

Transformacions geomètriques

Translació, rotació i escalatge

Ángel Alejandro Juan Pérez
Cristina Steegmann Pascual

PID_00151930

Índex

Introducció	5
Objectius	6
Coneixements previs	7
1. Exemple introductor	9
2. Translació en 2D	10
2.1. Translació d'un punt	10
2.2. Translació d'objectes	12
3. Rotació en 2D	14
3.1. Rotació d'un punt al voltant de l'origen de coordenades	14
3.2. Rotació d'un objecte al voltant de l'origen de coordenades	17
3.3. Rotació d'un objecte al voltant d'un punt de rotació genèric	18
4. Escalatge en 2D	21
4.1. Escalatge d'un punt a partir de l'origen de coordenades	21
4.2. Escalatge d'un objecte a partir de l'origen de coordenades	22
4.3. Escalatge d'un objecte a partir d'un punt fix genèric	24
5. Notació matricial eficient	26
6. Composició de transformacions	31
7. Transformacions afins en 2D	34
8. Transformacions geomètriques en 3D	35
8.1. Translació de punts i objectes	35
8.2. Rotació de punts i objectes	37
8.3. Escalatge de punts i objectes	40
Resum	43
Exercicis d'autoavaluació	44
Solucionari	46
Glossari	64
Bibliografia	64

Introducció

La translació, l'escalatge i la rotació són transformacions geomètriques emprades amb freqüència en el camp de la informàtica gràfica. Aquestes transformacions tenen un paper fonamental en la construcció i edició de tot tipus d'imatges digitals. Per això, no és estrany que opcions com la rotació o el *zoom*, habituals en qualsevol programari CAD o d'edició d'imatges, es basin en transformacions geomètriques. Altres aplicacions d'aquestes eines matemàtiques estan relacionades amb la creació d'objectes animats, tant si és en el camp dels videojocs (moviments de "càmera" característics de jocs com *Half Life 2*) com en el camp científicotècnic, a fi d'estudiar les seves propietats cinemàtiques i dinàmiques.

És important notar que la transformació d'un punt representa el nucli central en qualsevol transformació geomètrica. Això es deu al fet que el punt és l'element geomètric bàsic de qualsevol objecte 2D i 3D. Així, per exemple, un segment de línia recta unívocament el determinen els seus punts inicial i final. Per la seva banda, també les corbes, superfícies i sòlids es poden representar (de manera exacta o aproximada, segons el cas) mitjançant una col·lecció de punts. D'aquesta manera, la transformació d'un conjunt de punts dona com a resultat la transformació d'una línia, d'una corba, d'una superfície o, fins i tot, d'un sòlid.

En aquest mòdul s'explicarà la relació existent entre la teoria de matrius i les transformacions geomètriques esmentades, i es mostrarà com és possible aplicar translacions, escalatges i rotacions a objectes en 2D i 3D, realitzant productes de matrius.

Objectius

Els objectius docents que es pretenen aconseguir amb aquest mòdul són els següents:

- 1.** Entendre els conceptes geomètrics de translació, escalatge i rotació, tant en 2D com en 3D.
- 2.** Comprendre com la teoria de matrius permet formalitzar els conceptes anteriors.
- 3.** Aprendre a realitzar, d'una manera eficaç, transformacions geomètriques mitjançant operacions amb matrius.
- 4.** Saber que la translació, la rotació i l'escalatge són casos particulars de transformacions afins.
- 5.** Descobrir com el programari matemàtic en general pot ser útil per a automatitzar els càlculs matricials i representar les transformacions.

Coneixements previs

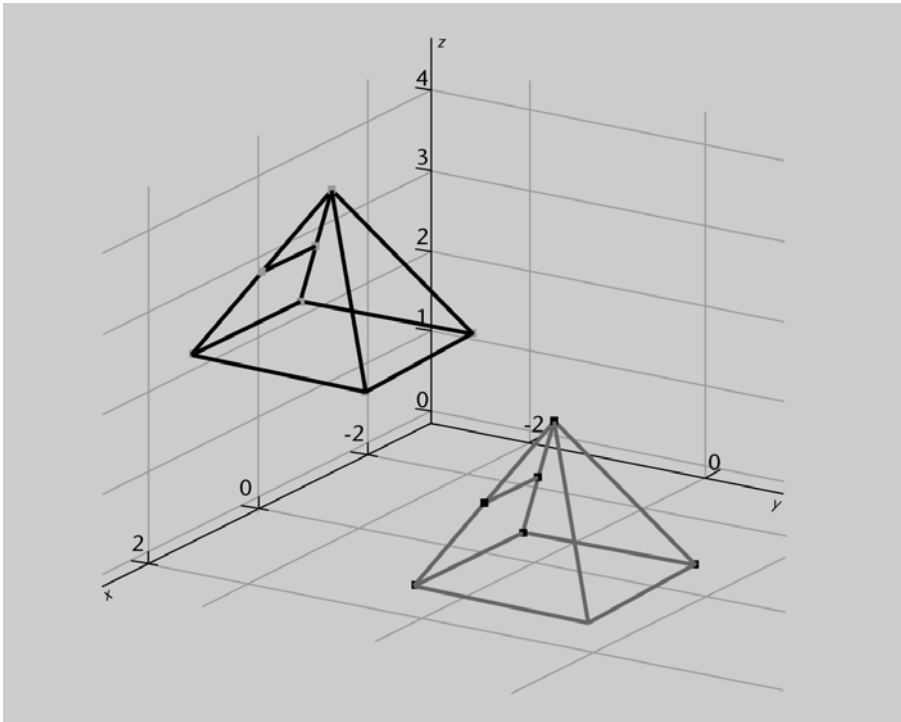
Aquest mòdul es fonamenta en els conceptes i mètodes desenvolupats en els mòduls “Elements d’àlgebra lineal i geometria” i “Sistemes d’equacions lineals”. Tots dos mòduls són, per tant, d’obligada lectura prèvia.

1. Exemple introductori

En informàtica gràfica apareix amb freqüència la necessitat d'aplicar transformacions geomètriques a un objecte determinat pels seus vèrtexs.

Així, per exemple, donat un políedre en 3D definit pels seus vèrtexs, podríem estar interessats a trobar les noves coordenades d'aquests vèrtexs després d'aplicar una combinació de translacions, rotacions i escalatges (en qualsevol ordre), ja que a partir d'aquestes noves coordenades ens serà possible “redibuir” l'objecte a la pantalla.

Figura 1



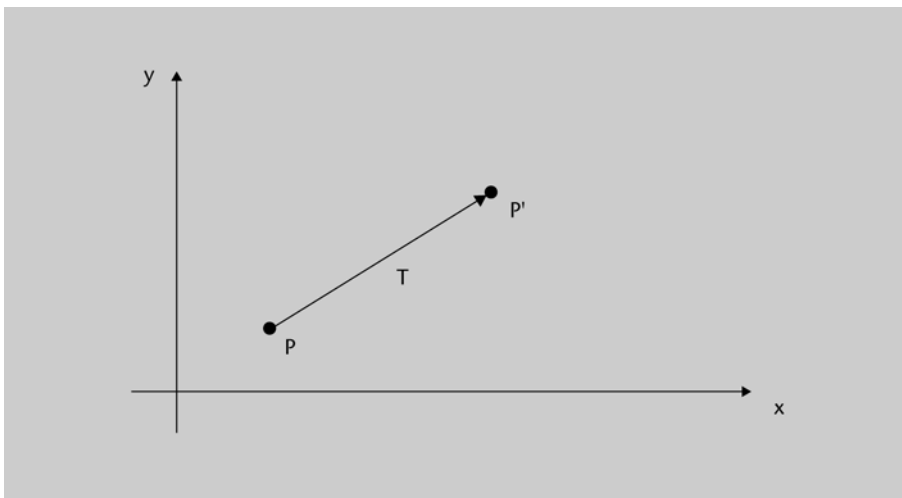
En aquest mòdul mostrarem com la teoria de matrius ens permet “recalcular” amb relativa facilitat i eficiència les noves coordenades dels vèrtexs que defineixen l'objecte i, per tant, facilita la “dinamització” d'objectes a la pantalla (els amants dels videojocs han d'agradar moltes coses, per tant, a l'àlgebra lineal).

2. Translació en 2D

2.1. Translació d'un punt

En aplicar una **translació** sobre un punt P de coordenades (x, y) , la posició d'aquest es modifica, seguint una trajectòria recta, fins a convertir-se en el punt P' de coordenades (x', y') (figura 2).

Figura 2. Translació d'un punt en 2D



Així, per a traslladar un punt P a la nova posició P' , s'hauran d'afegir **distàncies de translació**, t_x i t_y a les coordenades inicials, *i. e.*:

$$x' = x + t_x \quad y' = y + t_y \quad (1)$$

o, dit d'una altra manera:

$$(x', y') = (x, y) + (t_x, t_y) \quad (2)$$

El vector (t_x, t_y) s'anomena **vector de translació**.

Observeu que, emprant notació matricial, es pot expressar la translació d'un punt com a:

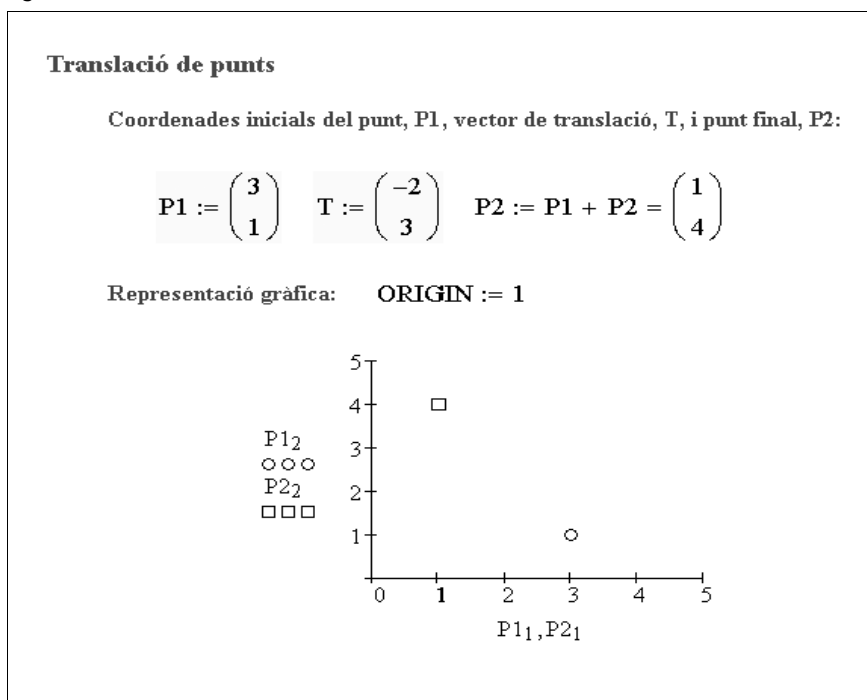
$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{T} \quad (3)$$

on: $\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ i $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$.

Exemple 1. Translació d'un punt en 2D

El resultat de traslladar el punt $P1(3, 1)$ amb vector de translació $T = (-2, 3)$ és el punt $P2 = (3, 1) + (-2, 3) = (1, 4)$.

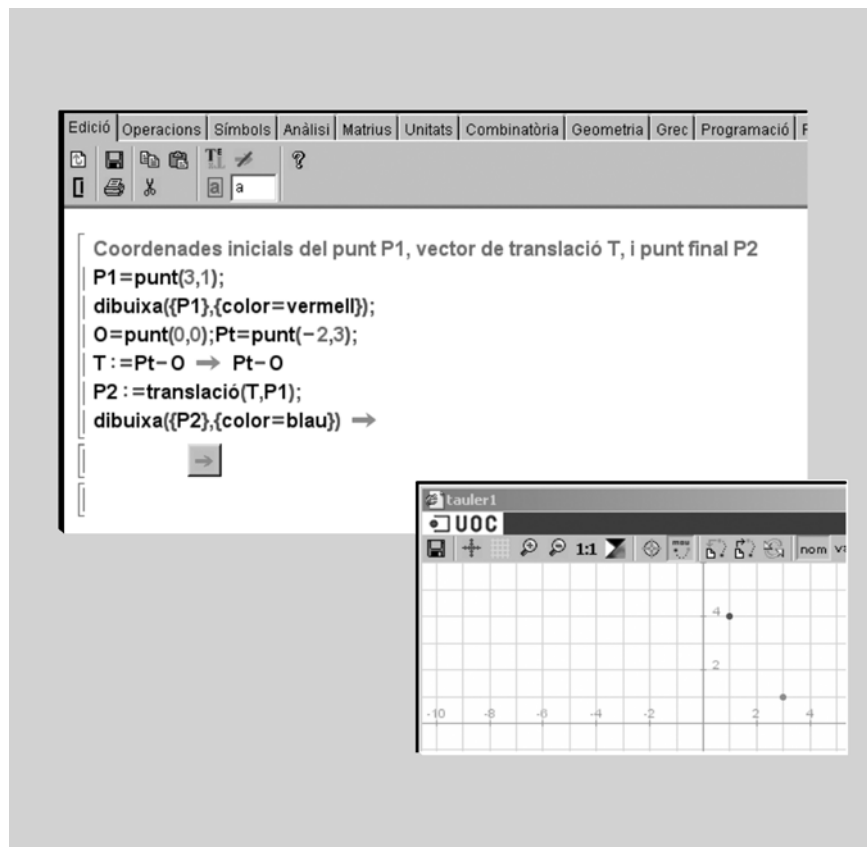
Figura 3



Comentari

En aquest exemple (figura 3) s'empra el programa Mathcad per a representar la translació del punt $(3, 1)$ aplicant un vector de translació de components $(-2, 3)$, amb la qual cosa el resultat serà el punt de coordenades $(1, 4)$.

Figura 4

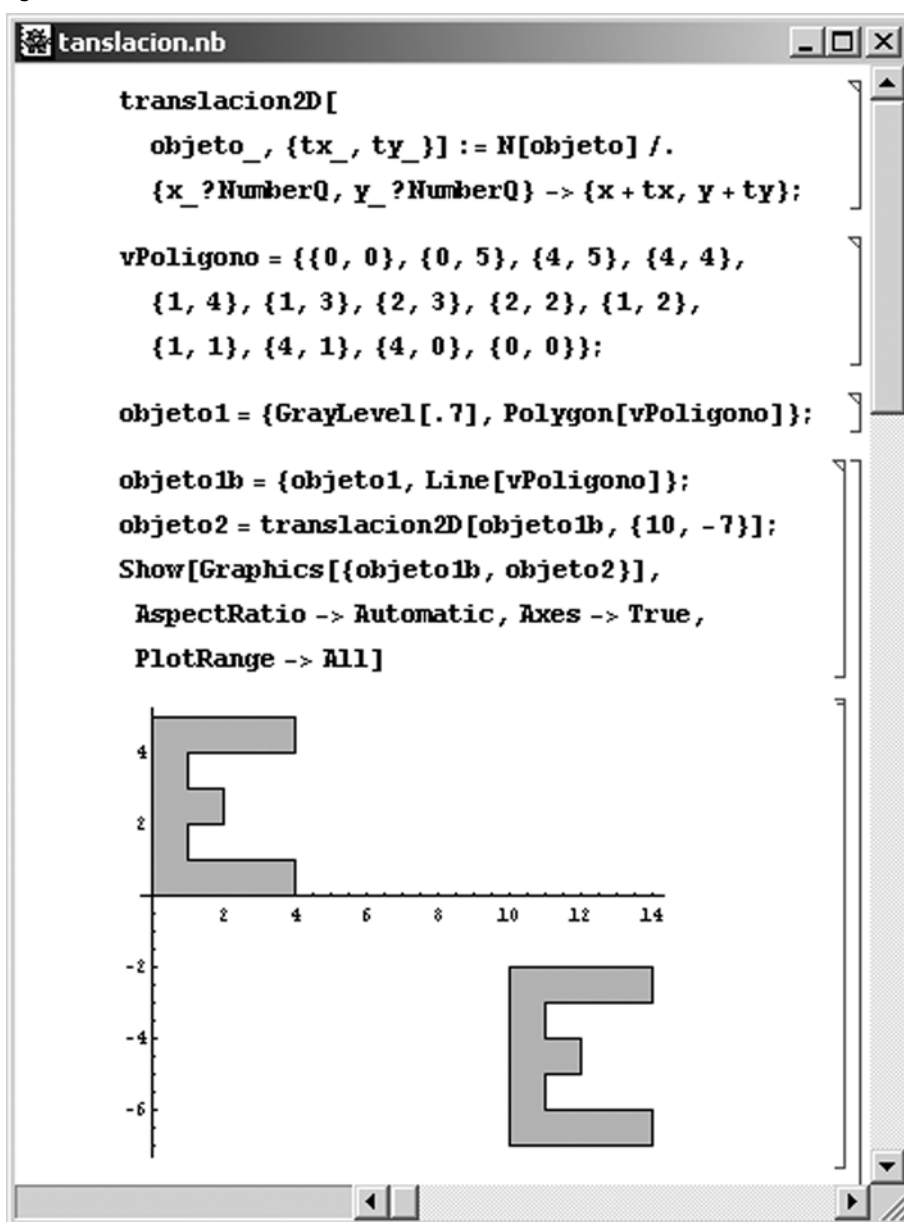


L'exemple anterior també es pot realitzar utilitzant el programa Wiris, tal com es mostra a la figura 4.

2.2. Translació d'objectes

La translació és una transformació que mou objectes sense causar-los cap deformació, atès que cada punt de l'objecte és traslladat en la mateixa direcció i a la mateixa distància. Per a traslladar un objecte, n'hi ha prou d'aplicar les equacions (3) de translació als "punts clau" que el defineixen. Així, per exemple, per a traslladar un segment rectilini n'hi ha prou de traslladar els dos extrems que el delimiten i, posteriorment, reconstruir el nou segment a partir dels dos nous extrems. Anàlogament, els polígons es poden traslladar solament traslladant cada un dels seus vèrtexs i, posteriorment, reconstruir el polígon a partir dels nous vèrtexs (figura 5).

Figura 5

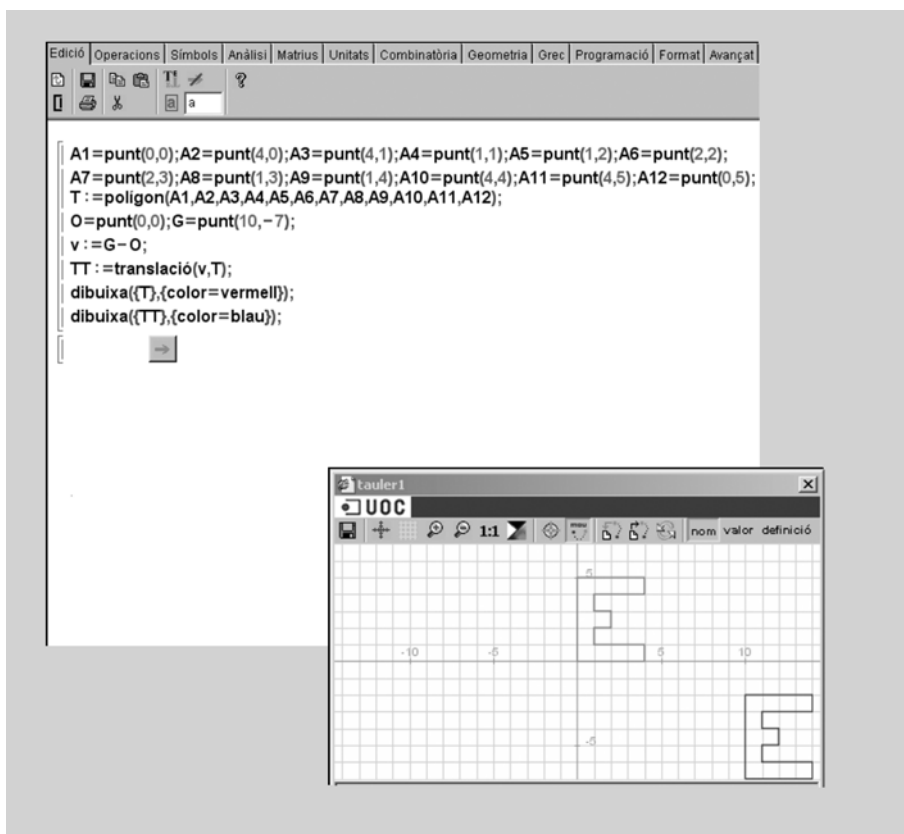


Comentari

A la figura 5 s'ha emprat el programari Mathematica per a definir una funció, translacion2D, que permet traslladar polígons definits pels seus vèrtexs.

En aquest cas s'ha aplicat una translació de vector (10, -7) a un objecte en forma de E.

Figura 6

**Comentari**

A la figura 6, es mostra la translació anterior emprant aquesta vegada el programa Wiris.

Estratègies similars es poden emprar per a traslladar objectes amb costats curvilinis: per a traslladar una circumferència, per exemple, n'hi ha prou d'aplicar les equacions de translació al seu punt central i, a continuació, reconstruir-la usant el seu radi.

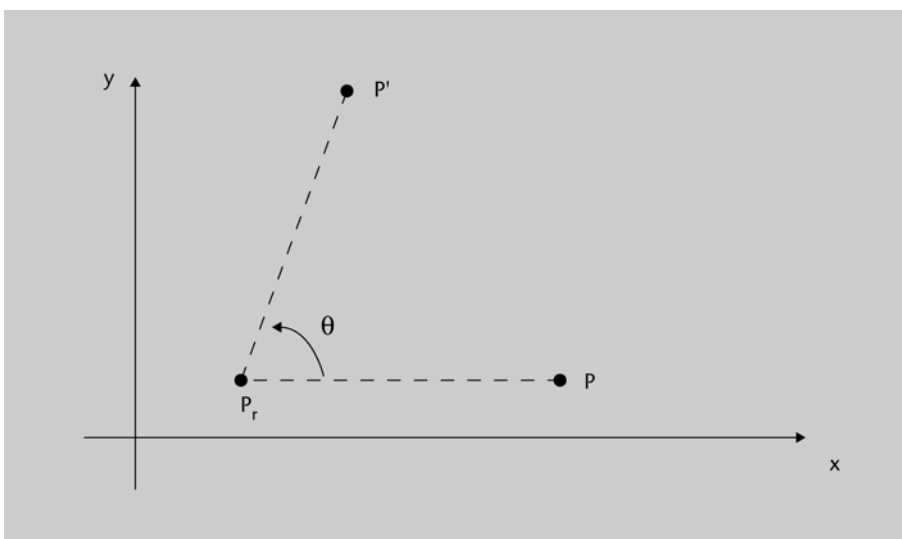
En general, per a traslladar qualsevol objecte n'hi haurà prou d'identificar els punts i paràmetres geomètrics que el defineixen, traslladar els punts identificats i, després, reconstruir l'objecte a partir dels punts traslladats i dels paràmetres geomètrics.

3. Rotació en 2D

3.1. Rotació d'un punt al voltant de l'origen de coordenades

En aplicar una **rotació** sobre un punt P de coordenades (x, y) , la posició d'aquest es modifica, seguint una trajectòria circular en el pla xy , fins a convertir-se en el punt P' de coordenades (x', y') (figura 7).

Figura 7. Rotació d'un punt en 2D

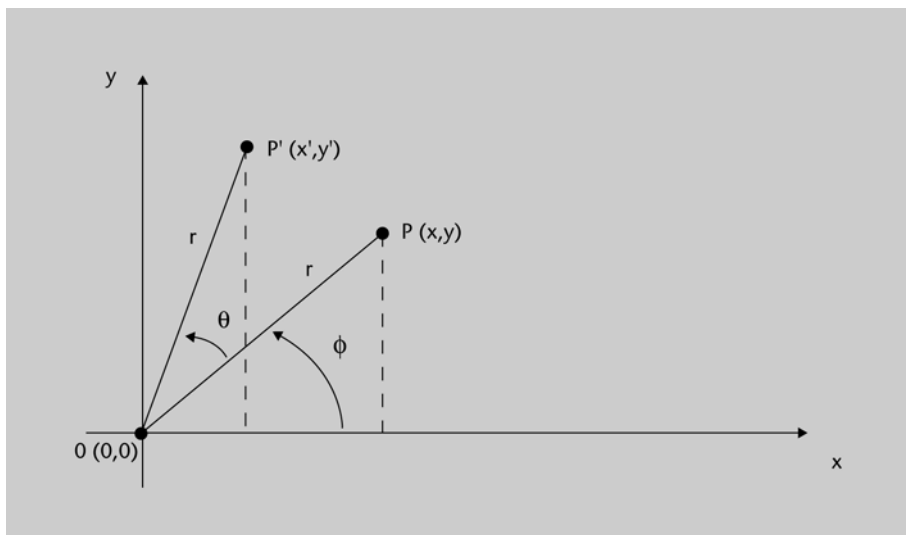


Per a generar una rotació, s'ha d'especificar un **angle de rotació** θ i la posició (x_r, y_r) del **punt de rotació** o **punt pivot**, P_r , a partir del qual el punt P és rotat. Inicialment, se suposarà que el punt de rotació és l'origen de coordenades, és a dir, el punt $(0, 0)$.

L'angle de rotació, θ , pot prendre valors reals tant positius com negatius. Quan θ és positiu, la rotació es produeix en direcció oposada al moviment de les agulles del rellotge; al contrari, quan θ és negatiu, la rotació es produeix en el sentit de les agulles del rellotge.

La figura 8 mostra les coordenades dels punts P i P' , l'angle de rotació, θ , l'angle de posició inicial respecte a l'eix y , ϕ , i també la distància r entre el punt P i l'origen de coordenades (distància que es manté constant durant la rotació).

Figura 8. Rotació d'un punt al voltant de l'origen



Emprant identitats trigonomètriques, és possible expressar les coordenades transformades, (x', y') , en funció dels angles θ i ϕ :

$$x' = r \cos(\phi + \theta) = r \cos\phi \cos\theta - r \sin\phi \sin\theta$$

$$y' = r \sin(\phi + \theta) = r \cos\phi \sin\theta + r \sin\phi \cos\theta \quad (4)$$

D'altra banda, a partir de la mateixa figura 8 s'observa també que:

$$x = r \cos\phi \quad y = r \sin\phi \quad (5)$$

En substituir les expressions (5) en les equacions (4), s'obtenen les equacions de rotació d'un punt al voltant de l'origen de coordenades:

$$x' = x \cos\theta - y \sin\theta \quad y' = x \sin\theta + y \cos\theta \quad (6)$$

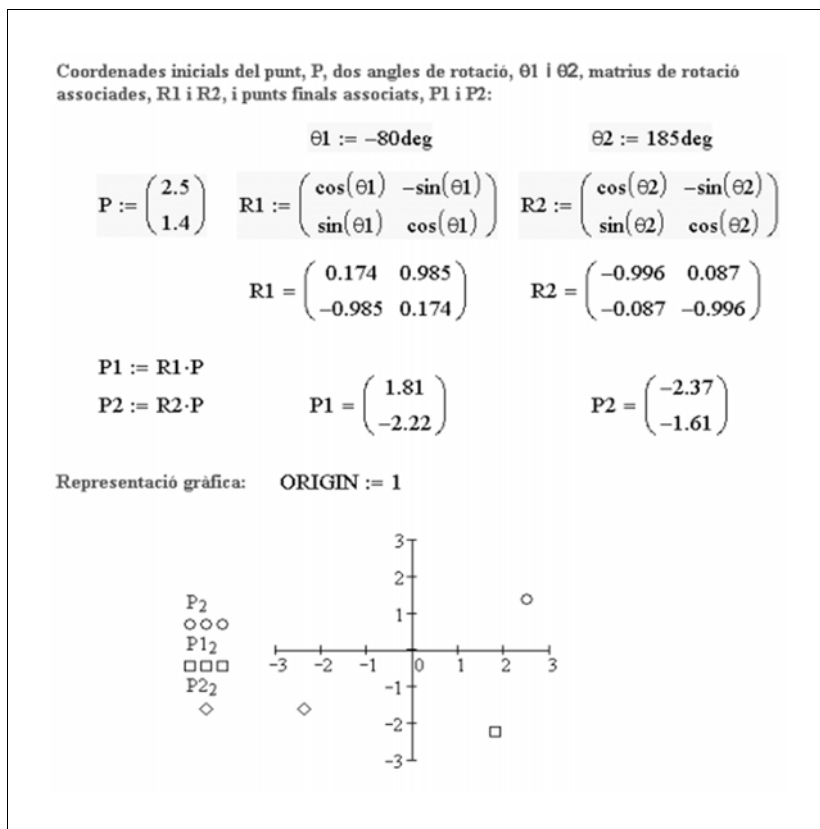
Utilitzant notació matricial, es pot descriure la rotació d'un punt al voltant de l'origen de coordenades com a:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} \quad (7)$$

on: $\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, i $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ és la **matriu de rotació**.

Exemple 2. Rotació d'un punt en 2D

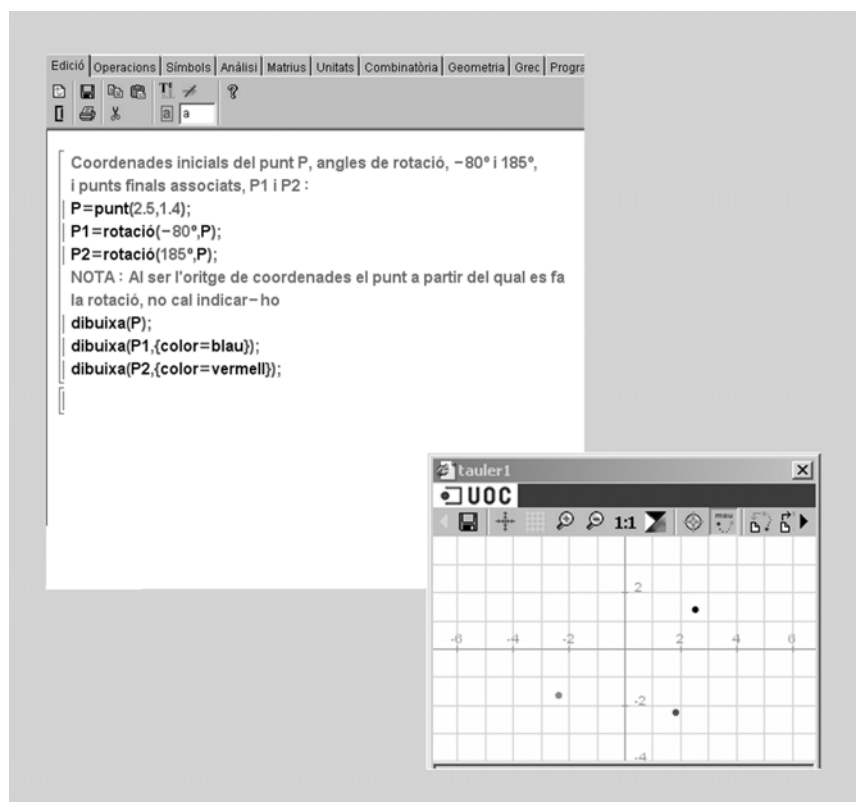
Figura 9



Comentari

En aquest exemple (figura 9) s'utilitza el programa Mathcad per a representar la rotació del punt (2.5, 1.4) a partir de l'origen de coordenades. S'apliquen dues rotacions, una d'angle -80° i l'altra d'angle 185° , cada una de les quals dona lloc a un nou punt.

Figura 10



Comentari

L'exemple anterior també es pot realitzar emprant el programa WIRIS, tal com es mostra a la figura 10.

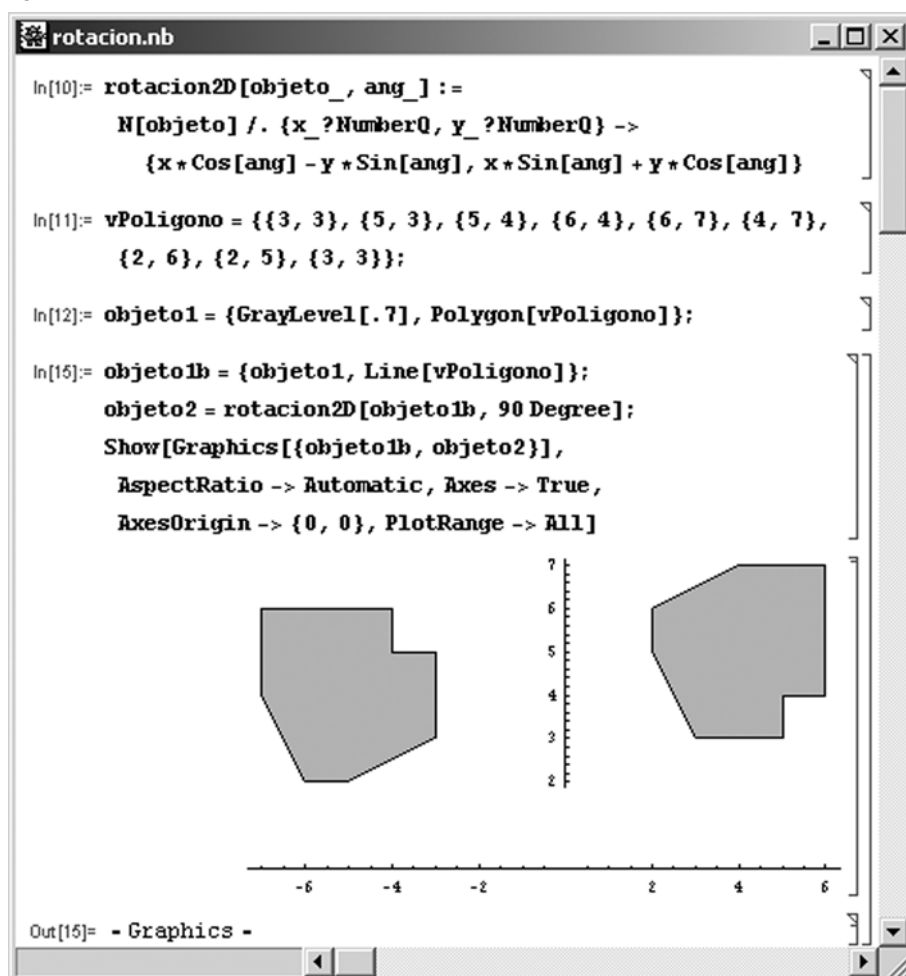
3.2. Rotació d'un objecte al voltant de l'origen de coordenades

De manera anàloga al que passava amb les translacions, les rotacions també són transformacions que mouen els objectes sense deformar-los, atès que cada un dels punts és rotat en un mateix angle θ .

Per a rotar un objecte al voltant de l'origen de coordenades, n'hi ha prou d'identificar els punts i paràmetres geomètrics que el caracteritzen, aplicar les equacions de rotació sobre aquests punts i, posteriorment, utilitzar els punts rodats i els paràmetres geomètrics per a reconstruir l'objecte.

Així, per exemple, un segment rectilini es pot rodar aplicant les equacions de rotació a cada un dels seus dos extrems per a, posteriorment, reconstruir el segment a partir dels punts transformats. Per a rodar un polígon, es poden aplicar les equacions de rotació als vèrtexs que el defineixen i emprar els punts transformats per a reconstruir el polígon (figures 11 i 12). D'una manera similar, una el·lipse es pot rodar solament rodant els seus dos semieixos i procedint a la seva reconstrucció a partir d'aquests.

Figura 11

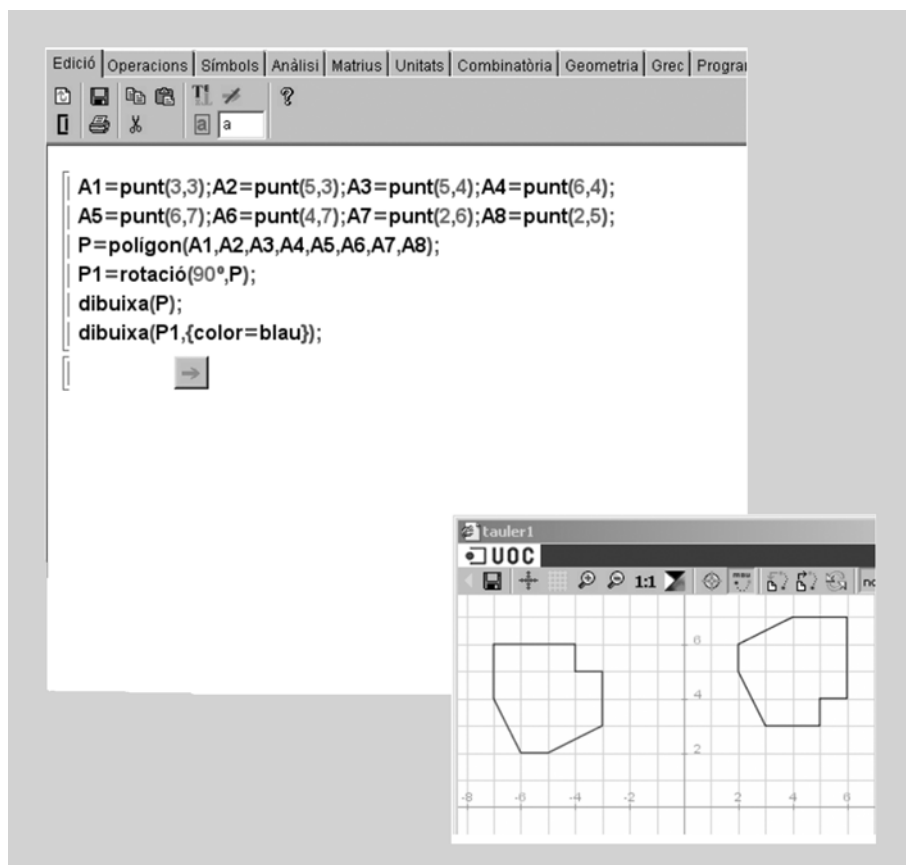


Comentari

A la figura 11 s'ha utilitzat el programari Mathematica per a definir una funció, rotacion2D, que permet rodar polígons, definits pels seus vèrtexs, al voltant de l'origen de coordenades.

En aquest cas s'ha aplicat una rotació de 90° a un objecte.

Figura 12

**Comentari**

A la figura 12, es mostra la rotació anterior emprant aquesta vegada el programa Wiris.

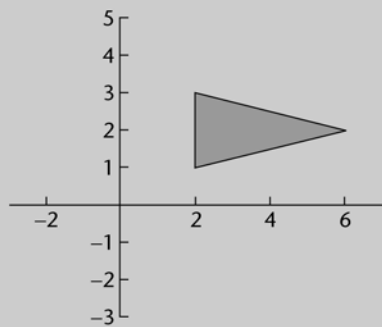
3.3. Rotació d'un objecte al voltant d'un punt de rotació genèric

Quan es vulgui utilitzar un punt de rotació P , diferent de l'origen de coordenades, es pot fer el següent (figures 13 i 14):

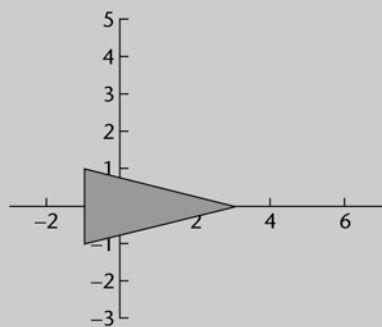
- 1) Aplicar una translació a l'objecte i al punt de rotació de manera que aquest últim coincideixi amb l'origen de coordenades.
- 2) Rodar l'objecte al voltant de l'origen de coordenades.
- 3) Desfer la translació inicial, de manera que el punt de rotació torni a la seva posició original.

A la figura 13 s'il·lustra amb un exemple aquests tres passos del procediment genèric.

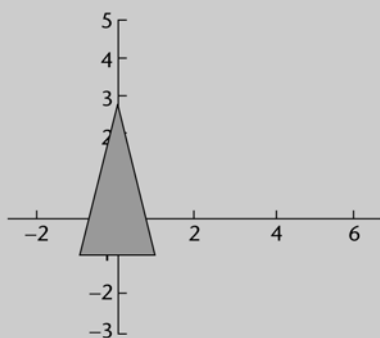
Figura 13



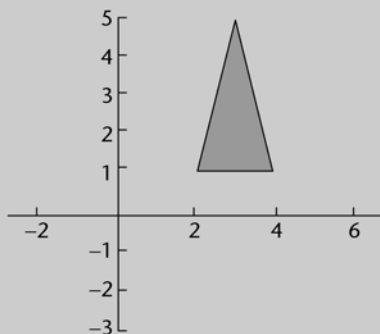
Pas 0: es vol fer rodar el triangle 90° emprant com a punt de rotació el (3, 2)



Pas 1: aplicar una translació a l'objecte amb vector de translació (-3, -2), de manera que el punt de rotació coincideixi amb l'origen de coordenades

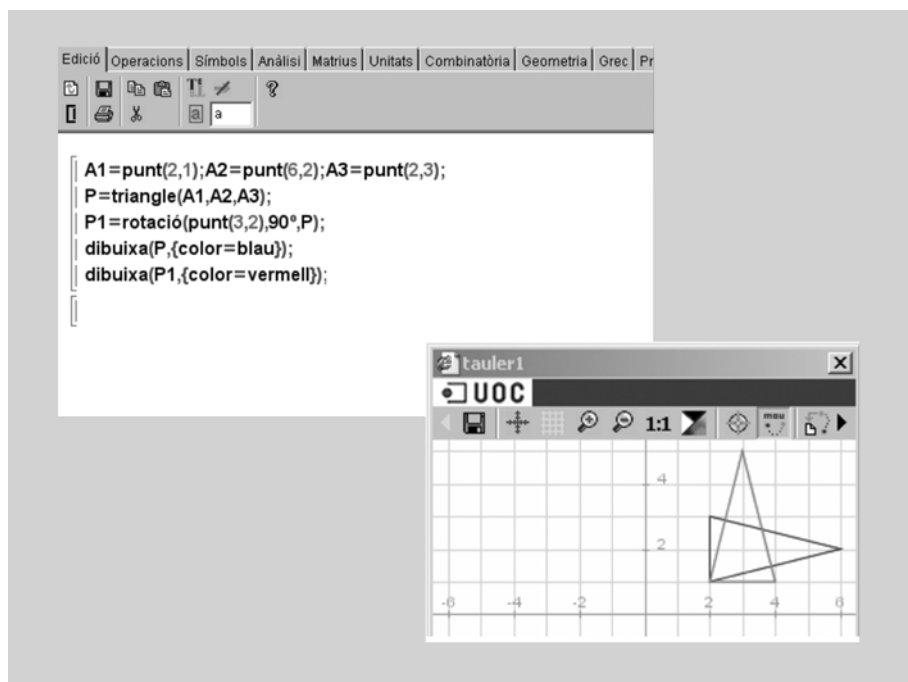


Pas 2: aplicar la rotació de 90° a l'objecte traslladat



Pas 3: desfer la translació inicial, aplicant per a això una nova translació de vector (3, 2)

Figura 14

**Comentari**

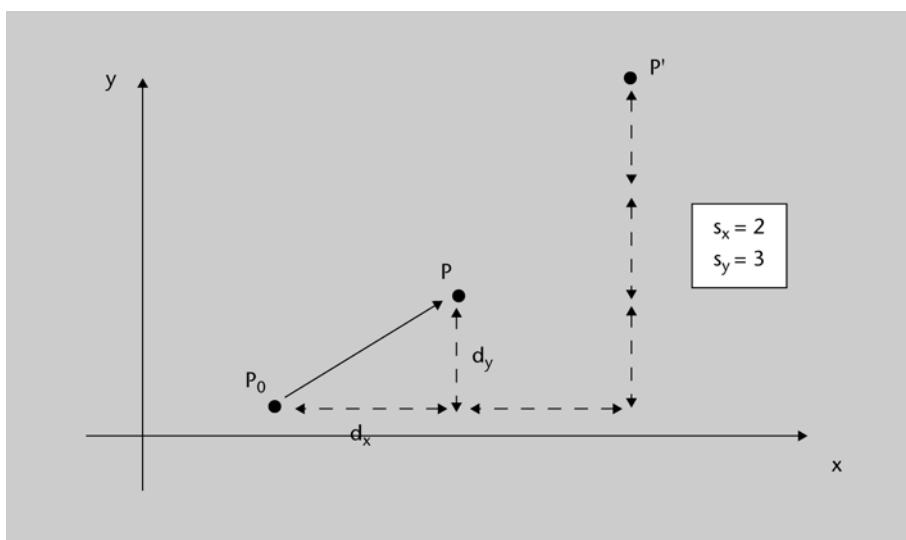
A la figura 14, es mostra la rotació anterior emprant aquesta vegada el programa Wiris.

4. Escalatge en 2D

4.1. Escalatge d'un punt a partir de l'origen de coordenades

Aplicar un **escalatge** sobre un punt P de coordenades (x, y) emprant un **punt fix** P_0 de coordenades (x_0, y_0) , implica multiplicar per sengles factors $(s_x$ i $s_y)$ les distàncies horitzontal, d_x , i vertical, d_y , entre P_0 i P , amb la qual cosa s'obté el nou punt P' de coordenades (x', y') (figura 15).

Figura 15. Escalatge d'un punt en 2D



Inicialment, se suposarà que el punt fix és l'origen de coordenades, és a dir, el punt $(0, 0)$. En l'operació d'escalatge, el nou punt P' s'obté multiplicant les coordenades del punt inicial P pels anomenats **factors d'escala** s_x i s_y :

$$x' = x \cdot s_x \quad y' = y \cdot s_y \quad (8)$$

Així, el factor d'escala s_x desplaça el punt inicial P en la direcció de l'eix x , mentre que el s_y ho fa en la direcció de l'eix y .

Emprant notació matricial, es pot descriure l'escalatge d'un punt a partir de l'origen de coordenades com a:

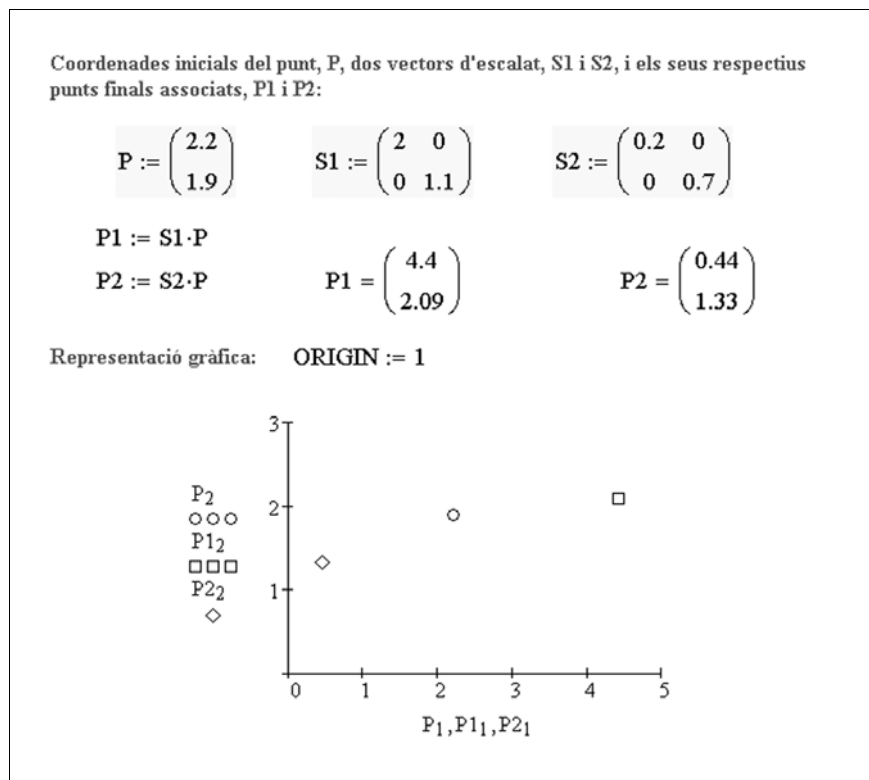
$$\mathbf{P}' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}, \quad (9)$$

on: $\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ i $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$ és la **matriu d'escalatge**.

Els factors d'escala, s_x i s_y , poden prendre qualsevol valor positiu. Factors d'escala superiors a 1 produeixen un allunyament, en la direcció horitzontal o vertical segons el factor implicat, de P respecte a l'origen de coordenades. Al contrari, factors d'escala inferiors a 1 produeixen un apropament, en la direcció horitzontal o vertical segons el cas, de P respecte a l'origen. Òbviament, factors d'escala unitaris no modifiquen la posició, sobre l'eix corresponent, del punt P .

Exemple 3. Escalatge d'un punt en 2D

Figura 16



Comentari

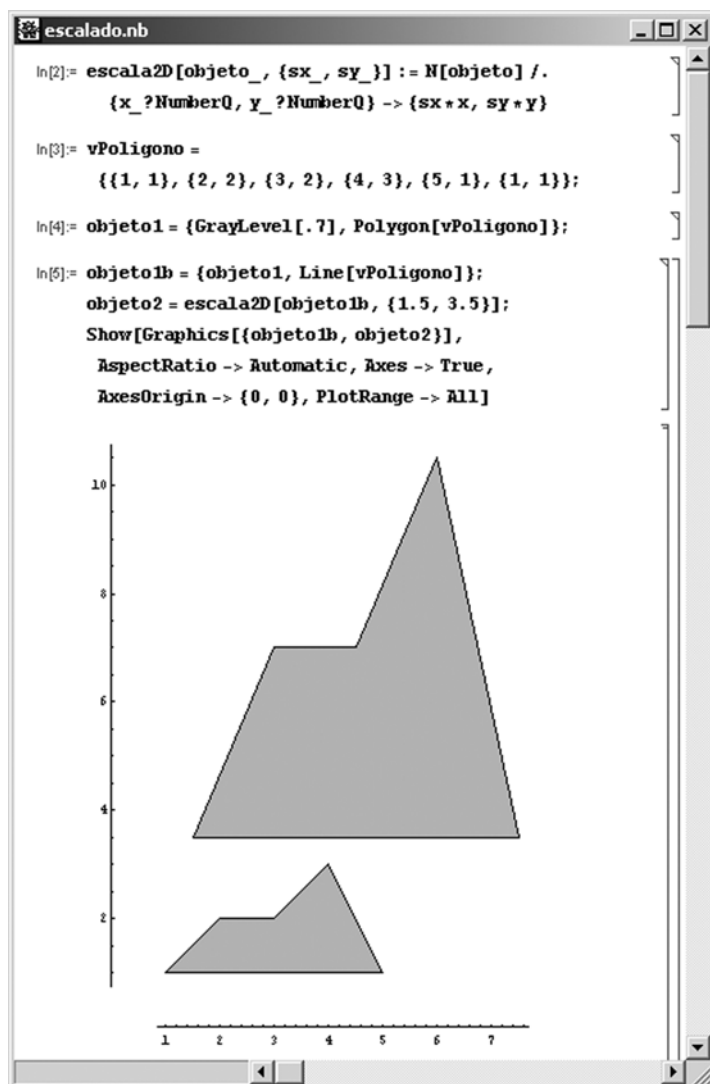
En aquest exemple (figura 16) s'utilitza el programa Mathcad per a representar l'escalatge del punt (2.2, 1.9) a partir de l'origen de coordenades. S'apliquen dos escalatges, un amb factors d'escala superiors a la unitat (que allunya el punt de l'origen), i l'altre amb factors d'escala inferiors a la unitat (que apropa el punt a l'origen).

4.2. Escalatge d'un objecte a partir de l'origen de coordenades

A diferència del que passava amb les translacions i les rotacions, una transformació d'escalatge sí que deformarà l'objecte, atès que n'altera la mida (excepte, òbviament, en el cas trivial en què tots dos factors d'escala siguin unitaris). Aquesta deformació pot ser **uniforme**, quan $s_x = s_y$, o no uniforme, quan $s_x \neq s_y$. En el primer dels casos, encara que la mida de l'objecte s'altera, es mantindran les seves proporcions relatives.

En aplicar les equacions (9) d'escalatge sobre els punts que defineixen un objecte, no només es modifica la seva mida, sinó que també s'altera la seva posició respecte al punt fix (figura 17).

Figura 17

**Comentari**

A la figura 17 s'ha emprat el programari Mathematica per a definir una funció, `escala2D`, que permet escalar polígons, definits pels seus vèrtexs, a partir de l'origen de coordenades.

En aquest cas s'ha aplicat un escalatge de factors 1.5 (horitzontal) i 3.5 (vertical)

Generalitzant el que hem dit per a l'escalatge de punts, es tindrà que factors d'escala inferiors a la unitat apropen (horitzontalment o verticalment segons el factor) els objectes a l'origen de coordenades, mentre que factors d'escala superiors a la unitat produiran l'efecte contrari.

A la pràctica, l'escalatge d'un objecte es porta a terme a partir de l'escalatge d'aquells punts que el defineixen. D'aquesta manera, un polígon pot ser escalat simplement aplicant les equacions d'escalatge a cada un dels seus vèrtexs i, posteriorment, regenerar el polígon a partir dels nous vèrtexs resultants.

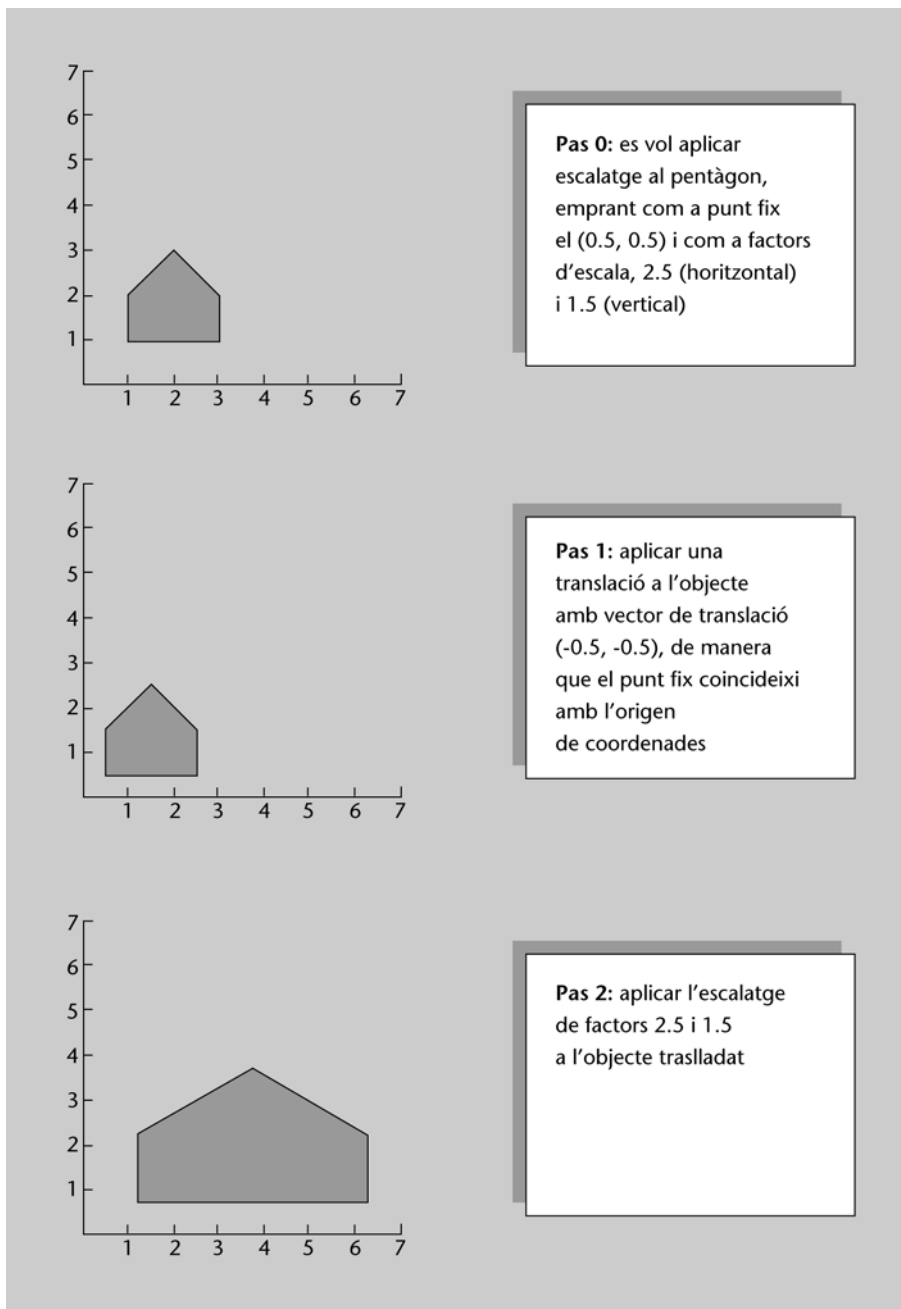
En general, per a escalar un objecte a partir de l'origen de coordenades, n'hi ha prou d'identificar els punts i paràmetres geomètrics que el defineixen, aplicar les equacions d'escalatge sobre aquests punts i, posteriorment, utilitzar els punts escalats i els paràmetres geomètrics per a reconstruir l'objecte.

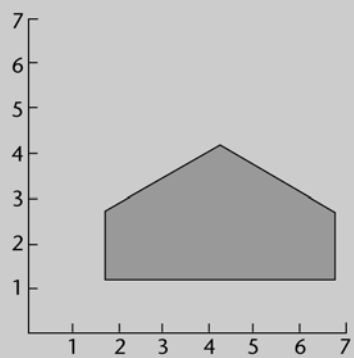
4.3. Escalatge d'un objecte a partir d'un punt fix genèric

Quan es vol escalar un objecte utilitzant per a això un punt fix P_0 diferent de l'origen de coordenades, es pot fer el següent (figura 18):

- 1) Aplicar una translació a l'objecte i al punt fix de manera que aquest últim coincideixi amb l'origen de coordenades.
- 2) Escalar l'objecte a partir de l'origen de coordenades.
- 3) Desfer la translació inicial, de manera que el punt fix torni a la seva posició original.

Figura 18





Pas 3: desfer la translació inicial, aplicant per a això una nova translació de vector $(0.5, 0.5)$

5. Notació matricial eficient

Les aplicacions gràfiques solen emprar transformacions geomètriques successives o encadenades. Així per exemple, per a realitzar una animació pot resultar necessari –a fi d’aconseguir una sensació de moviment– traslladar i rodar un objecte a cada increment temporal. Per la seva banda, en el tractament d’imatges és habitual realitzar translacions, rotacions i escalatges de manera seqüencial sobre la mateixa imatge. En tots dos casos, resultarà fonamental utilitzar una notació matricial que permeti concatenar de manera eficient una successió de transformacions.

De les equacions (3), (7) i (9) es dedueix que les transformacions discutides (translació, rotació i escalatge) presenten expressions de la forma general:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{P} + \mathbf{M}_2, \quad (10)$$

on: $\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, \mathbf{M}_1 és una matriu 2×2 composta per factors multiplicatius (\mathbf{M}_1 serà la matriu identitat, $\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, en el cas de translacions) i \mathbf{M}_2 és un vector columna que conté termes de translació (\mathbf{M}_2 serà el vector nul, $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, en el cas de rotacions i escalatges).

Però l’expressió (10) té un gran inconvenient: emprant aquesta notació matricial, quan es tracti de produir una seqüència de transformacions, resultarà necessari calcular les coordenades transformades a cada pas de la seqüència. En efecte: suposem, per exemple, que sobre un punt es vol aplicar primer un escalatge, després una rotació i, finalment, una translació. En aquest cas, serà necessari realitzar els següents passos:

- 1) Aplicar les equacions d’escalatge sobre les coordenades inicials del punt, P .
- 2) Sobre les noves coordenades, P' , obtingudes en el pas anterior, aplicar rotació per a obtenir les coordenades P'' .
- 3) Sobre les coordenades P'' , aplicar translació per a obtenir les coordenades finals P''' .

Una manera més eficient (des del punt de vista computacional) de portar a terme la seqüència anterior de transformacions consisteix a combinar-les de manera que les coordenades finals P''' s’obtinguin directament de les inicials P , eliminant així el càlcul de coordenades intermèdies.

És possible aconseguir aquest objectiu integrant el terme matricial additiu de l'equació (10), M_2 , amb el terme multiplicatiu, M_1 . En efecte: com es veurà a continuació, per a cada transformació es poden combinar els termes multiplicatiu i additiu utilitzant matrius de mida 3×3 , la qual cosa possibilita expressar qualsevol transformació com a producte de matrius.

Òbviament, també serà necessari expandir a vectors columnes de tres elements les coordenades de qualsevol punt, per a la qual cosa s'utilitzen les anomenades **coordenades homogènies**, de manera que un punt P de coordenades (x, y) passarà a tenir com a coordenades $(x, y, 1)$.

En el cas de la **translació d'un punt**, l'expressió (3) es pot reescriure com a:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

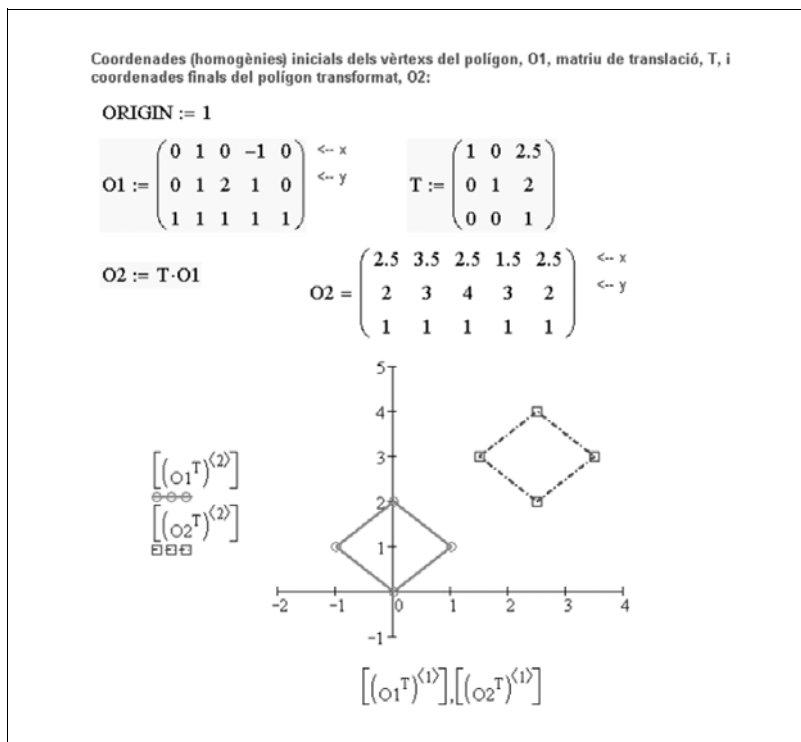
o, dit d'una altra manera:

$$P' = T(t_x, t_y) \cdot P \quad (11)$$

La inversa de la matriu de translació es pot obtenir reemplaçant els paràmetres t_x i t_y pels seus oposats $-t_x$ i $-t_y$.

Exemple 4. Translació d'un objecte en 2D

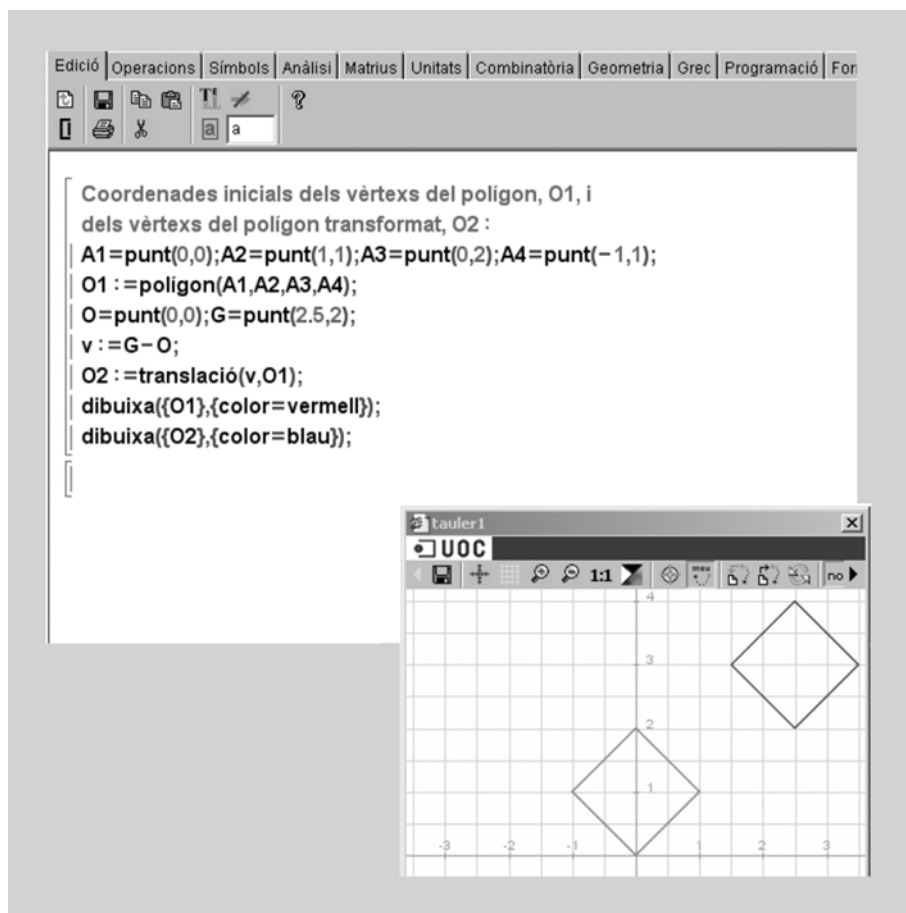
Figura 19



Comentari

En aquest exemple (figura 19) s'utilitza el programa Mathcad per a representar la translació d'un polígon O1, definit pels seus vèrtexs, aplicant un vector de translació de components (2.5, 2), amb la qual cosa el resultat serà el nou polígon O2.

Figura 20

**Comentari**

L'exemple anterior també es pot realitzar emprant el programa Wiris, tal com es mostra a la figura 20.

En el cas de la **rotació d'un punt al voltant de l'origen** de coordenades, l'expressió (7) es pot reescriure com a:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

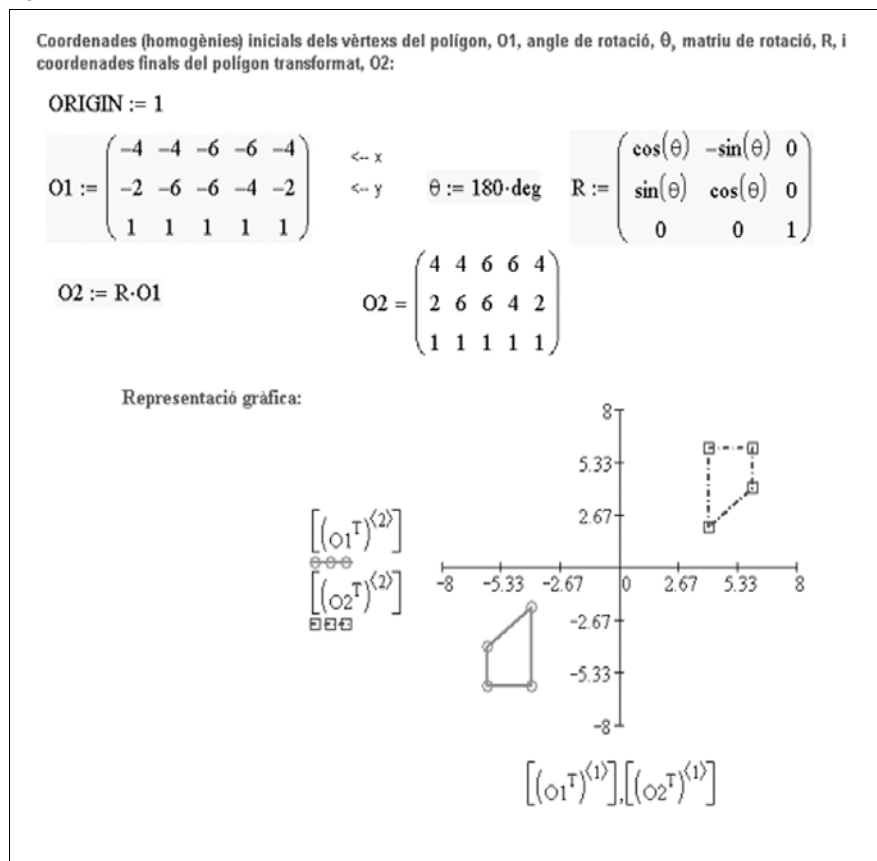
o, dit d'una altra manera:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{P} \quad (13)$$

La inversa de la matriu de rotació s'obté reemplaçant el paràmetre θ per $-\theta$.

Exemple 5. Rotació d'un objecte en 2D

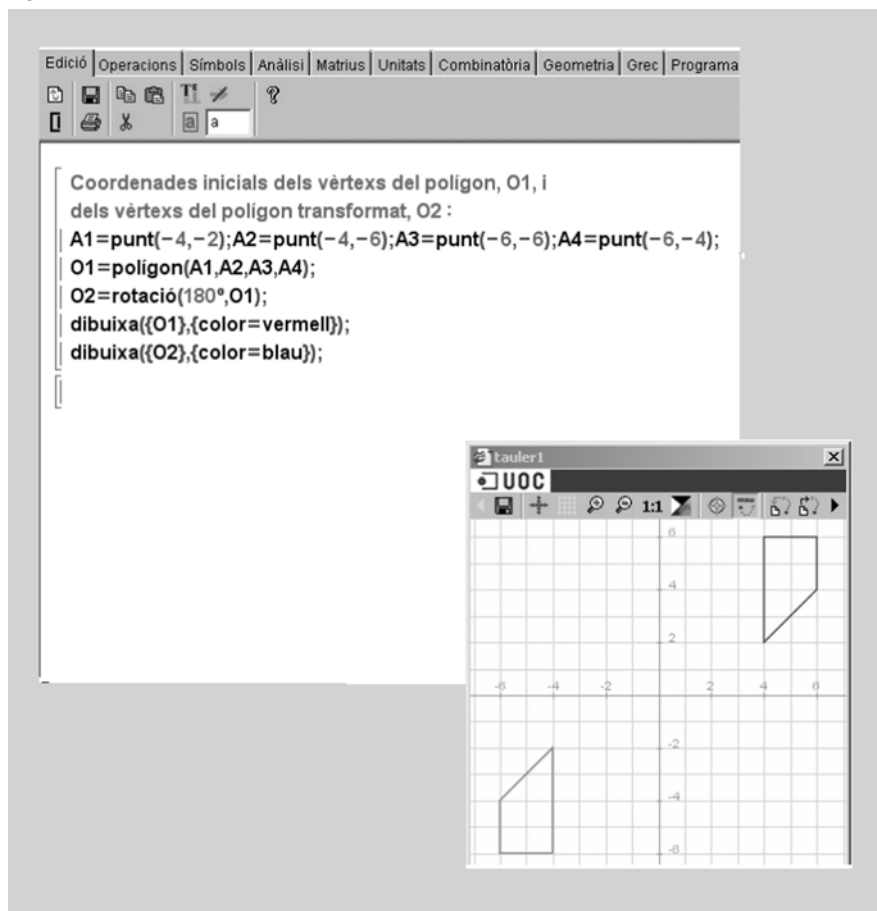
Figura 21



Comentari

En aquest exemple (figura 21) s'empra el programa Mathcad per a representar la rotació d'un polígon O1, definit pels seus vèrtexs, aplicant una rotació d'angle 180°, amb la qual cosa el resultat serà el nou polígon O2.

Figura 22



Comentari

L'exemple anterior també es pot realitzar emprant el programa Wiris, tal com es mostra a la figura 22.

Finalment, en el cas de l'escalatge d'un punt a partir de l'origen de coordenades, l'expressió (9) es pot reescriure com a:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

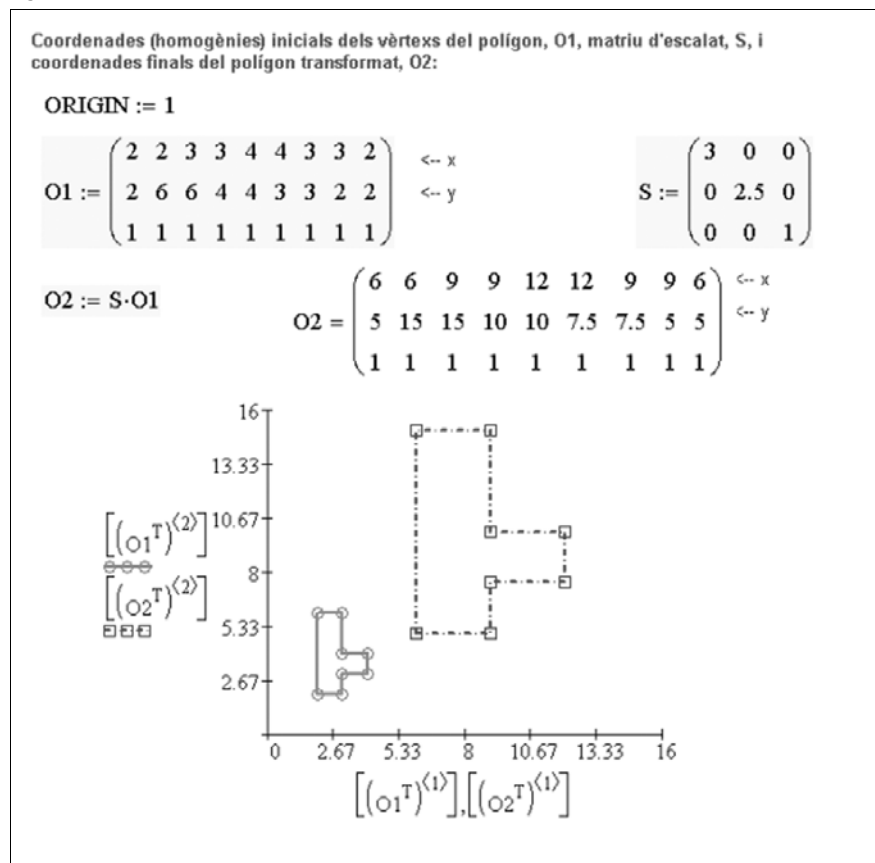
o, dit d'una altra manera:

$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P \tag{15}$$

La inversa de la matriu d'escalatge s'obté reemplaçant els paràmetres s_x i s_y pels seus inversos $\frac{1}{s_x}$, $\frac{1}{s_y}$.

Exemple 6. Escalatge d'un objecte en 2D

Figura 23



Comentari

En aquest exemple (figura 23) s'utilitza el programa Mathcad per a representar l'escalatge, a partir de l'origen de coordenades, d'un polígon O1, definit pels seus vèrtexs.

6. Composició de transformacions

Abans de començar aquest apartat, convé recordar que **el producte de matrius és associatiu, però no és, en general, commutatiu**. Tanmateix, en casos excepcionals, com el producte de matrius corresponent al mateix tipus de transformació, el producte de matrius sí que serà commutatiu.

Utilitzant la notació matricial introduïda a l'apartat anterior, i en particular les expressions (10) a (15), és possible representar amb una única matriu qualsevol combinació de transformacions, essent aquesta matriu el producte ordenat de les matrius associades a cada una de les transformacions.

Així, per exemple, en el cas de la **translació**, si considerem dues translacions consecutives de vectors respectius, (t_{x1}, t_{y1}) i (t_{x2}, t_{y2}) , es poden calcular (aplicant l'associativitat) les coordenades finals com a:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}(t_{x2}, t_{y2}) \cdot [\mathbf{T}(t_{x1}, t_{y1}) \cdot \mathbf{P}] = [\mathbf{T}(t_{x2}, t_{y2}) \cdot \mathbf{T}(t_{x1}, t_{y1})] \cdot \mathbf{P}$$

Observeu que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_{x2} \\ 0 & 1 & t_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_{x1} \\ 0 & 1 & t_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_{x1} + t_{x2} \\ 0 & 1 & t_{y1} + t_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

És a dir:

$$\mathbf{T}(t_{x2}, t_{y2}) \cdot \mathbf{T}(t_{x1}, t_{y1}) = \mathbf{T}(t_{x1} + t_{x2}, t_{y1} + t_{y2})$$

O, en altres paraules, és equivalent aplicar dues translacions successives que aplicar-ne una el vector de translació de la qual sigui la suma dels respectius vectors de translació.

En el cas de **rotacions al voltant de l'origen** de coordenades, si es consideren dues rotacions consecutives d'angles respectius, θ_1 i θ_2 , es poden calcular (aplicant l'associativitat) les coordenades finals com a:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R}(\theta_2) \cdot [\mathbf{R}(\theta_1) \cdot \mathbf{P}] = [\mathbf{R}(\theta_2) \cdot \mathbf{R}(\theta_1)] \cdot \mathbf{P}$$

Les rotacions també tenen un caràcter additiu (és a dir, és equivalent concatenar dues rotacions que una única l'angle de rotació de la qual sigui la suma dels respectius angles). En efecte:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

És a dir:

$$\mathbf{R}(\theta_2) \cdot \mathbf{R}(\theta_1) = \mathbf{R}(\theta_1 + \theta_2)$$

Finalment, en el cas de l'**escalatge a partir de l'origen** de coordenades, si es consideren dos escalatges consecutius amb vectors (s_{x1}, s_{y1}) i (s_{x2}, s_{y2}) , es poden calcular (aplicant l'associativitat) les coordenades finals com a:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{S}(s_{x2}, s_{y2}) \cdot [\mathbf{S}(s_{x1}, s_{y1}) \cdot \mathbf{P}] = [\mathbf{S}(s_{x2}, s_{y2}) \cdot \mathbf{S}(s_{x1}, s_{y1})] \cdot \mathbf{P}$$

Els escalatges tenen caràcter multiplicatiu (*i. e.*, si multipliquem en dues ocasions la mida d'un objecte primer per dos i després per tres, el resultat final serà que hem incrementat la mida original en un factor de sis):

$$\begin{pmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{x2} \cdot s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} \cdot s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O, en altres paraules:

$$\mathbf{S}(s_{x2}, s_{y2}) \cdot \mathbf{S}(s_{x1}, s_{y1}) = \mathbf{S}(s_{x1} \cdot s_{x2}, s_{y1} \cdot s_{y2})$$

Exemple 7. Rotació al voltant d'un punt genèric

Figura 24

Coordenades (homogènies) inicials dels vèrtexs del poligon, O1, punt de rotació, P, angle de rotació, θ , matriu de rotació, R, i coordenades finals del poligon transformat, O2:

ORIGIN := 1

$$O1 := \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \\ \leftarrow 1 \end{matrix} \quad P := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \theta := 90\text{-deg} \quad R := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Càlcul de la matriu de translació, T, que transllada el punt de rotació a l'origen de coordenades:

$$T := \text{augment} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{augment}(-P_1, -P_2, P_3)^T \right] \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Càlcul de la matriu A, resultant de la composició translació-rotació-translació:

$$A := T^{-1} \cdot R \cdot T \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Càlcul de les coordenades finals:

$$O2 := A \cdot O1 \quad O2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Representació gràfica:

Comentari

En aquest exemple (figura 24) s'empra el programa Mathcad per a realitzar la rotació d'un triangle al voltant d'un punt genèric. Per a això se segueixen les indicacions de l'apartat 3.3 i s'utilitza el producte de matrius per a portar a terme la composició de transformacions.

Figura 25

Edició | Operacions | Símbols | Anàlisi | Matrius | Unitats | Combinatòria | Geometria | Grec | Programació | Formal

```

Coordenades inicials dels vèrtexs del poligon, O1, punt de rotació P, angle de rotació 90°, i coordenades finals dels vèrtexs del poligon transformat, O2 :
A1=punt(2,1);A2=punt(6,2);A3=punt(2,3);
P=triangle(A1,A2,A3);
P1=rotació(punt(3,2),90°,P);
dibuixa(P,{color=blau});
dibuixa(P1,{color=vermell});
    
```

Comentari

L'exemple anterior també es pot realitzar emprant el programa Wiris, tal com es mostra a la figura 25.

7. Transformacions afins en 2D

Una **transformació afí en 2D** és una transformació de coordenades de la forma:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \quad y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \quad (15)$$

Observeu que, en una transformació afí, cada una de les coordenades transformades x' i y' és una funció lineal de les coordenades originals x i y , i també d'una sèrie de paràmetres a_{ij} i b_k .

La translació, la rotació i l'escalatge són exemples de transformacions afins en 2D. Les transformacions afins tenen la interessant propietat que les línies paral·leles són transformades en línies paral·leles i un nombre finit de punts es transforma sempre en un nombre finit de punts.

8. Transformacions geomètriques en 3D

La teoria exposada per a les transformacions geomètriques en 2D es pot estendre a 3D mitjançant la incorporació de la coordenada espacial z . En el cas de la translació, el vector de translació tindrà ara tres components en lloc de dues. En el cas de l'escalatge, haurem de considerar tres factors d'escala (un per cada eix de coordenades). Finalment, el concepte de rotació també es pot generalitzar a 3D, si bé aquest presenta alguns aspectes tècnics que requereixen especial atenció: en 2D les rotacions es produeixen només en el pla xy (*i. e.*, l'eix de rotació sempre és paral·lel a l'eix z); per la seva banda, en 3D les rotacions es podran efectuar prenent com a eix de rotació qualsevol recta de l'espai tridimensional (no necessàriament paral·lela a algun dels tres eixos coordenats).

De manera anàloga al que tenim en 2D, també en 3D és possible utilitzar notació matricial per a expressar les transformacions geomètriques. Així, qualsevol combinació de transformacions podrà ser representada per una matriu que s'obtéindrà en realitzar el producte de les respectives matrius associades a cada una de les transformacions individuals.

8.1. Translació de punts i objectes

Les equacions (10) i (11), referents a la translació d'un punt en 2D, es poden generalitzar per al cas tridimensional com segueix:

L'expressió matricial de la **translació d'un punt** P de coordenades (x, y, z) és:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

o, dit d'una altra manera:

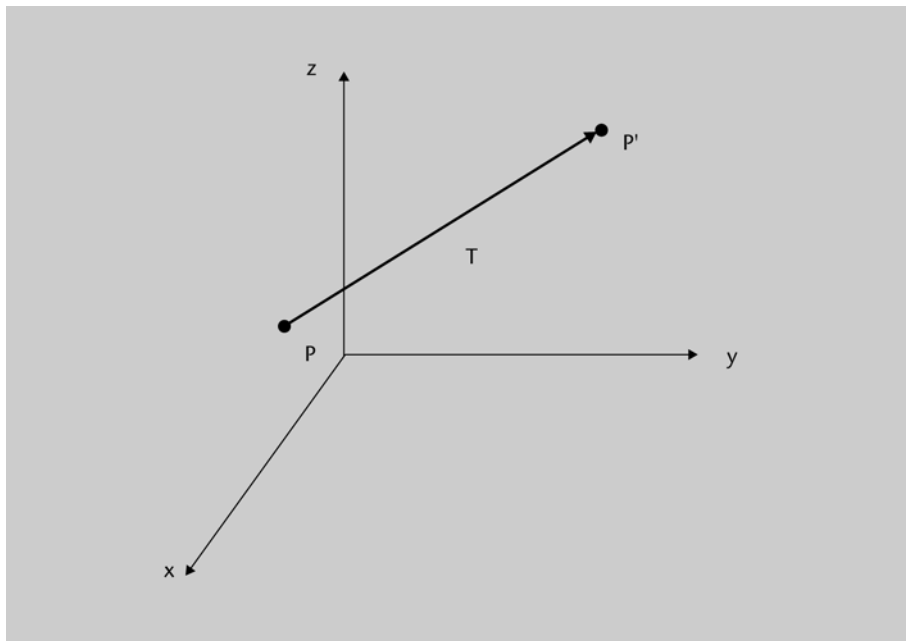
$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}(t_x, t_y, t_z) \cdot \mathbf{P} \quad (17)$$

essent (t_x, t_y, t_z) el vector de translació.

En l'expressió anterior, els paràmetres t_x , t_y i t_z especifiquen les distàncies de translació respecte a cada un dels tres eixos coordenats (figura 26). Com resulta evident, l'expressió matricial anterior és equivalent al següent sistema d'equacions:

$$x' = x + t_x \quad y' = y + t_y \quad z' = z + t_z \quad (18)$$

Figura 26. Translació d'un punt en 3D

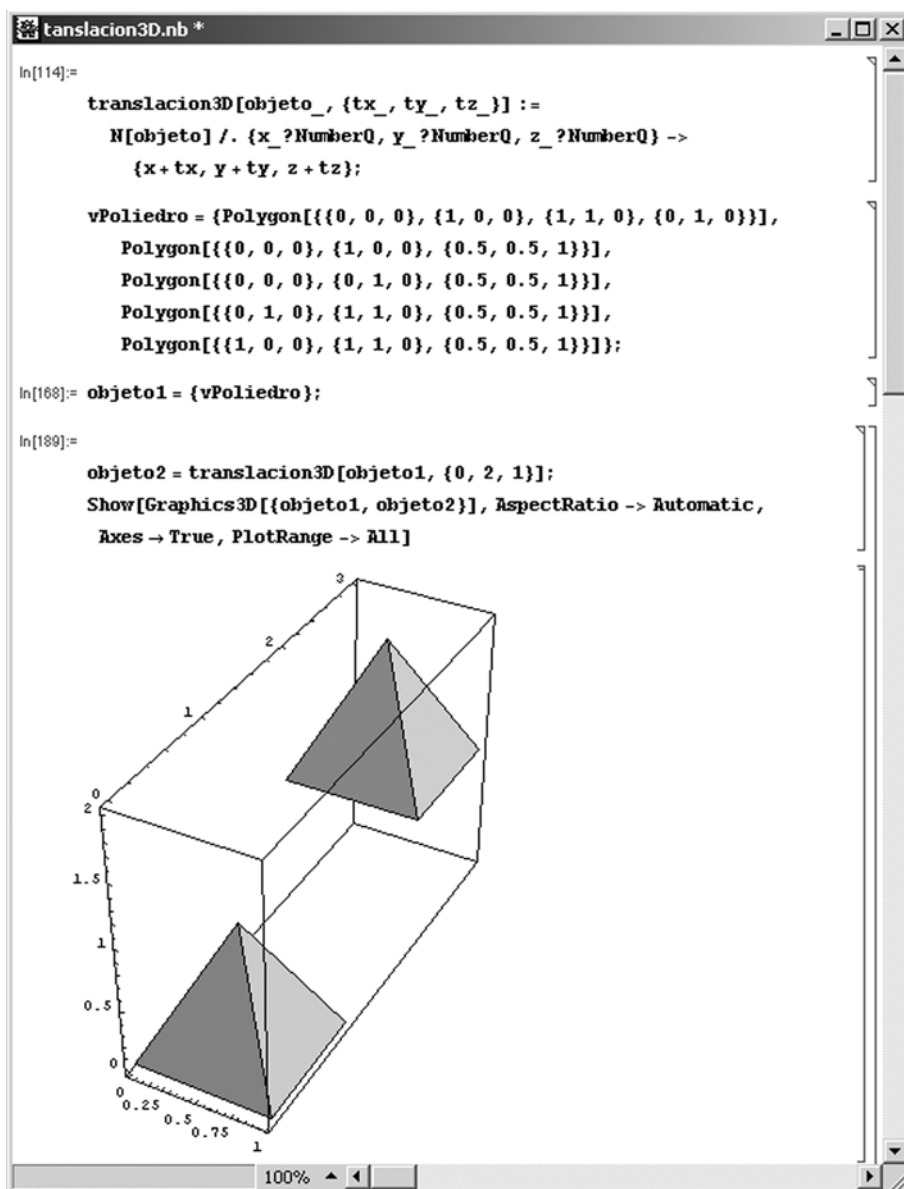


La matriu inversa de la matriu de translació $T(t_x, t_y, t_z)$ s'obté simplement substituint les components del vector de translació per d'altres del mateix valor absolut però de signe contrari.

Anàlogament al que passa en 2D, la clau per a traslladar un objecte en 3D consisteix a aplicar les equacions de translació a cada un dels punts que caracteritzen l'objecte per a, posteriorment, reconstruir l'objecte a partir dels punts traslladats i de les seves propietats geomètriques (figura 27).

A la figura 27 s'ha emprat el programari Mathematica per a definir una funció, `translacion3D`, que permet traslladar políedres definits per les seves cares. En aquest cas s'ha aplicat una translació de vector $(0, 2, 1)$ a una piràmide.

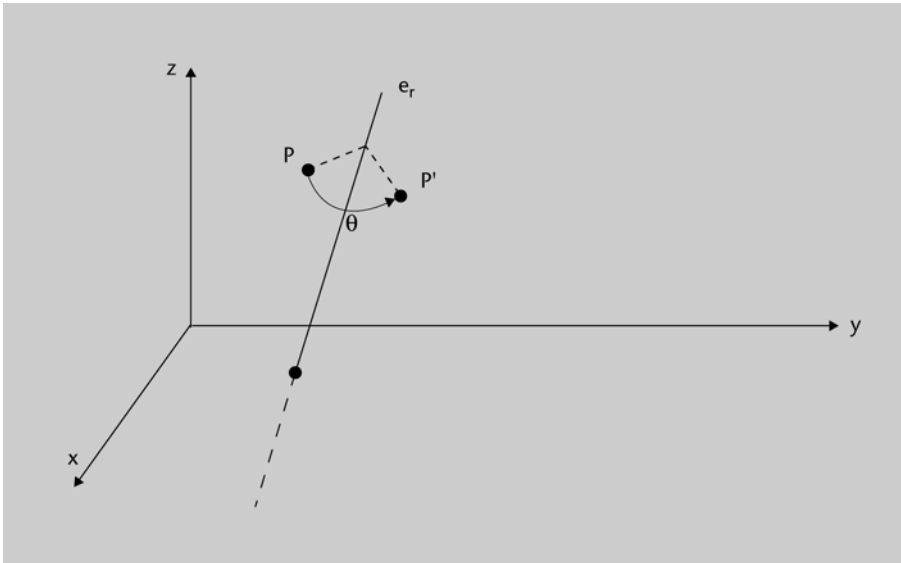
Figura 27



8.2. Rotació de punts i objectes

Quan es tracta de rodar un punt –i, en general, qualsevol objecte en 3D–, resulta necessari especificar tant l'angle θ com l'eix de rotació e_r . A diferència del que ocorria amb les rotacions en 2D, que es limitaven al pla xy (és a dir, l'eix de rotació era sempre una recta paral·lela a l'eix z , la qual tallava el pla xy en l'anomenat *punt de rotació*), una rotació en 3D pot emprar com a eix de rotació qualsevol recta de l'espai tridimensional, la qual pot o no ser paral·lela a algun dels eixos de coordenades (figura 28).

Figura 28. Rotació d'un punt en 3D



Pel que fa a l'angle de rotació, sempre que aquest sigui positiu indicarà rotacions en el sentit contrari al que segueixen les agulles del rellotge (se suposarà que sempre es contempla l'objecte des del corresponent "semieix positiu"). Al contrari, valors negatius de l'angle de rotació indiquen moviments en el sentit de les agulles del rellotge.

Nota

Una altra manera de donar l'angle en 3D és considerar el sentit contrari al del gir d'avanç d'un llevataps (per a dretrans).

Les equacions (12) i (13), referents a la rotació d'un punt en 2D al voltant de l'origen de coordenades (*i. e.*, emprant com a eix de rotació l'eix z), es poden generalitzar per al cas tridimensional com segueix:

L'expressió matricial per a la **rotació d'un punt P** , de coordenades (x, y, z) , **al voltant de l'eix z** és:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

o, dit d'una altra manera:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R}_z(\theta) \cdot \mathbf{P} \quad (19)$$

Com resulta evident, l'expressió matricial anterior és equivalent al següent sistema d'equacions:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta \quad y' = x \sin \theta + y \cos \theta \quad z' = z \quad (20)$$

Per simetria, resulta senzill comprovar que les expressions matricials associades a la rotació d'un punt P al voltant dels eixos x i y seran, respectivament:

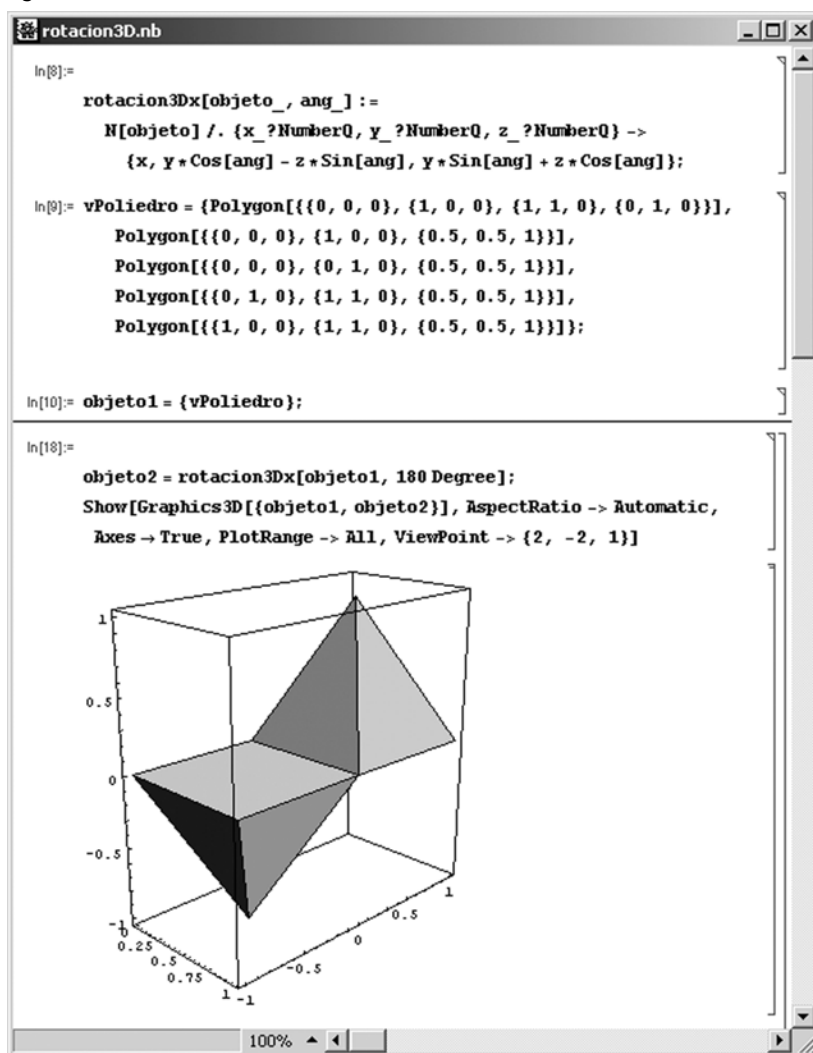
$$\text{Rotació sobre l'eix } x: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\text{Rotació sobre l'eix } y: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

La matriu inversa de qualsevol de les matrius anteriors s'obté substituint el valor del paràmetre θ pel seu oposat $-\theta$.

Com ja passava en 2D, la clau per a rodar un objecte en 3D consisteix a aplicar les equacions de rotació a cada un dels punts que caracteritzen l'objecte per a, posteriorment, reconstruir l'objecte a partir dels punts rodats i de les seves propietats geomètriques (figura 29).

Figura 29



Comentari

A la figura 29 s'ha utilitzat el programari Mathematica per a definir una funció, rotacion3Dx, que permet rodar políedres, definits per les seves cares, al voltant de l'eix x.

En aquest cas s'ha aplicat una rotació d'angle 180° a una piràmide.

Finalment, volem afegir que quan el que es vulgui sigui aplicar una rotació d'angle θ a un objecte al voltant d'un eix qualsevol e_r (no necessàriament paral·lel a cap dels eixos coordenats), n'hi haurà prou d'utilitzar la següent metodologia:

- 1) Aplicar una translació de vector (t_x, t_y, t_z) a l'objecte i a e_r de manera que aquest últim passi per l'origen de coordenades.
- 2) Aconseguir que l'eix de rotació coincideixi amb algun dels eixos de coordenades, per a la qual cosa poden fer falta dues rotacions d'angles ϕ i φ , respectivament, (tant a l'objecte com a e_r) per a primer portar e_r sobre un pla coordinat (per exemple el yz rodant al voltant de l'eix y) i després sobre l'eix coordinat escollit (per exemple el z rodant al voltant de l'eix x).
- 3) Aplicar a l'objecte la rotació d'angle θ al voltant de la nova posició de l'eix de rotació e'_r (observeu que e'_r serà algun dels eixos coordenats).
- 4) Desfer, en ordre invers, les rotacions d'angles ϕ i φ del pas 2 (*i. e.*: aplicar una rotació d'angle $-\varphi$ i una d'angle $-\phi$).
- 5) Desfer la translació inicial (*i. e.*: aplicar una translació de vector $(-t_x, -t_y, -t_z)$).

8.3. Escalatge de punts i objectes

Les equacions (14) i (15), referents a l'escalatge d'un punt en 2D a partir de l'origen de coordenades, es poden generalitzar per al cas tridimensional com segueix:

L'expressió matricial per a l'escalatge d'un punt P , de coordenades (x, y, z) , a partir de l'origen de coordenades és:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

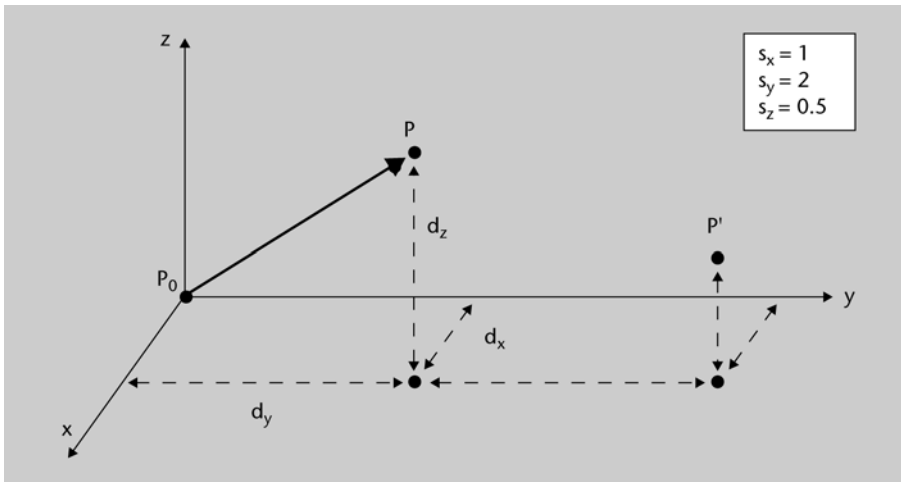
o, dit d'una altra manera:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) \cdot \mathbf{P} \quad (24)$$

A l'expressió anterior, on es considera que el punt fix coincideix amb l'origen de coordenades, els paràmetres s_x , s_y i s_z són nombres positius que especifiquen els valors d'escalatge respecte a cada un dels tres eixos coordenats (figura 30). Com resulta evident, l'expressió matricial anterior és equivalent al següent sistema d'equacions:

$$x' = x \cdot s_x \quad y' = y \cdot s_y \quad z' = z \cdot s_z \quad (25)$$

Figura 30. Escalatge d'un punt en 3D

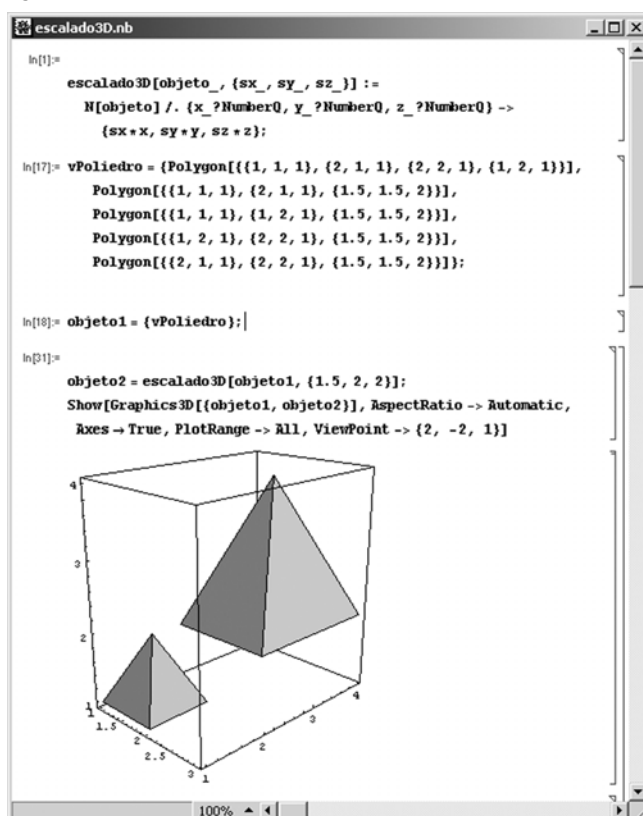


La inversa de la matriu d'escalatge $S(s_x, s_y, s_z)$ s'obté solament substituint les components del vector d'escalatge pels seus respectius inversos.

Novament, la clau per a escalar un objecte en 3D consisteix a aplicar les equacions d'escalatge a cada un dels punts que caracteritzen l'objecte per a, posteriorment, reconstruir l'objecte a partir dels nous punts (figura 31).

Observeu que en escalar un objecte en 3D, aquest no només canviarà de mida, sinó també de posició respecte al punt fix. A més, l'objecte patirà deformacions (variaran les seves proporcions relatives), llevat que l'escalatge aplicat sigui uniforme (*i. e.*: llevat que $s_x = s_y = s_z$).

Figura 31



Comentari

A la figura 31 s'ha emprat el programari Mathematica per a definir una funció, `escalado3D`, que permet escalar, a partir de l'origen de coordenades, políedres definits per les seves cares.

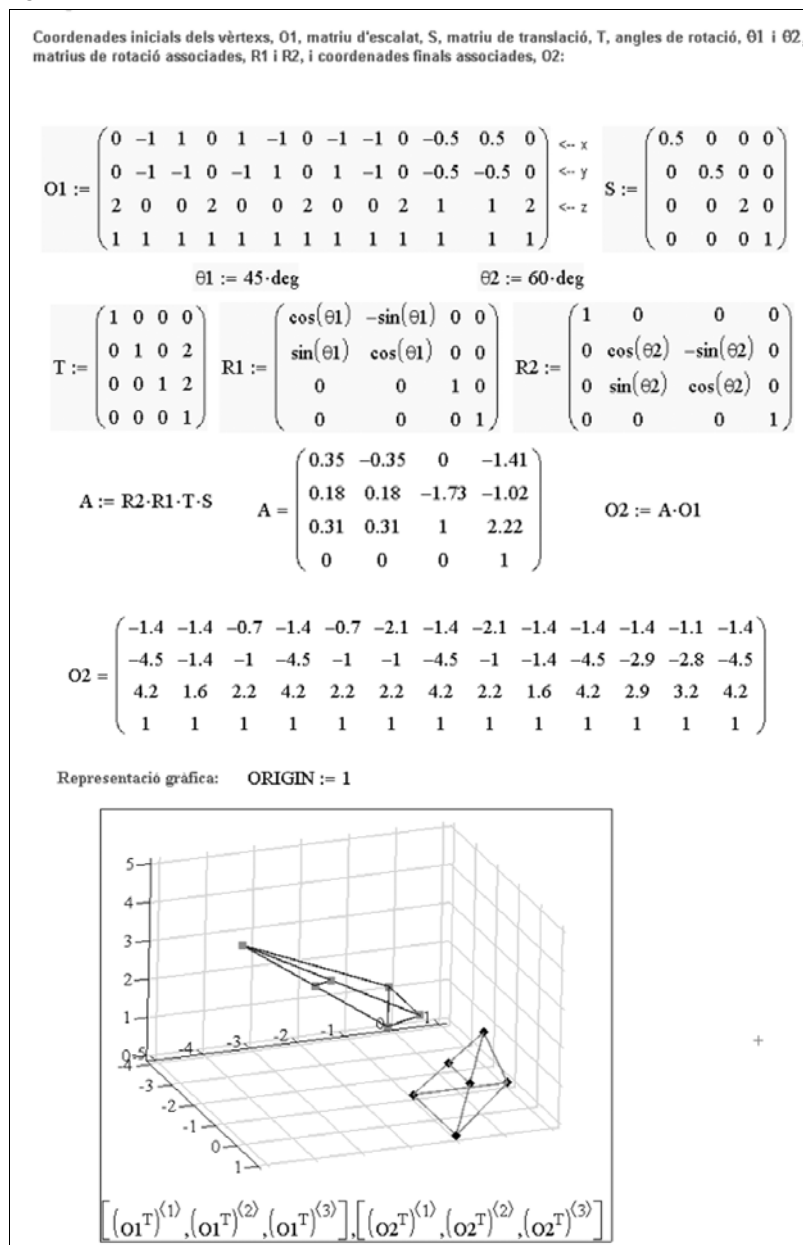
En aquest cas s'ha aplicat un escalatge de vector (1.5, 2, 2) a una piràmide.

Per acabar, es pot recordar que –de manera anàloga al que hem explicat per al cas 2D–, quan es vulgui escalar un objecte a partir d'un punt fix genèric (no necessàriament l'origen de coordenades), n'hi haurà prou de seguir la següent metodologia:

- 1) Aplicar una translació a l'objecte i al punt fix de manera que aquest últim coincideixi amb l'origen de coordenades.
- 2) Aplicar l'escalatge a l'objecte emprant com a punt fix l'origen de coordenades.
- 3) Desfer la translació inicial.

Exemple 8. Composició de transformacions en 3D

Figura 32



Comentari

En aquest exemple (figura 32) s'utilitza el programa Mathcad per a portar a terme una composició de transformacions en 3D i mostrar el resultat gràfic.

Resum

En aquest mòdul hem presentat les tres transformacions geomètriques més habituals, tant en 2D com en 3D: la translació, la rotació i l'escalatge.

Hem vist que cada una d'aquestes transformacions es pot associar a una matriu (de mida 3×3 en el cas de 2D i de mida 4×4 en el cas de 3D), i que les noves coordenades dels punts transformats es calculen multiplicant la matriu corresponent per les coordenades inicials de cada punt. També hem vist que la clau per a transformar objectes consisteix a transformar cada un dels punts que els defineixen.

Finalment, s'ha explicat com s'apliquen diverses transformacions successives sobre un punt o objecte: n'hi ha prou d'obtenir la matriu resultant de la composició de transformacions, que és el producte de les matrius associades a cada una de les transformacions (en l'ordre adequat, atès que el producte de matrius no és commutatiu).

Exercicis d'autoavaluació

1. Considereu el polígon definit pels següents vèrtexs: (1, 1), (3, 2), (3, 5) i (1, 4). Calculeu les noves coordenades del polígon després d'haver-li aplicat les transformacions que s'indiquen a continuació (en l'ordre establert):

- Una rotació de 90° al voltant del punt (2, 3).
- Un escalatge, a partir de l'origen, amb factors d'escala 3 (eix x) i 2 (eix y).

2. Repetiu l'exercici anterior però, aquesta vegada, invertint l'ordre de les transformacions, *i. e.*: apliqueu primer l'escalatge i després la rotació. Què observeu?

3. Considereu el polígon definit pels següents vèrtexs: (2, 1), (5, 1), (5, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 4), (5, 5) i (2, 5). Calculeu les noves coordenades del polígon després d'haver-hi aplicat les transformacions que s'indiquen a continuació (en l'ordre establert):

- Una rotació de 180 graus al voltant del punt (0, 1).
- Un escalatge, a partir del punt (1, 1), amb factors d'escala 2 (eix x) i 3 (eix y).

4. Considereu el políedre definit pels vèrtexs: (0, 0, 2), (-1, -1, 0), (1, -1, 0), (1, 1, 0), (-1, 1, 0). Calculeu les seves noves coordenades després d'aplicar-hi cada una de les següents transformacions:

- a) Una translació de vector (2, -1, 3)
- b) Una rotació de 180° al voltant de l'eix x
- c) Una rotació de 180° al voltant de l'eix y
- d) Una rotació de 180° al voltant de l'eix z
- e) Un escalatge uniforme de factor 2 a partir de l'origen
- f) Un escalatge uniforme de factor 2 a partir del punt (1, 2, 1)

5. Considereu el triangle T de vèrtexs $A(1, 1)$, $B(2, 1)$ i $C(2, 2)$.

- a) Calculeu les noves coordenades dels vèrtexs de T després d'aplicar un escalatge uniforme a partir de l'origen, de manera que la seva àrea és quatre cops més gran.
- b) Calculeu les coordenades del triangle T després d'aplicar un gir d'angle $\pi/2$ al voltant del punt (-1, 0).
- c) Ara apliqueu a T un gir de centre l'origen i després una translació. Finalment, les coordenades dels vèrtexs del triangle han restat $A_3(-1, 0)$, $B_3(-2, 0)$ i $C_3(-2, -1)$. Determineu la matriu que transforma els vèrtexs originals en els finals.

6. Es considera el paral·lelogram P de vèrtexs $P_1(0, -8)$, $P_2(-4, 0)$, $P_3(0, 8)$, $P_4(4, 0)$. Apliquem a P una translació T de vector (7, 9), després una rotació R d'angle 45° i centre el punt (-6, 5). Es demana:

- a) Doneu les matrius de la translació T , la rotació R i la composició $R \cdot T$

- b)** Calculeu les coordenades de P després d'aplicar-hi la composició $\mathbf{R} \cdot \mathbf{T}$
- c)** Utilitzeu la Wiris per comprovar els resultats obtinguts en l'apartat **b)** i per representar gràficament el paral·lelogram P i el seu transformat per $\mathbf{R} \cdot \mathbf{T}$.
- d)** Calculeu l'àrea del transformat del paral·lelogram P per un escalatge uniforme a partir de l'origen de factor 9.

7. Al pla XY , un gir d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforma el punt $(2, 0)$ en el punt $(2, 2)$. Trobeu el punt de rotació sobre el qual es fa la transformació. Feu servir coordenades homogènies.

8. Considereu el polígon definit pels vèrtexs: $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 4)$, i $(0, 3)$. Es demana:

a) Calculeu les noves coordenades del polígon després d'haver-hi aplicat les transformacions que s'indiquen a continuació (en l'ordre establert):

- Una rotació de 180° al voltant del punt $(2, 1)$.
- Un escalatge, a partir de l'origen, amb factors d'escala 2 (eix x) i 3 (eix y).

b) Representeu gràficament amb la Wiris els dos polígons (l'original i el resultant després d'haver-hi aplicat totes las transformacions).

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. En primer lloc, trobarem la matriu de rotació, \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on $\theta = \frac{\pi}{2}$, *i. e.*:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara bé, atès que es tracta d'una rotació genèrica (no sobre l'origen), serà necessari: a) aplicar una translació abans de la rotació (la translació que desplaci el punt de rotació fins a l'origen), i b) després d'aplicar la rotació, desfer la translació.

Atès que el punt de rotació és el (2, 3), la matriu de translació serà:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Així doncs, la matriu composta translació-rotació-translació serà:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El següent pas és determinar la matriu d'escalatge, que serà:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, la matriu resultant d'aplicar la rotació més l'escalatge (en aquest ordre) serà:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 15 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

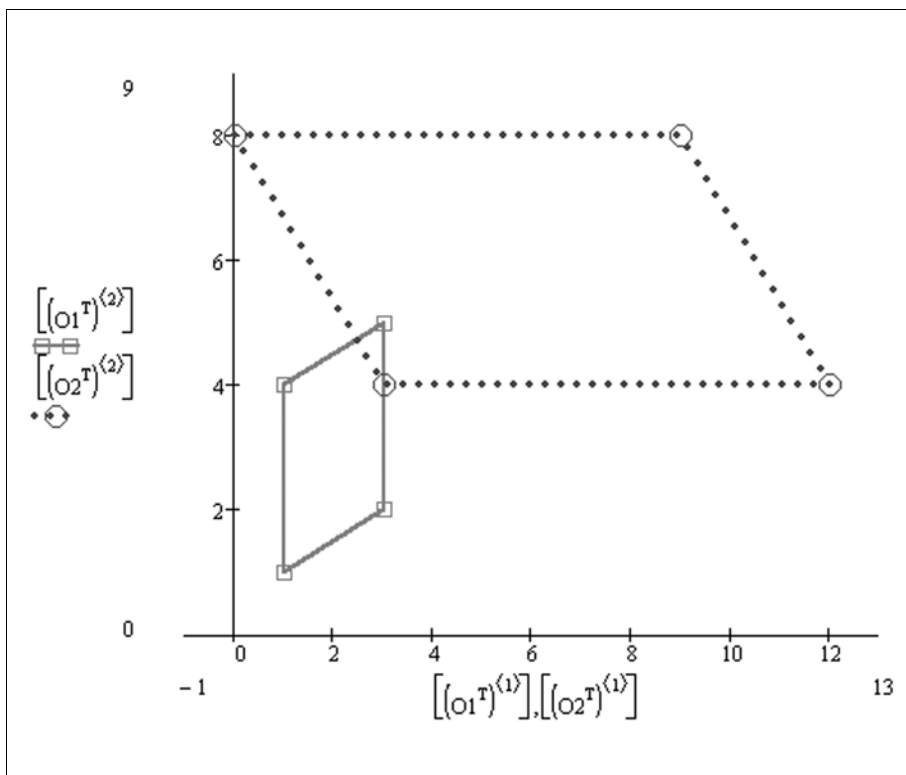
(observeu que l'ordre de les matrius és l'invers a l'ordre de les transformacions associades, essent la situada en l'extrem dret la primera a aplicar-se i la situada en l'extrem esquerre, l'última).

En multiplicar aquesta matriu per cada un dels vectors columna que contenen les coordenades del polígon original, obtenim les coordenades del polígon resultant:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A la figura 33, generada amb Mathcad, es mostra el polígon original i el polígon resultant després de la doble transformació:

Figura 33



2. Les matrius de rotació i escalatge són les mateixes que en l'exercici anterior. El que canvia ara és l'ordre en què aquestes matrius s'apliquen. Ara, la matriu resultant d'aplicar l'escalatge més la rotació (en aquest ordre) serà:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Amb això les coordenades del polígon resultant seran:

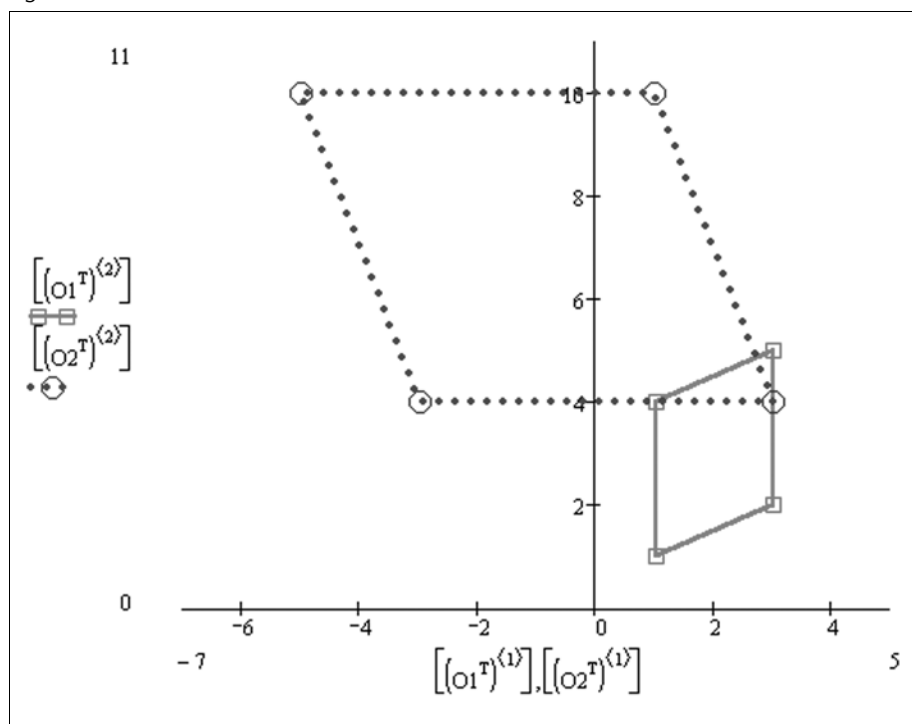
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Queda clar, doncs, que l'ordre en què s'apliqui cada transformació és rellevant per al resultat final (o, vist d'una altra manera, el producte de matrius no és commutatiu).

La figura 34, obtinguda amb Mathcad, ens permet comprovar-ho visualment:

Figura 34



3. En primer lloc, trobarem la matriu de rotació \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on $\theta = \pi$, *i. e.*:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara bé, atès que es tracta d'una rotació genèrica (no sobre l'origen), serà necessari: a) aplicar una translació abans de la rotació (la translació que desplaci el punt de rotació fins a l'origen), i b) després d'aplicar la rotació, desfer la translació.

Atès que el punt de rotació és el (0, 1), la matriu de translació serà:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Així doncs, la matriu composta translació-rotació-translació serà:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El següent pas és determinar la matriu d'escalatge. Si es tractés d'un escalatge a partir de l'origen, la matriu seria:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara bé, atès que es tracta d'un escalatge a partir d'un punt genèric, resultarà necessari aplicar una translació abans d'aplicar l'escalatge i, després d'aplicar aquest, desfer la translació. La matriu de translació serà:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Així que la matriu resultant d'aplicar translació-escalatge-translació (és a dir, la matriu d'escalatge a partir del punt donat) serà:

$$\mathbf{E} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{U} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, la matriu resultant d'aplicar la rotació més l'escalatge (en aquest ordre) serà:

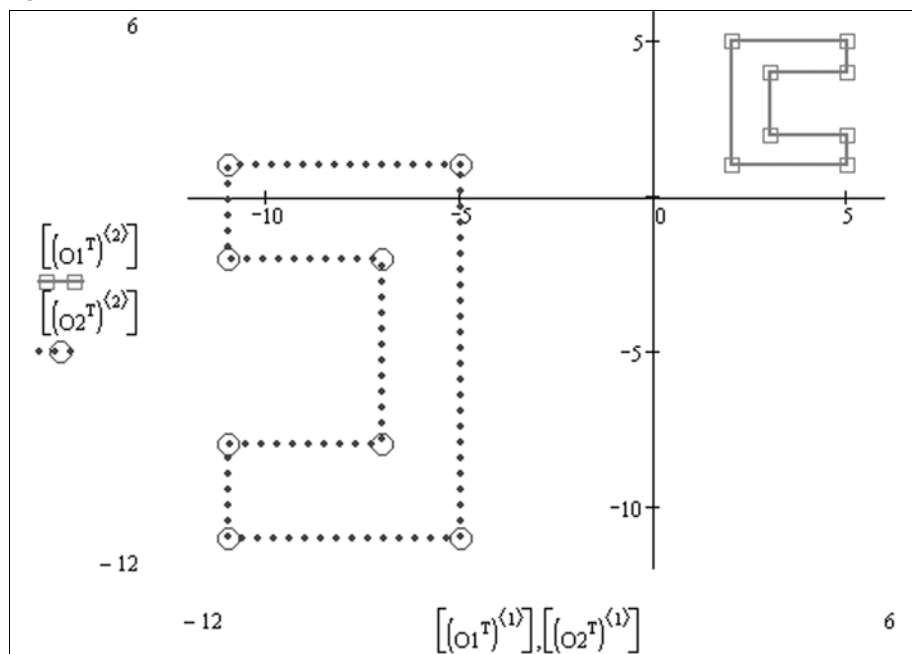
$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En multiplicar aquesta matriu per cada un dels vectors columna que contenen les coordenades del polígon original, obtenim les coordenades del polígon resultant:

$$\begin{aligned} E \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & E \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & E \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} & E \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ E \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} & E \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -11 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} & E \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} & E \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En la figura 35, generada amb Mathcad, es mostra el polígon original i el polígon resultant després de la doble transformació:

Figura 35



4.

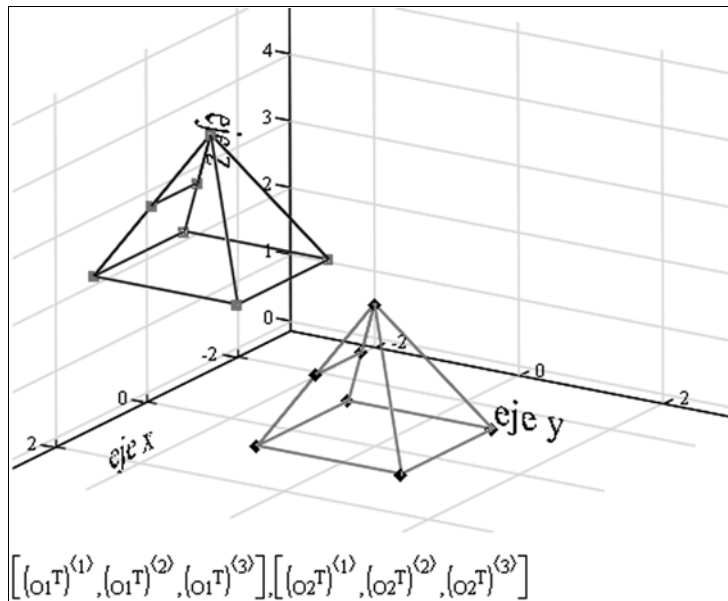
a) La matriu amb les coordenades dels vèrtexs i la matriu de translació seran, respectivament:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, les noves coordenades seran:

$$T \cdot O = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 36



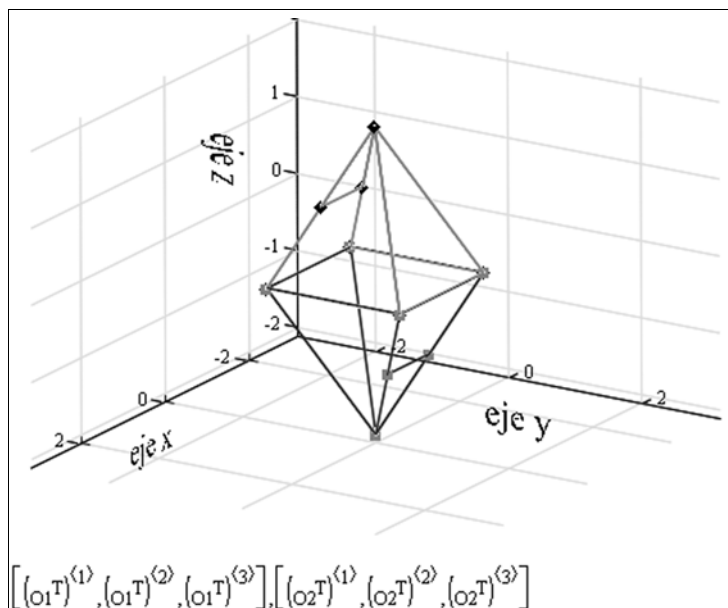
b) La matriu associada a una rotació de $\theta = 180^\circ$ al voltant de l'eix x és:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, les noves coordenades seran:

$$R \cdot O = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 37



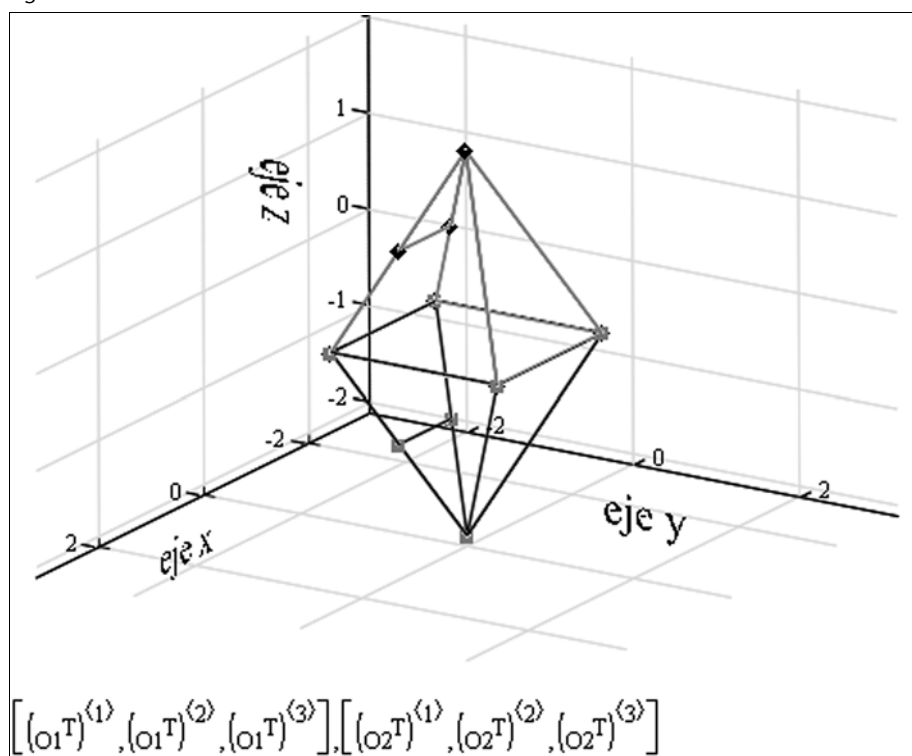
c) La matriu associada a una rotació de $\theta = 180^\circ$ al voltant de l'eix y és:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, les noves coordenades seran:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 38



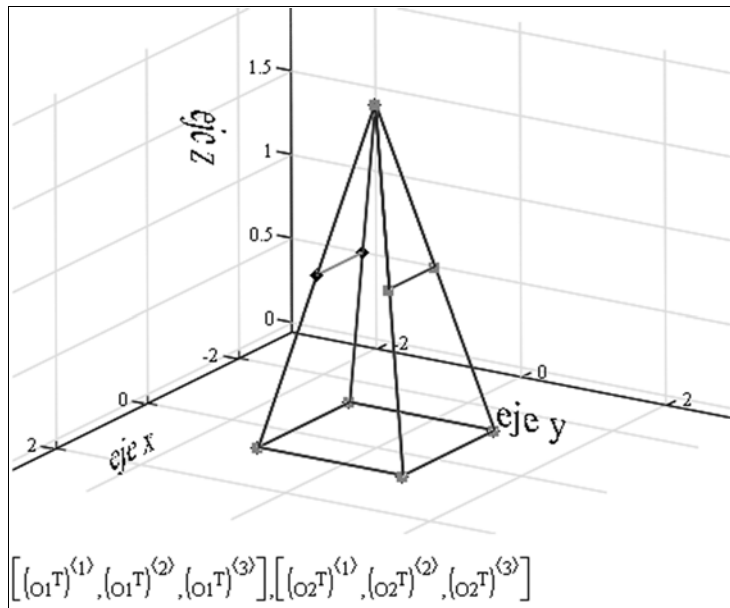
d) La matriu associada a una rotació de $\theta = 180^\circ$ al voltant de l'eix z és:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, les noves coordenades seran:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 39



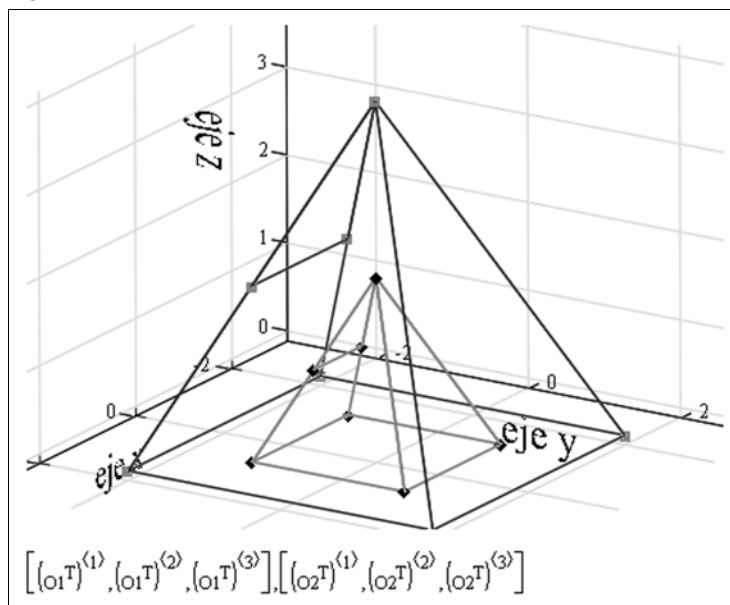
e) La matriu associada a un escalatge uniforme de factor 2 és:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, les noves coordenades seran:

$$S \cdot O = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 40



f) Ja hem vist que la matriu associada a un escalatge uniforme de factor 2 a partir de l'origen és:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara bé, en aquest cas el punt fix no és l'origen de coordenades, sinó el (1,2,1). Això significa que abans de poder aplicar l'escalatge anterior, s'haurà de realitzar una translació per a portar el punt fix a l'origen i que, una vegada realitzat l'escalatge, caldrà desfer la translació anterior.

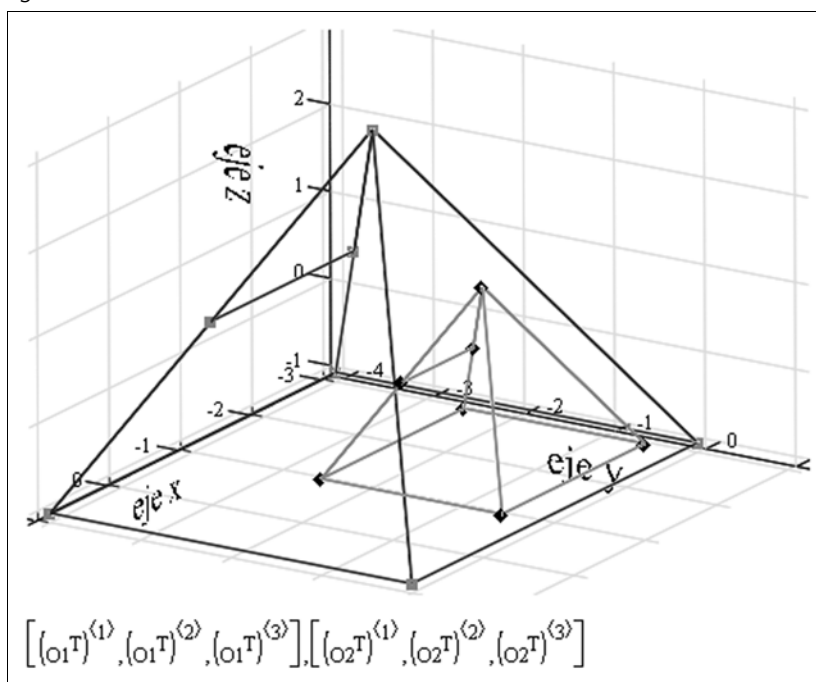
La matriu de translació que desplaça el punt fix (1,2,1) a l'origen és:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Així que la matriu resultant d'aplicar translació-escalatge-translació i les noves coordenades de l'objecte seran, respectivament:

$$T^{-1} \cdot S \cdot T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T^{-1} \cdot S \cdot T \cdot O = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & -4 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 41



5.

a) L'àrea del triangle inicial es calcula fàcilment comprovant que es tracta d'un triangle rectangle. L'angle recte el tenim situat en el vèrtex A, i els costats sobre aquest vèrtex mesuren una unitat, per tant, la seva àrea és $1/2$.

Tal com hem vist en els apunts, tenim que l'expressió matricial d'un escalatge a partir de l'origen és del tipus:

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on k és el factor d'escala que desconeixem.

Ara aplicarem l'escalatge al triangle, és a dir, als vèrtex del triangle:

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ 2k \\ 1 \end{pmatrix}$$

De manera que el triangle que ens resulta després d'aplicar l'escalatge és:

$$T' \text{ de vèrtexs } A' = (k, k), B' = (2k, k) \text{ i } C' = (2k, 2k)$$

L'àrea del triangle final la podem calcular fent servir que T' és un triangle rectangle on l'angle recte està situat en A' i les arestes de T' en A' mesuren k .

Per tant, l'àrea de T' és $(k \cdot k)/2$.

Finalment, l'enunciat ens diu que l'àrea de T' ha de ser quatre cops la de T , és a dir, 2. Per tant, ens cal que es verifiqui.

$$(k \cdot k)/2 = 2$$

De manera que, resolent l'equació, tenim que $k = 2$.

b) Per a fer un gir sobre un punt que no sigui l'origen, procedirem tal com hem vist en el subapartat 3.3 i els exercici 1, 2 i 3. En primer lloc, cercarem la

translació que ens converteixi el punt $(-1, 0)$ en l'origen de coordenades, després en farem el gir que ens demanen i, finalment, retornarem l'origen al punt $(-1, 0)$.

La matriu de translació que ens converteix el punt $(-1, 0)$ en l'origen de coordenades és:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara, atès que la matriu genèrica de gir de centre l'origen és:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i com que l'angle del nostre gir és $\pi/2$, tenim que la matriu de rotació és:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriu de translació que ens converteix l'origen de coordenades en el punt $(-1, 0)$ és:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Així, la composició translació-rotació-translació serà:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara aplicarem la transformació al triangle, és a dir, als vèrtexs del triangle:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De manera que les noves coordenades dels vèrtexs de T són:

$$A_2(-2, 2) \quad B_2(-2, 3) \quad \text{i} \quad C_2(-3, 3).$$

c) En primer lloc, considerem que una matriu de translació és de la forma:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara, atès que la matriu genèrica de centre l'origen és:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara ens diuen que apliquem la rotació i després la translació, de manera que la transformació que ens resulta és:

$$A = T \cdot R$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara imposem que el vèrtex A es converteixi en A_3 , el B en B_3 i el C en C_3 :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) - \sin(\theta) + x \\ \sin(\theta) + \cos(\theta) + y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) - \sin(\theta) + x \\ 2\sin(\theta) + \cos(\theta) + y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) - 2\sin(\theta) + x \\ 2\sin(\theta) + 2\cos(\theta) + y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De manera que tenim 6 equacions útils a complir:

$$\begin{aligned}\cos(\theta) - \sin(\theta) + x &= -1 \\ \sin(\theta) + \cos(\theta) + y &= 0 \\ 2\cos(\theta) - \sin(\theta) + x &= -2 \\ 2\sin(\theta) + \cos(\theta) + y &= 0 \\ 2\cos(\theta) - 2\sin(\theta) + x &= -2 \\ 2\sin(\theta) + 2\cos(\theta) + y &= -1\end{aligned}$$

Ara tenim que de la primera i la tercera $-\sin(\theta) = -1$ i de la segona i la quarta $\cos(\theta) = 0$, ara fem servir aquesta informació en la primera i segona equació i tenim que $x = 0$ i que $y = -1$.

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.

a) Matriu de la translació T:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriu de la rotació R:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{11\sqrt{2}}{2} - 6 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriu de la composició R · T:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{11\sqrt{2}}{2} - 6 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{9\sqrt{2}}{2} - 6 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{17\sqrt{2}}{2} + 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Transformat de $P_1(0, -8)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{9\sqrt{2}}{2} - 6 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{17\sqrt{2}}{2} + 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17\sqrt{2}}{2} - 6 \\ \frac{9\sqrt{2}}{2} + 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformat de $P_2(-4, 0)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{9\sqrt{2}}{2} - 6 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{17\sqrt{2}}{2} + 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} - 6 \\ \frac{13\sqrt{2}}{2} + 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformat de $P_3(0, 8)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{9\sqrt{2}}{2} - 6 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{17\sqrt{2}}{2} + 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 6 \\ \frac{25\sqrt{2}}{2} + 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformat de $P_4(4, 0)$

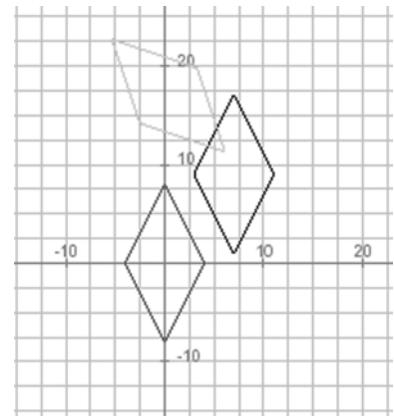
$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{9\sqrt{2}}{2} - 6 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{17\sqrt{2}}{2} + 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{2}}{2} - 6 \\ \frac{21\sqrt{2}}{2} + 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) i d) Vegeu la pantalla Wiris:

```

Parallelogram de vertices
P1=punt(0,-8); P2=punt(-4,0);P3=punt(0,8);P4=punt(4,0);
P:=poligon(P1,P2,P3,P4);
O1=punt(7,9); O=punt(0,0);
v:=O1-O;
C1=punt(-6,5);
TP és el transformat de P per la translació de vector (7,9)
TP:=translació(v,P);
RTP és el transformat de TP per la rotació de centre C1=(-6,5) i angle 45°
RTP:=rotació(C1,45°TP) → rotació(C1,45°TP)
dibuixa({P},{color=vermell}) → tauler1
dibuixa({TP},{color=blau}) → tauler1
dibuixa({RTP},{color=verd}) → tauler1
TP → (7,1)-(3,9)-(7,17)-(11,9)
RTP → ( (17·√2)/2 - 6, (9·√2)/2 + 5 ) - ( (5·√2)/2 - 6, (13·√2)/2 + 5 ) - ( (√2)/2 - 6, (25·√2)/2 + 5 ) - ( (13·√2)/2 - 6, (21·√2)/2 + 5 )
Per calcular l'àrea de P:
àrea(P) → 64
Si apliquem a P un escalatge uniforme de raó 9, la seva àrea es 9^2 vegades més gran:
64·9^2 → 5184

```



7. Un cop ja sabem quin és l'angle de rotació (que és $\frac{\pi}{2}$), trobem la matriu de rotació:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ això és: } R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com que es tracta d'una rotació genèrica (no sobre l'origen), serà necessari aplicar una translació (la translació que desplaci el punt de rotació fins a l'origen), i després d'aplicar la rotació, desfer la translació.

Atès que el que volem trobar és el punt de rotació, l'anomenarem (x, y) , i la matriu de translació serà:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Així, doncs, la matriu composta translació-rotació-desfer translació serà:

$$A = T^{-1} \cdot R \cdot T$$

Amb l'ajuda de la Wiris, fem aquests càlculs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & x+y \\ 1 & 0 & -x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observació

Observeu que l'ordre de les matrius és invers a l'ordre de les transformacions associades, essent la situada a l'extrem dret la primera transformació a aplicar-se, i la situada a l'extrem esquerre, la darrera.

Per tant, la matriu resultant d'aplicar la rotació inicial (la que posa a l'enunciat de l'exercici) és:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & x+y \\ 1 & 0 & -x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I, en multiplicar aquesta matriu pel punt inicial s'obté les coordenades del punt transformat. Si apliquem això obtenim el punt de rotació i l'igualem al punt transformat, tenim la solució a l'exercici:

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & -1 & x+y \\ 1 & 0 & -x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y+2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\left\| \text{resol} \left\{ \begin{matrix} x+y=2 \\ -x+y+2=2 \end{matrix} \right\} \rightarrow \{ \{x=1, y=1\} \} \right\|$$

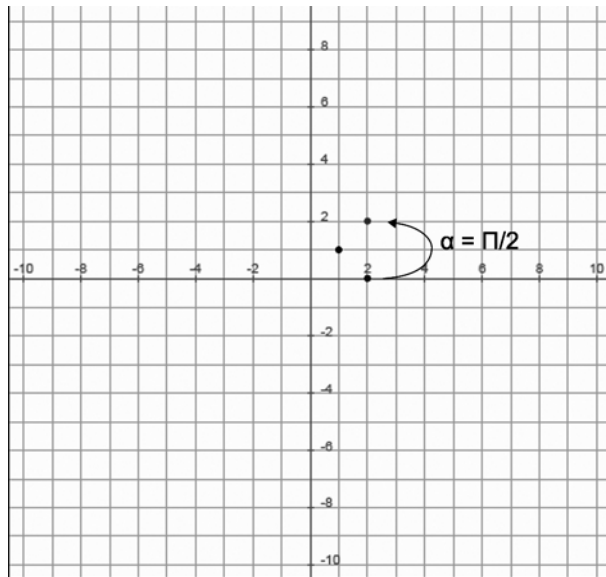
Per tant, el punt de rotació és el punt $(1, 1)$.

Gràficament, amb la Wiris, podem comprovar els resultats:

```

P=punt(2,0); R=punt(1,1); α=90°;
P1=rotacio(R,α,P);
dibuixar(P,{color=blau});
dibuixar(P1,{color=vermell});
dibuixar(R,{color=negre});

```



8.

a) En primer lloc, trobarem la matriu de rotació \mathbf{R} . Com que $\theta = \pi$, és te:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ara bé, com que es tracta d'una rotació genèrica, serà necessari: a) aplicar una translació abans de la rotació (per desplaçar el punt de rotació fins a l'origen), i b) després d'aplicar la rotació, desfer la translació anterior.

Com que el punt de rotació és el (2, 1), la matriu de translació serà:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per tant, la matriu composta translació-rotació-translació serà:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriu d'escalatge:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per tant, la matriu resultant d'aplicar la rotació més l'escalatge (en aquest ordre) serà:

$$S \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

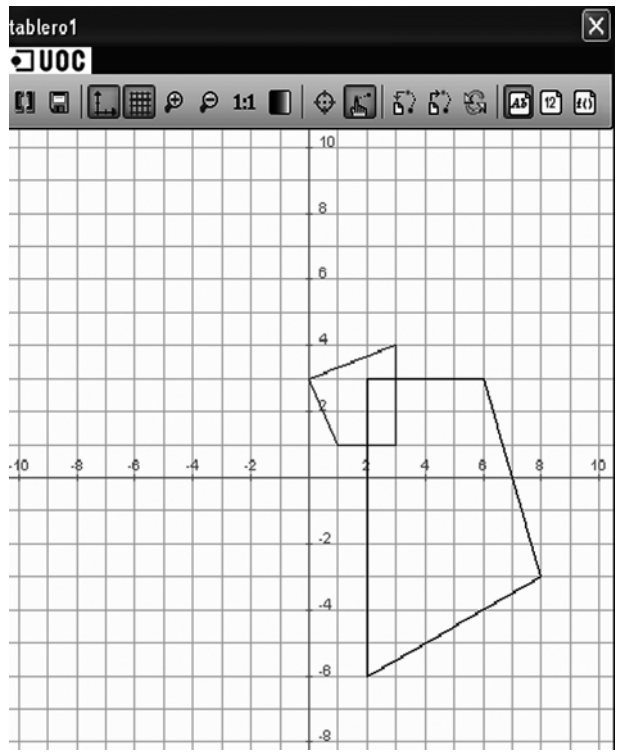
En multiplicar aquesta matriu per cada un dels vectors columna que contenen les coordenades del polígon original, obtenim les coordenades del polígon resultant:

$$S \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad S \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad S \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) A continuació es mostra un gràfic que conté els dos polígons, l'original –el “petit”– i el resultant –el “gran”– després d'aplicar les transformacions demanades (primerament es mostren les intruccions Wiris utilitzades i posteriorment apareix el gràfic –que és el que es demana a l'exercici–; com ja deveu saber, la Wiris permet fer rotacions automàticament, amb una sola instrucció. Tanmateix, no es poden fer escalats si no s'indiquen les instruccions que cal seguir):

```
A1=punt (1,1);A2=punt (3,1);A3=punt (3,4);A4=punt (0,3);P=poligon(A1,A2,A3,A4);
P1=rotació(punt(2,1),180°,P);
R=  $\begin{pmatrix} \cos(180^\circ) & -\sin(180^\circ) & 0 \\ \sin(180^\circ) & \cos(180^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; T=  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; A=T-1·RT; S=  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
S·A·  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  →  $\begin{pmatrix} 6 \cdot RT \\ 6 \cdot RT \\ RT \end{pmatrix}$ 
S·A·  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  →  $\begin{pmatrix} 10 \cdot RT \\ 6 \cdot RT \\ RT \end{pmatrix}$ 
S·A·  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  →  $\begin{pmatrix} 10 \cdot RT \\ 15 \cdot RT \\ RT \end{pmatrix}$ 
S·A·  $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  →  $\begin{pmatrix} 4 \cdot RT \\ 12 \cdot RT \\ RT \end{pmatrix}$ 
AF1=punt (6,3);AF2=punt (2,3);AF3=punt (2,-6);AF4=punt (8,-3);PF=poligon(AF1,AF2,AF3,AF4);
dibuixar(P,{color=vermell});
dibuixar(PF,{color=blau});
```



Glossari

angle de rotació m Angle que determina la magnitud de la rotació al voltant de l'eix de rotació.

coordenades homogènies f Donat un punt $P(x, y)$ del pla, s'anomenen **coordenades homogènies del pla** les coordenades (xw, yw, w) , essent w un escalar no nul (és freqüent emprar $w = 1$ per a simplificar). La idea es pot generalitzar a més dimensions.

eix de rotació m Eix al voltant del qual es produeix el gir del punt o objecte.

escalatge m Aplicar un escalatge sobre un punt P consisteix a multiplicar per factors d'escala (un per eix) la distància entre P i el punt fix de l'escalatge P_0 . El resultat serà un nou punt $P' = S \cdot P$, essent S la matriu d'escalatge.

factors d'escala m En un escalatge, es consideren tants factors d'escala com eixos hi hagi. Cada factor d'escala es multiplica per la distància, mesurada sobre cada eix, entre el punt fix i el punt que s'ha d'escalar.

punt fix m Punt a partir del qual es produeix l'escalatge (els factors d'escala afecten la distància existent entre el punt al qual es vol aplicar l'escalatge i el punt fix).

rotació f Aplicar una rotació sobre un punt P consisteix a fer girar aquest punt al voltant d'un eix de rotació, el qual després d'això es convertirà en el punt $P' = R \cdot P$, essent R la matriu de rotació.

transformació afí en 2D f Una transformació afí en 2D sobre un punt $P(x, y)$ és una transformació de coordenades de la forma:

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2\end{aligned}$$

traslladar v tr Aplicar una translació sobre un punt P consisteix a desplaçar-lo en línia recta, el qual després d'això es convertirà en el punt $P' = P + T$, essent T el vector de translació.

vector de translació m Vector que indica la direcció, el sentit i la distància de desplaçament associada a una translació.

Bibliografia

Bibliografia bàsica

Foley, J. i altres (1994). *Introduction to Computer Graphics*. Addison-Wesley
Considerat per molts com un dels millors llibres per a introduir-se en el món de la programació de gràfics 3D. Presenta bastants exemples realitzats en C.

Hearn, D.; Pauline, M. (1996). *Computer Graphics. C version*. Prentice Hall.
Llibre complet sobre generació de gràfics amb ordinador. Inclou diversos capítols dedicats als fonaments matemàtics de la informàtica gràfica. Utilitza C en molts exemples.

Schneider, P.; Everly, D. (2003). *Geometric Tools for Computer Graphics*. Morgan Kaufmann Publishers.
Llibre complet que tracta amb profunditat els conceptes desenvolupats en aquest mòdul i d'altres de més avançats. Inclou codi en C de molts exemples.

Bibliografia complementària

Angel, E. (1996). *Interactive Computer Graphics: A top-down approach with OpenGL*. Addison-Wesley.

Berg, M. i altres (2000). *Computational Geometry*. Springer.

Mortenson, M. (1999). *Mathematics for Computer Graphics Applications*. Industrial Press.

Watt, A. (1999). *3D Computer Graphics*. Addison-Wesley.