Els nombres

Nombres naturals, principi d'inducció i nombres complexos

Francesc Pozo Montero
Núria Parés Mariné
Yolanda Vidal Seguí
Alfonsa García López
Àgata Lapedriza Garcia

PID_00151933

Índex

Introducció

En aquest mòdul parlarem, tal com el seu nom indica, de nombres. En particular, posarem un èmfasi especial en dos conjunts concrets de nombres: els naturals i els complexos.

Les propietats del conjunt dels nombres naturals són bàsiques per als conceptes matemàtics més essencials i el seu estudi és tan antic com la història de la humanitat.

En aquest mòdul, introduirem una tècnica de demostració de propietats relatives als nombres naturals, el principi d'inducció. Demostrar que certa propietat es compleix per als infinits nombres naturals és impossible si es pretén comprovar-la d'un en un. La inducció matemàtica és una tècnica senzilla que ens permetrà assegurar que una propietat es compleix per a tots els nombres, simplement veient que es compleix per al primer i que el fet que es complei-xi per a un fa que la propietat es verifiqui per al següent. En el mòdul farem exercicis per a demostrar propietats amb aquesta tècnica.

En relació amb els nombres complexos, podem dir que aquests són àmpliament utilitzats en el modelat matemàtic de processos físics. Entre aquests processos podem destacar l'anàlisi de corrents elèctrics i de senyals electrònics.

En aquest mòdul veurem què són els nombres complexos, com es representen i com es manipulen.

Objectius

Els objectius bàsics que ha assolirà l'estudiant una vegada treballats els continguts d'aquest mòdul són els següents:

1. Entendre el concepte de demostració per inducció i saber aplicar el principi d'inducció per a demostrar propietats relatives a nombres naturals.
2. Verificar, usant el principi d'inducció, que un algorisme fa la tasca que es proposa.
3. Saber manipular el llenguatge matemàtic algebraic i geomètric, i entendre el seu paper en l'expressió del coneixement científic i tecnològic.
4. Conèixer el conjunt dels nombres complexos, saber manipular-los i entendre com s'apliquen en les enginyeries.
5. Saber analitzar una situació i desenvolupar la capacitat de resoldre problemes amb les tècniques adequades.
6. Conèixer programari matemàtic bàsic i saber usar-lo per a fer càlculs amb els diferents tipus de nombres.

1. L'origen dels nombres

Els nombres, com ara el 2, el -3, la fracció $\frac{1}{2}$ o π, són creacions humanes que han respost necessitats diverses. Per exemple, des de l'antiguitat, els éssers humans han tingut la necessitat de comptar:

- les ovelles d'un ramat,
- el nombre d'arbres d'una petita plantació,
- el nombre de fills i filles.

D'aquesta manera sorgeix el concepte dels **nombres naturals**, que representem amb el símbol $\mathbb{N}$, i que és un conjunt format pels nombres 1, 2, 3, ... Això ho indiquem d'aquesta manera:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

A vegades es considera que el nombre *zero* també forma part del conjunt dels nombres naturals. En aquest cas escriurem:

El nombre zero

Recordeu que, per exemple, els romans no tenien cap símbol per a representar el nombre *zero*.

$$\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Per a indicar que el nombre 3 és un nombre natural, ho escriurem com $3 \in \mathbb{N}$, que es llegeix: "el 3 pertany al conjunt dels nombres naturals".

Com que comptar és la primera necessitat que han intentat cobrir totes les cultures, fins i tot les més antigues, els primers nombres manejats són els nombres naturals.

Clarament, el nombre natural 2 pot representar el fet "tinc dues ovelles al meu ramat". Ara bé, si fruit d'un acord comercial, passo de tenir dues ovelles a deure'n dues, com representem aquest fet? En aquest cas, doncs, podem recórrer als **nombres enters**, que es representen amb el símbol $\mathbb{Z}$, i que estan formats pels nombres naturals, els nombres naturals amb **signe negatiu** i el zero. Aquest conjunt el podem representar d'aquesta manera:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

El conjunt numèric següent correspon al dels **nombres racionals**, que és format per les fraccions i es representa amb el símbol $\mathbb{Q}$. La seva creació es basa en la necessitat de poder representar les parts d'una totalitat, com ara el fet de dividir un terreny agrícola en tres parts iguals com a part d'una herència. En aquest sentit, aquest conjunt el podem representar d'aquesta manera:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ tals que } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Recordeu que $a \in A$ es llegeix "a pertany a A".

és a dir, és el conjunt format pels quocients o fraccions de nombres enters, en què és imprescindible que el denominador b sigui diferent de zero.

Exemples de nombres racionals

Són nombres racionals els nombres $\frac{1}{2}$ o $\frac{2}{-3}$, és a dir, els nombres l'expressió decimal dels quals té un patró que es repeteix. Per exemple:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5000\ldots = 0{,}5$$

$$\frac{2}{-3} = -0{,}6666\ldots = -0{,}\bar{6} \text{ o bé}$$

$$\frac{211}{990} = 0{,}21313\ldots = 0{,}2\overline{13}$$

Però també podem escriure:

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2}$$

$$-3 = \frac{-3}{1} = \frac{3}{-1}$$

és a dir, també els nombres naturals i els nombres enters són nombres racionals.

En aquest sentit, podem escriure, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, que es llegeix: "el conjunt dels nombres naturals és un subconjunt del conjunt dels nombres enters que, a la vegada, és un subconjunt del conjunt dels nombres racionals". És a dir, tot nombre natural és també un nombre enter i tot nombre enter és, a la vegada, un nombre racional.

Recordeu que $A \subset B$ es llegeix "El conjunt A està inclòs en el conjunt B".

La necessitat humana de disposar de conjunts numèrics es pot plantejar també en termes d'equacions. Per exemple, l'equació $x + 2 = 0$ només es pot resoldre si disposem del conjunt dels nombres enters $\mathbb{Z}$, ja que la solució és el nombre enter -2, és a dir, $x = -2 \in \mathbb{Z}$. En general, l'equació

$$x + a = 0, \text{ on } a \text{ és un nombre natural}$$

té com a solució el nombre enter $-a$, és a dir, $x = -a \in \mathbb{Z}$.

Exemple

L'equació $x + 2 = 0$ pot representar un problema com ara: "A quina planta d'un edifici sóc (x) si quan pugi dues plantes (+2) seré a la planta baixa (0)?".

De la mateixa manera, l'equació $2x = 3$ només es pot resoldre amb l'ajuda del conjunt dels nombres racionals $\mathbb{Q}$, ja que la solució és el nombre racional $\frac{3}{2}$, és a dir $x = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$. En general, l'equació

$$bx = a, \text{ en què } a, b \text{ són nombres enters i } b \neq 0$$

té com a solució el nombre racional $\frac{a}{b}$, és a dir, $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

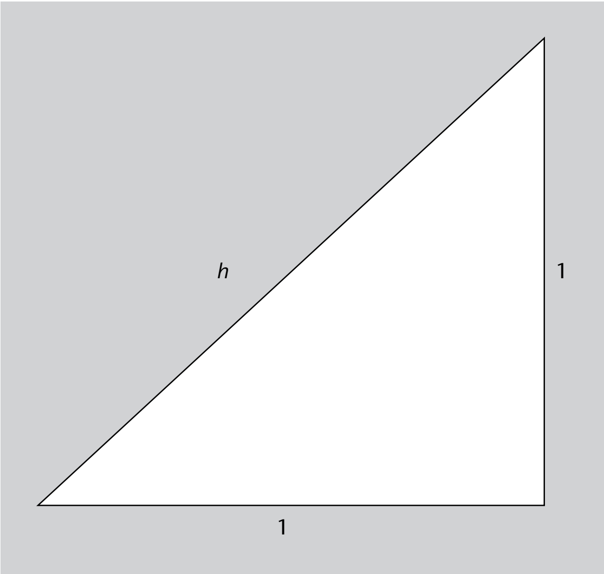
Exemple

L'equació $2x = 3$ pot respondre el problema següent: "Avui he pres dos cafès ($2x$) al bar del meu poble i he pagat un total de 3 euros; quin és el preu d'un cafè?".

1.1. Hi ha també equacions que no es poden resoldre en el conjunt dels nombres racionals $\mathbb{Q}$?

Imagineu que volem calcular la hipotenusa d'un triangle rectangle amb catets de longitud 1, tal com es veu a la figura 1.

Figura 1. Triangle rectangle



Segons el teorema de Pitàgores, el quadrat de la hipotenusa és igual a la suma dels quadrats dels catets, és a dir,

Pitàgores de Samos (aprox. 582 aC – 507 aC), matemàtic i filòsof grec.

$$h^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Els grecs ja van poder demostrar que l'equació:

$$h^2 = 2$$

per senzilla que pugui semblar, no té cap solució que es pugui expressar com a fracció. Ara bé, tots sabem que una de les solucions d'aquesta equació és el nombre $\sqrt{2}$.

L'altra solució de $h^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ **és** $-\sqrt{2}$.

Es pot demostrar que el nombre $\sqrt{2}$ no és un nombre racional. Els nombres que no són racionals reben el nom de **nombres irracionals** i es representen habitualment amb el símbol $\mathbb{I}$.

Aquest tipus de nombres representen una fita en la història de la geometria i van ser l'inici d'una profunda crisi de la secta pitagòrica en la qual van aparèixer. En efecte, el quadrat, que, com el triangle rectangle que acabem de veure, és una de les figures geomètriques més simples, proporciona un ens geomètric incòmode, la diagonal, que no és commensurable amb el costat. D'aquesta manera quedava eliminada de la geometria la possibilitat de mesurar sempre amb exactitud (amb escaire i cartabó!). Els nombres incommensurables dels grecs corresponen al que nosaltres anomenem nombres irracionals.

Diagonal incommensurable

Que la diagonal sigui incommensurable amb el costat significa que no es pot expressar com una fracció del costat.

També són nombres irracionals el nombre π (que val aproximadament 3,1416), el nombre e (que val aproximadament 2,7183) o les arrels quadrades dels nombres primers $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \ldots$

Expressió amb decimals

Recordeu que els nombres racionals, quan els expressem en forma decimal, són nombres amb una quantitat finita de decimals o bé amb una quantitat infinita de decimals però amb un patró periòdic. Per exemple:

$$\frac{3}{4} = 0{,}75, \quad \frac{5}{33} = 0{,}1515\ldots = 0{,}\overline{15}$$

En canvi, els nombres irracionals, quan els expressem en forma decimal tenen un nombre infinit de decimals sense cap tipus de periodicitat. Per exemple, el nombre π té infinits decimals sense cap mena de periodicitat:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510\ldots$$

Es defineix el conjunt dels **nombres reals**, que representem amb la lletra $\mathbb{R}$, com la unió dels conjunts de nombres racionals i nombres irracionals, és a dir:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Recordeu que fem servir el símbol $\cup$ per a designar la unió de conjunts.

Aquesta es llegeix "el conjunt dels nombres reals és la unió del conjunt de nombres racionals i del conjunt de nombres irracionals". Finalment tenim que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

És interessant remarcar que, tot i que hem anomenat $\mathbb{N}$ el conjunt dels nombres naturals, els nombres reals $\sqrt{2}$ o π també són "naturals", en el sentit que no són una invenció matemàtica sinó que apareixen a la natura. Per exemple:

- Quina és la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat igual a un metre?
- Quina és l'àrea d'una circumferència de radi igual a un metre?

1.2. Tota equació de segon grau té solució?

Ja hem vist que per a poder resoldre equacions lineals de la forma $ax + b = 0$ en què a i b són nombres enters, no en tenim prou amb els nombres enters, sinó que cal introduir els nombres racionals. De la mateixa manera, hem vist que per a resoldre algunes equacions de segon grau, com ara $x^2 = 2$ necessitem els nombres reals (que inclouen els nombres irracionals).

El problema el trobem ara quan volem resoldre l'equació:

$$x^2 = -1$$

Sabem que no existeix cap nombre real tal que el seu quadrat sigui un nombre negatiu. Es podria dir, doncs, que $x^2 = -1$ no té solucions.

Recordem que per a resoldre l'equació $x^2 = 2$ vam imaginar el nombre $\sqrt{2}$; així, d'una manera anàloga, per a resoldre l'equació $x^2 = -1$ es crea un nombre nou: $\sqrt{-1}$. A aquest nombre se li assigna el símbol i. Així, per a obtenir solucions de l'equació $x^2 = -1$ i de totes les equacions de segon grau, $ax^2 + bx + c = 0$, necessitarem crear un nou conjunt: el conjunt dels **nombres complexos**.

També és habitual fer servir el símbol j per a simbolitzar el nombre $\sqrt{-1}$.

El que proposem és un salt creatiu important, ja que es tracta de crear del "no-res" una solució per a un tipus d'equacions, sense conformar-nos amb el fet que existeixin equacions sense solució. Els avantatges d'aquest salt creatiu superen les incomoditats inicials.

2. Els nombres naturals: el principi d'inducció

Tal com hem vist en el apartat anterior, podríem dir que els nombres naturals s'han inventat per a comptar, encara que tenen altres utilitats. Per exemple, també serveixen per a ordenar i se solen utilitzar com a codis identificadors (el DNI, el número de telèfon, el número de la Seguretat Social, etc.). En enginyeria moltes vegades s'ha de treballar amb grans masses de dades: per exemple, pensem en un programa que ordena alfabèticament el cens d'una ciutat. Sol interessar saber que el programa funciona correctament amb qualsevol nombre de dades d'entrada, i això se sol expressar dient que una certa propietat $P(n)$ es verifiqui per a tot nombre natural n.

2.1. Exemple introductori

El següent algorisme, que anomenem **algorisme MAX** determina el nombre més gran d'una llista:

Algorisme

Conjunt de regles per a resoldre un problema en un nombre finit de passos.

- **Entrada**: una llista amb n nombres $L = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
- **Sortida**: el nombre més gran de la llista L, que representarem com $MAX(L)$ i que s'emmagatzemarà a la variable m.
- **Passos de l'algorisme**:

  1) Prenem el primer element de la llista, x_1, i inicialitzem la variable m amb aquest valor. És a dir:

$$m = x_1$$

  2) Mentre no hem arribat al darrer element de la llista:

  – Prenem el següent element de la llista, x_j.
  – Si $x_j > m$, aleshores $m = x_j$.

Vegem un exemple d'aplicació de l'algorisme MAX amb $L = \{2, 17, 5, 3\}$.

1) Prenem el primer element de la llista, $x_1 = 2$, i inicialitzem m, $m = 2$.

2) Mentre no hem arribat al darrer element de la llista, anem prenent l'element següent i mirem si hem d'actualitzar m:

- Prenem el següent element de la llista, $x_2 = 17$. Com que $17 > m$, ja que $m = 2$, fem $m = 17$.
- Prenem l'element de la llista següent, $x_3 = 5$. Com que $5 < m$ (perquè m ara val 17), no cal que fem res.

- Prenem l'element de la llista següent, $x_4 = 3$. Com que $3 < m$, no cal que fem res, i ja hem acabat perquè hem arribat al final de la llista.

En aquest cas, com que la llista és molt petita, veiem clarament que l'algorisme ha funcionat correctament, però si el programem i l'usem per a buscar el màxim d'una llista gran (de milions d'elements, per exemple), podem estar segurs que actuarà correctament? La idea que permet raonar la correcció de l'algorisme es resumeix en aquests punts:

- És evident que si $n = 1$, l'algorisme calcula el màxim correctament.
- Si per a $n > 1$ l'algorisme és capaç de trobar correctament el màxim m d'una llista de grandària n, com que el que fa després és comparar aquest nombre m amb el nou element de la llista, és clar que el resultat serà el màxim correctament trobat de la llista de grandària $n + 1$.

Aquesta idea fa al·lusió a una tècnica de demostració matemàtica molt emprada per a demostrar propietats de nombres naturals: el principi d'inducció.

El **principi d'inducció** es pot fer servir quan es vol demostrar que una determinada propietat és certa per a tot nombre natural n i la tècnica consisteix en el següent:

- Demostrar primer que la propietat és certa per a $n = 1$.
- Després demostrar que si és certa per a n, llavors ho és per a $n + 1$.

Il·lustració del principi d'inducció: si empenyem la primera fitxa, com que en caure cada fitxa aquesta empeny la següent, sabrem que cauran totes.

És com si tinguéssim una fila llarga de fitxes de dominó posades l'una rere l'altra. Si empenyem la primera i provem que cada una en caure empeny la següent, sabrem que cauran totes. El principi d'inducció es basa en la propietat dels nombres de ser un conjunt ben ordenat.

2.2. El bon ordre dels nombres naturals

El conjunt dels nombres naturals és un conjunt ben ordenat, la qual cosa vol dir que qualsevol subconjunt de $\mathbb{N}$ té un element que és el més petit de tots.

Exemple

L'element més petit del conjunt $\mathbb{N}$ és l'1.

El conjunt dels nombres parells té un element, el 2, que és el més petit de tots.

L'element més petit de tots els nombres naturals que coincideixen amb la suma dels seus divisors (llevat el nombre mateix) és el 6.

2.3. Formulació bàsica del principi d'inducció

Sigui P una propietat definida sobre el conjunt dels nombres naturals que satisfà les dues condicions següents:

1) $P(1)$ és vertader.

2) Per a tot n si $P(n)$ és vertader, també ho és $P(n+1)$.

Llavors, la propietat es verifica per a tot nombre natural.

Nota

La comprovació de la primera propietat del principi d'inducció es denomina *pas base*, i la de la segona, *pas d'inducció*. Se sol dir que $P(n)$ és la hipòtesi d'inducció que s'empra per a provar $P(n+1)$.

Exemple

El principi d'inducció permet verificar moltes conjectures referents a nombres naturals. Per exemple, quant val la suma dels n primers nombres senars?

- Si $n = 1$, la suma del primer nombre senar és 1.
- Si $n = 2$, la suma dels 2 primers nombres senars és $1 + 3 = 4$.
- Si $n = 3$, la suma dels 3 primers nombres senars és $1 + 3 + 5 = 9$.
- Si $n = 4$, la suma dels 4 primers nombres senars és $1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

Sembla que sempre surt n^2, però, serà veritat per a qualsevol n? Formularem la propietat i la demostrarem per inducció.

Propietat $P(n)$: la suma dels n primers nombres senars és n^2.

Podem formular la propietat en termes algebraics per a escriure-la de manera més precisa. Per a això, cal adonar-se que l'enèsim nombre senar és $2n - 1$ (el primer és 1, el segon és 3, etc.) i es pot escriure: $P(n) : 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Aquest és el resultat que demostrarem per inducció:

1) Pas base:
$P(1) : 1 = 1^2$, que òbviament és vertader.

2) Pas d'inducció:
suposem que és certa aquesta hipòtesi d'inducció,
$P(n) : 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$
i a partir d'aquí intentem provar:
$P(n + 1) : 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$
Per a això, utilitzem la hipòtesi d'inducció i substituïm els n primers sumands del primer membre per n^2:
$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$
Per tant, hem comprovat que $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, i la demostració s'ha acabat.

Problema 1

S'explica que quan Gauss tenia uns set anys, el seu professor, perquè estiguessin una estona callats, els va fer sumar tots els nombres naturals des de l'1 fins al 1000. És a dir, $1 + 2 + 3 + \cdots + 1000$. *En menys de 5 minuts Gauss havia acabat. Havia sumat el primer més l'últim, el segon i el penúltim, etc., i, veient que* $1 + 1000 = 2 + 999 = 3 + 998 = \ldots = 1001$, *simplement, havia fet* $500 \cdot 1001 = 500500$.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemàtic, astrònom i físic alemany.

Demostreu per inducció que el mètode de Gauss és correcte per a qualsevol suma de n nombres naturals consecutius.

L'enunciat ens demana demostrar que la propietat $P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$ és certa per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Nota

L'expressió $1 + 2 + \cdots + n$ es pot escriure de manera abreviada com $\sum_{k=1}^{n} k$, que es llegeix: "sumatori, des de k igual a 1 fins a n, de k".

1) Pas base:
$P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$, que, òbviament, és vertader.

2) Pas d'inducció:

Suposem que és certa aquesta hipòtesi d'inducció: $P(n) : 1+2+\cdots+n = \frac{n}{2}(n+1)$ i a partir d'aquí intentem provar: $P(n+1) : 1+2+\cdots+(n+1) = \frac{(n+1)}{2}[(n+1)+1]$.

Per a això, utilitzem la hipòtesi d'inducció i substituïm els n primers sumands del primer membre per $\frac{n}{2}(n+1)$:

$$1+2+\cdots+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Passem a comú denominador per a compactar l'expressió de la dreta de la igualtat:

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} =$$

$$\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{2}[(n+1)+1]$$

Així doncs, hem comprovat que $1+2+\cdots+(n+1) = \frac{(n+1)}{2} + [(n+1)+1]$. Per tant ja hem acabat la demostració.

2.4. Aplicació del principi d'inducció: verificació d'algorismes

En algorísmica se sol utilitzar la inducció per a demostrar la correcció de determinats algorismes. Per exemple, recordem l'algorisme MAX de l'exemple introductori (subapartat 2.1.). Demostrarem que fa correctament la tasca proposada, raonant per inducció sobre el nombre n de dades de la llista:

1) Pas base. És evident que si la llista té una única dada, MAX calcula correctament el màxim.

2) Pas d'inducció. Suposem que l'algorisme MAX calcula correctament el màxim d'una llista de grandària n i considerem una llista de grandària $n+1$, $L = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$. Per a executar l'algorisme, el primer que hem de fer és treure l'últim element i emprar MAX per a calcular el màxim de la llista $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Per la hipòtesi d'inducció, MAX calcula correctament el màxim d'aquesta llista, ja que té grandària n. Sigui $m = \text{MAX}(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$. Per acabar, només hem de comparar m amb x_{n+1} i és clar que el nombre més gran dels dos serà el màxim de L calculat correctament.

3. Els nombres complexos

3.1. Exemple introductori

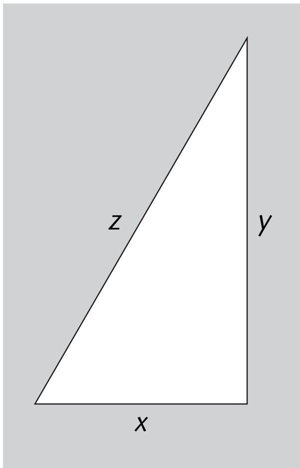
Al llarg de la història han aparegut diversos problemes que no tenien solució en el conjunt dels nombres reals. A continuació us presentem uns problemes històrics, en els quals ja es començava a intuir la necessitat d'un nou conjunt numèric: el conjunt dels nombres complexos.

Suposem que volem resoldre aquest problema, que va ser plantejat per Diofant d'Alexandria l'any 275 aC.

Problema 2

Considerem un triangle rectangle com el de la figura. Trobeu els costats del triangle (x, y i z) *que fan que el perímetre sigui igual a 12 i l'àrea igual a 7.*

El perímetre és la suma dels costats de tota figura geomètrica. En aquest cas, $x + y + z$.



Triangle rectangle

En la resolució d'aquest problema apareix aquesta equació:

$$6x^2 - 43x + 84 = 0$$

en què x és la longitud d'un dels costats del triangle.

La fórmula per a resoldre una equació de segon grau de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ és:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

en què l'expressió $\Delta = b^2 - 4ac$ rep el nom de *discriminant*. En el cas de l'exemple que estem considerant, podem veure que el discriminant és negatiu:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-43)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 84 = 1849 - 2016 = -167 < 0$$

i, per tant, no existeixen solucions reals. És a dir, no podem construir cap triangle d'àrea 7 i de perímetre 12.

Considerem ara aquest altre problema, que va ser plantejat per Girolamo Cardano l'any 1545.

Problema 3

Dividir el nombre 10 en dues parts, de manera que el seu producte sigui 40. És a dir, volem determinar dos nombres x i y tals que sumats donin 10 i que el seu producte sigui 40.

En aquest cas, les dues equacions que ens planteja l'enunciat són:

$$x + y = 10$$

$$xy = 40$$

en què, si aïllem la y de la primera equació i la substituïm en la segona, obtenim:

$$x(10 - x) = 40 \quad \text{o, equivalentment,} \quad x^2 - 10x + 40 = 0$$

Aquesta equació tampoc no té solucions reals. En aquest cas, però, Cardano mateix va dir que les dues solucions eren:

$$5 + \sqrt{-15} \quad \text{i} \quad 5 - \sqrt{-15}$$

Gauss va ser el primer que va donar el nom de **nombres complexos** a aquest tipus d'expressions.

Com ja ens ha passat abans, és ara el conjunt dels nombres reals que ens resulta insuficient per a trobar solucions a les equacions de segon grau. És per això que ens cal definir el nombre imaginari.

> Definim el nombre i de manera que $i^2 = -1$ o, dit d'una altra manera, $i = \sqrt{-1}$. El nombre i rep el nom de **nombre imaginari**.

Observeu ara que, com que el nombre imaginari i verifica que $i = \sqrt{-1}$, les solucions de l'equació $x^2 - 10x + 40 = 0$ es poden representar com

$$5 \pm \sqrt{-15} = 5 \pm \sqrt{15 \cdot (-1)} = 5 \pm \sqrt{15}\sqrt{-1} = 5 \pm \sqrt{15}\, i$$

René Descartes va ser el primer a fer servir el terme *nombre imaginari* l'any 1637.

Així doncs, tot i que en la resolució d'una equació de segon grau el discriminant sigui negatiu, sempre podrem trobar les solucions utilitzant el nombre imaginari i. Recordeu que el nombre i permet treballar amb arrels de nombres negatius.

En conseqüència, si permetem que les solucions siguin nombres complexos, és a dir, nombres de la forma:

$$a + bi$$

totes les equacions de segon grau tindran solució.

Definirem el conjunt dels **nombres complexos**, representats amb el símbol $\mathbb{C}$, com el conjunt format per les expressions de la forma $a + bi$, en què a i b són nombres reals i i és tal que el seu quadrat és igual a -1. Formalment:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \quad \text{tal que} \quad a, b \quad \text{són nombres reals}\}$$

Nombres complexos segons John Wallis

Com a curiositat, John Wallis, matemàtic anglès (1616-1703) va dir respecte als nombres complexos: "These imaginary quantities (as they are commonly called) arising from the *supposed* root of a negative square (when they happen) are reputed to imply that the case proposed is impossible." Què en penseu?

3.2. Representació dels nombres complexos: forma binòmica

Ja hem vist que un nombre complex és un nombre que té la forma $a + bi$, en què a i b són nombres reals.

Exemples de nombres complexos

$$z_1 = 2 + 3i \qquad z_2 = 3 - 4i$$

$$z_3 = -\frac{2}{3} + 8i \qquad z_4 = \sqrt{2} + 10i$$

A partir de les expressions anteriors podem observar que un nombre complex està format per la suma de dues parts clarament diferenciades que definim com a **part real** (a) i **part imaginària** (b).

$$\underbrace{a}_{\text{part real}} + \underbrace{b}_{\text{part imaginària}} i$$

Altres representacions de part real i imaginària

En alguns llibres veureu que la part real de $z = a + bi$ es representa com $\mathrm{Re}(z) = a$ i la part imaginària com $\mathrm{Im}(z) = b$.

La següent manera de representar un nombre complex, rep el nom de **forma binòmica**:

$$z = a + bi$$

A la taula 1 podeu trobar la part real i la part imaginària dels quatre nombres complexos que hem considerat anteriorment. Fixeu-vos que el nombre imaginari i mai no forma part ni de la part real ni de la part imaginària.

Taula 1

Nombre complex	Part real	Part imaginària
$z_1 = 2 + 3i$	2	3
$z_2 = 3 - 4i$	3	-4
$z_3 = -2/3 + 8i$	-2/3	8
$z_4 = \sqrt{2} + 10i$	$\sqrt{2}$	10

Els nombres reals es poden representar com a punts d'una recta (la recta real). En canvi, a la recta real no hi ha lloc per a $\sqrt{-1}$, és a dir, no hi ha lloc per a *i*. Com podem representar aleshores els nombres complexos gràficament?

Per a resoldre aquest problema, Gauss es va preguntar què passaria si introduís una nova direcció (un eix vertical, com l'eix de les *y*) i si per a situar *i* s'utilitzés un punt situat per sobre de la recta numèrica a una unitat de distància (observeu la figura 2). Tots els nous nombres per a resoldre qualsevol equació serien ara combinacions de *i* i de nombres habituals.

Figura 2. Representació del pla complex

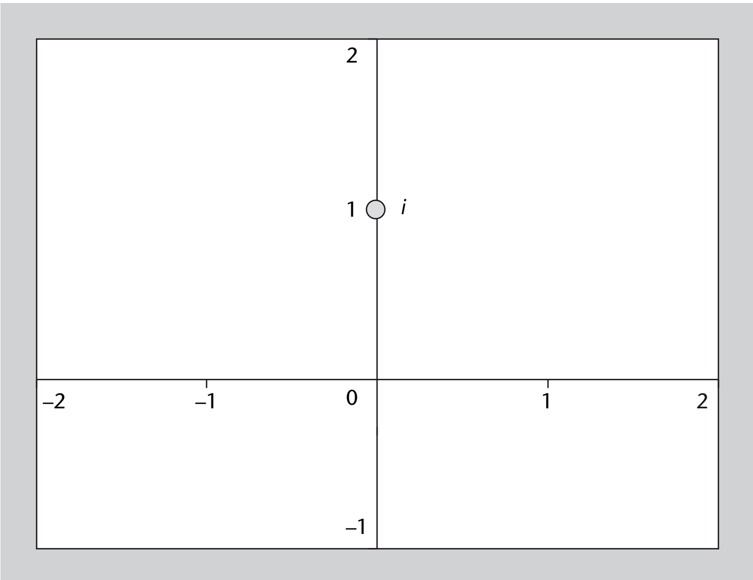
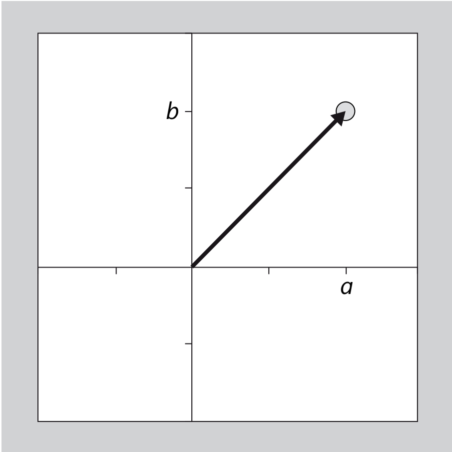


Figura 2

Representació del pla complex. En particular, representació del nombre *i* en el pla complex.

Ja hem vist que els nombres complexos estan formats per una part real i una part imaginària. D'aquesta manera, com apuntava Gauss, cada nombre complex es pot representar mitjançant un únic punt del pla, que s'obté d'aquesta manera: la part real representa l'**abscissa** (col·loquialment, coordenada *x*) i la part imaginària és l'**ordenada** (col·loquialment, coordenada *y*). Observeu la figura 3. Podeu observar aquesta correspondència a la taula 2.

Figura 3. Representació en el pla del nombre complex $a + bi$



Taula 2

Nombre complex	Part real	Part imaginària	Punt del pla
$z_1 = 2 + 3i$	2	3	(2, 3)
$z_2 = 3 - 4i$	3	-4	(3, - 4)
$z_3 = -2/3 + 8i$	-2/3	8	(-2/3, 8)
$z_4 = \sqrt{2} + 10i$	$\sqrt{2}$	10	($\sqrt{2}$, 10)

D'aquesta manera, el nombre complex $a + bi$ s'identifica amb el punt (a, b) del pla.

- Si un nombre complex no té part real (té part real igual a zero) rep el nom de **nombre complex imaginari pur**. Per exemple, i, $2i$ o $\sqrt{3}i$ són nombres complexos imaginaris purs.

- Si, en canvi, un nombre complex no té part imaginària (té part imaginària igual a zero) rep el nom de nombre **real**. Per exemple, 2, -1 o e són nombres reals.

3.3. Operacions amb nombres complexos

Com en qualsevol conjunt, necessitem saber quines operacions podem fer sobre els seus elements. En aquest cas, per al conjunt dels nombres complexos, veurem com els podem sumar, restar, multiplicar, dividir, etc.

3.3.1. Suma i resta de complexos en forma binòmica

Per a sumar nombres complexos, sumem les parts reals i les parts imaginàries per separat.

Exemple de suma de complexos

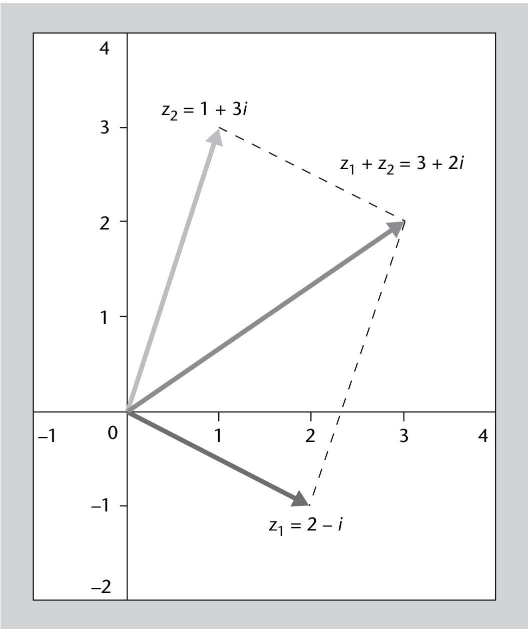
Si tenim $z_1 = 1 + 2i$ i $z_2 = 4 + 3i$, aleshores:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (1 + 2i) + (4 + 3i) \\ &= (1 + 4) + (2 + 3)i \\ &= 5 + 5i \end{aligned}$$

Fixeu-vos que tractem el nombre i com si fos la variable d'un polinomi i agrupem els termes que no tenen i, per una banda, i els termes que sí que en tenen, per una altra.

En el pla complex els nombres se sumen de la mateixa manera com sumem els vectors del pla. És a dir, s'utilitza la llei del paral·lelogram, com es pot veure en la figura 4, on se suma els vectors (2, -1) i (1, 3) gràficament.

Figura 4. Suma de dos nombres complexos utilitzant la llei del paral·lelogram



La resta de dos nombres complexos $z_1 - z_2$ en què $z_1 = a + bi$ i $z_2 = c + di$ es pot veure, en el fons, com una suma. D'aquesta manera, la diferència:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

no és més que la *suma* dels nombres complexos z_1 i $-z_2$, en què $-z_2 = -(c + di) = -c - di$.

Per tant, podrem escriure:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2) \\ &= (a + bi) + (-c - di) \\ &= (a - c) + (b - d)i \end{aligned}$$

Exemple de resta de complexos

Si tenim $z_1 = 2 - i$ i $z_2 = 1 + 3i$, aleshores:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2) \\ &= (2 - i) + (-1 - 3i) \\ &= (2 - 1) + (-1 - 3)i \\ &= 1 - 4i \end{aligned}$$

El nombre complex **-***z* rep el nom d'**oposat** del nombre complex *z*. Des d'un punt de vista geomètric, el nombre complex **-***z* és el simètric respecte de l'origen del nombre complex *z*, tal com es pot veure a la figura 5.

Figura 5. El nombre complex z i el seu oposat $-z$

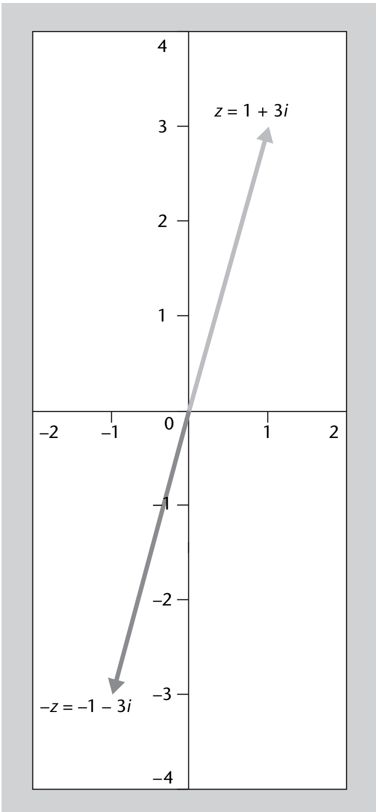


Figura 6. Resta de dos nombres complexos

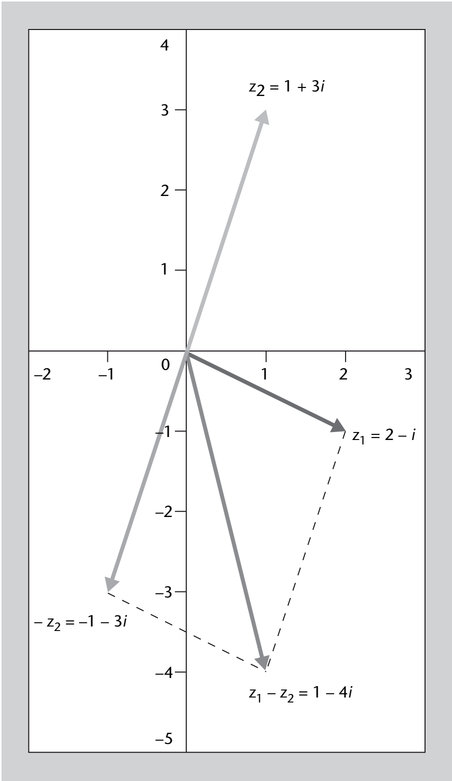


Figura 6

Per a calcular la resta dels nombres complexos z_1 - z_2, considereu la suma dels nombres z_1 + (-z_2), en què -z_2 és l'*oposat* del nombre complex z_2.

3.3.2. Producte de complexos en forma binòmica

Per a multiplicar un nombre complex per un nombre real, multipliquem les parts real i imaginària del nombre complex pel nombre real.

Exemple de producte de complexos

Si tenim $z = 1 + 2i$, per tal de multiplicar-lo per a, un nombre real, fem:

$$a \cdot z = a \cdot (1 + 2i) = a \cdot 1 + a \cdot 2i = a + 2ai$$

Recordeu que els nombres reals estan inclosos dins dels nombres complexos. En concret, tot nombre real a es pot escriure com $a + 0i$. Per tant, acabem de veure com es pot multiplicar un nombre complex per un altre nombre complex amb part imaginària nul·la. A continuació veurem com cal multiplicar dos nombres complexos en què tots dos puguin tenir part imaginària no nul·la. Abans, però, recordarem com es multipliquen els polinomis $p(x) = a + bx$ i $q(x) = c + dx$.

Dos polinomis es multipliquen aplicant la propietat distributiva, és a dir, multiplicant-ho tot per tot:

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= (a + bx) \cdot (c + dx) \\ &= ac + adx + bcx + bdx^2 \\ &= ac + (ad + bc)x + bdx^2 \end{aligned}$$

Per a multiplicar nombres complexos cal procedir de la mateixa manera, tenint en compte que $i^2 = -1$.

Exemple

Si tenim $z_1 = 1 + 2i$ i $z_2 = 4 + 3i$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (1 + 2i) \cdot (4 + 3i) \\ &= 1 \cdot (4 + 3i) + 2i \cdot (4 + 3i) \\ &= 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3i + 2 \cdot 4i + 2 \cdot 3i^2 \\ &= 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3i + 2 \cdot 4i - 2 \cdot 3 \qquad \text{(utilitzant } i^2 = -1\text{)} \\ &= (1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) + (1 \cdot 3 + 2 \cdot 4)i \\ &= -2 + 11i \end{aligned}$$

3.3.3. El conjugat d'un nombre complex

El conjugat d'un nombre complex, $z = a + bi$, és un altre nombre complex amb la mateixa part real però amb la part imaginària canviada de signe. El conjugat d'un nombre complex z es representa com $\overline{z}$.

Si tenim $z = 1 + 2i$, el seu conjugat és:

$$\overline{z} = 1 - 2i$$

Utilitzarem el conjugat d'un nombre complex principalment per a dividir nombres complexos, tal com veurem més endavant.

En el pla complex, el conjugat d'un nombre complex s'obté fent una simetria respecte a l'eix d'abscisses (figura 7).

Figura 7. El conjugat d'un nombre complex

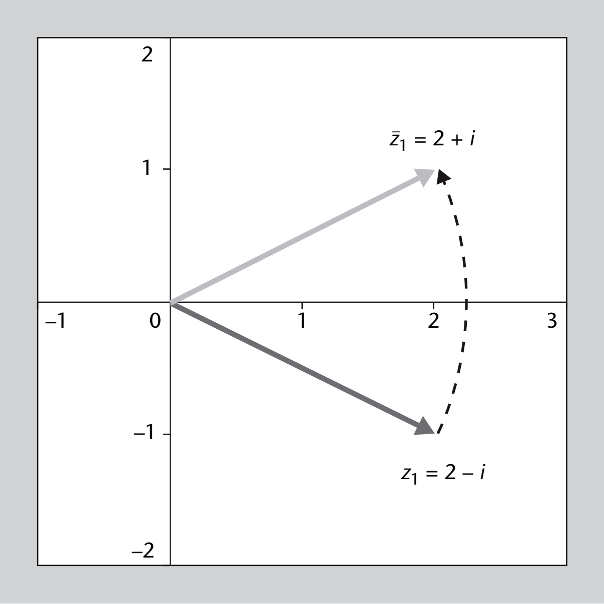


Figura 7

El conjugat d'un nombre complex s'obté fent una simetria respecte a l'eix d'abscisses.

Observeu que, per a qualsevol nombre complex, si calculem el conjugat del conjugat, recuperem una altra vegada el nombre complex original, és a dir:

$$z = 1 + 2i \longrightarrow \bar{z} = 1 - 2i \longrightarrow \bar{\bar{z}} = 1 + 2i = z$$

El producte d'un complex pel seu conjugat

Una altra propietat important és que si multipliquem un nombre complex z pel seu conjugat $\bar{z}$, el resultat és un nombre real i positiu (o zero en el cas en què $z = 0$).

Més endavant veurem que això serà de gran interès per a dividir nombres complexos.

Exemple

Si tenim $z = 1 + 2i$ i $\bar{z} = 1 - 2i$:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (1 + 2i) \cdot (1 - 2i) \\ &= 1^2 - 1 \cdot 2i + 1 \cdot 2i - 2^2 i^2 \\ &= 1^2 - 1 \cdot 2i + 1 \cdot 2i + 2^2 \qquad \text{(utilitzant } i^2 = -1\text{)} \\ &= 1^2 + 2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

3.3.4. Divisió de nombres complexos en forma binòmica

En la divisió de nombres complexos considerarem dos casos:

1) El nombre complex que divideix és un nombre real. Per exemple:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{5}$$

2) El nombre complex que divideix és un complex amb part imaginària diferent de zero. Per exemple:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{4+3i}$$

Observem que en el primer cas, més senzill, en què el denominador és un nombre real, tenim que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

> En el cas més general, que el nombre complex que divideix és un complex amb part imaginària diferent de zero, seguirem la següent estratègia: multiplicar i dividir pel conjugat del nombre complex del denominador.

D'aquesta manera, si multipliquem tant el numerador com el denominador per $\bar{z}_2$, el nou denominador serà un nombre real. Per tant, serà senzill fer la divisió:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1+2i}{3-4i} \\ &= \frac{1+2i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} \\ &= \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} \\ &= \frac{3-8+6i+4i}{3^2+4^2} \\ &= \frac{-5+10i}{25} \\ &= -\frac{5}{25} + \frac{10}{25}i \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\end{aligned}$$

Observació

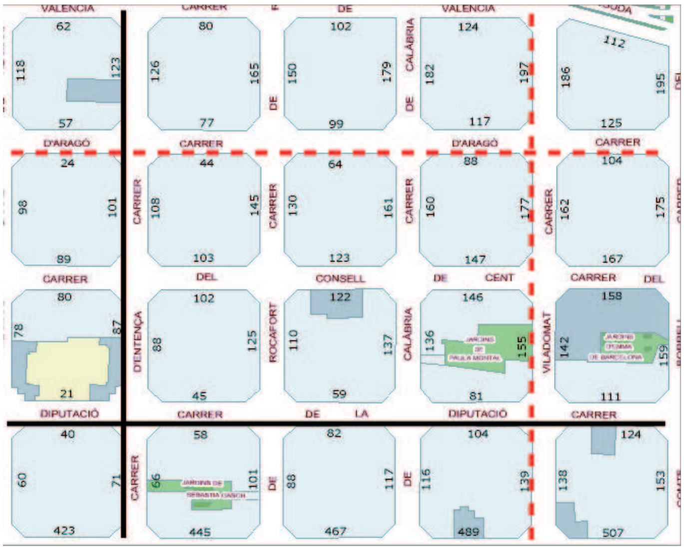
En multiplicar i dividir per un valor no s'altera el resultat final.

3.4. Forma polar: alternativa per a representar els nombres complexos

Un nombre complex, que fins ara hem representat en forma binòmica $z = a+bi$ i que hem dibuixat com el punt (a, b) del pla, també es pot representar d'una altra manera.

Les coordenades cartesianes o coordenades ortogonals, com les de la forma binòmica, representen els punts mitjançant un parell de nombres: la coordenada x, o abscissa (desplaçament horitzontal), i la coordenada y, o ordenada (desplaçament vertical). Aquest tipus de coordenades ens poden ser de molta utilitat, per exemple, per a indicar una localització a l'Eixample de Barcelona, com es pot veure a la figura 8. No obstant això, aquesta no és l'única manera de representar els punts. Com hem dit, les coordenades cartesianes poden ser útils per a representar la superfície de la Terra en un pla, però no obstant això els vaixells fan servir un sistema de radar bidimensional que situa els punts del pla en cercles centrats en l'origen de coordenades, com es pot veure a la figura 9.

Figura 8. Coordenades cartesianes a l'Eixample de Barcelona

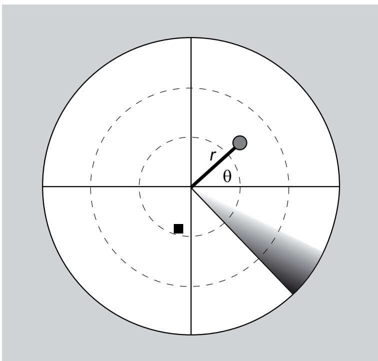


Font: Ajuntament de Barcelona, 2009

Figura 8

Considerant l'encreuament entre els carrers de la Diputació i Entença com a origen de coordenades, l'encreuament entre els d'Aragó i Viladomat el trobarem tres carrers a la dreta i dos amunt, és a dir, al punt (3, 2).

Figura 9. Coordenades polars en un radar



Així doncs, la representació d'un punt (a, b) en aquestes noves coordenades es basa en (figura 10):

- La distància del punt (a, b) a l'origen de coordenades, que s'anomena **magnitud** o **mòdul**, i habitualment es representa com r.

- L'angle que forma la recta que uneix els punts (a, b) i (0, 0) amb l'eix positiu d'abscisses (en el sentit invers a les busques d'un rellotge), que també es pot anomenar **argument** i es representa com θ.

La següent manera de representar un nombre complex, rep el nom de **forma polar**:

$$r_\theta$$

Figura 10. De coordenades cartesianes a coordenades polars

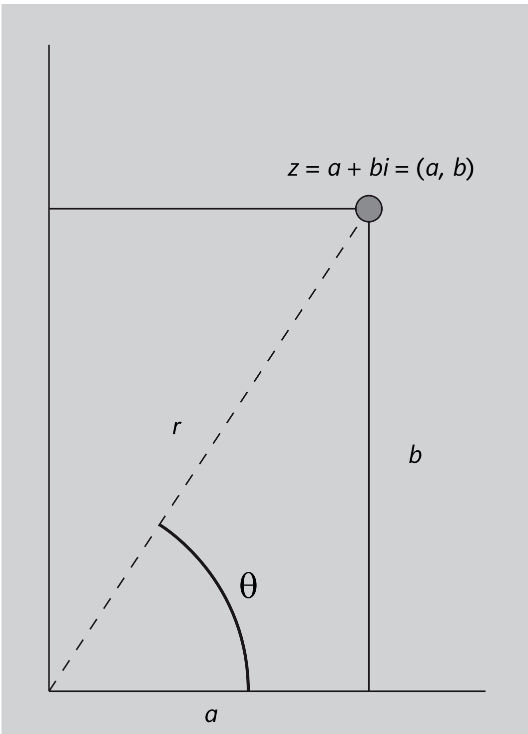


Figura 10

El nombre complex $a + bi$ es pot expressar en forma polar mitjançant la distància del punt a l'origen, r, i l'angle que forma amb l'eix positiu x, θ. És a dir: $a + bi = r_\theta$.

Exemple

Considerem els nombres complexos 3, 2i,-4 i -5i. Quina és la seva representació en forma polar?

- El nombre complex 3 té part imaginària igual a zero. Això implica que està situat en la part positiva de l'eix de les x (de fet, és un nombre real positiu). En conseqüència, l'angle que forma la recta que uneix l'origen i aquest punt amb l'eix positiu de les x és precisament 0. D'altra banda, la distància d'aquest punt a l'origen és també 3. Per tant, podem escriure:

$$3 = 3 + 0i = 3_0$$

- El nombre complex $2i$ té part real igual a zero. La seva representació com a punt seria (0,2), i això implica que està situat en la part positiva de l'eix de les y. D'altra banda, l'angle que forma la recta que uneix l'origen i aquest punt amb l'eix positiu de les x és un angle recte, és a dir, té un valor de $\frac{\pi}{2}$ rad o 90°. Finalment, la distància d'aquest punt a l'origen és 2. Per tant, podem escriure:

$$2i = 0 + 2i = 2_{\frac{\pi}{2}} = 2_{90^\circ}$$

Radians

Recordeu que 360° són 2π radians.

- El nombre complex -4 té part imaginària igual a zero i part real negativa. Això implica que està situat a la part negativa de l'eix de les x (de fet, és un nombre real negatiu). En conseqüència, l'angle que forma la recta que uneix l'origen i aquest punt amb l'eix positiu de les x és un angle pla, és a dir, el seu valor és de π rad o 180°. D'altra banda, la distància d'aquest punt a l'origen és 4. Per tant, podem escriure:

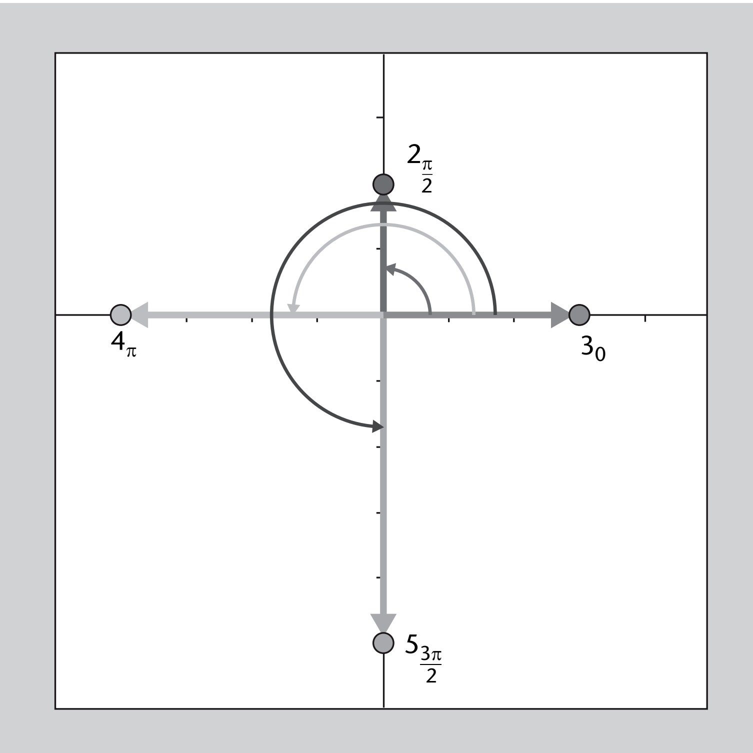
$$-4 = -4 + 0i = 4_{\pi} = 4_{180^\circ}$$

- El nombre complex $-5i$ té part real igual a zero i part imaginària negativa. La seva representació com a punt seria (0,-5), i això implica que està situat en la part negativa de l'eix de les y. D'altra banda, l'angle que forma la recta que uneix l'origen i aquest punt amb l'eix positiu de les x és la suma d'un angle recte i un angle pla, és a dir, té un valor de $\frac{3\pi}{2}$ rad o 270° (si mesurem els angles en el sentit contrari al de les busques d'un rellotge). La distància d'aquest punt a l'origen és 5. Per tant, podem escriure:

$$-5i = 0 - 5i = 5_{\frac{3\pi}{2}} = 5_{270^\circ}$$

En aquest exemple hem expressat en forma polar els nombres complexos que se situen sobre els eixos. En l'apartat següent veurem com es pot generalitzar tot això.

Figura 11. Forma polar dels nombres complexos 3, $2i$, - 4 i $-5i$



3.4.1. De la forma binòmica a la forma polar

Quina relació s'estableix entre la forma polar i la forma binòmica d'un nombre complex? Com podem passar d'una forma a l'altra i viceversa?

Suposem que tenim el nombre complex en forma binòmica $a+bi$, que podem representar gràficament com el punt (a, b) del pla. Aplicant el teorema de Pitàgores, sabem que la distància del punt a l'origen és:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

De la mateixa manera, sabem que la relació que s'estableix entre l'angle que forma la recta que uneix els punts (a, b) i $(0, 0)$ amb l'eix positiu de les x i el punt (a, b) mateix està determinada per l'expressió:

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$

Per tant, θ es pot obtenir amb l'expressió:

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right), \quad \text{si } a \text{ (part real) és positiu, o bé}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, \quad \text{si } a \text{ és negatiu i } b \text{ (part imaginària) és positiu, o bé}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi, \quad \text{si } a \text{ és negatiu i } b \text{ és també negatiu}$$

En tots els casos, obtindrem un angle θ dintre de l'interval $[-\pi,\pi]$.

Com calculem l'arc tangent?

Per a l'obtenció de l'angle θ podem utilitzar una calculadora o qualsevol programari de càlcul simbòlic, com ara *Wiris* o *Maple*.

Si calculeu l'arc tangent amb una calculadora, heu de saber si feu servir el mode `rad` (radians) o el mode `deg` (graus).

Exemple de càlcul d'arc tangent

Considerem els nombres complexos següents:

$$z_1 = 1 + i$$

$$z_2 = -1 - i$$

El nombre complex z_1 és al *primer quadrant*, ja que té part real i part imaginària positives:

$$\text{Re}(z_1) = 1 > 0, \quad \text{Im}(z_1) = 1 > 0$$

En canvi, el nombre complex z_2 és al *tercer quadrant*, ja que té part real i part imaginària negatives:

$$\mathrm{Re}(z_2) = -1 < 0, \quad \mathrm{Im}(z_2) = -1 < 0$$

El mòdul de tots dos nombres complexos és:

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Però, quin és el seu angle o argument?

- En el cas de $z_1 = 1 + i$, atès que la part real és positiva, la fórmula és:

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \underbrace{\arctan(1)}_{\text{calculadora}} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

- En el cas de $z_2 = -1 - i$, atès que tant la part real com la part imaginària són negatives, la fórmula és:

$$\theta = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) - \pi = \underbrace{\arctan(1)}_{\text{calculadora}} - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

D'aquesta manera, els nombres complexos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$ es poden representar en coordenades polars com:

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = -1 - i = \sqrt{2}_{-\frac{3\pi}{4}}$$

La representació en forma polar no és única

La representació en forma polar d'un nombre complex no és única. Si considerem, per exemple, el nombre complex

$$z = 1_{\frac{\pi}{4}}$$

i li sumem qualsevol múltiple de 2π rad a l'argument (és a dir, fem voltes senceres), obtenim el mateix nombre. És a dir:

$$1_{\frac{\pi}{4}} = 1_{\frac{\pi}{4}+2\pi} = 1_{\frac{\pi}{4}+4\pi} = 1_{\frac{\pi}{4}+6\pi}$$

De forma general, podem escriure (figura 12):

$$r_\theta = r_{\theta+2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Figura 12. La representació en forma polar d'un nombre complex no és única.

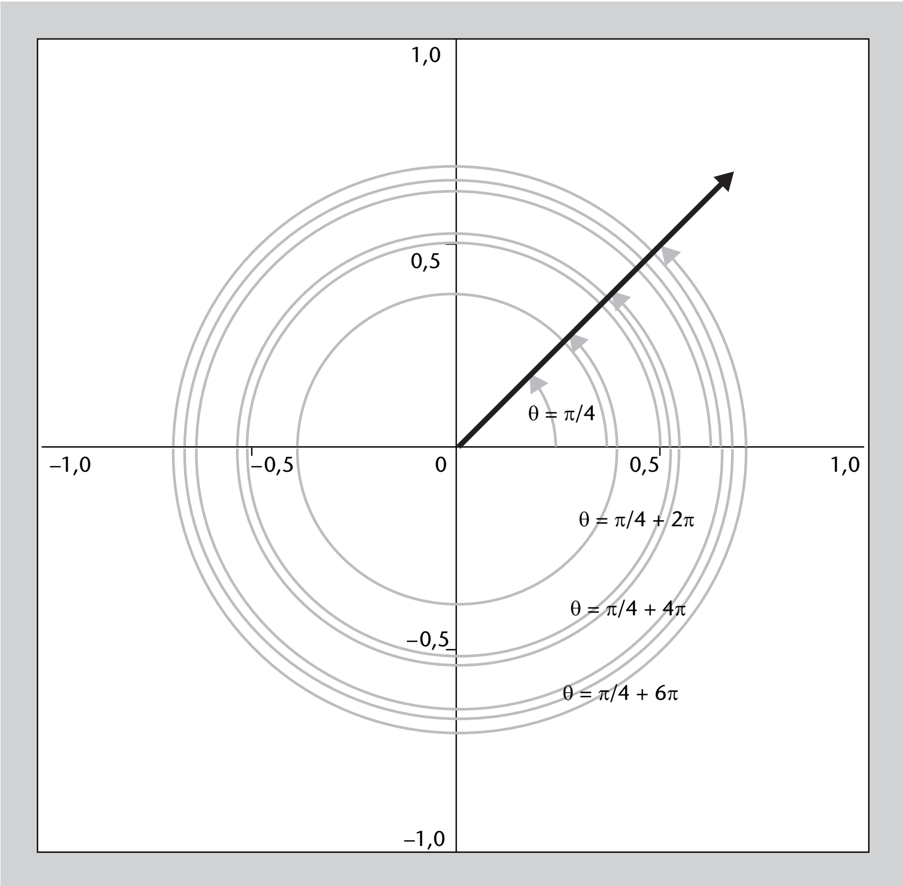


Figura 12

La representació en forma polar d'un nombre complex no és única, ja que si tenim un nombre r_θ i li sumem qualsevol múltiple de 2π a l'angle, obtenim el mateix nombre. En aquesta figura s'ha representat $z = 1_{\pi/4} = 1_{\pi/4+2\pi} = 1_{\pi/4+4\pi} = 1_{\pi/4+6\pi}$.

Amb l'objectiu d'unificar la representació de nombres complexos en forma polar, és habitual considerar l'angle θ que compleixi

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

és a dir, de tots els angles que poden representar un nombre complex, cal escollir aquell que es troba entre $-\pi$ i $+\pi$ radians. Per a fer això, pot ser necessari restar o sumar múltiples de 2π radians.

Quan es vol transformar un nombre complex de forma binòmica a forma polar, és molt important representar el nombre complex en el pla. D'aquesta manera sabrem en quin quadrant es troba i podrem evitar errors a l'hora de calcular l'argument.

3.4.2. De la forma polar a la forma binòmica

Suposem que tenim un nombre complex $a + bi$ que està expressat segons la seva longitud i l'angle que forma amb l'eix positiu de les x, és a dir, $z = r_\theta$, com a la figura 10.

Aleshores, utilitzant les definicions de les funcions trigonomètriques sin i cos tenim:

$$\sin(\theta) = \frac{b}{r} \quad \text{i} \quad \cos(\theta) = \frac{a}{r}$$

Per tant:

$$a = r\cos(\theta), \quad b = r\sin(\theta)$$

És a dir, el nombre r_θ en forma binòmica és:

$$z = r_\theta = \underbrace{r\cos(\theta)}_{\text{part real}} + \underbrace{r\sin(\theta)}_{\text{part imaginària}}\, i$$

L'equivalència entre la forma polar i la forma binòmica d'un nombre complex és:

$$r_\theta = r\cos(\theta) + r\sin(\theta)i = r\,(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$$

La representació $r\,(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$ d'un nombre complex rep el nom de forma trigonomètrica.

Com a recordatori, us mostrem a la taula 3 el sinus i el cosinus dels angles més habituals.

Taula 3

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(\theta)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Exemple de representació en forma binòmica d'un nombre complex

Considerem el nombre complex en forma polar $\sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}}$. Quina és la seva representació en forma binòmica?

Aplicant directament la fórmula, tenim:

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}} &= \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) i \\
&= \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\frac{1}{2}i \\
&= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

En el càlcul anterior, els valors del cosinus i del sinus els hem buscat a la taula 3. Per a altres angles, podeu fer servir una calculadora o les indicacions que trobareu a continuació.

Per a angles del segon, tercer i quart quadrants, feu servir aquestes regles:

- Si $\theta \in (\pi/2,\pi)$ (segon quadrant), aleshores:

$$\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta)$$

$$\cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta)$$

- Si $\theta \in (-\pi, -\pi/2)$ (tercer quadrant), aleshores:

$$\sin(\theta) = -\sin(\pi + \theta)$$

$$\cos(\theta) = -\cos(\pi + \theta)$$

- Si $\theta \in (-\pi/2, 0)$ (quart quadrant), aleshores:

$$\sin(\theta) = -\sin(-\theta)$$

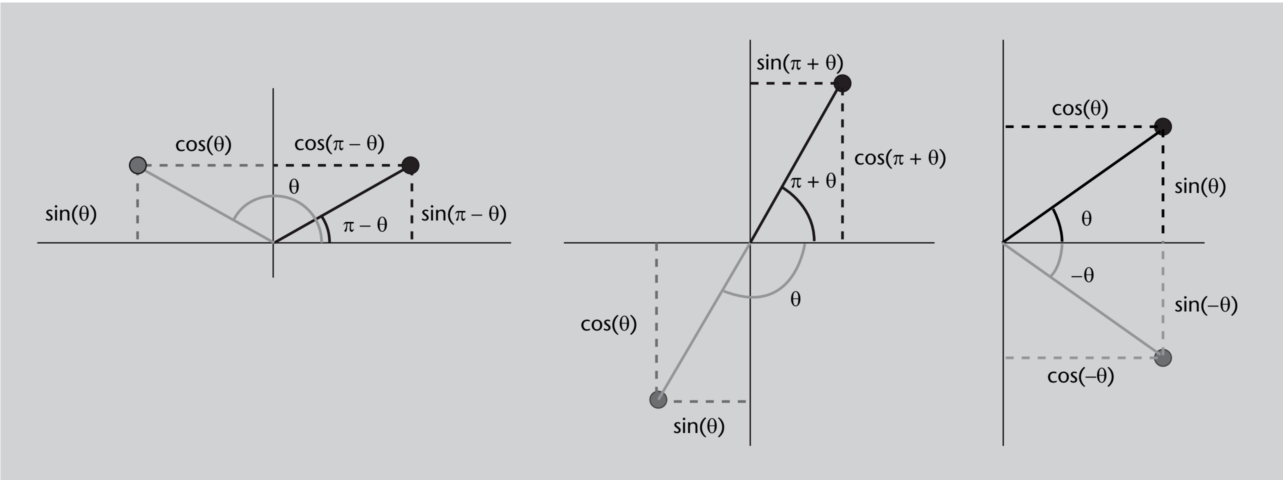
$$\cos(\theta) = \cos(-\theta)$$

La figura 13 us ajudarà a entendre aquestes regles.

Figura 13

Relacions trigonomètriques per a calcular el sinus i el cosinus d'angles del segon, tercer i quart quadrants a partir dels sinus i cosinus d'angles del primer quadrant.

Figura 13. Relacions trigonomètriques d'angles del segon, tercer i quart quadrants



3.4.3. Operacions aritmètiques amb nombres complexos en forma polar

Suma de nombres complexos en forma polar

Per a sumar o restar dos nombres complexos els hem d'expressar primer en forma binòmica, això és, escriure'ls en la forma $z = a + bi$ i, després, sumar-los tal com s'ha indicat en el subapartat anterior.

Així doncs, les operacions de suma i resta sempre es fan en forma binòmica. Si es vol, el resultat final pot passar-se després a forma polar.

Exemple

Tenim $z_1 = 2_\pi$ i $z_2 = 5_{-\frac{\pi}{2}}$, dos nombres complexos en forma polar, i volem calcular:

$$z_1 + z_2, \quad \text{i} \quad z_1 - z_2$$

El primer que fem és passar tots dos nombres a forma binòmica:

$$z_1 = 2\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + 2\underbrace{\sin(\pi)}_{0} i = -2,$$

$$z_2 = 5\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + 5\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1} i = -5i$$

Aleshores:

$$z_1 + z_2 = -2 + (-5i) = -2 - 5i$$

$$z_1 - z_2 = -2 - (-5i) = -2 + 5i$$

Producte i divisió de nombres complexos en forma polar

Per a multiplicar dos nombres en forma polar es multipliquen els mòduls i se sumen els arguments.

Exemple

Tenim $z_1 = 2_\pi$ i $z_2 = 5_{-\frac{\pi}{2}}$, dos nombres complexos en forma polar, i volem calcular $z_1 \cdot z_2$.

Aleshores:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 2_\pi \cdot 5_{-\frac{\pi}{2}} \\ &= (2 \cdot 5)_{\pi+(-\frac{\pi}{2})} \\ &= 10_{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

En un cas genèric, doncs, podem escriure:

$$r_{\theta_1} \cdot s_{\theta_2} = (r \cdot s)_{\theta_1+\theta_2}$$

De manera similar, per a dividir dos nombres complexos en forma polar es divideixen els mòduls i es resten els arguments.

Exemple

Tenim $z_1 = 2_\pi$ i $z_2 = 5_{-\frac{\pi}{2}}$, dos nombres complexos en forma polar, i volem calcular $\frac{z_1}{z_2}$.

Aleshores:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2_\pi}{5_{-\frac{\pi}{2}}} \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)_{\pi-(-\frac{\pi}{2})} \\ &= 0{,}4_{\frac{3\pi}{2}} \end{aligned}$$

En un cas genèric, doncs, podem escriure:

$$\frac{r_{\theta_1}}{s_{\theta_2}} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\theta_1-\theta_2}$$

3.5. L'exponencial d'un nombre complex

La forma exponencial d'un nombre complex ens permet representar els nombres complexos d'una manera molt compacta. A més, podem expressar les funcions trigonomètriques sinus i cosinus en funció dels nombres complexos.

Comencem, però, recordant les dues maneres de representar nombres complexos que hem vist fins ara:

- la forma binòmica, $z = a + bi$, o
- la forma polar, $z = r_\theta = r\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

En aquest subapartat veurem una tercera manera de representar els nombres complexos: la forma exponencial.

Considerem la funció exponencial real, $\exp(x) = e^x$. Aquesta funció pot ser reescrita com una suma d'infinits termes:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Recordeu que el nombre e es defineix com $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

en què $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ és el factorial del nombre natural n. Tot i tractar-se d'una suma d'infinits termes, a la pràctica s'acostuma a utilitzar només un nombre finit de termes. Per exemple, si considerem només sis termes i $x = 1$ tenim que:

Aquesta suma d'infinits termes rep el nom de *desenvolupament en sèrie de potències*, però això ja ho veureu formalment a l'assignatura *Matemàtiques II.*

$$\begin{aligned} e^1 &\approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \\ &= 2 + 0{,}5 + 0{,}16667 + 0{,}04167 + 0{,}00833 \\ &= 2{,}71666 \end{aligned}$$

El resultat ja és prou bo en comparació del valor real, que és $e = 2{,}71828$ (amb cinc xifres decimals).

També podem expressar com una suma d'infinits termes les funcions trigonomètriques sinus i cosinus:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Trobareu una demostració formal d'aquestes igualtats en l'assignatura *Matemàtiques II.*

Recuperem l'expressió de l'exponencial e^x però reemplaçant la x per θi i finalment reorganitzant els termes:

Recordeu que $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} e^{\theta i} &= 1 + (\theta i) + \frac{(\theta i)^2}{2!} + \frac{(\theta i)^3}{3!} + \frac{(\theta i)^4}{4!} + \frac{(\theta i)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + \theta i - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^3}{3!} i + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^5}{5!} i + \cdots \\ &= \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right] + \left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right] i \\ &= \cos(\theta) + \sin(\theta) i \end{aligned}$$

Fórmula d'Euler

L'exponencial d'un nombre complex imaginari pur és, doncs:

$$e^{\theta i} = \cos(\theta) + \sin(\theta)i$$

Com que tot nombre complex es pot expressar com $z = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$ i que, com acabem de veure, $e^{\theta i} = \cos(\theta) + \sin(\theta)i$, aleshores això ens permet representar els nombres complexos d'una altra manera: $z = re^{\theta i}$, que anomenem *forma exponencial*.

La forma exponencial d'un nombre complex és:

$$z = re^{\theta i}$$

en què $r = |z|$ és el mòdul de z i θ és l'argument de z.

La representació polar d'un nombre complex és, doncs, equivalent a la representació exponencial del mateix nombre complex. En efecte:

$$re^{\theta i} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = r_\theta$$

Vegeu la figura 14.

Exemple

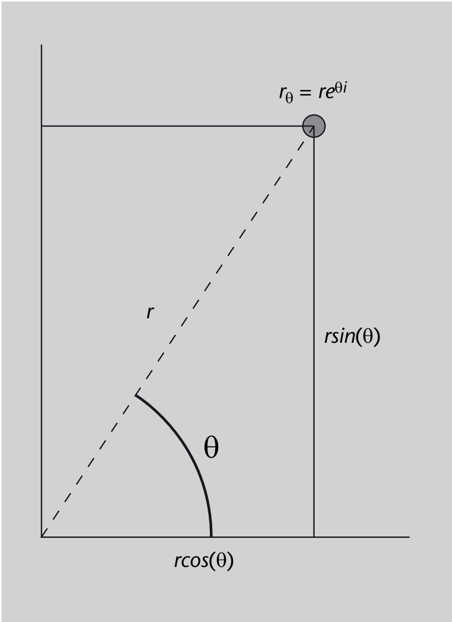
A la taula 4 teniu les equivalències següents entre els nombres complexos expressats en forma binòmica:

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = i, \quad z_3 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_4 = 1 - \sqrt{3}i$$

Taula 4

Binòmica	Polar	Exponencial
$z_1 = 1 + i$	$z_1 = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$	$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$
$z_2 = i$	$z_2 = 1_{\frac{\pi}{2}}$	$z_2 = e^{\frac{\pi}{2}i}$
$z_3 = 1 + \sqrt{3}i$	$z_3 = 2_{\frac{\pi}{3}}$	$z_3 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$
$z_4 = 1 - \sqrt{3}i$	$z_4 = 2_{-\frac{\pi}{3}}$	$z_4 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

Figura 14. Representació d'un nombre complex en forma polar i en forma exponencial



3.5.1. Operacions dels nombres complexos en forma exponencial

Les operacions dels nombres complexos en forma exponencial són, doncs, equivalents a les operacions que ja hem vist en forma polar. Aquestes són:

- **Producte**. Es multipliquen els mòduls i se sumen els arguments:

$$2e^{\frac{\pi}{3}i} \cdot 3e^{\frac{\pi}{2}i} = (2 \cdot 3)e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)i}$$

$$= 6e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

  En el cas general:

$$r_1 e^{\theta_1 i} \cdot r_2 e^{\theta_2 i} = r_1 r_2 e^{(\theta_1+\theta_2)i}$$

- **Divisió**. Es divideixen els mòduls i es resten els arguments:

$$\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{3e^{\frac{\pi}{2}i}} = \frac{2}{3}e^{\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)i}$$

$$= \frac{2}{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

En el cas general:

$$\frac{r_1 e^{\theta_1 i}}{r_2 e^{\theta_2 i}} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\theta_1 - \theta_2)i}$$

- **Conjugació**. El conjugat d'un complex expressat en forma exponencial és el nombre complex de mòdul igual i argument oposat:

$$\overline{2e^{\frac{\pi}{3}i}} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

En el cas general:

$$\overline{re^{\theta i}} = re^{-\theta i}$$

- **Suma i resta**. Per a sumar o restar nombres complexos en forma exponencial els hem d'expressar en forma binòmica:

$$r_1 e^{\theta_1 i} + r_2 e^{\theta_2 i} = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) + r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$$

$$= (r_1 \cos(\theta_1) + r_2 \cos(\theta_2)) + i\,(r_1 \sin(\theta_1) + r_2 \sin(\theta_2))$$

La introducció de la forma exponencial ens permet, a més, calcular potències de nombres complexos de manera molt senzilla, utilitzant les propietats de la funció exponencial que ja coneixíem quan treballàvem amb nombres reals:

- **Potenciació**. Per a elevar un nombre complex en forma exponencial al *quadrat* fem servir la definició del producte de complexos en forma polar:

$$\left(re^{\theta i}\right)^2 = re^{\theta i} \cdot re^{\theta i} = r^2 e^{(\theta+\theta)i}$$

$$= r^2 e^{2\theta i}$$

És a dir, el que hem fet és multiplicar els mòduls ($r \cdot r = r^2$) i sumar els arguments ($\theta + \theta = 2\theta$). Així doncs, hem aconseguit tenir:

$$\left(re^{\theta i}\right)^2 = r^2 e^{2\theta i}$$

De la mateixa manera, per a elevar un nombre complex en forma exponencial a la potència n, elevem a n el mòdul i multipliquem per n l'argument. En efecte:

$$\left(re^{\theta i}\right)^n = \underbrace{re^{\theta i} \cdot re^{\theta i} \cdots re^{\theta i}}_{n \text{ vegades}} = \underbrace{(r \cdots r)}_{n \text{ vegades}}\, e^{\overbrace{(\theta + \cdots + \theta)}^{n \text{ vegades}}\, i}$$

$$= r^n e^{n\theta i}$$

És a dir, hem arribat a l'expressió:

$$\left(re^{\theta i}\right)^n = r^n e^{n\theta i}$$

3.6. Les arrels de la unitat

En el conjunt dels nombres reals una arrel quadrada d'un nombre positiu té dues solucions. Per exemple, les dues arrels quadrades del nombre 1 són -1 i +1, ja que:

$$1^2 = 1$$

$$(-1)^2 = 1$$

Si es tracta de fer una arrel cúbica, només existeix una solució. Per exemple, l'arrel cúbica de -1 és el mateix -1:

$$(-1)^3 = -1$$

Això ho podeu veure a la figura 15:

- Quan calculem arrels quadrades, per exemple de 2, el que fem és buscar quins nombres elevats al quadrat donen 2. Aquests nombres són, com es pot veure, $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$. Dels nombres negatius no podem calcular arrels quadrades.

- Quan calculem arrels cúbiques, per exemple de 2, el que fem és buscar quins nombres elevats al cub donen 2. En aquest cas, tenim un únic valor, $\sqrt[3]{2}$ (aproximadament 1,26), com es veu a la figura 15. Tots els nombres, tant positius com negatius, tenen una única arrel cúbica.

Figura 15. Arrels quadrades i cúbiques

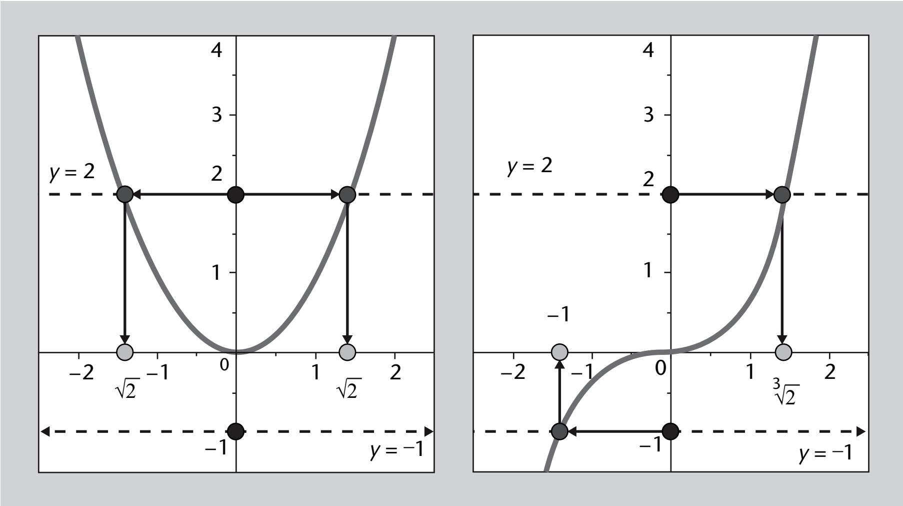


Figura 15

Arrels quadrades d'un nombre real (esquerra): per a determinar les arrels quadrades d'un nombre s es busquen les interseccions de la paràbola $y = x^2$ amb la recta $y = s$. Arrels cúbiques d'un nombre real (dreta): per a determinar les arrels cúbiques d'un nombre s es busquen les interseccions de la funció $y = x^3$ amb la recta $y = s$.

En el conjunt dels nombres reals:

- Les arrels d'índex parell (arrel quadrada, arrel quarta, etc.) no tenen solució si el nombre és negatiu.
- Les arrels d'índex parell (arrel quadrada, arrel quarta, etc.) tenen dues solucions si el nombre és positiu.
- Les arrels d'índex senar (arrel cúbica, arrel cinquena, etc.) tenen sempre una solució.

En el conjunt dels nombres complexos hi ha diferències respecte al que passa en el conjunt dels nombres reals:

- Una arrel quadrada té sempre dues solucions;
- Una arrel cúbica té sempre tres solucions;
- I, de manera general, una arrel enèsima té sempre n solucions.

3.6.1. Les arrels cúbiques de la unitat

Considerem, per exemple, el problema de trobar els nombres complexos z que satisfan l'equació $z^3 = 1$. En aquest cas, les solucions d'aquesta equació, és a dir, els nombres z que verifiquen l'equació anterior, s'anomenen **arrels cúbiques de la unitat**.

Per a resoldre l'equació anterior, el primer que cal fer és tenir en compte que el nombre 1 és un nombre complex que en coordenades polars té mòdul 1 i argument 0:

$$1 = 1_0 = 1e^{0i}$$

A més podem fer servir altres arguments equivalents, com ara 2π, 4π, 6π o qualsevol altre múltiple de 2π, ja que en sumar una volta completa no estem canviant la posició del vector que representa aquest nombre complex i, per tant, tampoc no canviem el seu valor. D'aquesta manera, també podem escriure:

$$\begin{aligned}1 &= 1_0 = 1_{2\pi} = 1_{4\pi} = 1_{6\pi} = \cdots \\ &= e^{0i} = e^{2\pi i} = e^{4\pi i} = e^{6\pi i} = \cdots \\ &= e^{2k\pi i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots\end{aligned}$$

Així doncs, l'equació $z^3 = 1$ és equivalent a:

$$z^3 = e^{2\pi ki}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Per a resoldre aquesta equació, el que es fa és afegir arrels cúbiques a totes dues bandes de l'equació o, el que és el mateix, elevar les dues parts de la igualtat a la potència $\frac{1}{3}$. Si ho fem, obtenim aquesta equació:

$$\left(z^3\right)^{\frac{1}{3}} = z = e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Finalment, per a determinar les solucions només cal donar valors a la k. D'aquesta manera trobarem els valors de les diferents arrels cúbiques. En particular, com que sabem que hem de trobar exactament 3 arrels cúbiques, substituïm el valor de la k per 0, 1 i 2:

$$\begin{aligned}k = 0: &\qquad z = e^{0i} = 1 \\ k = 1: &\qquad z = e^{\frac{2\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ k = 2: &\qquad z = e^{\frac{4\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

De manera anàloga a com es calculen les arrels cúbiques de la unitat, es poden calcular les arrels de qualsevol nombre complex.

L'equació $z^n = re^{\theta i}$ té n solucions, que són:

$$z = \sqrt[n]{r}\, e^{\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

Fixeu-vos que, en ser r un nombre real positiu, $\sqrt[n]{r}$ fa referència a l'arrel enèsima positiva de r.

Exemple. Les arrels cúbiques de -8

Considerem ara el problema de trobar els nombres complexos z que satisfan l'equació:

$$z^3 = -8$$

En aquest cas, les solucions d'aquesta equació, és a dir, els nombres z que verifiquen l'equació anterior, s'anomenen *arrels cúbiques* de -8.

Per a resoldre l'equació anterior, el primer que cal fer és tenir en compte que el nombre -8 és un nombre complex que en coordenades polars té mòdul 8 i argument π:

$$-8 = 8_\pi = 8e^{\pi i}$$

Igual que abans, podem fer servir altres arguments equivalents, com ara $\pi + 2\pi$, $\pi + 4\pi$ o $\pi + 6\pi$, ja que estem sumant voltes completes. D'aquesta manera, també podem escriure:

$$\begin{aligned} -8 &= 8_\pi = 8_{\pi+2\pi} = 8_{\pi+4\pi} = 8_{\pi+6\pi} = \cdots \\ &= 8e^{\pi i} = e^{(\pi+2\pi)i} = e^{(\pi+4\pi)i} = e^{(\pi+6\pi)i} = \cdots \\ &= 8e^{(\pi+2k\pi)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Així doncs, l'equació $z^3 = -8$ és equivalent a:

$$z^3 = 8e^{(\pi+2k\pi)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Per a resoldre aquesta equació, el que es fa és afegir arrels cúbiques a totes dues bandes de l'equació o, el que és el mateix, elevar les dues parts de la igualtat a la potència $\frac{1}{3}$. Si ho fem, obtenim aquesta equació:

$$\left(z^3\right)^{\frac{1}{3}} = z = \underbrace{\sqrt[3]{8}}_{2}\, e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Finalment, per a determinar les solucions només cal donar valors a la k. D'aquesta manera trobarem els valors de les diferents arrels cúbiques. En particular, com que sabem que hem de trobar *exactament* 3 arrels cúbiques, substituïm el valor de la k per 0, 1 i 2:

$$\begin{aligned} k = 0: \qquad & z = \sqrt[3]{8}e^{\frac{\pi}{3}i} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ & = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i \\ k = 1: \qquad & z = \sqrt[3]{8}e^{\pi i} = 2\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) \\ & = 2(-1) = -2 \\ k = 2: \qquad & z = \sqrt[3]{8}e^{\frac{5\pi}{3}i} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) \\ & = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Exemple. Arrels quadrades, cúbiques i quartes de -1

Expressem primer el nombre complex -1 en forma exponencial:

$$-1 = e^{\pi} = e^{\pi + 2\pi k i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Per tant, volem resoldre l'equació:

$$z^n = e^{\pi + 2\pi k i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

per a $n = 2$, 3 i 4. Per a fer-ho alhora, apliquem l'arrel enèsima a totes dues bandes de la igualtat:

$$\left(z^n\right)^{\frac{1}{n}} = z = e^{\frac{\pi + 2\pi k i}{n}} = e^{\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Per a determinar les arrels quadrades, substituïm $n = 2$ i prenem com a valors de la k 0 i 1.

$$k = 0: \qquad z = e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

$$k = 1: \qquad z = e^{\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) i} = e^{\frac{3\pi}{2} i} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

De la mateixa manera, per a determinar les arrels cúbiques, substituïm $n = 3$ i prenem com a valors de la k 0, 1 i 2.

$$k = 0: \qquad z = e^{\frac{\pi}{3} i} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$k = 1: \qquad z = e^{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) i} = e^{\pi i} = -1$$

$$k = 2: \qquad z = e^{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) i} = e^{\frac{5\pi}{3} i} = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Finalment, per a determinar les arrels quartes, substituïm $n = 4$ i prenem com a valors de la k 0, 1, 2 i 3.

$$k = 0: \qquad z = e^{\frac{\pi}{4} i} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$k = 1: \qquad z = e^{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right) i} = e^{\frac{3\pi}{4} i} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$k = 2: \qquad z = e^{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4}\right) i} = e^{\frac{5\pi}{4} i} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$k = 3: \qquad z = e^{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4}\right) i} = e^{\frac{7\pi}{4} i} = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

A la figura 16 hem representat les arrels quadrades, cúbiques i quartes del nombre z = -1. Observeu que totes les arrels tenen el mateix mòdul (estan situades sobre una circumferència) i que estan situades en els vèrtexs d'un polígon regular de n vèrtexs. D'aquesta manera, les arrels quadrades sempre estan alineades, les arrels cúbiques són els vèrtexs d'un triangle equilàter i les arrels quartes són els vèrtexs d'un quadrat. A la figura 17 us hem representat les arrels cinquenes i sisenes de z = -1, que també són els vèrtexs d'un polígon regular.

Figura 16. Arrels quadrades, cúbiques i quartes del nombre z = -1

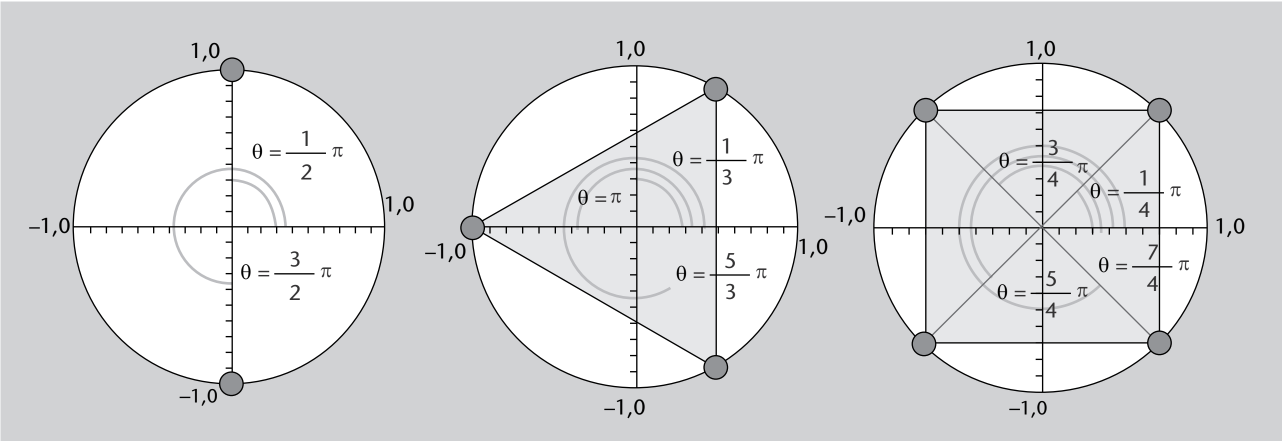
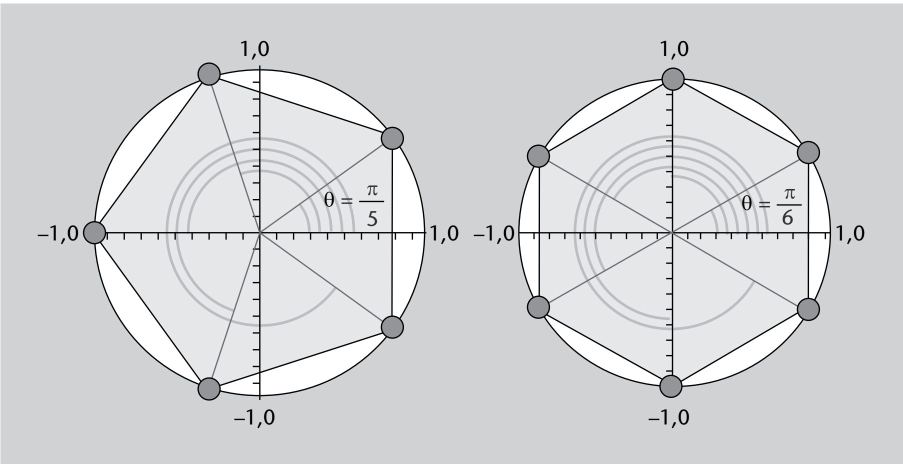


Figura 17. Arrels cinquenes i sisenes del nombre z = -1



Resum

En aquest mòdul hem treballat amb dos conjunts de nombres: els nombres naturals i els nombres complexos.

Pel que fa als nombres naturals, hem vist que es caracteritzen per ser un conjunt ordenat i hem estudiat el principi d'inducció matemàtica, i també la seva aplicació a la verificació d'algorismes.

La formulació bàsica del principi d'inducció matemàtica és la següent: sigui P una propietat definida sobre el conjunt dels nombres naturals que satisfà les dues condicions següents:

1) $P(1)$ és vertader.

2) Per a tot n, si $P(n)$ és vertader, també ho és $P(n+1)$.

Llavors la propietat es verifica per a tot nombre natural.

Pel que fa als nombres complexos hem vist que no es poden representar en una recta, perquè tenen dues dimensions. Aquests nombres es representen en un pla compost per un eix real i un eix imaginari. La unitat de l'eix imaginari és el nombre $i = \sqrt{-1}$. Hem estudiat tres possibles tipus de representacions dels nombres complexos:

1) Representació binària

2) Forma polar

3) L'exponencial d'un nombre complex

Hem après a fer operacions amb nombres complexos en cadascuna d'aquestes representacions: suma, resta, producte, conjugació d'un nombre complex i divisió.

Finalment hem vist com es poden calcular les diferents arrels de la unitat dins del conjunt dels nombres complexos (arrels quadrades, cúbiques, quartes, etc.), i, de manera anàloga, hem calculat també diferents arrels d'altres nombres complexos.

Exercicis d'autoavaluació

1. Demostreu per inducció que per a tot $n \in \mathbb{N}$ és cert que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. Demostreu per inducció que per a tot $n \in \mathbb{N}$ el nombre $n(n+1)$ és un nombre parell.

3. Per a diferents valors de $n \in \mathbb{N}$, calculeu $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Per a fer-ho volem trobar una fórmula per a aquesta expressió, semblant a la que va trobar Gauss per a l'expressió $\sum_{k=1}^{n} k$ (vegeu el problema 1).

Indicació: useu primer l'ordinador per a calcular la suma $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ per a valors de n des de l'1 fins al 10. Fixeu-vos en els resultats i intenteu conjecturar una fórmula per al càlcul d'aquesta suma. A continuació demostreu per inducció que la fórmula és certa per a tot $n \in \mathbb{N}$.

4. Demostreu per inducció que el nombre $n^3 + 2n$ és múltiple de 3 per a tot $n \in \mathbb{N}$.

5. Tot i que el nombre *irracional* $\sqrt{2}$ no es pot expressar com una fracció, sí que el podem situar sobre una recta numèrica (de fet, el trobem entre 1,4 i 1,5) fent servir només un regle i un compàs. Com el situaríeu exactament?

6. Calculeu les solucions de l'equació de segon grau següent: $x^2 - 2x + 5 = 0$. Observeu alguna característica comuna en les seves solucions?

7. Calculeu les solucions de l'equació de segon grau següent: $x^2 - 6x + 25 = 0$. Observeu alguna característica comuna en les solucions de les equacions que heu resolt?

8. Representeu en el pla complex els nombres següents: $z_1 = 3$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 1 + 2i$, $z_5 = -2 + i$.

9. Sumeu gràficament els nombres complexos $2 - i$ i $1 + 3i$.

10. Si tenim $z_1 = 3 + 4i$ i $z_2 = 1 - 2i$, calculeu $z_3 = z_1 + z_2$. Representeu aquests tres nombres complexos en el pla complex i comproveu que es compleix la llei del paral·lelogram.

11. Si tenim $z_1 = 3 + 4i$ i $z_2 = 1 - 2i$, calculeu $z_3 = z_1 - z_2$. Representeu aquests tres nombres complexos en el pla complex.

12. Si tenim $z_1 = 3 + 4i$ i $z_2 = 1 - 2i$, calculeu $z_1 \cdot z_2$.

13. Si tenim $z = 4 + 3i$ calculeu $\overline{z}$. Calculeu ara $\overline{\overline{z}}$, què observeu?

14. Si tenim $z = 1 + 5i$ calculeu $\overline{z}$. Calculeu ara $z \cdot \overline{z}$; què observeu?

15. Trobeu els conjugats dels nombres complexos següents i comproveu que $z \cdot \overline{z}$ és real i positiu (o zero) en tots els casos: $2 - 5i$, $-4 + 2i$, -5 , $6i$, $x + yi$. Representeu els nombres i els seus conjugats en el pla complex.

16. Si tenim $z_1 = 3 + 4i$ i $z_2 = 1 - 2i$, trobeu z_1/z_2.

17. Calculeu els nombres complexos següents:

$$\frac{1}{i}, \; \frac{1}{a+bi}, \; \frac{1}{2-3i} \cdot \frac{1}{1+i}, \; \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$$

18. Si tenim el nombre complex $-1 - \sqrt{3}i$, calculeu la seva distància a l'origen i l'angle que forma amb l'eix positiu x. Què observeu?

19. Expresseu els nombres complexos següents en coordenades polars: $3 + 2i$, $-2 - 5i$, $-4 + 2i$, $4 - 2i$.

20. Expresseu els nombres complexos següents en coordenades polars: $-i$, $-1 - i$, $1 - \sqrt{3}i$, $-\sqrt{3} + i$, $\sqrt{3} + i$.

21. Expresseu els nombres complexos següents en forma binòmica: 1_0, 2_π, $1_{\pi/3}$, $4_{-\pi/6}$, $2_{3\pi/4}$.

22. Expresseu en forma polar els nombres complexos en forma binòmica $-2 - 5i$, $-2 + 5i$.

23. Si tenim $z_1 = 3_{\pi/6}$ i $z_2 = 2_{\pi/4}$ calculeu: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2.

24. Si tenim $z = \pi i$ calculeu e^z i passeu aquest nombre a forma polar. Quin mòdul i quin angle trobeu?

25. Si tenim $z = 2+\pi i$, calculeu e^z (tenint en compte que $e^{2+\pi i} = e^2 e^{\pi i}$) i passeu aquest nombre a forma polar. Quin mòdul i quin angle trobeu?

26. Calculeu les expressions següents en forma exponencial $\frac{(3\text{-}2i)(2+3i)}{3\text{-}4i}$, i^{29}, $(1+i)^4$.

27. Si tenim els nombres complexos $z_1 = 1_0, z_2 = 1_{\frac{2\pi}{3}}$ i $z_3 = 1_{\frac{4\pi}{3}}$, calculeu $z_1^3, z_2^3,$ i z_3^3. Quin resultat obteniu?

28. Representeu les tres arrels cúbiques de la unitat en el pla complex. Uniu mitjançant rectes les tres arrels. Quina figura geomètrica obteniu?

29. Calculeu les arrels quadrades, quartes, cinquenes i sisenes de la unitat. Representeu-les en el pla complex. Quines figures geomètriques obteniu?

30. Calculeu les solucions de les equacions següents: $z^4 + 16 = 0$, $z^6 = i$ i $z^3 + 8i = 0$.

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. Es tracta de demostrar per inducció la propietat: $P(n) : 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1) Pas base: es verifica $P(1)$, és a dir, $1^3 = 1$.

2) Pas d'inducció: Suposem vertader que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ i hem de provar que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$. Observeu que $\frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. Partim, doncs, de $1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3$ i apliquem la hipòtesi d'inducció als n primers sumands, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$. Fent càlculs en el segon membre de la igualtat, tenim:

$$\frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Aleshores $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ i la demostració s'ha acabat.

2. Es tracta de provar que per a tot $n \in \mathbb{N}$ és certa la propietat següent: $P(n)$: el nombre $n(n+1)$ és parell.

1) Pas base: per a $n = 1$, és $n(n+1) = 2$, que, en efecte, és parell.

2) Pas d'inducció: suposem que $n(n+1)$ és parell (hipòtesi d'inducció) i volem provar que $(n+1)(n+2)$ també ho és. El nombre $(n+1)(n+2)$ es pot escriure de la forma $(n+1)(n+2) = n(n+1) + 2(n+1)$ i es conclou que és parell perquè és suma de dos nombres parells. El primer ho és per la hipòtesi d'inducció, i el segon perquè té 2 com a factor.

3. En primer lloc usarem l'ordinador per a calcular la suma $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ per a valors de n des de l'1 fins al 10. Veureu que, per a aquests valors, els resultat de la suma són:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}$$

Això fa conjecturar que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. Demostrarem per inducció que aquesta conjectura és certa per a qualsevol nombre $n \in \mathbb{N}$.

1) Pas base: $P(1)$: per a $n = 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$ i $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}$. Per tant, la fórmula funciona per a $n = 1$.

2) Pas d'inducció: suposem que és certa la hipòtesi d'inducció següent: $P(n) : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. A partir d'aquí intentem provar: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$. Per a això, utilitzem la hipòtesi d'inducció separant els n primers sumands de l'expressió:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)\big((n+1)+1\big)} =$$

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\big((n+1)+1\big)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Si passem a comú denominador obtenim:

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

Finalment, si observem que $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ i simplifiquem tenim:

$$\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

Recopilant, doncs, hem vist que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(n+1)}{(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1}$$

Per tant, la fórmula és vàlida també per a $n+1$, i així acaba la demostració per inducció.

4. Demostrarem per inducció que és cert per a tot $n \in \mathbb{N}$ la propietat: $P(n)$: $n3+2n$ és múltiple de 3.

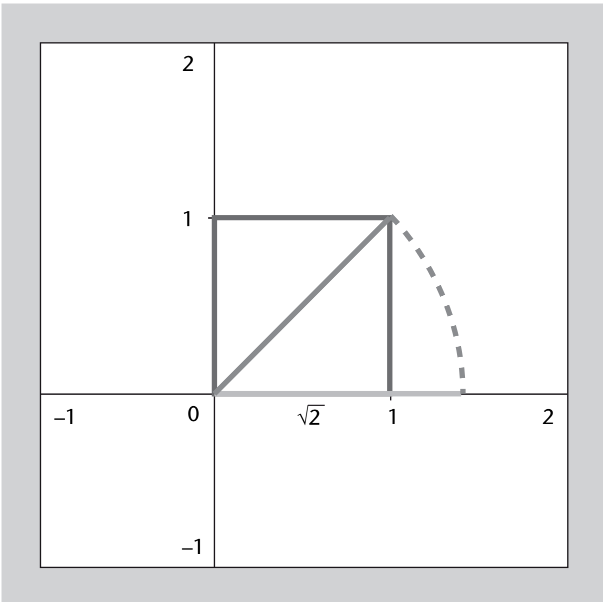
1) Pas base: $P(1)$: $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ és múltiple de 3.

2) Pas d'inducció. Hipòtesi d'inducció: suposem que $n^3 + 2n$ és múltiple de 3. S'ha de provar: $P(n+1)$: $(n+1)^3 + 2(n+1)$ és múltiple de 3.

Observeu que $(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$ i aquest nombre és múltiple de 3, ja que és suma de dos múltiples de 3: el primer ho és per la hipòtesi d'inducció i el segon perquè apareix el factor 3 multiplicant l'expressió $n^2 + n + 1$, que és un nombre enter.

5. Considerem un quadrat de costat 1. Aplicant el teorema de Pitàgores sabem que la seva diagonal té longitud $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Per tant, per a situar el nombre $\sqrt{2}$ sobre la recta real només ens cal tenir un regle, un escaire i un compàs. Amb l'ajuda del regle i de l'escaire, dibuixem dos eixos coordenats i en aquests eixos dibuixem el quadrat $[0,1] \times [0,1]$. Un cop dibuixat el quadrat, dibuixem la seva diagonal. Finalment, amb la punta del compàs en el punt (0,0) traslladem la diagonal del quadrat sobre l'eix de les x. Vegeu la figura 18.

Figura 18



6. En aquest exercici hem de calcular les solucions de l'equació $x^2 - 2x + 5 = 0$, i sabem que si en calcular-les ens apareix una arrel d'un nombre negatiu podem suposar que $\sqrt{-1} = i$. Per a calcular les solucions utilitzarem la fórmula que ens permet calcular les solucions d'una equació de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. En el nostre cas $a = 1$, $b = -2$ i $c = 5$; per tant:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm \frac{4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Per tant les dues solucions són $1+2i$ i $1-2i$. Podeu observar que les dues solucions són iguals menys la constant que acompanya la i, que canvia de signe.

7. Aquest exercici és igual que l'exercici anterior, però canvien els coeficients de l'equació que volem resoldre. Igual que en l'exercici anterior, utilitzarem la fórmula que ens permet calcular les solucions d'una equació de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Ara $a = 1$, $b = -6$ i $c = 25$; per tant:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = 3 \pm \frac{\sqrt{64}\sqrt{-1}}{2} = 3 \pm \frac{8i}{2} = 3 \pm 4i$$

Per tant, les dues solucions són $3 + 4i$ i $3 - 4i$. Observeu que les dues solucions són iguals menys la constant que acompanya la i, que canvia de signe. És a dir, les solucions són de la forma:

$$x = c_1 + c_2 i \qquad \text{i} \qquad x = c_1 - c_2 i$$

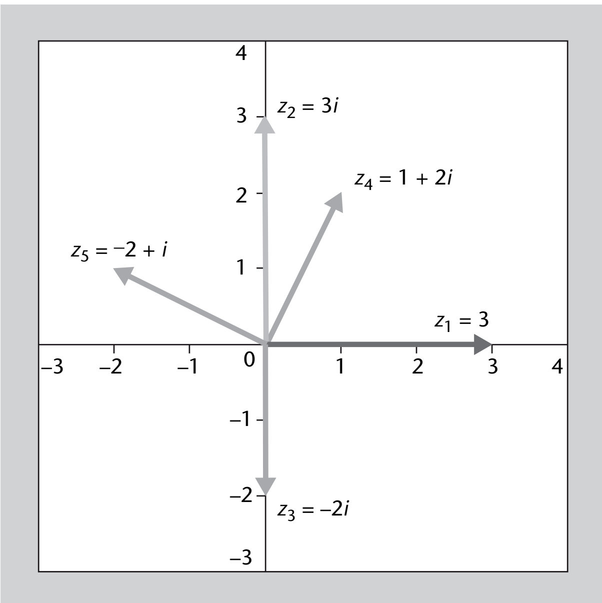
en què les constants c_1 i c_2 depenen de l'equació que estem considerant.

8. Recordeu que un nombre complex $a + bi$ es pot associar amb un punt del pla complex, el punt (a, b). D'aquesta manera, els punts que ens han donat els podem associar amb els punts:

$$\begin{array}{lcl} z_1 = 3 & \longrightarrow & (3, 0) \\ z_2 = 3i & \longrightarrow & (0, 3) \\ z_3 = -2i & \longrightarrow & (0, -2) \\ z_4 = 1 + 2i & \longrightarrow & (1, 2) \\ z_5 = -2 + i & \longrightarrow & (-2, 1) \end{array}$$

En la figura 19 hem representat aquests punts en el pla complex.

Figura 19

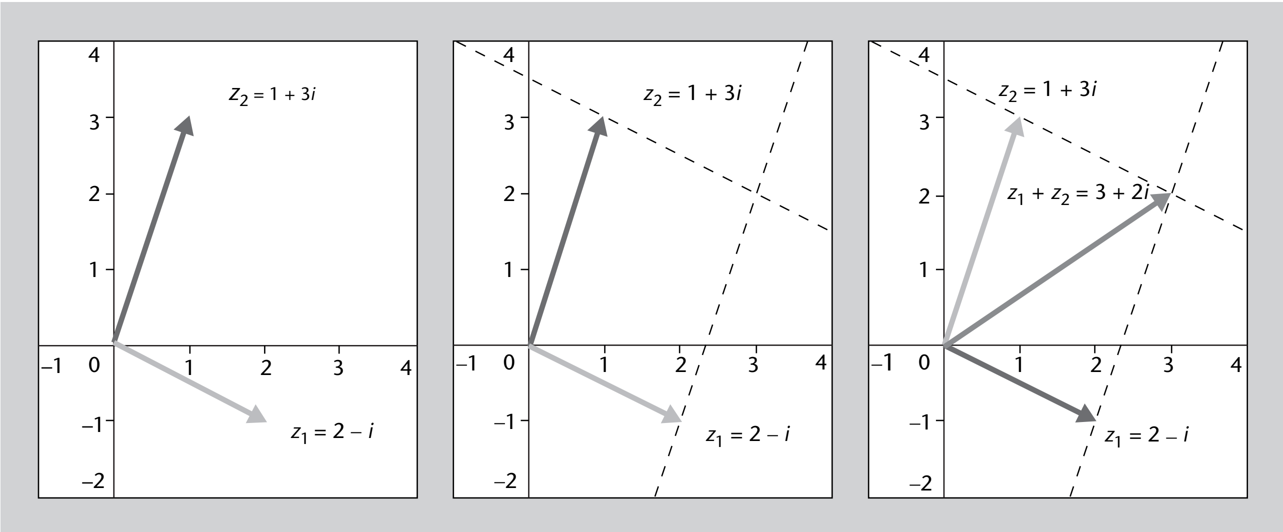


9. Per a dibuixar la suma dels dos nombres, $2-i$ i $1+3i$, el primer que hem de fer és representar-los gràficament (vegeu el dibuix de l'esquerra de la figura 20). Aquests nombres estan associats als vectors del pla $(2, -1)$ i $(1, 3)$.

El segon pas és dibuixar dues rectes paral·leles als vectors de manera que els dos vectors i les dues paral·leles formin un paral·lelogram (tal com es veu a la figura central del dibuix).

Finalment, la suma dels dos vectors té com a origen el punt (0,0) i com a final la intersecció de les dues rectes dibuixades (vegeu la figura 20, a la dreta).

Figura 20



10. Considerem els nombres $z_1 = 3 + 4i$ i $z_2 = 1 - 2i$. Hem de calcular-ne la suma $z_1 + z_2$. Recordem que per a sumar dos nombres complexos, cal sumar les dues parts reals i les dues parts imaginàries separadament (és com si consideréssim la *i* com una variable i operéssim amb els nombres).

$$z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (1 - 2i) = (3 + 1) + (4 - 2)i$$

$$= 4 + 2i$$

Per a representar aquests nombres complexos en el pla complex, hem de recordar que tot nombre complex de la forma $a + bi$ està associat al punt (a, b) del pla complex. Per tant, hem de representar els punts:

Nombre complex	⟶	Punt del pla
$z_1 = 3 + 4i$	⟶	(3, 4)
$z_2 = 1 - 2i$	⟶	(1, - 2)
$z_1 + z_2 = 4 + 2i$	⟶	(4, 2)

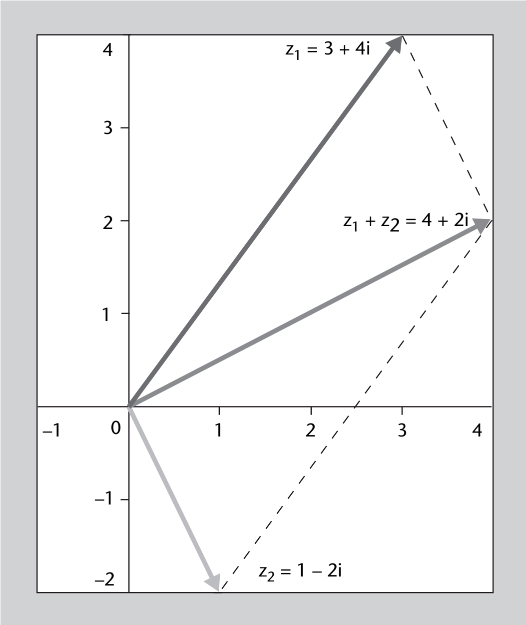
Vegeu la figura 21.

11. Considerem els nombres $z_1 = 3 + 4i$ i $z_2 = 1 - 2i$. Hem de calcular la seva resta $z_1 - z_2$. Recordem que per a restar dos nombres complexos, hem de restar les dues parts reals i les dues parts imaginàries separadament (és com si consideréssim la *i* com una variable i operéssim amb els nombres).

$$z_1 - z_2 = (3 + 4i) - (1 - 2i) = (3 - 1) + (4 - (-2))i$$

$$= 2 + 6i$$

Figura 21

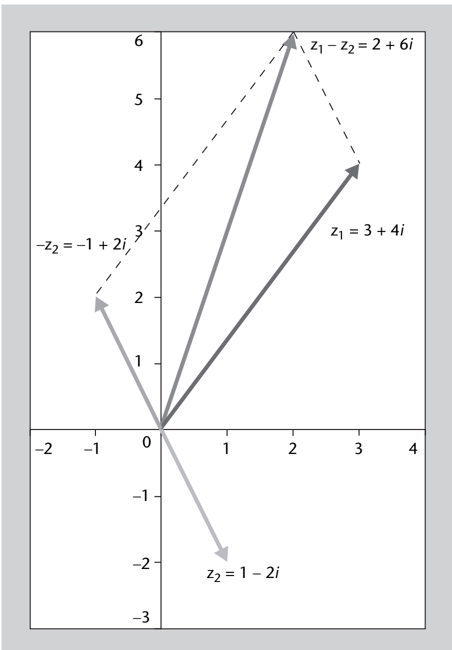


Per a representar aquests nombres complexos en el pla complex, hem de recordar que tot nombre complex de la forma $a+bi$ està associat al punt (a, b) del pla complex. Per tant, hem de representar els punts:

Nombre complex	$\longrightarrow$	Punt del pla
$z_1 = 3 + 4i$	$\longrightarrow$	(3, 4)
$z_2 = 1 - 2i$	$\longrightarrow$	(1, - 2)
$z_1 - z_2 = 2 + 6i$	$\longrightarrow$	(2, 6)

Observeu que per a restar dos nombres complexos z_1 i z_2, en el fons el que es fa és sumar els nombres z_1 i $-z_2$, com es veu a la figura 22.

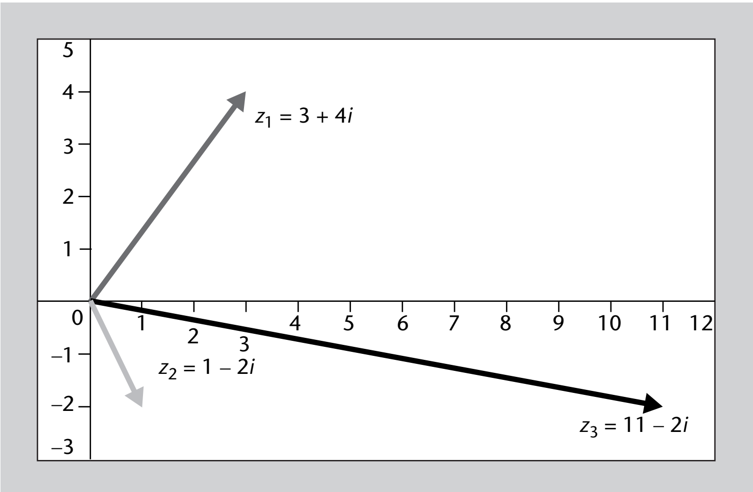
Figura 22



12. Recordeu que el producte de dos nombres complexos es fa de la mateixa manera que faríem el producte de dos polinomis de la forma $(a + bx) \cdot (c + dx) = a(c + dx) + bx(c + dx) = ac + adx + bcx + bdx^2$. L'únic que cal tenir en compte és que quan ens aparegui un i^2 l'hem de substituir per -1 (figura 23).

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3 + 4i) \cdot (1 - 2i) \\ &= 3 \cdot (1 - 2i) + 4i \cdot (1 - 2i) \\ &= 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-2)i + 4i \cdot 1 + 4i \cdot (-2i) \\ &= 3 - 6i + 4i - 8i^2 \\ &= (3 + 8) + (-6 + 4)i \qquad \text{(utilitzant } i^2 = -1\text{)} \\ &= 11 - 2i \end{aligned}$$

Figura 23



13. Considerem $z = 4 + 3i$. El conjugat d'aquest nombre s'obté canviant el signe de la part imaginària, és a dir:

$$z = 4 + 3i \quad \longrightarrow \quad \bar{z} = 4 - 3i$$

Observem que si calculem una altra vegada el conjugat, és a dir, si calculem $\bar{\bar{z}}$ tenim:

$$z = 4 + 3i \quad \longrightarrow \quad \bar{z} = 4 - 3i \quad \longrightarrow \quad \bar{\bar{z}} = 4 - (-3)i = 4 + 3i$$

És a dir, $\bar{\bar{z}} = z$.

14. Tenim $z = 1 + 5i$, i per tant $\bar{z} = 1 - 5i$. Ara calculem $z \cdot \bar{z}$.

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (1 + 5i) \cdot (1 - 5i) \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-5)i + 5i \cdot 1 + 5i \cdot (-5i) \\ &= 1 - 5i + 5i - 25i^2 \\ &= 1 - 25(-1) \\ &= 1 + 25 = 26 \end{aligned}$$

Veiem, doncs, que $z \cdot \overline{z}$ és un nombre real positiu, i a més observem:

$$z \cdot \overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = (1)^2 + (5^2) = 1 + 25 = 26$$

15. Considerem primer $z_1 = 2 - 5i$. El conjugat d'un nombre complex s'obté canviant el signe de la part imaginària, és a dir:

$$z_1 = 2 - 5i \quad \longrightarrow \quad \overline{z_1} = 2 + 5i$$

Llavors:

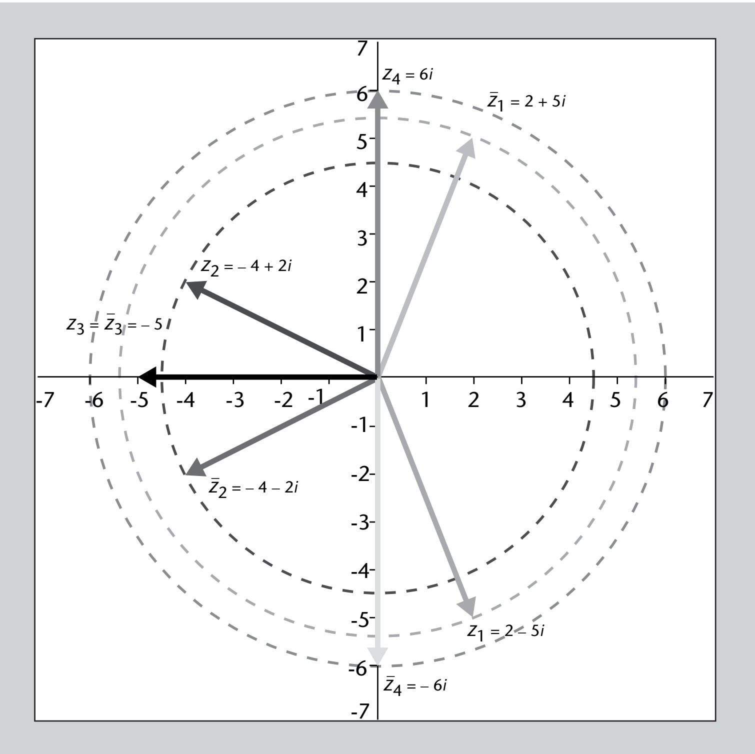
$$\begin{aligned} z_1 \cdot \overline{z_1} &= (2 - 5i) \cdot (2 + 5i) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5i - 5i \cdot 2 - 5i \cdot 5i \\ &= 4 + 10i - 10i - 25i^2 \\ &= 4 - 25(-1) = 4 + 25 = 29 \end{aligned}$$

Observeu que en fer el producte de z_1 pel seu conjugat ens ha quedat:

$$z_1 \cdot \overline{z_1} = 4 + 25 = \mathrm{Re}(z_1)^2 + \mathrm{Im}(z_1)^2 = 2^2 + (-5)^2 = 4 + 25 = 29$$

La representació de z_1 i $\overline{z_1}$ la podeu veure a la figura 24.

Figura 24



Farem el mateix amb $z_2 = -4 + 2i$. El conjugat d'un nombre complex s'obté canviant el signe de la part imaginària, és a dir:

$$z_2 = -4 + 2i \quad \longrightarrow \quad \overline{z_2} = -4 - 2i$$

Llavors:

$$z_2 \cdot \overline{z_2} = (-4+2i)\cdot(-4-2i) = (-4)\cdot(-4) + (-4)\cdot(-2i) + 2i\cdot(-4) + 2i\cdot(-2i)$$

$$= 16 + 8i - 8i - 4i^2$$

$$= 16 - 4(-1) = 16 + 4 = 20$$

Observeu que en fer el producte de z_2 pel seu conjugat ens ha quedat, igual que en l'exemple anterior:

$$z_2 \cdot \overline{z_2} = 16 + 4 = \mathrm{Re}(z_2)^2 + \mathrm{Im}(z_2)^2 = (-4)^2 + (-2)^2 = 16 + 4 = 20$$

La representació de z_2 i $\overline{z_2}$ la podeu veure també en la figura 24.

Considerem ara $z_3 = -5$, és a dir, un nombre real, ja que la part imaginària de z_3 és nul·la. En aquest cas:

$$z_3 = -5 \quad \longrightarrow \quad \overline{z_3} = z_3 = -5$$

Llavors:

$$z_3 \cdot \overline{z_3} = (-5)\cdot(-5) = 25$$

Observeu que també en aquest cas podríem haver utilitzat la fórmula:

$$z_3 \cdot \overline{z_3} = \mathrm{Re}(z_3)^2 + \mathrm{Im}(z_3)^2 = (-5)^2 + 0^2 = 25$$

La representació de z_3 i $\overline{z_3}$ la podeu veure, de la mateixa manera, en la figura 24.

Considerem ara $z_4 = 6i$, és a dir, un nombre imaginari pur, ja que la part real de z_4 és nul·la. En aquest cas:

$$z_4 = 6i \quad \longrightarrow \quad \overline{z_4} = -z_4 = -6i$$

Llavors:

$$z_4 \cdot \overline{z_4} = (6i)\cdot(-6i) = -36i^2 = 36$$

Observeu que també en aquest cas podríem haver utilitzat la fórmula:

$$z_4 \cdot \overline{z_4} = \mathrm{Re}(z_4)^2 + \mathrm{Im}(z_4)^2 = 0^2 + 6^2 = 36$$

La representació de z_3 i $\overline{z_3}$ la podeu veure en la figura 24.

Finalment, farem l'exercici per a un nombre complex genèric $z_5 = x + yi$. En aquest cas:

$$z_5 = x + yi \quad \longrightarrow \quad \overline{z_5} = x - yi$$

Llavors:

$$z_5 \cdot \overline{z_5} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x \cdot x + x \cdot (-yi) + yi \cdot x + yi \cdot (-yi)$$

$$= x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2$$

$$= x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2$$

Observeu, com ja hem vist anteriorment, que efectivament:

$$z_5 \cdot \overline{z_5} = x^2 + y^2 = \mathrm{Re}(z_5)^2 + \mathrm{Im}(z_5)^2$$

16. Recordeu que quan tenim un quocient de nombres complexos el primer que cal fer és aconseguir que no quedin *i* en el denominador. Per a fer-ho, cal multiplicar pel conjugat del nombre complex del denominador.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 4i}{1 - 2i} = \frac{3 + 4i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)}$$

$$= \frac{3 + 6i + 4i + 8i^2}{1 + 2i - 2i - 4i^2} = \frac{3 - 8 + 10i}{1 + 4} = \frac{-5 + 10i}{5} = -1 + 2i$$

17. En aquest exercici hem de fer quocients de nombres complexos. Igual que en l'exercici anterior, recordeu que quan tenim un quocient de nombres complexos, el primer que cal fer és aconseguir que no quedin *i* en el denominador. Per a fer-ho, cal multiplicar pel conjugat del nombre complex del denominador. Comencem pel primer nombre $1/i$:

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = i$$

De manera similar es calcula el quocient $1/(a + bi)$:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)}$$

$$= \frac{a - bi}{a^2 - abi + abi - b^2 i^2} = \frac{a - bi}{a^2 - b^2(-1)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Per a fer el càlcul següent, hi ha dues opcions diferents, ja que tenim un producte de nombres complexos al denominador. La primera opció és fer primer el producte dels dos nombres de sota i després multiplicar pel conjugat del resultat. La segona opció és multiplicar pels conjugats dels dos nombres dels denominadors i llavors operar. La primera opció donaria lloc a:

$$\frac{1}{2 - 3i} \cdot \frac{1}{1 + i} = \frac{1}{(2 - 3i)(1 + i)} = \frac{1}{2 + 2i - 3i - 3i^2} = \frac{1}{2 - i + 3} = \frac{1}{5 - i}$$

$$= \frac{1}{5 - i} \cdot \frac{5 + i}{5 + i} = \frac{5 + i}{(5 - i)(5 + i)} = \frac{5 + i}{25 + 5i - 5i - i^2} = \frac{5 + i}{26}$$

Vegem com es faria amb la segona opció:

$$\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{1}{1+i} = \frac{1}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}\cdot\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)}\cdot\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{2+3i}{4+9}\cdot\frac{1-i}{1+1} = \frac{(2+3i)(1-i)}{26}$$

$$= \frac{2-2i+3i-3i^2}{26} = \frac{2+i+3}{26} = \frac{5+i}{26}$$

Observeu que en aquest exercici, hem suposat que un nombre pel seu conjugat és el quadrat de la part real més el quadrat de la part imaginària. És a dir, que $(2-3i)(2+3i) = 4+6i-6i-9i^2 = 4+9 = 2^2+(-3)^2$ i que $(1+i)(1-i) = 1-i+i-i^2 = 1+1 = 1^2+1^2$.

Finalment, calculem el resultat de l'operació següent: $\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}$. En aquest cas, primer cal calcular cada un dels termes que se sumen separadament i al final cal sumar els resultats.

$$\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i} = \frac{1+2i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}+\frac{2-i}{5i}\cdot\frac{-5i}{-5i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}+\frac{(2-i)(-5i)}{-25i^2}$$

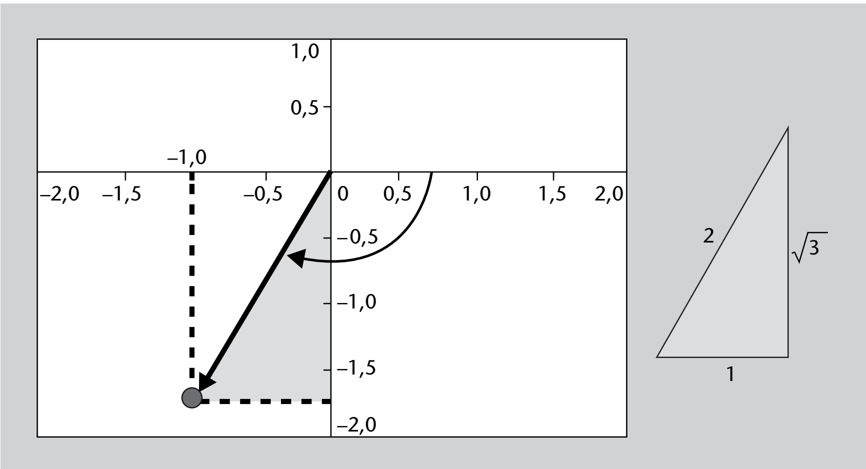
$$= \frac{(1+2i)(3+4i)}{3^2+4^2}+\frac{(2-i)(-5i)}{25} = \frac{3+4i+6i+8i^2}{25}+\frac{-10i+5i^2}{25}$$

$$= \frac{3+10i-8}{25}+\frac{-10i-5}{25} = \frac{-5+10i}{25}+\frac{-10i-5}{25}$$

$$= \frac{-1+2i}{5}+\frac{-2i-1}{5} = \frac{-1+2i-2i-1}{5} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$$

18. Considerem primer el nombre $z = -1-\sqrt{3}i$. Per a calcular la seva distància a l'origen i l'angle que forma amb l'eix positiu x el primer que farem és un dibuix. El nombre $z = -1-\sqrt{3}i$ està associat al punt $(-1, -\sqrt{3})$ com es veu a la figura 25; per tant, és un nombre que es troba al tercer quadrant.

Figura 25



La distància a l'origen la calculem utilitzant el teorema de Pitàgores. Observeu que el punt $(-1, -\sqrt{3})$ determina un triangle rectangle de catets amb longituds 1 i $\sqrt{3}$, i el que volem fer és calcular la longitud de la hipotenusa. Per tant,

$$r = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Per a calcular l'angle que forma amb l'eix x, primer calcularem l'angle que hem marcat en el triangle de la dreta de la figura 25. Com que és un triangle rectangle sabem que

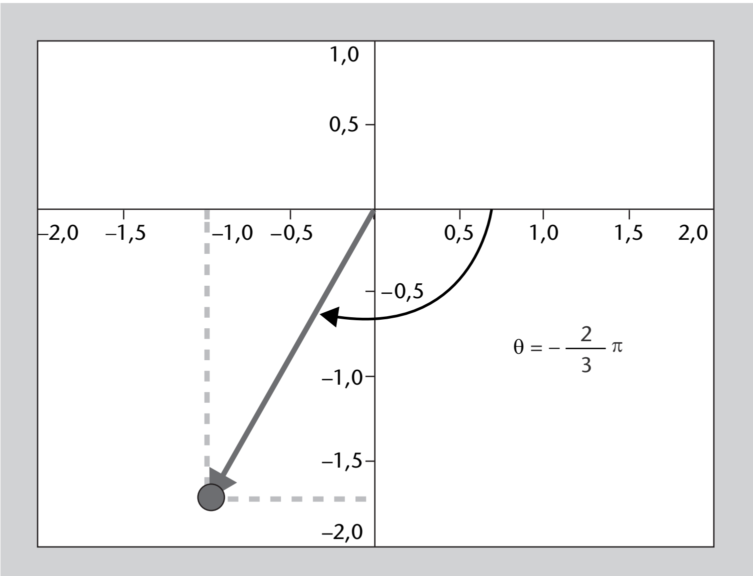
$$\sin(\theta) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

L'angle que busquem és l'angle que hem marcat en el triangle més $\pi/2$ rad, i a més, com que va en el sentit de les busques del rellotge, li hem de canviar el signe. Per tant, l'angle que busquem és

$$-\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi + 3\pi}{6} = -\frac{4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$$

Finalment, tornem a fer un dibuix dels resultats que hem obtingut, que trobareu a la figura 26.

Figura 26



19. Considerem primer el nombre $z = 3 + 2i$. Quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, amb vista a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per tant, el primer que fem és dibuixar el nombre $z = 3+2i$ en el pla complex. Aquest nombre està associat al punt (3, 2), com es veu a la figura 27; per tant, és un nombre que es troba al primer quadrant.

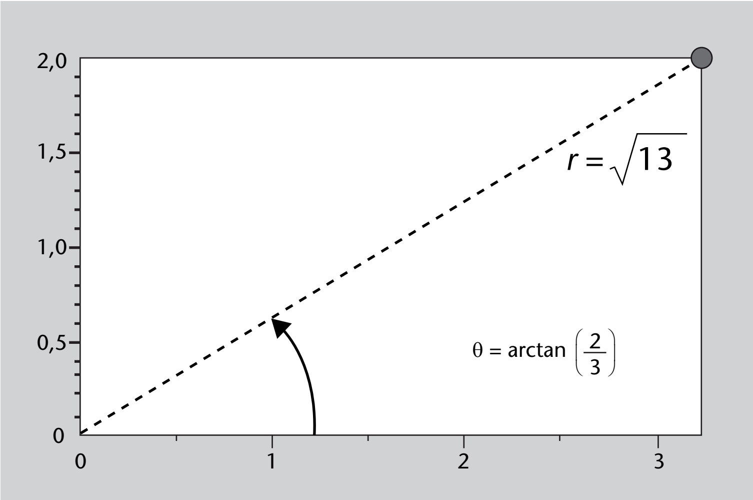
Del dibuix podem veure que l'argument (o angle) d'aquest nombre complex ha d'estar entre 0 i $\pi/2$ rad. Ara calcularem el mòdul i l'argument. El mòdul (distància del punt (3, 2) a l'origen) es calcula com:

$$r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Per a calcular l'argument θ observem que del dibuix tenim:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2/r}{3/r} = \frac{2}{3}$$

Figura 27



Per tant, l'angle θ l'obtenim com $\theta = \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$. Si calculem aquest valor amb la calculadora (en mode `rad`) tenim que $\arctan\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0{,}5880$ rad, que és el valor que estem buscant, ja que:

$$0 \leq 0{,}588 \leq \frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$$

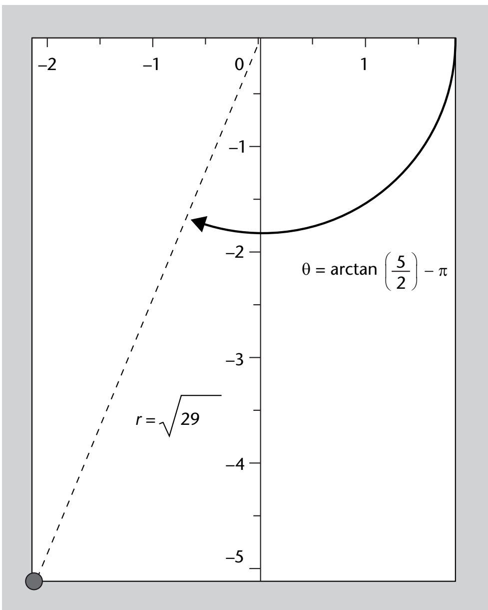
Per tant:

$$z = 3 + 2i = \sqrt{13}_{0{,}5880\text{ rad}} = \sqrt{13}_{0{,}5880\text{ rad}\cdot\frac{180^\circ}{\pi\text{ rad}}} = 3{,}61_{33{,}69^\circ}$$

Amb la resta de punts procedim de la mateixa manera. Primer fem un dibuix per a situar en quin quadrant ens trobem i després calculem el mòdul i l'argument.

Agafem ara $z = -2 - 5i$. Aquest nombre complex està associat al punt (-2, - 5) com es veu a la figura 28; per tant, és un nombre que es troba al tercer quadrant.

Figura 28



Del dibuix podem veure que l'argument (o angle) d'aquest nombre complex s'ha de trobar entre 180° = π rad i 270° = $3\pi/2$ rad. Observeu que també podem dir que l'angle es troba entre -90° = $-\pi/2$ rad i -180° = $-\pi$ rad. El mòdul és:

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

Per a calcular l'argument θ observem que del dibuix tenim:

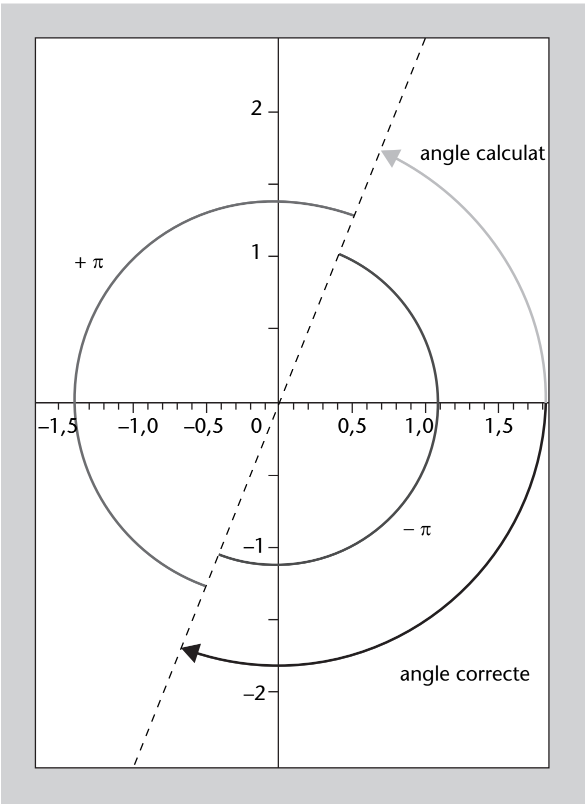
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-5/r}{-2/r} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

Per tant, l'angle θ l'obtenim com $\theta = \arctan\left(\frac{5}{2}\right)$. Si calculem aquest valor amb la calculadora (en mode `rad`) tenim que $\arctan\left(\frac{5}{2}\right) = 1{,}1903$ rad, que no és el valor que busquem, ja que:

$$1{,}1903 \leq \pi = 3{,}1416$$

Vegeu la figura 29, en què hem representat l'angle que volem calcular i l'angle que ens dóna la calculadora.

Figura 29



L'angle que hem obtingut és l'equivalent del primer quadrant, com es veu en el dibuix. Per a recuperar l'angle que volem a partir de l'angle que ens dóna la calculadora, hem de sumar o restar π. Tot i que el resultat serà diferent, el valor obtingut serà el mateix angle. En aquest cas, hem decidit restar π:

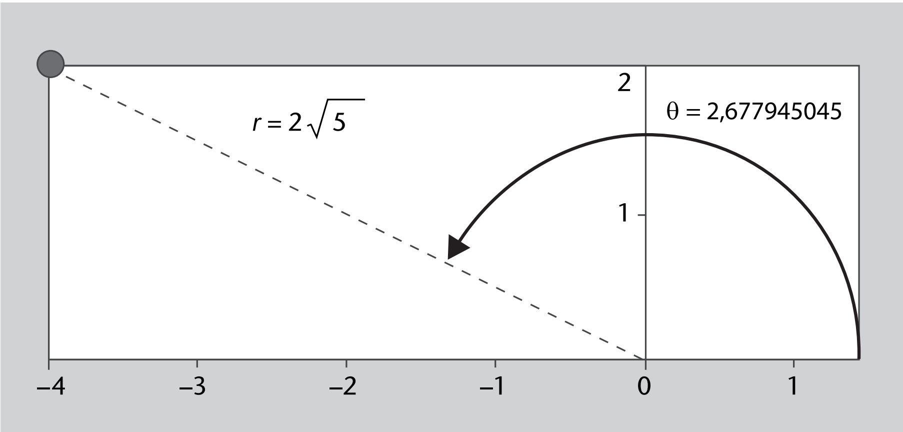
$$\theta = 1{,}1903 - \pi = -1{,}9512$$

i el nombre complex és:

$$z = -2 - 5i = \sqrt{19}_{-1{,}9512 \text{ rad}} = \sqrt{19}_{-1{,}9512 \text{ rad}\cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}} = \sqrt{4{,}36}_{-111{,}80^\circ}$$

Considerem ara el nombre $z = -4 + 2i$. Aquest nombre complex està associat al punt (-4, 2), com es pot veure a la figura 30; per tant, és un nombre que es troba al segon quadrant.

Figura 30



Del dibuix podem veure que l'argument (o angle) d'aquest nombre complex ha d'estar entre $90^\circ = \pi/2$ rad i $180^\circ = \pi$ rad. El mòdul és:

$$r = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{4}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Per a calcular l'argument θ observem que del dibuix tenim:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2/r}{-4/r} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Per tant, l'angle θ l'obtenim:

$$\theta = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Si calculem aquest valor amb la calculadora (en mode `rad`) tenim:

$$\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = -0{,}4636 \text{ rad}$$

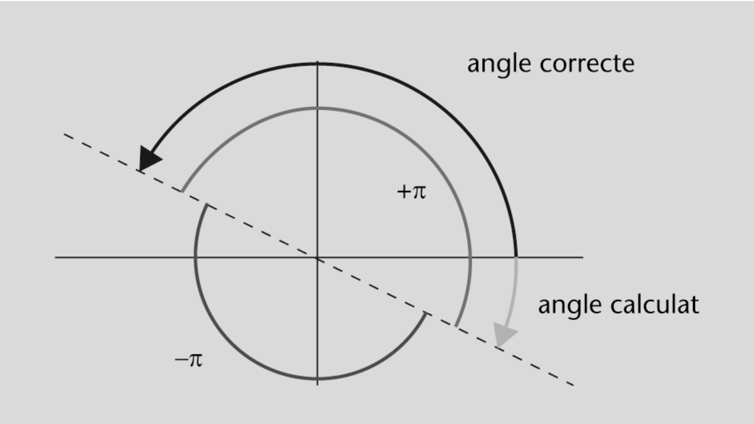
que no és el valor que busquem, ja que:

$$-0{,}4636 < 0$$

Vegeu la figura 31, en què hem representat l'angle que volem calcular i l'angle que ens dóna la calculadora.

L'angle que hem obtingut és l'equivalent del quart quadrant, com es veu en el dibuix. Per a recuperar l'angle que volem a partir de l'angle que ens dóna la calculadora, hem de sumar o

Figura 31



restar π. En aquest cas, com que la calculadora ens dóna un valor negatiu, sumem π:

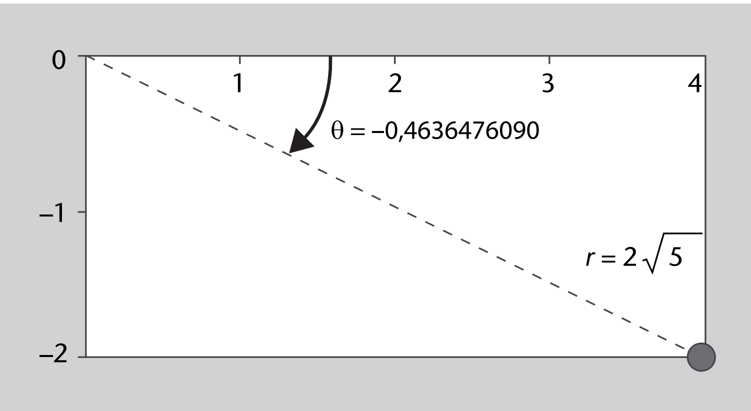
$$\theta = -0{,}4636 + \pi = 2{,}6780$$

i el nombre complex és:

$$z = -4 + 2i = 2\sqrt{5}_{2{,}6780 \text{ rad}} = 2\sqrt{5}_{2{,}6780 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}} = 4{,}47_{153{,}44^\circ}$$

Finalment, considerem el nombre $z = 4 - 2i$. Aquest nombre complex està associat al punt (4, - 2), com es veu a la figura 32; per tant, és un nombre que es troba al quart quadrant.

Figura 32



Del dibuix podem veure que l'argument (o angle) d'aquest nombre complex ha d'estar entre 270° = $3\pi/2$ rad i 360° = 2π rad, o bé entre 0° = 0 rad i -90° = $-\pi/2$ rad. El mòdul és:

$$r = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{4}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Per a calcular l'argument θ observem que del dibuix tenim:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-2/r}{4/r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Per tant, l'angle θ l'obtenim com:

$$\theta = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Si calculem aquest valor amb la calculadora (en mode `rad`) tenim:

$$\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = -0{,}4636 \text{ rad}$$

que ara sí que és l'angle que busquem, ja que:

$$-\frac{\pi}{2} = -1{,}5708 < -0{,}4636 < 0$$

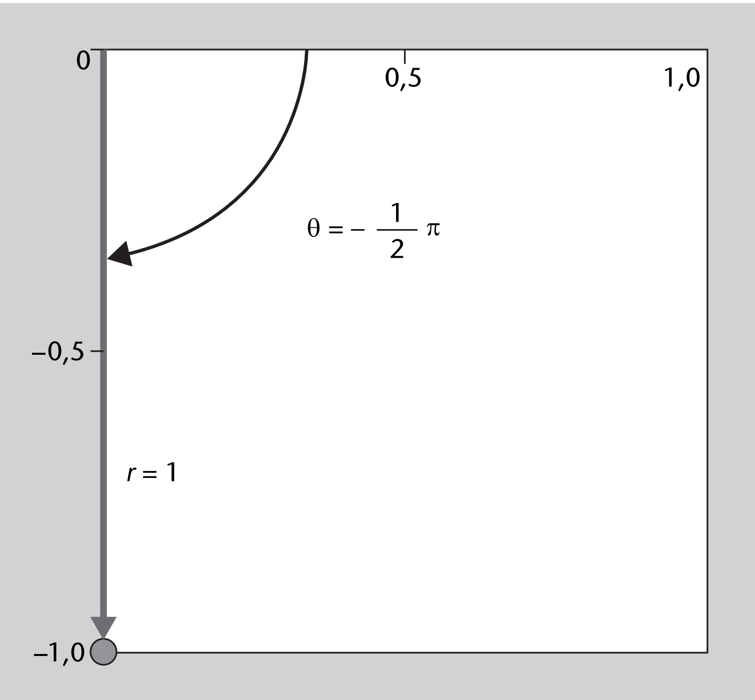
Per tant:

$$z = 4 - 2i = 2\sqrt{5}_{-0{,}4636\text{ rad}} = 2\sqrt{5}_{-0{,}4636\text{ rad}\cdot\frac{180^\circ}{\pi\text{ rad}}} = 4{,}47_{-26{,}56^\circ}$$

20. Recordeu que quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, amb vista a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. A més, en casos senzills, podrem donar el resultat directament.

Considerem primer el nombre $z = -i$, que està associat al punt (0,-1), com es veu a la figura 33.

Figura 33

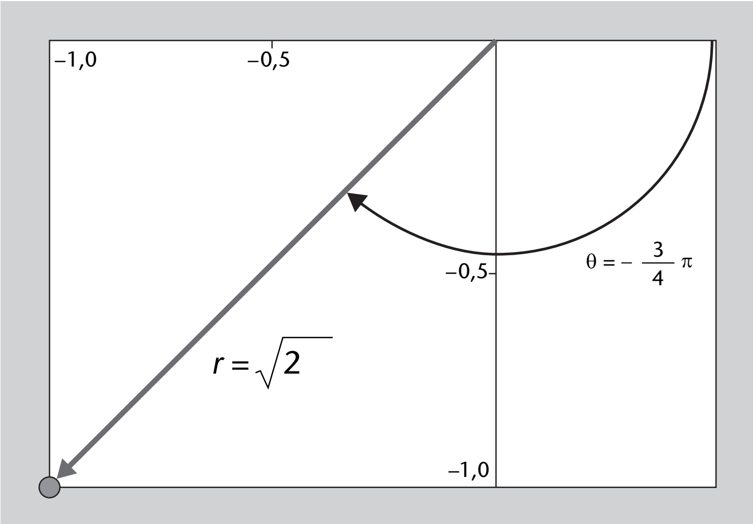


En aquest cas, fixeu-vos que la distància a l'origen és clarament 1 i que l'angle és clarament -90° = $-\pi/2$ rad. Per tant, en forma polar és:

$$z = -i = 1_{-\pi/2}$$

Considerem ara el nombre z = -1 - i, que està associat al punt (-1, - 1), com es pot veure a la figura 34.

Figura 34

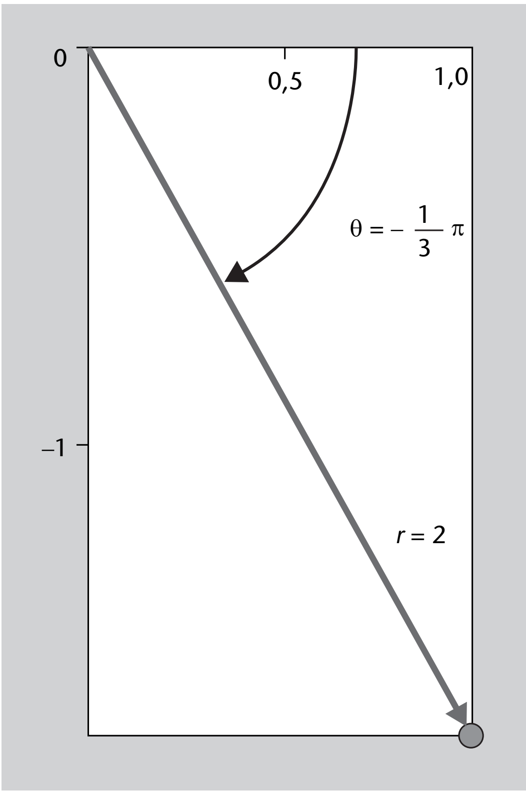


En aquest cas, fixeu-vos que la distància a l'origen és clarament $\sqrt{2}$, perquè és la diagonal d'un quadrat de costat 1. A més, l'angle és clarament (-90 - 45)° = -135° = -3π/4 rad. Per tant, en forma polar és:

$$z = -1 - i = \sqrt{2}_{-3\pi/4}$$

Considerem ara el nombre $z = 1 - \sqrt{3}i$, que està associat al punt (1, - $\sqrt{3}$). Com es veu a la figura 35, és un nombre complex que es troba al quart quadrant.

Figura 35



Del dibuix podem veure que l'argument (o angle) d'aquest nombre complex ha d'estar entre $270° = 3\pi/2$ rad i $360° = 2\pi$ rad, o bé entre $0° = 0$ rad i $-90° = -\pi/2$ rad. El mòdul és:

$$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Per a calcular l'argument θ observem que del dibuix tenim:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\sqrt{3}/r}{1/r} = -\sqrt{3}$$

Per tant, l'angle θ l'obtenim com:

$$\theta = \arctan\left(-\sqrt{3}\right)$$

Si calculem aquest valor amb la calculadora (en mode `rad`) tenim:

$$\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = -1{,}047 \text{ rad} = -\frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

Aquest angle és el que busquem, ja que:

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{3} < 0$$

Per tant:

$$z = 1 - \sqrt{3}i = 2_{-\pi/3 \text{ rad}} = 2_{-\pi/3 \text{ rad}\cdot\frac{180°}{\pi \text{ rad}}} = 2_{-60°}$$

Per acabar l'exercici, hem de passar els nombres $z_2 = -\sqrt{3} + i$ i $z_3 = \sqrt{3} + i$ a forma polar. Això ho farem de manera senzilla amb la informació que acabem de calcular. Considereu $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$. Acabem de veure que

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2_{-\pi/3 \text{ rad}} = 2_{-60°}$$

Per acabar l'exercici el que fem és dibuixar els punts z_1, z_2 i z_3 al pla complex (vegeu la figura 36).

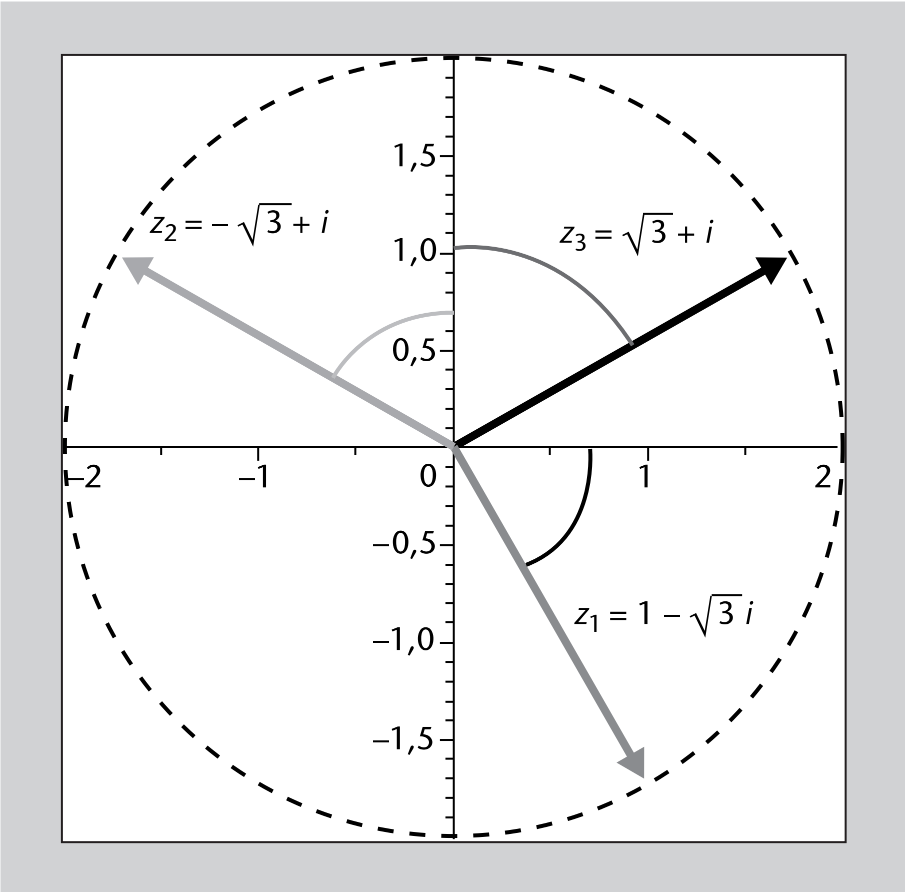
Podem veure que tots tres punts es troben sobre la mateixa circumferència. Per tant, els tres punts tenen el mateix mòdul, que és 2.

Ara només ens falta calcular els angles. A la figura 36 us hem marcat els tres angles, que són iguals (d'una obertura de 60°). Per tant, l'angle associat a z_2 és $90° + 60° = 150°$. De la mateixa manera, l'angle associat a z_3 és $90° - 60° = 30°$. Per tant:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 - \sqrt{3}i = 2_{-60°} = 2_{-\pi/3 \text{ rad}} \\ z_2 &= -\sqrt{3} + i = 2_{150°} = 2_{-\pi/3 \text{ rad}} \\ z_3 &= \sqrt{3} + i = 2_{30°} = 2_{5\pi/6 \text{ rad}} \end{aligned}$$

Un bon exercici per a practicar és refer aquest exercici sense l'ajuda visual i comprovar que arribeu al mateix resultat.

Figura 36



21. Amb vista a passar nombres de forma polar a forma binòmica, no és tan necessari fer el dibuix però sempre és recomanable per a acabar de comprovar els resultats. Per a fer aquest exercici hem de tenir en compte la fórmula següent, que ens passa de forma binòmica a forma polar:

$$r_\theta = r\cos(\theta) + r\sin(\theta)i$$

Per tant, tenim:

$$z_1 = 1_0 = 1\cos(0) + 1\sin(0)i = 1 + 0i = 1$$

$$z_2 = 2_\pi = 2\cos(\pi) + 2\sin(\pi)i = 2 \cdot (-1) + 0i = -2$$

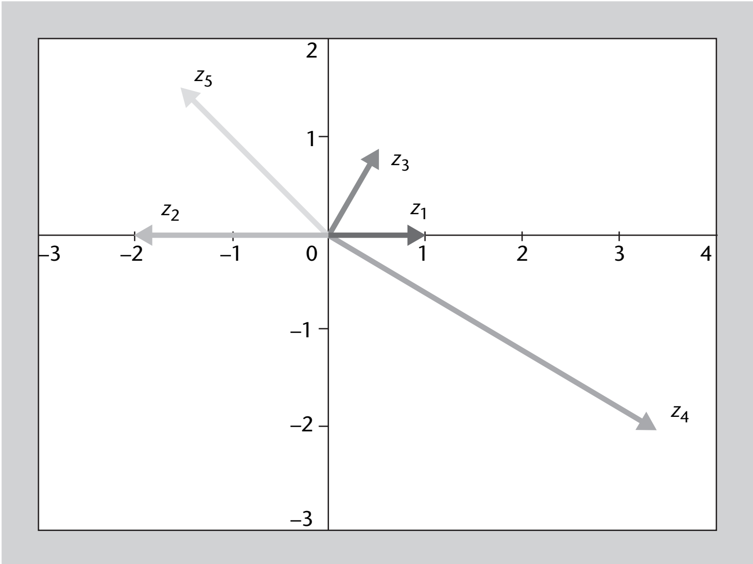
$$z_3 = 1_{\pi/3} = 1\cos(\pi/3) + 1\sin(\pi/3)i = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_4 = 4_{-\pi/6} = 4\cos(-\pi/6) + 4\sin(-\pi/6)i = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{-1}{2}i = 2\sqrt{3} - 2i$$

$$z_5 = 2_{3\pi/4} = 2\cos(3\pi/4) + 2\sin(3\pi/4)i = 2 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}i = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Per a comprovar els resultats, hem dibuixat els nombres en el pla complex (vegeu la figura 37).

Figura 37



22. Considerem els nombres complexos z_1 = -2 - 5i i z_2 = -2 + 5i. Observeu que z_2 és el conjugat de z_1, és a dir:

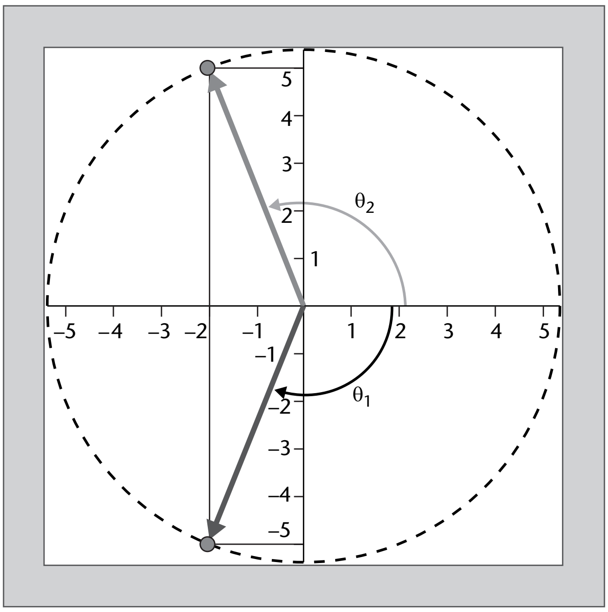
$$z_2 = \overline{z_1}$$

Amb aquesta informació, ja sabem que el mòdul dels dos nombres serà el mateix, que és:

$$r = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

Per a calcular correctament els angles, el que fem primer és fer un dibuix en el pla complex, com podeu veure a la figura 38.

Figura 38



Com es veu en el dibuix, els angles de z_1 i z_2 són iguals però canviats de signe. Per tant, si representem l'angle de z_1 com θ_1 i l'angle de z_2 com θ_2 tenim:

$$\theta_2 = -\theta_1$$

Observeu que això és el mateix que dir que $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$, ja que als angles els podem sumar (o restar) 2π sempre sense modificar-los.

Per tant, calcularem ara θ_1. Observeu que com que z_1 es troba al tercer quadrant, el seu argument (o angle) ha d'estar entre 180° = π rad i 270° = $3\pi/2$ rad, o bé entre -90° = $-\pi/2$ rad i -180° = $-\pi$ rad. Del dibuix es pot veure que:

$$\tan(\theta_1) = \frac{\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_1)} = \frac{-5/r}{-2/r} = \frac{5}{2}$$

Per tant, l'angle θ_1 l'obtenim com:

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{5}{2}\right)$$

Si calculem aquest valor amb la calculadora (en mode `rad`) tenim:

$$\arctan\left(\frac{5}{2}\right) = 1{,}1902 \text{ rad} = 1{,}1902 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 68{,}19°$$

Per tant, aquest no és l'angle que busquem, sinó que li hem de restar (o sumar π), és a dir:

$$\theta_1 = (1{,}1902 - \pi) \text{ rad} = -1{,}9514 \text{ rad} = -111{,}81°$$

Finalment:

$$\theta_2 = -\theta_1 = 1{,}9514 \text{ rad} = 111{,}81°$$

Per tant:

$$z_1 = -2 - 5i = \sqrt{29}_{-1{,}9514 \text{ rad}}$$
$$z_2 = -2 + 5i = \sqrt{29}_{1{,}9514 \text{ rad}}$$

23. Recordeu que la suma i la resta de dos nombres complexos s'ha de fer sempre en forma binòmica. En canvi, el producte i la divisió de nombres complexos els podem fer tant en forma binòmica com en forma polar o exponencial.

Comencem, doncs, per calcular la suma i la resta de z_1 i z_2. Com que per a sumar o restar hem de fer-ho en forma binòmica, el primer que hem de fer és passar els dos nombres a forma binòmica:

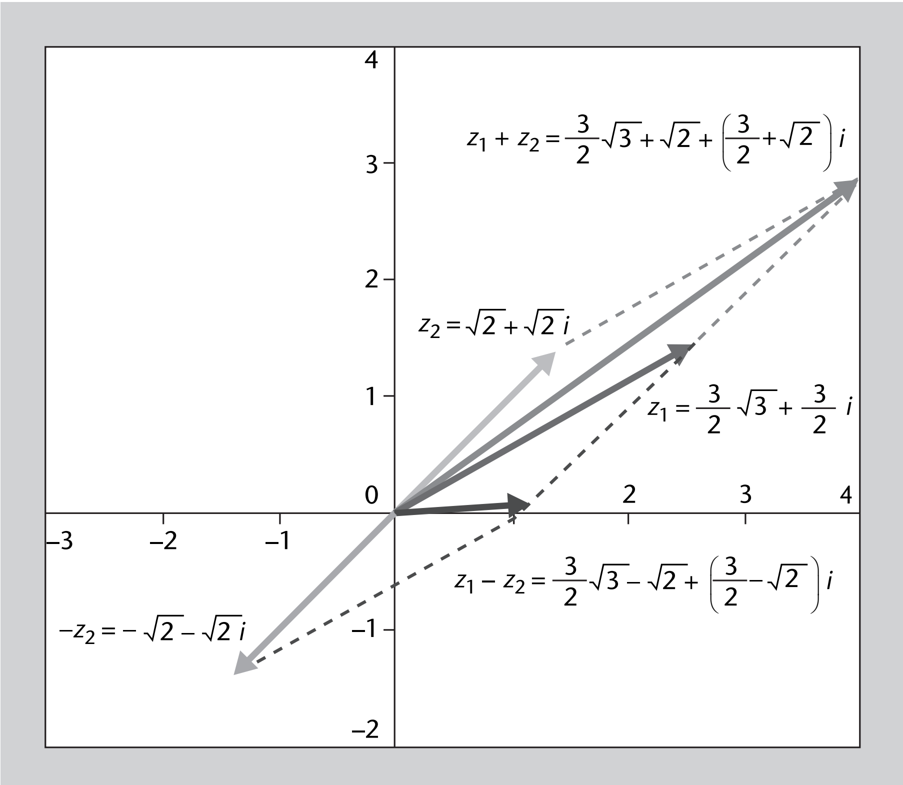
$$z_1 = 3_{\pi/6} = 3\cos(\pi/6) + 3\sin(\pi/6)i = 3\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\frac{1}{2}i = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i,$$
$$z_2 = 2_{\pi/4} = 2\cos(\pi/4) + 2\sin(\pi/4)i = 2\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2}i = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Per tant:

$$z_1 + z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + \sqrt{2} + \sqrt{2}i = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} + \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) i,$$
$$z_1 - z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} + \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) i$$

Podeu veure els resultats a la figura 39.

Figura 39



Ara calcularem el producte i el quocient de z_1 i z_2:

$$z_1 \cdot z_2 = 3_{\pi/6} \cdot 2_{\pi/4} = (3 \cdot 2)_{\pi/6+\pi/4} = 6_{5\pi/12},$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3_{\pi/6}}{2_{\pi/4}} = \left(\frac{3}{2}\right)_{\pi/6-\pi/4} = 1{,}5_{-\pi/12}$$

Observeu que per a calcular el producte de dos nombres complexos, es multipliquen els mòduls i se sumen els arguments. De manera similar, per a calcular la divisió de dos nombres complexos, es divideixen els mòduls i es resten els arguments.

24. Utilitzant la definició d'un nombre complex imaginari pur tenim:

$$e^{\pi i} = \cos(\pi) + \sin(\pi)i = -1 + 0i = -1$$

Com que el resultat és un nombre real negatiu, passar-lo a forma polar és immediat. El mòdul de $e^{\pi i}$ és 1 i l'angle és π. És a dir:

$$e^{\pi i} = -1 = 1_\pi$$

25. Si tenim $z = 2 + \pi i$, calculem e^z:

$$e^z = e^{2+\pi i} = e^2 e^{\pi i}$$

Si utilitzem ara el resultat de l'exercici anterior tenim:

$$e^z = e^2 e^{\pi i} = e^2 \cdot (-1) = -e^2$$

Per tant, una altra vegada obtenim un nombre real negatiu. D'aquesta manera:

$$e^z = -e^2 = \left(e^2\right)_\pi$$

El mòdul de e^z és e^2 i el seu angle π.

26. Per a poder simplificar les expressions que ens donen en forma exponencial, el primer que hem de fer és passar els nombres que tenim de forma binòmica a forma exponencial.

Comencem per calcular l'expressió $\frac{(3-2i)(2+3i)}{3-4i}$. Per a fer això hem de passar els tres nombres que ens apareixen a forma exponencial.

$$\begin{aligned}
z_1 = 3 - 2i \quad &\longrightarrow \quad r_1 = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \\
&\longrightarrow \quad \tan(\theta_1) = \tfrac{-2}{3} \Longrightarrow \theta_1 = -0{,}5880 \text{ rad} \\
z_2 = 2 + 3i \quad &\longrightarrow \quad r_2 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \\
&\longrightarrow \quad \tan(\theta_2) = \tfrac{3}{2} \Longrightarrow \theta_2 = 0{,}9828 \text{ rad} \\
z_3 = 3 - 4i \quad &\longrightarrow \quad r_3 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\
&\longrightarrow \quad \tan(\theta_3) = \tfrac{-4}{3} \Longrightarrow \theta_3 = 0{,}9273 \text{ rad}
\end{aligned}$$

Per tant, tenim que:

$$\begin{aligned}
\frac{(3-2i)(2+3i)}{3-4i} &= \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} = \frac{\sqrt{13}e^{-0{,}5880i} \cdot \sqrt{13}e^{0{,}9828i}}{5e^{0{,}9273i}} \\
&= \frac{\sqrt{13}^2}{5} e^{(-0{,}5880+0{,}9828-0{,}9273)i} = \frac{13}{5} e^{-0{,}5325i}
\end{aligned}$$

Finalment, podem passar el resultat a forma binòmica:

$$\begin{aligned}
\frac{13}{5} e^{-0{,}5325i} &= \frac{13}{5} \cos(-0{,}5325) + \frac{13}{5} \sin(-0{,}5325) i \\
&= \frac{13}{5} \cdot 0{,}8615 + \frac{13}{5} \cdot (-0{,}5077) i = 2{,}2400 - 1{,}3200i
\end{aligned}$$

Observeu que, com que hem aproximat els angles a quatre decimals, hem obtingut una aproximació del resultat. De fet, és un bon exercici que feu els mateixos càlculs en forma binòmica i que comproveu que:

$$\frac{(3-2i)(2+3i)}{3-4i} = \frac{56}{25} - \frac{33}{25} i = 2{,}24 - 1{,}32i$$

Ara calcularem i^{29}. El nombre i està associat al punt (0,1) del pla complex; per tant, té mòdul 1 i angle $\pi/2 = 90°$. Per tant, utilitzant la fórmula de Moivre tenim:

$$i^{29} = (1e^{\pi/2i})^{29} = (e^{\pi/2i})^{29} = e^{29\cdot\pi/2i}$$

Observeu que l'angle obtingut és:

$$\frac{29}{2}\pi = \frac{29}{4}2\pi = 7{,}25 \cdot 2\pi,$$

que representa més de 7 voltes. Per a saber l'angle que hi ha entre 0 i 2π, hem de restar 7 voltes:

$$\frac{29}{2}\pi - 7 \cdot 2\pi = \left(\frac{29}{2} - 14\right)\pi = \frac{29 - 28}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$$

Per tant, el resultat és:

$$e^{\pi/2i} = \cos(\pi/2) + \sin(\pi/2)i = i$$

Finalment calcularem $(1+i)^4$. Primer passarem el nombre $1+i$ a forma polar. Observeu que el nombre complex $1+i$ està associat al punt (1, 1), que té per mòdul $\sqrt{2}$ i angle $45° = \pi/4$ rad. Per tant:

$$(1 + i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{\pi/2i}\right)^4 = \left(\sqrt{2}|\right)^4 e^{4\cdot\pi/2i} = 2^2e^{2\pi i} = 4e^{2\pi i}$$

Observeu que l'angle 2π és equivalent a l'angle 0; per tant:

$$(1 + i)^4 = 4e^{0i} = 4$$

Nota

Recordeu que és molt útil per a vosaltres representar sempre els nombres complexos amb els quals treballeu per no equivocar-vos sobretot en el càlcul dels angles.

27. Per a calcular el cub de z_1, z_2 i z_3, primer hem de passar aquests nombres a forma polar.

$$z_1 = 1_0 = 1$$

$$z_2 = 1_{\frac{2\pi}{3}} = 1e^{2\pi/3i} = e^{2\pi/3i}$$

$$z_3 = 1_{\frac{4\pi}{3}} = 1e^{4\pi/3i} = e^{4\pi/3i}$$

Ara calcularem el cub utilitzant les propietats de la forma exponencial. El resultat l'expressarem en forma binòmica:

$$z_1 = 1 \implies z_1^3 = 1^3 = 1$$

$$z_2 = e^{2\pi/3i} \implies z_2^3 = (e^{2\pi/3i})^3 = e^{3\cdot2\pi/3i} = e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + \sin(2\pi)i = 1$$

$$z_3 = e^{4\pi/3i} \implies z_3^3 = (e^{4\pi/3i})^3 = e^{3\cdot4\pi/3i} = e^{4\pi i} = \cos(4\pi) + \sin(4\pi)i = 1$$

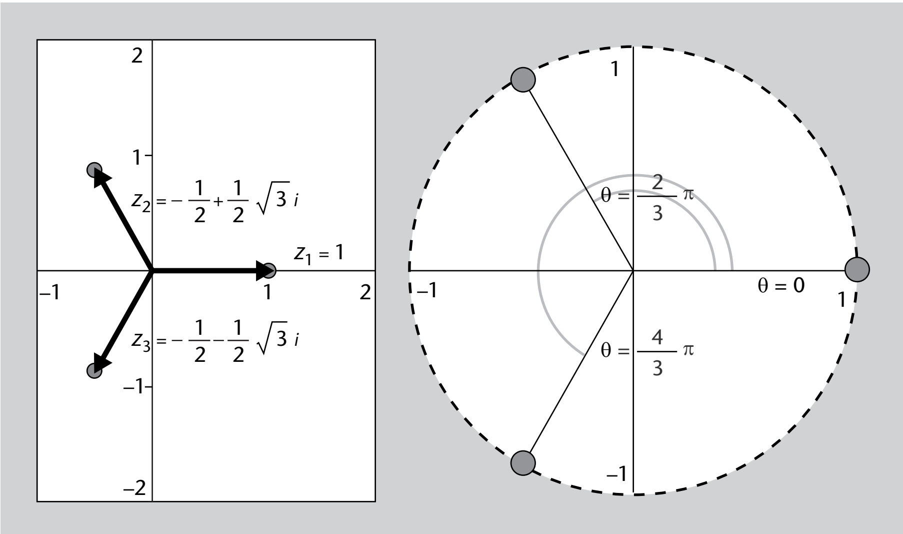
Per tant, veiem que $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3 = 1$.

28. Les tres arrels cúbiques de la unitat són:

$$z_1 = e^{0i} = 1$$
$$z_2 = e^{2\pi/3i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_3 = e^{4\pi/3i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

La representació en el pla complex d'aquestes tres arrels la podeu veure a la figura 40.

Figura 40



Com podeu veure, les tres arrels formen un triangle equilàter. A més, els vèrtexs d'aquest triangle es troben sobre la circumferència de centre (0,0) i de radi 1.

29. Expressem primer el nombre complex 1 en forma exponencial:

$$1 = e^{0i} = e^{2\pi ki}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Per tant, volem resoldre:

$$z^n = e^{2\pi ki}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

per a $n = 2, 4, 5$ i 6. Per a fer-ho alhora, apliquem l'arrel enèsima a totes dues bandes de la igualtat:

$$\left(z^n\right)^{\frac{1}{n}} = z = e^{\frac{2\pi ki}{n}} = e^{2\pi k/n\, i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Per a determinar les arrels quadrades, substituïm $n = 2$:

$$z = e^{2\pi k/2\, i} = e^{\pi k\, i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

i prenem com a valors de la $k = 0, 1$.

$$k = 0: \qquad z_1 = e^{0i} = \cos(0) + i\sin(0) = 1$$

$$k = 1: \qquad z_2 = e^{\pi i} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

De la mateixa manera, per a determinar les arrels quartes, substituïm $n = 4$:

$$z = e^{2\pi k/4\, i} = e^{\pi/2k\, i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

i prenem com a valors de la $k = 0, 1, 2, 3$.

$$k = 0: \qquad z_1 = e^{0i} = 1$$

$$k = 1: \qquad z_2 = e^{\pi/2i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i = i$$

$$k = 2: \qquad z_3 = e^{\pi i} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

$$k = 3: \qquad z_4 = e^{3\pi/2i} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - i = -i$$

Ara obtindrem les arrels cinquenes. Primer substituïm $n = 5$:

$$z = e^{2\pi k/5\, i} = e^{2\pi/5k\, i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

i prenem com a valors de la $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

$$k = 0: \qquad z_1 = e^{0i} = 1$$

$$k = 1: \qquad z_2 = e^{2\pi/5i} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0{,}309 + 0{,}951i$$

$$k = 2: \qquad z_3 = e^{4\pi/5i} = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -0{,}809 + 0{,}588i$$

$$k = 3: \qquad z_4 = e^{6\pi/5i} = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) = -0{,}809 - 0{,}588i = \overline{z_3}$$

$$k = 4: \qquad z_5 = e^{8\pi/5i} = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0{,}309 - 0{,}951i = \overline{z_2}$$

Finalment, obtindrem les arrels sisenes. Primer substituïm $n = 6$:

$$z = e^{2\pi k/6\, i} = e^{2\pi/5k\, i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

i prenem com a valors de la k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

$$k = 0: \quad z_1 = e^{0i} = 1$$

$$k = 1: \quad z_2 = e^{2\pi/6i} = \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2: \quad z_3 = e^{4\pi/6i} = \cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

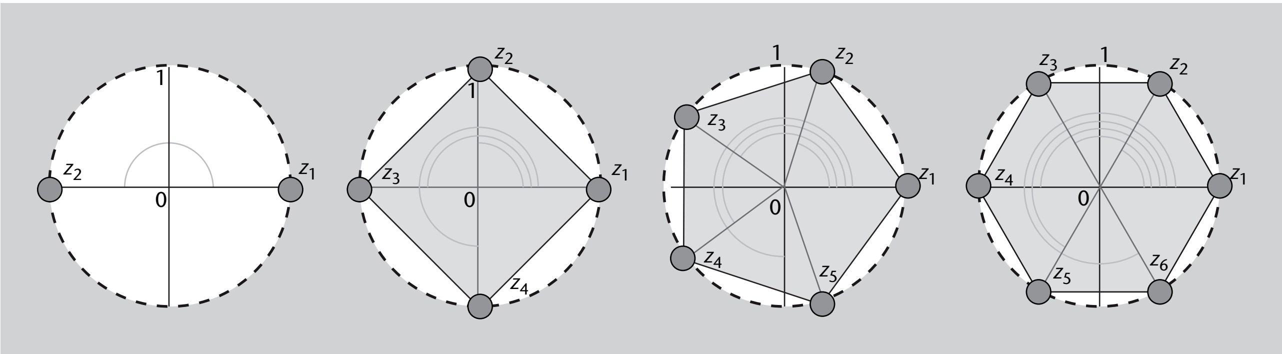
$$k = 3: \quad z_4 = e^{6\pi/6i} = e^{\pi i} = -1$$

$$k = 4: \quad z_5 = e^{8\pi/6i} = \cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \overline{z_3}$$

$$k = 5: \quad z_6 = e^{10\pi/6i} = \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \overline{z_2}$$

A la figura 41 hem representat les arrels quadrades, quartes, cinquenes i sisenes del nombre z = 1. Observeu que totes les arrels tenen el mateix mòdul (estan situades sobre una circumferència) i que estan situades en els vèrtexs d'un polígon regular de n vèrtexs. D'aquesta manera, les arrels quadrades sempre estan alineades, les arrels quartes són els vèrtexs d'un quadrat, les arrels cinquenes el vèrtexs d'un pentàgon regular i les arrels sisenes els vèrtexs d'un hexàgon regular.

Figura 41



30. Ara resoldrem primer l'equació $z^4 + 16 = 0$. Observeu que això és equivalent a trobar els valors de z que fan que:

$$z^4 = -16$$

Per tant, hem de calcular les arrels quartes del nombre complex -16. Aquest exercici es pot fer de manera molt senzilla utilitzant el raonament següent:

$$z^4 = -16 = 16(-1) \Longrightarrow z^4 = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{-1} = 2\sqrt[4]{-1}$$

Per tant, les arrels quartes de -16 les podem obtenir a partir de les arrels quartes de -1 que ja hem calculat anteriorment multiplicant per dos. D'aquesta manera, les quatre arrels quartes són:

$$z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$z_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$z_3 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$z_4 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

Ara bé, també podem fer el mateix exercici pas a pas. Per això el primer que farem és passar el nombre -16 a forma exponencial:

$$-16 = 16e^{\pi i} = 16e^{(\pi+2\pi k)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Per tant, volem resoldre:

$$z^4 = 16e^{(\pi+2\pi k)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Apliquem ara l'arrel quarta a totes dues bandes de la igualtat:

$$\left(z^4\right)^{\frac{1}{4}} = z = (16e^{(\pi+2\pi k)i})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16}e^{(\pi+2\pi k)/4i} = 2e^{(\pi/4+\pi/2k)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Per a determinar les arrels quartes prenem com a valors de la $k = 0, 1, 2, 3$.

$$k = 0: \qquad z_1 = 2e^{\pi/4i} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)i = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$k = 1: \qquad z_2 = 2e^{(\pi/4+\pi/2)i} = 2e^{3\pi/4i} = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 2\sin\left(3\frac{\pi}{4}\right)i = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$k = 2: \qquad z_3 = 2e^{(\pi/4+\pi)i} = 2e^{5\pi/4i} = 2\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)i = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$k = 3: \qquad z_4 = 2e^{(\pi/4+3\pi/2)i} = 2e^{7\pi/4i} = 2\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + 2\sin\left(7\frac{\pi}{4}\right)i = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

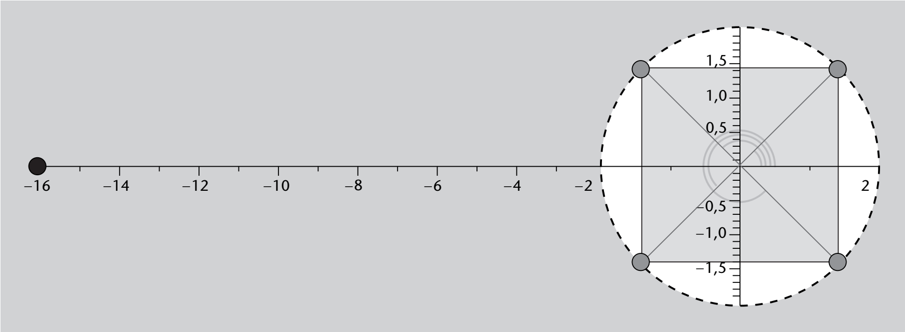
Veiem que obtenim els mateixos resultats que amb la manera senzilla de fer l'exercici.

Una altra manera també senzilla de calcular les arrels quartes és tenint en compte que les quatre arrels són els vèrtexs d'un quadrat. Considerem el nombre -16, que té com a mòdul 16 i com a angle π. Sabem que la primera arrel la podem obtenir fent l'arrel quarta del mòdul i dividint per quatre l'argument; d'aquesta manera tenim:

$$z_1 = \sqrt[4]{16}e^{\pi/4i} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Si representem aquest punt veiem que es troba sobre la bisectriu del primer quadrant (recta que parteix el primer quadrant $y = x$). Dibuixem ara la circumferència de radi 2 i col·loquem sobre aquesta circumferència els quatre vèrtexs del quadrat (vegeu la figura 42).

Figura 42



Gràficament es veu que, si $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, llavors per a obtenir z_2 només cal que canviem el signe de la coordenada x, és a dir, de la part real. De la mateixa manera, es veu que $z_3 = -z_1$. Finalment, per a obtenir z_4 el que cal fer és canviar el signe de la coordenada y, és a dir, el signe de la part imaginària. D'aquesta manera:

$$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$
$$z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$
$$z_3 = -z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$
$$z_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Ara resoldrem l'equació $z^6 = i$. En aquest cas ens demanen que trobem les arrels sisenes del nombre i. El primer que cal fer és passar aquest nombre a forma exponencial:

$$i = e^{\pi/2i}$$

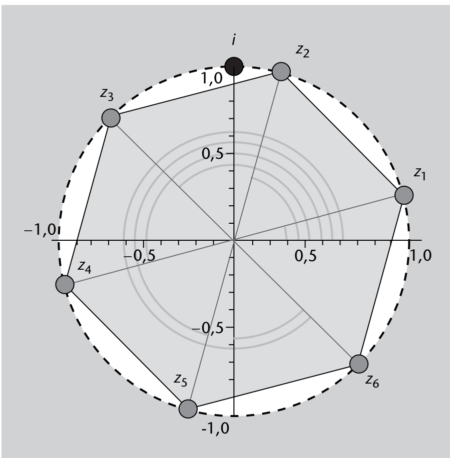
Per tant, com que i té mòdul 1, les arrels sisenes tindran mòdul $\sqrt[6]{1} = 1$. És a dir, els nombres complexos que busquem es troben sobre la circumferència de radi 1.

La primera arrel recordeu que l'obtenim dividint l'angle del nombre per 6, és a dir:

$$z_1 = e^{\pi/2/6i} = e^{\pi/12i}$$

Les altres arrels es troben situant-les en els vèrtexs d'un hexàgon regular, com es veu a la figura 43. És a dir, la diferència d'angle entre cada una de les arrels és de $2\pi/6 = \pi/3$.

Figura 43



D'aquesta manera:

$$z_1 = e^{\pi/12i}$$

$$z_2 = e^{(\pi/12+\pi/3)i} = e^{5\pi/12i}$$

$$z_3 = e^{(\pi/12+2\pi/3)i} = e^{3\pi/4i}$$

$$z_4 = e^{(\pi/12+3\pi/3)i} = e^{13\pi/12i}$$

$$z_5 = e^{(\pi/12+4\pi/3)i} = e^{17\pi/12i}$$

$$z_6 = e^{(\pi/12+5\pi/3)i} = e^{7\pi/4i}$$

Finalment, trobarem les solucions de l'equació $z^3 + 8i = 0$. En aquest cas hem de resoldre:

$$z^3 = -8i,$$

és a dir, hem de trobar les arrels cúbiques de $-8i = 8e^{-\pi/2i}$.

Sabem que el mòdul de les tres arrels és $\sqrt[3]{8} = 2$; per tant, es troben sobre la circumferència de centre (0,0) i radi 2. La primera arrel l'obtenim dividint l'angle inicial per 3, és a dir:

$$z_1 = 2e^{-\pi/2/3i} = 2e^{-\pi/6i}$$

En aquest cas, com que les arrels es troben sobre un triangle, la diferència d'angle entre els punts és de $2\pi/3$. Això dóna lloc al següent:

$$z_1 = 2e^{-\pi/6i}$$

$$z_2 = 2e^{(-\pi/6+2\pi/3)i} = e^{\pi/2i}$$

$$z_3 = 2e^{(-\pi/6+4\pi/3)i} = e^{7\pi/6i}$$

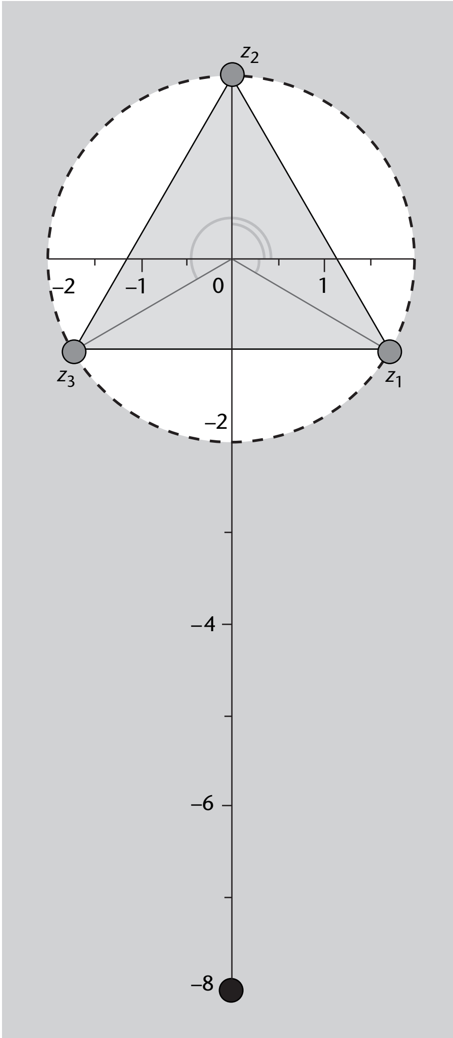
Com veiem a la figura 44, si sumem $2\pi/3$ a l'angle de z_1 obtenim un angle de $\pi/2$, és a dir, que la segona arrel es troba sobre l'eix positiu de les y. Això vol dir que és un nombre imaginari pur amb part imaginària positiva; per tant, $z_2 = 2i$. A més, de la figura 44 es veu que per a obtenir z_3 només cal canviar el signe de la part real de z_1. Per tant:

$$z_1 = \sqrt{3} - i$$

$$z_2 = 2$$

$$z_3 = -\sqrt{3} - i$$

Figura 44



Glossari

Argument d'un nombre complex *m* Si tenim un nombre complex $z = a + bi$, angle format per l'eix positiu d'abscisses i el vector de coordenades (a,b).

Mòdul d'un nombre complex *m* Si tenim un nombre complex $z = a+bi$, arrel quadrada de $a^2 + b^2$. Es representa com $|z|$.

Nombre complex *m* Nombre de la forma $a + bi$, en què a i b són nombres reals (anomenats *part real* i *part imaginària*, respectivament) i $i^2 = -1$. Si $b = 0$ es parla de nombre real i si $a = 0$ es parla de nombre imaginari pur. El conjunt de nombres complexos es representa com $\mathbb{C}$.

Nombres complexos conjugats *m pl* Parella de nombres complexos de la forma $a + bi, a - bi$, de manera que tenen la part imaginària de signe diferent i la part real igual.

Part imaginària *f* En un nombre complex $z = x + yi$, en què x i y són dos nombres reals, el coeficient de la unitat imaginària, també representat com $\mathrm{Im}(z)$.

Part real *f* En un nombre complex $z = x + yi$, en què x i y són dos nombres reals, el nombre x, representat també com $\mathrm{Re}(z)$.

Principi d'inducció matemàtica *m* Tècnica de demostració matemàtica útil per a demostrar propietats relatives a nombres naturals.

Unitat imaginària *f* Dit particularment de la unitat complexa $i = \sqrt{-1}$.

Bibliografia

Bibliografia bàsica

Caballero, R.; Hortalá, T.; Martí, N.; Nieva, S.; Pareja, A. K.; Rodríguez, M. (2007). *Matemática discreta para la informática*. Madrid: Pearson Educación SA.

Llibre molt bàsic sobre matemàtica discreta. Cada capítol consta d'una breu introducció amb un resum teòric i una àmplia llista d'exercicis resolts. En el capítol 1, titulat "Inducción y recursión", podeu trobar informació sobre els nombres naturals i el principi d'inducció.

Franco, J.R. (2003). *Introducción al cálculo. Problemas y ejercicios resueltos*. Madrid: Pearson Prentice Hall.

Llibre molt complet que tracta, en el capítol 2, de manera molt compacta, els conceptes de nombres complexos desenvolupats en aquest mòdul. Inclou molts exemples i activitats resoltes.

Estela, M.R. (2008). *Fonaments de càlcul per a l'enginyeria*. Barcelona: Edicions UPC.

Llibre complet. El capítol 2 presenta diferents mètodes de raonament i demostració, entre els quals en la secció 2.5 trobem la demostració per inducció. El capítol 7 està dedicat als nombres complexos, amb un èmfasi especial en la interpretació geomètrica.

Bibliografia complementària

Garnier, R.; Taylor, J. (2002). *Discrete Mathematics for New Technology*. Londres: IOP Publishing Ltd.

Pozo, F.; Parés, N.; Vidal, Y. (2009). *iMatCampus* [document en línia]. Barcelona: UPC. <http://bibliotecnica.upc.es/gimel/>.