicada III de la UPC, actualment com a professora agregada. Com a membre del Centre Específic de Recerca LaCàN ([www-lacan.upc.edu](http://www-lacan.upc.edu)) la seva recerca se centra en els mètodes numèrics en ciències aplicades i enginyeria. També és membre del Grup d'Innovació Matemàtica E-learning (GIMEL - [biblioteca.upc.edu/gimel](http://biblioteca.upc.edu/gimel)), amb el qual ha participat en nombrosos projectes d'innovació docent.

**Francesc Pozo Montero**

Llicenciat en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona (2000) i doctor en Matemàtica Aplicada per la Universitat Politècnica de Catalunya (2005). Ha estat professor associat a la Universitat Autònoma de Barcelona, i professor associat, col·laborador i actualment professor agregat a la Universitat Politècnica de Catalunya. Cofundador del Grup d'Innovació Matemàtica E-learning (GIMEL) i responsable de diversos projectes d'innovació docent i autor de diverses publicacions. Membre del grup de recerca consolidat CoDALab ([www-ma3.upc.es/codalab](http://www-ma3.upc.es/codalab)), la seva recerca se centra en la teoria de control i les seves aplicacions a l'enginyeria mecànica i civil.

**Cristina Steegmann Pascual**

Llicenciada en Matemàtiques per la Universitat Autònoma de Barcelona (1993). Actualment, treballa en la seva tesi doctoral en l'àmbit de l'*e-learning* dins del programa de doctorat sobre la Societat de la Informació i el Coneixement de la UOC. Des de 1993, és funcionària de carrera del cos de professors d'ensenyament secundari, en la especialitat de Matemàtiques, tasca que compagina amb la de professora consultora de la UOC. Així mateix, ha publicat diversos articles sobre ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques.

**Yolanda Vidal Seguí**

Llicenciada en Matemàtiques (1999) i doctora en Matemàtica Aplicada per la Universitat Politècnica de Catalunya (2005). Ha estat professora associada, col·laboradora, i actualment és professora agregada del Departament de Matemàtica Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya. És coautora de diverses publicacions docents de la UPC i ha participat en nombrosos projectes d'innovació docent en l'àmbit de l'aprenentatge virtual (*e-learning*). La seva línia de recerca se centra en la teoria del control i en mètodes numèrics en ciències aplicades i enginyeria.

Tercera edició: febrer 2010

© Gerard Fortuny Anguera, Alfonsa García López, Ángel Alejandro Juan Pérez, Àgata Lapedriza Garcia, Núria Parés Mariné, Francesc Pozo Montero, Cristina Steegmann Pascual, Yolanda Vidal Seguí

Tots els drets reservats

© d'aquesta edició, FUOC, 2010

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona

Disseny: Manel Andreu

Material realitzat per Eureka Media, SL

ISBN: 978-84-692-9408-6

Dipòsit legal: B-3.977-2010

## Introducció

Aquest material didàctic està pensat per a ser utilitzat en assignatures del Grau d'Enginyeria Informàtica, el Grau de Tecnologies de Telecomunicació, o altres enginyeries. Pretén ser, d'una banda, un pont cap a coneixements matemàtics de nivell preuniversitari i, d'altra banda, abastar els temes bàsics d'àlgebra que són un instrument per a altres assignatures específiques de l'enginyeria informàtica.

Els continguts es divideixen en dos grups: els nombres (mòdul 1) i l'àlgebra lineal i la geometria (mòduls 2 a 5). Atès que formen part d'una primera assignatura universitària de matemàtiques, s'hi inclouen continguts que formen part del currículum de secundària per a revisar-los i ampliar-los i també d'altres totalment nous.

El primer mòdul està dedicat als nombres. En primer lloc s'hi revisen conceptes i propietats importants dels nombres naturals amb aplicació a la informàtica. En particular, s'hi estudia el principi d'inducció. La segona part del mòdul està dedicada als nombres complexos. Aquest tipus de nombres, que es fan servir per a la modelització matemàtica de processos físics, els utilitzareu en altres assignatures relacionades amb la física i el tractament de senyals.

Els mòduls 2, 3 i 4 es dediquen a revisar i ampliar les eines d'àlgebra lineal i geometria utilitzades especialment per a la resolució de sistemes lineals i la seva interpretació geomètrica. S'hi introdueixen els conceptes nous de les aplicacions lineals i de diagonalització de matrius, i també els de vectors, ortogonalitat i projecció, d'aplicació en la informàtica gràfica, i en general quan calgui treballar amb canvis de base i projeccions.

El cinquè mòdul tracta de les transformacions geomètriques més importants, que tenen una evident relació amb la informàtica gràfica.

Els diferents mòduls han estat elaborats perquè els estudiants se centrin a aprendre els conceptes matemàtics i la manera d'aplicar-los a la resolució de problemes. Per això, s'ha volgut donar un enfocament eminentment conceptual i pràctic, apostant per l'ús intensiu del programari matemàtic existent i per l'aplicació dels conceptes a la resolució de problemes d'àmbits relacionats amb assignatures dels estudis d'Enginyeria. Al mateix temps, s'ha pretès mantenir el rigor característic de les matemàtiques, que és per ell mateix un valor afegit, encara que mirant d'evitar l'excés d'algorísmica i de formalisme que puguin fer inviable un text per a estudis tècnics.

Els mòduls tenen estructura similar, encara que alguns d'aquests apartats poden no aparèixer:

- Coneixements previs aconsellables per a un bon aprofitament de l'aprenentatge del mòdul i exercicis perquè els estudiants puguin comprovar el seu grau d'adquisició.
- Exemple introductori al tema del mòdul. Amb aquest element es pretén insistir en l'enfocament aplicat d'aquest material.
- Exposició dels conceptes i les seves aplicacions, i també l'ús de programari matemàtic com a ajuda a l'aprenentatge, i nombrosos exemples que els il·lustren. En alguns mòduls també hi ha activitats suggerides que inclouen la solució al final.
- Resum amb els conceptes més significatius del mòdul.
- Exercicis d'autoavaluació de l'aprenentatge dels conceptes fonamentals.
- Solucionari dels exercicis d'autoavaluació.
- Glossari de termes.
- Bibliografia recomanada.

## Objectius

Aquests mòduls didàctics formen part dels recursos docents d'una assignatura introductòria d'àlgebra per a enginyeries. Per tant, els objectius perseguits s'emmarquen en els mateixos del pla docent de l'assignatura corresponent; en particular, es pretén assolir els objectius següents:

1. Revisar i completar els conceptes sobre els nombres naturals i les seves propietats. Conèixer el principi d'inducció i la seva aplicació a la informàtica.
2. Introduir el conjunt dels nombres complexos i entendre'n la utilitat. Conèixer com es representen i aprendre a manipular-los.
3. Revisar i completar els conceptes bàsics d'àlgebra i geometria (matrius, determinants, vectors, sistemes d'equacions).
4. Introduir alguns temes nous d'àlgebra lineal com les aplicacions lineals i la diagonalització de matrius.
5. Introduir alguns temes nous de geometria com l'ortogonalitat i les transformacions geomètriques.
6. Conèixer les aplicacions dels conceptes matemàtics tractats amb diferents exemples.
7. Aprendre a utilitzar el programari matemàtic com a part integrant de les matemàtiques per a enginyeries.

## Continguts

Mòdul didàctic 1

### **Els nombres**

Alfonsa García López, Àgata Lapredriza Garcia, Núria Parés Mariné, Francesc Pozo Montero, Yolanda Vidal Seguí

1. L'origen dels nombres
2. Els nombres naturals: el principi d'inducció
3. Els nombres complexos

Mòdul didàctic 2

### **Elements d'àlgebra lineal i geometria**

Gerard Fortuny Anguera, Ángel Alejandro Juan Pérez

1. Exemple introductori
2. Espais vectorials
3. Matrius
4. Determinants
5. Equacions de rectes i plans
6. Producte escalar i ortogonalitat

Mòdul didàctic 3

### **Sistemes d'equacions lineals**

Ángel Alejandro Juan Pérez, Cristina Steegmann Pascual

1. Exemple introductori
2. Sistemes d'equacions lineals (SEL)
3. Expressió matricial d'un SEL
4. Discussió de SEL
5. Sistemes lineals homogenis
6. Resolució de SEL per Gauss
7. Sistemes de Cramer. Resolució de SEL per Cramer
8. Interpretació geomètrica dels SEL

Mòdul didàctic 4

### **Aplicacions lineals**

Ángel Alejandro Juan Pérez, Cristina Steegmann Pascual

1. Exemple introductori
2. Concepte d'aplicació lineal
3. Matriu associada a una aplicació lineal
4. Nucli i imatge d'una aplicació lineal
5. Morfismes i endomorfismes
6. Canvis de base en una aplicació lineal
7. Vectors i valors propis
8. Diagonalització d'endomorfismes

Mòdul didàctic 5

### **Transformacions geomètriques**

Ángel Alejandro Juan Pérez, Cristina Steegmann Pascual

1. Exemple introductori
2. Translació en 2D
3. Rotació en 2D
4. Escalatge en 2D
5. Notació matricial eficient
6. Composició de transformacions
7. Transformacions afins en 2D
8. Transformacions geomètriques en 3D

