Annex. Teoremes de xarxes elèctriques

Oriol González Llobet
Asier Ibeas Hernández

PID_00190083

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

1. Elements bàsics d'anàlisi de circuits

1.1. Introducció

En aquest annex repassarem els teoremes bàsics que permeten fer l'anàlisi de circuits. És a dir, els teoremes que permeten calcular la intensitat i la caiguda de tensió en cada un dels elements que componen el circuit.

En primer lloc recordarem les definicions més importants que s'utilitzen en la formulació dels teoremes. A continuació, farem un repàs breu del conjunt d'elements circuitals clàssics, que són les resistències, els condensadors i les bobines. Posteriorment, es formularan els teoremes bàsics de l'anàlisi de circuits i els dos mètodes d'anàlisi més comuns: el mètode de les tensions de nodes i el mètode dels corrents de malla.

1.2. Definicions preliminars

Abans d'introduir els teoremes de circuits és recomenable recordar els conceptes més importants que en formen part. Això també servirà per a fixar la notació i la nomenclatura que s'utilitzarà en l'apèndix i en els móduls de l'assignatura.

- **Node.** És un punt on s'ajunten dos conductors o més.

- **Trajectòria.** Camí orientat entre dos nodes que passa una vegada i només una per cada component.

- **Llaç.** Trajectòria en la qual el node inicial i el final és el mateix. Es tracta per tant d'un camí en què l'origen coincideix amb el final. Pot ser **simple** si no es passa més d'un cop per cada node o **compost** si passa dues vegades per un node intermedi abans d'arribar al final.

- **Malla.** És un llaç simple.

- **Associació sèrie.** Un conjunt d'elements estan connectats **en sèrie** quan en aplicar una tensió en els extrems del conjunt passa la mateixa intensitat per tots els elements.

- **Associació paral·lel.** Un conjunt d'elements estan connectats **en paral·lel** quan en subministrar un corrent en els extrems del conjunt cau la mateixa tensió en tots els elements.

- **Circuit equivalent.** Es diu que dos circuits són equivalents respecte a dos terminals A i B quan, donats aquests nodes en un circuit, hi ha dos nodes en l'altre amb corrents i voltatges que coincideixen amb els de A i B.

- **Terminal o born.** És un extrem d'un component elèctric o electrònic.

- **Relació constitutiva.** S'anomena relació constitutiva d'un element la relació entre la intensitat que el recorre i la caiguda de potencial entre els seus terminals.

D'altra banda, una propietat important que pot tenir un dispositiu és la **linealitat**. Un dispositiu es diu que és **lineal** en el cas següent: suposem que amb una tensió d'entrada v_1 el corrent és i_1 i amb una tensió d'entrada v_2 el corrent és i_2. Aleshores, el dispositiu és lineal si amb una tensió d'entrada

$$v = av_1 + bv_2 \tag{1}$$

el corrent és

$$i = ai_1 + bi_2 \tag{2}$$

on a i b són nombres. La definició continua essent vàlida si intercanviem els papers del corrent i la tensió. La linealitat és una de les propietats més importants dels sistemes ja que permet simplificar-ne l'anàlisi enormement gràcies al **principi de superposició** que comentarem en l'apartat 1.4.6.

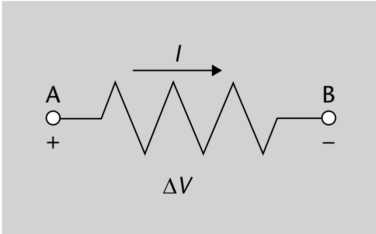
1.3. Components circuitals bàsics

En aquest apartat repassarem sumàriament les lleis constitutives dels elements circuitals bàsics, que són la resistència, el condensador i la bobina. Tots ells són dispositius lineals i donaran lloc, per tant, a circuits lineals on podrem aplicar el principi de superposició.

1.3.1. Resistència

La resistència és el component circuital més senzill. El seu símbol és el representat en la figura 1, on també podeu veure el conveni de potencials i de corrent elèctric utilitzats.

Figura 1. Símbol de la resistència



La relació constitutiva és l'equació que lliga la caiguda de potencial, $v(t)$, i el corrent, $i(t)$, entre els seus terminals i està definida per la **Llei d'Ohm** que lliga totes dues variables per mitjà del concepte de *resistència* representat per la lletra R i que es mesura en **ohms**, Ω.

La llei d'Ohm s'expressa matemàticament com a:

$$v(t) = Ri(t) \tag{3}$$

A partir de l'equació 3 es pot deduir que un ohm és la resistència elèctrica que hi ha entre dos punts d'un conductor quan una diferència de potencial constant d'un volt aplicada entre aquests dos punts produeix un corrent elèctric d'un amper.

Finalment, és interessant comentar que la magnitud inversa de la resistència se la denomina habitualment *conductancia, G*, definida per:

$$G = \frac{1}{R} \tag{4}$$

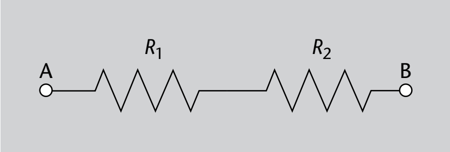
Associació de resistències

Les resistències es poden associar tant en sèrie com en paral·lel. Una associació de resistències es pot substituir per una **resistència equivalent**. La resistència equivalent té un valor apropiat de manera que el corrent que la travessa i la seva caiguda de potencial coincideix amb els que es mesurarien entre els terminals de l'associació de resistències original.

Les resistències equivalents de les associacions fonamentals són definides per les equacions següents:

- **Associació en sèrie.** En la figura 2 podeu veure les resistències R_1 i R_2 connectades en sèrie.

Figura 2. Associació de resistències en sèrie



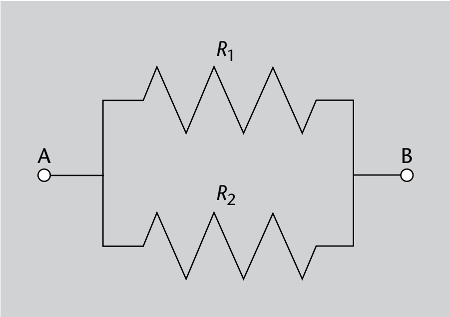
Aleshores, podem substituir aquesta associació per una única resistència equivalent de valor:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \tag{5}$$

- **Associació en paral·lel.** En la figura 3 podeu veure les resistències R_1 i R_2 connectades en paral·lel. Aleshores, podem substituir aquesta associació per una única resistència equivalent de valor,

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{6}$$

Figura 3. Associació de resistències en paral·lel



Les dues equacions es poden generalitzar al cas d'n resistències.

L'associació sèrie d'n resistències R_1, R_2, ..., R_n és definida per:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i \tag{7}$$

L'associació en paral·lel de n resistències R_1, R_2, ..., R_n és definida per:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \tag{8}$$

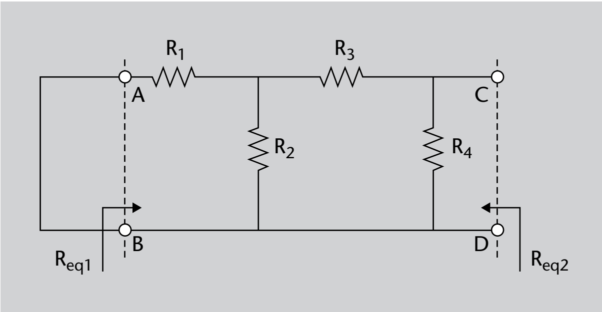
La resistència equivalent de l'associació en paral·lel s'obté aïllant R_{eq} de l'equació 8. La resistència equivalent de configuracions més complexes que involucrin resistències connectades en sèrie i paral·lel es pot obtenir aplicant repetidament les equacions 7 i 8 a subparts del circuit, com mostra l'exemple següent. És important tenir en compte que el valor de la resistència equivalent dependrà dels nodes respecte dels quals es calcularà.

Exemple 1

En el circuit de la figura 4 les resistències tenen els valors següents: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1K$.

Sovint escrivim el símbol $k\Omega$ (kiloohms) simplement com a K.

Figura 4. Circuit de l'exemple



a) Calculeu la resistència equivalent vista des dels terminals A-B (resistència R_{eq1}).
b) Calculeu la resistència equivalent vista des dels terminals C-D (resistència R_{eq2}).

Solució

Els primers cops que intenteu fer l'associació de diverses resistències, és convenient seguir els consells següents:

- Aïlleu la part on voleu calcular la resistència equivalent de la resta del circuit.
- Al principi, agrupeu només un element amb un element.
- Comenceu per la part més allunyada del punt des d'on vulgueu calcular la resistència equivalent.

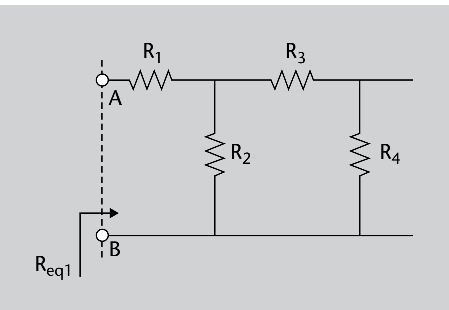
A mesura que us aneu trobant resistències associades, si veieu que totes dues estan unides per un terminal on no s'uneixen amb res més, estan associades en sèrie. Si veieu que totes dues resistències estan interconnectades pels dos terminals, estan en paral·lel.

Amb una mica de pràctica, anireu molt més de pressa, i no caldrà ni que aneu d'un en un, ni que comenceu per la part més allunyada al punt des d'on es vol calcular la resistència equivalent.

Resolem cada apartat:

a) Volem calcular la resistència equivalent del circuit de la figura 5.

Figura 5. Circuit de l'exemple on es calcula R_{eq1}

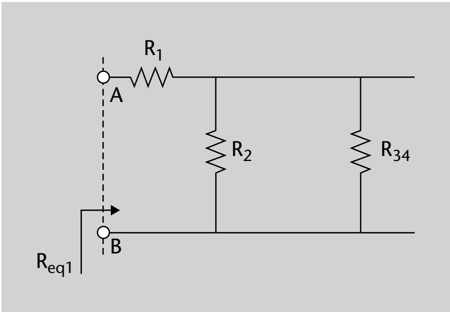


Observeu que hem aïllat les resistències (que a la figura 4 eren a mà dreta dels terminals A-B) de la resta del circuit (el curtcircuit que teníem a mà esquerra dels terminals). Comencem a calcular la resistència equivalent pel punt més allunyat dels terminals A-B, on ens trobem amb R_4. Aquesta resistència està connectada per un terminal a la R_3. En aquest mateix terminal, no hi ha res més connectat (vegeu que del mateix terminal hi surt un connector cap a mà dreta, però en aquest connector no hi ha res connectat). O sigui, que es troben en sèrie. R_{34} serà la resistència equivalent d'aquesta associació, i la calcularem de la manera següent:

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 1.000 + 1.000 = 2.000\ \Omega = 2\ \mathrm{K} \tag{9}$$

Amb aquesta associació, arribem a la figura 6.

Figura 6. Equivalent del circuit de l'exemple

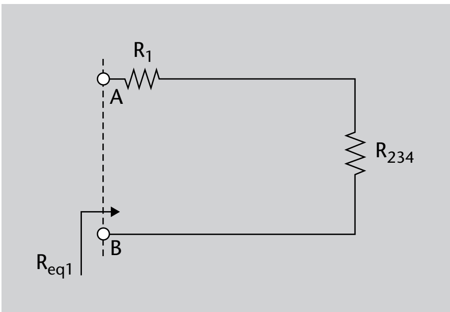


Seguint des del mateix punt, ens trobem que R_{34} i R_2 estan interconnectades pels seus dos terminals. És a dir, es troben en paral·lel. Anomenem R_{234} la seva resistència equivalent, que tindrà el valor següent:

$$R_{234} = \frac{R_2 \cdot R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{1.000 \cdot 2.000}{1.000 + 2.000} = 667\ \Omega \tag{10}$$

Un cop calculada aquesta resistència R_{234}, arribem al circuit equivalent de la figura 7:

Figura 7. Equivalent del circuit de l'exemple



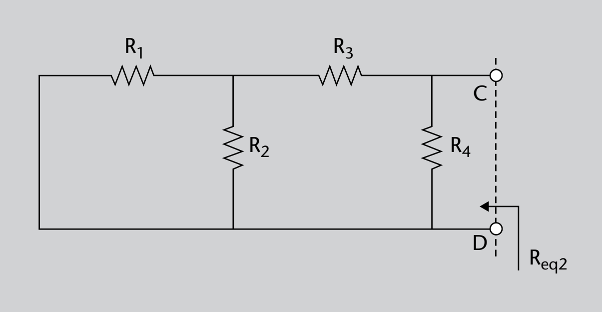
Finalment, vist des dels terminals A-B, les resistències R_1 i R_{234} comparteixen un terminal, o sigui que es troben en sèrie. La resistència R_{1234} resultant d'aquesta associació és la R_{eq1} que estem buscant:

$$R_{eq1} = R_{1234} = R_1 + R_{234} = 1.000 + 667 = 1.667\ \Omega \tag{11}$$

És a dir que, vist des dels terminals A-B, el circuit té una resistència equivalent de 1.667 Ω.

b) Volem calcular la resistència equivalent del circuit de la figura 8.

Figura 8. Circuit de l’exemple on es calcula R_{eq2}

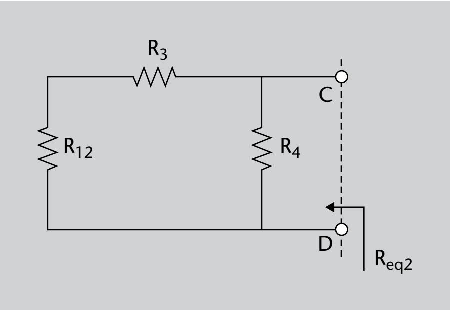


Per calcular la resistència equivalent des dels terminals C-D, comencem a associar pel punt del circuit més allunyat a aquests. És a dir, per R_1. A la figura 8 observem que té els seus dos terminals interconnectats amb R_2. O sigui, que estan en paral·lel. Anomenem R_{12} l’associació d’aquestes dues resistències:

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1.000 \cdot 1.000}{1.000 + 1.000} = 500\ \Omega \qquad (12)$$

Un cop calculada aquesta associació, ens trobem amb el circuit equivalent de la figura 9.

Figura 9. Circuit equivalent de l’exemple

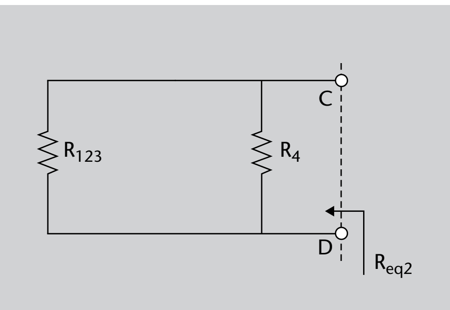


Si seguim pel punt més allunyat dels terminals C-D, ens trobem que R_{12} està connectada amb R_3 per un sol terminal, on no hi ha connectat res més. Estan associades en sèrie:

$$R_{123} = R_{12} + R_3 = 500 + 1.000 = 1.500\ \Omega \qquad (13)$$

En aquest cas, arribem al circuit equivalent de la figura 10.

Figura 10. Circuit equivalent de l’exemple



En aquesta figura observem que les resistències R_{123} i R_4 estan unides per ambdós terminals i, per tant, estan en paral·lel. La resistència R_{1234} resultant d’aquesta associació és la R_{eq2} que estem buscant:

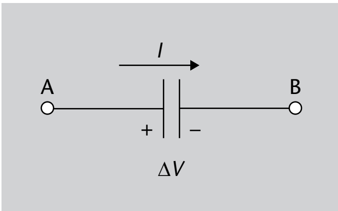
$$R_{Eq2} = R_{1234} = \frac{R_{123} \cdot R_4}{R_{123} + R_4} = \frac{1.500 \cdot 1.000}{1.500 + 1.000} = 600\ \Omega \qquad (14)$$

Com veieu, la resistència obtinguda en aquest apartat (R_{Eq2} = 600 Ω) té un valor diferent a l'obtinguda en l'apartat anterior (R_{Eq1} = 1.667 Ω), pel simple fet d'estar calculades des de punts diferents del circuit.

1.3.2. Condensador

El condensador és un dispositiu format per dos conductors aïllats entre si per mitjà d'un material aïllant. Cada un dels conductors s'anomena *armadura*. Les armadures estan connectades a una diferència de potencial que fa que cada una adquireixi una càrrega elèctrica igual en magnitud però de signe oposat, Q. El sistema format així té càrrega total zero, però tot i així es diu que el condensador està carregat amb Q, que és la càrrega en valor absolut de cada una d'elles. En la figura 11 podeu veure el símbol circuital d'un condensador.

Figura 11. Símbol circuital del condensador



La **capacitat**, C, és l'aptitud del condensador per a conservar les càrregues i és el parámetre que el caracteritza. La capacitat depèn de la geometria de les armadures, la separació i el material aïllant que se situa entre elles. Per exemple, per a un condensador de plaques paral·leles, la capacitat ve donada per:

$$C = \epsilon \frac{S}{d} \qquad (15)$$

on:

- ϵ és la permitivitat del dielèctric que se situa entre les armadures.
- S és la superfície de les armadures.
- d és la separació entre elles.

La unitat de la capacitat és el **faraday**, i el seu símbol és F. Matemàticament, la capacitat s'obté de dividir la càrrega emmagatzemada en una armadura entre la diferència de potencial entre elles:

$$q(t) = Cv(t) \qquad (16)$$

Si ara agafeu l'equació 16 i la deriveu respecte del temps obtindreu:

$$\frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{17}$$

d'on deduïu tenint en compte que $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ que:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{18}$$

que és l'equació que descriu el comportament del condensador. Un aspecte important de l'equació 18 és que implica que la tensió en els terminals del condensador no pot variar de manera abrupta. Això és degut al fet que la tensió seria la integral de la intensitat i, per tant, ha d'evolucionar de manera contínua i no permetre canvis abruptes (discontinuïtats). Ara és interessant estudiar el comportament del condensador en diferents situacions.

Comportaments del condensador

En aquest apartat analitzarem com es comporta un condensador en funció del tipus de tensió col·locant entre els terminals: tensió contínua i tensió alterna. Comencem amb el comportament en contínua i després passarem al d'alterna.

- **Comportament en corrent continu (DC).** Suposem que connectem al condensador una font de tensió contínua i per tant la tensió entre les plaques del condensador és constant, $v(t) = ct$. Aleshores, la derivada dv/dt és zero i de l'equació 18 deduïm que $i(t) = 0$. Per tant, no hi ha corrent a través del condensador i el component es comporta com un circuit obert entre els terminals.

- **Comportament en corrent altern (AC).** Per analizar el comportament en alterna del condensador calcularem primer la seva funció de transferència. La funció de transferència d'un condensador s'obté mitjançant la transformada de Laplace de l'equació 18. Si anomenem $I(s)$ la transformada de Laplace de $i(t)$

$$I(s) = L[i(t)] \tag{19}$$

i $V(s)$ la transformada de Laplace de $v(t)$

$$V(s) = L[v(t)] \tag{20}$$

aleshores la funció de transferència del condensador que a partir del corrent permet calcular la tensió vindrà donada per:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs} \tag{21}$$

Funció de transferència

La funció de transferència relaciona una variable d'entrada amb una altra de sortida. En aquest cas hem considerat com a entrada el corrent i com a sortida la tensió, atès que és el cas que ens interessa. Tanmateix, podria considerar-se un altre conjunt de variables d'entrada i sortida i parlar de la funció de transferència entre elles. La funció de transferència $Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$ se la denomina habitualment *impedància*.

De l'equació 21 podem obtenir la resposta en freqüència del condensador si fem el canvi $s = j\omega$:

$$\frac{V(j\omega)}{I(j\omega)} = \frac{1}{j\omega C} \tag{22}$$

Si aïllem $V(j\omega)$ de l'equació 22 obtindrem que

$$V(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{j\omega C} \tag{23}$$

on, si calculem el seu mòdul, obtenim:

$$|V(j\omega)| = \frac{|I(j\omega)|}{C\omega} \tag{24}$$

Podeu veure de l'equació 24 que, a mesura que la freqüència ω es fa més gran, el valor de la caiguda de potencial $|V(j\omega)|$ entre els terminals del condensador tendeix a zero, de manera que per a freqüències relativament altes, el condensador es comporta com un **curtcircuit**, ja que la diferència de potencial entre els terminals tendeix a anul·lar-se.

A tall de conclusió, podríem dir que un condensador es comporta com un circuit obert en contínua i aproximadament com un curtcircuit en alterna.

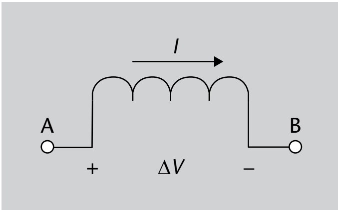
1.3.3. Bobina

Com ja sabeu de física, la **Llei d'Ampère** estableix que un corrent elèctric genera un camp magnètic. Ara construïm un camí imaginari tancat en un circuit elèctric i una superfície que s'hi recolzi. Aleshores fem el quocient del flux magnètic que travessa aquesta superfície, Φ, causat pel camp que crea el corrent, entre el corrent que talla aquesta superfície, I. Aquest quocient es denomina *autoinducció* del circuit i se'l denota amb la lletra L:

$$\Phi = Li \tag{25}$$

L'autoinducció, L, es mesura en **henrys** (denotat amb H) i depèn únicament de la geometria del circuit i de la permeabilitat magnètica del mitjà en què està submergit. Generalment, l'autoinducció en els circuits elèctrics sol ser petita. Per a aconseguir un valor elevat d'autoinducció, es pot agafar un filferro i enrollar-lo. Aleshores, el valor del flux es fa gran i s'obtenen valors significatius de L. El dispositiu format enrollant un filferro es denomina *bobina* i es representa circuitalment mitjançant el símbol de la figura 12, que recorda un filferro enrollat.

Figura 12. Símbol circuital de la bobina



Si la intensitat que circula pel circuit varia en el temps, $i = i(t)$, aleshores per l'acció de la **Llei de Faraday** s'indueix una força electromotriu que s'oposa a la variació de flux magnètic com estableix la **Llei de Lenz**. El valor (sense tenir en compte el signe) de la força electromotriu induïda s'obté derivant l'equació 25:

$$\frac{d\Phi}{dt} = v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{26}$$

que és l'equació que defineix el comportament d'una bobina. Igual que vam fer amb el condensador, ara estudiarem alguns casos especials del comportament de les bobines.

Comportament de les bobines

Resumirem el comportament de la bobina davant dels dos tipus possibles de corrents d'entrada: corrents continus (DC) i corrents alterns (AC).

- **Comportament en corrent continu (DC).** Si el corrent que travessa la bobina és constant $i(t) = ct$, aleshores la derivada és zero i per tant de l'equació 26 obtenim que $v(t) = 0$. La bobina es comporta com un curtcircuit.

- **Comportament en corrent altern (AC).** Igual que vam fer en el cas del condensador, per analizar el comportament de la bobina calcularem primer la seva funció de transferència. La funció de transferència de la bobina es pot calcular a partir de la transformada de Laplace de l'equació 26:

$$V(s) = LsI(s) \tag{27}$$

d'on la funció de transferència que a partir del corrent permet calcular la tensió (és a dir, la impedància de la bobina) resulta ser:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = Ls \qquad (28)$$

A partir de l'equació 28 podem obtenir la resposta en freqüència, amb el canvi $s = j\omega$:

$$\frac{V(j\omega)}{I(j\omega)} = j\omega L \qquad (29)$$

Si ara calculem el seu mòdul i aïllem la intensitat obtenim:

$$|I(j\omega)| = \frac{|V(j\omega)|}{\omega L} \qquad (30)$$

L'equació 30 permet deduir que a mesura que la freqüència es fa gran, el corrent que passa per la bobina es fa cada cop més petit i es comporta per a freqüències altes com un **circuit obert**.

A tall de conclusió, la bobina es comporta com un curtcircuit per a tensions de contínua i aproximadament com un circuit obert per a tensions en alterna.

Veiem que la bobina té el comportament contrari al condensador. Així ja tenim el comportament bàsic dels components que serviran de base per a construir els circuits elèctrics presentats en els diferents mòduls.

A continuació recordarem els teoremes bàsics d'anàlisi de circuits.

1.4. Teoremes d'anàlisi de circuits

L'objectiu d'aquest apartat és repassar els resultats fonamentals d'anàlisi de circuits elèctrics. Començarem per les lleis de Kirchhoff.

1.4.1. Lleis de Kirchhoff

Les lleis de Kirchhoff, que reben el nom de Gustav Kirchhoff, es divideixen en la primera llei de Kirchhoff o llei dels corrents i la segona llei de Kirchhoff o llei de les tensions.

Vegem-ne l'enunciat:

Llei dels corrents de Kirchhoff (Primera llei de Kirchhoff). La suma dels corrents que entren en un node ha de ser igual a la suma dels corrents que en surten.

Llei de les tensions de Kirchhoff (Segona llei de Kirchhoff). La suma algebraica de les tensions en una malla és zero.

Gustav Robert Kirchhoff

Físic prusià nascut el 1824. Féu múltiples contribucions a la física i a l'enginyeria elèctrica. En el camp de la física deduí la llei que porta el seu nom i que descriu la radiació del cos negre. En l'àmbit de l'enginyeria elèctrica, és responsable de les dues equacions que porten el seu nom i que permeten l'anàlisi dels circuits.

Recordeu que el concepte de malla s'ha definit en l'apartat 1.2. i que correspon a una trajectòria tancada. Per tant, podríem expressar la llei de tensions de Kirchhoff d'una manera equivalent dient que la suma de caigudes de potencial al llarg d'un camí tancat és zero.

Amb aquestes lleis es poden obtenir les variables elèctriques del circuit i per tant resoldre'l. En l'apartat 1.5. podreu trobar diverses aplicacions de les lleis de Kirchhoff en la solució de circuits elèctrics.

A continuació recordarem els teoremes de Thévenin i de Norton, que permeten obtenir circuits equivalents i faciliten l'anàlisi del circuit.

1.4.2. Teorema de Thévenin

La formulació del Teorema de Thévenin és la següent:

Teorema de Thèvenin. Tot circuit lineal pot ser substituït respecte de dos qualssevol dels seus terminals (A i B) per un circuit equivalent constituït per l'associació sèrie d'una font de tensió i una resistència.

El circuit equivalent que substitueix el circuit real entre els terminals A i B es denomina *equivalent Thévenin del circuit entre els terminals A i B*. El valor de la font de tensió de l'equivalent Thévenin es calcula com la tensió que apareix entre els terminals A i B quan estan en circuit obert.

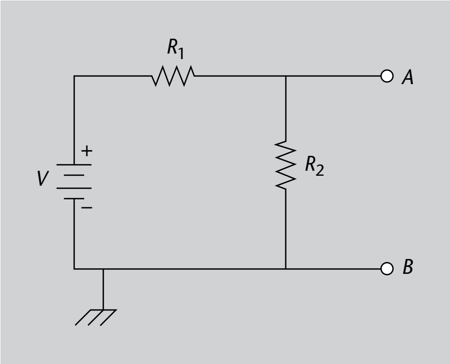
La resistència de l'equivalent Thévenin és la resistència equivalent que hi ha entre els terminals A i B. Per a calcular-la és necessari eliminar les fonts de tensió i de corrent, curtcircuitant les fonts de tensió i deixant en circuit obert les de corrent.

Vegem en un exemple com s'aplica el teorema de Thévenin.

Exemple 2

Calculeu l'equivalent Thévenin entre els punts A i B del circuit de la figura 13.

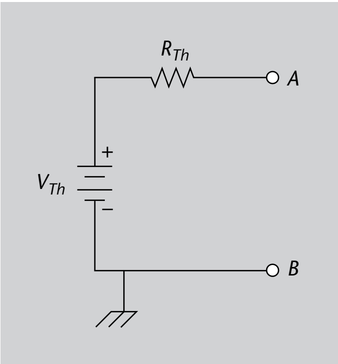
Figura 13. Circuit per al càlcul de l'equivalent Thévenin



Solució

El que volem quan apliquem el teorema de Thévenin és substituir el circuit de la figura 13 pel circuit equivalent de la figura 14, en el qual només apareix una font de tensió i una resistència col·locats en sèrie.

Figura 14. Circuit equivalent Thévenin buscat

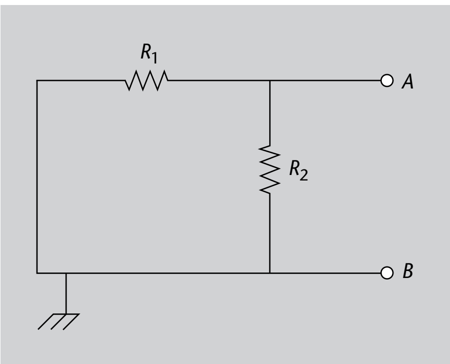


El càlcul de l'equivalent Thévenin consisteix, per tant, en el càlcul de la resistència equivalent, R_{Th}, i de la font de tensió equivalent, V_{Th}. Comencem amb la resistència equivalent.

Resistència equivalent

Per a calcular la resistència equivalent hem de posar totes les fonts de tensió en curtcircuit i totes les fonts de corrent en circuit obert. En aquest cas, només tenim una font de tensió que haurem de posar en curtcircuit, la qual cosa dóna lloc a l'esquema de la figura 15.

Figura 15. Resistència equivalent Thévenin entre A i B



La resistència de Thévenin, R_{Th} és la resistència equivalent del muntatge de la figura 15. Per a calcular la resistència equivalent, hem de tenir en compte els terminals respecte dels quals la volem calcular. Així, respecte dels terminals A i B, les resistències R_1 i R_2 estan col·locades en paral·lel. Per tant, la resistència equivalent de l'esquema, segons el que hem vist a l'apartat 1.3.1. és:

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{31}$$

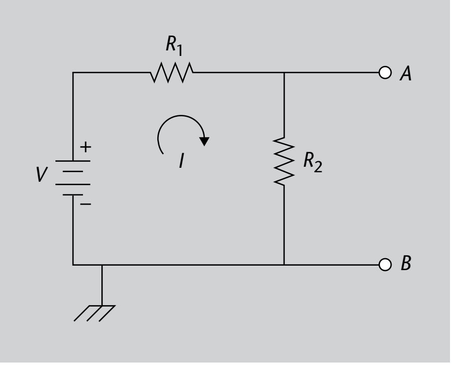
Un cop ja tenim el valor de la resistència equivalent, podem calcular el valor de la font de tensió de Thévenin, V_{Th}.

Font de tensió equivalent

Per al càlcul de la font de tensió equivalent, hem de calcular la diferència de potencial que hi ha entre els terminals A i B de la figura 13, considerant que estan en circuit obert. La font equivalent de Thévenin serà una font de tensió d'aquest valor concret. Hem de calcular per tant la caiguda de potencial entre A i B.

Veiem que la caiguda de potencial entre A i B és exactament la caiguda de tensió en la resistència R_2. Calcularem quant val la intensitat que circula per aquesta resistència i després n'obtindrem la diferència de potencial mitjançant la llei d'Ohm.

Figura 16. Circuit per al càlcul de la intensitat



La intensitat que circula pel circuit es calcula a partir de la llei de les malles de Kirchhoff aplicada al corrent mostrada en la figura 16:

$$-V + I(R_1 + R_2) = 0 \tag{32}$$

d'on:

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} \tag{33}$$

Per tant, la caiguda de potencial entre A i B, que és el valor de la font equivalent Thévenin, és:

$$V_{Th} = I \cdot R_2 = \frac{V}{R_1 + R_2} R_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V \tag{34}$$

i ja tindríem calculat el valor de l'equivalent Thévenin.

1.4.3. Teorema de Norton

La formulació del teorema de Norton és la següent:

> **Teorema de Norton**. Tot circuit lineal pot ser substituït respecte de dos qualssevol dels seus terminals (A i B) per un circuit equivalent constituït per l'associació paral·lel d'una font de corrent i una resistència.

El circuit equivalent que substitueix el circuit real entre els terminals A i B se'l denomina *equivalent Norton del circuit entre els terminals A i B*. Si comparem aquest teorema amb el de Thévenin, veiem que s'assemblen molt. La diferència entre els dos rau en el fet que el tipus d'associació dels elements canvia (a Norton és en paral·lel mentre que a Thévenin és en sèrie) i que la font de tensió de l'equivalent Thévenin es converteix en una font de corrent en l'equivalent Norton. El valor de la font de corrent de l'equivalent Norton es calcula com el corrent que apareix entre els terminals A i B quan estan en curtcircuit.

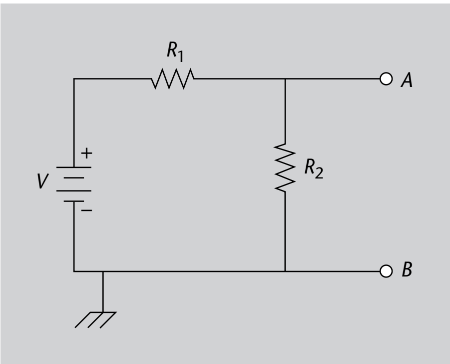
La resistència de l'equivalent Norton és la resistència equivalent que hi ha entre els terminals A i B. Per a calcular-la és necessari eliminar les fonts de tensió i corrent, curtcircuitant les fonts de tensió i deixant en circuit obert les de corrent.

Vegem en un exemple com s'aplica el teorema de Norton.

Exemple 3

Calculeu l'equivalent Norton entre els terminals A i B del circuit de la figura 17.

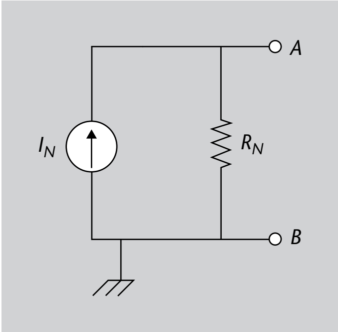
Figura 17. Circuit per al càlcul de l'equivalent Norton



Solució

El que volem en aquest exemple és convertir el circuit de la figura 17 en el circuit equivalent mostrat en la figura 18, en què només hi ha una font de corrent i una resistència connectats en paral·lel. Per a això hem de trobar el valor de la resistència equivalent, R_N, i el de la font de corrent equivalent, I_N. Comencem amb el valor de la resistència.

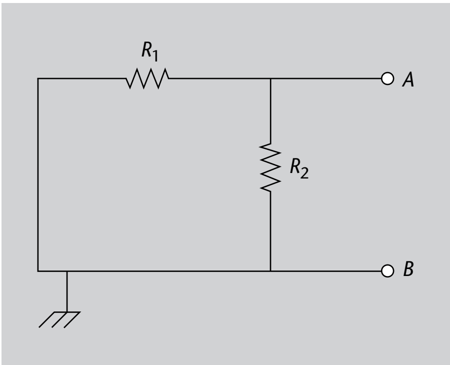
Figura 18. Circuit equivalent Norton buscat



Resistència equivalent

Per a calcular la resistència equivalent, hem de posar en la figura 17 les fonts de tensió en curtcircuit i les fonts de corrent en circuit obert. El resultat es mostra en la figura 19.

Figura 19. Resistència equivalent Norton entre A i B



Ara calculem la resistència equivalent d'aquest muntatge. Les dues resistències estan en paral·lel i per tant:

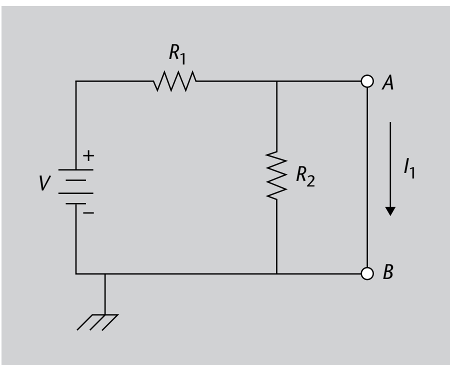
$$R_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{35}$$

que veiem que és la mateixa resistència que la que s'obtenia en calcular l'equivalent Thévenin. Ara calculem el corrent equivalent.

Càlcul del corrent equivalent

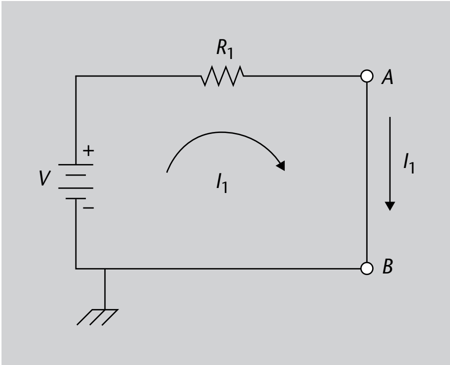
Per a calcular el corrent equivalent, hem de posar els terminals A i B en curtcircuit i obtenir així l'esquema de la figura 20.

Figura 20. Circuit per al càlcul del corrent equivalent entre A i B



El valor de la intensitat equivalent, I_N, és el corrent I_1, és a dir, $I_N = I_1$. Veiem que la resistència R_2 està en paral·lel amb el curtcircuit, així que es pot eliminar i obtenim el circuit de la figura 21.

Figura 21. Circuit simplificat per al càlcul del corrent equivalent entre A i B



A continuació calculem el valor del corrent I_1. Si apliquem la llei de Kirchhoff de les malles en la figura 21 obtenim:

$$-V + I_1 R_1 = 0 \tag{36}$$

d'on:

$$I_1 = \frac{V}{R_1} \tag{37}$$

i així:

$$I_N = \frac{V}{R_1} \tag{38}$$

i ja tenim l'equivalent Norton.

Finalment, cal comentar que hi ha una relació entre els valors de les resistències, el voltatge i el corrent dels equivalents Thévenin i Norton:

$$R_{Th} = R_N = R \tag{39}$$

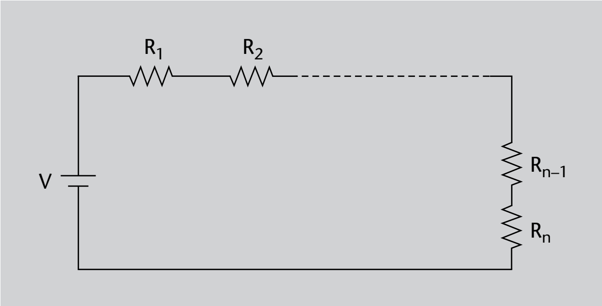
$$V_{Th} = I_N \cdot R \tag{40}$$

Podeu comprovar que se satisfan aquestes equacions en els exemples que hem presentat. Les lleis de Kirchhoff juntament amb els teoremes de Thévenin i de Norton seran les peces clau que ens permetran resoldre els circuits plantejats al llarg dels mòduls de l'assignatura.

1.4.4. Divisor de tensió

Un divisor de tensió és un circuit amb una configuració molt específica, on tenim una font de tensió i dues resistències o més associades en sèrie, com podeu veure en la figura 22.

Figura 22. Divisor de tensió amb diverses resistències



En aquest cas, podríem calcular la tensió que cau en una resistència concreta aplicant la llei d'Ohm, però el concepte de divisor de tensió ens facilita aquest càlcul.

En un **divisor de tensió**, on tenim una font de tensió (de valor V) alimentant diverses resistències en sèrie (que valen R_1, R_2, ..., R_n), podem calcular la tensió que cau en cadascuna d'elles mitjançant la fórmula següent:

$$V_{R_i} = V \cdot \frac{R_i}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n} \tag{41}$$

És a dir, la tensió es divideix de manera proporcional entre les resistències que hi intervenen. Cal tenir en compte que la fórmula obtinguda per al divisor de tensió és el mateix que obtindríem si apliquéssim la llei d'Ohm dos cops, primer per calcular el corrent total que travessa el conjunt de resistències, i després per calcular la tensió que cau en una resistència concreta. El concepte de divisor de tensió simplement ens agrupa aquests passos en una única fórmula més fàcil d'utilitzar.

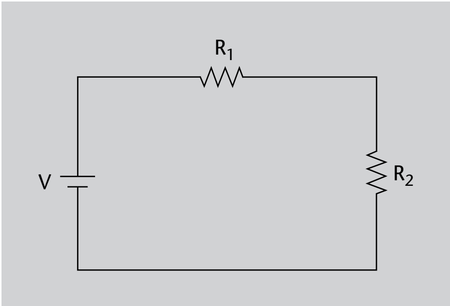
Si prenem l'exemple d'un circuit amb una font de tensió que alimenta dues resistències en sèrie, com es mostra en la figura 23, podem calcular la tensió que cau a cada resistència amb aquestes equacions:

$$V_{R_1} = V \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{42}$$

$$V_{R_2} = V \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{43}$$

En aquestes fórmules podem observar que la tensió serà major en la resistència de valor més gran.

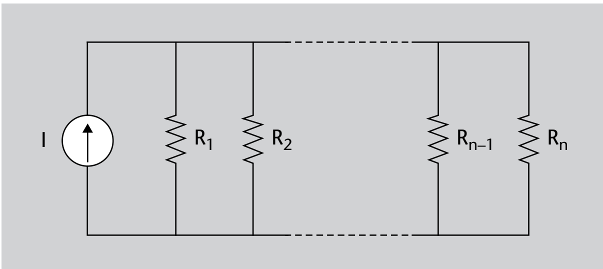
Figura 23. Divisor de tensió amb dues resistències



1.4.5. Divisor de corrent

El divisor de corrent és una configuració específica de circuit, en la qual ens trobem una font de corrent i diverses resistències associades en paral·lel, tal com es mostra a la figura 24.

Figura 24. Divisor de corrent amb diverses resistències



En aquest cas, el concepte de divisor de corrent ens facilita el càlcul del corrent que travessa cada resistència. Igual que el divisor de tensió, el divisor de corrent també és un resultat directe equivalent al procés que seguiríem aplicant la llei d'Ohm.

En un **divisor de corrent**, on tenim una font de corrent (de valor I) que alimenta diverses resistències en paral·lel (amb valors R_1, R_2, ..., R_n), el corrent que cau a cada resistència es pot calcular amb la fórmula següent:

$$I_{R_i} = I \cdot \frac{\frac{1}{R_i}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}} \tag{44}$$

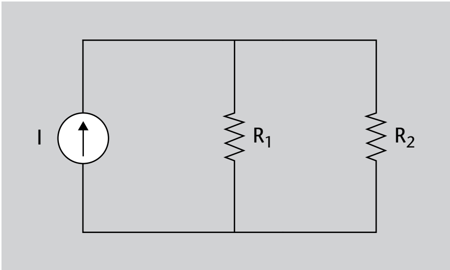
És a dir, la tensió es divideix de manera proporcional entre **l'invers** de les resistències que hi intervenen. És a dir, serà proporcional a les seves conductàncies.

Conductància

La **conductància** es defineix com la inversa de la resistència:

$$G = \frac{1}{R}$$

Figura 25. Divisor de corrent amb dues resistències



Per exemple, en el cas concret d'un divisor de corrent amb dues resistències com el mostrat a la figura 25, podem calcular el corrent que travessa cada resistència com a:

$$I_{R_1} = I \cdot \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = I \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2} \quad (45)$$

$$I_{R_2} = I \cdot \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = I \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2} \quad (46)$$

En aquestes fórmules podem observar que el corrent serà major en la conductància de valor més gran o, el que és el mateix, en la resistència de menor valor.

1.4.6. Principi de superposició

En l'apartat 1.2. hem definit què entenem per un circuit lineal. El principi de superposició es basa en aquest concepte per a ajudar-nos a analitzar circuits lineals que contenen més d'una font.

Segons el **principi de superposició**, si tenim un circuit lineal amb diverses fonts, podem analitzar la contribució que té cadascuna de les fonts per separat, i finalment sumar els resultats parcials.

Per a trobar la contribució d'una font del circuit, cal anul·lar la resta de les fonts, tenint en compte les regles següents:

- Per a anul·lar una **font de tensió**, l'hem de substituir per un **curtcircuit**.
- Per a anul·lar una **font de corrent**, l'hem de substituir per un **circuit obert**.

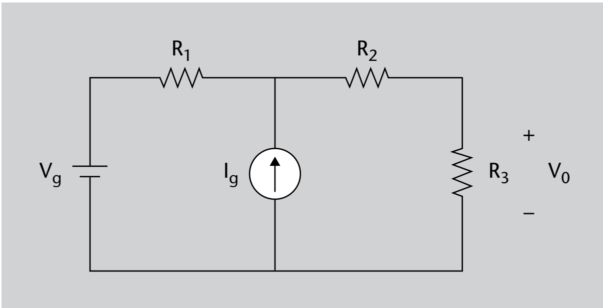
Fent aquestes substitucions, obtindrem tants subcircuits com fonts tingui el circuit original. Cadascun dels subcircuits el podem resoldre mitjançant qualsevol mètode d'anàlisi.

Comprovem com s'aplica el principi de superposició a un exemple concret.

Exemple 4

Els elements del circuit de la figura 26 tenen els valors següents: R_1 = 1 K, R_2 = R_3 = 2 K, V_g = 5 V, I_g = 10 mA.

Figura 26. Circuit de l'exemple



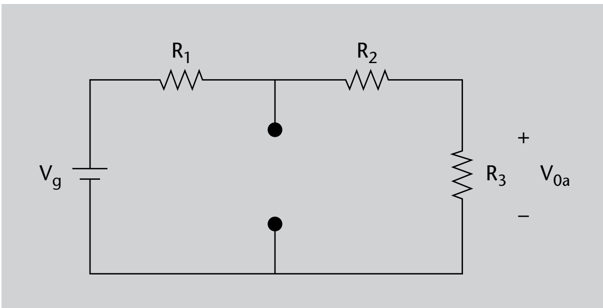
Aplicant el principi de superposició, calculeu la tensió que cau a la resistència R_3, indicada en la figura com a V_o.

Solució

En aplicar superposició, obtindrem dos subcircuits, perquè el nostre circuit inicial té dues fonts. En cadascun d'ells, desactivarem totes les fonts, tret d'una, i calcularem la seva aportació a V_o. Anomenarem V_{oa} la contribució de la font de tensió, i V_{ob} la contribució de la font de corrent.

- **Pas 1**. Contribució de V_g. Si partim del circuit de la figura 26 i anul·lem la font de corrent, substituint-la per un circuit obert, obtenim la figura 27.

Figura 27. Circuit per a calcular la contribució de V_g

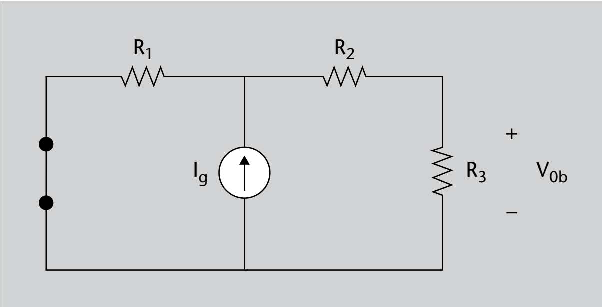


Per la configuració del circuit, que conté una font de tensió en sèrie amb tres resistències, observeu que podem calcular la tensió V_{oa} directament mitjançant el concepte de divisor de tensió que heu estudiat a l'apartat 1.4.4.:

$$V_{oa} = V_g \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 5 \cdot \frac{2.000}{1.000 + 2.000 + 2.000} = 2 \text{ V} \quad (47)$$

- **Pas 2**. Contribució de I_g. En el circuit original (figura 26), anul·lem la font de tensió substituint-la per un curtcircuit, tal com es mostra a la figura 28.

Figura 28. Circuit per a calcular la contribució de I_g

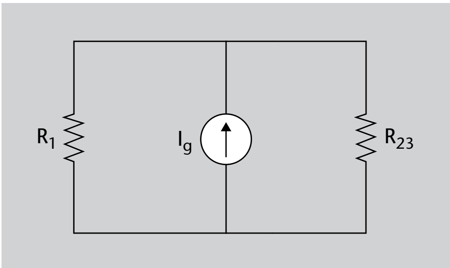


En aquest cas, per exemple, resoldrem el subcircuit aplicant un divisor de corrent. Primer, simplificarem una mica el circuit. Les resistències R_2 i R_3 estan associades en sèrie, perquè es troben en la mateixa branca, unides per un sol terminal. Anomenem R_{23} la resistència equivalent de la seva associació:

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 4.000\ \Omega = 4\ \text{K} \tag{48}$$

Com que R_2 i R_3 es trobaven en sèrie, el corrent que les travessava era el mateix, i també té el mateix valor que el corrent que passa per R_{23}. Amb aquesta associació, obtenim el circuit de la figura 29.

Figura 29. Circuit per a calcular la contribució de I_g



Si utilitzem el concepte de divisor de corrent, podem obtenir el corrent que passa per R_{23}:

$$I_{23} = I_g \cdot \frac{\frac{1}{R_{23}}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{23}}} = 0{,}01 \cdot \frac{\frac{1}{4.000}}{\frac{1}{1.000} + \frac{1}{4.000}} = 0{,}002\ \text{A} = 2\ \text{mA} \tag{49}$$

Com hem comentat abans, aquest valor coincideix amb el corrent que passa per la resistència R_3 del circuit original. Amb aquest valor, podem calcular la tensió de sortida V_{ob} mitjançant la llei d'Ohm:

$$V_{ob} = I_{23} \cdot R_3 = 0{,}002 \cdot 2.000 = 4\ \text{V} \tag{50}$$

- **Pas 3**. Càlcul de la V_o total. Un cop calculades les contribucions de cada font, podem aplicar el principi de superposició per a obtenir la tensió total que cau a la resistència R_3:

$$V_o = V_{oa} + V_{ob} = 2 + 4 = 6\ \text{V} \tag{51}$$

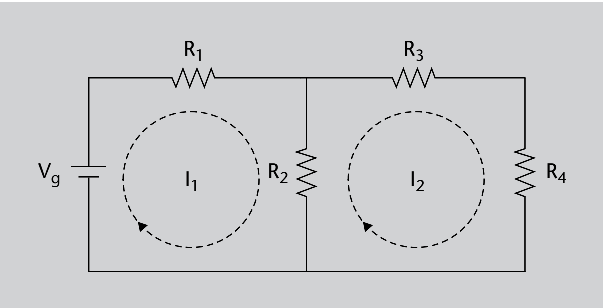
1.5. Altres mètodes d'anàlisi

En l'apartat anterior hem après els teoremes, les lleis i els principis bàsics que ens permeten analitzar circuits electrònics. En aquest apartat veurem dos nous mètodes d'anàlisi basats en les lleis anteriors, fet que amplia les nostres opcions a l'hora d'afrontar l'anàlisi d'un circuit. En el subapartat 1.5.1. veureu el mètode dels corrents de malla, i en el subapartat 1.5.2. aprendreu a utilitzar el mètode de les tensions de node.

1.5.1. Mètode dels corrents de malla

El **mètode dels corrents de malla** o resolució **per malles** es basa a assignar a les malles tancades del circuit un corrent (anomenat **corrent de malla**) que circula per aquesta. En la figura 30, podeu veure un circuit on hem assignat aquests corrents de malla.

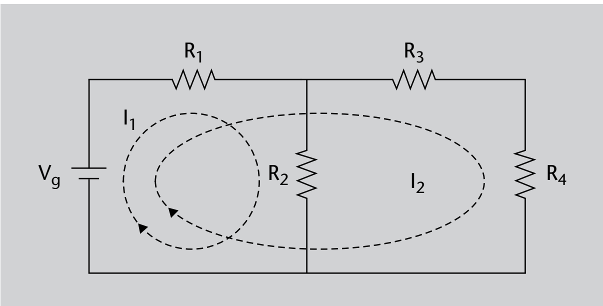
Figura 30. Corrents de malla



Aquests corrents de malla són ficticis. És a dir, no tenen per què coincidir amb els corrents que travessen cada element del circuit, però sí que hi tenen una certa relació. Per exemple, si observeu la figura 30, el corrent real que passa per R_2 no és ni I_1 ni I_2. El corrent real que passa per R_2 és $I_1 - I_2$ (és una resta perquè, en passar per R_2, els corrents I_1 i I_2 tenen sentits contraris) en sentit descendent (o $I_2 - I_1$ en sentit ascendent). En canvi, a R_1, el corrent real que la travessa sí que coincideix amb el corrent fictici I_1.

També és important fer una altra consideració. En la figura 30 no hem dibuixat tots els corrents de malla possibles. Per a resoldre un circuit per malles, només cal utilitzar un nombre de corrents de malla de manera que tots els elements del circuit estiguin travessats per un corrent de malla. A la figura 30 s'acomplia aquesta condició, però hi ha altres configuracions de corrents de malla que també són vàlides, com la mostrada a la figura 31.

Figura 31. Configuració alternativa dels corrents de malla



I podríem trobar més configuracions de corrents de malla vàlides. Tot i això, el més habitual és utilitzar els corrents de malla mostrats en la figura 30. Totes les configuracions ens portarien al mateix resultat, tot i que les equacions de partida serien diferents.

Un cop assignats els corrents de malla necessaris al circuit, la resolució per malles consisteix a aplicar la llei de Kirchhoff de les tensions a cada malla. És a dir, a cada malla s'ha de donar que la suma de les tensions ha de ser zero. En les resistències que hi hagi, com que no sabem quina és la tensió que hi cau, utilitzem la llei d'Ohm ($V = I \cdot R$) per a posar-la en funció dels corrents de malla.

És important que a cada malla apliqueu la llei de Kirchhoff de les tensions seguint un sentit concret (en sentit horari o antihorari). Normalment, se segueix el mateix sentit en què s'hagi dibuixat el corrent de malla (en les dues figures anteriors, hem dibuixat tots els corrents de malla en sentit horari). Per a les fonts de tensió, si el sentit que seguim entra pel seu terminal positiu i surt pel negatiu, la tensió es veurà positiva a la nostra equació de malla. Contràriament, si el sentit que seguim entra pel seu terminal negatiu i surt pel positiu, a la nostra equació de malla s'hi veurà negativa.

Amb això, obtindrem un sistema d'equacions (o, en el cas de circuits amb una sola malla, una equació) que podem resoldre mitjançant qualsevol mètode de resolució de sistemes (reducció, igualació, substitució, Cramer o Gauss).

Resumint, per a resoldre un circuit per mitjà del sistema dels corrents de malla cal seguir el procediment següent:

1) Dibuixeu els corrents de malla en el circuit.

2) Per a cada malla, apliqueu la **llei de Kirchhoff de les tensions**.

3) En les resistències, apliqueu la **llei d'Ohm**.

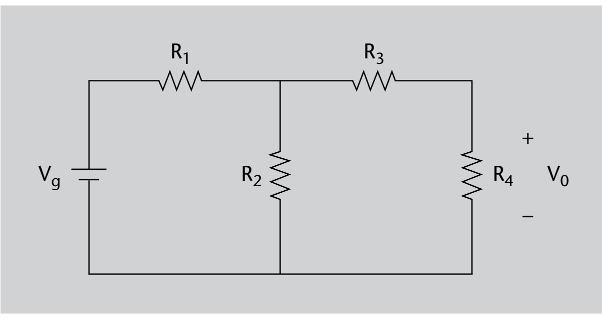
4) Resoleu el sistema d'equacions resultant.

Veureu més clarament com s'utilitza aquest mètode amb l'exemple següent.

Exemple 5

En el circuit de la figura 32, les resistències tenen els valors següents: R_1 = 1 K, R_2 = 2 K, R_3 = 3 K i R_4 = 4 K. La font genera una tensió de V_g = 10 V.

Figura 32. Circuit de l'exemple

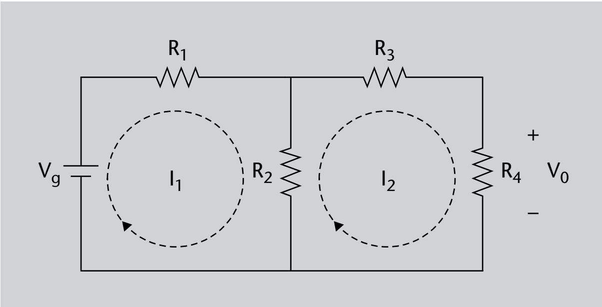


Calculeu la tensió V_o que cau a la resistència R_4. Resoleu el circuit per malles.

Solució

Seguim el procediment indicat per a resoldre el circuit per malles. El primer que cal fer és dibuixar els corrents de malla, com podeu veure a la figura 33.

Figura 33. Circuit de l'exemple amb els corrents de malla



Ara, apliquem a cada malla la llei de Kirchhoff de les tensions, i substituïm a cada resistència el seu valor en referència als corrents de malla, aplicant la llei d'Ohm. Cada malla la seguim en el mateix sentit indicat pel seu corrent de malla. Si us fixeu en la figura 33, el corrent de malla I_1 entra en la font de tensió pel seu terminal negatiu. Com hem comentat abans, això implica que a l'equació de la primera malla apareix amb signe negatiu.

$$\textbf{Malla 1: } -V_g + V_{R_1} + V_{R_2} = -V_g + R_1 I_1 + R_2(I_1 - I_2) = 0 \quad (52)$$

$$\textbf{Malla 2: } V_{R_2} + V_{R_3} + V_{R_4} = R_2(I_2 - I_1) + R_3 I_2 + R_4 I_2 = 0 \quad (53)$$

Observeu que, a cada malla, el valor que hem utilitzat per a V_{R_2} és lleugerament diferent. Això és degut al fet que la primera malla l'hem recorregut en el sentit de I_1. Quan aquest corrent arriba a R_2, està en sentit descendent, però I_2 està en sentit ascendent. Per això, en la malla 1 tenim que V_{R_2} val $R_2(I_1 - I_2)$. Si fem el mateix raonament a la malla 2, que hem seguit en el sentit de I_2, veurem que en aquest cas hem d'agafar un V_{R_2} de valor $R_2(I_2 - I_1)$.

Ara ja només cal resoldre el sistema de dues equacions amb dues incògnites que hem obtingut. Per començar, el més senzill és reescriure les equacions de cada malla, agrupant els termes pels corrents de malla:

$$\textbf{Malla 1: } -V_g + I_1(R_1 + R_2) - R_2 I_2 = 0 \quad (54)$$

$$\textbf{Malla 2: } -I_1 R_2 + I_2(R_2 + R_3 + R_4) = 0 \quad (55)$$

Substituïm els valors de les resistències i de la font de tensió:

$$\textbf{Malla 1: } -10 + 3.000 I_1 - 2.000 I_2 = 0 \quad (56)$$

$$\textbf{Malla 2: } -2.000 I_1 + 9.000 I_2 = 0 \quad (57)$$

Ara ja podem resoldre aquest sistema d'equacions. Per exemple, utilitzarem el mètode de substitució. Aïllem I_1 a l'equació de la malla 2 i substituïm el seu valor a l'equació de la malla 1:

$$I_1 = \frac{9.000}{2.000} \cdot I_2 = 4{,}5 I_2 \quad (58)$$

$$-10 + 3.000 \cdot 4{,}5 I_2 - 2.000 I_2 = 0 \Longrightarrow I_2 = 8{,}7 \cdot 10^{-4}\ \text{A} = 0{,}87\ \text{mA} \quad (59)$$

Si obtinguéssim els valors de tots els correns de malla, podríem calcular la tensió en qualsevol element del circuit. Però, en aquest cas, com que volem calcular la tensió a la resistència R_4, només necessitem tenir el valor del corrent de malla I_2. Si observeu la figura 33, podeu obtenir la tensió V_o com a:

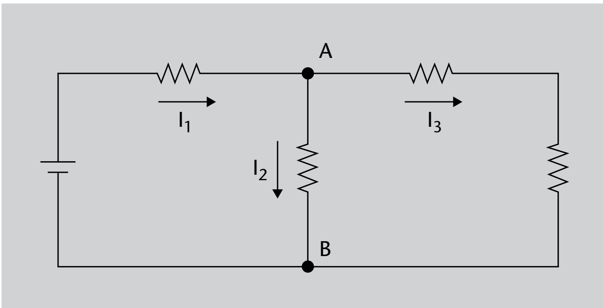
$$V_o = V_{R_4} = R_4 \cdot I_2 = 4.000 \cdot 8{,}7 \cdot 10^{-4} = 3{,}48 \text{ V} \tag{60}$$

1.5.2. Mètode de les tensions de node

El **mètode de les tensions de node** o resolució **per nusos** es basa a assignar un nom a cada node on s'uneixin tres o més elements. Un d'aquests nodes serà la massa del circuit (o punt de tensió 0 V), i les tensions de tots els altres nodes seran en referència a aquesta. A més, també ens interessa dibuixar el corrent que travessa cada branca.

Per exemple, hem assignat els noms als nodes de la figura 34.

Figura 34. Tensions de node



El més habitual és considerar el node inferior (B) com a massa (sempre que no ens hagin indicat on és la massa) i, per tant, la seva tensió seria de 0 V. La tensió en el node A serà V_A.

Tot i que en principi només prenem en consideració nodes on s'uneixin tres o més elements, en algun cas ens pot interessar utilitzar també algun node on només s'uneixin dos elements, si la tensió que hi ha en aquest node ens és útil per al resultat final que estem calculant.

Un cop tenim marcats els nodes i els corrents de cada branca, s'ha d'aplicar a cada node marcat (tret del de massa) la llei de Kirchhoff dels corrents. Per a identificar el corrent que travessa cada branca, aplicarem la llei d'Ohm a les resistències que hi hagi. Per a utilitzar la llei d'Ohm, és molt important el sentit amb el qual està dibuixat el corrent. Tenint en compte aquest sentit, el corrent que travessa cada resistència val:

$$I = \frac{V_{inicial} - V_{final}}{R} \tag{61}$$

Un cop obtenim aquestes equacions, només cal resoldre el sistema d'equacions resultant.

En resum, per a resoldre un problema per nusos podem seguir el procediment següent:

1) Indiqueu en el circuit tots els nodes (unions de tres elements o més) i assigneu a un d'ells la funció de **massa** (si no està indicat quin fa aquesta funció).

2) Indiqueu en el circuit el corrent que circula per cada branca.

3) Apliqueu la **llei de Kirchhoff dels corrents** en cada node (tret del de massa).

4) En les resistències, apliqueu la **llei d'Ohm**.

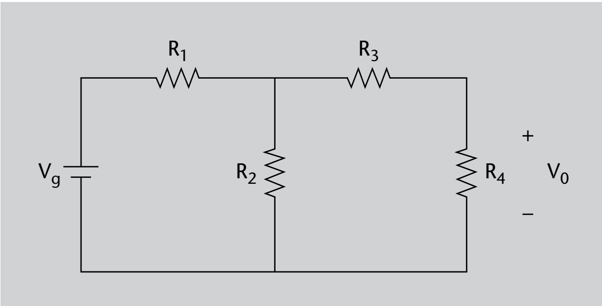
5) Resoleu el sistema d'equacions resultant.

Observeu com s'aplica el mètode de les tensions de node en l'exemple següent.

Exemple 6

En el circuit de la figura 35, les resistències tenen els valors següents: R_1 = 1 K, R_2 = 2 K, R_3 = 3 K i R_4 = 4 K. La font genera una tensió de V_g = 10 V.

Figura 35. Circuit de l'exemple



Calculeu la tensió V_o que cau a la resistència R_4. Resoleu el circuit per nusos.

Solució

Observeu que ja hem fet servir aquest circuit anteriorment per a explicar altres mètodes d'anàlisi de circuits. Això ens anirà bé per a comprovar que, a l'hora d'estudiar un circuit, podem triar quin mètode utilitzem, i el resultat final serà el mateix.

Per a resoldre el circuit per nusos, tornem a dibuixar el circuit i assignem els noms als nodes amb tres o més elements, i els corrents a cada branca. Vegeu com queda a la figura 36.

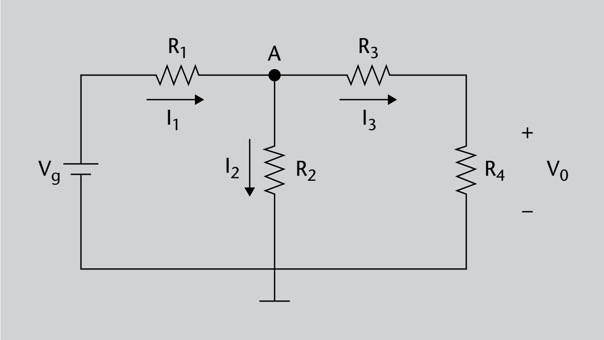
Observeu a la figura 36 com hem indicat que el node inferior és el que considerem massa. Com que la majoria de cops s'utilitza aquest node com a massa, molts cops s'obvia el símbol que l'identifica com a tal, però en aquest exemple l'hem deixat.

A més, com que en aquest exemple busquem la tensió que cau a R_4, hauríem pogut marcar com a node el terminal superior d'aquesta resistència. Al final de l'exemple veurem com es resoldria el circuit d'aquesta manera.

De moment, però, partim de la figura 36. Si apliquem al node A la llei de Kirchhoff dels corrents, obtenim:

$$\sum I_{entrada} = \sum I_{sortida} \Longrightarrow I_1 = I_2 + I_3 \tag{62}$$

Figura 36. Circuit de l'exemple amb els nodes i els corrents de branca indicats



Trobem ara el valor de cada corrent de branca, aplicant la llei d'Ohm a les seves resistències. Observem com estan dibuixades les fletxes que indiquen el sentit del corrent a cada branca de la figura 36 per a identificar quina és la $V_{inicial}$ i la V_{final} (tal com les hem utilitzat en l'equació 61), i obtenim l'equació següent:

$$\frac{V_g - V_A}{R_1} = \frac{V_A - 0}{R_2} + \frac{V_A - 0}{R_3 + R_4} \tag{63}$$

Com que només hem tingut en compte un node, arribem a una sola equació amb una incògnita, i no a un sistema d'equacions. La resolem per tal d'obtenir el valor de la tensió en el node A:

$$\frac{10 - V_A}{1.000} = \frac{V_A}{2.000} + \frac{V_A}{7.000} \Longrightarrow 0{,}01 = V_A \cdot \left(\frac{1}{1.000} + \frac{1}{2.000} + \frac{1}{7.000}\right) \tag{64}$$

$$V_A = 6{,}09 \text{ V} \tag{65}$$

Ja tenim el valor de la tensió V_A, però la que realment ens interessa és V_o, la tensió que cau a la resistència R_4. Podem calcular-la a partir de V_A obtenint primer el corrent I_3 i multiplicant-lo després per R_4:

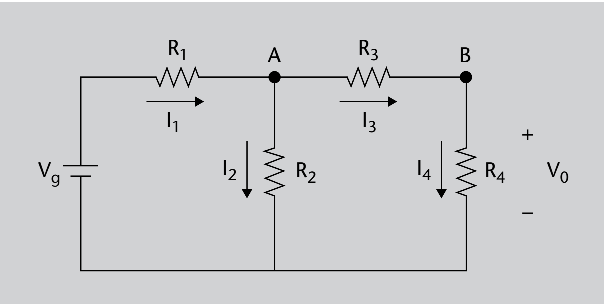
$$I_3 = \frac{V_A - 0}{R_3 + R_4} = \frac{6{,}09}{7.000} = 8{,}7 \cdot 10^{-4} \text{ A} = 0{,}87 \text{ mA} \tag{66}$$

$$V_o = I_3 \cdot R_4 = 8{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot 4.000 = 3{,}48 \text{ V} \tag{67}$$

Solució alternativa

Vegem com se solucionaria aquest exercici si tinguéssim en compte com a node el terminal superior de R_4. És a dir, tal com es mostra a la figura 37.

Figura 37. Circuit de l'exemple amb els nodes i els corrents de branca indicats



Fixeu-vos que B no seria un node pròpiament dit, perquè no s'hi uneixen tres elements o més, només dos. En aquest cas, a més d'indicar el node B (que tindrà una tensió V_B) també hem assignat el corrent I_4 a la branca de R_4. Observeu que V_B coincideix amb la tensió V_o, que és la que volem calcular. Obtinguem les equacions de cada node:

$$\textbf{Node A: } I_1 = I_2 + I_3 \Longrightarrow \frac{V_g - V_A}{R_1} = \frac{V_A - 0}{R_2} + \frac{V_A - V_B}{R_3} \tag{68}$$

$$\textbf{Node B: } I_3 = I_4 \Longrightarrow \frac{V_A - V_B}{R_3} = \frac{V_B - 0}{R_4} \tag{69}$$

Desenvolupem l'equació 69 per trobar V_A en funció de V_B i la substituïm a l'equació 68.

$$V_A = V_B \cdot \frac{R_3 + R_4}{R_4} = \frac{7}{4} V_B \tag{70}$$

$$\frac{V_g - \frac{7}{4}V_B}{R_1} = \frac{\frac{7}{4}V_B}{R_2} + \frac{\frac{7}{4}V_B - V_B}{R_3} \tag{71}$$

$$\frac{10 - \frac{7}{4}V_B}{1.000} = \frac{\frac{7}{4}V_B}{2.000} + \frac{\frac{3}{4}V_B}{3.000} \Longrightarrow 0{,}01 = V_B \cdot \left(\frac{7}{4.000} + \frac{7}{8.000} + \frac{1}{4.000}\right) \tag{72}$$

$$V_B = 3{,}48 \text{ V} \tag{73}$$

Com veieu, el resultat, com era de preveure, és exactament el mateix que quan només havíem utilitzat el node A.