Elements d’àlgebra lineal i geometria

Espais vectorials, matrius, determinants, espai afí i euclidià

Gerard Fortuny Anguera
Ángel Alejandro Juan Pérez

PID_00151931

Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

Índex

Introducció

Aquest mòdul està dedicat a la revisió de conceptes i mètodes fonamentals d'àlgebra lineal i geometria, conceptes i mètodes que seran necessaris en l'estudi i comprensió d'altres mòduls posteriors.

Entre els fonaments conceptuals que es revisen en aquest mòdul hi ha els d'espai i subespai vectorial, combinació lineal, independència lineal, dimensió, matrius, determinants, i equacions de rectes i plans en l'espai i alguns conceptes bàsics de la geometria mètrica (producte escalar, ortonormalitat, angles i distàncies).

Els conceptes anteriors s'apliquen en àmbits diferents: en programació, per exemple, s'utilitza la terminologia d'*arrays* unidimensionals per a denotar els vectors i d'*arrays* bidimensionals per a referir-se a les matrius; les equacions de rectes i plans en 2D i 3D, i també les mateixes matrius, tenen un paper rellevant en l'àmbit de la informàtica gràfica; en l'àmbit de les xarxes de telecomunicacions, la teoria de matrius serveix com a fonament a la teoria de detecció i correcció d'errors (control de paritat, codis lineals, etc.); també s'utilitzen matrius en teoria de grafs, criptografia, etc.

El mòdul es presenta des d'un enfocament netament pràctic, per la qual cosa s'inclouen exemples que il·lustren els conceptes introduïts, i també *outputs* de diferents programes matemàtics que es poden utilitzar a l'hora d'agilitzar o revisar els càlculs.

Objectius

L'objectiu general d'aquest mòdul és revisar els conceptes i mètodes bàsics de l'àlgebra lineal i de la geometria.

En particular, els objectius docents que es pretenen aconseguir amb aquest mòdul són els següents:

1. Revisar els conceptes associats al d'espai vectorial: independència lineal, sistema generador, base, dimensió, etc.

2. Revisar la teoria bàsica sobre matrius i determinants (operacions amb matrius, càlcul de la matriu inversa, rang d'una matriu, càlcul i propietats dels determinants, etc.).

3. Revisar les equacions de les rectes en 2D i 3D, i també les equacions dels plans en 3D.

4. Revisar i ampliar els conceptes de producte escalar i ortogonalitat de vectors en $\mathbb{R}^n$.

5. Descobrir com el programari matemàtic en general pot ser d'utilitat per a: a) experimentar amb els conceptes principals d'aquest tema, i b) automatitzar els càlculs i operacions.

6. Explorar algunes de les múltiples aplicacions que té la teoria de matrius en àmbits com el d'informàtica i el de les telecomunicacions.

1. Exemple introductori

Considerem una xarxa d'àrea local (LAN) composta per diversos ordinadors servidors i diverses desenes d'ordinadors client. En cada jornada, l'estat de la LAN (depenent de l'estat dels servidors) pot ser qualsevol dels següents:

- Estat A $\rightarrow$ la LAN funciona correctament, ja que cap servidor no ha caigut.

- Estat B $\rightarrow$ la LAN funciona amb algun problema, ja que algun servidor ha caigut (la resta de servidors supleixen la seva funció).

- Estat C $\rightarrow$ la LAN no funciona, ja que tots els servidors han caigut.

A partir de l'historial d'observacions dels últims sis mesos, s'ha obtingut la taula o matriu següent. En aquesta es mostren les probabilitats que la xarxa passi d'un estat X a un altre Y d'un dia per l'altre (se suposa que les condicions d'administració, ús i manteniment de la LAN romanen constants durant aquest període i continuaran així durant, com a mínim, uns altres sis mesos):

	Avui (dia *n*)		
Demà (dia $n+1$)	**Estat A**	**Estat B**	**Estat C**
Estat A	3/4	1/2	1/4
Estat B	1/8	1/4	1/2
Estat C	1/8	1/4	1/4

En altres paraules: si avui la LAN es troba en estat A, la probabilitat que demà passi a estar en estat C és d'1/8; si avui està en estat C, la probabilitat que demà passi a estar en estat B és d'1/2, etc.

L'administrador de la LAN ens avança que l'estat actual d'aquesta pot ser B o C amb la mateixa probabilitat. És a dir: P(A) = 0, P(B) = P(C) = 1/2. Quina és la probabilitat que la LAN estigui funcionant correctament demà? I d'aquí dos dies? I d'aquí una setmana?

Les preguntes d'aquest exemple es raonen i responen en el solucionari del final del mòdul.

2. Espais vectorials

El concepte de vector apareix usualment en diversos contextos matemàtics, físics, de l'economia o de l'enginyeria. En els apartats següents es presenta una definició genèrica de vector i d'espai vectorial real però abans revisarem les descripcions geomètriques dels espais de vectors de $\mathbb{R}^n$.

2.1. Vectors a l'espai $\mathbb{R}^n$

Recordeu

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, amb $\mathbb{R}$ el conjunt dels nombres reals:

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots^n\ldots \times \mathbb{R}$

Vectors de $\mathbb{R}^2$

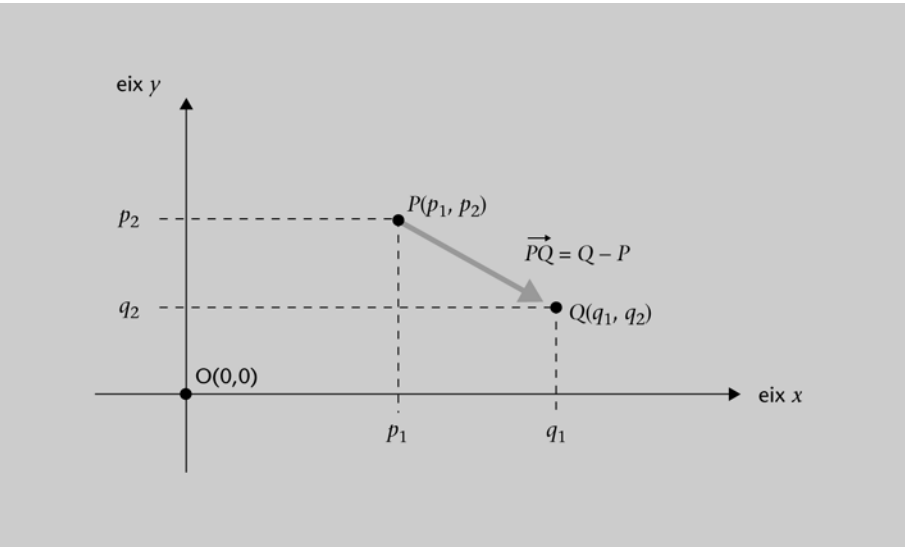
Donat un sistema de coordenades rectangulars en el pla sabem que un punt P està determinat per un parell ordenat $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$. Per tant podem considerar $\mathbb{R}^2$ com el conjunt de punts del pla.

Nota

Considerarem que dos vectors són iguals si tenen la mateixa longitud, la mateixa direcció i el mateix sentit, és a dir, les mateixes coodenades. En aquest cas, parlem de **vectors lliures**. Un vector lliure és determinat únicament per les coordenades, i per a representar-lo en el pla, n'hi haurà prou de triar el punt origen o el punt final.

Donats dos punts en $\mathbb{R}^2$, $P(p_1, p_2)$ i $Q(q_1, q_2)$ es defineix el vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ com el segment orientat que té origen a P i final a Q. El vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ té com a components o coordenades $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$. Vegeu la figura 1.

Figura 1



Exemple 1

Donats els punts $P(5, 5)$ i $Q(7, 2)$, el vector $\overrightarrow{PQ}$ és el vector d'origen a P i extrem a Q, *i. e.*: $\overrightarrow{PQ} = (7, 2) - (5, 5) = (2, -3)$.

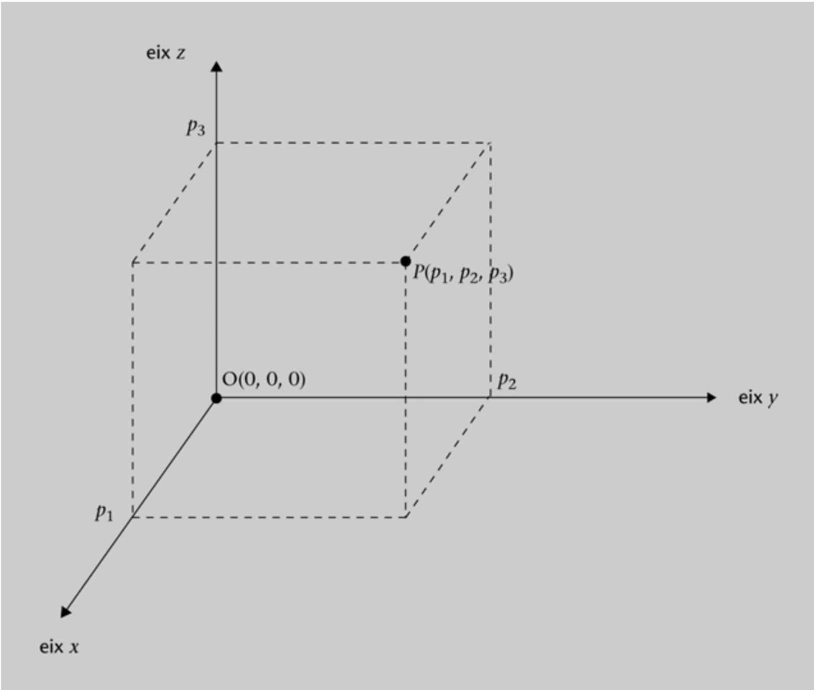
D'altra banda, el vector $\overrightarrow{QP}$ té origen a Q i extrem a P, *i. e.*: $\overrightarrow{QP} = (5, 5) - (7, 2) =$ $= (-2, 3) = -(2, -3) = -\overrightarrow{PQ}$.

La seva representació ens mostra que tots dos vectors tenen la mateixa longitud i direcció, però són de sentit oposat.

Vectors de $\mathbb{R}^3$

Generalitzant això a $\mathbb{R}^3$, considerem aquest com el conjunt de tots els punts de l'espai representats en un sistema de coordenades rectangulars de l'espai, vegeu la figura 2. Els vectors de $\mathbb{R}^3$ són tripletes $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ on un vector és donat per les seves tres coordenades i es representa com un segment orientat amb origen en un punt $P(p_1, p_2, p_3)$ de $\mathbb{R}^3$ i extrem en un altre punt $Q(q_1, q_2, q_3)$, de manera que $v_1 = q_1 - p_1$, $v_2 = q_2 - p_2$ i $v_3 = q_3 - p_3$.

Figura 2



Exemple 2

Donats els punts $P(-2, -3,1)$ i $Q(3, 1 ,0)$, el vector $\overrightarrow{PQ}$ és el vector d'origen a P i extrem a Q, *i. e.*: $\overrightarrow{PQ} = (3,1,0) - (-2,-3,1) = (5,4,-1)$.

El vector $\overrightarrow{QP}$ és:

$$\overrightarrow{QP} = (-2,-3,1) - (3,1,0) = (-5,-4,1) = -(5,4,-1) = -\overrightarrow{PQ}$$

Generalitzant les descripcions geomètriques dels vectors de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ definim els vectors de $\mathbb{R}^n$.

Donats dos punts a $\mathbb{R}^n$, $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ i $Q(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, es defineix el **vector** $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ com el segment orientat que té origen a P i final a Q. El vector $\overrightarrow{PQ}$ té com a components o coordenades:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (q_1, q_2, \ldots, q_n) - (p_1, p_2, \ldots, p_n) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \ldots, q_n - p_n)$$

Donats dos vectors a $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ i $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$, i un nombre $k \in \mathbb{R}$, es defineixen les operacions següents:

Suma de vectors: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)$

Observeu que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n$

Producte d'un vector per un escalar: $k \cdot \mathbf{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2, ..., k \cdot u_n)$

Observeu que $(k \cdot \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n$

Exemple 3

Donats els vectors $\mathbf{v} = (1, -1)$ i $\mathbf{u} = (3, -1)$, la seva suma dóna com a resultat: $\mathbf{v} + \mathbf{u} = (1 + 3, -1 - 1) = (4, -2)$.

Donat el vector $\mathbf{v} = (2, -3)$ i el nombre real $k = 3$, el producte dóna com a resultat: $3 \cdot \mathbf{v} = (3 \cdot 2,3\cdot(-3)) = (6, -9)$.

Exemple 4

Donats els vectors $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$ i $\mathbf{u} = (3, -1, 1)$, la seva suma dóna com a resultat: $\mathbf{v} + \mathbf{u} = (1 + 3, -1 -1, 0 + 1) = (4, -2, 1)$.

Donat el vector $\mathbf{v} = (2, -3, 1)$ i el nombre real $k = 3$, el producte dóna com a resultat: $3 \cdot \mathbf{v} = (3 \cdot 2, 3 \cdot (-3), 3 \cdot 1) = (6, -9, 3)$.

2.2. Definició d'espai vectorial real

A l'apartat anterior hem considerat el conjunt de vectors $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) i s'han definit sobre aquest dues operacions: la suma de vectors (+) i el producte d'un vector per un escalar (·). Aquestes operacions compleixen determinades propietats (associativitat, commutativitat, existència d'element neutre, etc.), i doten el conjunt $\mathbb{R}^n$ d'una estructura especial que s'anomena *espai vectorial*. En aquest apartat, generalitzarem aquest concepte:

Recordeu

- $u \in V$ es llegeix "u pertany al conjunt V".
- $\forall u, v, w \in V$ significa "Per a tot u, v, w que pertanyen a V".
- $\forall k, h, w \in \mathbb{R}$ significa "Per a tot k, h, w que pertanyen a V".
- $\exists 0 \in V$ es llegeix "Existeix 0 que pertany a V".

Donat un conjunt V i dues operacions definides en aquest, la suma d'elements de V (+) i el producte d'un element de V per un nombre real (·), la combinació $(V, +, \cdot)$ s'anomena **espai vectorial real** si es verifiquen les propietats següents $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \forall k, h \in \mathbb{R}$:

- Suma
  – Associativa: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
  – Commutativa: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
  – Existència d'element neutre: $\exists\, \mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$
  – Existència d'element oposat: donat $\mathbf{u} \in V$, $\exists\, \mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

- Producte
  - Distributiva I: $k \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k \cdot \mathbf{u} + k \cdot \mathbf{v}$
  - Distributiva II: $(k + h) \cdot \mathbf{u} = k \cdot \mathbf{u} + h \cdot \mathbf{u}$
  - Associativa: $k \cdot (h \cdot \mathbf{u}) = (k \cdot h) \cdot \mathbf{u}$
  - Existència d'element neutre: $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

Els elements d'un espai vectorial se solen anomenar **vectors**.

Exemple 5. D'espais vectorials reals

1) Donat $n \geq 1$, $(\mathbb{R}^n, +,\cdot)$ és un espai vectorial real. En particular, $(\mathbb{R}^2, +,\cdot)$ és l'espai dels vectors del pla i $(\mathbb{R}^3, +,\cdot)$ és l'espai dels vectors de l'espai.

2) Donat $n \geq 1$, $(\mathbb{R}_n[x], +,\cdot)$ és un espai vectorial real, essent $\mathbb{R}_n[x]$ el conjunt de polinomis de grau menor o igual a n, $(+)$ la suma de polinomis i $(\cdot)$ el producte d'un polinomi per un nombre real.

3) Donat un interval $I \subset \mathbb{R}$, $(C_I(x), +, \cdot)$ és un espai vectorial real, essent $C_I(x)$ el conjunt de funcions reals contínues definides a I, $(+)$ la suma de funcions i $(\cdot)$ el producte d'una funció per un nombre real.

Proposició: sigui $(V, +, \cdot)$ un espai vectorial real. $\forall \mathbf{u} \in V$ i $\forall k \in \mathbb{R}$ es compleix:

a) $0 \cdot \mathbf{u} = 0$
b) $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$
c) $k \cdot 0 = 0$
d) $k \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \{k = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{u} = 0\}$

Subespai vectorial

Considereu l'espai vectorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ i el subconjunt no buit $W = = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$ (és a dir, W és el pla xy de $\mathbb{R}^3$). Doncs bé, l'estructura $(W, +, \cdot)$ verifica que tant la suma de dos elements de W, com el producte d'un escalar per un element de W donen com a resultat un nou element de W. Aleshores es diu que $(W, +, \cdot)$ és un subespai vectorial de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Més generalment:

Sigui $(V, +, \cdot)$ un espai vectorial real, es diu que $(W, +, \cdot)$ és un **subespai vectorial de** $(V, +, \cdot)$ si es compleixen les condicions següents:

1) $\emptyset \neq W \subseteq V$
2) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in W$, $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in W$
3) $\forall \mathbf{u} \in W$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $k \cdot \mathbf{u} \in W$

En aquest cas, se sol usar la notació $W \leq V$.

Un altre exemple de subespai vectorial de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ el trobem en el conjunt $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\}$ i la seva representació geomètrica és també un pla de $\mathbb{R}^3$ (tanmateix, un pla de $\mathbb{R}^3$ que no passés per l'origen no és subespai de $\mathbb{R}^3$, ja que no contindria el vector (0, 0, 0)).

2.3. Combinació lineal. Subespai generat

En aquest apartat veurem una de les maneres més comunes d'obtenir subespais vectorials.

Sigui $(V, +, \cdot)$ un espai vectorial real, es diu que el vector $\mathbf{v} \in V$ és **combinació lineal** dels vectors $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ de V si existeixen $k_1, k_2, ..., k_n$ nombres reals tals que:

$$\mathbf{v} = k_1 \cdot \mathbf{u}_1 + k_2 \cdot \mathbf{u}_2 + ... + k_n \cdot \mathbf{u}_n$$

Exemple 6

A $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, el vector (1, –3) és combinació lineal dels vectors (1, 0) i (0, 1), atès que:

$(1, -3) = 1 \cdot (1, 0) + (-3) \cdot (0, 1).$

A $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, el vector (2, –3, 1) és combinació lineal dels vectors (1, 0, 0), (0, 3, 1) i (0, 0, 1), ja que:

$(2, -3, 1) = 2 \cdot (1, 0, 0) + (-1) \cdot (0, 3, 1) + 2 \cdot (0, 0, 1).$

Es demostra que donat un conjunt de vectors $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, el conjunt format per totes les seves possibles combinacions lineals és un subespai vectorial.

Sigui $(V, +, \cdot)$ un espai vectorial real i $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ un conjunt de vectors de V. S'anomena **espai vectorial generat per** $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ el subespai vectorial de V format per totes les combinacions lineals que es poden formar amb els vectors $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$, *i. e.*:

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n \rangle = \{ k_1 \cdot \mathbf{u}_1 + k_2 \cdot \mathbf{u}_2 + ... + k_n \cdot \mathbf{u}_n \,/\, k_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, 2, ..., n\}.$$

El conjunt $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ constitueix un **sistema generador** de l'espai vectorial $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n \rangle$.

Exemple 7

Donats els vectors (1, –1, 3) i (2, –5, 6) de $\mathbb{R}^3$, l'espai vectorial que generen és:

$$\langle(1, -1, 3), (2, -5, 6)\rangle = \{ k \cdot (1, -1, 3) + h \cdot (2, -5, 6) \,/\, k, h \in \mathbb{R} \} =$$
$$= \{ k + 2h, -k - 5h, 3k + 6h) \,/\, k, h \in \mathbb{R} \}.$$

Exemple 8

El conjunt de vectors {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0)} constitueix un sistema generador de $\mathbb{R}^3$, ja que donat qualsevol $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, es té que:

$$\mathbf{u} = u_1 \cdot (1, 0, 0) + u_2 \cdot (0, 1, 0) + u_3 \cdot (0, 0, 1) + 0 \cdot (1, 1, 0)$$

Per tant, $\langle(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0)\rangle = \mathbb{R}^3$

Observeu que també es compleix: $\langle(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle = \mathbb{R}^3$

2.4. Dependència i independència lineal. Base i dimensió d'un espai vectorial

Donat un espai vectorial i un conjunt de vectors, es diu que aquests són linealment dependents si n'hi ha un d'ells que es pot expressar com a combinació lineal de la resta. En cas contrari, els vectors són linealment independents. Més formalment:

Sigui $(V, +, \cdot)$ un espai vectorial real i $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ un conjunt de vectors de V. Els vectors $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ són **linealment dependents** si existeix algun $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $\mathbf{u}_i$ es pot expressar com a combinació lineal de la resta de vectors, *i. e.*:

$$\mathbf{u}_i = k_1 \cdot \mathbf{u}_1 + ... + k_{i-1} \cdot \mathbf{u}_{i-1} + k_{i+1} \cdot \mathbf{u}_{i+1} + ... + k_n \cdot \mathbf{u}_n .$$

i. e.: l'equació $k_1 \cdot \mathbf{u}_1 + k_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \ldots + k_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ té una solució no trivial.

Per contra, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ són **linealment independents** si no es compleix la condició anterior, *i. e.*: si donada l'equació $k_1 \cdot \mathbf{u}_1 + k_2 \cdot \mathbf{u}_2 + ... + k_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$, té només la solució trivial $k_i = 0$ $i = 1, 2, ..., n$.

Exemple 9

Els vectors (3, 3, 2), (1, 1, –1) i (2, 2, 3) són linealment dependents, ja que el vector (3, 3, 2) es pot escriure com a combinació lineal dels altres dos. En efecte, observeu que prenent $k = h = 1$, és certa l'equació:

$$(3, 3, 2) = k \cdot (1, 1, -1) + h \cdot (2, 2, 3) = (k + 2h, k + 2h, -k + 3h)$$

Exemple 10

Els vectors (1, 0) i (0, 1) són linealment independents. En efecte, si considerem l'equació:

$$k \cdot (1, 0) + h \cdot (0, 1) = (0, 0)$$

es té que $(k, 0) + (0, h) = (k, h) = (0, 0)$, d'on $k = h = 0$.

Es defineix el **rang d'un conjunt de vectors** com el nombre màxim de vectors d'aquest conjunt que són linealment independents.

Exemple 11

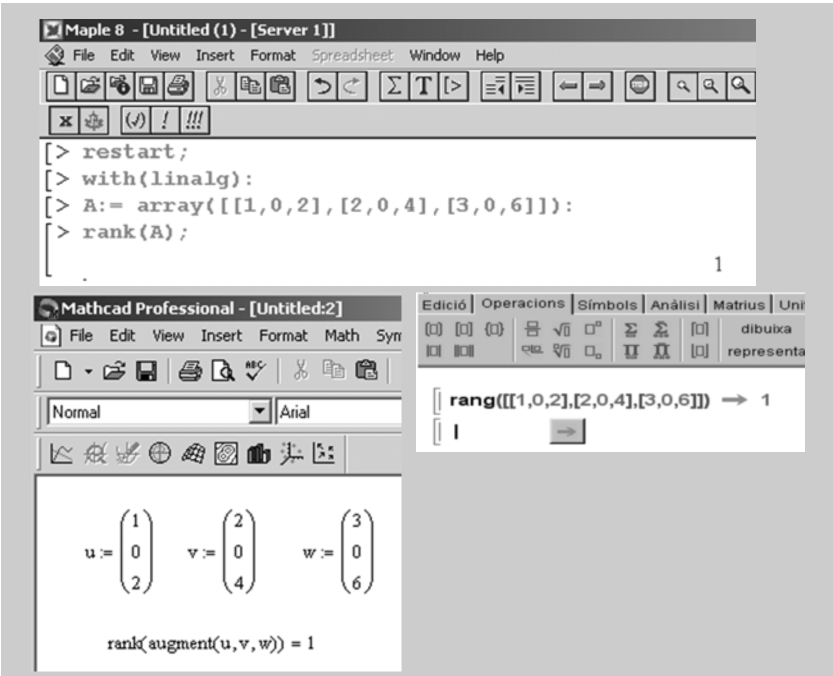
El conjunt de vectors {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} té rang 3, atès que els tres vectors són linealment independents.

El conjunt de vectors {(1, 2, 3), (0, 2, 2), (1, 4, 5)} té rang 2, ja que només hi ha dos vectors linealment independents (el tercer vector és la suma dels dos primers).

El conjunt de vectors {(1, 0, 2), (2, 0, 4), (3, 0, 6)} té rang 1, ja que només hi ha un vector linealment independent (els vectors segon i tercer són múltiples del primer).

Podem comprovar el resultat anterior amb ajuda de programari matemàtic:

Figura 3



Sigui (V, + , ·) un espai vectorial real i $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ un conjunt de vectors de V tal que:

1) B és sistema generador de V.

2) B està format per vectors linealment independents.

En aquest cas, es diu que B és una **base de** V, i que la **dimensió** de V és n (dim $V = n$).

Nota

Aquesta definició té sentit perquè es pot demostrar que totes les bases de V tenen el mateix nombre de vectors.

Exemple 12

El conjunt $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ és sistema generador de $\mathbb{R}^3$ i, a més, els vectors de B són linealment independents. Per tant, B és una base de $\mathbb{R}^3$ i la dimensió d'aquest espai vectorial és 3. Una altra de les moltes bases de $\mathbb{R}^3$ seria, per exemple, $B' = \{(1, 1, 0), (0, 2, 0), (1, 0, 4)\}$.

A $\mathbb{R}^n$, el conjunt de n vectors $B = \{(1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), (0, 0, ..., 1)\}$ és una base especial anomenada **base canònica**. També se sol usar la notació: $\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 1)$.

Proposició. Sigui $(V, +, \cdot)$ un espai vectorial real de dimensió n.

1) Tot sistema generador de V estarà compost per un mínim de n vectors.
2) Tot conjunt linealment independent estarà compost per un màxim de n vectors.
3) n vectors linealment independents constitueixen una base.
4) Un sistema generador de V format per n vectors és una base.

Exemple 13

A $\mathbb{R}^3$, el conjunt de vectors $\{(1, 0, -1), (2, 3, 1)\}$ no pot ser un sistema generador de tot $\mathbb{R}^3$, ja que la dimensió de $\mathbb{R}^3$ és 3 i, per tant, qualsevol sistema generador d'aquest espai haurà d'estar compost per tres o més vectors. D'altra banda, els vectors $\{(1, 0, -1), (2, 3, 1), (0, 1, 1), (0, 1, -3)\}$ no poden ser linealment independents, atès que, en ser la dimensió de l'espai 3, cap conjunt amb més de tres vectors complirà la condició d'independència lineal.

Exemple 14

A $\mathbb{R}^3$, el conjunt de vectors $\{(1, 0, -1), (0, 3, 1), (1, 1, 0)\}$ constitueixen una base, ja que són tres vectors linealment independents. D'altra banda, el conjunt de vectors $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ constitueix una base, atès que és un sistema generador de tot $\mathbb{R}^3$ compost per tres vectors.

Coordenades d'un vector en una base

El concepte de base d'un espai vectorial V permet definir un "sistema de coordenades" de V. La clau per a poder definir-lo és el següent teorema de representació única d'un vector en una base:

Teorema. Sigui $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base de l'espai vectorial real V. Es demostra que per a cada vector $\mathbf{v}$ de V hi ha un únic conjunt de nombres reals $c_1, \ldots, c_n$ tals que

$$\mathbf{v} = c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \ldots + c_n \cdot \mathbf{u}_n$$

$c_1, \ldots, c_n$ s'anomenen **coordenades de v en la base *B***.

Nota

El sistema de coordenades ens permet pensar qualsevol espai vectorial com si fos $\mathbb{R}^n$, ja que un vector, donada una base, és determinat per n nombres.

Exemple 15

Donada la base $B = \{(1, 0), (2, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, les coordenades del vector $(-2, 3)$ de $\mathbb{R}^2$ en la base B són $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$ tals que $(-2, 3) = c_1 \cdot (1, 0) + c_2 \cdot (2, 1) = (c_1 + 2c_2, c_2)$. Per tant, $c_1 = -8$ i $c_2 = 3$. És a dir, les coordenades de $(-2, 3)$ en la base B són -8 i 3.

Observeu que les coordenades de $(-2, 3)$ en la base canònica de $\mathbb{R}^2$ són precisament -2 i 3.

Dimensió d'un subespai

La definició de base d'un espai vectorial es generalitza a subespais:

Sigui W un subespai d'un espai vectorial V. Un conjunt de vectors de W, $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ és una **base del subespai** W si i només si:

1) B és un sistema generador de W
2) B és un conjunt linealment independent

S'anomena **dimensió del subespai** ($\dim W$) el nombre de vectors d'una base.

3. Matrius

3.1. Concepte de matriu

En la resolució de molts problemes usem sistemes d'equacions lineals com, per exemple:

$$\begin{cases} x + 4y - z = 4 \\ -x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Un sistema d'equacions lineals com l'anterior es pot representar d'una manera més còmoda, i sense que això signifiqui cap pèrdua d'informació, mitjançant una taula o matriu formada pels coeficients de les incògnites i pels termes independents de cada equació:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{array}$$

Aquesta taula o matriu podria representar també un altre tipus d'informació com, per exemple, un conjunt de quatre vectors a $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2),\ \mathbf{v}_2 = (4, 3, 2),\ \mathbf{v}_3 = (-1, 2, 0),\ \mathbf{v}_4 = (4, 4, 4)$$

Observeu que, en tot cas, la taula o matriu anterior està composta per dotze elements distribuïts en tres files (horitzontals) i quatre columnes (verticals).

En general, una **matriu A** és una taula composta per $m \times n$ elements distribuïts en m files (horitzontals) i n columnes (verticals):

$$\begin{array}{cl} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{fila 1} \\ \leftarrow \text{fila 2} \\ \\ \leftarrow \text{fila m} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \text{columna 1} & \text{columna 2} & & \text{columna n} \end{array} & \end{array}$$

La matriu **A** també se sol representar per (a_{ij}), on a_{ij} fa referència a l'element que ocupa la fila i ($1 \leq i \leq m$) i la columna j ($1 \leq j \leq n$). Una manera usual de dir que la matriu **A** té m files i n columnes, és a dir que la **dimensió o mida** de **A** és $m \times n$.

Exemple 16

La matriu $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ és de dimensió 2 × 3, *i. e.*: està composta per dues files i tres columnes. Es compleix a més que: $a_{23} = -5$ i $a_{12} = -1$.

Donades dues matrius **A** i **B**, es diu que són **iguals** si, i només si, tenen la mateixa dimensió i els elements que ocupen el mateix lloc en totes dues són iguals.

Exemple 17

Les matrius $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & b & c \\ a & 1 & 8 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} d & 7 & 4 \\ 2 & e & g \end{pmatrix}$ són iguals si, i només si, es compleix que: $a = 2$, $b = 7$, $c = 4$, $d = 3$, $e = 1$ i $g = 8$.

Donades una matriu **A**, s’anomena **matriu transposada de A**, $\mathbf{A}^t$, aquella matriu que s’obté en permutar en **A** les files per les columnes (és a dir, la primera fila de **A** passarà a ser la primera columna de $\mathbf{A}^t$, la segona fila de **A** passarà a ser la segona columna de $\mathbf{A}^t$, etcètera).

Exemple 18

Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, aleshores $\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$.

Observeu que:

a) $\left(\mathbf{A}^t\right)^t = \mathbf{A}$.

b) **A** té dimensió 2 × 3 mentre que $\mathbf{A}^t$ té dimensió 3 × 2.

3.2. Tipus de matrius

Donada una matriu A de dimensió $m \times n$, es diu que:

- A és una **matriu fila** si té una única fila (és a dir, $m = 1$).
- A és una **matriu columna** si té una única columna (és a dir, $n = 1$).
- A és una **matriu nul·la** si tots els seus elements són 0.

- A és una **matriu quadrada d'ordre** n si té el mateix nombre de files que de columnes (és a dir, $m = n$). En aquest cas, s'anomena **diagonal principal** de A el conjunt format per tots els elements de la forma a_{ii}:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{diagonal principal}.$$

- A és una **matriu quadrada simètrica** si $\mathrm{A} = \mathrm{A}^t$ (és a dir, $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$).

- A és una **matriu quadrada diagonal** si tots els seus elements fora de la diagonal principal són 0 (és a dir, $a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$).

- A és una **matriu quadrada identitat d'ordre** n si és una matriu diagonal essent tots els elements de la seva diagonal principal iguals a 1 (és a dir, $a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$ i $a_{ii} = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n$).

- A és una **matriu quadrada triangular superior** si tots els seus elements situats per sota de la diagonal principal són 0 (és a dir, $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$).

- A és una **matriu quadrada triangular inferior** si tots els seus elements situats per sobre de la diagonal principal són 0 (és a dir, $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$).

Exemple 19

– Matrius fila: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

– Matrius columna: $\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

– Matrius nul·les: $\mathbf{0}_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{0}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

– Matrius quadrades: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

– Matrius quadrades simètriques: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

– Matrius quadrades diagonals: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

– Matrius identitat: $\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

– Matrius de tipus triangular superior: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

– Matrius de tipus triangular inferior: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

3.3. Operacions amb matrius. Matriu inversa

Suma de matrius

Per a sumar (o, alternativament, restar) dues matrius, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ i $\mathbf{B} = (b_{ij})$, és necessari que totes dues tinguin la mateixa dimensió, i en aquest cas se sumen terme a terme, *i. e.*:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = (c_{ij}) \qquad \text{essent} \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ \forall i,j$$

Exemple 20

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b+2 & c+3 \\ d+4 & e+5 & f+6 \end{pmatrix}$$

La suma de matrius verifica les propietats següents:

1) És associativa: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
2) És commutativa: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
3) Hi ha element neutre: $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$
4) Hi ha element oposat: $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{0}$, on $\mathbf{A} = (a_{ij})$ i $-\mathbf{A} = (-a_{ij})$

Producte d'un nombre per una matriu

Per a multiplicar un nombre $k \in \mathbb{R}$ per una matriu, $\mathbf{A} = (a_{ij})$, es multiplica el nombre per cada un dels elements de la matriu, *i. e.*:

$$k \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C} = (c_{ij}) \qquad \text{essent} \qquad c_{ij} = k \cdot a_{ij}, \ \forall i,j$$

Exemple 21

$$k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot 1 & k \cdot 0 \\ k \cdot 3 & k \cdot 1 \\ k \cdot (-1) & k \cdot 2 \end{pmatrix}$$

El producte d'un nombre (escalar) per una matriu verifica les propietats següents:

1) $k \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k \cdot \mathbf{A} + k \cdot \mathbf{B}$
2) $(k + h) \cdot \mathbf{A} = k \cdot \mathbf{A} + h \cdot \mathbf{A}$
3) $k \cdot (h \cdot \mathbf{A}) = (k \cdot h) \cdot \mathbf{A}$
4) $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot 1 = \mathbf{A}$ essent K, $h \in \mathbb{R}$

Producte de dues matrius

Per a multiplicar una matriu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ per una altra $\mathbf{B} = (b_{ij})$, és necessari que el nombre de columnes de **A** coincideixi amb el nombre de files de **B**, i en aquest cas s'obté una nova matriu, $\mathbf{C} = (c_{ij})$, amb tantes files com **A** i tantes columnes com **B**, els elements de la qual són donats per l'expressió:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Exemple 22

Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, es pot calcular el producte de **A** per **B**,

ja que el nombre de columnes de **A** coincideix amb el nombre de files de **B**. El resultat serà una matriu de dimensió 2×3:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a \cdot 0 + b \cdot 3 + c \cdot 3 & a \cdot 1 + b \cdot (-2) + c \cdot (-3) & a \cdot (-1) + b \cdot 2 + c \cdot 1 \\ d \cdot 0 + e \cdot 3 + f \cdot 3 & d \cdot 1 + e \cdot (-2) + f \cdot (-3) & d \cdot (-1) + e \cdot 2 + f \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Observeu, tanmateix, que no és possible calcular el producte de **B** per **A**, atès que el nombre de columnes de **B** no coincideix amb el nombre de files de **A**.

El producte de matrius verifica les propietats següents:

1) És associatiu: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$.

2) **No és commutatiu**: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

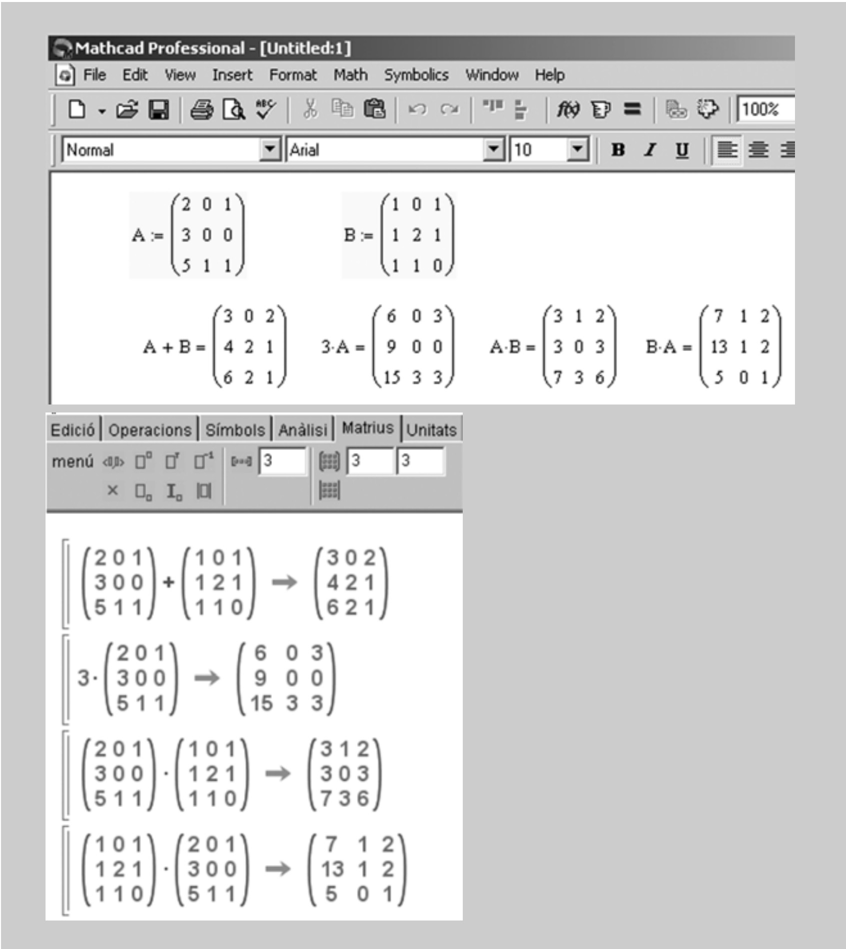
3) Si **A** és una matriu quadrada d'ordre n, es compleix que: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, on $\mathbf{I}_n$ és la matriu identitat d'ordre n.

4) Si **A** és una matriu quadrada d'ordre n, no sempre hi ha una altra matriu **B** tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Quan existeixi aquesta **B**, s'anomenarà **matriu inversa de** A i es denotarà per A^{-1}. Una matriu que no tingui inversa s'anomena **matriu singular.**

5) És distributiu respecte a la suma:
$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ i $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$.

Exemple 23

Figura 4



Nota

Aquests *outputs* il·lustren l'ús dels programes Mathcad i Wiris per a realitzar operacions bàsiques en matrius.

4. Determinants

En aquest capítol presentem el concepte de determinant, diferents tècniques per al seu càlcul i importants aplicacions a l'estudi de les matrius i dels espais vectorials.

4.1. Determinant associat a una matriu quadrada d'ordre 2 o 3

Tota matriu quadrada A d'ordre $n \geq 1$ té associat un nombre concret, que anomenarem **determinant de** A, i que se sol denotar per det(A) o bé per $|\mathbf{A}|$.

Nota

No s'ha de confondre una matriu (que és una taula de nombres) amb el seu determinant associat, que és un simple nombre.

- Quan $n = 1$, $\mathrm{A} = (a_{11})$ i $|\mathrm{A}| = |a_{11}| = a_{11}$

- Quan $n = 2$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ i $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

- Quan $n = 3$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ i

Observació

Mentre que els elements d'una matriu es tanquen entre dos claudàtors o parèntesis, els d'un determinant es tanquen entre dues línies verticals.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{23} \cdot a_{12} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

La coneguda regla de Sarrus és un bon recurs mnemotècnic per al càlcul de determinants d'ordre 3; a continuació en recordem el gràfic:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Per a $n > 3$ el càlcul de determinants no és tan immediat i s'han d'utilitzar alguns conceptes addicionals que s'explicaran més endavant.

Exemple 24

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot (-2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 5 \cdot 3 = -8 - 15 = -23$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) -$$

$$- 0 \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) \cdot 3 = 10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 5 + 3 \cdot (-1) \cdot (-3) + 4 \cdot 4 \cdot 1 -$$

$$- [(-3) \cdot (-2) \cdot 4 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 5] =$$
$$= -10 + 9 + 16 - [24 + (-1) + 60] = 15 - 83 = -68$$

4.2. Determinant associat a una matriu quadrada d'ordre 4 o superior

Quan es pretengui trobar el determinant associat a una matriu quadrada d'ordre $n > 3$, serà necessari recórrer al concepte d'adjunt d'un element:

Donada la matriu quadrada $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, anomenarem **adjunt d'un element** a_{ij}, denotat A_{ij}, el nombre següent:

a) El determinant que resulta d'eliminar la fila ***i*** i la columna ***j*** de la matriu.

b) Un signe que precedirà el determinant i que serà:

$$\begin{cases} + & \text{si} \quad i+j \quad \text{parell} \\ - & \text{si} \quad i+j \quad \text{senar} \end{cases}.$$

i. e.: $(-1)^{i+j}$

Observeu, per tant, que el signe associat a cada adjunt dependrà de la posició inicial de l'element a_{ij} segons l'esquema següent:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}.$$

Exemple 25

Donada una matriu quadrada d'ordre $n = 3$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, l'adjunt associat a l'element a_{21} s'obtindrà de la manera següent:

1) Es considera el determinant resultant després d'eliminar la fila 2 i la columna 1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2) Es té en compte el signe segons la posició: en aquest cas 2 + 1 = 3 senar, per la qual cosa el signe serà negatiu.

En definitiva, $A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Exemple 26

Donada una matriu quadrada d'ordre $n = 4$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$,

es té que:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \text{ etcètera.}$$

Proposició. És possible calcular el determinant d'una matriu quadrada **A**, d'ordre n, a partir dels adjunts d'una fila o d'una columna.

En efecte:

$|\mathbf{A}| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$ ← Desenvolupament per adjunts de la fila i

o també:

$|\mathbf{A}| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$ ← Desenvolupament per adjunts de la columna j

Exemple 27

Calculem, usant adjunts, el determinant de la matriu d'ordre 3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Desenvolupant per adjunts de la fila 1:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1) - 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (2) = 10 \cdot$$

alternativament, desenvolupant per adjunts de la columna 1:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1) + 2 \cdot (4) + 0 \cdot (7) = 10 \cdot$$

Exemple 28

Calculem el determinant de la matriu d'ordre 4:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desenvolupem per adjunts de la fila 2 (sempre és convenient triar la fila o columna amb més zeros, ja que així se simplifiquen els càlculs):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} - 1 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{24} = -A_{23}$$

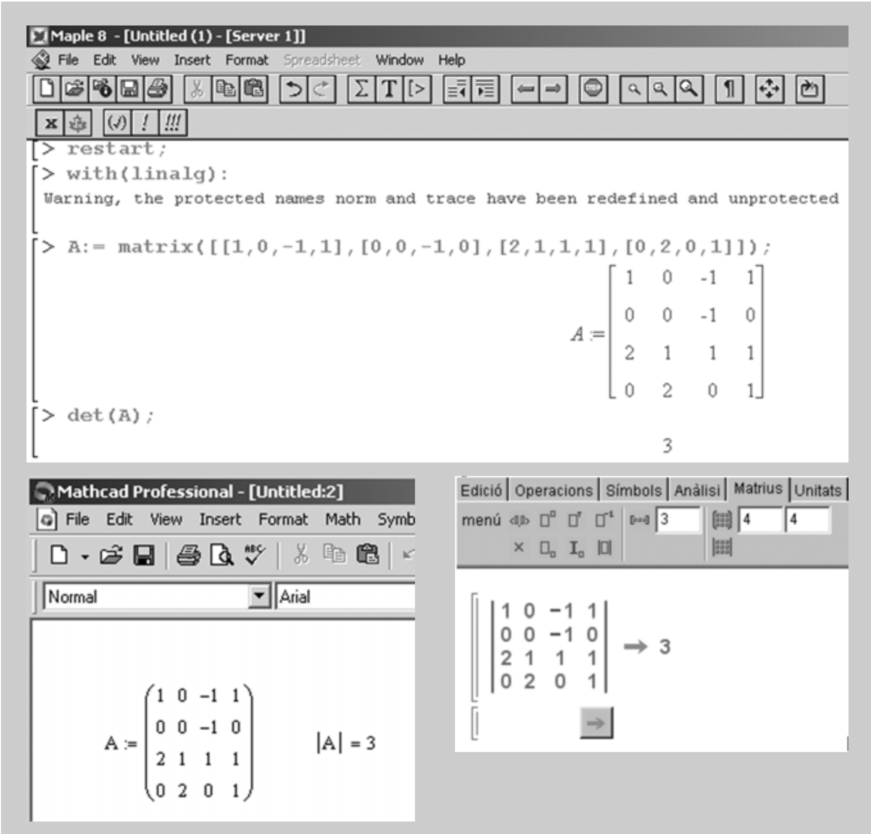
$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Per tant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3.$$

Podem utilitzar qualsevol programari matemàtic per a comprovar el resultat obtingut; a la figura 5 podeu veure pantalles de Maple, Mathcad i Wiris, respectivament:

Figura 5



4.3. Propietats dels determinants

Les propietats següents poden resultar de summa utilitat a l'hora de calcular determinants de qualsevol ordre:

1) El determinant d'una matriu és igual al de la seva transposada.

Exemple 29

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

2) Si es parteix d'un determinant inicial i s'intercanvien de posició dues línies (dues files o dues columnes), el valor del nou determinant no canvia en valor absolut, però sí en signe.

Exemple 30

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

en efecte: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$ i $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

3) Si un determinant té dues línies (files o columnes) iguals o proporcionals, el seu valor és 0.

Exemple 31

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(la F1 i la F2 són iguals)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(la C1 i la C2 són proporcionals)}$$

Nota

F1 significa *fila 1*.
C1 significa *columna 1*.

4) Si un determinant té una línia (fila o columna) tota de zeros, el seu valor és 0.

Exemple 32

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(tots els elements de la F2 són zeros)}$$

5) Multiplicar un determinant per un número és equivalent a multiplicar qualsevol línia (fila o columna) per aquest número.

Exemple 33

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \cdot 2 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 2 \\ 1 & 0 & 0 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6) Si tots els elements d'una línia (fila o columna) estan formats per dos sumands, aquest determinant es pot descompondre com a suma de dos determinants.

Exemple 34

$$\begin{vmatrix} 2 & 4+5 & 3 \\ 0 & 3+3 & 2 \\ 0 & 1+2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

7) Si els elements d'una línia (fila o columna) són combinació lineal de les altres, aleshores el determinant val 0.

Exemple 35

$$\begin{vmatrix} 1 & 3+2\cdot 1 & 3 \\ 2 & 0+2\cdot 2 & 0 \\ 3 & 1+2\cdot 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(la C2 és combinació lineal de la C1 i la C3)}$$

8) Si als elements d'una línia (fila o columna) se li sumen els elements d'una altra línia prèviament multiplicats per un número, el valor del determinant no varia. Anàlogament, per extensió, si a una línia se li suma una combinació lineal de les altres.

Exemple 36

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5+2\cdot 1 & 3 \\ 2 & 3+2\cdot 2 & 0 \\ 3 & 4+2\cdot 3 & 1 \end{vmatrix}$$

9) El determinant d'un producte de matrius és el producte dels determinants de cada una d'aquestes, *i. e.*: $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

Exemple 37

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \; |\mathbf{A}| = 2, \; |\mathbf{B}| = -1, \; |\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| = -2$$

i efectivament, $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = -2 = 2 \cdot (-1) = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$

4.4. Càlcul de la matriu inversa

En estudiar les propietats del producte de matrius, es va comentar el següent:

a) Donada una matriu quadrada d'ordre n, **A**, no sempre hi haurà una altra matriu **B** tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (essent $\mathbf{I}_n$ la matriu identitat d'ordre n).

b) Quan existeixi aquesta **B**, s'anomenarà **matriu inversa de A** i es denotarà per $\mathbf{A}^{-1}$.

c) Una matriu que no tingui inversa s'anomena **matriu singular.**

Proposició. Una matriu quadrada **A** és no singular (*i. e.*, **A** té inversa) si, i només si, el seu determinant és no nul. En aquest cas, es compleix que:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{(adj(\mathbf{A}))^t}{|\mathbf{A}|},$$

on $adj(\mathbf{A})$ és la matriu que s'obté després de substituir cada element de **A** pel seu adjunt corresponent.

Exemple 38

Donada la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, té inversa, ja que $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

Calculem els adjunts de A (tenint en compte el signe corresponent):

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

Per tant: $adj(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Així doncs, $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{(adj(\mathbf{A}))^t}{|\mathbf{A}|} = \dfrac{1}{-4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

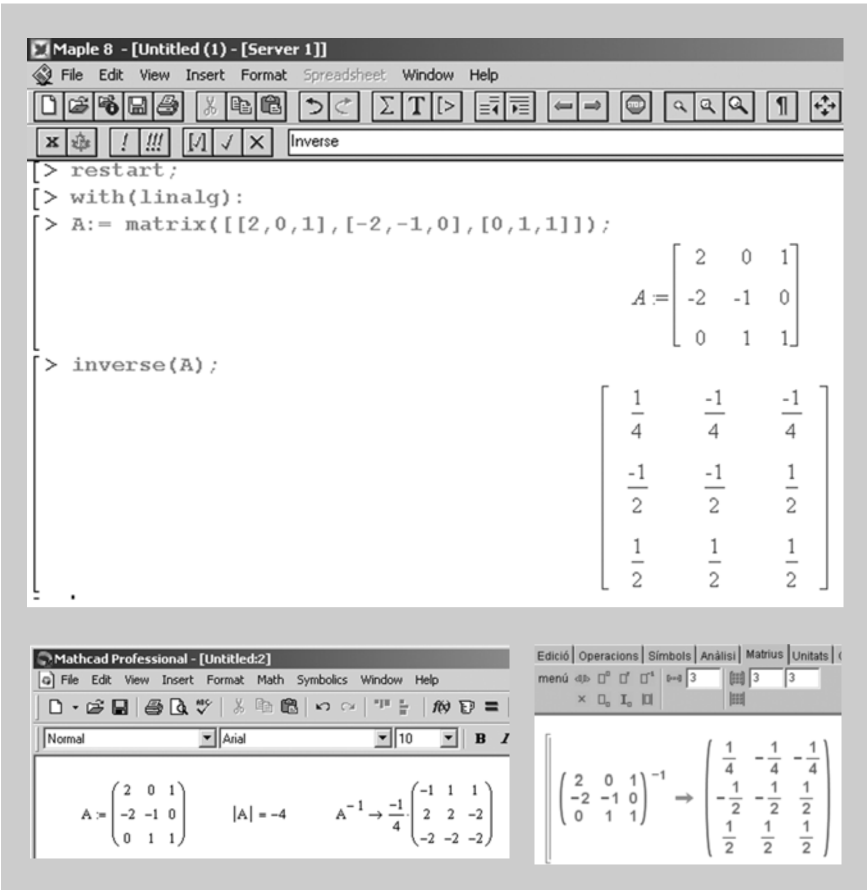
Podem comprovar que, en efecte, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Òbviament, podem utilitzar qualsevol programari matemàtic per a obtenir la inversa d'una matriu, sempre que aquesta existeixi:

Figura 6



4.5. Rang d'una matriu. Càlcul mitjançant determinants

El **rang d'una matriu** es defineix com el nombre de files o columnes linealment independents. Si la matriu és **A** el seu rang el denotarem per rg(**A**).

Nota

Es pot demostrar que, en qualsevol matriu, el nombre de files linealment independents coincidirà sempre amb el nombre de columnes linealment independents.

Exemple 39

Donada la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, el nombre de files linealment independents és 3, per tant el seu rang és 3.

A l'exemple anterior ha estat fàcil calcular el rang, atès que la matriu és triangular, però el càlcul per a una matriu qualsevol no és elemental.

El concepte de matriu té aplicacions importants en àlgebra lineal i en geometria, per això és important desenvolupar un mètode que permeti calcular el rang d'una matriu de manera eficient.

Donada una matriu **A** de m files i n columnes, s'anomena **menor d'ordre** h ($1 \leq h \leq min\{m, n\}$) qualsevol determinant que s'obtingui després de seleccionar h files i h columnes en la matriu **A**.

Exemple 40. Menor d'una matriu

Donada la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ -4 & 6 & -8 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, un menor d'ordre 2 de la matriu **A** s'obté en seleccionar dues files i dues columnes. Per exemple, si seleccionem les dues últimes files i les dues últimes columnes obtenim el menor següent:

$$\begin{vmatrix} -8 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

Un altre menor d'ordre 2 és, per exemple, el que s'obté de seleccionar les dues últimes files i les columnes primera i tercera:

$$\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

Donat un menor d'ordre h, s'anomena *orlat* d'aquest menor el determinant que s'obté després d'afegir al menor, de manera ordenada, els elements d'una nova fila i d'una nova columna.

Això significa que només es poden afegir elements que, dins de la matriu inicial, estiguin en la mateixa fila o columna que els elements del menor.

Exemple 41. Orlat d'un menor

Seguint amb l'exemple anterior, a partir de l'últim menor es poden generar dos orlats:

El menor d'ordre 3 que s'obté en agregar la primera fila i l'última columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -4 & -8 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

El menor d'ordre 3 que s'obté en agregar la primera fila i la segona columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & -8 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Una vegada introduïts els conceptes de menor i orlat, convé ressaltar el resultat següent, que és la clau per a determinar el rang d'una matriu:

Teorema del rang. El rang d'una matriu no nul·la és determinat per l'ordre del major menor no nul que es pugui obtenir a partir d'aquesta.

En altres paraules: si tots els elements d'una matriu són zeros, el rang de la matriu és zero. Si la matriu té algun element no nul, el seu rang serà igual o major que 1. Per a determinar-lo, caldrà trobar el menor no nul d'ordre major que es pot formar amb els elements de la matriu. L'ordre d'aquest menor serà el rang de la matriu.

Exemple 42. Càlcul del rang d'una matriu

Tornant a la matriu dels exemples anteriors, queda clar que el seu rang serà major que 1 (per ser una matriu no nul·la) i menor o igual que 3 (atès que, com a màxim, es podrà formar un menor d'ordre 3).

És fàcil comprovar que el rang de la matriu serà igual o major que 2, ja que el següent menor d'ordre dos és no nul:

$$\begin{vmatrix} -8 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Usarem el menor anterior com a "base d'ordre 2" per a tractar d'obtenir, a partir d'aquest, algun menor d'ordre 3 no nul (si no ho aconseguim a partir d'aquesta "base", no ho aconseguirem a partir de cap altre menor d'ordre 2).

Resulta, tanmateix, que els dos únics menors d'ordre 3 que es poden obtenir orlant el menor anterior són nuls:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -4 & -8 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 6 & -8 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

És a dir, que no trobarem en la matriu cap menor d'ordre 3 el valor del qual sigui diferent de zero. Per consegüent, el rang de la matriu serà 2, *i. e.*: rg(**A**) = 2.

Exemple 43. Càlcul del rang d'una matriu

Es vol obtenir el rang de la matriu:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Òbviament, el rang estarà entre els valors 1 (atès que la matriu és no nul·la) i 4 (atès que, com a màxim, es podrà formar un menor d'ordre 4).

És fàcil trobar un menor d'ordre 2 no nul: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Per tant, ja és clar que rg($\mathbf{A}$) ≥ 2.

El pas següent serà anar orlant el menor anterior (que prendrem com a "base d'ordre 2") per veure si es pot construir un menor d'ordre 3 no nul:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \text{(la 3a. fila és múltiple de la 1a.)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \text{(la 1a. i la 3a. files són iguals)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 6 + 6) - (0 + 3 + 6) = 3 \neq 0$$

Hem trobat un menor d'ordre 3 no nul, per tant: rg($\mathbf{A}$) ≥ 3. Usarem aquest nou menor com a "base d'ordre 3".

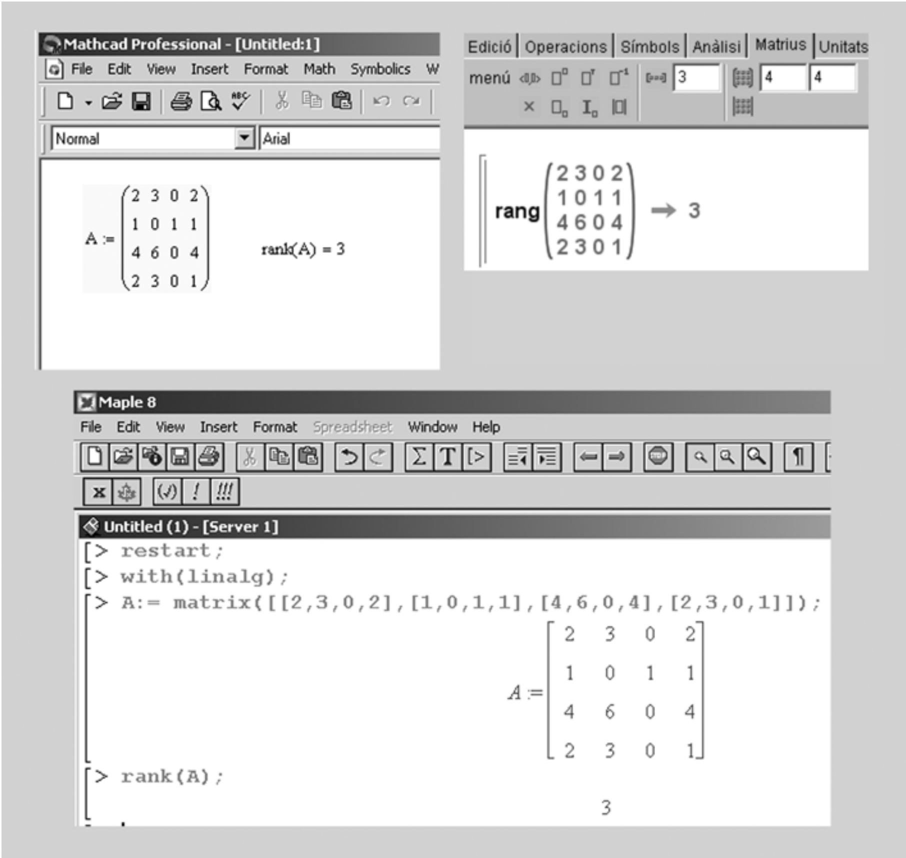
Resulta, tanmateix, que rg($\mathbf{A}$) ≠ 4, ja que l'únic menor d'ordre 4 que es pot formar és nul:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \text{(la 3a. fila és múltiple de la 1a.)}$$

A la figura 7 es mostra com els programes matemàtics (com Mathcad, Wiris o Maple, etc.) permeten automatiztar el càlcul del rang d'una matriu.

Per tant, es tindrà que rg($\mathbf{A}$) = 3.

Figura 7. Ús de programari matemàtic per a calcular el rang d'una matriu



4.6. Aplicacions als espais vectorials

1) Dependència i independència lineal

Sigui $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunt de vectors d'un espai vectorial V (amb $\dim V = n$). Disposant-los per files o per columnes obtenim una matriu **A**.

Es verifica que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ són linealment independents si i només si $\text{rg}(\mathbf{A}) = k$ (i per tant que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ són linealment dependents si i només si $\text{rg}(\mathbf{A}) < k$).

Exemple 44

Els vectors de $\mathbb{R}^3$ (2, 1, 2), (3, 2, 1), (–1, 1, –7) són linealment dependents, atès que donada la matriu formada disposant-los en columnes

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ té $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$ (n'hi ha prou de comprovar que $|\mathbf{A}| = 0$ i que hi ha un menor d'ordre 2 no nul)

Proposició. A $\mathbb{R}^n$, n vectors són linealment independents si, i només si, el determinant de la matriu que es construeix a partir d'aquests és no nul.

Exemple 45

Ara comprovarem, utilitzant la proposició anterior, que el rang del conjunt {(1, 3, 0), (–1, 2, –4), (1, 1, 2)} és 3, *i. e.*: que els tres vectors anteriors són linealment independents:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 12 - (-4) - (-6) = 2 \neq 0$$

Exemple 46

Ara comprovarem, utilitzant la proposició anterior, que el rang del conjunt {(1, 3, 0), (–1, 2, –4), (0, 5, –4)} és inferior a 3, *i. e.*: que els tres vectors anteriors són linealment dependents:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -8 - (-20) - 12 = 0$$

2) **Dimensió d'un subespai generat**

Sigui $W = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ el subespai generat per aquests vectors. Donada la matriu **A** que s'obté disposant els vectors en files o columnes, es verifica que

$$\dim W = \mathrm{rg}(\mathbf{A})$$

Exemple 47

Els vectors de $\mathbb{R}^4$ (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (4, 4, 4, 4) proporciona la matriu

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. Tenim que $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 2$ (comproveu-ho amb programari) i per conseqüent aquests tres vectors generen un subespai de $\mathbb{R}^4$ de dimensió 2.

4.7. Matriu del canvi de base en un espai vectorial

Recordem que una base B d'un espai vectorial V de $\dim V = n$ proporciona un sistema de coordenades per a V i cada vector $\mathbf{v} \in V$ s'identifica de manera única amb les seves coordenades en aquesta base (nombres reals $c_1, \ldots, c_n$).

Per a fixar idees podem identificar $(c_1, \ldots, c_n)$ amb un vector de $\mathbb{R}^n$ (o una matriu $1 \times n$).

Siguin $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ i $A = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases d'un espai vectorial V.

Considerem la matriu $\mathbf{C}$ quadrada d'ordre n les columnes de la qual són les coordenades dels vectors de B en la base A, $\mathbf{C} = (c_{ij})_{n\times n}$, s'anomena **matriu del canvi de base de** B **a** A.

Si $\mathbf{v} \in V$ té coordenades $b_1, \ldots, b_n$ en la base B i té coordenades $a_1, \ldots, a_n$ en la base A, es verifica:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Exemple 48

Siguin $B = \{(1, 1, 1),(1, 0, 3),(3, 4, 5)\}$ i $A = \{(2, 3, -1),(0, 0, 1),(2, 1, 0)\}$ dues bases de $\mathbb{R}^3$. Per a calcular la matriu del canvi de base de B a A seguim els passos:

1) Calculem les coordenades de (1, 1, 1) en A resolent l'equació matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$, com que $|\mathbf{M}| \neq 0$ la matriu $\mathbf{M}$ és invertible

I, per tant, obtenim

$$\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) De la mateixa manera es calculen les coordenades dels altres dos vectors:

$$\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Observem que els càlculs es podrien haver fet amb una única operació de matrius:

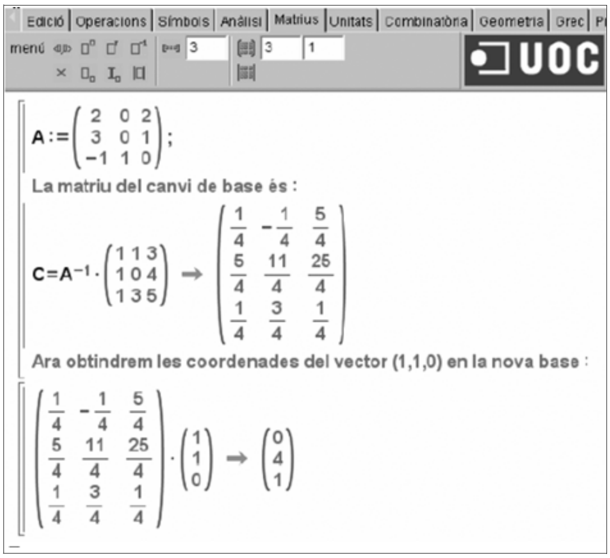
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}}$$ = és la matriu del canvi de base de B a A.

En aquest cas, el vector que tingui coordenades (1,1,0) en la base B tindrà les coordenades següents a A:

$$\mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podem veure els càlculs realitzats amb la calculadora Wiris:

Figura 8



5. Equacions de rectes i plans

5.1. Equacions d'una recta al pla

De manera intuïtiva, sembla clar que dos punts del pla $\mathbb{R}^2$ determinen de manera unívoca una recta r (la que passa per tots dos). Una recta en el pla també pot ser determinada per un punt de pas i un vector que marqui la direcció de la recta (vector director). Com es veurà a continuació, les equacions d'una recta r poden prendre diferents expressions equivalents.

Equació vectorial

Donats dos punts de pas de r, $P(p_1, p_2)$ i $Q(q_1, q_2)$, es pot considerar el vector director $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (v_1, v_2) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$. Qualsevol altre punt $X(x, y)$ de la recta r verificarà l'equació:

$$X = P + k \cdot \mathbf{v}, \quad \text{on } k \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Equacions paramètriques

L'equació **(1)** es pot reescriure com segueix:

$(x, y) = (p_1, p_2) + k \cdot (v_1, v_2)$, és a dir: $(x, y) = (p_1 + k \cdot v_1, p_2 + k \cdot v_2)$

expressió equivalent al sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x = p_1 + k \cdot v_1 \\ y = p_2 + k \cdot v_2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Equació contínua

Aïllant el paràmetre k a **(2)**, s'arriba a les equacions contínues de r (sempre que $v_1 \neq 0 \neq v_2$):

$$\begin{cases} x = p_1 + k \cdot v_1 \\ y = p_2 + k \cdot v_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k = \dfrac{x - p_1}{v_1} \\ k = \dfrac{y - p_2}{v_2} \end{cases}, \text{ i per tant:}$$

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} \tag{3}$$

Equació punt-pendent i equació explícita

Aïllant la y de l'expressió **(3)** s'arriba a:

a) L'equació punt-pendent: $y - p_2 = \frac{v_2}{v_1}(x - p_1)$, és a dir:

$$y - p_2 = m \cdot (x - p_1), \tag{4}$$

on $m = \frac{v_2}{v_1}$ és el **pendent** de r

b) L'equació explícita: $y = m \cdot (x - p_1) + p_2 = m \cdot x - m \cdot p_1 + p_2$, o sigui:

$$y = m \cdot x + n, \tag{5}$$

essent $n = -m \cdot p_1 + p_2$ l'**ordenada a l'origen**.

Equació general

També és possible desenvolupar l'expressió **(3)** de la manera següent:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} \Leftrightarrow v_2 \cdot (x - p_1) = v_1 \cdot (y - p_2) \Leftrightarrow v_2 \cdot x - v_1 \cdot y - v_2 \cdot p_1 + v_1 \cdot p_2 = 0$$

De manera genèrica:

$$Ax + By + C = 0, \tag{6}$$

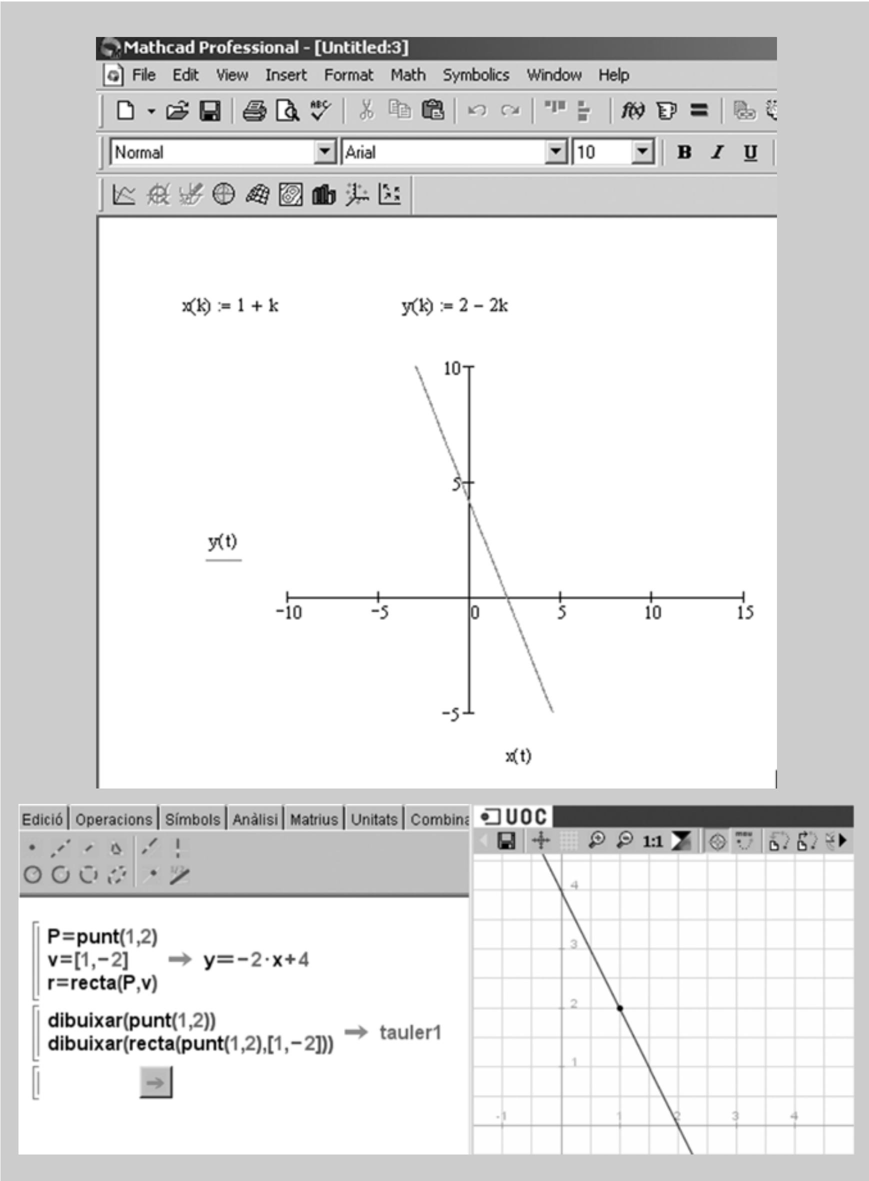
on $A = v_2$, $B = -v_1$ i $C = -v_2 \cdot p_1 + v_1 \cdot p_2$.

Exemple 49

Sigui r la recta que passa pel punt $P(1, 2)$ i la direcció de la qual és donada pel vector $\mathbf{v} = (1, -2)$.

- Equació vectorial: $(x, y) = (1, 2) + k(1, -2) \quad k \in \mathbb{R}$
- Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 - k \cdot 2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$
- Equació contínua: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2}$
- Equació explícita: $y = -2x + 4$
- Equació general: $2x + y - 4 = 0$

Figura 9



Comentari

Els *outputs* mostren la representació gràfica de la recta de l'exemple. En aquest cas s'ha fet ús de Mathcad per a representar la recta a partir de les equacions paramètriques, i s'ha utilitzat Wiris per a representar-la a partir de l'equació vectorial.

5.2. Equacions d'una recta a l'espai

De manera similar al que s'esdevindria a $\mathbb{R}^2$, també a l'espai $\mathbb{R}^3$ es poden considerar diverses expressions alternatives per a l'equació d'una recta r (la deducció d'aquestes expressions és anàloga al cas de $\mathbb{R}^2$):

Donats dos punts de pas de r, $P(p_1, p_2, p_3)$ i $Q(q_1, q_2, q_3)$, es pot considerar el vector director $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (v_1, v_2, v_3)$. Qualsevol altre punt $X(x, y, z)$ de la recta r verificarà l'equació: $X = P + k \cdot \mathbf{v}$, on $k \in \mathbb{R}$. D'aquesta manera, es poden considerar les següents equacions alternatives (sempre que $v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \neq 0$):

- **Equació vectorial:** $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + k \cdot (v_1, v_2, v_3)$

- **Equacions paramètriques:** $\begin{cases} x = p_1 + k \cdot v_1 \\ y = p_2 + k \cdot v_2 \\ z = p_3 + k \cdot v_3 \end{cases}$
- **Equacions contínues:** $\dfrac{x - p_1}{v_1} = \dfrac{y - p_2}{v_2} = \dfrac{z - p_3}{v_3}$

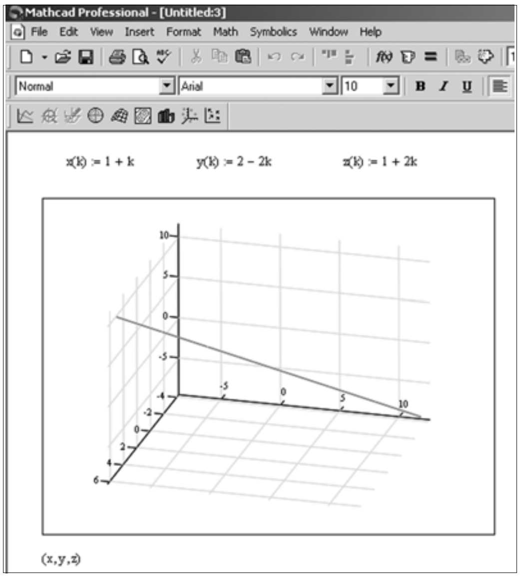
Exemple 50

Sigui r la recta que passa pel punt $P(1, 2, 1)$ i la direcció de la qual és donada pel vector $\mathbf{v} = (1, -2, 2)$.

- Equació vectorial: $(x, y, z) = (1, 2, 1) + k(1, -2, 2) \qquad k \in \mathbb{R}$
- Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 - 2k \\ z = 1 + 2k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}$
- Equació contínua: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{2}$

A la figura 10 s'ha fet servir el Mathcad per a representar el pla de l'exemple a partir de les equacions paramètriques.

Figura 10



5.3. Equacions d'un pla a l'espai

L'equació d'un pla π a l'espai $\mathbb{R}^3$ és determinada per un punt del pla, $P(p_1, p_2, p_3)$, i dos vectors no nuls i no proporcionals (*i. e.*, no paral·lels), $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. És possible considerar diferents expressions equivalents per a l'equació d'un pla a l'espai:

- **Equació vectorial**

  $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + k \cdot (u_1, u_2, u_3) + h \cdot (v_1, v_2, v_3)$ on $k, h \in \mathbb{R}$.

- **Equacions paramètriques**

$$\begin{cases} x = p_1 + k \cdot u_1 + h \cdot v_1 \\ y = p_2 + k \cdot u_2 + h \cdot v_2 \\ z = p_3 + k \cdot u_3 + h \cdot v_3 \end{cases} \qquad \text{on } k, h \in \mathbb{R}.$$

- **Equació general**

A partir de l'equació $\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$ s'obté una expressió de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$.

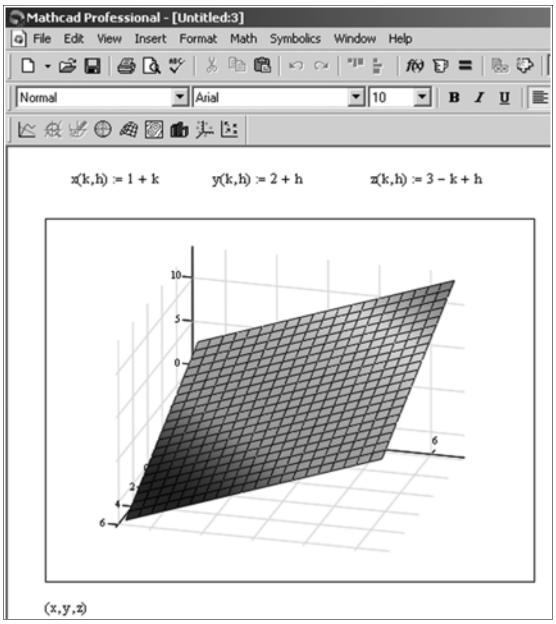
Exemple 51

Sigui π el pla que passa pel punt $P(1, 2, 3)$ i té per vectors directors $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$ i $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$. Aleshores:

- Equació vectorial: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k \cdot (1, 0, -1) + h \cdot (0, 1, 1)$
- Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + h \\ z = 3 - k + h \end{cases}$
- Equació general: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y + z - 2 = 0.$

A la figura 11 s'ha fet ús de Mathcad per a representar el pla de l'exemple a partir de les equacions paramètriques i general, respectivament.

Figura 11



6. Producte escalar i ortogonalitat

6.1. Producte escalar, mòdul d'un vector i angle entre vectors

Donats dos vectors de l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, es defineix el **producte escalar** de tots dos, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, de la manera següent:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n$$

Observeu que:

a) El producte escalar de dos vectors de $\mathbb{R}^n$ dóna com a resultat un nombre real.

b) Usant notació matricial, es pot escriure el producte escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ com el producte matricial de la matriu fila $(u_1\ u_2\ \ldots\ u_n)$ per la matriu columna de les coordenades de $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1\ u_2\ \ldots\ u_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Exemple 52

Si $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ i $\mathbf{v} = (2, -1, 4)$, el producte escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 12$.

Observeu que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 12 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

Proposició. Siguin $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ vectors a $\mathbb{R}^n$ i c un escalar (nombre real) qualsevol. Es compleix:

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

c) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$

d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ i $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ si, i només si, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ és el vector nul (*i. e.*: $\mathbf{u} = (0, 0, \ldots, 0)$)

El producte escalar permet definir el concepte de mòdul o longitud d'un vector:

El **mòdul** o longitud d'un vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ és

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2}$$

A $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ aquest concepte coincideix amb la noció usual de la longitud del segment orientat (fletxa) que representa un vector.

Proposició. Siguin **u** i **v** vectors a $\mathbb{R}^n$ i c un escalar qualsevol. Es compleix:

a) $|\mathbf{u}| \geq 0$ i $|\mathbf{u}| = 0$ si, i només si, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

b) $|c\mathbf{u}| = |c|\,|\mathbf{u}|$ (on $|c|$ és el valor absolut de c)

c) $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$ (desigualtat de Cauchy-Schwarz)

d) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (desigualtat triangular)

Un **vector unitari** és aquell el mòdul o longitud del qual val 1. Observeu que, donat un vector no nul **u** de $\mathbb{R}^n$, sempre és possible obtenir un altre vector **v** unitari amb la mateixa direcció i sentit que **u**: per a això tan sols cal prendre $\mathbf{v} = \mathbf{u} / |\mathbf{u}|$. Aquest procés s'anomena **normalització** del vector **u**.

Exemple 53

El vector $\mathbf{w} = (0, -3/5, 4/5)$ és unitari atès que

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{(0^2 + (-3/5)^2 + (4/5)^2)} = 1$$

D'altra banda, el vector $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ no és unitari atès que

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{(2^2 + 1^2 + 3^2)} = \sqrt{14} \neq 1$$

Finalment, el vector $\mathbf{v} = \mathbf{u} / |\mathbf{u}| = (2/\sqrt{14}, 1/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14})$ serà un vector unitari amb la mateixa direcció i sentit que **u**.

El concepte de mòdul d'un vector permet introduir un altre concepte important, el de distància entre dos vectors a $\mathbb{R}^n$:

Donats **u** i **v** vectors a $\mathbb{R}^n$, es defineix la distància entre tots dos com a:

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$$

Nota

Si $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ i $\mathbf{v} = \overrightarrow{OQ}$, dist(**u**, **v**) és intuïtivament la distància entre els punts P i Q, calculada com $|\overrightarrow{PQ}|$.

Exemple 54

La distància entre els vectors **u** = (1, 2, 3) i **v** = (2, −1, 4) és:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (-1, 3, -1) \rightarrow \text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}| = \sqrt{((-1)^2 + 3^2 + (-1)^2)} = \sqrt{11}$$

A $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ es pot definir l'angle entre dos vectors no nuls utilitzant el producte escalar:

Donats **u** i **v** vectors no nuls a $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, es defineix l'**angle** entre tots dos com el nombre real θ, pertanyent a l'interval [0,π], tal que:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|}$$

Nota

θ s'expressa en radiants.

Exemple 55

Calculem l'angle θ que formen entre ells els vectors **u** = (1, 2, 3) i **v** = (2, −1, 4):

$\cos(\theta) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} / |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| = 12 / (\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}) = 0.69985$
Per tant θ = arccos(0.69985) = 0.7956 radiants

6.2. Vectors i bases ortogonals a $\mathbb{R}^n$

Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, aleshores l'angle que formen els dos vectors és π/2 (cos(θ) = 0), intuïtivament les direccions dels dos vectors són perpendiculars. El concepte següent generalitza a $\mathbb{R}^n$ la idea intuïtiva de perpendicularitat.

Donats **u** i **v** vectors a $\mathbb{R}^n$, es diu que són **ortogonals** (intuïtivament perpendiculars) entre ells quan es compleix:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Observeu que el vector **0** = (0, 0, ..., 0) de $\mathbb{R}^n$ és ortogonal a tot vector de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 56

Si sabem que els vectors **v** = (2, −1, 4) i **w** = (0, 3, *m*) són ortogonals, quant valdrà *m*?:

Per ser ortogonals, es tindrà que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, *i. e.*: $2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + 4 \cdot m = 0$; aïllant s'obté $m = 3/4$.

Siguin **u** i *W*, respectivament, un vector i un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. Es diu que **u** és ortogonal al subespai *W* si **u** és ortogonal a tot vector de *W*.

El conjunt de tots els vectors $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^n$ que són ortogonals al subespai W s'anomena **complement ortogonal** de W i es denota per $W^{\perp}$.

El complement ortogonal d'un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ és, al seu torn, un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 57

A $\mathbb{R}^3$, considereu el pla xy, l'equació del qual és $z = 0$. Aquest pla és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ format pels vectors la tercera coordenada dels quals és nul·la, *i. e.*:

$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mathbin{/} z = 0 \} = \{ (x, y, 0) \mathbin{/} x, y \in \mathrm{R} \} = \langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$.

És evident, aleshores, que el vector $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ és ortogonal a W ja que, donat $\mathbf{w} = (w_1, w_2, 0) \in W$, $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

De fet, si denotem per Z el subespai generat per $\mathbf{u}$, *i. e.*: $Z = \langle(0, 0, 1)\rangle$ és la recta que coincideix amb l'eix z de $\mathbb{R}^3$, es té que Z és el complement ortogonal de W, és a dir: $Z = W^{\perp}$.

Observeu que també es compleix $W = Z^{\perp}$.

Sigui W un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ i $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ una base de W. Es diu que B és una **base ortogonal** de W si els vectors que la componen són ortogonals entre ells, *i. e.*:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \quad \text{per a tot} \quad i \neq j$$

D'altra banda, es diu que B és una **base ortonormal** de W si és una base ortogonal i, a més, tots els vectors que la componen són unitaris.

Observeu que donada una base ortogonal B serà immediat obtenir una base ortonormal: n'hi haurà prou de normalitzar cada un dels vectors de B, *i. e.*: si $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ és una base ortogonal de W, aleshores $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ amb $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i \mathbin{/} |\mathbf{u}_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ serà una base ortonormal de W.

Exemple 58

Els vectors $\mathbf{u}_1 = (3, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 1)$ i $\mathbf{u}_3 = (-1/2, -2, 7/2)$ constitueixen una base de $\mathbb{R}^3$, ja que $\langle\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\rangle = \mathbb{R}^3$ i $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ formen un conjunt de vectors linealment independents.

Es tracta, a més, d'una base ortogonal, ja que: $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$ (en general, si un conjunt de vectors no nuls són ortogonals entre ells, aleshores també són linealment independents).

A partir de la base ortogonal $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ resulta immediat obtenir una base ortonormal B':

$|(3, 1, 1)| = \sqrt{11}$

$|(-1, 2, 1)| = \sqrt{6}$

$|(-1/2, -2, 7/2)| = \sqrt{33/2}$

Per tant,

$$B' = \{(3/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11}), (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}),$$
$$((-1/2)/\sqrt{33/2}, -2/\sqrt{33/2}, (7/2)/\sqrt{33/2})\}$$

és una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Donada una base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\}$ d'un subespai W de $\mathbb{R}^n$, qualsevol vector $\mathbf{v}$ de W es podrà expressar com a combinació lineal dels elements de la base, *i. e.*: hi haurà valors reals $c_1, c_2, ..., c_p$ tals que:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + ... + c_p\mathbf{u}_p$$

i. e.:

$$(v_1, v_2, ..., v_p) = c_1(u_{11}, u_{12}, ..., u_{1p}) + c_2(u_{21}, u_{22}, ..., u_{2p}) + ... + c_p(u_{p1}, u_{p2}, ..., u_{pp})$$

En general, per a determinar el valor exacte dels p coeficients c_i caldrà resoldre el sistema de p equacions lineals resultant:

$$\begin{aligned} v_1 &= c_1u_{11} + c_2u_{21} + ... + c_pu_{p1} \\ v_2 &= c_1u_{12} + c_2u_{22} + ... + c_pu_{p2} \\ &... \\ v_p &= c_1u_{1p} + c_2u_{2p} + ... + c_pu_{pp} \end{aligned}$$

En el cas de bases ortogonals, tanmateix, el procés de determinació dels c_i se simplifica notablement:

Teorema. Sigui $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\}$ una base ortogonal de $W \leq \mathbb{R}^n$, i sigui $\mathbf{v}$ un vector de W. L'expressió de $\mathbf{v}$ com a combinació lineal dels elements de B és:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + ... + c_p\mathbf{u}_p \quad \text{amb} \quad c_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i \,/\, \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i \ \ (i = 1, 2, ..., p)$$

Exemple 59

Com s'ha demostrat en l'exemple anterior, els vectors $\mathbf{u}_1 = (3, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 1)$ i $\mathbf{u}_3 = (-1/2, -2, 7/2)$ constitueixen una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Considerem ara el vector $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$ l'expressió del qual en la base canònica és $\mathbf{v} = (6, 1, -8)$. Quina serà l'expressió de $\mathbf{v}$ en la base ortogonal $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$?

Si B no fos una base ortogonal, per a respondre la pregunta hauríem de resoldre l'equació vectorial:

$$(6, 1, -8) = c_1(3, 1, 1) + c_2(-1, 2, 1) + c_3(-1/2, -2, 7/2)$$

Aquesta equació vectorial dóna lloc a un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites.

En ser B una base ortogonal, podem utilitzar el teorema anterior per a trobar les coordenades de $\mathbf{v}$ a B:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 = 11 & \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2 = -12 & \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_3 = -33 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = 11 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = 6 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3 = 33/2 \end{array}$$

amb la qual cosa:

$$c_1 = 11/11 = 1 \qquad c_2 = -12/6 = -2 \qquad c_3 = -33\ /\ (33/2) = -2$$

Així doncs, $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$ és a dir, les coordenades de $\mathbf{v}$ en la base B són $(1, -2, -2)$.

6.3. Projeccions ortogonals

Donat un vector $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$, un subespai vectorial W de $\mathbb{R}^n$ i una base ortogonal $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\}$ de W, s'anomena **projecció ortogonal** de $\mathbf{v}$ sobre W, PO($\mathbf{v}$, W) el següent vector $\mathbf{v}^*$ de W:

$$\text{PO}(\mathbf{v}, W) = \mathbf{v}^* = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + ... + c_p\mathbf{u}_p \quad \text{amb } c_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i\ /\ \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i \ \ (i = 1, 2, ..., p)$$

Exemple 60

Considereu el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ següent: $W = \langle\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle$, essent $\mathbf{u}_1 = (2, 5, -1)$ i $\mathbf{u}_2 = (-2, 1, 1)$. Observeu que $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ és una base ortogonal de W i que W és un pla a $\mathbb{R}^3$.

Es vol trobar la projecció ortogonal del vector $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ sobre el subespai W, *i. e.*, PO($\mathbf{v}$, W):

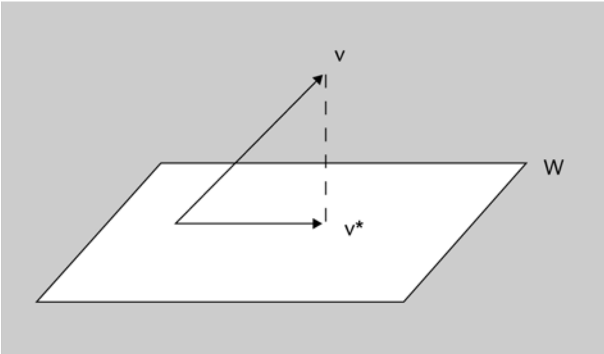
$$\begin{array}{ll} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 = 9 & \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2 = 3 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = 30 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = 6 \end{array}$$

amb la qual cosa:

$$c_1 = 9/30 = 3/10 \qquad c_2 = 3/6 = 1/2$$

Per tant, $\text{PO}(\mathbf{v}, W) = \mathbf{v}^* = 3/10\ (2, 5, -1) + 1/2\ (-2, 1, 1) = (-2/5, 2, 1/5) \in W$

Figura 12



Teorema (descomposició ortogonal). En les condicions de la definició anterior, donat un vector qualsevol **v** de $\mathbb{R}^n$, aquest es pot escriure de la manera:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{z}$$

essent $\mathbf{v}^*$ la projecció ortogonal de **v** sobre W i $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^*$ un vector de $W^\perp$

Exemple 61

Continuant amb l'exemple anterior, ens plantegem "descompondre ortogonalment" el vector **v** com a suma de la seva projecció ortogonal sobre l'espai W, $\mathbf{v}^*$, i d'un altre vector **z**, perpendicular a W:

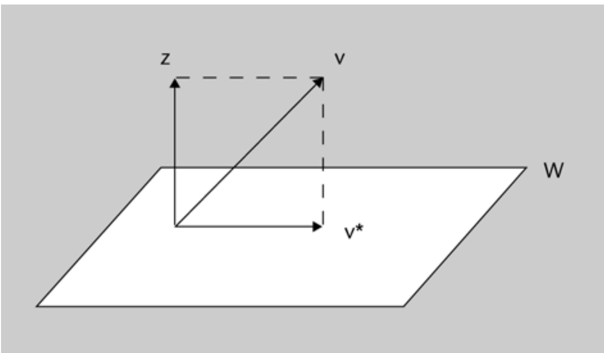
Segons hem vist, $\mathrm{PO}(\mathbf{v},W) = \mathbf{v}^* = (-2/5, 2, 1/5) \in W$

D'altra banda, $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^* = (1, 2, 3) - (-2/5, 2, 1/5) = (7/5, 0, 14/5)$

Comprovem que, com diu el teorema, $\mathbf{z} \in W^\perp$, per a la qual cosa n'hi haurà prou de demostrar que **z** és ortogonal als vectors d'una base de W:

$\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}_1 = 2 \cdot 7/5 + 5 \cdot 0 + (-1)14/5 = 0$
$\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}_2 = (-2) \cdot 7/5 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 14/5 = 0$

Figura 13



Observeu que si $\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{z}$, aleshores $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^*$ és el component de **v** ortogonal a W. Aquesta idea és la base del mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt que es veurà a l'apartat següent.

Teorema (aproximació òptima). En les condicions de la definició anterior, es compleix que $\mathbf{v}^*$ és el vector de W més proper a $\mathbf{v}$, *i. e.*:

$\text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*) = |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*| = |\mathbf{z}| < \text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$ per a tot vector $\mathbf{u}$ a W tal que $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}^*$

La distància d'un vector (punt) $\mathbf{v}$ a $\mathbb{R}^n$ a un subespai W de $\mathbb{R}^n$ es defineix com la distància de $\mathbf{v}$ al vector (punt) més proper de W.

Exemple 62

Si $\mathbf{u_1} = (5, -2, 1)$ i $\mathbf{u_2} = (1, 2, -1)$, quina és la distància entre el vector $\mathbf{v} = (-1, -5, 10)$ i el subespai $W = <\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2>$?

Pel teorema de l'aproximació òptima, la distància entre $\mathbf{v}$ i W serà la mateixa que la distància entre $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}^*$, la projecció de $\mathbf{v}$ sobre W.

La primera cosa serà comprovar que la base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ és ortogonal:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0$$

Ara trobem $\text{PO}(\mathbf{v}, W) = \mathbf{v}^*$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 = 15 \qquad \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2 = -21$$

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = 30 \qquad \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = 6$$

amb la qual cosa:

$$c_1 = 15/30 = 1/2 \qquad c_2 = -21/6 = -7/2$$

Per tant, $\text{PO}(\mathbf{v}, W) = \mathbf{v}^* = 1/2\ (5, -2, 1) + (-7/2)\ (1, 2, -1) = (-1, -8, 4) \in W$

Finalment, $\text{dist}(\mathbf{v}, W) = \text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*) = |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*| = |(0, 3, 6)| = 3\sqrt{5}$.

6.4. Procés d'ortogonalització de Gram-Schmidt

De vegades pot resultar molt convenient disposar d'una base ortonormal per a un subespai vectorial W de $\mathbb{R}^n$. El procés de Gram-Schmidt és un algorisme que permet obtenir una base ortogonal per a qualsevol subespai de $\mathbb{R}^n$ no trivial (s'entén per subespai trivial de $\mathbb{R}^n$ el subespai que només conté el vector $\mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^n$).

Un cop obtinguda la base ortogonal, l'obtenció d'una base ortonormal és immediata ja que n'hi haurà prou de normalitzar els vectors de la base ortogonal proporcionada per l'algorisme.

Algorisme d'ortogonalització de Gram-Schmidt:

Sigui W un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ i $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\}$ una base qualsevol de W.

Pas 1: Es pren $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ i es considera $W_1 = <\mathbf{v}_1>$
Pas 2: Es pren $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{PO}(\mathbf{u}_2, W_1)$ i es considera $W_2 = <\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2>$
Pas 3: Es pren $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{PO}(\mathbf{u}_3, W_2)$ i es considera $W_3 = <\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3>$
Pas 4: Es pren $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \text{PO}(\mathbf{u}_4, W_3)$ i es considera $W_4 = <\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4>$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Pas p: Es pren $\mathbf{v}_p = \mathbf{u}_p - \text{PO}(\mathbf{u}_p, W_{p-1})$

En aquestes condicions, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p\}$ és una base ortogonal de W.

Exemple 63

Considereu els vectors de $\mathbb{R}^4$ següents: $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1, 1)$ i $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 1)$. Els vectors $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ són linealment independents i, per tant, $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ és base d'un subespai W de dimensió 3.

A continuació utilitzarem el mètode de Gram-Schmidt per a obtenir una base ortogonal de W:

1. Prenem $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$ i $W_1 = <\mathbf{v}_1>$
2. Prenem $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 1) - \text{PO}(\mathbf{u}_2, W_1) = ...$

$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = 3$

$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 4$

$c_1 = 3/4$

$... = (0, 1, 1, 1) - 3/4\ (1, 1, 1, 1) = (-3/4, 1/4, 1/4, 1/4)$

Podríem emprar directament el vector $\mathbf{v}_2$ que hem obtingut i continuar amb el procés. Tanmateix, a fi de simplificar els càlculs, en el seu lloc prendrem el vector proporcional $\mathbf{v}'_2 = 4\mathbf{v}_2 = (-3, 1, 1, 1)$, el qual té la mateixa direcció.

Prenem $W_2 = <\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2>$

Observeu que $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}'_2$ són vectors ortogonals atès que $\mathbf{v}_2 \in W^{\perp}$ (pel teorema de descomposició ortogonal) per tant, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2\}$ és base ortogonal de W_2

3. Prenem $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 1) - \text{PO}(\mathbf{u}_3, W_2) = ...$

$\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = 2$	$\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}'_2 = 2$
$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 4$	$\mathbf{v}'_2 \cdot \mathbf{v}'_2 = 12$
$c_1 = 1/2$	$c_2 = 1/6$

$... = (0, 0, 1, 1) - [\ 1/2\ (1, 1, 1, 1) + 1/6\ (-3, 1, 1, 1)\ ] = (0, -2/3, 1/3, 1/3)$

A fi de simplificar els càlculs, prendrem $\mathbf{v}'_3 = 3\mathbf{v}_3 = (0, -2, 1, 1)$.

Observeu que $\mathbf{v}'_3$ és ortogonal a $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}'_2$ atès que $\mathbf{v}_3 \in W_2^{\perp}$ (pel teorema de descomposició ortogonal); per tant, $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\}$ és base ortogonal.

Així doncs, segons el teorema anterior, B serà base ortogonal de W. Per a obtenir una base ortonormal de W n’hi haurà prou de normalitzar els vectors de B:

$$|\mathbf{v}_1| = 2 \qquad |\mathbf{v}'_2| = 2\sqrt{3} \qquad |\mathbf{v}'_3| = \sqrt{6}$$

Per tant, $B' = \{ (1/2, 1/2, 1/2, 1/2), (-3/(2\sqrt{3}), 1/(2\sqrt{3}), 1/(2\sqrt{3}), 1/(2\sqrt{3})), (0, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}) \}$ és base ortonormal de W.

Resum

En aquest mòdul s'han revisat conceptes i mètodes associats a l'àlgebra lineal i a la geometria, els quals són bàsics per al desenvolupament de mòduls posteriors (sistemes d'equacions lineals, transformacions geomètriques, aplicacions lineals, etc.).

En primer lloc, s'han revisat els conceptes clau associats a espais vectorials reals:

- subespai vectorial
- combinació lineal de vectors
- sistema generador
- independència lineal
- rang d'un conjunt de vectors
- base i dimensió d'un espai vectorial

A continuació, s'han revisat els conceptes clau associats a la teoria de matrius i determinants:

- dimensió d'una matriu
- matriu transposada
- tipus de matrius (diagonal, simètrica, triangular, etc.)
- operacions amb matrius (suma, resta, multiplicació, etc.)
- matriu inversa
- càlcul de determinants d'ordre 2 i 3
- càlcul de determinants per adjunts
- propietats dels determinants
- càlcul de la matriu inversa
- càlcul del rang d'una matriu
- determinants i dependència lineal

A la part final del mòdul, s'ha fet una revisió dels següents conceptes geomètrics:

- equacions de rectes i plans en 2D i 3D
- producte escalar a $\mathbb{R}^n$ i angle entre vectors
- ortogonalitat (bases ortogonals i ortonormals)
- procés d'ortogonalització de Gram-Schmidt

El mòdul s'ha completat amb exemples i activitats resoltes (amb ajuda de programari i sense ajuda), en les quals també s'han introduït algunes aplicacions interessants de la teoria exposada a diferents àmbits temàtics (informàtica, telecomunicacions, economia, etc.).

Exercicis d'autoavaluació

1. Determineu quins dels conjunts de vectors següents són base de $\mathbb{R}^3$:

a) {(–2,3,0), (3,–1,2), (–1,5,2)}
b) {(–1,2,1), (2,4,0), (5,1,1)}

2. Utilitzant determinants, calculeu la inversa, si n'hi ha, de la matriu següent:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Donada la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, calculeu $\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A}$.

Per a fer amb l'ajuda de programari o sense

4. Considereu els vectors següents: $\mathbf{u} = (a, 1, -2)$, $\mathbf{v} = (1, a, 2)$ i $\mathbf{w} = (2a, 1, 0)$. Trobeu el valor de a perquè els vectors siguin linealment independents.

5. Sabent que es compleix $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$, obteniu la matriu $\mathbf{X}$ si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Calculeu la inversa, quan existeixi segons el valor del paràmetre a, de $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$.

Per a fer amb l'ajuda de programari o sense

7. Donats els vectors (1, 2, 0), (1, 0, 1) i (–2, 2, –3), trobeu la dimensió del subespai generat. Calculeu k perquè el vector (4, 3, k) pertanyi a aquest subespai.

8. Donats els conjunts de vectors B = {(1, 1, 2), (1, 2, 3), (3, 4, 3)} i A = {(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)} de $\mathbb{R}^3$:

a) Comproveu que B i A són bases de $\mathbb{R}^3$ i calculeu les coordenades del vector $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ a B i a A, respectivament.

b) Calculeu la matriu del canvi de base de B a A i comproveu la coherència del resultat de l'apartat a)

9. Raoneu si les afirmacions següents sobre vectors de $\mathbb{R}^n$ amb el producte escalar estàndard són vertaderes o falses:

a) El mòdul d'un vector és un nombre positiu

b) La distància entre **u** i **v** és $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|$

c) Si dos vectors no nuls són ortogonals, aleshores són linealment independents

d) La projecció ortogonal de **u** sobre **v** és múltiple escalar de **u**

e) Si un vector coincideix amb la seva projecció ortogonal sobre un subespai, aleshores el vector és del subespai

f) El conjunt de tots els vectors de $\mathbb{R}^n$ ortogonals a un vector donat és un subespai de $\mathbb{R}^n$

10. Sigui $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x + y + z = 0\}$ i sigui el vector $\mathbf{v} = (2, -1, -1)$.

a) Comproveu que $B_1 = \{(-1, 0, 1), (-1, 3, -2)\}$ és una base de W.

b) Calculeu les coordenades de v en la base B_1.

c) Sabem que $B_2 = \{(-1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$ és també base de W, llavors calculeu les coordenades de **v** en B_2.

d) Calculeu la matriu de canvi de base de B_1 a B_2 i comproveu que és coherent amb el que heu fet en els dos primers apartats.

11. Un model de producció de Leontief s'expressa mitjançant una taula d'*input-output* com la que s'exposa a continuació:

	Sector I	Sector II	Sector III
Sector I	0.5	0.4	0.2
Sector II	0.2	0.3	0.1
Sector III	0.1	0.1	0.3

Aquesta taula s'interpreta de la manera següent: si el sector II vol produir 1000 unitats, aleshores necessitarà 400 unitats del sector I, 300 del sector II i 100 del sector III.

	Sector I	Sector II	Sector III
Sector I	0.5	**0.4 × 1000 = 400 unit. del sector I**	0.2
Sector II	0.2	**0.3 × 1000 = 300 unit. del sector II**	0.1
Sector III	0.1	**0.1 × 1000 = 100 unit. del sector III**	0.3

La matriu **C** representa el consum d'una economia i en aquest cas serà:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Si la demanda total de consumidors és donada pel vector (d_1, d_2, d_3) essent d_i la demanda que els consumidors fan del sector $i = 1, 2, 3$, aleshores la quantitat produïda en l'economia, (x_1, x_2, x_3), satisfà l'equació següent:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

a) Si en una economia la demanda final és $d_1 = 50$, $d_2 = 30$ i $d_3 = 20$ es demana el nivell de producció (x_1, x_2, x_3) necessari per a cobrir aquesta demanda.

b) Si el nivell de producció és $x_1 = 4350$, $x_2 = 3480$ i $x_3 = 1958$, quina serà la demanda que es pot cobrir?

Per a fer amb programari

12. Calculeu, utilitzant les propietats dels determinants, el valor del determinant associat a la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$.

13. Donat el punt $P(-1, 0, 3)$ i el vector $\mathbf{v} = (2, -1, 4)$, es demana:

a) Equació de la recta r definida per P i $\mathbf{v}$ en les seves diferents formes.

b) Trobar les coordenades que falten a $Q(x, y, -3)$ perquè aquest punt pertanyi a r.

14. Donat el punt $P(-2, 1, 1)$ i els vectors $\mathbf{u} = (3, -1, 2)$ i $\mathbf{v} = (2, -2, 1)$, es demana:

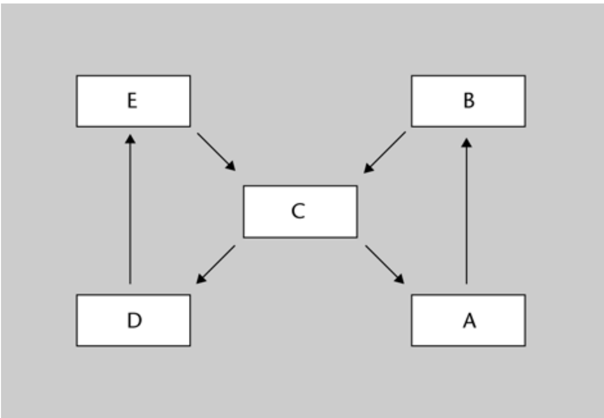
a) Equació general del pla π que passa per P i conté les direccions $\mathbf{u}$ i v.

b) Trobar les coordenades que falten a $Q(x, -3, 0)$ perquè aquest punt pertanyi a π.

Per a fer amb programari

15. El graf següent mostra els enllaços directes existents entre cinc llocs web pertanyents a diverses companyies dedicades al desenvolupament de programari de simulació:

Figura 14



a) Representeu matricialment la informació que proporciona el graf anterior sobre enllaços directes utilitzant per a això una matriu de zeros i uns, *i. e.*: l'element $(\mathbf{M})_{ij}$ serà 1 si existeix un enllaç directe entre la companyia que ocupa la fila i i la companyia que ocupa la columna j (amb i diferent de j), essent 0 en cas contrari.

b) Representeu matricialment la informació que proporciona el graf anterior sobre enllaços no directes separats per un únic lloc web (per exemple, hi ha un enllaç d'aquest tipus entre els llocs A i C, atès que des de A es pot arribar a C passant per B).

c) Calculeu $\mathbf{M}^2$. Què observeu?

d) Calculeu $\mathbf{M} + \mathbf{M}^2$ i interpreteu el resultat.

Per a fer amb programari

16. Una manera elemental de codificar un missatge de text consisteix a assignar a cada lletra de l'abecedari un nombre. Per exemple, utilitzant l'assignació A = 01, B = 02, ..., Z = 27, espai en blanc = 28, el missatge "mañana día D" es codificaria (no tenint en compte l'accentuació i les majúscules) com a: "13 01 15 01 14 01 28 04 09 01 28 04". La successió anterior es pot escriure en forma matricial, completant amb espais en blanc (valor 28) si fos necessari.

a) Escriviu una matriu que representi la seqüència anterior. Per què creieu que a partir d'aquesta matriu pot resultar relativament senzill desxifrar el text original?

b) Multipliqueu la matriu anterior per una segona matriu (matriu de codificació-descodificació, que en general no pot tenir menys files que columnes i ha de tenir rang màxim). Creieu que ara serà més difícil obtenir el text original a partir de la matriu resultant (sense conèixer la matriu de codificació-descodificació)?

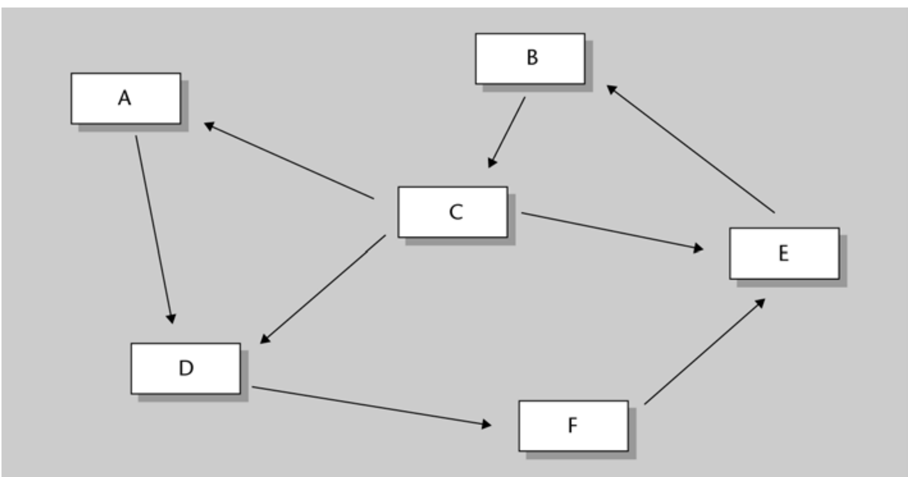
Per a fer amb programari

17. Donats els conjunts de vectors $B = \{(0, 1, -2), (5, -7, 4), (6, 3, 5)\}$ i $A = \{(1, 1, -2), (-5, -1, 2), (7, 0, -5)\}$ de $\mathbb{R}^3$:

a) Comproveu que B i A són bases de $\mathbb{R}^3$ i calculeu les coordenades del vector $v = (2, 1, -1)$ a B i a A, respectivament.

b) Calculeu la matriu del canvi de base de B a A i comproveu la coherència del resultat del punt a).

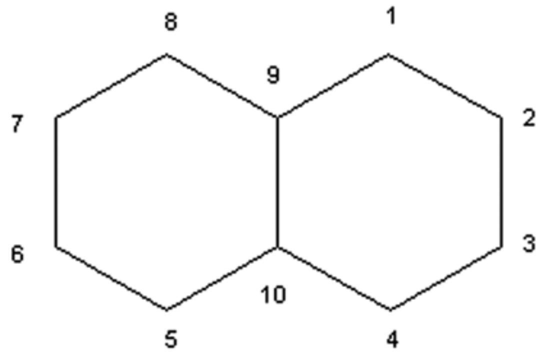
18. El graf següent mostra els enllaços directes existents entre sis llocs web pertanyents a diverses companyies dedicades al desenvolupament de programari matemàtic:



a) Representeu matricialment la informació que proporciona el graf anterior sobre enllaços directes utilitzant per a això una matriu **M** de zeros i uns, és a dir: l'element $(M)_{ij}$ serà 1 si existeix un enllaç directe entre la companyia que ocupa la fila *i*-èsima i la companyia que ocupa la columna *j*-èsima (amb *i* diferent de *j*), essent 0 en cas contrari.

b) Trobeu, fent ús de la matriu **M**, la matriu **N** que representa els enllaços de fins a dues connexions –és a dir, enllaços directes o d'una o dues connexions–, entre els llocs web. Interpreteu la matriu **N** resultant.

19. Considereu el graf associa a la molècula del naftalè:



a) Representeu matricialment la informació que proporciona el graf anterior utilitzant per a això una matriu de zeros i uns.
b) Indiqueu la dimensió de la matriu.
c) Calculeu les matrius transposada i inversa, i el determinant de la matriu.
d) Què podeu dir d'$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$? I d'$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$? A partir del que trobeu, podríeu assegurar que el producte de matrius és commutatiu?

Solucionari

Exemple introductori

Recordem que la taula o matriu de canvi d'estats era:

	Avui (dia *n*)		
Demà (dia *n* + 1)	**Estat A**	**Estat B**	**Estat C**
Estat A	3/4	1/2	1/4
Estat B	1/8	1/4	1/2
Estat C	1/8	1/4	1/4

Podem representar, respectivament, la matriu de canvi d'estats i el vector d'estat inicial com a:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} <\text{--}\ P(\text{A0}) \\ <\text{--}\ P(\text{B0}) \\ <\text{--}\ P(\text{C0}) \end{array}$$

Usarem la notació següent:

Ak = "d'aquí a *k* dies, la LAN estarà en estat *A*"
Bk = "d'aquí a *k* dies, la LAN estarà en estat *B*"
Ck = "d'aquí a *k* dies, la LAN estarà en estat *C*"

Per teoria de la probabilitat (unió d'esdeveniments disjunts i probabilitat condicionada), sabem que:

$$P(\text{A1}) = P([\text{A0} \cap \text{A1}] \cup [\text{B0} \cap \text{A1}] \cup [\text{C0} \cap \text{A1}]) =$$
$$= P([\text{A0} \cap \text{A1}]) + P([\text{B0} \cap \text{A1}]) + P([\text{C0} \cap \text{A1}]) =$$
$$= P(\text{A1} \mid \text{A0}) \cdot P(\text{A0}) + P(\text{A1} \mid \text{B0}) \cdot P(\text{B0}) + P(\text{A1} \mid \text{C0}) \cdot P(\text{C0}) =$$
$$= M_{11} \cdot v_1 + M_{12} \cdot v_2 + M_{13} \cdot v_3$$

Anàlogament:

$$P(\text{B1}) = M_{21} \cdot v_1 + M_{22} \cdot v_2 + M_{23} \cdot v_3$$
$$P(\text{C1}) = M_{31} \cdot v_1 + M_{32} \cdot v_2 + M_{33} \cdot v_3$$

En altres paraules, si denotem per $\mathbf{X}_k$ el vector que conté les probabilitats que la LAN estigui en estat *A*, *B* o *C* després de *k* dies, tindrem que:

$$\mathbf{X1} = \begin{pmatrix} P(\text{A1}) \\ P(\text{A2}) \\ P(\text{A3}) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.375 \\ 0.375 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

És a dir:

En general, es pot comprovar que: $X_k = \mathbf{M}^k \cdot \mathbf{v}$, la qual cosa ens permet respondre la resta de preguntes del primer bloc:

$$X_2 := \mathbf{M}^2 \cdot \mathbf{v} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0.531 \\ 0.266 \\ 0.203 \end{pmatrix} \begin{matrix} <\!-\!- P(\text{A2}) \\ <\!-\!- P(\text{B2}) \\ <\!-\!- P(\text{C2}) \end{matrix}$$

$$X_7 := M^7 \cdot v \qquad X_7 = \begin{pmatrix} 0.608 \\ 0.218 \\ 0.174 \end{pmatrix} \begin{matrix} <\!-\!- P(\text{A7}) \\ <\!-\!- P(\text{B7}) \\ <\!-\!- P(\text{C7}) \end{matrix}$$

Concloem, per tant, que la probabilitat que la LAN estigui funcionant correctament després d'un, dos i set dies és, respectivament, 0.375, 0.531 i 0.608.

Exercicis d'autoavaluació

1.

a) El conjunt de vectors {(–2, 3, 0), (3, –1, 2), (–1, 5, 2)} són linealment dependents, ja que:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{A}| = 0$$

Per tant, no poden ser base de $\mathbb{R}^3$.

b) El conjunt de vectors {(–1,2,1), (2,4,0), (5,1,1)} són linealment independents, ja que:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{A}| = -26$$

Per tant, atès que són tres vectors linealment independents, constitueixen una base de $\mathbb{R}^3$.

2.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^t, \text{ on } A_{ij} \text{ és l'adjunt de l'element } a_{ij}.$$

Com que $\det(\mathbf{A}) = 6 \neq 0$, existeix la matriu inversa.

$$Adj(\mathbf{A})=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -3\\ -1 & 5 & 1\\ 4 & -2 & 2\end{pmatrix}$$ i, per tant:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3 & 3 & -3\\ -1 & 5 & 1\\ 4 & -2 & 2\end{pmatrix}^t=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3 & -1 & 4\\ 3 & 5 & -2\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/6 & -1/6 & 4/6\\ 3/6 & 5/6 & -2/6\\ -3/6 & 1/6 & 2/6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1/2 & -1/6 & 2/3\\ 1/2 & 5/6 & -1/3\\ -1/2 & 1/6 & 1/3\end{pmatrix}$$

3.

$$\mathbf{A}^2=\begin{pmatrix}9 & -8 & 4\\ 4 & -3 & 2\\ -8 & 8 & -3\end{pmatrix}$$ i

$$\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}=\begin{pmatrix}9 & -8 & 4\\ 4 & -3 & 2\\ -8 & 8 & -3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-10 & -8+8 & 4-4\\ 4-4 & -3+2 & 2-2\\ -8+8 & 8-8 & -3+2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=-\mathbf{I}_3$$

4. Perquè els vectors siguin linealment independents, el determinant format per aquests ha de ser no nul.

Sigui $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a & 1 & 2a\\ 1 & a & 1\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

El seu determinant val: det(**A**) = $2a - 2 + 4a^2$.

Els valors de a que anul·len el determinant anterior són:

$a=\frac{1}{2}$ i $a=-1$.

Això implica que qualsevol valor de a diferent d'aquests fa que els vectors siguin linealment independents (i, per tant, base de $\mathbb{R}^3$, ja que són tres vectors).

5. Primer hem de comprovar que A és una matriu regular (invertible). Per a això, calculem el seu determinant i comprovem que no val 0:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=2-3=-1\neq 0$$

Primer hem d'aïllar **X** en l'expressió matricial anterior, per a la qual cosa hem de multiplicar per $\mathbf{A}^{-1}$ **per la dreta** tots dos membres de l'equació, de manera que ens quedarà.

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

Ara procedim a calcular la inversa de **A** i el producte $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

6. La inversa existeix si el determinant de la matriu és diferent de 0.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a(a^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{o} \quad a = \pm 2$$

per tant, la inversa existirà quan a sigui diferent de 0, 2 i –2.

Formem la matriu dels adjunts: $\begin{pmatrix} a^2-4 & 2-a & 2-a \\ 0 & a^2 & -2a \\ 0 & -2a & a^2 \end{pmatrix}$

Transposem: $\begin{pmatrix} a^2-4 & 0 & 0 \\ 2-a & a^2 & -2a \\ 2-a & -2a & a^2 \end{pmatrix}$

I dividim pel determinant de la matriu: $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a(2+a)} & \frac{a}{a^2-4} & \frac{-2}{a^2-4} \\ -\frac{1}{a(2+a)} & \frac{-2}{a^2-4} & \frac{a}{a^2-4} \end{pmatrix}$

7. La dimensió del subespai generat és igual al rang de la matriu formada pels vectors donats.

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 2 \;\text{ i, per tant, la dimensió del subespai és 2.}$$

Com que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, tenim que els vectors que proporcionen aquest menor, (1, 2, 0) i (1, 0, 1), són linealment independents i, per tant, formen una base del subespai.

Perquè $(4, 3, k) \in \langle(1,2,0),(1,0,1)\rangle$ aquest vector ha de ser linealment dependent amb els vectors de la base del subespai, això és el determinant:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} = 0$, això és $5 - 2k = 0$ i per tant $k = 5/2$.

8.

a)

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ i, per tant, els dos conjunts de vectors són linealment independents i per ser $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, concloem que els dos conjunts són base de $\mathbb{R}^3$.

Les coordenades de **v** a B són:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

I les coordenades de **v** a A són:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Els càlculs poden ser comprovats amb programari.

b) La matriu del canvi de base de B a A és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalment comprovem utilitzant aquesta matriu els resultats de a), ja que el canvi de coordenades del vector que té coordenades (1/2, –1/4, 1/4) a B, ha de proporcionar les coordenades (1/2, 1/2, 1/2) a A, en efecte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

9.

a) V **b)** V **c)** V **d)** F **e)** V **f)** V

10.

a) En primer lloc comprovem que $B_1 \subset W$. Només cal comprovar que els dos vectors verifiquen l'equació que determina $W : x + y + z = 0$

$$-1+0+1=0 \Rightarrow (-1,0,1) \in W$$
$$-1+3+(-2)=0 \Rightarrow (-1,3,-2) \in W$$

Ara comprovem que el rang de la matriu formada pels dos vectors és màxim:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Efectivament:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow -3$$

Per tant, els dos vectors són linealment independents.

A més a més, són generadors, perquè un vector (x, y, z) tal que $x + y + z = 0$, compleix $z = -x - y$ i aleshores:

$(x, y, z) = (-x -(1/3)y)\ (-1, 0, 1) + (1/3)y\ (-1,3,-2)$, ja que

$$(-x -(1/3)y)\ (-1, 0, 1) + (1/3)y\ (-1, 3, -2) =$$
$$= (x + (1/3)y - (1/3)y,\ (1/3)y3,\ -x - (1/3)y -2(1/3)y) = (x, y, -x -y) = (x, y, z).$$

b) Calculeu les coordenades de **v** en la base B_1.

En primer lloc comprovem que $(2,-1,-1) \in W$. Efectivament:

$$2+(-1)+(-1)=0 \Rightarrow (2,-1,-1) \in W$$

Ara, el vector **v** en la base que ens demanen serà de la forma (a, b), i les coordenades es calculen resolent el sistema:

$$(2,-1,-1) = a(-1,0,1) + b(-1,3,-2)$$

que correspon a aquest sistema de tres equacions amb dues incògnites:

$$\text{resol}\begin{bmatrix} 2=-a-b \\ -1=3b \\ -1=a-2b \end{bmatrix} \rightarrow \left\{\left\{a=-\frac{5}{3}, b=-\frac{1}{3}\right\}\right\}$$

d'on podem comprovar que $a = -5/3$ i $b = -1/3$; per tant, són els coeficients del nostre vector.

c) Sabem que $B_2 = \{(-1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$ és també base de W, llavors calculeu les coordenades de **v** en B_2.

Ara, el vector **v** en la base donada serà també de la forma (a, b), i resolent el sistema corresponent, de tres equacions amb dues incògnites:

$$(2, -1, -1) = a(-1, 0, 1) + b(0, 1, -1)$$

obtenim:

$$\begin{cases} 2 = -a \\ -1 = b \\ -1 = a - b \end{cases}$$

d'on podem comprovar que $a = -2$ i $b = -1$; per tant, són els coeficients del vector en aquesta base.

d) Calculeu la matriu de canvi de base de B_1 a B_2 i comproveu que és coherent amb el que heu fet en els dos primers apartats.

El que farem és posar els vectors de B_1 com una combinació lineal dels de B_2, així:

$$(-1, 0, 1) = a(-1, 0, 1) + b(0, 1, -1) \Rightarrow a = 1 \quad \text{i} \quad b = 0$$

és a dir, que podem escriure el vector (–1, 0, 1) com (1, 0) en la base B_2:

$$(-1, 3, -2) = a(-1, 0, 1) + b(0, 1, -1) \Rightarrow a = 1 \quad \text{i} \quad b = 3$$

i podem escriure el vector (–1, 3, –2) com (1, 3) en la base B_2.

Així la matriu corresponent al canvi de base de B_1 a B_2, és la matriu que resulta després d'escriure els vectors en columna:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

I, efectivament, si multipliquem el vector **v** escrit en la base B_1 per la matriu **A**, obtenim el vector **v** escrit en la base B_2:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \left[\frac{-5}{3}, \frac{-1}{3}\right] \rightarrow \left[-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right]$$

$$\mathbf{A \cdot v} \rightarrow [-2, -1]$$

11.

a) A partir de l'expressió matricial s'aïlla el vector de producció **X**, de la manera següent:

$$\mathbf{X} = \mathbf{CX} + \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{IX} - \mathbf{CX} = \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{D}$$

i, per tant, la demanda la podem obtenir a partir de la inversa de la matriu **I** – **C**. El vector de producció resultant és $x_1 = 225.9$; $x_2 = 118.5$ i $x_3 = 77.8$.

b) Per a determinar la demanda que es pot satisfer a partir de les quantitats produïdes n'hi ha prou de multiplicar $(\mathbf{I} - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D}$

Atès que **I** – **C** és

$$\mathbf{I} - \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

la demanda que es pot satisfer és

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4350 \\ 3480 \\ 1958 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 391.4 \\ 1370.2 \\ 587.6 \end{pmatrix}$$

12.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & a \\ 1 & c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & c & a \\ 1 & a & b \\ 1 & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = 0$$

O també

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & b+c+a \\ 1 & c & c+a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

13.

a)

Equació vectorial: $(x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(2, -1, 4)$, $k \in \mathbb{R}$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = -k \\ z = 3 + 4k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}$

Equació contínua: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{4}$

b) Perquè Q sigui un punt de r, les seves coordenades han de satisfer l'equació de la recta, *i. e.*:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{(-3)-3}{4}=\frac{-3}{2} \text{ d'on:}$$

$$x + 1 = -3 \Rightarrow x = -4$$

$$y = \frac{3}{2}$$

Així doncs, el punt serà $Q(-4,3/2,-3)$.

14.

a) Equació general: $\begin{vmatrix} x-(-2) & y-1 & z-1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x+2 & y-1 & z-1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ |\mathbf{A}(x, y, z)| = 3 \cdot x + 9 + y - 4 \cdot z$$

Per tant, l'equació general del pla serà: $3x + y - 4z + 9 = 0$

b) Perquè Q pertanyi al pla, ha de verificar l'equació d'aquest, *i. e.*:

$$3(x) + (-3) - 4(0) + 9 = 3x + 6 = 0 \rightarrow x = -2$$

Així doncs, el punt serà $Q(-2, -3, 0)$.

15.

a) La matriu **M** serà (entenent que cada fila correspon a les connexions des d'un lloc web origen cap als llocs web destí):

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}$$

b) Ara, la nova matriu serà:

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}$$

c) Es comprova que $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$, *i. e.*, $\mathbf{M}^2$ ens proporciona els enllaços indirectes per mitjà d'una connexió (*site*):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \mathbf{M}^2 = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \end{array}$$

Es pot comprovar que $\mathbf{M}^3$ proporciona els enllaços indirectes per mitjà de dues connexions, $\mathbf{M}^4$ els enllaços indirectes per mitjà de tres connexions, etc.

d) Calculem $\mathbf{M} + \mathbf{M}^2$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \end{array}$$

La matriu obtinguda representa els enllaços, bé directes o bé per mitjà d'una connexió, entre els llocs web.

16.

a) La matriu buscada pot ser la següent (observeu que no ha de ser necessàriament única, ja que pot variar en dimensions):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 15 & 28 & 28 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

A partir d'aquesta matriu, no resultaria excessivament complicat (per a un especialista) obtenir el text original. Per exemple, el valor 1 es repeteix amb bastant freqüència, cosa que denota que probablement es tracti d'una vocal. Lògicament, com més llarg sigui el text, més fàcil serà detectar patrons en la seqüència que ajudin a la seva descodificació.

b) Podem obtenir una codificació bastant més sofisticada si multipliquem la matriu anterior per una altra matriu (la de codificació-descodificació):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 15 & 28 & 28 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{<-- seqüència original}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ -8 & -2 & 7 & 3 \\ -7 & -2 & -4 & 6 \\ 3 & -7 & 5 & 10 \end{pmatrix} \text{ <-- matriu de codificació-descodificació}$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 93 & 127 & 102 \\ 2 & 94 & 134 \\ -147 & -188 & -153 \\ 117 & 215 & 200 \end{pmatrix} \text{ <-- seqüència codificada}$$

Resulta evident que, a menys que es conegui la matriu de codificació-descodificació emprada, no serà senzill descobrir patrons en la seqüència que proporcionin pistes sobre el text original.

17.

a) Com es pot comprovar en la imatge següent, tant det(**B**) com det(**A**) són no nuls i, per tant, tots dos conjunts de vectors són linealment independents. Amb la Wiris ho podem veure amb els determinants:

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & -7 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix};\ \mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix};$$

$$|\mathrm{B}| \rightarrow -115$$

$$|\mathrm{A}| \rightarrow -20$$

o bé directament amb la comanda conceptual corresponent:

```
linealment_independents?([0,1,−2],[5,−7,4],[6,3,5]) → cert
linealment_independents?([1,1,−2],[−5,−1,2],[7,0,−5]) → cert
```

A més a més, és clar que dim $\mathbb{R}^3 = 3$ i, per tant, **A** i **B** són base de $\mathbb{R}^3$.

La imatge següent mostra com es poden trobar les coordenades de **v** a **B** i a **A** respectivament, fent servir la idea de matriu inversa

$$\mathrm{v}=[2,1,-1] \rightarrow [2,1,-1]$$

$$\mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{v} \rightarrow \left[\frac{152}{115},\frac{16}{115},\frac{5}{23}\right]$$

$$\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{v} \rightarrow \left[\frac{2}{5},-\frac{3}{5},-\frac{1}{5}\right]$$

Però amb la Wiris es poden resoldre equacions que resulten d'igualar un vector a 0 i, per tant, ho podríem fer aplicant directament l'enunciat:

$$\mathrm{B}=\{[0,1,-2],[5,-7,4],[6,3,5]\};$$

$$\mathrm{resol}(\mathrm{v}-\mathrm{x}\cdot\mathrm{B}_1-\mathrm{y}\cdot\mathrm{B}_2-\mathrm{z}\cdot\mathrm{B}_3) \rightarrow \left\{\left\{\mathrm{x}=\frac{152}{115},\mathrm{y}=\frac{16}{115},\mathrm{z}=\frac{5}{23}\right\}\right\}$$

b) La matriu **CB** del canvi de base de **B** a **A** és:

$$\mathbf{CB}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{13}{2} & -\frac{8}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{23}{5} \\ 0 & 2 & -\frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

Finalment, comprovem, utilitzant aquesta matriu **CB** els resultats de a), ja que el canvi de coordenades del vector que té coordenades (152/115, 16/115, 5/23) a **B**, ha de proporcionar les coordenades (2/5, –3/5, –1/5) a **A**. Recordeu que amb la Wiris es poden posar els vectors "horitzontals" i el programa ja els entén "verticals", si escau. En efecte, es compleix el que hem dit:

$$\mathbf{CB}\cdot[\frac{152}{115},\frac{16}{115},\frac{5}{23}]==[\frac{2}{5},\frac{-3}{5},\frac{-1}{5}]? \rightarrow \text{cert}$$

18.

a) La matriu **M** serà (entenent que cada fila correspon a les connexions des d'un lloc web origen cap als llocs web destinació):

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \mathbf{M}= & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix}$$

b) Segons s'explica en l'exercici d'autoavaluació 14, pàg. 65, la matriu **N** que ens demanen serà **N**3 = **M** + $\mathbf{M}^2$ + $\mathbf{M}^3$, és a dir:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \mathbf{N3}=\mathbf{M}+\mathbf{M}^2+\mathbf{M}^3 \rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix}$$

Els elements 0 que hi ha a **N** signifiquen que no hi ha enllaç directe, ni mitjançant una connexió ni mitjançant dues. Els elements 1 signifiquen que hi ha un únic enllaç (el qual serà directe o mitjançant una connexió o mitjançant dues connexions). Finalment, els elements 2 indiquen que es pot fer l'enllaç de dues maneres diferents (per exemple, un amb una connexió i l'altre amb dues, etc.). Cal observar també que, tot i que el graf inicial presenta molt pocs enllaços directes, en considerar les connexions fins a ordre 2 ens adonem que gairebé tots els webs estan a una "distància" de tres clics de ratolí.

19. a), **b)** i **c)**: La dimensió de **M** és 10 × 10 (10 files per 10 columnes):

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&0&0&0&1&0\end{pmatrix};$$

$$M^T \rightarrow \begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}0&\frac{2}{3}&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0\\ \frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0&\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}\\ 0&\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}&0\\ -\frac{2}{3}&0&\frac{2}{3}&0&0&-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}&0&0&\frac{2}{3}&0&-\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}\\ 0&\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}&0\\ -\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0&\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\\ 0&-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&0\\ \frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}&0&0&-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\ 0&-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}$$

Amb l'ajuda de la calculadora Wiris trobem el determinant de la matriu:

$$|M| \rightarrow -9$$

d)

$$M \cdot M^{-1} \rightarrow 1$$
$$M^{-1} \cdot M \rightarrow 1$$

El producte de matrius NO és commutatiu, malgrat que, en aquest cas particular de l'exercici, sí ho sigui.

Glossari

adjunt de l'element a_{ij} d'una matriu quadrada *m* Determinant menor complementari de l'element a_{ij} amb el signe $(-1)^{i+j}$ on i, j són els índexs de la fila i la columna que ocupa l'element.

base d'un espai (o un subespai) vectorial *f* Conjunt de vectors linealment independents, tals que tot vector de l'espai (o el subespai) és combinació lineal d'aquests.

base ortogonal *f* Base els vectors de la qual, presos dos a dos, són ortogonals entre ells.

base ortonormal *f* Base ortogonal que, a més, està composta per vectors unitaris.

determinant *m* Donada una matriu quadrada, el determinant és un nombre que es calcula a partir dels seus elements i que proporciona informació sobre la independència lineal de les seves files (i de les seves columnes).

dimensió d'un espai (o un subespai) vectorial *f* Nombre màxim de vectors linealment independents que conté aquest espai i que és igual al nombre de vectors de qualsevol base de l'espai (o subespai).

espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ *m* Conjunt dotat d'una operació interna que rep el nom de suma i una multiplicació per escalars reals amb certes propietats específiques.

generadors d'un espai (o subespai) vectorial *m* Tot conjunt de vectors tals que tot vector de l'espai (o subespai) es pot posar com a combinació lineal del conjunt de generadors.

independència lineal de vectors *f* Donat un conjunt $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ de vectors, és linealment independent si l'equació $k_1\mathbf{v}_1 + ... + k_k\mathbf{v}_k = 0$ implica $k_1 = ... = k_k = 0$. En cas contrari diem que són linealment dependents.

matriu *f* Taula de nombres en forma de n files i m columnes. Això serà una matriu $n \times m$.

matriu inversa *f* Matriu que presenten les matrius quadrades que tenen determinant diferent de zero. El seu producte amb la matriu donada, tant per l'esquerra com per la dreta, és la matriu identitat.

menor *adj* Donada una matriu, s'anomena *menor* o *determinant menor* qualsevol determinant de la matriu quadrada que es formi amb els elements de la matriu corresponents a k files i k columnes, suprimint les restants. Les files i columnes no han de coincidir necessàriament.

menor complementari *adj* Donada una matriu quadrada, anomenem menor complementari d'un element a_{ij} el determinant menor que es forma suprimint la fila i i la columna j.

mòdul o norma d'un vector *m* Longitud d'un vector. S'obté en calcular l'arrel quadrada del producte escalar del vector per si mateix.

rang d'un conjunt de vectors *m* Nombre màxim de vectors linealment independents que conté.

subespai vectorial *m* Subconjunt d'un espai vectorial que té estructura d'espai vectorial.

subespai vectorial generat *m* Donat un conjunt de vectors $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$, el subespai que genera és el conjunt de tots els vectors que són combinació lineal dels vectors del conjunt.

vector *m* Anomenem vectors els elements d'un espai vectorial. Els vectors de l'espai vectorial numèric n-dimensional estan formats per una matriu d'una sola columna (o una sola fila) de n elements.

vector unitari *m* Tot vector el mòdul del qual sigui 1.

vectors ortogonals *m pl* Dos vectors són ortogonals si el seu producte escalar val 0.

Bibliografia

Bibliografia bàsica

Anton, H. (2002). *Introducción al Álgebra Lineal*. Ed. Limusa Wiley.
Llibre complet que tracta amb profunditat els conceptes desenvolupats en aquest mòdul. Inclou bastants demostracions, exemples i activitats resoltes.

González, F.; Villanova, J. (1985). *Curso Práctico de Matemáticas COU*. Edunsa.
Conté bons resums teòrics i abundants exercicis resolts o amb solució.

Lay, M. (1999). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Prentice-Hall.
Llibre complet, especialment orientat a les aplicacions de l'àlgebra lineal en diversos camps.

Vizmanos, J.; Anzola, M. (1995). *Matemáticas I*. Editorial SM.
Explica amb claredat els conceptes i inclou abundants exemples.

Bibliografia complementària

Bermúdez, L. i altres (1995). *Álgebra Lineal*. Ediciones Media.

Fraleigh, J.; Beauregard, R. (1989). *Álgebra Lineal*. Addison-Wesley.

Hernández, E. (1994). *Álgebra y geometría*. Addison-Wesley.

Lipschutz, S. (1992). *Álgebra Lineal*. McGraw-Hill.

Meyer, C. (2004). *Matrix Analysis and Applied Algebra*. <http://matrixanalysis.com>

Porter, G.; Hill, D. (1996). *Interactive Linear Algebra*. Springer-Verlag.

Sydsaeter, K.; Hammond, P. (1996). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Prentice-Hall.