Sistemes lineals

Josep Maria Aroca

PID_00193853

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

Fins ara hem vist maneres de representar i estudiar fenòmens que ens podem trobar en la realitat. En particular, hem vist com podem analitzar senyals. Per a fer-ho hem estudiat una sèrie de variables aleatòries i de processos estocàstics, cadascun amb les seves característiques particulars. Hem vist també que cada tipus de variable o procés ens anava bé per a modelitzar un determinat fenomen.

En l'àmbit de telecomunicacions molt freqüentment treballem amb circuits electrònics. Podem veure un circuit electrònic com una caixa negra on introduïm un senyal d'entrada, aquest senyal es processa i obtenim un senyal de sortida. Hem vist que podem modelitzar un senyal qualsevol d'entrada amb un procés estocàstic o una variable aleatòria. Què succeeix quan aquest senyal aleatori és processat per un circuit? Normalment, tindrem dispositius que rebran una certa "entrada" i voldrem saber com actua el circuit sobre l'entrada per a conèixer quin serà el comportament del senyal a la sortida. Per exemple:

- Per a avaluar la qualitat d'un sistema de compressió d'arxius de música, necessitem caracteritzar estadísticament com a procés estocàstic aquest tipus de senyal musical. Així, podem calcular el valor mitjà de la distorsió i decidir si és acceptable o no.

- Per a dimensionar correctament una xarxa de comunicacions necessitem saber quina és la distribució estadística de la xarxa de trànsit per la qual passen els paquets de dades. D'aquesta manera podem dissenyar el sistema per tal que la probabilitat que es perdin paquets o que el retard mitjà no superi un màxim permès siguin els adequats.

- L'ús de filtres en el processament de senyals, ja sigui per a obtenir una determinada informació que es troba dins del senyal o per a eliminar parts de senyal o soroll no desitjat, per exemple. Els filtres també s'utilitzen per a transformar un senyal i per a predir alguns valors futurs a partir de mostres de senyal presents i passat.

En aquest punt ja tenim caracteritzats els tipus de senyals de què partim, els hem vist en mòduls anteriors. El que farem en aquest mòdul és veure quina és la resposta que un sistema de telecomunicacions lineal té a un senyal d'entrada que és un procés aleatori. Els sistemes per considerar poden ser tant continus com tenir una resposta que es restringeix a un conjunt possible de sortides (sistemes discrets). Modelitzarem el nostre circuit o sistema lineal (que considerarem com una caixa negra) com un conjunt d'operacions determinades i estudiarem com és el senyal de sortida que es genera.

En l'apartat 1 definirem què entenem per sistema lineal i veurem algunes propietats d'aquest tipus de sistemes. Seguidament, en l'apartat 2 estudiarem com un procés estocàstic queda transformat en un altre procés estocàstic quan passa per un sistema lineal i veurem quins paràmetres poden relacionar els dos processos. En l'apartat 3 d'aquest mòdul veurem què entenem per estimació lineal. A grans trets, podem dir que estimar una variable és fer-ne una predicció. Veurem que una de les aplicacions dels sistemes lineals és fer aquest tipus de prediccions. Aquesta és una aplicació molt important, ja que ens permet fer una planificació adient de recursos de telecomunicacions (nombre d'encaminadors en una xarxa, capacitat d'enllaços, nombre de servidors per a una determinada aplicació, etc.) en funció de les prediccions que fem.

Objectius

Els objectius que ha d'assolir l'estudiant un cop treballats els materials didàctics d'aquest mòdul són:

1. Entendre el concepte de sistema lineal i veure'n les característiques.
2. Entendre els conceptes de determinisme i invariància temporal en els sistemes lineals.
3. Treballar amb els elements que caracteritzen un sistema lineal: funció de resposta impulsional i funció de transferència.
4. Diferenciació dels sistemes amb memòria i sense.
5. Entendre com es transforma un senyal d'entrada aleatori quan passa per un sistema lineal.
6. Calcular els paràmetres a la sortida d'un sistema lineal i relacionar-los amb els paràmetres d'entrada.
7. Definir i entendre què és un estimador lineal i veure alguns exemples d'aplicació.

1. Definició de sistema lineal. Determinisme, invariància temporal

Començarem aquest apartat definint què és un sistema lineal mitjançant un exemple.

Exemple 1.1

Tenim un circuit que tracta el so provinent d'un instrument musical. Aquest dispositiu que processa el senyal de so fa diferents operacions, com amplificar-lo o afegir diferents efectes. Aquest processador té una entrada on connectem l'instrument i una sortida per on surt el so processat. Anomenem $X(t)$ l'entrada i $Y(t)$ la sortida que posteriorment va a un sistema d'amplificació de potència i altaveus. Aquest sistema té diverses funcions seleccionables, de manera que amb un selector de funció triem quina transformació apliquem a $X(t)$. Algunes transformacions naturals en aquest context són:

- **Preamplificador**. Augmentem una mica el nivell de senyal. Fixem una constant $\alpha > 1$ i tenim $Y(t) = \alpha X(t)$. És a dir, el senyal de sortida és el mateix senyal d'entrada amplificat.

- **Limitador**. Retallem el senyal quan supera un cert nivell M. $Y(t) = \min(X(t),M)$.

- **Reverberació**. Afegim al senyal una còpia atenuada i retardada del senyal mateix. Aquesta còpia és un eco i representa la reflexió del so a les parets d'una sala. $Y(t) = X(t) + \beta X(t - T)$, en què $\beta < 1$ és el factor d'atenuació i $T > 0$ el retard.

Tenim, doncs, un control amb tres posicions per a seleccionar una de les tres funcions. També podem tenir dials per a ajustar els valors dels paràmetres α,β,T,M. Així, podem variar β i T per a obtenir una reverberació suau o un eco fort, o ajustar M segons el nivell d'entrada per no tenir massa distorsió.

Una vegada fixats els controls de l'aparell, tenim una certa transformació seleccionada. Per a avaluar l'efecte d'aquestes transformacions, ja sigui la versió matemàtica simplificada que donem aquí o una implementació real del dispositiu, caldria tenir una representació de $X(t)$ de tipus estadístic. És a dir, cal representar $X(t)$ com un procés estocàstic. En aquest cas, la sortida $Y(t)$ passa a ser també un procés estocàstic i el que ens interessa és com es relacionen les propietats dels processos $X(t)$ (senyal d'entrada) i $Y(t)$ (senyal de sortida).

Considerem un procés estocàstic $X(t)$. De la mateixa manera que una variable aleatòria X dóna lloc a noves variables fent transformacions del tipus $Y = g(X)$, podem transformar el procés $X(t)$ per a obtenir el nou procés estocàstic $Y(t)$. Diem L d'aquesta transformació, que anomenarem *sistema*, i escrivim $Y(t) = L[X(t)]$. D'això podem extreure la definició següent de sistema.

Vegeu també

Les funcions sobre variables aleatòries del tipus $Y = g(X)$ s'estudien en el mòdul "Funcions de variables aleatòries" d'aquest mòdul.

Definició 1.1. Un **sistema**, L, consisteix en una transformació d'un procés estocàstic $X(t)$. Ho escrivim com $L[X(t)]$. Aquesta transformació dóna lloc a un nou procés estocàstic $Y(t)$.

Gràficament pensem aquesta transformació com un objecte que rep una entrada $X(t)$ i torna una sortida $Y(t)$, tal com podeu veure en la figura 1.

Figura 1. Sistema lineal

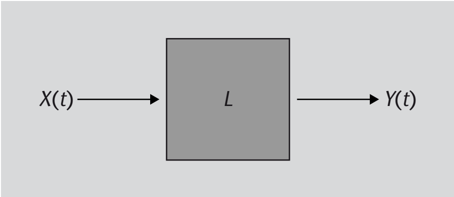


Figura 1

Considerarem un sistema lineal com una caixa negra que rep un procés d'entrada $X(t)$ i el transforma en un altre procés $Y(t) = L[X(t)]$.

En l'exemple 1.1 hem vist tres transformacions possibles:

1) L'amplificador $L_a[X(t)] = \alpha X(t)$.

2) El limitador $L_l[X(t)] = \min(X(t),M)$.

3) La reverberació $L_r[X(t)] = X(t) + \beta X(t-T)$.

En aquest mòdul estudiarem casos en què el caràcter aleatori de la sortida és causat únicament pel caràcter aleatori de l'entrada. És a dir, els sistemes que estudiarem que no afegeixen comportament aleatori al senyal que transformen.

Notem que en l'exemple anterior, la sortida $Y(t)$ té caràcter aleatori només perquè $X(t)$ és un procés estocàstic. Fixada l'entrada $X(t)$, la sortida queda unívocament determinada. És a dir, les transformacions L_a, L_l, L_r estan fixades i els paràmetres α, β, T, M són constants.

Definició 1.2. Un sistema és **determinista** si fixada la realització de $X(t)$ que entra, la sortida queda ja determinada. Si, al contrari, una mateixa entrada pot donar lloc a sortides diferents, diem que el sistema és **estocàstic**.

Per exemple, el preamplificador L_a podria ser estocàstic si estigués sotmès a algun tipus de fluctuacions que fan que calgui considerar α com una variable aleatòria. En aquest cas, però, hem considerat que el nostre sistema lineal és determinista i que el senyal de sortida és un procés aleatori perquè el senyal d'entrada també ho és.

Hi ha sistemes per als quals la sortida en un instant donat no depèn dels valors de l'entrada en instants anteriors. En l'exemple anterior això passa pel preamplificador i el limitador, que només depenen del valor actual de $X(t)$, mentre que no passa per la reverberació, on la sortida en l'instant t depèn també de l'entrada en l'instant $t - T$. En funció d'aquesta distinció definim els sistemes amb memòria o sense.

Definició 1.3. Un sistema és **sense memòria** si el valor de $Y(t)$ per a cada t depèn exclusivament del valor de $X(t)$ per al mateix t.

La característica principal que tindran els nostres sistemes és la linealitat. La transformació associada al sistema és lineal. Llavors val el **principi de superposició** que ens diu que el senyal de sortida a la suma de dues entrades és la suma de les sortides corresponents a cada entrada.

Definició 1.4. Un **sistema és lineal** si

$$L[\lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t)] = \lambda_1 L[X_1(t)] + \lambda_2 L[X_2(t)], \tag{1}$$

en què λ_1, λ_2 poden ser variables aleatòries però no dependre de t.

Tornant al nostre exemple, el preamplificador i la reverberació són lineals. Per exemple, comprovem-ho per a L_r:

$$L_r[\lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t)] = (\lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t)) + \beta(\lambda_1 X_1(t-T) + \lambda_2 X_2(t-T)) =$$

$$\lambda_1(X_1(t) + \beta X_1(t-T)) + \lambda_2(X_2(t) + \beta X_2(t-T)) =$$

$$\lambda_1 L_r[X_1(t)] + \lambda_2 L_r[X_2(t)].$$

En canvi, el limitador no és lineal. Prenem $X(t) = 0{,}8M$ constant. Llavors $L_l[X(t)+X(t)] = \min(1{,}6M, M) = M$, mentre que $L_l[X(t)]+L_l[X(t)] = \min(0{,}8M, M)+\min(0{,}8M, M) = 0{,}8M + 0{,}8M = 1{,}6M$. Així $L_l[X(t) + X(t)] \neq L_l[X(t)] + L_l[X(t)]$, contràriament a la condició de linealitat.

Els sistemes lineals són importants perquè el processament en circuits elèctrics pot tenir aquesta característica. La imatge que podem tenir d'un sistema lineal és la d'un circuit en què $X(t)$ és el voltatge d'entrada i $Y(t) = L[X(t)]$ és el voltatge de sortida.

Dins dels sistemes lineals ens interessen aquells en què la transformació no depèn explícitament del temps. Per això, és convenient definir les translacions temporals T_a, que són un tipus particular de transformació (retard):

$$T_a[X(t)] = X(t-a). \tag{2}$$

És a dir, la funció T_a pren el senyal d'entrada i el retarda en temps un valor igual a a.

Definició 1.5. Un sistema, L, és **invariant en el temps** si $L[T_a[X(t)]] = T_a[L[X(t)]]$ per a tot a. Això es pot expressar de manera equivalent dient que si $X(t)$ dóna la sortida $Y(t)$, llavors $X(t-a)$ dóna la sortida $Y(t-a)$.

Si pensem L com un dispositiu físic que transforma un senyal, la invariància en el temps vol dir que la constitució d'aquest dispositiu és idèntica en tot t. En l'exemple del processador de so totes les transformacions són invariants en el temps. Una manera de fer que no ho fossin seria fer dependre les constants α,β,T,M del temps. En els apartats següents, considerem només **sistemes lineals invariants en el temps**.

Una manera de caracteritzar un sistema lineal és per mitjà de la seva funció de resposta impulsional. Aquesta és la sortida del sistema quan l'entrada és una delta de Dirac $\delta(t)$. Això conté tota la informació necessària per a saber com es transforma qualsevol senyal, ja que tota funció es pot escriure com a superposició de deltes:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)X(\tau)d\tau. \tag{3}$$

Resposta impulsional

La resposta impulsional és la sortida del sistema lineal a una funció delta de Dirac. Recordeu que hem vist la definició de la funció delta de Dirac en la definició 1.3 del mòdul "Processos estocàstics gaussians i processos estocàstics de Poisson".

La igualtat anterior és simplement la definició de la funció delta. Ara la interpretem com una combinació lineal pensant en la integral com la versió contínua d'una suma. La funció $X(t)$ s'obté combinant les funcions $\delta_\tau(t) = \delta(t-\tau)$ amb coeficients $X(\tau)$.

Definició 1.6. Definim la funció de **resposta impulsional** h d'un sistema lineal com

$$h(t) = L[\delta(t)]. \tag{4}$$

Coneixent $h(t)$ tenim que la resposta a una entrada arbitrària $X(t)$ es pot determinar fent una convolució:

$$L[X(t)] = (h * X)(t). \tag{5}$$

Convolució

La convolució és una operació matemàtica que consisteix a prendre dues funcions i calcular el grau en què se superposen. Es defineix com: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau$. Intuïtivament consisteix a girar un dels dos senyals respecte a l'eix t, anar desplaçant-lo sobre l'altre senyal fix i calcular l'àrea del producte de les funcions.

Demostració: Calculem l'acció de L sobre $X(t)$ expressant $X(t)$ com a superposició de funcions delta (equació (3)):

$$L[X(t)] = L\left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)X(\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} L[\delta(t-\tau)]X(\tau)d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)X(\tau)d\tau = (h * X)(t). \blacksquare$$

Exemple 1.2

Necessitem implementar un circuit integrador, és a dir, un dispositiu en què el senyal de sortida és la integral del senyal d'entrada. Per a fer-ho utilitzarem un sistema que té per funció de transferència, $h(t)$, la funció de Heaviside o funció esglaó que es defineix com segueix:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Figura 2. La funció de Heaviside $u(t)$

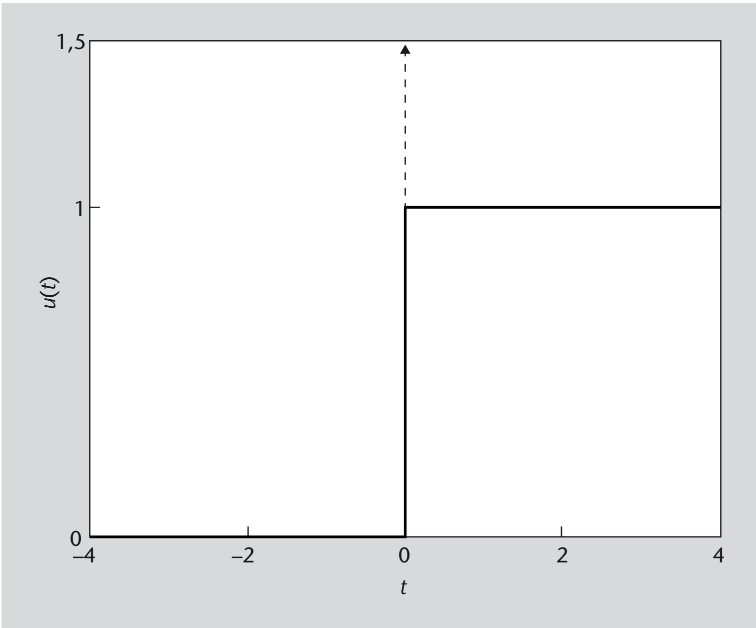


Figura 2

La convolució d'un senyal amb la funció esglaó d'amplitud 1 ens dóna l'àrea que hi ha sota la corba del senyal d'entrada. Fixeu-vos que aquesta integral comença en $-\infty$ i es va desplaçant amb t a mesura que avança la convolució.

Quin significat té un sistema amb funció de transferència $h(t) = u(t)$? Vegem com es transforma una entrada $X(t)$:

$$L[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)X(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} X(\tau)d\tau,$$

ja que

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau, \\ 1 & \text{si } t \geq \tau \end{cases}$$

i, per tant, la integració queda restringida a $\tau \leq t$.

Aquest sistema és, doncs, un "integrador". En cada instant ens dóna la integral fins a aquest moment de l'entrada.

Durant l'apartat hem vist alguns exemples de sistemes lineals, com el processador de so o l'integrador. En l'apartat següent veurem com queda transformat un procés $X(t)$ quan passa a través d'un sistema lineal. Una pregunta que ens podem plantejar és: hi ha alguna manera de definir l'estadística del senyal de sortida de manera senzilla a partir de l'estadística del senyal d'entrada? Vegem-ho a continuació.

2. Paràmetres d'un procés transformat linealment

Vegem com queda transformat un procés estocàstic després de fer-lo passar per un sistema lineal. Un procés estocàstic $X(t)$ es caracteritza principalment per les funcions **valor mitjà** $m(t)$ i **autocorrelació** $R(t_1,t_2)$. Si tenim altres processos, definim en general la funció de correlació de $X(t)$ i $Y(t)$ per a poder-los comparar entre ells:

Vegeu també

En l'apartat 2 del mòdul "Caracterització estadística i paràmetres dels processos estocàstics" s'estudia el procés estocàstic i la seva caracterització amb les funcions **valor mitjà** i **autocorrelació**.

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E(X(t_1)Y(t_2)). \tag{7}$$

La funció d'autocorrelació de $X(t)$ s'escriu ara $R_{XX}(t_1,t_2)$. També n'indicarem el valor mitjà $m_X(t)$.

Què succeeix si ara introduïm el senyal $X(t)$ en un sistema lineal L? Per començar s'ha d'indicar que l'operació L es fa sempre sobre funcions d'una variable. La funció valor mitjà, per exemple, és de primer ordre i depèn únicament d'una variable independent, t. Quan l'operació L té dues variables en el seu argument, posem L_1 o L_2 per a indicar que considerem la funció de la variable t_1 o t_2 i deixem l'altra com a constant.

El resultat següent indica com podem obtenir els paràmetres de $Y(t) = L[X(t)]$ a partir dels de $X(t)$:

$$m_Y(t) = L[m_X(t)]. \tag{8}$$

Observeu que la funció valor mitjà és de primer ordre, és a dir, té una única variable, que és t:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = L_2[R_{XX}(t_1,t_2)]. \tag{9}$$

La funció de correlació és una funció de segon ordre i depèn de dos instants temporals diferents. En aquest cas amb la notació L_2 estem dient que considerem com a variable t_2 i que t_1 el considerarem constant:

$$R_{YY}(t_1,t_2) = L_1[R_{XY}(t_1,t_2)]. \tag{10}$$

En aquest cas el sistema lineal L depèn de la variable t_1 (per això l'anomenem L_1) i deixem t_2 com a constant.

Demostració: En primer lloc demostrarem que el valor mitjà dels procés de sortida equival a fer passar pel sistema lineal el valor mitjà del senyal d'entrada, tal com hem vist en l'equació (8):

$$m_Y(t) = E(Y(t)) = E(L[X(t)])$$

$$= E\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)X(\tau)d\tau\right) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)E(X(\tau))d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)m_X(\tau)d\tau = (h * m_X)(t) = L[m_X(t)].$$

Observació

Cal notar que tant en aquest mòdul com en els mòduls anteriors treballem amb processos reals. Per als processos amb variables complexes la definició de la correlació, $R(t_1,t_2)$, i les propietats de la transformada de Fourier, difereixen.

A continuació demostrem l'expressió (9) que ens diu que la correlació entre els senyal d'entrada i sortida del sistema lineal és igual a calcular l'autocorrelació del procés d'entrada $X(t)$ i després aplicar la transformació lineal L amb dependència de t_2:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E(X(t_1)Y(t_2))$$

$$= E\left(X(t_1)\int_{-\infty}^{\infty} h(t_2-\tau)X(\tau)d\tau\right) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2-\tau)E(X(t_1)X(\tau))d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2-\tau)R_{XX}(t_1,\tau)d\tau = L_2[R_{XX}(t_1,t_2)].$$

Finalment, calculem l'autocorrelació del procés de sortida (equació (10)), que consisteix a agafar el resultat que acabem d'obtenir per a la correlació creuada entre X i Y i aplicar-hi la transformació L_1 dependent de la variable t_1:

$$R_{YY}(t_1,t_2) = E(Y(t_1)Y(t_2))$$

$$= E\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-\tau)X(\tau)d\tau Y(t_2)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-\tau)E(X(\tau)Y(t_2))d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-\tau)R_{XY}(\tau,t_2)d\tau = L_1[R_{XY}(t_1,t_2)]. \blacksquare$$

Una altra de les funcions importants que havíem definit era la potència* i l'espectre de potència per a processos estacionaris**. Ara calcularem l'espectre de potència de $Y(t)$, $S_Y(f)$ a partir de $S_X(f)$. $X(t)$ és ara un procés estocàstic estacionari amb funció d'autocorrelació $R_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(t_2-t_1)$. Per això necessitem un nou concepte: el de funció de transferència.

* S'estudia en el mòdul "Caracterització estadística i paràmetres dels processos estocàstics".

** S'estudia en el mòdul "Processos estocàstics estacionaris"

Potència i espectre de potència

La potència mitjana d'un procés estocàstic la definíem com $\mathrm{Pot}(t) = E(X(t)^2)$. Per al cas dels processos estocàstics estacionaris, vam definir la densitat espectral de potència com $S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$. És a dir, com la transformada de Fourier de la funció d'autocorrelació.

Definició 2.1. La **funció de transferència** d'un sistema lineal s'anomena $H(f)$ i és la transformada de Fourier de la funció de **resposta impulsional** $h(t)$:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau. \quad (11)$$

Vegeu també

Recordeu la definició de Transformada de Fourier que vam fer en l'apartat 4 del mòdul "Processos estocàstics estacionaris" quan vèiem els conceptes d'autocorrelació i espectre de potència.

Llavors tenim el resultat següent:

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f). \quad (12)$$

Abans de demostrar-lo recordem el teorema de convolució. Si les funcions $f(t)$ i $g(t)$ tenen les transformades de Fourier $F(f)$ i $G(f)$, llavors el seu producte de convolució $(f * g)(t)$ té transformada de Fourier $F(f)G(f)$. També tenim que $f(-t)$ es transforma en $F^*(f)$.

Teorema de la convolució

L'operació de convolució en el domini temporal de dues funcions equival al producte de les seves transformades de Fourier en el domini de la freqüència. Recordeu també que fer girar un senyal sobre l'eix temporal (és a dir, $f(-t)$) és equivalent al conjugat de la transformada de Fourier del senyal original.

Demostració: L'espectre de potència de $Y(t)$ s'obté fent la transformada de Fourier de $R_{YY}(t)$:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2-\tau)R_{XX}(t_1,\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2-\tau)R_{XX}(\tau-t_1)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2-t_1-\tau)R_{XX}(\tau)d\tau,$$

en què hem fet servir que R_{XX} depèn només de la diferència de temps i hem fet el canvi de variable $\tau \longrightarrow \tau + t_1$. Així, veiem que $R_{XY}(t_1,t_2)$ depèn només de $t_2 - t_1$. Ara obtenim

$$R_{YY}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-\tau)R_{XY}(\tau,t_2)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-\tau)R_{XY}(t_2-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-t_2-\tau)R_{XY}(-\tau)d\tau.$$

Observeu que hem fet el canvi $\tau \rightarrow \tau + t_2$.

Així, veiem que R_{YY} s'obté de la convolució entre $h(t)$ i $R_{XY}(-t)$ i $R_{XY}(t)$ s'obté de la convolució entre $h(t)$ i $R_{XX}(t)$. Passant a transformades de Fourier

$$R_{XY}(-t) \longrightarrow [H(f)S_X(f)]^* = H^*(f)S_X(f)$$

$$R_{YY}(t) \longrightarrow S_Y(f) = H(f)H^*(f)S_X(f) = |H(f)|^2 S_X(f). \blacksquare$$

Així doncs, podem calcular la densitat espectral de potència $S_Y(f)$ del senyal de sortida a partir de la densitat espectral de potència $S_X(f)$ del senyal d'entrada i del mòdul al quadrat de la funció de transferència del sistema lineal, $|H(f)|^2$.

Exemple 2.1

El senyal acústic de prova en un punt d'una sala de concerts està determinat per un procés estocàstic estacionari $X(t)$ de valor mitjà $m(t) = 0$ i funció d'autocorrelació $R(\tau) = e^{-|\tau|}\cos(2\pi\tau)$. La resposta de la sala es tradueix en la mesura $Y(t) = L[X(t)] = X(t) - \frac{1}{4}X(t-3)$. Per tal de caracteritzar l'acústica de la sala, calcularem el paràmetres següents:

1) L'espectre de potència $S_X(f)$ del procés $X(t)$.

2) La funció de resposta impulsional del sistema L, i també la funció de transferència.

3) L'espectre de potència $S_Y(f)$ del procés de sortida $Y(t)$.

Calculem a continuació el que ens demana.

1) Comencem calculant l'espectre de potència del procés $X(t)$:

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = 2\int_0^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-\tau}\cos(2\pi\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\tau}(\cos(2\pi(f+1)\tau) + \cos(2\pi(f-1)\tau))d\tau$$

$$= \frac{1}{1+4\pi^2(f+1)^2} + \frac{1}{1+4\pi^2(f-1)^2}$$

Indicació

Per a resoldre aquest exemple poden ser útils les fórmules $\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$ i $\int_0^{\infty} e^{-x}\cos(ax)dx = \frac{1}{1+a^2}$.

2) A continuació calculem la resposta impulsional de L:

$$h(t) = L[\delta(t)] = \delta(t) - \frac{1}{4}\delta(t-3)$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\delta(\tau) - \frac{1}{4}\delta(\tau-3)\right)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = 1 - \frac{1}{4}e^{-j6\pi f}$$

3) Per acabar, calculem l'espectre de potència del senyal de sortida i el compararem amb el del senyal d'entrada:

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

$$|H(f)|^2 = \left|1 - \frac{1}{4}e^{-j6\pi f}\right|^2 = \left(1 - \frac{1}{4}e^{-j6\pi f}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{j6\pi f}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{16} - \frac{1}{4}(e^{j6\pi f} + e^{-j6\pi f}) = \frac{17}{16} - \frac{1}{2}\cos(6\pi f)$$

$$S_Y(f) = \left(\frac{17}{16} - \frac{1}{2}\cos(6\pi f)\right)\left(\frac{1}{1+4\pi^2(f+1)^2} + \frac{1}{1+4\pi^2(f-1)^2}\right)$$

Observeu la gràfica de l'espectre de potència de $X(t)$ i de $Y(t)$. La podeu veure en la figura 3.

Figura 3. Gràfiques de $S_X(f)$ (esquerra) i $S_Y(f)$ (dreta).

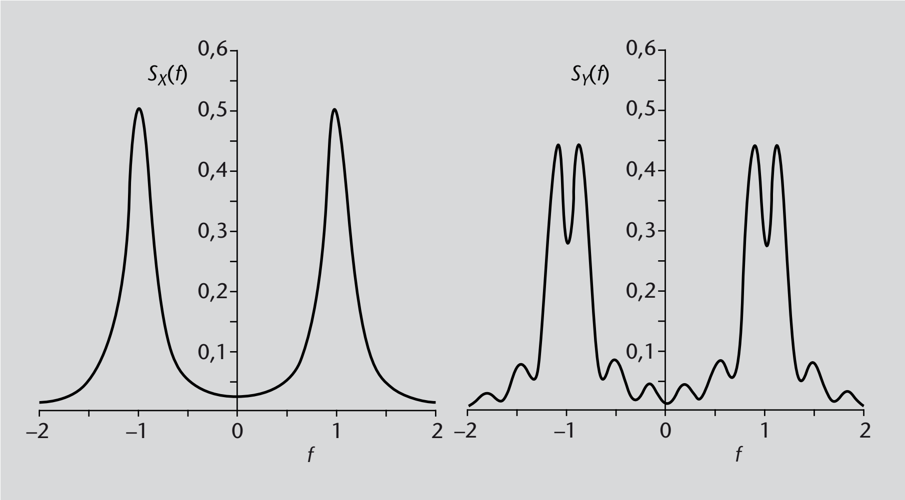


Figura 3

A la figura de la dreta podeu veure com és l'espectre de potència després d'haver fet passar el senyal $X(t)$ pel sistema L.

Vegeu també

En l'apartat 3 d'aquest mòdul definirem el concepte d'estimació lineal, veurem com es pot aplicar i n'estudiarem alguns exemples.

3. Estimació lineal

Fins ara, en aquest mòdul, hem vist què és un sistema lineal i com es relaciona l'estadística dels senyals d'entrada i sortida. En aquest apartat veurem què és un estimador de senyals i en descriurem el funcionament.

3.1. Concepte i criteris d'estimació

Considerem un experiment aleatori que té associada una variable aleatòria Y. Estimar la variable Y vol dir fer una predicció, $\widehat{Y}$, que s'acosti el màxim possible als valors que pren Y en fer l'experiment.

Pot ser que el nostre experiment tingui associades altres variables aleatòries X_1, $X_2, \ldots, X_n$, els valors de les quals són coneguts. Anomenarem **dades** aquestes variables. Si Y no és independent d'aquestes variables és convenient estimar Y amb una variable aleatòria de la forma $\widehat{Y} = c(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, en què c és una funció fixada. $\widehat{Y}$ s'anomena **estimador**. Així doncs, arribem a la definició següent.

Definició 3.1. Anomenem **estimador**, $\widehat{Y}$, una funció $c(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ en què els valors X_i són les **dades**, que ens permet fer una predicció de la variable Y.

Per exemple, podem necessitar tenir controlat el nivell d'ocupació d'una xarxa. Anomenem Y aquest nivell d'ocupació que estem buscant. En aquest cas volem conèixer el valor futur de la variable Y. Les dades són el nivell d'ocupació en instants anteriors i en el present. Així, el problema de l'estimació apareix de manera natural en tractar els processos estocàstics (predicció del comportament futur conegut, el comportament passat i present).

Entre el valor que hem estimat, $\widehat{Y}$, i la variable aleatòria Y hi haurà associat un error. Anomenem bondat de l'estimador aquesta mesura de l'error que cometem. Mesurarem aquesta diferència per mitjà del valor $\epsilon = (Y - \widehat{Y})^2$. Ara bé, com aquest valor depèn de variables aleatòries, no té *a priori* un valor fixat. És a dir, si anem repetint l'experiment, el valor anirà canviant. El nostre criteri de qualitat d'una estimació serà l'esperança de ϵ.

Definició 3.2. Estimació en mitjana quadràtica és aquella en què la mesura de l'error està determinada per l'error quadràtic mitjà. Aquest paràmetre mesura la *bondat de l'estimador*:

$$\overline{\epsilon} = E[\epsilon] = E[(Y - \widehat{Y})^2]. \qquad (13)$$

El procediment per seguir per a estimar la variable Y és fixar un cert tipus de funció $\widehat{Y} = c(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ (amb paràmetres per determinar, per exemple) i minimitzar $\overline{\epsilon}$ per a determinar del tot c. L'error associat a l'estimació serà finalment $\overline{\epsilon}_{min}$.

El tipus d'estimació que veurem aquí és l'**estimació lineal**, en què combinem linealment les dades.

Definició 3.3. Estimació lineal és aquella en què l'estimador és una combinació lineal de variables aleatòries conegudes:

$$\widehat{Y} = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n, \qquad (14)$$

amb $a_1,a_2,\ldots,a_n$ constants.

Cal tenir en compte que les variables aleatòries que combinem es poden obtenir operant amb les dades. Per exemple, si només tenim una dada X, un possible estimador lineal és

$$\widehat{Y} = a_1 + a_2X + a_3X^2.$$

Notem que en aquest cas estem combinant $X_1 = 1$, $X_2 = X$, $X_3 = X^2$ (X_1 és la variable aleatòria constant 1).

També es pot donar que les variables X_i s'obtinguin a partir de diverses variables. Per exemple, a partir de les dades U, V i W tenim un possible estimador lineal $\widehat{Y} = aU + bV + cW$, però hi ha infinitat d'estimadors alternatius, com $\widehat{Y} = aUV + bU^2W$, etc.

3.2. Principi d'ortogonalitat

Ara introduirem una certa estructura d'espai euclidià que ens serà útil per a determinar la millor estimació lineal.

Per a un experiment fixat, el conjunt de variables aleatòries que podem considerar formen un espai vectorial, ja que la suma de variables i el producte d'una variable per un nombre real són noves variables aleatòries. Donades dues variables Z i T podem definir l'operació

$$< Z,T >= E(ZT). \tag{15}$$

Aquesta operació és bilineal, simètrica, definida positiva i no degenerada. Constitueix, per tant, un producte escalar en aquest espai vectorial. Això motiva la definició següent.

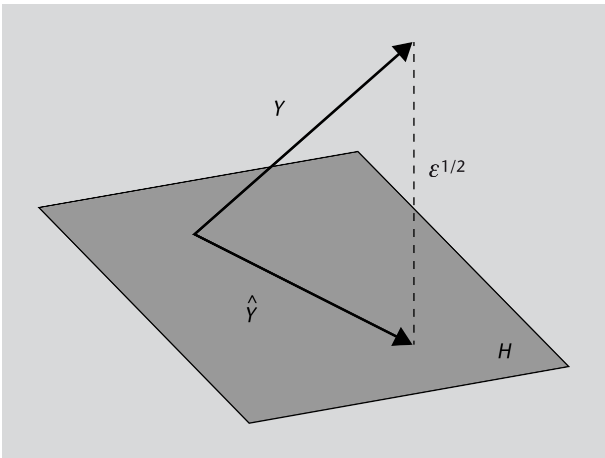
Definició 3.4. Diem que dues variables aleatòries, Z i T, són **ortogonals** si:

$$E(ZT) = 0. \tag{16}$$

És a dir, si el seu producte escalar és zero. En aquest cas, escrivim $Z \perp T$.

El producte escalar de l'expressió (15) ens defineix una norma $\|Z\| =< Z,Z >^{\frac{1}{2}}$. L'error quadràtic que consideràvem és precisament $\overline{\epsilon} = \|Y - \widehat{Y}\|^2$. Per tant, podem usar tècniques dels espais euclidians quan $\widehat{Y}$ correspon a alguna varietat lineal o subespai vectorial. Aquest és el cas, precisament, de l'estimació lineal (14).

Figura 4. Estimació lineal



Així, $\widehat{Y}$ descriu un hiperplà $\mathcal{H}$ generat per la base $X_1,X_2,\ldots,X_n$, i la millor estimació és l'element d'aquest hiperplà més proper a Y. L'error és la distància (al quadrat) entre Y i $\mathcal{H}$.

Variables de quadrat mesurable

De fet, ens hem de restringir a l'espai de variables per a les quals les operacions considerades existeixen. El nostre espai està format per les variables Z tal que $E(Z^2)$ és finit. En la pràctica, aquest serà el cas.

Recordatori

Recordem alguns conceptes que es veuen en l'assignatura *Matemàtiques I*: una forma bilineal és una aplicació $f(u,v)$ tal que és lineal per a les dues variables de la funció f, en què u,v pertanyen a un cert espai vectorial. Diem que és simètrica si $f(u,v) = f(v,u)$. És definida si $f(v,v) \neq 0$ per a $v \neq 0$. Diem que és definida positiva si $f(v,v) > 0$, $\forall v \neq 0$. Si una forma bilineal f és definida, llavors és no degenerada.

Figura 4

En aquesta figura podeu veure com es defineix la variable Y, la seva estimació, $\widehat{Y}$ i l'error entre el valor real i l'estimació, ϵ.

La millor estimació està determinada per la projecció ortogonal de Y sobre $\mathcal{H}$. Si aquesta projecció és $\widehat{Y}$ tindrem que $Y - \widehat{Y}$ és ortogonal a $\mathcal{H}$. Per tant, $(Y - \widehat{Y}) \perp X_i$, $i = 1, \ldots, n$. Hem arribat així al principi d'ortogonalitat ("l'error és ortogonal a les dades"):

Principi d'ortogonalitat

La millor estimació lineal s'obté quan l'error és ortogonal a les dades: $(Y - \widehat{Y}) \perp X_i$.

$$E[X_i(Y - \widehat{Y})] = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{17}$$

Aquest és un sistema d'equacions lineals que podem escriure

$$E(X_i\widehat{Y}) = E(X_iY), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

La solució d'aquest sistema ens dóna els valors de a_i.

La **millor estimació en mitjana quadràtica** de tipus lineal ($\widehat{Y} = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$) s'obté amb les a_i solucions del sistema d'equacions lineals

$$E[X_i(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n)] = E[X_iY], \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Finalment cal notar que per a calcular l'error mínim

$$\overline{\epsilon}_{min} = E[(Y - \widehat{Y})^2] = E[(Y - \widehat{Y})Y] - E[(Y - \widehat{Y})\widehat{Y}] = E[(Y - \widehat{Y})Y], \tag{20}$$

ja que la segona esperança és nul·la ($(Y - \widehat{Y}) \perp \widehat{Y}$, pel mateix principi d'ortogonalitat).

L'error mínim en l'estimació lineal està determinat per:

$$\overline{\epsilon}_{min} = E[(Y - (a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n))Y]. \tag{21}$$

Exemple 3.1. Estimació per una constant

Estimem Y amb $\widehat{Y} = c$ constant. La millor estimació és $c = E(Y)$ i $\overline{\epsilon}_{min} = Var(Y)$.

En efecte, l'estimació és lineal $\widehat{Y} = c \cdot 1$. El principi d'ortogonalitat es redueix a una equació:

$$E(1 \cdot c) = E(1 \cdot Y),$$

i llavors $c = E(Y)$. $\overline{\epsilon}_{min} = E[(Y - c)Y] = E(Y^2) - cE(Y) = Var(Y)$.

Exemple 3.2. Recta de regressió

Considerem la millor estimació de Y de la forma $\widehat{Y} = aX + b$, en què a i b són constants. En el pla $x-y$ la recta $y = ax + b$ és la que millor ajusta el núvol de punts que s'obtenen en mesures repetides de la variable bidimensional (X,Y). S'anomena *recta de regressió*. Expressarem el resultat en termes dels paràmetres de X i de Y: $E(X) = m_X$, $Var(X) = \sigma_X$, $E(Y) = m_Y$, $Var(Y) = \sigma_Y$, $Cov(X,Y) = \rho\sigma_X\sigma_Y$.

Notem que $\widehat{Y}$ és una combinació lineal de X i la unitat. El principi d'ortogonalitat produeix les dues equacions:

$$\begin{cases} E[X(aX+b)] = E(XY), \\ E[1\cdot(aX+b)] = E(1\cdot Y), \end{cases}$$

és a dir,

$$\begin{cases} aE(X^2) + bE(X) & = E(XY), \\ aE(X) + b & = E(Y). \end{cases}$$

De la segona equació aïllem $b = E[Y] - aE[X]$ i substituïm en la primera:

$$a = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{E(X^2) - E(X)^2} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X^2} = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}.$$

Així, la recta de regressió està determinada per:

$$a = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \qquad b = m_Y - \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}m_X.$$

3.3. Aplicació a processos estocàstics

Considerem un procés estocàstic $X(t)$ amb valor mitjà $m(t)$ i autocorrelació $R(t_1,t_2)$. Cerquem la millor estimació lineal de $X(t)$ donats $X(t_1)$,$X(t_2)$ amb $t_1 < t_2 < t$. Per a clarificar idees ens limitarem a dues dades. El mateix es pot aplicar al cas d'una o més de dues dades.

L'estimador $\widehat{X(t)} = a_1X(t_1) + a_2X(t_2)$ s'anomena **estimador homogeni**. El principi d'ortogonalitat queda:

$$\begin{cases} E[X(t_1)(a_1X(t_1) + a_2X(t_2))] = E(X(t_1)X(t)), \\ E[X(t_2)(a_1X(t_1) + a_2X(t_2))] = E(X(t_2)X(t)), \end{cases}$$

és a dir,

$$\begin{cases} a_1R(t_1,t_1) + a_2R(t_1,t_2) = R(t_1,t), \\ a_1R(t_2,t_1) + a_2R(t_2,t_2) = R(t_2,t). \end{cases}$$

A partir de la funció d'autocorrelació podem, doncs, escriure el sistema i trobar la solució.

L'estimador $\widehat{X(t)} = a_1X(t_1) + a_2X(t_2) + b$ s'anomena **estimador no homogeni**. El principi d'ortogonalitat queda:

$$\begin{cases} E[X(t_1)(a_1X(t_1) + a_2X(t_2) + b)] = E(X(t_1)X(t)), \\ E[X(t_2)(a_1X(t_1) + a_2X(t_2) + b)] = E(X(t_2)X(t)), \\ E[1 \cdot (a_1X(t_1) + a_2X(t_2) + b)] = E(1 \cdot X(t)), \end{cases}$$

és a dir,

$$\begin{cases} a_1R(t_1,t_1) + a_2R(t_1,t_2) + bm(t_1) = R(t_1,t), \\ a_1R(t_2,t_1) + a_2R(t_2,t_2) + bm(t_2) = R(t_2,t), \\ a_1m(t_1) + a_2m(t_2) + b = m(t). \end{cases}$$

A partir de les funcions de valor mitjà i d'autocorrelació podem, com abans, escriure el sistema i trobar-ne la solució. Notem que si fos $m(t) = 0$, trobaríem $b = 0$, amb la qual cosa l'estimació no homogènia es reduiria a l'homogènia.

Exemple 3.3

Aplicació a processos estocàstics. Considereu $X(t)$ com un procés de Poisson. Estimem $X(t)$ a partir de $X(t–T)$, en què $T > 0$ és una constant. Apliquem l'estimador no homogeni a partir de les dades que tenim:

$$\widehat{X(t)} = aX(t - T) + b.$$

A partir d'això obtenim les expressions següents:

$$E[(aX(t - T) + b)X(t - T)] = E[X(t)X(t - T)],$$

$$E[(aX(t - T) + b) \cdot 1)] = E[X(t) \cdot 1].$$

és a dir,

$$aR(t-T,t-T) + bm(t-T) = R(t,t-T),$$

$$am(t-T) + b = m(t).$$

Aplicat al nostre procés queda com segueix:

$$a(\lambda^2(t-T)^2) + \lambda(t-T)) + b\lambda(t-T) = \lambda^2 t(t-T) + \lambda(t-T),$$

$$a\lambda(t-T) + b = \lambda t,$$

que té com a solució $a = 1$ i $b = \lambda T$. L'error mínim és:

$$\overline{\epsilon}_{min} = E[(X(t) - X(t-T) - \lambda T)X(t)] = \lambda^2 t^2 - \lambda^2 t(t-T) - \lambda(t-T) - \lambda T\lambda t = \lambda T.$$

L'error mitjà augmenta amb T, com seria d'esperar.

Resum

Un sistema lineal L és una caixa negra que transforma processos estocàstics $X(t)$ que considerem senyals d'entrada i genera un senyal de sortida, $Y(t)$. Concretament els sistemes lineals compleixen el següent:

$$L[\lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t)] = \lambda_1 L[X_1(t)] + \lambda_2 L[X_2(t)].$$

Els sistemes lineals poden ser **deterministes** (si fixada la realització del procés d'entrada la sortida ja queda determinada) o **aleatoris** (en cas contrari).

Direm que un sistema lineal és **sense memòria** si el valor $Y(t)$ per a cada t depèn exclusivament del valor de $X(t)$ per al mateix t. En cas contrari direm que el sistema lineal té memòria.

També direm que un sistema lineal és **invariant en el temps** si un desplaçament del senyal d'entrada ens dóna com a resultat un desplaçament del senyal de sortida.

La **resposta impulsional d'un sistema lineal**, $h(t)$, ens permet calcular el senyal de sortida $Y(t)$ fent la convolució d'aquesta resposta impulsional amb el senyal d'entrada $X(t)$, és a dir:

$$L[X(t)] = h(t) * X(t).$$

En l'apartat 2, hem vist la relació entre l'estadística d'un procés estocàstic d'entrada, $X(t)$, que ha estat processat per un sistema lineal, i el procés de sortida $Y(t)$. Pel que fa al càlcul de la densitat espectral de potència, recordeu que hem assumit que el procés ha de ser estacionari:

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= L[m_X(t)], \\ R_{XY}(t_1,t_2) &= L_2[R_{XX}(t_1,t_2)], \\ R_{YY}(t_1,t_2) &= L_1[R_{XY}(t_1,t_2)], \\ S_Y(f) &= |H(f)|^2 S_X(f). \end{aligned}$$

Hem dedicat l'últim apartat d'aquest mòdul a l'estudi dels estimadors lineals. L'estimació és una eina molt útil per a predir el comportament i planificar recursos en les xarxes de telecomunicacions. A grans trets, hem vist que estimar una variable aleatòria Y és fer una predicció que anomenem $\widehat{Y}$ a partir d'una sèrie de dades X_1,X_2,...X_n, que també són variables aleatòries. En particular, l'estimació lineal, consisteix a predir el valor de $\widehat{Y}$ a partir d'una combinació lineal de les dades. És a dir:

$$\widehat{Y} = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n.$$

En tota estimació tindrem un error, ϵ. Per a mesurar l'error en els estimadors lineals utilitzem l'error quadràtic mitjà, que es defineix com:

$$\overline{\epsilon} = E[\epsilon] = E[(Y - \widehat{Y})^2].$$

Ens interessa minimitzar aquest error per a tenir una bona estimació de Y. Hem vist que la millor estimació lineal es dóna per al cas de la projecció del valor Y sobre el pla generat per les dades X_i. Aquesta condició ens permet definir un sistema d'equacions mitjançant el qual podem trobar els coeficients a_i del nostre estimador lineal.

Activitats

1. Donat el sistema $L[X(t)] = e^{-t}X(t)$:

a) És lineal?

b) És sense memòria?

c) És invariant en el temps?

d) Si $X(t) = te^{Bt}$ en què B és una variable aleatòria uniforme en [0,1], calculeu-ne la funció de valor mitjà $m_X(t)$ i la funció de valor mitjà $m_Y(t)$ del procés de sortida $Y(t) = L[X(t)]$.

2.

a) Calculeu la funció de resposta impulsional del preamplificador i la reverberació de l'exemple 1.1.

b) La fórmula (5) és correcta només per a sistemes invariants en el temps. En quin lloc de la demostració s'utilitza la invariància en el temps?

Indicació: reviseu la definició de la delta de Dirac en el mòdul "Processos estocàstics gaussians i processos estocàstics de Poisson".

3. Donada la variable A, exponencial de valor mitjà 1, es defineix el procés:

$$X(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le A \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Aquest procés passa pel sistema L de l'exemple de l'integrador.

a) Calculeu la funció de valor mitjà de $X(t)$.

b) Calculeu la funció de valor mitjà de la sortida del sistema $Y(t) = L[X(t)]$.

4. Un procés estocàstic estacionari $X(t)$ té valor mitjà $m(t) = 0$ i espectre de potència $S_X(f) = e^{-f^2}$. Es passa aquest procés pel sistema $Y(t) = L[X(t)] = X(t) + \frac{1}{2}X(t-1)$.

a) Calculeu la funció de resposta impulsional del sistema, i també la funció de transferència.

b) Quin és l'espectre de potència $S_Y(f)$ del procés $Y(t)$?

5. Un procés estocàstic estacionari $X(t)$ té valor mitjà $m(t) = 0$ i funció d'autocorrelació $R(t_1,t_2) = e^{-|t_2-t_1|}$. Es passa aquest procés pel sistema $Y(t) = L[X(t)] = 3X(t) - 2X(t-1)$.

a) Calculeu l'espectre de potència $S_X(f)$ del procés $X(t)$.

b) Calculeu la funció de resposta impulsional del sistema, i també la funció de transferència.

c) Calculeu l'espectre de potència $S_Y(f)$ del procés de sortida $Y(t)$?

6. Un procés estocàstic estacionari $X(t)$ té valor mitjà $m(t) = 0$ i funció d'autocorrelació $R(t_1,t_2) = e^{-(t_2-t_1)^2}$. Es passa aquest procés pel sistema $Y(t) = L[X(t)] = X(t) + X(t-2)$.

a) Calculeu l'espectre de potència $S_X(f)$ del procés $X(t)$. (Per a la transformada de Fourier cerqueu una taula de transformades en llibres o a Internet.)

b) Calculeu la funció de resposta impulsional del sistema, i també la funció de transferència.

c) Calculeu l'espectre de potència $S_Y(f)$ del procés de sortida $Y(t)$.

7. La sortida d'un circuït amb realimentació negativa està determinada pel sistema lineal $Y(t) = L[X(t)] = X(t) - X(t-1)$.

a) Calculeu la funció de resposta impulsional del sistema L, i també la funció de transferència.

b) Suposeu que l'espectre de potència del procés d'entrada és $S_X(f) = \dfrac{1}{1+f^2}$. Calculeu l'espectre de potència $S_Y(f)$ del procés de sortida $Y(t)$. Compareu-ne la gràfica amb la de $S_X(f)$. En quines freqüències es produeixen les atenuacions? Relacioneu això amb l'expressió que dóna $L[X(t)]$.

8.

a) Donat un sistema lineal invariant en el temps $Y(t) = L[X(t)]$, podem obtenir la funció de transferència $H(f)$ per mitjà de l'equació (11), calculant primer la funció de resposta impulsional $h(t)$. Hi ha la manera següent d'obtenir directament $H(f)$: si l'entrada al sistema és la funció $\varphi_f(t) = e^{j2\pi ft}$, demostreu que

$$L[\varphi_f(t)] = H(f)\varphi_f(t).$$

Per tant, $H(f) = e^{-j2\pi ft}L[e^{j2\pi ft}]$.

b) Considereu ara el sistema $L[X(t)] = \int_{t-1}^{t} X(\tau)d\tau$. Calculeu-ne la funció de transferència $H(f)$. Calculeu també $|H(f)|^2$ i feu-ne la gràfica. (Podeu utilitzar el resultat de l'apartat anterior.)

c) Suposeu que l'espectre de potència del procés d'entrada al sistema anterior és $S_X(f) = \dfrac{10}{1+\pi^2 f^2}$. Aquesta entrada està acompanyada de soroll $N(t)$ amb espectre $S_N(f) = 0{,}01$ per $-2 \leq f \leq 2$ i $S_N(f) = 0$ en cas contrari. Calculeu la potència de $X(t)$ i de $N(t)$ (fórmula 8 del mòdul "Processos estocàstics estacionaris").

d) La relació senyal-soroll és

$$SNR = 10\log_{10}\frac{\text{Pot}_X}{\text{Pot}_N}.$$

Calculeu-ne els valors a l'entrada i a la sortida. Noteu que a la sortida teniu $L[X(t)+N(t)] = L[X(t)] + L[N(t)]$ i la potència dels processos transformats s'obté de l'equació (12) i la fórmula 8 del mòdul "Processos estocàstics estacionaris".

Per què augmenta la relació senyal-soroll en passar per aquest sistema?

Solucionari

1. a) Sí, ja que $L[\lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t)] = e^{-t}(\lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t)) = \lambda_1 e^{-t} X_1(t) + \lambda_2 e^{-t} X_2(t) = \lambda_1 L[X_1(t)] + \lambda_2 L[X_2(t)]$.

b) Sí, ja que $e^{-t}X(t)$ depèn només de l'instant t.

c) No, perquè $L[X(t-a)] = e^{-t}X(t-a)$, que és diferent de desplaçar la sortida ($e^{-(t-a)}X(t-a)$).

d) $m_X(t) = E(te^{Bt}) = \int_{-\infty}^{\infty} te^{bt} f_B(b)db = \int_0^1 te^{bt} \cdot 1db = e^{bt}|_{b=0}^{b=1} = e^t - 1$.

$m_Y(t) = E(Y(t)) = E(e^{-t}X(t)) = e^{-t}E(X(t)) = e^{-t}m_X(t) = 1 - e^{-t}$.

2. a) Preamplificador: $h(t) = L_a[\delta(t)] = \alpha\delta(t)$. Reverberació $h(t) = L_r[\delta(t)] = \delta(t) + \beta\delta(t-T)$.
b) En dir que $L[\delta(t-\tau)] = h(t-\tau)$.

3. a) Per a $t > 0$, $m_X(t) = \int_t^{\infty} 1 \cdot e^{-a}da = e^{-t}$. Per a $t < 0$, $m_X(t) = 0$.
b) $m_Y(t) = L[m_X(t)] = \int_{-\infty}^t m_X(\tau)d\tau = \int_0^t e^{-\tau}d\tau = 1 - e^{-t}$.

4. a) $h(t) = L[\delta(t)] = \delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t-1)$. $H(f) = \int_{-\infty}^{\infty}(\delta(\tau) + \frac{1}{2}\delta(\tau-1))e^{-j2\pi f\tau}d\tau = 1 + \frac{e^{-j2\pi f}}{2}$ (utilitzant la fórmula 12).
b) utilitzant la fórmula 13:

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = \left|1 + \frac{e^{-j2\pi f}}{2}\right|^2 e^{-f^2} = \left(1 + \frac{e^{-j2\pi f}}{2}\right)\left(1 + \frac{e^{j2\pi f}}{2}\right)e^{-f^2} = \left(\frac{5}{4} + \cos(2\pi f)\right)e^{-f^2}.$$

5. a) $S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau = 2\int_0^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau = 2\int_0^{\infty} e^{-\tau}\cos(2\pi f\tau)d\tau =$

$$\frac{1}{4\pi^2 f^2 + 1}.$$

b) $h(t) = L[\delta(t)] = 3\delta(t) - 2\delta(t-1)$.

$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty}(3\delta(\tau) - 2\delta(\tau-1))e^{-j2\pi f\tau}d\tau = 3 - 2e^{-j2\pi f}$.
c) $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = \left|3 - 2e^{-j2\pi f}\right|^2 \frac{1}{4\pi^2 f^2 + 1}$

$$= (3 - 2e^{-j2\pi f})(3 - 2e^{j2\pi f})\frac{1}{4\pi^2 f^2 + 1} = \frac{13 - 12\cos(2\pi f)}{4\pi^2 f^2 + 1}.$$

6. a) $S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2}e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2 f^2}$.

b) $h(t) = L[\delta(t)] = \delta(t) + \delta(t-2)$.

$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty}(\delta(\tau) + \delta(\tau-2))e^{-j2\pi f\tau}d\tau = 1 + e^{-j4\pi f}$.

c) $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = |1 + e^{-j4\pi f}|^2\sqrt{\pi}e^{-\pi^2 f^2}$

$$= (1 + e^{-j4\pi f})(1 + e^{j4\pi f})\sqrt{\pi}e^{-\pi^2 f^2} = 2\sqrt{\pi}(1 + \cos(4\pi f))e^{-\pi^2 f^2}.$$

7. a) $h(t) = L[\delta(t)] = \delta(t) - \delta(t-1)$.

$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty}(\delta(\tau) - \delta(\tau-1))e^{-j2\pi f\tau}d\tau = 1 - e^{-j2\pi f}$.
$|H(f)|^2 = |1 - e^{-j2\pi f}|^2 = (1 - e^{-j2\pi f})(1 - e^{j2\pi f}) = 1 - e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f} + 1 = 2(1 - \cos 2\pi f)$.

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = \frac{2(1 - \cos 2\pi f)}{1 + f^2}.$$

Figura 5. Gràfiques de $S_X(f)$ (esquerra) i $S_Y(f)$ (dreta)

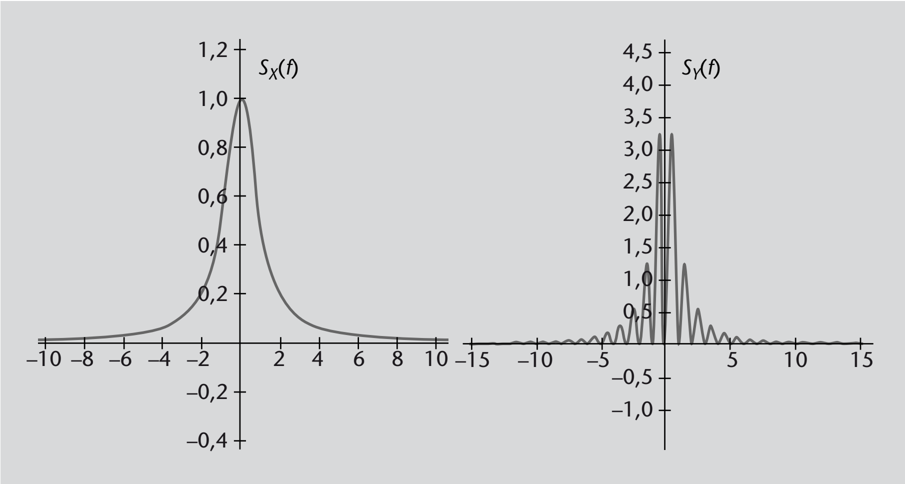


Figura 5

Espectre de potència del procés d'entrada $S_X(f)$. Gràfiques de $S_X(f)$ (esquerra) i del procés de sortida $S_Y(f)$ (dreta)

L'atenuació la trobem en $f = 1,2,3,\ldots$. Això correspon a períodes $T = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. En efecte, si $f(t)$ és periòdica amb període $T = \frac{1}{n}$, $L[f(t)] = f(t) - f(t-1) = f(t) - f(t - nT) = 0$.

8. a) $L[e^{j2\pi ft}] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{j2\pi f\tau}d\tau$.

Fem el canvi de variable $t - \tau = u$, $d\tau = -du$:

$$L[e^{j2\pi ft}] = -\int_{\infty}^{-\infty} h(u)e^{j2\pi f(t-u)}du = e^{j2\pi ft}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-j2\pi fu}du = e^{j2\pi ft}H(f).$$

b)

$$H(f) = e^{-j2\pi ft}L[e^{j2\pi ft}] = e^{-j2\pi ft}\int_{t-1}^{t} e^{j2\pi f\tau}d\tau = e^{-j2\pi ft}\left[\frac{e^{j2\pi f\tau}}{j2\pi f}\right]_{\tau=t-1}^{\tau=t}$$

$$= e^{-j2\pi ft}\left(\frac{e^{j2\pi ft} - e^{j2\pi f(t-1)}}{j2\pi f}\right) = \frac{1 - e^{-j2\pi f}}{j2\pi f}.$$

$$|H(f)|^2 = H(f)H(f)^* = \left(\frac{1 - e^{-j2\pi f}}{j2\pi f}\right)\left(\frac{1 - e^{j2\pi f}}{-j2\pi f}\right) = \frac{2 - e^{-j2\pi f} - e^{j2\pi f}}{4\pi^2 f^2}$$

$$= \frac{1 - \cos(2\pi f)}{2\pi^2 f^2}.$$

Figura 6. Gràfica de $|H(f)|^2$

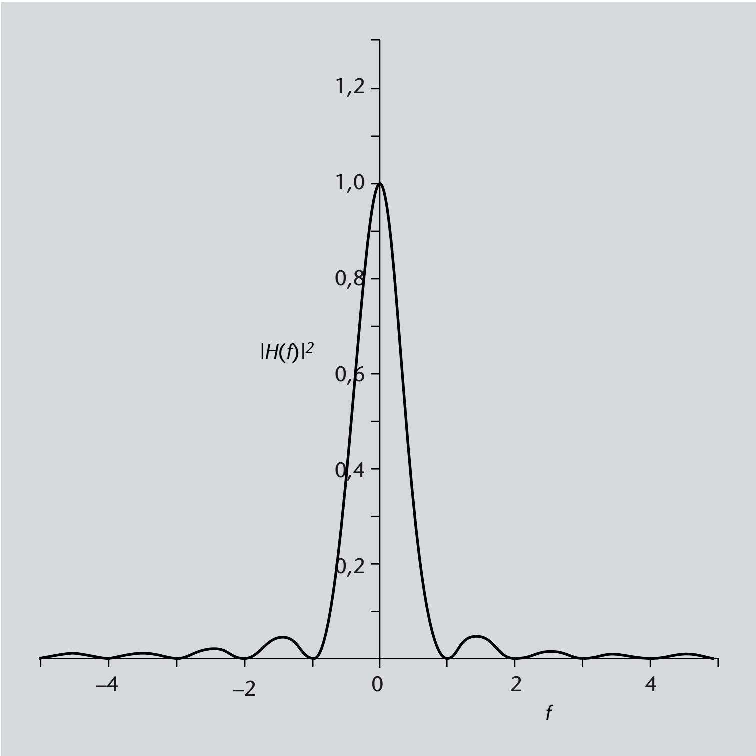


Figura 6

Representació del mòdul de la funció de transferència $|H(f)|^2$

c)

$$\text{Pot}_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{10df}{1+\pi^2 f^2} = 10\left.\frac{\arctan(\pi f)}{\pi}\right|_{-\infty}^{\infty} = 10.$$

$$\text{Pot}_N = \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f)df = \int_{-2}^{2} 0{,}01df = 0{,}04.$$

d) Si $X_{\text{out}}(t) = L[X(t)]$ i $N_{\text{out}}(t) = L[N(t)]$, tenim que

$$S_{X_{\text{out}}} = |H(f)|^2 S_X(f) = \frac{5(1-\cos(2\pi f))}{\pi^2 f^2(1+\pi^2 f^2)},$$

$$S_{N_{\text{out}}} = |H(f)|^2 S_N(f) = \frac{0{,}005(1-\cos(2\pi f))}{\pi^2 f^2}, \qquad -2 < f < 2.$$

Ara podem calcular

$$\text{Pot}_{X_{\text{out}}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{X_{\text{out}}}(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{5(1-\cos(2\pi f))}{\pi^2 f^2(1+\pi^2 f^2)}df = 5(1+e^{-2}) = 5{,}6766.$$

$$\text{Pot}_{N_{\text{out}}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{N_{\text{out}}}(f)df = \int_{-2}^{2} \frac{0{,}005(1-\cos(2\pi f))}{\pi^2 f^2}df = 0{,}009499.$$

La relació senyal-soroll a l'entrada és

$$SNR_{\text{in}} = 10\log_{10}\frac{\text{Pot}_X}{\text{Pot}_N} = 10\log_{10}\frac{10}{0{,}04} = 23{,}98 \text{ dB}.$$

A la sortida

$$SNR_{\text{out}} = 10\log_{10}\frac{\text{Pot}_{X_{\text{out}}}}{\text{Pot}_{N_{\text{out}}}} = 10\log_{10}\frac{5{,}6766}{0{,}009499} = 27{,}76 \text{ dB}.$$

L'SNR ha augmentat ja que, com es veu en la figura 6, aquest sistema elimina les altes freqüències (especialment $|f| > 1$) i aquestes són més presents en el soroll que en el senyal.

Figura 7. Espectres del senyal (esquerra) i el soroll (dreta) a l'entrada del sistema.

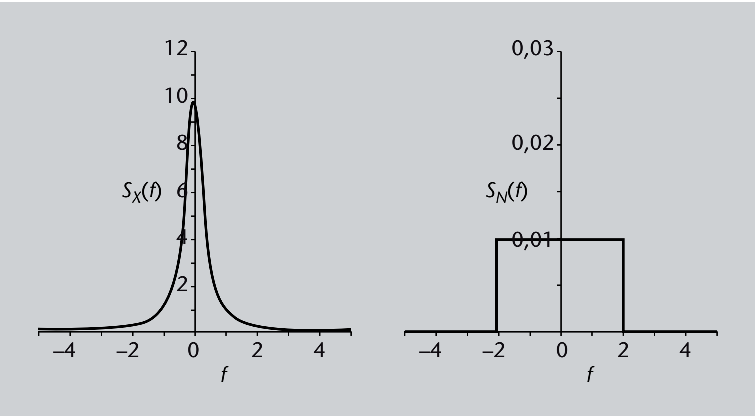


Figura 7

Espectres del senyal (esquerra) i el soroll (dreta) a l'entrada del sistema