Processos estocàstics

J. M. Aroca
A. Miralles

PID_00167623

Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

Índex

1. Introducció als processos estocàstics

En moltes situacions podem modelar un cert fenomen a través d'una o diverses variables aleatòries. L'ús de variables aleatòries o de vectors aleatoris constitueix la manera de descriure magnituds que mesurem i que estan sotmeses a fluctuacions estadístiques. Per exemple, els errors en una mesura física o la variació en una població de persones. Però es donen també freqüentment casos en què les variables aleatòries no són suficients, és el cas de fenòmens que evolucionen amb el temps. Per exemple, per a poder fer una predicció meteorològica no és suficient disposar de mesures de pressió i temperatura en un punt i un instant donats (el que seria una variable bidimensional), sinó que necessitem aquestes mesures en diferents punts de l'espai i la seva evolució al llarg del temps. És a dir, necessitem representar a través de funcions la informació mesurada i descriure la distribució estadística del conjunt d'aquestes funcions.

1.1. Definició de procés estocàstic

Considerem el següent exemple.

Exemple 1.1 *Un inversor realitza una operació a la borsa que en un dia pot donar dos resultats possibles. Les accions poden pujar amb probabilitat p i en aquest cas té un benefici α. Alternativament, les accions poden baixar amb probabilitat $1-p$ i la seva pèrdua és β. L'inversor realitza aquesta operació cada dia. Els seus guanys durant un dia donat constitueixen una variable aleatòria, però a l'inversor el que li interessa és el conjunt de resultats al llarg del temps. El primer que podem analitzar és l'evolució temporal de les pujades i baixades. Els dos possibles resultats en un dia qualsevol els denotem A (esdeveniment "pujada") i B (esdeveniment "baixada"). Anomenem R_1 el resultat del primer dia, R_2 el resultat del segon dia, etc. Així, l'evolució dinàmica de les accions és representada per la seqüència $\mathcal{R} = R_1R_2R_3\cdots$, on cada R_i pot valer A o B. Una altra magnitud d'interès és el guany acumulat fins al dia i, X_i. L'evolució econòmica de l'operació realitzada queda representada per la seqüència $\mathcal{X} = [X_1,X_2,X_3,\cdots]$.*

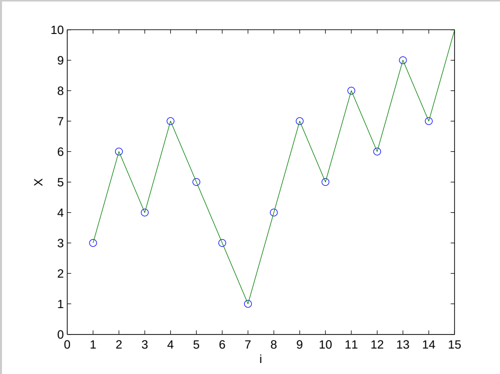
Per fixar idees, prenem $\alpha = 3$ i $\beta = 2$. Si els 15 primers dies tenim

$$\mathcal{R} = AABABBBAABABABA,$$

llavors

$$\mathcal{X} = [3,6,4,7,5,3,1,4,7,5,8,6,9,7,10].$$

Aquesta evolució és una funció on la variable independent és el temps i i la variable dependent és X, i X_i és el guany en l'instant i. La gràfica mostra aquesta evolució.



Evolució del guany de l'inversor

Moltes qüestions que ens podem plantejar estan relacionades amb com aquestes variables aleatòries evolucionen al llarg del temps. Per exemple:

- *Els guanys, tendeixen a augmentar o a disminuir?*
- *Partint d'un capital donat, quin és el temps mitjà fins que aquest s'ha duplicat?*
- *Sabent que el dia i $X_i = C$, quina és la probabilitat que el dia $j > i$ X_j prengui un cert valor o estigui en un interval donat de valors?*

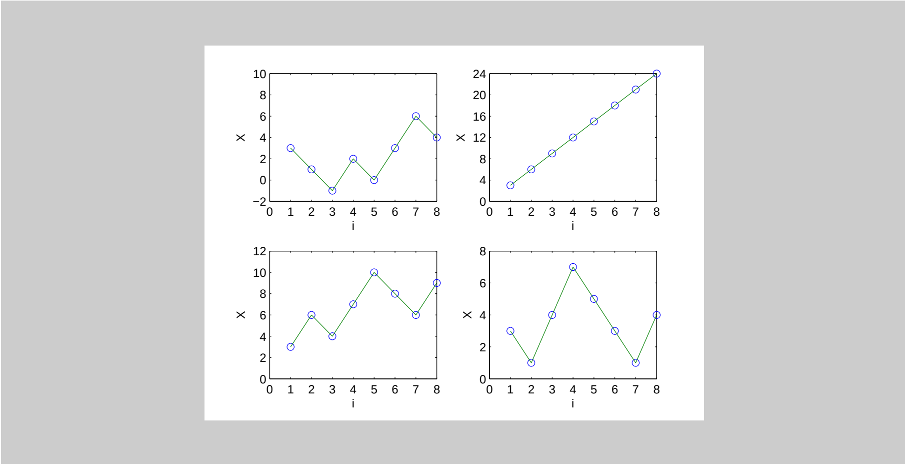
En aquest exemple l'experiència aleatòria consisteix a fer l'operació borsària cada dia. El resultat d'aquesta experiència és el conjunt de resultats diaris, és a dir, l'evolució temporal dels guanys. Aquesta gràfica o funció és un exemple del que entenem per procés estocàstic.

Definició 1.1 *Un procés estocàstic és l'assignació d'una funció $X(t)$ a cada resultat d'un experiment aleatori.*

Podem utilitzar el nom alternatiu de *procés aleatori* o *funció aleatòria*.

De manera general, fixarem algunes característiques d'aquestes funcions. Considerarem que $X(t)$ pren valors reals i interpretem la variable independent t com a temps. Cal tenir en compte, però, que no sempre s'analitza l'evolució de X en el temps. Per exemple, en l'estudi de la distribució de matèria en l'univers, caldran funcions $X(x,y,z)$ que depenen de la posició en l'espai tridimensional. Un sistema de processament d'imatge requereix una descripció estadística de les possibles imatges, per tant, un procés $X(x,y)$ on (x,y) són coordenades rectangulars sobre la imatge. Un sistema d'anàlisi meteorològica pot utilitzar $X(t,z)$ la pressió a altura z en l'instant t, etc.

Donat un procés estocàstic, cada vegada que es fa l'experiment aleatori s'obté una funció diferent. En ocasions, voldrem referir-nos a les propietats d'algunes d'aquestes funcions. En l'exemple de l'inversor, en fer 4 vegades l'experiment obtenim 4 funcions que podrien ser les de la següent figura.

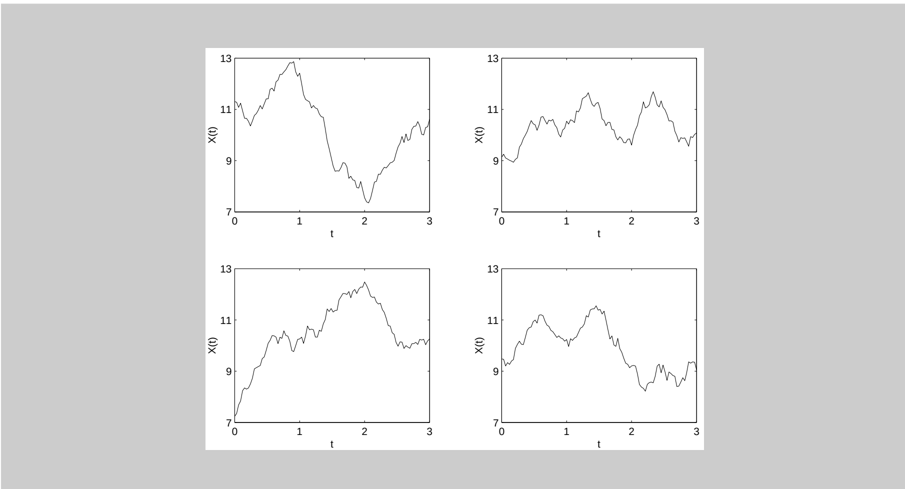


Quatre possibles resultats en l'evolució del guany (sobre un interval de 8 dies)

Cada una d'aquestes funcions és una "realització" del procés. Aquestes són les funcions que tenim en la pràctica.

Definició 1.2 *Les funcions que s'obtenen en fer l'experiment aleatori s'anomenen realitzacions del procés estocàstic.*

Així, el terme *realització* fa referència a cadascuna de les funcions que s'obtenen com a resultat d'un experiment aleatori, mentre que el terme *procés estocàstic* denota la col·lectivitat estadística de possibles funcions resultants. La següent figura mostra diverses realitzacions d'un mateix procés.

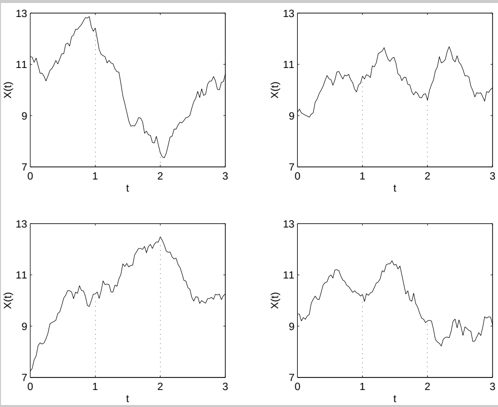


4 realitzacions d'un procés $X(t)$

Des del punt de vista matemàtic,, el tractament dels processos estocàstics presenta algunes dificultats. En el cas de variables aleatòries podem realitzar mitjanes estadístiques perquè disposem dels instruments matemàtics de la suma o la integració. Però ara, prosseguir amb aquesta analogia ens obligaria a realitzar algun tipus d'integració sobre el conjunt de totes les possibles funcions. Això implicaria haver de descriure aquest conjunt de possibles funcions i requeriria construir una integració sobre aquest conjunt, cosa que el càlcul ordinari no ens permet. Tot i que aquestes dicultats es poden superar en alguns casos, el procediment habitual és no abandonar el cas dels vectors aleatoris i utilitzar el següent fet essencial:

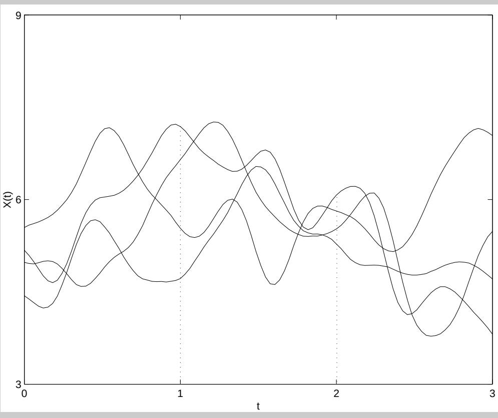
Si fixem un valor de t, $X(t)$ és una variable aleatòria unidimensional.

Per exemple, en el procés representat a l'anterior figura podem fixar l'atenció en el valor $t = 1$. Cada vegada que realitzem l'experiència aleatòria s'obté una funció, però ara ens fixem en el que val aquesta funció a $t = 1$. Es tracta del valor de $X(1)$, que per cada realització és un nombre. Aquest valor és l'altura de la funció sobre $t = 1$. Com es veu a la figura següent, cada realització ens dóna un valor diferent per a aquesta altura. $X(1)$ és, doncs, una variable aleatòria ordinària. Naturalment, podem fer aquesta anàlisi per a un instant de temps qualsevol. A la figura es mostren també les altures sobre $t = 2$. Ara $X(2)$ és una altra variable aleatòria.



Les altures corresponents a $t = 1$ i $t = 2$

Així, pensarem en el procés estocàstic $X(t)$ com en una variable aleatòria que depèn d'un índex t.



4 realitzacions i els valors que van prenent $X(1)$ i $X(2)$

En el següent tema s'especificarà de forma més concreta l'abast d'aquest punt de vista i la forma com s'utilitza en la pràctica.

1.2. Processos a temps continu i a temps discret

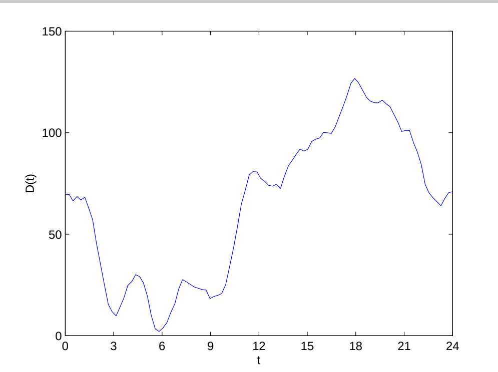
Tenim una primera classificació dels processos estocàstics segons els valors que pot prendre la variable independent t.

Un procés estocàstic $X(t)$ és una variable aleatòria que depèn d'un índex continu o discret t.

A l'exemple de l'inversor, el procés el constitueix la successió de resultats en dies consecutius. Així, en aquest cas, el temps es representa amb un paràmetre discret i. Les gràfiques d'aquests processos consisteixen en una successió de punts encara que, normalment, s'uneixen amb línies rectes tal com hem fet a la primera figura.

Definició 1.3 *Un procés estocàstic a temps discret és aquell on la variable t pren un conjunt finit o infinit numerable de valors reals. Per exemple, $t \in \mathbb{Z}$.*

Exemple 1.2 *Una central elèctrica subministra energia a una població. La demanda d'electricitat està sotmesa a fluctuacions, ja que és la suma de les demandes de molts petits consumidors. També hi ha factors com l'hora (hi ha més consum a la tarda, quan enfosqueix) i les variacions del temps atmosfèric (si ve un cop de fred es pot disparar el consum per l'ús de la calefacció). Si representem el temps al llarg d'un dia per la variable t ($0 \leq t < 24$, en hores), la demanda constitueix un procés estocàstic $D(t)$.*



Evolució de la demanda energètica al llarg d'un dia

En aquest cas és necessari considerar t com una variable contínua, és a dir, que pren qualsevol valor real, ja que la central ha de poder respondre de manera ràpida a les variacions que es van produint en la demanda.

Definició 1.4 *Un procés estocàstic a temps continu és aquell on la variable t varia sobre tot un interval real. Per exemple, $t \in \mathbb{R}$, $t \in [0,\infty)$ o $t \in [a,b]$.*

El cas de temps discret és més senzill de tractar, ja que ens remet més directament als vectors aleatoris. En efecte, si t pren només els valors $t_1, t_2, \cdots$, la funció resultant queda especificada per $X(t_1), X(t_2), \cdots$ i això constitueix un conjunt de variables aleatòries. On és la diferència amb els vectors aleatoris? Per una banda, ara tenim una seqüència d'infinites variables aleatòries, així que no podem tractar-les totes conjuntament sinó en subconjunts finits. Per l'altra, en un vector aleatori l'índex que numera les variables és purament una etiqueta sense un significat especial, mentre que en el procés aquest índex té el significat de posició temporal i hi té un paper més dinàmic. Per exemple, podem esperar una correlació més forta entre $X(t_1)$ i $X(t_2)$ que entre $X(t_1)$ i $X(t_{50})$.

Tot i així, els processos a temps continu constitueixen la classe més general i la nostra descripció general s'encaminarà a aquest tipus. Podem connectar els dos tipus si pensem en processos a temps discret que aproximin processos a temps continu (a través d'un mostreig, potser) o en processos a temps continu com a pas al límit de processos a temps discret.

1.3. Processos d'estat continu i d'estat discret

Aquesta classificació correspon als valors que pot prendre $X(t)$. Com que a t fixat $X(t)$ és una variable aleatòria, el procés s'haurà de tractar de manera diferent segons aquesta variable sigui discreta o contínua. Parlarem de processos d'estat discret o d'estat continu per referir-nos a aquests casos.

Exemple 1.3 *Un servidor d'Internet va rebent visites que podem considerar que es produeixen en instants aleatoris. Considerem* $0 \leq t \leq 24$ *(expressat en hores) i* $X(t)$ *donat per un comptador de visites (*$X(0) = 0$ *i s'incrementa una unitat cada vegada que hi ha una visita). Clarament, per a t arbitrari fixat,* $X(t)$ *només pot valer* $0,1,2,3,\ldots$ *Així tenim un procés d'estat discret (i a temps continu, ja que el cmptador està definit en qualsevol instant).*

Definició 1.5 *Un procés estocàstic d'estat discret és aquell on la variable aleatòria* $X(t)$ *a temps fixat és una variable discreta.*

Exemple 1.4 *Mesurem de manera precisa el nivel de soroll* $X(t)$ *en un circuit electrònic en funció del temps* t*. El procés és d'estat continu ja que aquesta intensitat és un nombre real arbitrari (dins d'un cert interval). Tal com el plantegem, el procés també és a temps continu, però el podríem fer a temps discrets si féssim les mesures separades per un cert interval de temps, per exemple, cada* 0.01 *segons.*

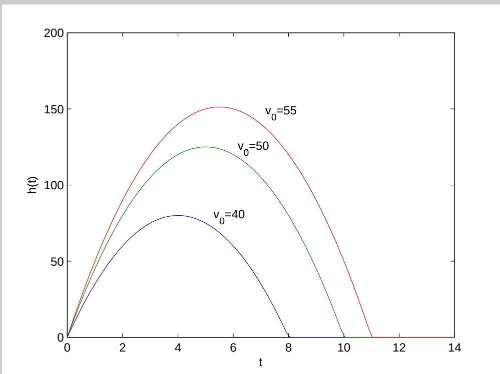
Definició 1.6 *Un procés estocàstic d'estat continu és aquell on la variable aleatòria* $X(t)$ *a temps fixat és una variable contínua.*

1.4. Exemples de processos estocàstics

En principi, en un procés aleatori no té per què haver-hi relacions de dependència entre les variables $X(t)$ a temps diferents. Això dóna lloc a funcions d'aparença irregular i comportament complicat (des de la perspectiva de l'anàlisi matemàtica). D'altra banda, podem construir processos, de manera un tant artificial, prenent funcions ordinàries i introduint-hi paràmetres aleatoris. Aquests últims exemples, a banda de la seva utilitat pedagògica perquè són fàcilment manipulables, també es poden presentar en la realitat.

1.4.1. Processos representables explícitament en termes de variables aleatòries

Exemple 1.5 *Disparem un projectil verticalment amb velocitat inicial v_0. Sabem, per mecànica newtoniana, que la seva posició (altura) en funció del temps és determinada per $h(t) = v_0 t - \frac{g}{2}t^2$, on $g = 10m/s^2$ és l'acceleració de la gravetat. Suposem que el sistema que impulsa el projectil està sotmès a fluctuacions de manera que v_0 no pren un valor constant i el podem considerar una variable aleatòria. Llavors, cada vegada que disparem el projectil el moviment $h(t)$ és diferent ja que v_0 varia. Per tant, hem de considerar $h(t)$ com un procés estocàstic. A la figura es mostren tres realitzacions d'aquest procés.*



Evolució de l'altura en tres llançaments del projectil

En aquest exemple tot el caràcter aleatori de la funció $h(t)$ es deu a un únic paràmetre v_0, fet que simplifica l'estudi d'aquest procés. A continuació donem una formulació general d'aquest tipus de processos.

Per simplicitat, utilitzarem un màxim de dos paràmetres aleatoris, tot i que l'extensió a una variable n-dimensional és inmediata. Són processos que es poden representar en la forma

$$X(t) = \Phi(t,A,B) \tag{1}$$

on Φ és una funció fixada de tres variables i (A,B) és un vector aleatori bidimensional. En fer l'experiment aleatori, A i B queden determinades i passen a ser paràmetres numèrics que fixen la forma de $X(t)$.

Exemple 1.6 Oscil·lacions aleatòries *Considerem a continuació un procés de la forma $X(t) = V\cos(t-\varphi)$, on V i φ constitueixen un vector aleatori bidimensional. Podria tractar-se del voltatge aplicat a cert circuit. Per tant, estem considerant que l'amplitud i la fase d'aquest voltatge estan sotmesos a fluctuacions estadístiques. Això podria reflectir que aquest circuit rep voltatges d'una col·lectivitat d'usuaris, o està produït per un aparell amb toleràncies àmplies de fabricació, o hi ha un efecte extern (soroll, per exemple) que l'afecta, etc.*

Per fixar més la situació, suposem que V és una variable exponencial de valor mitjà 1, que φ és una variable uniforme a $[0,2\pi]$ i que són independents.

Si fixem un instant donat t, resulta que $X(t)$ és una variable unidimensional que és funció de dues variables. Aquesta és una situació que sabem tractar. Per exemple, per a $t = 0$ tenim la variable $X(0)$. Vegem que podem calcular la seva esperança:

Recordem que una variable aleatòria exponencial de paràmetre λ es denota $Exp(\lambda)$ i té valor mitjà $m = \frac{1}{\lambda}$. A vegades ens referim a aquesta variable com a exponencial de valor mitjà m.

$$E(X(0)) = E(V\cos\varphi) = E(V)E(\cos\varphi)$$

ja que V i $\cos\varphi$ són variables independents. El primer factor val, tal com diu l'enunciat, $E(V) = 1$. El segon el calculem amb el teorema de l'esperança:

Teorema de l'esperança

El teorema de l'esperança diu que, donada una variable aleatòria X, el valor mitjà d'una funció d'aquesta variable $g(X)$ val $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$.

$$E(\cos\varphi) = \int_0^{2\pi} \cos\varphi \frac{1}{2\pi} d\varphi = 0.$$

Així, arribem a la conclusió:

$$E(X(0)) = 0.$$

Aquest resultat es pot entendre si tenim en compte que el procés $X(t)$ consisteix en una oscil·lació amb una fase que és aleatòria i pren valors sobre tot un període amb densitat uniforme. Per tant, hi contribueixen valors positius i negatius amb el mateix pes, i el valor mitjà és nul.

Per completar l'exemple, veiem que podem expressar aquest procés a partir d'unes altres variables aleatòries, fent un canvi adequat. Utilitzant la fórmula

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

resulta

$$X(t) = A\cos t + B\sin t \qquad (3)$$

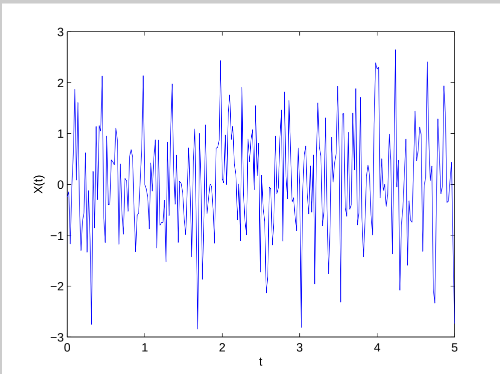
on $A = V\cos\varphi$ i $B = V\sin\varphi$. Llavors (A,B) és un vector aleatori que s'obté del vector (V,φ) amb un canvi de variables. Alguns aspectes d'aquest procés s'estudien millor amb aquesta representació.

1.4.2. Processos amb infinits graus de llibertat aleatoris

Molts processos no es poden expressar a partir d'un nombre finit de paràmetres aleatoris. Això pot suposar que no tinguem una expressió explícita de la funció $X(t)$. Tot i això, en les aplicacions el que importa són mitjanes estadístiques que en els processos més habituals són fàcils de calcular. A vegades podem expressar el procés en termes d'un conjunt numerable de variables aleatòries, cosa que ens dóna un cert caràcter explícit i la possibilitat de fer càlculs de manera anàloga a l'exemple anterior.

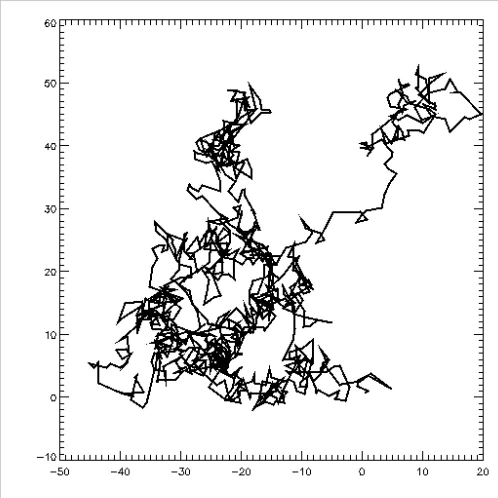
Exemple 1.7 Soroll blanc

Definim un procés on les variables $X(t)$ en instants diferents són independents. A més, per a tot t, la variable $X(t)$ és normal amb $m = 0$ i $\sigma = 1$. El resultat és un procés on les realitzacions són totalment iregulars:



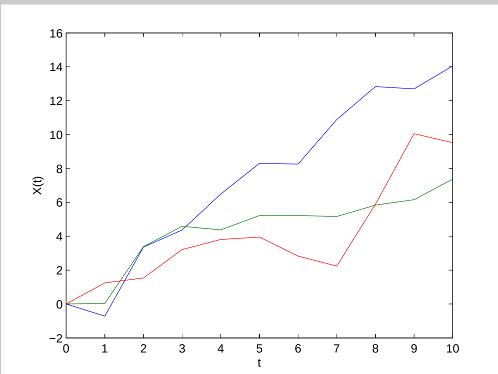
Realització del procés $X(t)$

Exemple 1.8 *El moviment brownià té una importància històrica per les seves aplicacions. El 1827, el botànic Robert Brown observà al microscopi que les partícules de pol·len en suspensió en aigua en repòs realitzaven un moviment molt irregular que semblava inexplicable. Aquestes trajectòries constitueixen un procés estocàstic (en aquest cas a $\mathbb{R}^3$ ja que la trajectòria és $(X(t),Y(t),Z(t))$). L'exemple és particularment rellevant, ja que l'explicació d'aquest moviment són les fluctuacions en els xocs que les mol·lècules d'aigua en agitació tèrmica realitzen contra la partícula. Així, la descripció del fenomen permet verificar de forma indirecta els models moleculars i de mecànica estadística per a descriure la matèria. A la vegada, la descripció matemàtica d'aquest procés és útil com a model d'altres fenòmens i és aplicable en camps com l'enginyeria.*



Simulació del moviment brownià bidimensional

Exemple 1.9 Passeig aleatori *Desenvolupem amb un cert detall un exemple similar al moviment brownià. Una partícula es mou en una dimensió. $X(t)$ representa la seva posició en l'instant t ($t \geq 0$). Partim de $X(0) = x_0$. La partícula es mou amb una velocitat constant que canvia de forma brusca en els instants $t = 1,2,3,\ldots$ Això ho representem dient que el desplaçament de $X(n-1)$ a $X(n)$ és determinat per la variable aleatòria Z_n. Les variables $Z_1,Z_2,\ldots$ són independents i són totes del mateix tipus, per exemple, $N(m,\sigma)$.*



Tres realitzacions del procés $X(t)$ amb $x_0 = 0, m = 1, \sigma = 1.5$

El procés consisteix en una línia poligonal (trams de recta enganxats amb continuïtat en els valors enters de t. Per a $n \in \mathbb{N}$, $X(n) = X(n-1) + Z_n$. Així, per a t enter tenim

$$X(n) = x_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i. \tag{4}$$

Per expressar el procés per a t arbitrari, posem $t = [t] + d(t)$, on $[t]$ és la part entera de t i $d(t) = t - [t]$ la seva part decimal. Llavors podem escriure $X(t)$ explícitament, per a qualsevol $t \geq 0$, com a

$$X(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{[t]} Z_i + d(t)Z_{[t]+1}. \quad (5)$$

(Per exemple, per expressar $X(2.3)$ tenim que $X(2.3) = X(2) + 0.3Z_3$, i $X(2) = X(1) + Z_2 = (X(0) + Z_1) + Z_2 = x_0 + Z_1 + Z_2$.)

Hem arribat a una expressió explícita del procés, en termes de les variables aleatòries Z_n. Ara ens podem plantejar l'estudi d'alguna propietat d'aquest procés. Atès que les funcions expressades en l'equació 5 són aleatòries, apareixen dos tipus de qüestions que és natural plantejar-se. Una és quina és la probabilitat que a la funció $X(t)$ li passi alguna cosa. Una altra és com es comporta $X(t)$ de mitjana. Aquest segon tipus sol tenir més interès i donarà lloc a conceptes bàsics al capítol següent. Ara, a mode d'exemple, donat que la posició en un instant qualsevol és aleatòria, podem calcular el seu valor mitjà. Com que això ho podem fer per a tot instant t, el que obtindrem serà una mena de trajectòria mitjana.

Calculem, doncs, el valor mitjà de la variable $X(t)$ per a qualsevol t fixat:

$$E(X(t)) = E(x_0 + \sum_{i=1}^{[t]} Z_i + d(t)Z_{[t]+1}) = x_0 + \sum_{i=1}^{[t]} E(Z_i) + d(t)E(Z_{[t]+1}) =$$

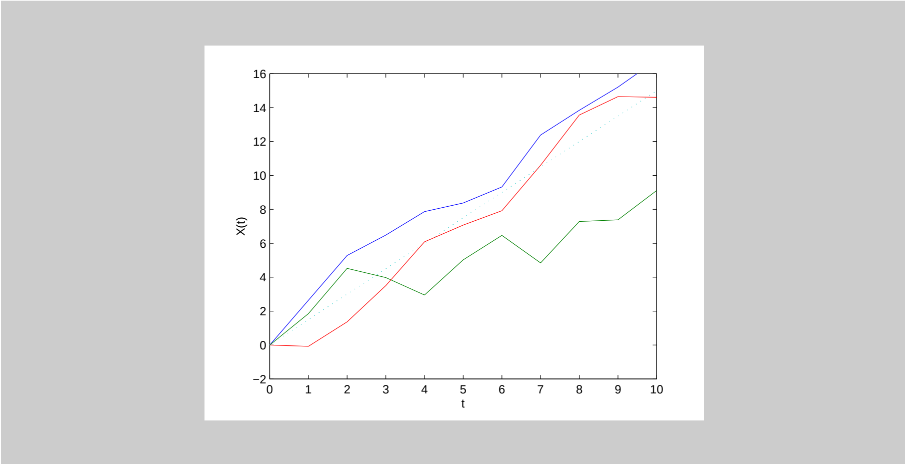
$$x_0 + \sum_{i=1}^{[t]} m + d(t)m = x_0 + [t]m + d(t)m = x_0 + mt.$$

Així, hem demostrat:

$$E(X(t)) = x_0 + mt. \quad (6)$$

Podem interpretar aquest resultat dient que de mitjana es desplaça a velocitat constant m.

La següent gràfica representa tres realitzacions i la recta mitjana $x_0 + mt$.



La recta $x_0 + mt$ (línea puntejada) juntament amb tres realitzacions

2. Caracterització estadística dels processos estocàstics

Les variables aleatòries es descriuen a través d'una funció de probabilitat (cas discret) o d'una funció de densitat (cas continu) que conté tota la informació sobre la distribució estadística de la variable. Després, a través de mitjanes es defineixen paràmetres com l'esperança (valor mitjà) o la variància. En el cas de processos es defineixen magnituds similars, que tenen especial importància perquè la caracterització estadística completa pot ser molt difícil de conèixer en alguns casos pràctics.

En aquest capítol considerarem processos a temps continu $X(t)$ (els processos a temps discret tenen un tractament formalment similar). A diferència del que passa amb variables o vectors aleatoris, no hi ha una funció de densitat del procés en conjunt. La caracterització es fa a través de la següent idea.

Fixats n instants diferents $t_1,t_2,\ldots,t_n$, els valors que hi pren el procés, $X(t_1)$, $X(t_2),\ldots, X(t_n)$, constitueixen un vector aleatori n-dimensional. Com que ja sabem descriure de manera completa l'estadística dels vectors aleatoris, caracteritzarem l'estadística d'un procés estocàstic de la manera següent:

Proposició 2.1 *La distribució probabilística d'un procés estocàstic $X(t)$ queda completament determinada si, per a tot $n \geq 1$ i per a tota elecció dels instants $t_1,t_2,\ldots,t_n$, aleshores coneixem la distribució probabilística dels vectors aleatoris* $(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n))$.

En rigor, hi pot haver processos que no verifiquin aquest resultat. Fora d'aquests casos patològics, els processos d'interès en les aplicacions pràctiques compleixen l'anterior enunciat.

2.1. Funcions de densitat i distribució d'ordre n

La proposició 2.1 ens suggereix parlar de mostra de n instants per referir-nos a la selecció de n valors diferents de t i els valors que hi pren el procés $X(t)$.

Definició 2.1 *Una mostra de mida n ($n = 1,2,\ldots$) consisteix en l'elecció de n instants diferents $t_1,t_2,\ldots,t_n$ i en el vector aleatori associat a ells* $(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n))$.

La distribució estadística d'un procés estocàstic queda determinada si coneixem la distribució de totes les possibles mostres. Això dóna lloc als següents conceptes.

Definició 2.2 *Les funcions de distribució d'ordre n d'un procés estocàstic $X(t)$ són les funcions de distribució dels vectors aleatoris associats a les mostres de mida n. Les denotem $F(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ t_1,t_2,\ldots,t_n)$. Llavors*

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ t_1,t_2,\ldots,t_n) = P(X(t_1) \leq x_1,X(t_2) \leq x_2,\ldots,X(t_n) \leq x_n). \quad (7)$$

Definició 2.3 *Les funcions de densitat d'ordre n d'un procés estocàstic $X(t)$ d'estat continu són les funcions de densitat dels vectors aleatoris associats a les mostres de mida n. Les denotem $f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ t_1,t_2,\ldots,t_n)$. Llavors*

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ t_1,t_2,\ldots,t_n) =$$

$$\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(y_1,y_2,\ldots,y_n;\ t_1,t_2,\ldots,t_n)dy_1dy_2\cdots dy_n. \quad (8)$$

Definició 2.4 *Les funcions de probabilitat d'ordre n d'un procés estocàstic $X(t)$ d'estat discret són les funcions de probabilitat dels vectors aleatoris associats a les mostres de mida n. Les denotem $P(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ t_1,t_2,\ldots,t_n)$. Llavors*

$$P(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ t_1,t_2,\ldots,t_n) = P(X(t_1) = x_1,X(t_2) = x_2,\ldots,X(t_n) = x_n) \quad (9)$$

La distribució estadística d'un procés d'estat continu queda determinada si coneixem les funcions $f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ t_1,t_2,\ldots,t_n)$ per a tots els valors de $t_1,t_2,\ldots,t_n$ i per a tot $n \geq 1$.

La distribució estadística d'un procés d'estat discret queda determinada si coneixem les funcions $P(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ t_1,t_2,\ldots,t_n)$ per a tots els valors de $t_1,t_2,\ldots,t_n$ i per a tot $n \geq 1$.

Hi ha una sèrie de vincles entre aquestes funcions. Si prenem la densitat d'ordre n i calculem la funció de densitat marginal de $k < n$ de les seves variables, el resultat ha de ser la densitat d'ordre k. Tenim, doncs, una jerarquia de funcions vinculades. Per exemple, tenim la densitat d'ordre 1 $f(x;\ t)$ que ens descriu la variable unidimensional $X(t)$ (t fixat), i tenim la densitat d'ordre 2 $f(x_1,x_2;\ t_1,t_2)$ que ens descriu el vector bidimensional $(X(t_1),X(t_2))$. És clar que si en aquest vector calculem la densitat marginal de $X(t_1)$, el resultat ha de ser la corresponent densitat de primer ordre. És a dir:

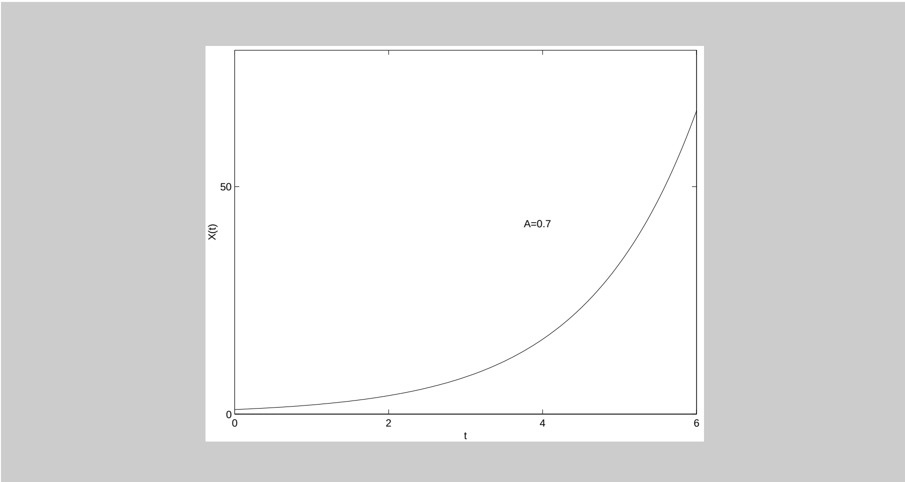
$$f(x_1;\ t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2;\ t_1,t_2)dx_2. \quad (10)$$

Els valors $t_1,t_2,\ldots,t_n$ figuren en aquestes funcions per recordar-nos en quins instants prenem les variables. El que ens interessa en tant que funcions de densitat és la dependència de les x_i. Les funcions de densitat (o de probabilitat) d'ordre n es tracten com les d'un vector n-dimensional qualsevol. Per exemple, la condició de normalització de la densitat de primer ordre és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\ t)dx = 1. \tag{11}$$

L'obtenció d'aquest conjunt de funcions és, en general, una tasca complicada. Afortunadament, en les aplicacions no sempre necessitem tota aquesta informació, sinó que normalment en tenim prou amb les funcions d'ordre baix, per exemple, les de primer i segon ordre. En el cas de processos que depenen explícitament d'una o poques variables aleatòries sol ser fàcil obtenir-les, com mostren els següents exemples.

Exemple 2.1 *Donada la variable aleatòria unidimensional A, uniforme a l'interval* $[0,1]$, *definim el procés* $X(t) = e^{At}, t \geq 0$.



Realització del procés $X(t)$

Com que A varia sobre tot un interval real, e^{At} *per a t fixat, també pot prendre valors sobre tot un interval. Per tant,* $X(t)$ *és un procés d'estat continu. Calculem la seva densitat de primer ordre per il·lustrar les idees anteriors. Farem el càlcul a través de la funció de distribució.*

La funció de densitat de la variable A és:

$$f_A(a) = \begin{cases} 1 & 0 \leq a \leq 1 \\ 0 & altrament \end{cases}$$

i la seva funció de distribució val:

$$F_A(a) = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ a & 0 \leq a < 1 \\ 1 & a \geq 1 \end{cases}$$

Recordem també que $F_A(a) = P(A \leq a)$*. Ara, fixat* t*,* $X(t)$ *pot prendre qualsevol valor a l'interval* $[1,e^t]$*. Si* x *és en aquest interval, la funció de distribució de primer ordre és*

$$F(x;\ t) = P(X(t) \leq x) = P(e^{At} \leq x) = P(A \leq \frac{\ln x}{t}) = F_A(\frac{\ln x}{t}) = \frac{\ln x}{t}.$$

Així podem calcular la funció de densitat de primer ordre derivant l'anterior funció:

$$f(x;\ t) = \frac{d}{dx}F(x;\ t) = \frac{1}{tx}, \qquad 1 \leq x \leq e^t.$$

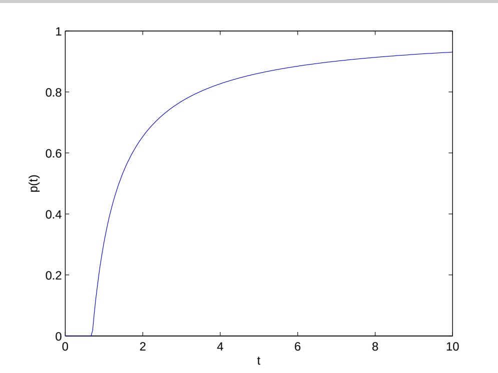
Comprovem la condició de normalització:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\ t)dx = \int_1^{e^t} \frac{1}{tx}dx = \frac{1}{t}\ln x|_1^{e^t} = 1.$$

En aquest tipus de problemes és important manipular amb cura els valors límit i la dependència en els paràmetres temporals. Considerem que un dispositiu s'activa quan $X(t)$ *sobrepassa un cert valor, per exemple, 2. Quina és la probabilitat* $p(t)$ *que en l'instant* t *estigui activat?*

Es tracta de calcular $P(X(t) > 2)$*. El primer que hem de tenir en compte és que el conjunt de valors possibles per a* $X(t)$ *és l'interval* $[1,e^t]$*, que varia amb* t*. Perquè l'anterior probabilitat no sigui nul·la, cal que aquest interval contingui valors majors que 2. Per tant,* $p(t)$ *és diferent de zero a partir del moment en què* $2 < e^t$*. Si això passa,* $P(X(t) > 2) = 1 - P(X(t) \leq 2) = 1 - F(2;\ t) = 1 - \frac{\ln 2}{t}$*. És a dir:*

$$p(X(t) > 2) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \ln 2 \\ 1 - \frac{\ln 2}{t} & t > \ln 2 \end{cases}$$



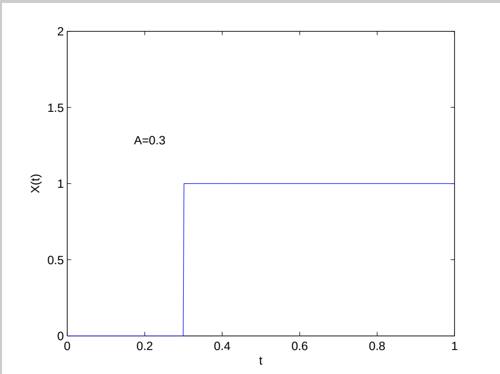
La funció $p(t)$

Exemple 2.2

Com a l'exemple anterior, sigui A una variable uniforme a [0,1]. *Definim ara un nou procés de la forma:*

$$X(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < A \\ 1 & A \le t \le 1 \end{cases}$$

És a dir, X(t) passa bruscament de 0 a 1 en l'instant t = A.



Realització del procés $X(t)$

El procés X(t) és d'estat discret ja que en qualsevol instant només pot prendre els valors 0 o 1. La funció de probabilitat de primer ordre P(n; t) = P(X(t) = n) ens dóna la probalilitat que X(t) valgui n, on n només pot ser 0 o 1. Així, hem de determinar

$$P(0;\ t) = P(X(t){=}0) = P(t < A) = 1 - P(A \le t) = 1 - F_A(t) = 1 - t,$$

$$P(1;\ t) = P(X(t){=}1) = P(A \le t) = F_A(t) = t.$$

És inmediat verificar que aquesta funció està normalitzada: $P(0;\ t) + P(1;\ t) = (1 - t) + t = 1$.

En molts casos pràctics no és possible fer un estudi tan detallat com als exemples anteriors. Molts processos s'analitzen mitjançant alguns paràmetres que els caracteritzen. A continuació definim aquests paràmetres.

2.2. Paràmetres d'un procés estocàstic. Funcions de valor mitjà, autocorrelació i autocovariància. Potència

De manera anàloga al que fem amb les variables aleatòries, es defineixen paràmetres estadístics per als processos. Atés que un procés és una variable aleatòria dependent d'un índex t, ara tindrem, en lloc de paràmetres numèrics, funcions amb dependència temporal.

A l'exemple 1.1 de l'inversor amb què començàvem el tema anterior, una estimació dels beneficis que haurà obtingut el dia i és determinada pel valor mitjà de la variable aleatòria X_i. Com que aquest valor mitjà depèn, en principi, de i, resulta ser també una funció. No és difícil d'avaluar perquè X_i és la suma dels guanys obtinguts els primers i dies. El guany obtingut en un dia qualsevol té com a valor mitjà $p\alpha + (1-p)(-\beta) = 3p - 2(1-p) = 5p - 2$. Com que el guany en i dies és la suma dels guanys en cadascun dels dies, resulta que $E(X_i) = (5p-2)i$ i, de mitjana, el guany té comportament lineal. De fet, amb aquest resultat ja veiem que la inversió funcionarà bé quan $p > 2/5$.

Definició 2.5 *La funció de valor mitjà d'un procés estocàstic $X(t)$ és*

$$m(t) = E(X(t)). \tag{12}$$

$m(t)$ és simplement el valor mitjà de la variable $X(t)$ a t fixat. La forma de calcular-lo depèn de com es defineixi el procés i de si aquest és d'estat continu o discret. Per a un procés d'estat continu del qual coneixem la densitat de primer ordre resulta:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x;\ t)dx. \tag{13}$$

Si el procés és d'estat discret l'expressió és:

$$m(t) = \sum_x xP(x;\ t)dx, \tag{14}$$

on la suma recorre els possibles valors de $X(t)$.

Ja veurem als exemples que a vegades no cal conèixer les funcions de primer ordre per determinar els paràmetres.

La funció de valor mitjà dóna una idea del comportament mitjà de les diverses realitzacions, però a vegades no en tenim prou amb aquesta informació. $m(t)$ no mesura res de la relació entre els valors de la funció en instants diferents. A l'exemple de l'inversor, hem determinat que el valor mitjà val $(5p-2)i$. Posem que $p = 0.7$. L'estimació del seu guany passats 10 dies (X_{10}) seria aquest valor mitjà, $(5 \cdot 0.7 - 2)10 = 15$. Però suposem que ens plantejem l'estimació de X_{10} el vuitè dia i que aquest dia el guany val $X_8 = 14$. Ara l'estimació de $X_{10} \approx 15$ sembla baixa ja que els dos dies següents podem guanyar $3 + 3 = 6$ amb probabilitat $0.7^2 = 0.49$, podem guanyar $3 - 2 = 1$ amb probabilitat $2 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 0.42$ i podem "guanyar" $-2 - 2 = -4$ amb probabilitat $0.3^2 = 0.09$.

El valor mitjà del guany d'aquests dos dies és $6\cdot 0.49+1\cdot 0.42+(-2)\cdot 0.09 = 3.18$. Així és més correcte prendre com estimació de X_{10} el valor $14 + 3.18 = 17.18$. El que passa és que les variables X_8 i X_{10} tenen una certa correlació, de manera que conèixer el valor d'una afecta la distribució de probabilitat de l'altra.

En el cas de processos estocàstics és habitual haver de fer alguna predicció de l'evolució futura a partir dels resultats del present o del passat. Per poder fer això necessitem alguna informació de la correlació entre les variables $X(t)$ en instants diferents. Això motiva els següents conceptes.

Definició 2.6 *La funció d'autocorrelació d'un procés estocàstic $X(t)$ és*

$$R(t_1,t_2) = E(X(t_1)X(t_2)). \tag{15}$$

És una propietat de segon ordre ja que queda determinada per la densitat de segon ordre (en el cas d'estat continu):

$$R(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f(x_1,x_2;\ t_1,t_2)dx_1dx_2. \tag{16}$$

De la seva definició s'obté inmediatament que $R(t_1,t_2) = R(t_2,t_1)$. Això és útil en ocasions, ja que implica que és suficient calcular-la per a $t_1 \leq t_2$.

El següent paràmetre té una relació bastant directa amb l'autocorrelació.

Definició 2.7 *La funció d'autocovariància d'un procés estocàstic $X(t)$ és*

$$C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2). \tag{17}$$

És precisament la covariància de les variables $X(t_1)$ i $X(t_2)$. Doncs, efectivament, $Cov(X(t_1),X(t_2)) = E(X(t_1)X(t_2)) - E(X(t_1))E(X(t_2))$ i el primer terme és $R(t_1,t_2)$, mentre que el segon és $m(t_1)m(t_2)$.

Definició 2.8 *La potència mitjana d'un procés estocàstic $X(t)$ és*

$$Pot(t) = E(X(t)^2). \tag{18}$$

Així, veiem que $\mathrm{Pot}(t) = R(t,t)$. El terme *potència* té el seu origen en el fet que si $X(t)$ representa un voltatge o un corrent elèctric, $X(t)^2$ ens dóna la potència absorbida per una resistència unitat.

Com que la funció de valor mitjà només involucra la densitat de primer ordre, diem que és un paràmetre de primer ordre. De manera similar, diem que les funcions d'autocorrelació i d'autocovariància són paràmetres de segon ordre. També podem definir moments d'ordre arbitrari n com a $R^{(n)}(t_1,t_2,\ldots,t_n) = E(X(t_1)X(t_2)\cdots X(t_n))$, encara que no els utilitzarem.

Si tenim més d'un procés estocàstic, $X(t)$, $Y(t)$, etc, podem aclarir de quin procés són els paràmetres etiquetant-los amb el nom del procés: $m_X(t)$, $m_Y(t)$, $R_X(t_1,t_2)$, etc.

Paràmetres d'un procés estocàstic

Funció de valor mitjà	$m(t) = E(X(t))$
Funció d'autocorrelació	$R(t_1,t_2) = E(X(t_1)X(t_2))$
Funció d'autocovariància	$C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2)$
Potència	$\text{Pot}(t) = E(X(t)^2)$

2.3. Exemples de càlcul de paràmetres

Exemple 2.3 *Calculem els paràmetres de primer i segon ordre pel procés de l'exemple 2.1.*

Com que ja coneixem la densitat de primer ordre, és fàcil obtenir la funció de valor mitjà:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x;\ t)dx = \int_{1}^{e^t} x\frac{1}{tx}dx = \frac{e^t-1}{t}.$$

Hi ha, però, una manera més directa d'obtenir l'anterior resultat. Quan un procés s'expressa explícitament en termes d'algunes variables aleatòries, podem calcular directament els seus paràmetres utilitzant el teorema de l'esperança.

$$m(t) = E(e^{At}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}f_A(a)da = \int_0^1 e^{at}\cdot 1da = \frac{e^{at}}{t}\Big|_{a=0}^{a=1} = \frac{e^t-1}{t}.$$

De manera similar obtenim l'autocorrelació

$$R(t_1,t_2) = E(X(t_1)X(t_2)) = E(e^{At_1}e^{At_2}) = E(e^{A(t_1+t_2)}) = \frac{e^{t_1+t_2}-1}{t_1+t_2}.$$

Exemple 2.4 *Calculem la funció de valor mitjà del procés de l'exemple 2.2.*

Fent servir la funció de probabilitat de primer ordre:

$$m(t) = 0 \cdot P(0;\ t) + 1 \cdot P(1;\ t) = t.$$

Amb el teorema de l'esperança, explicitem la dependència de A posant $X(t) = \Phi(t,A)$ *que val 0 o 1 segons si* $t < A$ *o* $t > A$ *respectivament:*

$$m(t) = \int_0^1 \Phi(t,a) f_A(a) da = \int_t^1 0 \cdot 1 da + \int_0^t 1 \cdot 1 da = t.$$

La funció d'autocorrelació es pot calcular seguint el procediment anterior

$$R(t_1,t_2) = \int_0^1 \Phi(t_1,a)\Phi(t_2,a) f_A(a) da = \int_0^{\min(t_1,t_2)} 1 \cdot 1 da = \min(t_1,t_2).$$

Atès que $\Phi(t_1,a)\Phi(t_2,a)$ *val zero excepte quan* $a < t_1$ *i* $a < t_2$, *és a dir, quan* $a < \min(t_1,t_2)$.

Exemple 2.5 *Calculem els paràmetres de la següent oscil·lació aleatòria.*

$$X(t) = A\cos(\omega t + B)$$

on ω *és una constant, A és una variable aleatòria exponencial de valor mitjà K, B és una variable aleatòria uniforme a* $[0,2\pi]$ *i A i B són independents.*

Notem que tenim tota la informació sobre la variable bidimensional (A,B), *així que el procés està ben especificat. El seu valor mitjà val*

$$m(t) = E(A\cos(\omega t + B)) = E(A)E(\cos(\omega t + B))$$

ja que A i B són variables independents (i per tant, també ho són A i $\cos(\omega t + B)$*). Ara, ens diuen que* $E(A) = K$ *i podem calcular, pel teorema de l'esperança,*

$$E(\cos(\omega t + B)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t + b) f_B(b) db = \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + b) \frac{1}{2\pi} db = 0.$$

Així, concloem que $m(t) = 0$.

Com passava a l'exemple 1.6, el valor mitjà és nul. Això és deu novament al fet que en qualsevol instant donat les diferents realitzacions difereixen en una fase que pren valors sobre un període, de forma que tenim contribucions positives i negatives amb el mateix pes.

La funció d'autocorrelació es calcula de manera anàloga:

$$R(t_1,t_2) = E(A\cos(\omega t_1 + B)A\cos(\omega t_2 + B)) = E(A^2)E(\cos(\omega t_1 + B)\cos(\omega t_2 + B)).$$

El primer factor és, si recordem la propietat de la variància $Var(A) = E(A^2) - E(A)^2$,

$$E(A^2) = Var(A) + E(A)^2 = K^2 + K^2 = 2K^2.$$

Una variable exponencial $X \sim Exp(\lambda)$ té $E(X) = \lambda^{-1}$, d'on el paràmetre $\lambda = E(X)^{-1}$, i $Var(A) = \lambda^{-2} = E(X)^2$.

Per al segon factor transformem el producte de cosinus mitjançant la fórmula trigonomètrica

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

i obtenim

$$E(\cos(\omega t_1 + B)\cos(\omega t_2 + B)) = E(\frac{1}{2}(\cos(\omega(t_1+t_2) + 2B) + \cos(\omega(t_1 - t_2)))) =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos(\omega(t_1+t_2)+2b) + \cos(\omega(t_1-t_2)))\frac{1}{2\pi}db = \frac{1}{2}\cos(\omega(t_1-t_2)).$$

Així, arribem al resultat:

$$R(t_1,t_2) = K^2\cos\omega(t_1 - t_2).$$

Notem que, en aquest cas, $C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2)$ *ja que* $m(t) = 0$. *La potència val* $Pot(t) = K^2$.

Notem que l'autocorrelació, en aquest exemple, només depèn de la distància entre els instants t_1 *i* t_2. *A més, quan* $t_2 = t_1$ *és màxima. Això és un comportament típic, ja que quan* $t_2 = t_1$ *les variables* $X(t_1)$ *i* $X(t_2)$ *són la mateixa i, per tant, tenim la màxima correlació.*

3. Processos estocàstics estacionaris

Una classe important de processos estocàstics la constitueixen els anomenats processos estacionaris. Es tracta dels processos pels quals les propietats estadístiques no depenen de la posició temporal en què les mesurem. Això correspon a situacions on la dinàmica subjacent al procés no depèn explícitament del temps.

Com en tants aspectes de l'enginyeria, l'anàlisi en freqüències té un paper important en els processos estocàstics. El concepte principal és la densitat espectral de potència.

3.1. Estacionarietat en sentit estricte i en sentit ampli

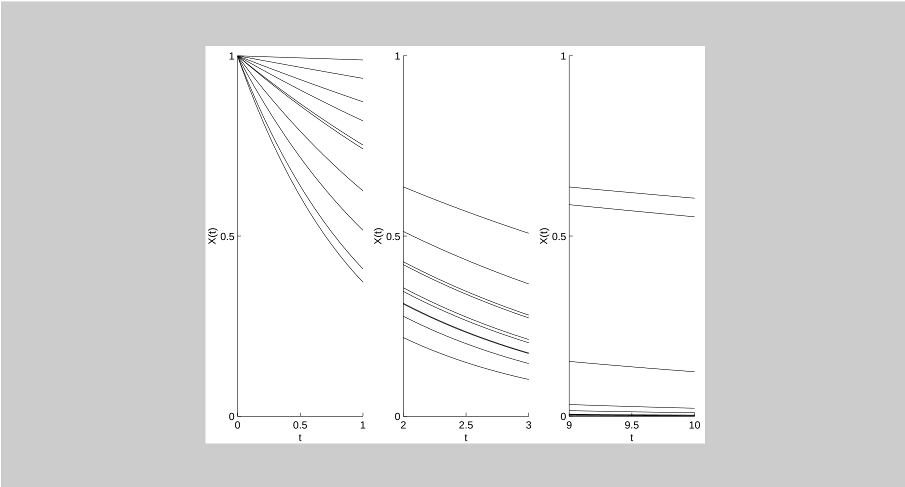
Donat un procés estocàstic, ens podem plantejar si la seva estadística és invariant en el temps. Per exemple, en el moviment brownià (exemple 1.8) la causa del moviment són les fluctuacions tèrmiques que si el líquid està en equilibri termodinàmic són independents del temps.

Si un procés té aquesta independència del temps, hem d'esperar que les seves realitzacions mostrin característiques similars en diferents intervals de temps. És a dir, podem estudiar el procés sobre diversos intervals obtenint moltes realitzacions i comparant el seu aspecte. Si observem el mateix comportament tenim un símptoma del que anomenarem estacionarietat. Abans de definir-la amb precisió, vegem un exemple.

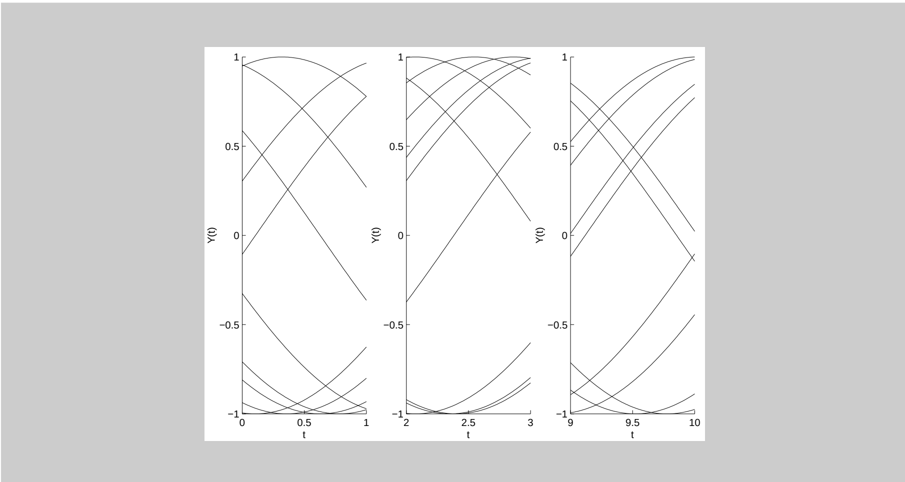
Exemple 3.1 *Partim d'una variable aleatòria B uniforme a* [0,1] *i definim dos processos estocàstics:*

$$X(t) = e^{-Bt}, \qquad Y(t) = \sin(t + 2\pi B).$$

Comparem el resultat de representar gràficament diverses realitzacions sobre intervals temporals diferents, concretament [0,1], [2,3] *i* [9,10]. *El resultat es mostra a les següents figures.*



Realitzacions del procés e^{-Bt}



Realitzacions del procés $\sin(t + 2\pi B)$

En el primer cas es veu una clara diferència als tres intervals. Resulta que com més grans són els valors de t que observem, més petits són els valors que prenen les realitzacions. Si ens mostressin moltes realitzacions sobre un interval temporal desconegut, podríem tenir una idea de per on està localitzat aquest interval a partir de l'aspecte de les realitzacions.

Al segon cas les tres gràfiques tenen un aspecte molt similar. No podem deduir per on està localitzat l'interval temporal de l'observació de les realitzacions. Això suggereix que aquest procés pot ser estacionari.

Diem que un procés estocàstic és estacionari si la seva distribució probabilística és invariant sota qualsevol traslació temporal. De manera més precisa, com que la caracterització de l'estadística d'un procés es fa a través de les seves mostres, arribem a la següent definició.

Definició 3.1 *El procés estocàstic $X(t)$ és estacionari en sentit estricte si per a tot $n \geq 1$ i per a tota elecció de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ els vectors aleatoris $(X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \ldots, X(t_n + \tau))$ i $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ tenen la mateixa distribució de probabilitat per a tot τ real.*

Les funcions de distribució d'un procés estacionari en sentit estricte verifiquen:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ t_1+\tau,t_2+\tau,\ldots,t_n+\tau) = F(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ t_1,t_2,\ldots,t_n) \qquad (19)$$

Per a tot n, $t_1,t_2,\ldots,t_n$ i τ. Idèntiques expressions tindrem per a les funcions de densitat d'un procés d'estat continu i per a les funcions de probabilitat d'un procés d'estat discret.

Exemple 3.2

Analitzem la condició d'estacionarietat per als dos processos de l'exemple 3.1. Ens limitarem a mostres de mida 1. Així, obtindrem la densitat de primer ordre $f(x;\ t)$ i mirarem si aquesta depèn de t.

Per al cas de $X(t) = e^{-Bt}$ tenim que, com que B varia de 0 a 1, fixat t, $X(t)$ varia de e^{-t} a 1. Obtenim la funció de densitat fent el canvi directament a partir de la densitat de B. La relació entre variables és $x = e^{-bt}$. La densitat de B és $f_B(b) = 1, 0 \leq b \leq 1$. Llavors, per a $x \in [e^{-t},1]$

$$f(x;\ t) = \frac{f_B(b)}{|dx/db|} = \frac{1}{te^{-bt}}.$$

Expressant el resultat en termes de x arribem a

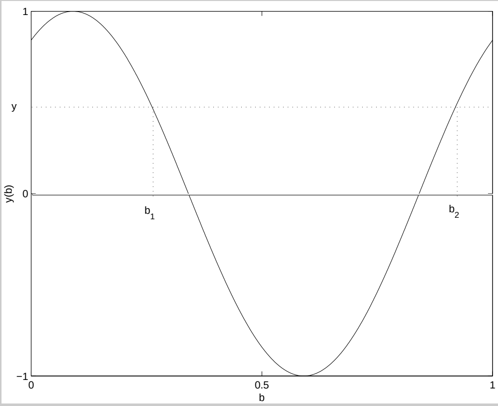
$$f(x;\ t) = \frac{1}{tx}, \qquad e^{-t} \leq x \leq 1.$$

Aquesta densitat depèn de t, fet que demostra que aquest procés no és estacionari. Això és el que havíem contemplat en les realitzacions dibuixades a la primera figura.

Per al procés $Y(t) = \sin(t+2\pi B)$ notem que l'argument del sinus, quan B varia de 0 a 1, recorre l'interval $[t,t+2\pi]$. Això és un període complet del sinus de manera que $Y(t)$ pren tots els valors entre -1 i 1.

Com es veu a la gràfica, per a cada y entre -1 i 1 hi ha dos valors de b (b_1 i b_2) que hi van a parar. També hi veiem que per simetria el pendent de la recta tangent (derivada) en aquests punts és igual i de signe oposat. La fórmula del canvi de variable a la densitat ens queda:

$$f(y;\ t) = \frac{f_B(b_1)}{|\frac{dy}{db}(b_1)|} + \frac{f_B(b_2)}{|\frac{dy}{db}(b_2)|}.$$



Gràfica de la dependència entre b i $y = \sin(t + 2\pi b)$, per al cas $t = 1$

Ara tenim que $f_B(b_1) = f_B(b_2) = 1$, $|\frac{dy}{db}(b_2)| = |\frac{dy}{db}(b_1)|$ *i*

$$\frac{dy}{db} = 2\pi\cos(t + 2\pi b) = 2\pi\sqrt{1 - \sin^2(t + 2\pi b)} = 2\pi\sqrt{1 - y^2}.$$

La funció de densitat de primer ordre del procés $Y(t)$ *queda:*

$$f(y;\ t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - y^2}} \qquad -1 \leq y \leq 1.$$

Veiem, doncs, que aquesta densitat no depèn de t (notem que això fa referència tant a la forma de la funció $f(y;\ t)$ *com a l'interval de valors que pot prendre y). Això és consistent amb el que sospitàvem a partir de les gràfiques (exemple 3.1). Notem que això no demostra que el procés sigui estacionari, ja que només hem vist la invariància de les propietats estadístiques de primer ordre. A l'apartat 3.2. es demostrarà que aquest procés és estacionari en sentit estricte.*

Vegem ara que en un procés estacionari en sentit estricte els paràmetres verifiquen certes condicions.

Proposició 3.1 *Si un procés estocàstic* $X(t)$ *és estacionari en sentit estricte, llavors el valor mitjà és constant i l'autocorrelació depèn només de la diferència entre els dos instants:* $m(t) = m$ *i* $R(t_1,t_2) = R(t_2 - t_1)$.

Demostració*:

*El final de les demostracions l'indiquem amb el símbol ♣.

$m(t) = E(X(t))$. Com que $X(t)$ és estacionari en sentit estricte, la condició d'invariància (definició 3.1) en el cas $n = 1$ ens diu que $X(t)$ i $X(t + \tau)$ són variables igualment distribuïdes per a tot t i per a tot τ. Per al cas particular $\tau = -t$ resulta que, per a tot t, $X(t)$ té la mateixa distribució que $X(0)$ ($X(t+\tau) = X(t-t) = X(0)$).

Llavors $m(t) = E(X(t)) = E(X(0))$, que és un nombre que anomenem m. Així, $m(t) = m$ independent de t.

$R(t_1,t_2) = E(X(t_1)X(t_2))$. Si en la condició d'invariància ara fem $n = 2$ i prenem $\tau = -t_1$, el vector $(X(t_1),X(t_2))$ està distribuït idènticament a $(X(0),X(t_2 - t_1))$. Així, la distribució de qualsevol mostra de dos instants depèn només de la distància temporal entre ells. Ara tenim $R(t_1,t_2) = E(X(t_1)X(t_2)) = E(X(0)X(t_2 - t_1)) = R(0,t_2-t_1)$ i escrivim aquesta funció com a dependent d'una sola variable: $R(t_2 - t_1)$. ♣

És habitual anomenar τ la diferència de temps de manera que podem escriure $R(\tau) = E(X(t)X(t + \tau))$. Igualment deduïm que $C(t_1,t_2) = C(t_2 - t_1)$ (notem que per processos estacionaris R i C difereixen solament en una constant, $C(\tau) = R(\tau) - m^2$).

En ocasions no es coneix tota la distribució de probabilitat d'un procés, de manera que no podem determinar si és estacionari en sentit estricte, però és habitual conèixer les funcions $m(t)$ i $R(t_1,t_2)$, cosa que ens porta a una versió més dèbil del concepte d'estacionarietat:

Definició 3.2 *El procés estocàstic $X(t)$ és estacionari en sentit ampli si la seva funció de valor mitjà és constant i la seva funció d'autocorrelació depèn només de la diferència de temps.*

$$m(t) = m, \tag{20}$$

$$R(t_1,t_2) = R(t_2 - t_1). \tag{21}$$

Com hem vist, tot procés estacionari en sentit estricte també ho és en sentit ampli. El contrari no és cert. Hi ha processos estacionaris en sentit ampli que no ho són en sentit estricte.

3.2. Oscil·lacions aleatòries

Exemple 3.3 *Tornem a visitar l'exemple 2.5. Havíem obtingut $m(t) = 0$ i $R(t_1,t_2) = K^2 \cos(\omega(t_1 - t_2))$. Això ens mostra que el procés $X(t) = A\cos(\omega t + B)$ és estacionari en sentit ampli amb $m = 0$ i $R(\tau) = K^2 \cos(\omega\tau)$. Ara ens podem plantejar si a més ho és en sentit estricte. Resulta que sí i es pot veure a través del següent fet. En fer un desplaçament temporal, $X(t + \tau) = A\cos(\omega(t + \tau) + B) = A\cos(\omega t + (B + \omega\tau))$. Així, l'efecte d'una translació temporal equival a canviar la variable B per $B + \omega\tau$. Però si B era uniforme sobre un període de longitud 2π, el fet de sumar-li una constant dóna una nova variable que també és uniforme sobre un interval de longitud 2π, amb la qual cosa l'estadística del procés queda invariant.*

Podem generalitzar l'anàlisi de l'estacionarietat per al cas d'oscil·lacions aleatòries qualssevol. Com vam veure a l'exemple 2.5 una oscil·lació aleatòria és un procés que es pot expressar:

$$X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{22}$$

on ω està fixada i (A,B) és un vector aleatori bidimensional. Resulta que (22) és estacionari

- en sentit ampli si i només si $E(A) = E(B) = 0$, $Var(A) = Var(B)$ i el coeficient de correlació entre A i B val $\rho = 0$.

- en sentit estricte si i només si la distribució de (A,B) té simetria circular. (Un vector aleatori bidimensional té simetria circular quan la funció de densitat conjunta $f(x,y)$ depèn només de la distància del punt (x,y) a l'origen de coordenades i no de la seva orientació.)

Demostració:

Estacionarietat en sentit ampli:

Notem primer que

$$m(t) = E(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = E(A)\cos\omega t + E(B)\sin\omega t.$$

Igualment

$$R(t,t+\tau) = E(X(t)X(t+\tau))$$

$$= E((A\cos\omega t + B\sin\omega t)(A\cos\omega(t+\tau) + B\sin\omega(t+\tau)))$$

$$= E(A^2)\cos\omega t\cos\omega(t+\tau) + E(B^2)\sin\omega t\sin\omega(t+\tau)+$$

$$+E(AB)(\cos\omega t\sin\omega(t+\tau) + \sin\omega t\cos\omega(t+\tau)).$$

Demostrarem que si $E(A) = E(B) = 0$, $Var(A) = Var(B)$ i $\rho = 0$, llavors el procés és estacionari en sentit ampli:

Suposem que es verifica $E(A) = E(B) = 0$, $Var(A) = Var(B)$ i $\rho = 0$. Anomenem σ^2 el valor comú de la variància de A i B. Llavors tenim que

$$E(A^2) = Var(A) + E(A)^2 = \sigma^2,$$

$$E(B^2) = Var(B) + E(B)^2 = \sigma^2.$$

També resulta que $\rho = 0$ equival a $Cov(A,B) = 0$. En el nostre cas, per hipòtesi, $E(A) = E(B) = 0$, de manera que

$$Cov(A,B) = E(AB) - E(A)E(B) = E(AB)$$

així que concloem també que $E(AB) = 0$.

Substituint aquests valors en les expressions de $m(t)$ i $R(t,t+\tau)$ obtenim llavors $m(t) = 0$ i

$$R(t,t+\tau) = \sigma^2(\cos\omega t\cos\omega(t+\tau) + \sin\omega t\sin\omega(t+\tau)) = \sigma^2\cos\omega\tau.$$

Vegem doncs que $m(t)$ és constant i $R(t,t+\tau)$ només depèn de τ, és a dir, el procés és estacionari en sentit ampli.

Ara demostrarem la implicació contrària. És a dir, que si el procés és estacionari en sentit ampli, llavors $E(A) = E(B) = 0$, $Var(A) = Var(B)$ i $\rho = 0$:

Suposem que el procés és estacionari en sentit ampli. Llavors, com que $m(t)$ és constant, $m(0) = m(\frac{\pi}{\omega})$, és a dir, $E(A) = -E(A)$ d'on $E(A) = 0$. De manera anàloga, $m(\frac{\pi}{2\omega}) = m(\frac{3\pi}{2\omega})$, és a dir, $E(B) = -E(B)$ d'on $E(B) = 0$.

També tenim que, per hipòtesi, $R(t,t+\tau)$ no depèn de t. Així, per al cas $\tau = 0$, $R(t,t)$ és independent de t, llavors $R(0,0) = R(\frac{\pi}{2\omega},\frac{\pi}{2\omega})$, és a dir, $E(A^2) = E(B^2)$. Si denotem $\sigma^2 = E(A^2) = E(B^2)$, queda

$$R(t,t+\tau) = \sigma^2\cos\omega\tau + E(AB)\sin\omega(2t+\tau).$$

Perquè aquesta expressió no depengui de t és necessari que $E(AB) = 0$. Hem vist, doncs, que $E(A) = E(B) = E(AB) = 0$. D'aquí obtenim

$$Var(A) = E(A^2) - E(A)^2 = E(A^2) = \sigma^2,$$

$$Var(B) = E(B^2) - E(B)^2 = E(B^2) = \sigma^2,$$

$$Cov(A,B) = E(AB) - E(A)E(B) = 0.$$

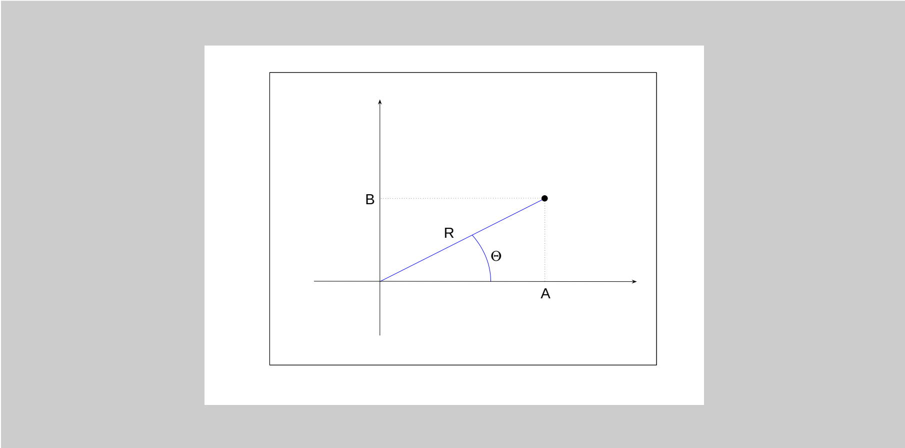
Així hem arribat a la conclusió $E(A) = E(B) = 0$, $Var(A) = Var(B)$ i $\rho = 0$.

Observació

Notem que $X(0) = A$, $X(\frac{\pi}{\omega}) = -A$, $X(\frac{\pi}{2\omega}) = B$ i $X(\frac{3\pi}{2\omega}) = -B$. Atès que $m(t) = E(X(t))$ i $R(t_1,t_2) = E(X(t_1)X(t_2))$, triant valors específics de t podem relacionar els paràmetres de les variables A i B amb valors de les funcions $m(t)$ i $R(t_1,t_2)$.

Estacionarietat en sentit estricte:

Per veure quan és estacionari en sentit estricte utilitzem coordenades polars: $A = R\cos\Theta$, $B = R\sin\Theta$.



Significat de les coordenades polars (R,Θ). R és la distància del punt (A,B) a l'origen i Θ és l'angle que forma el radi vector amb l'eix OX.

Llavors $X(t) = R\cos\Theta\cos\omega t + R\sin\Theta\sin\omega t = R\cos(\Theta - \omega t)$, on hem utilitzat la fórmula trigonomètrica 2. Així podem expressar el procés com a

$$X(t) = R\cos(\Theta - \omega t). \tag{23}$$

El vector (A,B) té simetria circular quan la seva distribució de probabilitat depèn només de R i és, per tant, invariant si fem qualsevol desplaçament de l'angle $\Theta \to \Theta - \alpha$.

Demostrem que si el procés és estacionari en sentit estricte, llavors (A,B) té simetria circular:

Si el procés és estacionari en sentit estricte, el vector $(X(t), X(t+\pi/2\omega))$ té la mateixa distribució per a tot t. A $t = 0$ i $t = \alpha/\omega$ tenim els vectors $(R\cos\Theta, R\sin\Theta)$ i $(R\cos(\Theta - \alpha), R\sin(\Theta - \alpha))$ respectivament. En polars corresponen a (R,Θ) i $(R,\Theta - \alpha)$. Així, la funció de densitat no pot dependre de θ, és a dir, tenim simetria circular.

Demostrem que si (A,B) té simetria circular, llavors el procés és estacionari en sentit estricte:

Si tenim simetria circular, el canvi $\Theta \to \Theta + \omega t_1$ deixa totes les distribucions invariants. Ara bé, utilitzant 23 veiem que aquest canvi ens passa $X(t)$ a $X(t - t_1)$. Per tant, la distribució conjunta del vector $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ és idèntica a la de $(X(0), X(t_2 - t_1), \ldots, X(t_n - t_1))$, que és invariant sota translacions temporals. ♣

3.3. Cicloestacionarietat

En definir estacionarietat requerim la invariància sota desplaçaments τ arbitraris. Pot donar-se el cas d'un procés l'estadística del qual sigui invariant només sota desplaçaments que siguin múltiples d'un període donat T. En aquesta situació parlem de cicloestacionarietat.

Definició 3.3 *El procés estocàstic $X(t)$ és cicloestacionari en sentit estricte si existeix un nombre T tal que per a tot $n \geq 1$ i per a tota elecció de $t_1,t_2,\ldots,t_n$ els vectors aleatoris $(X(t_1 + kT),X(t_2 + xkT),\ldots,X(t_n + kT))$ i $(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n))$ tenen la mateixa distribució de probabilitat per a tot k enter.*

Definició 3.4 *El procés estocàstic $X(t)$ és cicloestacionari en sentit ampli si existeix una constant T tal que per a tot k enter la seva funció de valor mitjà verifica $m(t + kT) = m(t)$ (és a dir, $m(t)$ és períodica) i la seva autocorrelació verifica $R(t_1 + kT,t_2 + kT) = R(t_1,t_2)$.*

Exemple 3.4 *Considerem una oscil·lació aleatòria $X(t) = A\cos t + B\sin t$, tal que $E(A) \neq 0$. Segons el resultat de l'apartat 3.2. $X(t)$ no pot ser estacionari. En canvi, és cicloestacionari en sentit estricte. Això es veu perquè el mateix procés és periòdic: $X(t + 2\pi) = X(t)$. Atès que totes les realitzacions del procés són periòdiques, l'estadística del procés és invariant sota el canvi $t \to t + 2\pi k$, per a k enter.*

3.4. Espectre de potència d'un procés estacionari

Considerem un procés $X(t)$ estacionari, amb valor mitjà $m(t) = m$ i autocorrelació $R(\tau) = E(X(t)X(t + \tau))$. Vegem primer algunes propietats de la funció $R(\tau)$.

- $R(\tau)$ és una funció parella. En efecte, com que $R(t_1,t_2) = R(t_2,t_1)$ resulta $R(-\tau) = R(\tau)$.

- $R(\tau)$ ens dóna una mesura del ritme de variació temporal del procés. Volem avaluar la diferència $X(t + \tau) - X(t)$, però en tractar-se d'una quantitat aleatòria el que farem és fer la mijana del seu quadrat per tal de tenir una mesura de la seva magnitud:

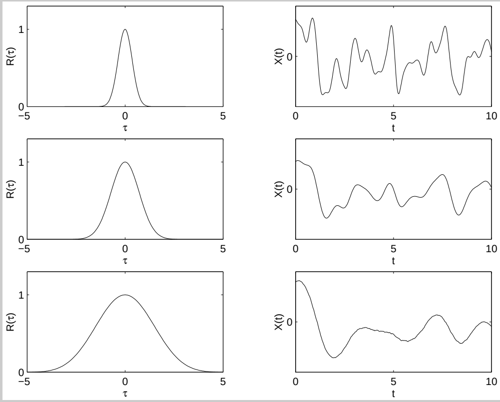
$$E((X(t+\tau)-X(t))^2) = E(X(t+\tau)^2 - 2X(t+\tau)X(t) + X(t)^2)$$

$$= R(t+\tau,t+\tau) - 2R(t+\tau,t) + R(t,t) = 2(R(0) - R(\tau))$$

  Veiem, doncs, que si R disminueix lentament, $R(0) - R(\tau)$ és petit i el procés tendeix a variar poc en transcórrer el temps. És un fet intuïtiu ja que R mesura la correlació entre valors del procés en instants diferents. Si aquesta correlació no disminueix, $X(t + \tau)$ tendeix a tenir valors propers a $X(t)$, mentre que si R disminueix ràpidament es perd la correlació i el procés a $t + \tau$ ja ha "oblidat" el valor que prenia a t.

Observació

Com que $R(t_1,t_2) = E(X(t_1)X(t_2))$, en calcular esperances de productes de valors del procés podem expressar el resultat en funció de R. Per exemple, $E(X(t + \tau)X(t)) = R(t + \tau,t)$. Si el procés és estacionari, $R(t_1,t_2) = E(X(t_1)X(t_2))$ es redueix a $R(t_2 - t_1)$ (o $R(t_1 - t_2)$ ja que $R(t_1,t_2) = R(t_2,t_1)$. Per exemple, $R(t + \tau,t) = R(\tau)$.



A la columna esquerra tenim diferents funcions d'autocorrelació $R(\tau)$. A la columna dreta una realització del procés $X(t)$ per a cadascuna d'elles. Podem observar que com més ràpidament s'anul·la $R(\tau)$ més fluctua localment $X(t)$

- $R(\tau)$ és màxima a $\tau = 0$, és a dir, $|R(\tau)| \leq R(0)$ per a tot τ. Aquest fet es demostra a partir de la desigualtat $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$ vàlida per a tot parell de variables aleatòries X i Y. Llavors $R(\tau)^2 = E(X(t)X(t+\tau))^2 \leq E(X(t)^2)E(X(t+\tau)^2) = R(0)^2$. (Recordem també que $R(0) = E(X(t)^2) \geq 0$.)

  Notem que $R(\tau) = E(X(t)X(t+\tau))$ mesura la correlació entre la funció $X(t)$ i la mateixa funció desplaçada $X(t+\tau)$. El màxim d'aquesta correlació el tenim, per tant, quan no hi ha desplaçament i comparem la funció amb ella mateixa.

Una altra manera de mirar com varia el procés amb el temps és mitjançant el contingut freqüencial. Si el procés efectua canvis ràpids en el temps, hi haurà un contingut elevat en les freqüències altes. La magnitud que s'utilitza per mesurar-lo és la densitat espectral de potència.

Definició 3.5 *La densitat espectral de potència $S(f)$ d'un procés estocàstic estacionari $X(t)$ és la transformada de Fourier de la seva funció d'autocorrelació:*

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau. \tag{24}$$

Amb la transformació inversa de (24) expressem R en funció de S:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi f\tau}df. \tag{25}$$

Podem relacionar la potència mitjana Pot del procés amb l'espectre de potència $S(f)$. Tenim que $\mathrm{Pot}(t) = E(X(t)^2) = R(0)$. Així posem $\tau = 0$ a 25 i obtenim $R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)df$. Arribem, per tant, al resultat:

$$\mathrm{Pot} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)df, \tag{26}$$

Transformació de Fourier

Recordem la inversió de la transformació de Fourier.

Transformada directa:

$$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau.$$

Transformada inversa:

$$x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)e^{j2\pi f\tau}df.$$

En un procés estacionari la potència no depèn de t. En efecte, $\mathrm{Pot}(t) = E(X(t)^2) = E(X(t)X(t)) = R(t,t) = R(0)$, que és un nombre.

Això justifica el nom de $S(f)$, ja que en ser integrada sobre totes les freqüències ens dóna la potència.

És fàcil veure que en ser R una funció real i parella, S també és real i parella:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)(\cos 2\pi f\tau - j\sin 2\pi f\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau.$$

ja que $R(\tau)\sin 2\pi f\tau$ és una funció senar i la seva integral s'anul·la. Ara es veu clarament que $S(f)$ és real i que $S(-f) = S(f)$.

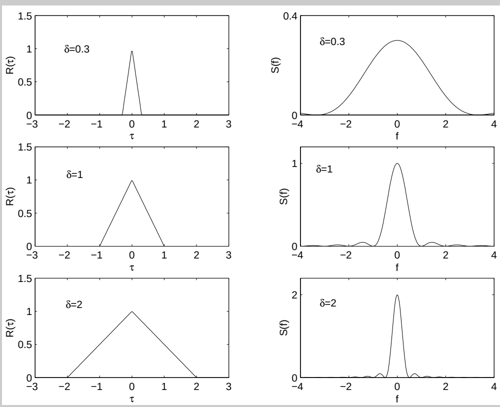
Exemple 3.5 *Un procés té autocorrelació*

$$R(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{\delta} & |\tau| \leq \delta, \\ 0 & |\tau| > \delta. \end{cases}$$

Es tracta de calcular el seu espectre de potència i observar gràficament que com més ràpidament decau R, més contingut hi ha d'altes freqüències.

$$S(f) = \int_{-\delta}^{\delta}(1 - \frac{|\tau|}{\delta})\cos 2\pi f\tau d\tau = 2\int_{0}^{\delta}(1 - \frac{\tau}{\delta})\cos 2\pi f\tau d\tau = \frac{1 - \cos 2\pi f\delta}{2\pi^2 f^2\delta}.$$

Com més petit és δ, més dispersa queda la funció S.



La funció d'autocorrelació $R(\tau)$ per a diferents valors de δ al costat dels corresponents espectres de potència. Com més lentament decau $R(\tau)$, més concentrada està la funció $S(f)$

4. Exemples de processos estocàstics

En aquest capítol estudiem dues classes importants de processos.

Els processos estocàstics gaussians (també anomenats normals). Com passa amb les variables aleatòries gaussianes, serveixen per modelar diversos fenòmens que ens trobem habitualment, per exemple, senyals de soroll.

El procés estocàstic de Poisson i d'altres directament relacionats amb ell són especialment importants en telecomunicacions, ja que permeten modelar situacions com el trànsit en una xarxa de comunicacions.

4.1. Processos estocàstics gaussians

Els processos estocàstics gaussians o normals estenen el concepte de variable aleatòria normal. Es poden pensar com si en cada instant t es generés una variable gaussiana $X(t)$, és a dir, és com tenir una variable gaussiana dependent d'un índex continu t.

4.1.1. Variable gaussiana n-dimensional

Per poder definir el procés estocàstic gaussià, necesitem prèviament definir el vector aleatori gaussià.

Recordem primer la variable aleatòria gaussiana unidimensional. Diem que X és gaussiana o normal si la seva densitat és

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (27)$$

on m és el valor mitjà de X i σ la seva desviació.

El comportament gaussià es generalitza a dimensió superior n prenent una funció de densitat que sigui l'exponencial d'un polinomi de segon grau en les seves variables. Aquest polinomi s'expressa en funció dels paràmetres de primer i segon ordre de les n variables.

Definició 4.1 *Les variables aleatòries $X_1,X_2,\ldots,X_n$ són conjuntament gaussianes si la seva densitat conjunta és*

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|K|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T K^{-1}(x-m)} \tag{28}$$

on $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $-\infty < x_i < \infty$, $m = (m_1,m_2,\ldots,m_n)$ és el vector d'esperances, $m_i = E(X_i)$, K és la matriu de covariàncies, $K_{i,j} = Cov(X_i,X_j), i,j = 1,2,\ldots,n$, $|K|$ és el seu determinant i K^{-1} és la seva inversa. Notem que la matriu K és simètrica ($K_{i,j} = K_{j,i}$).

Exemple 4.1 *Com a exemple, obtindrem la densitat del vector bidimensional gaussià. Denotem $X_1 = X, X_2 = Y$. El vector d'esperances és $m = (m_X,m_Y)$. Expressant la covariància en termes del coeficient de correlació ρ i de les desviacions de X i de Y, σ_X i σ_Y, tenim que $Cov(X,Y) = \rho\sigma_X\sigma_Y$. Els termes diagonals de K són les variàncies $Cov(X,X) = Var(X) = \sigma_X^2, Cov(Y,Y) = Var(Y) = \sigma_Y^2$. Així*

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$|K| = \sigma_X^2\sigma_Y^2(1-\rho^2), \tag{30}$$

$$K^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2} & -\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y} \\ -\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y} & \frac{1}{\sigma_Y^2} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

En la densitat hem de posar $n = 2$, $|K|^{1/2} = \sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}$ i l'exponent és

$$(x-m)^T K^{-1}(x-m) = (x-m_X, y-m_Y)\frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2} & -\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y} \\ -\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y} & \frac{1}{\sigma_Y^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-m_X \\ y-m_Y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right\}.$$

Podem escriure, doncs,

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right\}}. \tag{32}$$

Exemple 4.2 *(X,Y,Z) és un vector tridimensional gaussià on $E(X) = 0, E(Y) = 1$, $E(Z) = 0$, $Var(X) = 1, Var(Y) = 1, Var(Z) = \frac{1}{2}$, X i Y són independents, Y i Z són independents, i $Cov(X,Z) = \frac{1}{2}$. Es tracta d'escriure la seva densitat conjunta.*

Tenim que $Cov(X,Y) = Cov(Y,Z) = 0$, ja que dues variables independents també són incorrelades. Així, tenim tots els paràmetres de primer i segon ordre i podem substituir-los a l'expressió general 28. Tindrem que $n = 3$ i

$$K = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) & Cov(X,Z) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) & Cov(Y,Z) \\ Cov(X,Z) & Cov(Y,Z) & Var(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

El determinant d'aquesta matriu val $|K| = \frac{1}{4}$ i la seva inversa és

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'exponent a 28 serà:

$$-\frac{1}{2}(x,y-1,z)\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2z^2 + 2xz + y - \frac{1}{2}.$$

Finalment, la funció de densitat queda:

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} e^{-x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2z^2 + 2xz + y - \frac{1}{2}}.$$

Exemple 4.3 *Ja sabem que si dues variables són independents llavors són incorrelades ($Cov = 0$). En general, dues variables poden ser incorrelades sense ser independents. Què passa si dues variables X i Y conjuntament gaussianes són incorrelades?*

Si són incorrelades, el coeficient de correlció val $\rho = 0$. Introduint aquest valor a 32 trobem:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right\}}.$$

Aquest resultat coincideix amb el producte de les densitats marginals de X i de Y:

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}.$$

Hem demostrat, doncs, que si dues variables gaussianes són incorrelades llavors són independents. Aquesta és una propietat característica de les variables aleatòries normals.

Assenyalem les següents propietats del vector gaussià n-dimensional:

1) En un vector aleatori gaussià, la distribució marginal de qualsevol subconjunt de les variables també és gaussiana.

2) La distribució de probabilitat d'un vector aleatori gaussià queda determinada a partir dels paràmetres de primer i segon ordre de les variables que el formen. Efectivament, la densitat 28 queda fixada si coneixem les esperances, variàncies i covariàncies de les variables X_i.

3) Les variables $X_1,X_2,\ldots,X_n$, conjuntament gaussianes, són independents si i només si són incorrelades ($Cov(X_i,X_j) = 0$ per a tot $i \neq j$). Recordem que independència sempre implica incorrelació. En el cas gaussià, també és cert el recíproc. Per demostrar-ho només cal tenir en compte que, si són incorrelades, la matriu K és diagonal i això ens factoritza la densitat conjunta en producte de les densitats marginals de totes les X_i. (Aquest càlcul s'ha fet en detall per al cas $n = 2$ a l'exemple 4.3.)

4) El caràcter gaussià es manté sota transformacions lineals. És a dir, si tenim un vector gaussià i obtenim noves variables fent combinacions lineals de les variables que formen aquest vector, el resultat són variables que també són gaussianes. El motiu és que en fer el canvi a la funció de densitat s'obté també l'exponencial d'un polinomi de segon grau en les noves variables. De fet, podem fer el canvi no homogeni, és a dir, sumant una constant.

Exemple 4.4 *A partir del vector (X,Y,Z) de l'exemple 4.2 definim un nou vector aleatori (U,V,W) de la següent manera:*

$$\begin{cases} U = X + Z \\ V = Y - 1 \\ Z = 2X - 3Z \end{cases}$$

De l'anterior sistema podem aïllar X,Y,Z en funció de U,V,W:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{5}(U + W) \\ Y = V + 1 \\ Z = \frac{1}{5}(2U - W) \end{cases}$$

La funció de densitat de (U,V,W) dependrà d'aquestes variables a través de l'exponencial de la funció que s'obté substituint $x = (u+w)/5, y = v+1, z = (2u-w)/5$ en el polinomi que teníem a l'exponent de la funció de densitat de (X,Y,Z):

$$-x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2z^2 + 2xz + y - \frac{1}{2}.$$

El resultat és un nou polinomi:

$$-\frac{1}{5}u^2 - \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{5}w^2.$$

Així, el vector (U,V,W) també és gaussià.

Una manera d'escriure la funció de densitat conjunta de les noves variables U,V,W sense fer el canvi a partir de la funció de densitat del vector (X,Y,Z) consisteix a calcular els paràmetres de les noves variables i utilitzar la fórmula general 28:

$$E(U) = E(X+Z) = E(X) + E(Z) = 0,$$
$$E(V) = E(Y-1) = E(Y) - 1 = 0,$$
$$E(Z) = E(2X-3Z) = 2E(X) - 3E(Z) = 0.$$

Per calcular els paràmetres de segon ordre notem que $E(XY) = Cov(X,Y) + E(X)E(Y) = 0$. De la mateixa manera s'obté $E(YZ) = 0$ i $E(XZ) = \frac{1}{2}$. També tenim que $E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = 1$, $E(Y^2) = 2$ i $E(Z^2) = \frac{1}{2}$. Ara obtenim

$$Var(U) = E(U^2) - E(U)^2 = E((X+Z)^2) = E(X^2) + 2E(XZ) + E(Z^2) = \tfrac{5}{2},$$
$$Var(V) = E(V^2) - E(V)^2 = E((Y-1)^2) = E(Y^2) - 2E(Y) + 1 = 1,$$
$$Var(W) = E(W^2) - E(W)^2 = E((2X-3Z)^2) = 4E(X^2) - 12E(XZ) + 9E(Z^2) = \tfrac{5}{2}.$$

$$Cov(U,V) = E(UV) - E(U)E(V) = E((X+Z)(Y-1))$$
$$= E(XY) + E(ZY) - E(X) - E(Y) = 0,$$
$$Cov(U,W) = E(UW) - E(U)E(W) = E((X+Z)(2X-3Z))$$
$$= 2E(X^2) - E(XZ) - 3E(Z^2) = 0,$$
$$Cov(V,W) = E(VW) - E(V)E(W) = E((Y-1)(2X-3Z))$$
$$= 2E(XY) - 3E(ZY) - 2E(X) + 3E(Z) = 0.$$

La matriu de covariàncies i la seva inversa són:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \qquad K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

El determinant val $|K| = \frac{25}{4}$. *Substituint tot això a 28 surt*

$$f_{UVW}(u,v,w) = \frac{2}{5(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{5}u^2 - \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{5}w^2}.$$

5) Donat un vector n-dimensional gaussià $X_1,X_2,\ldots,X_n$, sempre és possible trobar n variables $N_1,N_2,\ldots,N_n$ gaussianes de valor mitjà 0 i variància 1, independents, tals que totes les X_i s'obtenen com a combinació lineal d'elles. Així, podem reduir un vector gaussià als seus graus de llibertat més simples.

Exemple 4.5 *A l'exemple anterior les noves variables U,V,W eren incorrelades i, per tant, tractant-se de gaussianes, independents. Tenien esperança zero però la desviació de U i W era diferent de 1. Això ho podem arreglar dividint aquestes dues variables per la seva desviació. El canvi de variable que ens interessa és:*

$$\begin{cases} N_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}(X+Z) \\ N_2 = Y - 1 \\ N_3 = \sqrt{\frac{2}{5}}(2X-3Z) \end{cases}$$

La funció de densitat del vector (N_1,N_2,N_3) *és*

$$f_{N_1N_2N_3}(n_1,n_2,n_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}n_1^2 - \frac{1}{2}n_2^2 - \frac{1}{2}n_3^2}.$$

En efecte, com que les variables N_i són independents, és el producte de les funcions de densitat marginal:

$$f_{N_1N_2N_3}(n_1,n_2,n_3) = \frac{e^{-\frac{n_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{n_2^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{n_3^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

4.1.2. Procés estocàstic gaussià

Arribem al concepte de procés gaussià de manera natural, ja que un procés s'especifica a través de la distribució de les seves mostres i aquestes són vectors n-dimensionals.

Definició 4.2 *El procés estocàstic $X(t)$ és* gaussià *si per a tot $n \geq 1$ i per a tot $t_1,t_2,\ldots,t_n$, aleshores les variables aleatòries $X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)$ són conjuntament gaussianes.*

Es tracta d'un procés a temps continu i d'estat continu. Les funcions de densitat d'ordre n valen:

Un procés estocàstic gaussià queda estadísticament determinat per les funcions $m(t)$ i $R(t_1,t_2)$.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ t_1,t_2,\ldots,t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|K|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T K^{-1}(x-m)} \qquad (33)$$

on $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $-\infty < x_i < \infty$. Atès que ara les variables són $X(t_i)$, resulta que $m_i = E(X(t_i))$ i $K_{i,j} = Cov(X(t_i),X(t_j)),i,j = 1,2,\ldots,n$. Aquests valors estan relacionats directament amb les funcions de valor mitjà $m(t) = E(X(t))$ i d'autocovariància $C(t_1,t_2) = Cov(X(t_1),X(t_2))$. Així, en l'anterior densitat $m = (m(t_1),m(t_2),\ldots,m(t_n))$ i $K_{i,j} = C(t_i,t_j),i,j = 1,2,\ldots,n$.

Tenim el següent resultat important, que permet caracteritzar els processos gausians:

Proposició 4.1 *La distribució de probabilitat d'un procés estocàstic gaussià queda completament determinada per les funcions de valor mitjà i d'autocorrelació.*

Demostració: En efecte, conegudes $m(t)$ i $R(t_1,t_2)$ podem escriure la densitat de qualsevol mostra del procés (recordem que $C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2)$.)♣

4.1.3. Propietats dels processos gaussians estacionaris

Un procés estocàstic estacionari en sentit ampli és aquell que té el valor mitjà constant $m(t) = m$ i l'autocorrelació depèn només de la distància entre els dos instants de temps fixats, $R(t_1,t_2) = R(t_2 - t_1)$. Podem, doncs, tenir processos gaussians estacionaris en sentit ampli si triem els paràmetres d'aquesta forma. De fet, aquests processos són també estacionaris en sentit estricte, ja que per als processos gaussians tota l'estadística s'obté a partir de $m(t)$ i $R(t_1,t_2)$, que ara són invariants sota desplaçaments temporals.

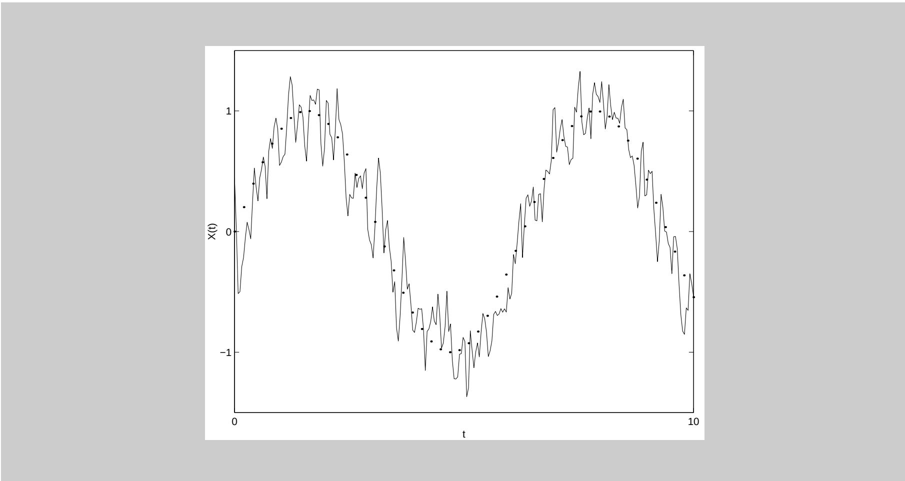
Proposició 4.2 *Un procés estocàstic gaussià és estacionari en sentit estricte si i només si és estacionari en sentit ampli.*

Un procés estocàstic gaussià estacionari en sentit ampli també ho és en sentit estricte.

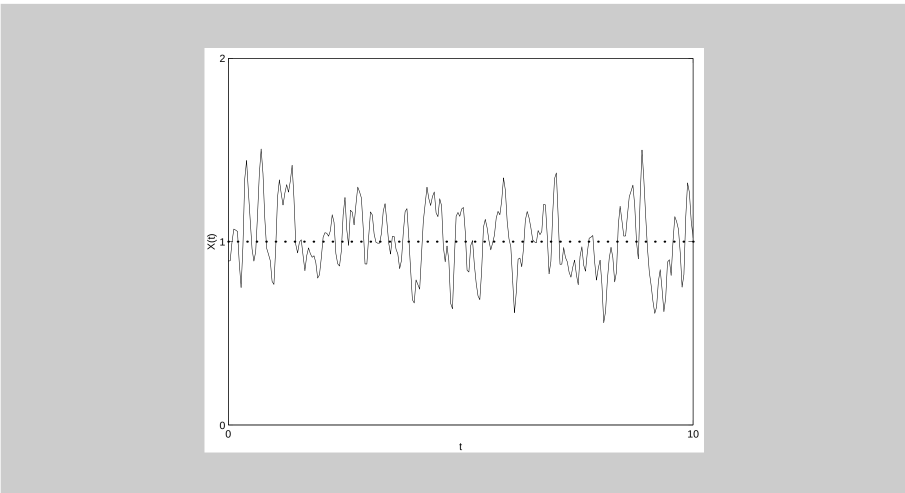
Demostració:

Ja sabem que tot procés estacionari en sentit estricte també ho és en sentit ampli. Suposem ara que tenim un procés gaussià estacionari en sentit ampli. Per ser-ho en sentit estricte cal que totes les densitats d'ordre $n \geq 1$ siguin invariants en fer el canvi $t_i \to t_i + \tau$ per a tot i. Aquesta invariància es dóna ja que $f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ t_1,t_2,\ldots,t_n)$ només depèn dels temps a través $m(t)$, que ara és constant, i de la matriu K, els elements de la qual són tots de la forma $C(t_i,t_j) = R(t_i{-}t_j){-}m^2$. En calcular $f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ t_1{+}\tau,t_2{+}\tau,\ldots,t_n{+}\tau)$ només hem de canviar $C(t_i,t_j)$ per $C(t_i{+}\tau,t_j{+}\tau) = R((t_i{+}\tau){-}(t_j{+}\tau)){-}m^2 = R(t_i{-}t_j){-}m^2 = C(t_i,t_j)$. És a dir, la densitat queda igual. ♣

Les figures següents mostren realitzacions de processos gaussians estacionaris i no estacionaris.



Procés gaussià no estacionari ($m(t)$ = sin t, línia puntejada)



Procés gaussià estacionari (m = 1, línia puntejada)

4.1.4. Soroll blanc

Recordem primer la definició de la delta de Dirac:

Definició 4.3 Delta de Dirac

És una funció generalitzada que es denota $\delta(t)$ i es defineix pel seu comportament sota integració. Per a qualsevol funció contínua $\varphi(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\varphi(t)dt = \varphi(a). \tag{34}$$

Notem que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (35)$$

$\delta(t)$ s'interpreta com un impuls instantani concentrat a $t = 0$. Una manera intuïtiva de representar-la és:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0. \end{cases}$$

Podem calcular la seva transformada de Fourier, utilitzant 34:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1.$$

Com que $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, tenim que la tranformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}[1] = \delta(t)$. Així s'obté la representació integral de la delta:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df. \quad (36)$$

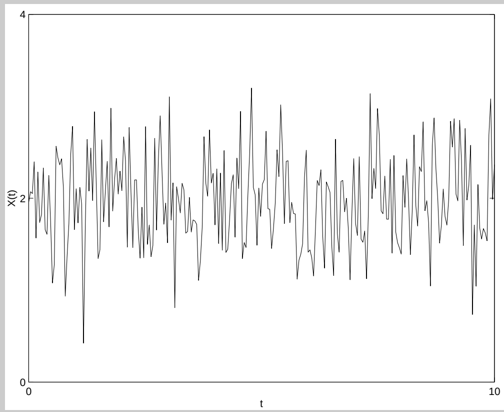
Un procés estocàstic estacionari s'anomena de soroll blanc si el seu espectre de potència és constant $S(f) = s_0$ per a $-\infty < f < \infty$. Llavors la seva funció d'autocorrelació val

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_0 e^{j2\pi f\tau} df = s_0 \delta(\tau), \quad (37)$$

on s'ha utilitzat la representació integral de la delta de Dirac (equació 36).

Notem que 37 ens diu que $R(t_1,t_2) = s_0\delta(t_2 - t_1)$. Ja hem comentat que la delta és nul·la quan el seu argument és diferent de zero. Així $R(t_1,t_2) = 0$ per a $t_1 \neq t_2$. Atès que no hi ha correlació en instants diferents, el comportament del procés és totalment irregular. En aquest sentit, queda justificat anomenar-lo soroll. El terme *blanc* està en analogia amb la llum blanca, on són presents totes les freqüències (colors) amb el mateix pes.

Exemple 4.6 *Un exemple de procés de soroll blanc és un procés gaussià estacionari amb $R(\tau) = \delta(\tau)$. En aquest cas els valors del procés en instants diferents són variables independents.*



Procés gaussià de soroll blanc

4.2. El procés estocàstic de Poisson

Moltes situacions en enginyeria impliquen la presència d'esdeveniments que es van produint en instants aleatoris amb independència els uns dels altres. Per exemple, l'arribada de trucades a una centraleta telefònica o de connexions a un servidor d'Internet. Si ens limitem a comptar el nombre d'esdeveniments en un interval fixat, podem definir la variable aleatòria de Poisson. Si, a més, volem tractar el temps de forma dinàmica necessitem el procés de Poisson.

4.2.1. El procés de Poisson

Considerem la situació en què una sèrie d'esdeveniments es produeixen en instants aleatoris. Denotem $N(t)$ el nombre d'esdeveniments a l'interval $[0,t)$ i $N(t_a,t_b)$ el nombre d'esdeveniments a l'interval $[t_a,t_b)$. Notem que $N(t_a,t_b) = N(t_b) - N(t_a)$. Fixats t_a,t_b, el comptador $N(t_a,t_b)$ és una variable aleatòria unidimensional.

Diem que el procés és de Poisson si:

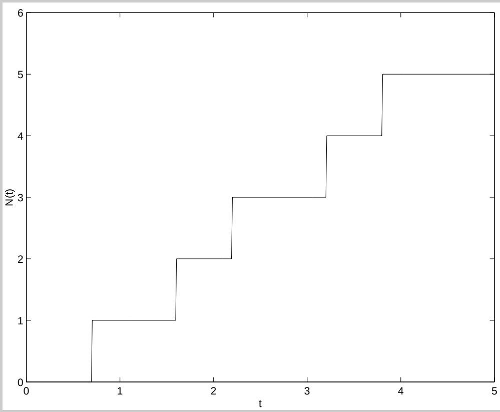
- El nombre d'esdeveniments en dos intervals temporals disjunts són variables aleatòries independents.
- Si $N = N(t,t+\tau)$, llavors, per a τ molt petit podem aproximar $P(N = 1) = \lambda\tau$ i despreciar $P(N > 1)$.

Llavors, podem fer l'aproximació consistent en partir el temps en petits intervals disjunts i considerant variables de Bernouilli independents que ens indiquen si a cada petit interval s'ha produït un esdeveniment o no. És possible fer el pas al límit i demostrar que la variable $N = N(t_a,t_b)$ té la funció de probabilitat

$$P(N = n) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!}, \tag{38}$$

on $\alpha = \lambda(t_b - t_a)$ i $n = 0,1,\ldots$. És a dir, fixat un interval qualsevol el comptador d'esdeveniments corresponent és una variable de Poisson amb paràmetre α.

Definició 4.4 *El procés estocàstic de Poisson consisteix a prendre com a funció $N(t)$, el nombre total d'esdeveniments produïts a l'interval* $[0,t)$.



Realització del procés de Poisson

És un procés a temps continu i d'estat discret. La seva funció de probabilitat de primer ordre és

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{39}$$

4.2.2. Paràmetres del procés de Poisson

Fixat t, $N(t)$ és una variable de Poisson de paràmetre λt. Com sabem, aquesta variable verifica $E(N(t)) = Var(N(t)) = \lambda t$.

Llavors, per al procés de Poisson

$$m(t) = \lambda t, \tag{40}$$

$$R(t_1,t_2) = \begin{cases} \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & \text{si } t_1 \leq t_2, \\ \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & \text{si } t_1 > t_2. \end{cases} \tag{41}$$

Demostració: El valor mitjà és $m(t) = E(N(t)) = \lambda t$.

Ara considerem $t_1 \leq t_2$. Les variables aleatòries $N(t_1)$ i $N(t_2)$–$N(t_1)$ són variables de Poisson $N(0,t_1)$ i $N(t_1,t_2)$ independents ja que els seus intervals són disjunts.

Llavors l'autocorrelació és

$$R(t_1,t_2) = E(N(t_1)N(t_2)) = E(N(t_1)(N(t_2) - N(t_1) + N(t_1)))$$

$$= E(N(t_1)(N(t_2) - N(t_1))) + E(N(t_1)^2)$$

$$= E(N(t_1))E((N(t_2) - N(t_1))) + E(N(t_1)^2)$$

$$= E(N(t_1))E(N(t_2)) + E(N(t_1)^2) - E(N(t_1))^2$$

$$= E(N(t_1))E(N(t_2)) + Var(N(t_1))$$

$$= \lambda t_1 \lambda t_2 + \lambda t_1.$$

El cas $t_1 > t_2$ s'obté intercanviant t_1 i t_2 ja que R és simètrica. ♣

Podem escriure $R(t_1,t_2) = \lambda \min(t_1,t_2) + \lambda^2 t_1 t_2$. La funció d'autocovariància és

$$C(t_1,t_2) = \lambda \min(t_1,t_2). \qquad (42)$$

Segons (40) el parametre $\lambda = m(t)/t$, és a dir, és el nombre mitjà d'esdeveniments per unitat de temps.

El parametre λ d'un procés de Poisson és el nombre mitjà d'esdeveniments per unitat de temps.

Notem que el procés de Poisson no és estacionari ja que $m(t)$ depèn de t.

Paràmetres del procés de Poisson

$$m(t) = \lambda t$$

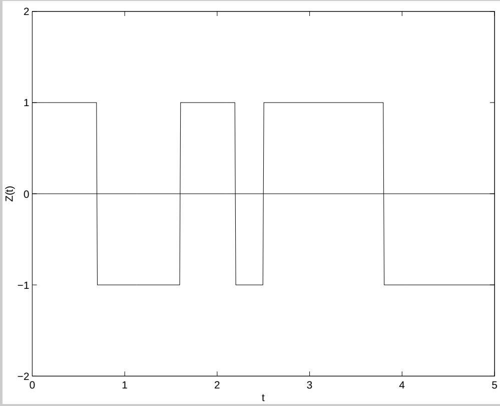
$$R(t_1,t_2) = \lambda \min(t_1,t_2) + \lambda^2 t_1 t_2$$

$$C(t_1,t_2) = \lambda \min(t_1,t_2)$$

$$\mathrm{Pot}(t) = \lambda t + \lambda^2 t^2$$

4.2.3. Senyal telegràfic aleatori

Donada la situació d'arribada d'esdeveniments de tipus Poisson, hem construït un procés prenent com a funció aleatòria el comptador $N(t)$. En la mateixa situació podem construir altres funcions. Estudiarem primer el procés $Z(t) = (-1)^{N(t)}$ consistent en un signe ± 1 que es va alternant:



Realització del procés de senyal telegràfic

$Z(t)$ es tracta d'un procés d'estat discret que només pot prendre els valors +1 i –1.

Proposició 4.3 *La funció de probabilitat de primer ordre del procés* $Z(t)$ *val:*

$$\begin{cases} P(Z(t)=1) = \dfrac{1+e^{-2\lambda t}}{2}, \\ P(Z(t)=-1) = \dfrac{1-e^{-2\lambda t}}{2}. \end{cases} \tag{43}$$

Demostració: Recordem la sèrie de Taylor de la funció exponencial. Per a tot x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{44}$$

La podem separar en una part parella i una part senar:

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{45}$$

Ara, que $Z(t)$ valgui +1 o –1 correspon al fet que $N(t)$ sigui parell o senar, respectivament, de manera que

$$P(Z(t)=1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)=2k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!}$$

$$= e^{-\lambda t}\frac{e^{\lambda t}+e^{-\lambda t}}{2} = \frac{1+e^{-2\lambda t}}{2}.$$

De manera anàloga s'obté $P(Z(t) = -1)$. ♣

A partir de l'equació 43 calculem el valor mitjà

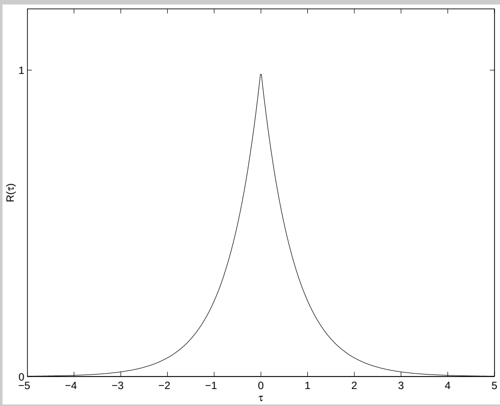
$$E(Z(t)) = 1 \cdot P(Z(t) = 1) + (-1) \cdot P(Z(t) = -1) = e^{-2\lambda t},$$

i l'autocorrelació (per a $t_2 \leq t_1$)

$$E(Z(t_1)Z(t_2)) = E((-1)^{N(t_1)}(-1)^{N(t_2)}) = E((-1)^{N(t_2)-N(t_1)})$$

$$= E((-1)^{N(t_1,t_2)}) = e^{-2\lambda(t_2-t_1)}$$

ja que $(-1)^N = (-1)^{-N}$, i $N(t_1,t_2) = N(t_2) - N(t_1)$ torna a ser una variable de Poisson de paràmetre $\lambda(t_2 - t_1)$. En general tindrem $E(Z(t_1)Z(t_2)) = e^{-2\lambda|t_2-t_1|}$.



Autocorrelació $R(\tau) = E(X(t)X(t + \tau))$ en funció de la diferència de temps τ, per al senyal telegràfic

L'autocorrelació mostra un comportament lògic, ja que a mesura que passa el temps el signe de $Z(t)$ va canviant diverses vegades i perdem la correlació entre els dos instants. També esperaríem que el valor mitjà fos zero. De fet, $E(Z(t))$ tendeix a zero amb una certa rapidesa a mesura que augmenta t. El motiu és que $Z(0) = 1$ en totes les realitzacions atès que el comptador $N(t)$ sempre comença a 0. Per evitar aquest efecte artificial de condició inicial definim:

Definició 4.5 *El procés estocàstic de senyal telegràfic aleatori és*

$$X(t) = S(-1)^{N(t)}, \tag{46}$$

on $N(t)$ és el procés de Poisson i S és una variable aleatòria que pren valors $+1$ i -1 amb igual probabilitat, independent de $N(t)$.

Notem que $E(S) = 0$ i $S^2 = 1$. Ara tenim que

$$m_X(t) = 0, \qquad R_X(t_1,t_2) = e^{-2\lambda|t_2-t_1|}. \tag{47}$$

Demostració:

$$m_X(t) = E(X(t)) = E(S(-1)^{N(t)}) = E(S)E((-1)^{N(t)}) = 0 \cdot e^{-2\lambda t} = 0,$$

$$R_X(t_1,t_2) = E(X(t_1)X(t_2)) = E(S^2Z(t_1)Z(t_2)) = E(Z(t_1)Z(t_2)) = e^{-2\lambda|t_2-t_1|}.\clubsuit$$

El senyal telegràfic aleatori és un procés estacionari (almenys en sentit ampli) segons es dedueix de l'anterior resultat.

Paràmetres del senyal telegràfic aleatori

$$m(t) = 0$$

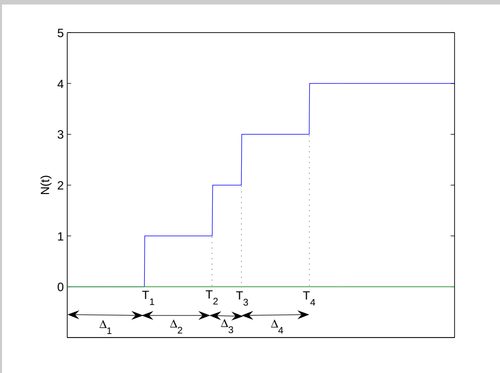
$$R(t_1,t_2) = e^{-2\lambda|t_2-t_1|}$$

$$C(t_1,t_2) = e^{-2\lambda|t_2-t_1|}$$

$$\mathrm{Pot}(t) = 1$$

4.2.4. Distribució dels instants de Poisson

En els processos anteriors tota la informació sobre el resultat de l'experiment està en la localització temporal del primer esdeveniment (T_1), la del segon esdeveniment (T_2), etc. Per tant, té interès estudiar la sèrie de variables aleatòries T_i, $i = 1,2,3,\ldots$ De fet, els graus de llibertat més simples són els intervals entre esdeveniments $\Delta_1 = T_1$, $\Delta_2 = T_2 - T_1$, $\Delta_3 = T_3 - T_2$, etc.



Els esdeveniments de Poisson es produeixen en instants $T_1,T_2,\ldots$ Els intervals entre aquests instants corresponen a les variables $\Delta_1,\Delta_2,\ldots$

Es pot veure que les variables Δ_i són independents, ja que els esdeveniments es produeixen de manera independent els uns dels altres. Llavors, el temps que passa des de T_i fins que es produeix l'esdeveniment $i + 1$ és independent de la localització dels esdeveniments anteriors. A més, les variables Δ_i són totes exponencials de paràmetre λ.

Demostració:

En el procés de Poisson el temps que transcorre entre esdeveniment consecutius són variables exponencials de paràmetre λ independents.

Calculem la funció de distribució de Δ_i:

Per a $t \geq 0$

$$F_{\Delta_i}(t) = P(\Delta_i \leq t) = 1 - P(\Delta_i > t).$$

Ara, $\Delta_i > t$ equival a dir que a l'interval $[T_i, T_i + t)$ no hi ha hagut cap esdeveniment. Això és la probabilitat P, independent de T_i, que el comptador associat a un interval de longitud t valgui 0, és a dir, $P = e^{-\lambda t}$. Llavors $F_{\Delta_i}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, que és la distribució d'una variable exponencial. ♣

Una manera simple de simular un procés de Poisson és anar obtenint valors independents d'una variable exponencial de paràmetre λ i anar-los sumant per obtenir els instants on es produeixen els esdeveniments.

5. Sistemes lineals

Fins ara hem vist maneres de representar i estudiar fenòmens que ens podem trobar en la realitat, en particular, com analitzar senyals. Però, què passa quan aquests senyals es processen? Normalment, tindrem dispositius que rebran una certa "entrada" i voldrem saber quin és el comportament del senyal a la sortida. Per exemple:

- Per avaluar la qualitat d'un sistema de compressió d'arxius de música, necessitem caracteritzar estadísticament com a procés estocàstic aquest tipus de senyal musical. Així, podem calcular el valor mitjà de la distorsió i decidir si és acceptable.

- Per dimensionar correctament una xarxa de comunicacions, un sistema de gestió de trànsit, necessitem conèixer la distribució estadística d'aquest trànsit. D'aquesta manera podem dissenyar el sistema per tal que la probabilitat que col·lapsi sigui negligible.

5.1. Definició de sistema lineal. Determinisme, invariància temporal

Exemple 5.1 *Considerem un dispositiu que processa so, amplificant-lo, afegint efectes, etc. Podria tractar-se d'un sistema per tractar el so provinent d'un instrument musical. El dispositiu tindria una entrada on connectem l'instrument i una sortida per on surt el so processat. Anomenem $X(t)$ l'entrada i $Y(t)$ la sortida que posteriorment aniria a un sistema d'amplificació de potència i altaveus. Per fer el sistema una mica complet, farem que tingui diverses funcions seleccionables. Així, el nostre dispositiu té un selector de funció que permet triar quina transformació apliquem a $X(t)$. Algunes transformacions naturals en aquest context són:*

- *Preamplificador. Augmentem una mica el nivell de senyal. Fixem una constant $\alpha > 1$ i tenim $Y(t) = \alpha X(t)$.*

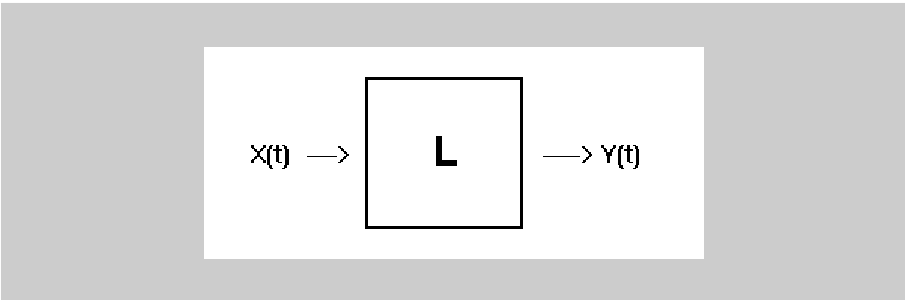
- *Limitador. Retallem el senyal quan supera un cert nivell M. $Y(t) = \min(X(t),M)$.*

- *Reververació. Afegim al senyal una còpia atenuada i retardada del mateix senyal. Aquesta còpia representa la reflexió del so a les parets d'una sala. $Y(t) = X(t) + \beta X(t-T)$, on $\beta < 1$ és el factor d'atenuació i $T > 0$ el retard.*

Tenim, doncs, un control amb tres posicions per seleccionar una de les tres funcions. També podem tenir dials per ajustar els valors dels paràmetres α,β,T,M. Així, podem *variar β i T per obtenir una reverberació suau o un eco fort, o ajustar M segons el nivell d'entrada per no tenir massa distorsió.*

Una vegada fixats els controls de l'aparell, tenim una certa transformació seleccionada. Per avaluar l'efecte d'aquestes transformacions, sia la versió matemàtica simplificada que donem aquí o una implementació real del dispositiu, caldria tenir una representació de $X(t)$ de tipus estadístic. És a dir, cal representar $X(t)$ com un procés estocàstic. En aquest cas, la sortida $Y(t)$ passa a ser també un procés estocàstic i el que ens interessa és com es relacionen les propietats dels processos $X(t)$ i $Y(t)$.

Considerem un procés estocàstic $X(t)$. Igual que una variable aleatòria X dóna lloc a noves variables fent transformacions del tipus $Y = g(X)$, podem transformar el procés $X(t)$ per obtenir el nou procés estocàstic $Y(t)$. Diem L a aquesta transformació que anomenarem sistema i escrivim $Y(t) = L[X(t)]$. Gràficament el pensem com un objecte que rep una entrada $X(t)$ i torna una sortida $Y(t)$.



Sistema lineal

A l'exemple 5.1 hem vist tres possibles transformacions:

1) L'amplificador $L_a[X(t)] = \alpha X(t)$.

2) El limitador $L_l[X(t)] = \min(X(t),M)$.

3) La reverberació $L_r[X(t)] = X(t) + \beta X(t-T)$.

Estem interessats en la situació on el caràcter aleatori de la sortida és degut únicament al caràcter aleatori de l'entrada. Només considerarem sistemes que no afegeixen comportament aleatori al senyal que transformen.

Notem que a l'exemple anterior, la sortida $Y(t)$ té caràcter aleatori només perquè $X(t)$ és un procés estocàstic. Fixada l'entrada $X(t)$, la sortida queda unívocament determinada. És a dir, les transformacions L_a,L_l,L_r estan fixades i els paràmetres α,β,T,M són constants.

Definició 5.1 *Un sistema és determinista si fixada la realització de $X(t)$ que entra, la sortida queda ja determinada. Si, al contrari, una mateixa entrada pot donar lloc a sortides diferents, diem que el sistema és estocàstic.*

Per exemple, el preamplificador L_a podria ser estocàstic si estigués sotmès a algun tipus de fluctuacions que fan que calgui considerar a α com una variable aleatòria.

Hi ha sistemes pels quals la sortida en un instant donat no depèn dels valors de l'entrada en instants anteriors. A l'exemple anterior això passa pel preamplificador i el limitador que només depenen del valor actual de $X(t)$, mentre que no passa per la reververació on la sortida en l'instant t depèn també de l'entrada en l'instant $t-T$.

Definició 5.2 *Un sistema és sense memòria si el valor de $Y(t)$ per cada t depèn exclusivament del valor de $X(t)$ per al mateix t.*

La característica principal que tindran els nostres sistemes és la linealitat. La transformació associada al sistema és lineal. Llavors val el principi de superposició. La sortida corresponent a la suma de dues entrades és la suma de les sortides corresponents a cada entrada.

Definició 5.3 *Un sistema és lineal si*

$$L[\lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t)] = \lambda_1 L[X_1(t)] + \lambda_2 L[X_2(t)], \tag{48}$$

on λ_1,λ_2 poden ser variables aleatòries però no dependre de t.

Tornant al nostre exemple, el preamplificador i la reverberació són lineals. Per exemple, comprovem-ho per a L_r:

$$L_r[\lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t)] = (\lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t)) + \beta(\lambda_1 X_1(t-T) + \lambda_2 X_2(t-T)) =$$

$$\lambda_1(X_1(t) + \beta X_1(t-T)) + \lambda_2(X_2(t) + \beta X_2(t-T)) =$$

$$\lambda_1 L_r[X_1(t)] + \lambda_2 L_r[X_2(t)].$$

En canvi, el limitador no és lineal. Prenem $X(t) = 0.8M$ constant. Aleshores tenim $L_l[X(t)+X(t)] = \min(1.6M,M) = M$, mentre que $L_l[X(t)] + L_l[X(t)] = \min(0.8M,M) + \min(0.8M,M) = 0.8M + 0.8M = 1.6M$. Així $L_l[X(t)+X(t)] \neq L_l[X(t)] + L_l[X(t)]$, contràriament a la condició de linealitat.

Els sistemes lineals són importants perquè el processament en circuits elèctrics sol tenir aquesta característica. La imatge que podem tenir d'un sistema lineal és la d'un circuit on $X(t)$ és el voltatge d'entrada i $Y(t) = L[X(t)]$ és el voltatge de sortida.

Dins dels sistemes lineals ens interesen aquells on la transformació no depèn explícitament del temps. Per això, és convenient definir les translacions temporals T_a que són un tipus particular de transformació (retard):

$$T_a[X(t)] = X(t-a). \tag{49}$$

Definició 5.4 *Un sistema és invariant en el temps si* $L[T_a[X(t)]] = T_a[L[X(t)]]$ *per a tot* a. *Això es pot expressar de manera equivalent dient que si* $X(t)$ *dóna la sortida* $Y(t)$, *llavors* $X(t-a)$ *dóna la sortida* $Y(t-a)$.

Si pensem L com un dispositiu físic que transforma un senyal, la invariància en el temps vol dir que la constitució d'aquest dispositiu és idèntica en tot t. A l'exemple del processador de so totes les transformacions són invariants en el temps. Una manera de fer que no ho fossin seria fer dependre les constants α,β,T,M del temps. A partir d'ara considerem només sistemes lineals invariants en el temps.

Una manera de caracteritzar un sistema lineal és a través de la seva funció de resposta impulsional. Aquesta és la sortida del sistema quan l'entrada és una delta de Dirac $\delta(t)$. Això conté tota la informació necessària per saber com es transforma qualsevol senyal, ja que tota funció es pot escriure com a superposició de deltes:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)X(\tau)d\tau. \tag{50}$$

L'anterior igualtat és simplement la definició de la funció delta. Ara la interpretem com una combinació lineal pensant en la integral com la versió contínua d'una suma. La funció $X(t)$ s'obté combinant les funcions $\delta_\tau(t) = \delta(t-\tau)$ amb coeficients $X(\tau)$.

Definició 5.5 *Definim la funció de resposta impulsional* h *d'un sistema lineal com a*

$$h(t) = L[\delta(t)]. \tag{51}$$

Coneixent $h(t)$ tenim que la resposta a una entrada arbitrària $X(t)$ es pot determinar fent una convolució:

$$L[X(t)] = (h * X)(t). \tag{52}$$

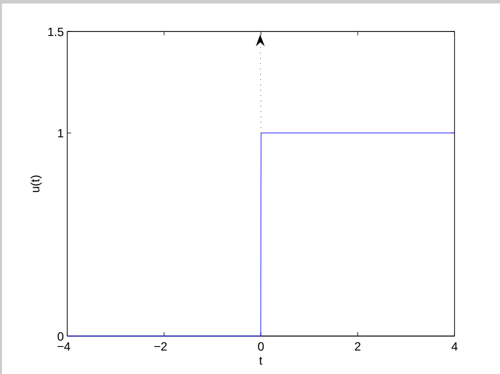
Demostració: Calculem l'acció de L sobre $X(t)$ expressant $X(t)$ com a superposició de funcions delta (equació 50):

$$L[X(t)] = L[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)X(\tau)d\tau] = \int_{-\infty}^{\infty} L[\delta(t-\tau)]X(\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)X(\tau)d\tau = (h * X)(t). \clubsuit$$

Exemple 5.2 *La funció de Heaviside o funció esglaó es defineix:*

$$u(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0, \\ 1 & si\ t \geq 0. \end{cases} \quad (53)$$



La funció de Heaviside $u(t)$

Quin significat té un sistema amb funció de transferència $h(t) = u(t)$? Vegem com es transforma una entrada $X(t)$:

$$L[X(t)] = L[\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)X(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} X(\tau)d\tau,$$

ja que

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 0 & si\ t < \tau, \\ 1 & si\ t \geq \tau. \end{cases}$$

i, per tant, la integració queda restringida a $\tau \leq t$.

Aquest sistema és, doncs, un "integrador". En cada instant ens dóna la integral fins a aquest moment de l'entrada.

5.2. Paràmetres d'un procés transformat linealment

Un procés estocàstic $X(t)$ es caracteritza principalment per les funcions valor mitjà $m(t)$ i autocorrelació $R(t_1,t_2)$. Si tenim altres processos, definim en general la funció de correlació de $X(t)$ i $Y(t)$

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E(X(t_1)Y(t_2)). \tag{54}$$

La funció d'autocorrelació de $X(t)$ s'escriu ara $R_{XX}(t_1,t_2)$. També indicarem el seu valor mitjà $m_X(t)$. L'operació L es fa sempre sobre funcions d'una variable. Quan el seu argument té dues variables, posem L_1 o L_2 per indicar que considerem la funció de la variable t_1 o t_2 i deixem l'altra com a paràmetre.

El següent resultat indica com obtenir els paràmetres de $Y(t) = L[X(t)]$ a partir dels de $X(t)$.

$$m_Y(t) = L[m_X(t)], \tag{55}$$

$$R_{XY}(t_1,t_2) = L_2[R_{XX}(t_1,t_2)], \tag{56}$$

$$R_{YY}(t_1,t_2) = L_1[R_{XY}(t_1,t_2)]. \tag{57}$$

Demostració:

$$m_Y(t) = L[Y(t)] = E(L[X(t)])$$

$$= E(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)X(\tau)d\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)E(X(\tau))d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)m_X(\tau)d\tau = (h * m_X)(t) = L[m_X(t)].$$

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E(X(t_1)Y(t_2))$$

$$= E(X(t_1)\int_{-\infty}^{\infty} h(t_2-\tau)X(\tau)d\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2-\tau)E(X(t_1)X(\tau))d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2-\tau)R_{XX}(t_1,\tau)d\tau = L_2[R_{XX}(t_1,t_2)].$$

$$R_{YY}(t_1,t_2) = E(Y(t_1)Y(t_2)]$$

$$= E(\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-\tau)X(\tau)d\tau Y(t_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-\tau)E(X(\tau)Y(t_2))d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-\tau)R_{XY}(\tau,t_2)d\tau = L_1[R_{XY}(t_1,t_2)]. \clubsuit$$

Finalment, trobem l'espectre de potència de $Y(t)$, $S_Y(f)$ a partir de $S_X(f)$. $X(t)$ és ara un procés estocàstic estacionari amb funció d'autocorrelació $R_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(t_2 - t_1)$. Per això necessitem un nou concepte.

Definició 5.6 *La funció de transferència del sistema és $H(f)$, la transformada de Fourier de la funció de resposta impulsional $h(t)$:*

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau. \tag{58}$$

Llavors tenim el següent resultat:

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f). \tag{59}$$

Abans de demostrar-lo recordem el teorema de convolució. Si les funcions $f(t)$ i $g(t)$ tenen les transformades de Fourier $F(f)$ i $G(f)$, llavors el seu producte de convolució $(f * g)(t)$ té transformada de Fourier $F(f)G(f)$. També tenim que $f(-t)$ es transforma en $F^*(f)$.

Demostració:

L'espectre de potència de $Y(t)$ s'obté fent la transformada de Fourier de $R_{YY}(t)$.

$$R_{XY}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - \tau)R_{XX}(t_1,\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - \tau)R_{XX}(\tau - t_1)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - t_1 - \tau)R_{XX}(\tau)d\tau,$$

on hem fet servir que R_{XX} depèn només de la diferència de temps i hem fet el canvi de variable $\tau \longrightarrow \tau + t_1$. Així, veiem que $R_{XY}(t_1,t_2)$ depèn només de $t_2 - t_1$. Ara obtenim

$$R_{YY}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - \tau)R_{XY}(\tau,t_2)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - \tau)R_{XY}(t_2 - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - t_2 - \tau)R_{XY}(-\tau)d\tau.$$

Així, veiem que R_{YY} s'obté de la convolució entre $h(t)$ i $R_{XY}(-t)$ i $R_{XY}(t)$ s'obté de la convolució entre $h(t)$ i $R_{XX}(t)$. Passant a transformades de Fourier

$$R_{XY}(-t) \longrightarrow [H(f)S_X(f)]^* = H^*(f)S_X(f)$$

$$R_{YY}(t) \longrightarrow S_Y(f) = H(f) \cdot H^*(f)S_X(f) = |H(f)|^2 S_X(f). \clubsuit$$

Relació entre els paràmetres de l'entrada $X(t)$ i de la sortida $Y(t)$ d'un sistema lineal L

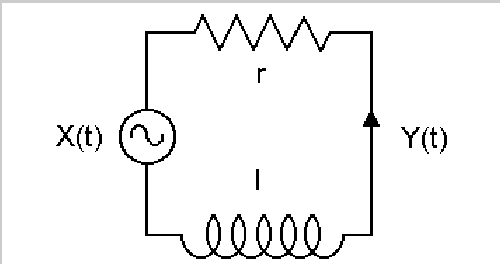
$$m_Y(t) = L[m_X(t)]$$

$$R_{XY}(t_1,t_2) = L_2[R_{XX}(t_1,t_2)]$$

$$R_{YY}(t_1,t_2) = L_1[R_{XY}(t_1,t_2)]$$

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

5.3. Exemple: circuit L-R



Circuit L-R

Considerem el sistema format per una resistència r i una bobina d'inductància l. L'entrada al sistema és el voltatge aplicat al circuit donat pel procés $X(t)$ i la sortida és la intensitat de corrent que hi circula $Y(t)$. Calculem la transformació $Y(t) = L[X(t)]$ i trobem la relació entre els espectres de potència de l'entrada i la sortida.

Donat $X(t)$ calculem $Y(t)$ resolent l'equació diferencial del circuit

$$l\frac{dY}{dt}(t) + rY(t) = X(t). \tag{60}$$

La solució de l'equació homogènia és $Y(t) = Ce^{-rt/l}$, on C és una constant. Ara trobem una solució particular de l'equació completa per variació de constants $Y_p(t) = C(t)e^{-rt/l}$ que implica en substituir en (60)

$$C(t) = \frac{1}{l}\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{r}{l}\tau} X(\tau)d\tau.$$

Llavors la solució general de (60) és

$$Y(t) = Ce^{-\frac{r}{l}t} + \frac{1}{l}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{r}{l}(t-\tau)}X(\tau)d\tau. \tag{61}$$

A (61) el primer terme és un transitori que desapareix passat un cert temps. Posarem $C = 0$, ja que ens interessa el corrent quan s'ha arribat a la situació estacionària. Comparant amb l'expressió general (vegeu l'equació 52)

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)X(\tau)d\tau \tag{62}$$

trobem

$$h(t) = \frac{1}{l}e^{-\frac{r}{l}t}u(t).$$

Ara tenim

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{l}e^{-\frac{r}{l}t}u(t)e^{-j2\pi ft}dt = \frac{1}{l}\int_{0}^{\infty} e^{-(\frac{r}{l}+j2\pi f)t}dt$$

$$= \frac{1}{r+jl2\pi f}.$$

Llavors (59) ens dóna

$$S_Y(f) = \frac{S_X(f)}{r^2 + l^2 4\pi^2 f^2}.$$

Notem que el denominador és Z^2, on $Z = \sqrt{r^2 + l^2 4\pi^2 f^2}$ és la impedància del circuit. Com sabem, la impedància ens dóna la mesura de l'energia dissipada al circuit (relació entre la potència de sortida i la potència d'entrada).

6. Resum

Definicions bàsiques

Procés estocàstic: $X(t), Y(t), \ldots$ Funció aleatòria que s'obté com a resultat d'un experiment aleatori.

Realització: Cadascuna de les funcions que s'obtenen en realitzar l'experiment aleatori.

Procés estocàstic a temps continu: $X(t)$ on t varia sobre tot un interval de nombres reals.

Procés estocàstic a temps discret: $X(t)$ on t pren només un conjunt numerable de valors.

Procés estocàstic d'estat continu: Quan $X(t)$ a t fixat és una variable aleatòria contínua.

Procés estocàstic d'estat discret: Quan $X(t)$ a t fixat és una variable aleatòria discreta.

Distribució probabilística dels processos estocàstics

Mostra d'ordre n: És el vector aleatori $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ format pels valors que pren el procés $X(t)$ en n instants fixats.

Funcions de distribució d'ordre n: $F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Són les funcions de distribució de les mostres d'ordre n. En particular:

- Funció de distribució de primer ordre: $F(x;\ t)$. És la funció de distribució de la variable $X(t)$ a t fixat.
- Funció de distribució de segon ordre: $F(x_1, x_2;\ t_1, t_2)$. És la funció de distribució del vector bidimensional $(X(t_1), X(t_2))$.

Funcions de densitat d'ordre n: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Són les funcions de densitat de les mostres d'ordre n d'un procés d'estat continu. En particular:

- Funció de densitat de primer ordre: $f(x;\ t)$. És la funció de densitat de la variable $X(t)$ a t fixat.

- Funció de densitat de segon ordre: $f(x_1,x_2;\ t_1,t_2)$. És la funció de densitat del vector bidimensional $(X(t_1),X(t_2))$.

Funcions de probabilitat d'ordre n: $P(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ t_1,t_2,\ldots,t_n)$. Són les funcions de probabilitat de les mostres d'ordre n d'un procés d'estat discret. En particular:

- Funció de probabilitat de primer ordre: $P(x;\ t)$. És la funció de probabilitat de la variable $X(t)$ a t fixat ($P(x;\ t) = P(X(t) = x)$).

- Funció de probabilitat de segon ordre: $P(x_1,x_2;\ t_1,t_2)$. És la funció de probabilitat del vector bidimensional $(X(t_1),X(t_2))$ ($P(x_1,x_2;\ t_1,t_2) = P(X(t_1) = x_1,X(t_2) = x_2)$).

Paràmetres dels processos estocàstics

Funció de valor mitjà: $m(t) = E(X(t))$.

Funció d'autocorrelació: $R(t_1,t_2) = E(X(t_1)X(t_2))$.

Funció d'autocovariància: $C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2)$.

Potència: $\mathrm{Pot}(t) = E(X(t)^2)$.

Espectre de potència (densitat espectral de potència): $S(f)$. És la transformada de Fourier de la seva funció d'autocorrelació: $S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$.

Estacionarietat

Procés estocàstic és estacionari en sentit estricte: Quan tota l'estadística del procés és invariant sota translacions temporals.

Procés estocàstic estacionari en sentit ampli: Quan $m(t) = m$ i $R(t_1,t_2) = R(t_2-t_1)$.

Tipus importants de processos estocàstics

Oscil·lació aleatòria: Procés estocàstic de la forma $X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, on A i B són variables aleatòries.

Procés estocàstic gaussià: Quan totes les seves mostres són vectors aleatoris gaussians.

Procés estocàstic de Poisson: Comptador d'esdeveniments en funció del temps.

Paràmetres del procés de Poisson:

$$m(t) = \lambda t,$$
$$R(t_1,t_2) = \lambda \min(t_1,t_2) + \lambda^2 t_1 t_2,$$
$$C(t_1,t_2) = \lambda \min(t_1,t_2),$$
$$\mathrm{Pot}(t) = \lambda t + \lambda^2 t^2.$$

Procés de senyal telegràfic aleatori: Signe ± 1 que canvia cada vegada que es produeix un esdeveniment.

Paràmetres del senyal telegràfic aleatori:

$$m(t) = 0,$$
$$R(t_1,t_2) = e^{-2\lambda|t_2-t_1|},$$
$$C(t_1,t_2) = e^{-2\lambda|t_2-t_1|},$$
$$\mathrm{Pot}(t) = 1.$$

Sistemes lineals

Sistema lineal: L. Transformació lineal que s'aplica a un procés $X(t)$ per obtenir un nou procés $Y(t) = L[X(t)]$.

Sistema lineal determinista: La sortida només depèn de l'entrada. El sistema no li afegeix caràcter aleatori.

Sistema lineal invariant en el temps: La sortida per una entrada retardada és el retard aplicat a la sortida per l'entrada sense retardar.

Funció de resposta impulsional d'un sistema lineal L: $h(t)$. És la sortida quan l'entrada és una funció delta (impuls): $h(t) = L[\delta(t)]$.

Funció de transferència d'un sistema lineal L: $H(f)$. És la transformada de Fourier de la funció de resposta impulsional $h(t)$: $H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$.

Relació entre els paràmetres de l'entrada X(t) i de la sortida $Y(t)$ d'un sistema lineal L:

$$m_Y(t) = L[m_X(t)],$$
$$R_{XY}(t_1,t_2) = L_2[R_{XX}(t_1,t_2)],$$
$$R_{YY}(t_1,t_2) = L_1[R_{XY}(t_1,t_2)],$$
$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f).$$