Introducció a la probabilitat

Ana Escudero
Alícia Miralles
Alícia Vila

PID_00193845

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

Normalment el concepte de probabilitat el tenim associat a jocs, casinos, guanyar i perdre, però no és només en aquest àmbit en què s'utilitza la teoria de probabilitat. Per exemple, en l'estudi de les fluctuacions que pateix el mercat de valors s'utilitza la teoria de probabilitats. En el negoci de les assegurances de cotxes cal avaluar les probabilitats que passin certs incidents. També dins el marc de l'enginyeria de telecomunicacions el punt de vista probabilístic és molt important, per exemple, quan es treballa sobre models de soroll i el disseny de sistemes per a minimitzar-lo.

Precisament, en el camp de les telecomunicacions estem acostumats a analitzar i dissenyar sistemes des d'un punt de vista estàtic, considerant que els senyals són deterministes (ja sigui en el domini temporal o freqüencial). Aquestes tècniques, però, no tenen en compte que els senyals o les respostes dels sistemes tenen una variabilitat causada per efectes externs no considerats, o per la interferència de senyals aleatoris com el soroll. La teoria de la probabilitat i les tècniques de comptar ens serviran per a modelitzar tots aquests fenòmens que no es poden caracteritzar amb expressions deterministes. Imagineu, per exemple, que volem mesurar el nombre de trucades que arriba a una centraleta telefònica o que volem calcular quin és el temps de vida d'un component electrònic. Aquests valors no són fixos i determinats, sinó que els caracteritzarem amb una certa probabilitat.

Com podem saber si un comportament o mesura són aleatoris o deterministes? Dependrà de com el puguem caracteritzar. Un senyal el considerarem determinista quan es pot definir unívocament per una sèrie de paràmetres que ens permeten reconstruir el senyal exactament. Per exemple, podem caracteritzar un senyal sinusoïdal a partir de la seva amplitud, freqüència i fase. En canvi, quan tenim un senyal aleatori, el caracteritzarem amb una determinada distribució que ens donarà una idea de com es comporta el senyal, però per a cada realització del senyal aleatori tindrem una petita variabilitat dels valors que obtinguem. Per exemple, en el cas de l'arribada de trucades a una central telefònica podem definir cada quant temps de mitjana podem esperar una trucada, però segons l'hora del dia en què fem les mesures la seqüència d'arribada de trucades no és exactament la mateixa. El que sí que sabem *a priori* és que arribarà una trucada amb una certa probabilitat.

La teoria de la probabilitat ens dóna un conjunt d'eines que ens permeten analitzar i entendre tots aquests fenòmens associats al comportament de senyals i sistemes complexos com les comunicacions, el processament de senyal, el càlcul d'enllaços o la capacitat dels sistemes per a donar un servei adequat.

En aquest mòdul veurem alguns dels conceptes bàsics en què es fonamenta la teoria de la probabilitat. En l'apartat 1 veurem quines són les tècniques de comptar més habituals i per a què ens poden ser útils. A continuació, en l'apartat 2, definirem què és la probabilitat i veurem alguns teoremes importants.

Objectius

Els objectius que ha d'assolir l'estudiant un cop treballats els materials didàctics d'aquest mòdul són:

1. Entendre per què la probabilitat és fonamental en el camp de les telecomunicacions.
2. Estudiar les diferents tècniques de comptar i calcular alguns dels paràmetres més importants.
3. Aprendre els conceptes bàsics de la teoria de la probabilitat: espai mostral, succés i experiència aleatòria.
4. Aplicar la representació gràfica als conjunts de successos i espais mostrals aleatoris.
5. Enunciar i estudiar la llei de Laplace.
6. Entendre el concepte de probabilitat condicionada.
7. Estudiar i aplicar el teorema de Bayes.
8. Aprendre a utilitzar els diagrames d'arbre per a calcular probabilitats.

1. Tècniques de comptar

En moltes experiències, el càlcul d'una probabilitat està lligat a la quantitat de possibilitats diferents que té un cert aspecte de l'experiència. Per exemple, sabem que en llançar un dau perfecte la probabilitat que surti un 2 és $\frac{1}{6}$ ja que hi ha 6 resultats possibles. Però aquest és un cas molt senzill i de vegades aquest recompte de resultats no és tan simple.

Penseu, per exemple, en una xarxa de telecomunicacions com és Internet, formada per un conjunt d'encaminadors. Ens podem preguntar de quantes maneres diferents podem interconnectar dos ordinadors a través de la xarxa: podem triar el camí més curt, o el camí menys congestionat. També podem triar un camí que està determinat pel nostre proveïdor de serveis o el camí que introdueixi menys errors en la informació, etc. Un altre exemple serien els circuits multiplexors. En aquest tipus de circuits tenim diversos senyals d'entrada i una sèrie de senyals de selecció que ens donen un determinat senyal de sortida. En podem plantejar quantes combinacions possibles ens donen un determinat senyal de sortida o si hi ha alguna sortida que es doni amb més freqüència.

Totes aquestes qüestions les respondrem estudiant les tècniques de comptar més bàsiques. Això és el que farem en aquest primer apartat del mòdul. A partir d'exemples, anirem introduint els conceptes.

Exemple 1.1

Comencem pensant en un conjunt de 10 elements: $A = \{1,2,3,\cdots 10\}$. Considerem una seqüència de 4 elements, ordenats i amb repetició, d'aquest conjunt: **mostra de mida** 4. Escrivim 5 mostres d'exemple, que anomenem: m_1, m_2, m_3, m_4 i m_5. Vegem aquestes 5 mostres d'exemple:

$$m_1 = 1123,\ \ m_2 = 1132,\ \ m_3 = 11032,\ \ m_4 = 11023,\ \ m_5 = 1965.$$

Ens fixem en alguns aspectes. Hi ha mostres que tenen elements repetits com m_1 i m_2. Hi ha mostres en què l'única diferència que tenen entre elles és l'ordre dels elements, com m_3 i m_4. A l'hora de comptar el nombre de mostres que podem fer haurem de tenir en compte aquests aspectes.

Nota

Fixeu-vos al exemple 1.1 en els tres paràmetres que hem de tenir en compte:

- Nombre d'elements del conjunt total
- Mida de la mostra o nombre d'elements que prenem en una realització del procés
- Nombre de mostres o nombre de vegades que fem l'experiment

A continuació veurem els tipus de mostres de m elements que es poden formar en un conjunt de n elements $A = \{a_1,a_2,\cdots a_n\}$.

Definició 1.1. Mostra de mida *m*, ordenada i sense repetició (o reemplaçament). Consisteix en una seqüència d'elements del conjunt A en què no podem repetir els elements del conjunt A, i si tenim dues mostres que tenen els mateixos elements però ordenats de manera diferent, les considerem diferents.

En l'exemple 1.1, m_3, m_4 i m_5 són mostres d'aquest tipus.

Repetició i reemplaçament

Els mots **repetició** i **reemplaçament** s'utilitzen indistintament. El mot *repetició* ens diu que hi pot haver elements repetits dins d'una mateixa mostra. També s'utilitza el mot *reemplaçament* perquè aquest fet de vegades està lligat a la manera com s'ha fet l'experiència. Per exemple, si en una experiència hem de treure dues cartes d'una baralla i després de treure la primera carta anotem el resultat i la tornem a deixar a la baralla (reemplaçament), a la segona extracció podem obtenir la mateixa carta que abans.

Definició 1.2. Mostra de mida *m*, ordenada i amb repetició (o reemplaçament). Consisteix en una seqüència d'elements del conjunt A en què podem repetir els elements del conjunt A, i si tenim dues mostres que tenen els mateixos elements però ordenats de manera diferent, les considerem diferents.

Fixeu-vos en l'exemple 1.1: les mostres m_1 i m_2 tenen elements repetits, i com que els elements tercer i quart estan canviats d'ordre, les considerem diferents.

Definició 1.3. Mostra de mida *m*, no ordenada i sense repetició (o reemplaçament). Consisteix en una seqüència d'elements del conjunt A en què no podem repetir els elements del conjunt A, i si tenim dues mostres que tenen els mateixos elements però ordenats de manera diferent, les considerem la mateixa.

En l'exemple 1.1, en les mostres m_3 i m_4 no tenim cap element repetit. Fixeu-vos que els elements tercer i quart estan canviats d'ordre. Com que en aquest cas l'ordre no compta, per a nosaltres m_3 i m_4 seran mostres equivalents.

Definició 1.4. Mostra de mida *m*, no ordenada i amb repetició (o reemplaçament). Consisteix en una seqüència d'elements del conjunt A en què podem repetir els elements del conjunt A, i si tenim dues mostres que tenen els mateixos elements però ordenats de manera diferent, les considerem la mateixa.

En l'exemple 1.1, m_1 i m_2 representen la mateixa mostra i m_3 és la mateixa mostra que m_4. Fixeu-vos que en aquest cas podem repetir elements i que l'ordre no compta.

Vegem quantes mostres podem formar de cada un dels tipus anteriors.

1.1. Mostres ordenades amb repetició. Variacions amb repetició

Si ens fixem en l'exemple 1.1, podem pensar que per a formar una mostra d'aquest tipus hem d'omplir $m = 4$ posicions. A la primera posició podem posar qualsevol dels 10 elements del conjunt A, i tenim 10 possibilitats. Un cop hem omplert la primera posició, a la segona posició també podem posar qualsevol dels 10 elements del conjunt A, i per a cada una d'aquestes possibilitats en tenim 10 de diferents de la primera posició. Seguint aquest raonament, veiem que podem formar $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ mostres. Ho anomenem variacions amb repetició de 10 elements agafats de 4 en 4, $VR_{10,4} = 10^4$.

En general, si partim d'un conjunt $A = \{a_1,a_2, \cdots a_n\}$ amb n elements, el nombre de mostres de mida m ordenades i amb repetició que es poden formar és

$$VR_{n,m} = n^m.$$

Exemple 1.2

Quantes paraules de mida 3 es poden formar amb els elements del conjunt $\{0,1\}$?

En un conjunt de 2 elements, hem de trobar les mostres de mida 3 ordenades i amb repetició, $VR_{2,3} = 2^3 = 8$.

000 001 010 100 011 101 110 111

1.2. Mostres ordenades sense repetició. Variacions. Permutacions de *n* elements

Tornem a l'exemple 1.1. A partir del conjunt $A = \{a_1,a_2, \cdots a_{10}\}$ volem formar mostres de mida 4 que no tinguin elements repetits. Hem d'omplir $m = 4$ posicions. A la primera posició podem posar qualsevol dels 10 elements del conjunt A, i tenim 10 possibilitats. Un cop hem omplert la primera posició, a la segona posició només podem posar 9 elements del conjunt A, ja que no podem repetir l'element que hem posat a la primera posició. Seguint aquest raonament veiem que podem formar $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ mostres. Anomenem aquesta quantitat *variacions* de 10 elements agafats de 4 en 4, $V_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.040$.

En general, si partim del conjunt $A = \{a_1,a_2, \cdots a_n\}$, el nombre de mostres de mida m ($m \leq n$) ordenades i sense repetició que es poden formar és

$$V_{n,m} = n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

En el cas particular que $m = n$, $V_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdots 1 = n!$, **factorial** de n. Aquest nombre ens dóna les maneres d'ordenar n elements. Per al cas $n = 0$ s'adopta el conveni $0! = 1$.

Factorial d'un nombre

El factorial de n, s'expressa com $n!$ i és igual a $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 1$.

Exemple 1.3

Hem de connectar 4 cables diferents a 3 endolls diferents. Quantes possibilitats tenim?

Sigui el conjunt dels 4 cables, $A = \{a,b,c,d\}$. Una mostra la podem pensar com a *acb*, en què la posició de la lletra indica un endoll determinat. Per exemple, si considerem la mostra *acb* volem indicar que el cable a és a l'endoll 1, el cable c a l'endoll 2 i el cable b a l'endoll 3. Si pensem en *cab*, és una mostra diferent de l'anterior, ja que ara és el cable c el que és a l'endoll 1. Hem de comptar el nombre de mostres de mida 3, ordenades i sense repetició que es poden formar en un conjunt de 4 elements. Així, $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Aquestes són totes les mostres:

abc	acb	bac	bca	cab	cba
abd	adb	bad	bda	dab	dba
acd	adc	cad	cda	dac	dca
bcd	bdc	cbd	cdb	dbc	dcb

1.3. Mostres no ordenades sense repetició. Combinacions

Ens fixem en l'exemple 1.3 i el modifiquem lleugerament.

Exemple 1.4

Hem de connectar 4 cables diferents a 3 endolls **iguals** (indistingibles). Quantes possibilitats tenim?

Si ens fixem en les mostres que hem escrit en l'exemple 1.3, observem que en aquest nou exemple totes les mostres que hi ha a la mateixa fila són la mateixa, ja que l'únic que importa és el **conjunt de tres** cables que hem triat per connectar. Per tant, hem de dividir el nombre de mostres que tenim en una fila per 3!. En tenim, doncs, $\frac{V_{4,3}}{3!} = \frac{24}{6} = 4$.

abc *abd* *acd* *bcd*

Anomenem *combinacions* de 4 elements agafats de 3 en 3: $C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{V_{4,3}}{3!} = 4$.

En general, en un conjunt de n elements, el nombre de mostres de mida m ($m \leq n$) no ordenades i sense repetició és

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Nombre combinatori

El nombre combinatori $C_{n,m} = \binom{n}{m}$ es llegeix *n sobre m* i l'utilitzarem per a calcular el nombre de combinacions de n elements agafats de m en m.

Tal com hem comentat, el nombre combinatori $\binom{n}{m}$ ens dóna el nombre de subconjunts de m elements que podem formar d'un conjunt que en té n.

Proposició 1.1. Propietats:

1) $\binom{n}{0} = 1.$

Per a provar-ho pensem que el nombre de subconjunts de 0 elements que té un conjunt de n elements és 1, el conjunt buit. Imagineu que tenim una bossa amb un conjunt de boles. Només tenim una manera d'agafar zero elements, i és no agafant-ne cap.

2) $\binom{n}{1} = n.$

Aquesta igualtat és evident, ja que el nombre de subconjunts d'1 element que té un conjunt de n elements és n. Recordeu que no podem repetir els elements. Si, per exemple, disposem d'una bossa on tenim 10 boles, el nombre de maneres de treure una bola és 10.

3) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$

Per a fer la prova fem el raonament següent: podem formar el mateix nombre de subconjunts de m elements que de $n-m$ elements, ja que cada cop que comptem un subconjunt de m elements també estem comptant un subconjunt de $n-m$ elements, $n = m+(n-m)$. Fixeu-vos també en la fórmula que hem utilitzat per a calcular el nombre de mostres de mida m que podem obtenir d'un conjunt de n elements. En el denominador tenim l'expressió $m!(n-m)!$, que també podem expressar com $(n-m)!m!$

4) $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}.$

Per a fer la prova pensem en un conjunt A que té n elements. Si ens fixem en un element en concret, x, podem escriure el conjunt A com una unió $A = (A-\{x\}) \cup \{x\}$. El nombre de subconjunts de m elements que podem formar en A serà la suma dels subconjunts que no tenen x més la dels que sí que tenen x. El nombre de subconjunts amb m elements en què no hi ha x és $\binom{n-1}{m}$, i agafem els m elements del conjunt $A-\{x\}$ que té $n-1$ elements. Els subconjunts de

m elements que tenen x els formem afegint a l'element x $m-1$ elements del conjunt $A-\{x\}$, que té $n-1$ elements, és a dir, $\binom{n-1}{m-1}$. És a dir, és com si traiem una de les boles de la bossa, comptem quantes combinacions possibles podem formar amb les boles restants i després comptem les combinacions possibles de la resta de boles amb la que hem tret*.

*** Fixeu-vos que el terme és $m-1$ perquè una de les boles ja l'hem treta prèviament.**

1.4. Mostres no ordenades amb repetició

Exemple 1.5

Tenim 4 boles iguals i les volem posar en 3 caixes diferents. Quantes possibilitats tenim?

Si anomenem les caixes *A*, *B* i *C*, pensem la mostra *AAAA* com el cas en què les 4 boles es troben dins la caixa *A*, la mostra *AABB*, com el cas en què hi ha dues boles a la caixa *A* i les altres dues a la caixa *B*. La mostra *AABB* és la mateixa que *BABA*, ja que les boles són iguals (indistingibles), i per tant només l'hem de comptar un cop. Veiem que des d'aquest punt de vista (primer model), tenim mostres de mida 4 (boles indistingibles) amb repetició i no ordenades. Ara bé, per a calcular la quantitat de mostres d'aquest tipus és millor pensar cada una d'aquestes mostres des d'un altre punt de vista. Pensem que hem d'omplir 6 espais amb 4 símbols del tipus • i 2 símbols del tipus |. La raó que sigui així la veurem a continuació: ens imaginem les tres caixes seguint aquest ordre, *A*|*B*|*C*, i ara, per simplificar, només cal que ens imaginem les separacions entre les caixes. Cada símbol | representa una separació entre dues caixes consecutives i, per tant, només necessitem 2 separacions. De les 6 posicions que tenim, en triem dues per a posar les separacions i en les altres posicions posem els símbols •. El que acabem d'explicar ho podem veure en algunes mostres

primer model	segon model omplim 6 espais 1	2	3	4	5	6	posicions de les separacions
AAAA	•	•	•	•	|	|	{5,6}
AAAB	•	•	•	|	•	|	{4,6}
AABC	•	•	|	•	|	•	{3,5}
CCCC	|	|	•	•	•	•	{1,2}

Cada mostra queda caracteritzada per la posició de les dues separacions entre les 6 que podem triar. Observem que el nombre de posicions per triar és la suma (*boles* + *separacions*) = 4 + (3 – 1) = 6. Donar dues posicions és el mateix que donar un subconjunt de 2 elements dins d'un conjunt de 6 elements. Per tant, el que estem comptant és el nombre de subconjunts de 2 elements que podem formar en un conjunt de 6 elements, $\binom{3-1+4}{4} = \binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$. El fet que $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$ reflecteix que és el mateix començar triant la posició de les separacions que la posició de les boles.

AAAA	BBBB	CCCC	AAAB	AAAC	BBBA
BBBC	CCCA	CCCB	AABB	AACC	BBCC
AABC	BBAC	CCAB			

En general, en un conjunt de n elements, el nombre de mostres de mida m, no ordenades i amb repetició, és:

$$CR_{n,m} = C_{n-1+m,m} = \binom{n-1+m}{m} = \binom{n-1+m}{n-1}.$$

En diem combinacions amb repetició de n elements agafats de m en m.

1.5. Altres exemples

1) Es volen connectar (cablejar) els punts *A* i *B*, de manera que el camí segueixi la quadrícula que marca el dibuix. Només és permès anar a la dreta (1) i a dalt (0). Al gràfic teniu representat un dels camins possibles, que estaria descrit per la seqüència 110000011110.

Figura 1. Quadrícula amb els camins possibles entre *A* i *B*

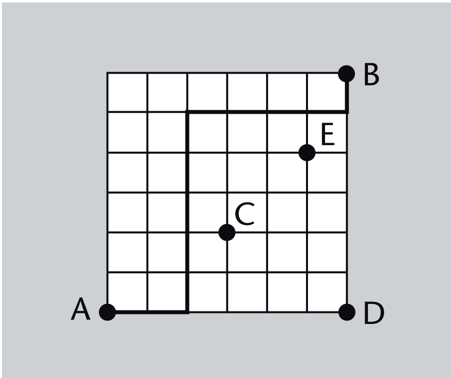


Figura 1

Volem connectar els punts *A* i *B*. De quantes maneres ho podem fer?

a) Calculeu el nombre de camins possibles entre A i B.

Volem conèixer el nombre de mostres del tipus 110000011110, en què hem de mantenir el nombre de zeros. Cada 0 ocupa una posició que és determinada per un nombre del conjunt $A = \{1,2,\cdots,12\}$; així doncs, a la mostra 110000011110 li fem correspondre el subconjunt de 6 elements $\{3,4,5,6,7,12\}$. El nombre de subconjunts de 6 elements que podem formar amb els elements de *A* és $\binom{12}{6} = 924$.

b) Calculeu el nombre de camins possibles entre *A* i *B* que passin per *C*.

De *A* a *C* hi ha $\binom{5}{2}$ possibilitats i de *C* a *B* $\binom{7}{4}$ possibilitats. En total n'hi haurà $\binom{5}{2}\binom{7}{4} = 350$.

c) Calculeu el nombre de camins possibles entre *A* i *B* que passin per *C* i per *E*.

$$\binom{5}{2}\binom{4}{2}\binom{3}{2} = 180.$$

2) Considereu totes les solucions de l'equació $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50$, en què x_1,x_2,x_3,x_4 prenen valors naturals. Per a resoldre aquest problema, podem pensar que es tracta de 50 boles que hem de repartir en 4 caixes.

a) Quantes solucions hi ha?

$$\binom{50+4-1}{4-1} = 23.426.$$

b) Quantes solucions hi ha en què una i només una de les incògnites sigui 0?

$$4\binom{(50-3)+3-1}{3-1} = 4.704.$$

c) Quantes solucions hi ha de manera que x_1,x_2,x_3,x_4 prenguin valors parells?

$$\binom{\frac{50}{2}+4-1}{4-1} = 3.276.$$

d) Quantes solucions hi ha de manera que x_1,x_2,x_3,x_4 prenguin valors senars?

$$\binom{\frac{50-4}{2}+4-1}{4-1} = 2.600.$$

3) Volem omplir la quadrícula següent amb 20 fitxes diferents.

Figura 2. Quadrícula definida per a omplir-la amb 20 fitxes diferents

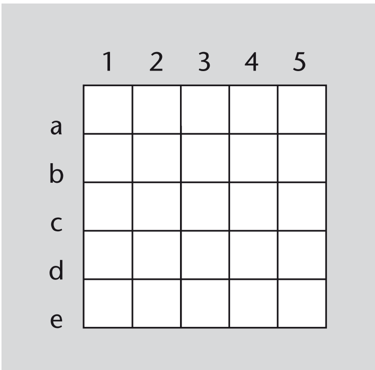


Figura 2

Volem omplir la quadrícula de la figura amb 20 fitxes diferents. De quantes maneres diferents ho podem fer?

a) De quantes maneres ho podem fer si podem posar totes les fitxes que vulguem dins d'un mateix quadre? $VR_{25,20} = 25^{20}$.

b) De quantes maneres, si cada quadre només pot tenir com a màxim una fitxa? $V_{25,20} = 25!/5!$

c) De quantes maneres, si cada quadre només pot tenir com a màxim una fitxa i volem deixar una única fila buida? $5 \cdot V_{20,20} = 5 \cdot 20!$

2. Espai de probabilitat

En l'apartat 1 d'aquest mòdul hem vist en què consisteixen les tècniques de comptar i com podem agrupar elements segons diferents criteris: amb ordenació o sense, amb repetició, etc. Cada configuració possible de les que hem vist tindrà una probabilitat associada de succeir o no. És a dir, a cada experiència li podem assignar un nombre que ens indiqui amb quina freqüència obtindrem un resultat o un altre. D'aquesta manera, tot just abans de dur a terme un conjunt d'experiments ens podem fer una idea de si un succés determinat es pot donar o no amb una certa probabilitat.

La probabilitat que es realitzi un cert resultat en una experiència determinada està relacionada amb la freqüència d'aquest resultat. Si repetíssim molts cops l'experiència, més probabilitat hi hauria d'obtenir un cert resultat. Així doncs, podem definir la probabilitat com la freqüència amb què s'obté un resultat o conjunt de resultats a partir d'un experiment aleatori. Suposarem que coneixem tots els resultats possibles i que les condicions de l'experiència aleatòria són estables. Al llarg de la història s'han proposat diverses definicions matemàtiques de probabilitat (motivades principalment pels jocs d'atzar). Però no és fins al principi del segle XX que s'introdueix el model probabilístic de manera axiomàtica i així es formalitzen totes les idees anteriors.

En aquest apartat veurem els conceptes bàsics de la teoria de la probabilitats i també algun teoremes importants.

2.1. Experiència aleatòria i successos. Operacions bàsiques i propietats

Definició 2.1. Suposem que en repetir una determinada experiència en les mateixes condicions podem obtenir un conjunt de resultats diferents. Diem que l'**experiència** és **aleatòria** si és impossible de predir-ne el resultat.

Per exemple, les següents són experiències aleatòries:

- Observació del temps que triga un aparell nou a espatllar-se.
- Observació del temps de vida d'un paquet en una xarxa.
- Observació del nombre de peticions que arriben a un servidor no sobrecarregat.

Experiments i resultats

Podem definir un experiment com una acció o conjunt d'accions que fem per a obtenir un resultat. Un resultat és la realització d'un dels valors possibles que ens podria donar l'experiment.

- Observació de nombre de salts d'un missatge en una xarxa de telecomunicacions.

Exemple 2.1

En llançar un dau podem obtenir un resultat qualsevol entre $\{1,2,3,4,5,6\}$, però no podem predir quin. Es tracta d'una experiència aleatòria. El conjunt format per tots els resultats possibles, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, s'anomena *espai mostral*.

Definició 2.2. Anomenem **espai mostral**, Ω, el conjunt de resultats possibles d'una experiència aleatòria.

Definició 2.3. Donat un espai mostral, Ω, anomenem **succés** o **esdeveniment**, A, qualsevol subconjunt de l'espai mostral, $A \subset \Omega$. Un succés es diu elemental quan té un únic element.

"Passa *A*"

Si A és un succés, diem que "passa A" quan el resultat de l'experiment és un element del subconjunt de resultats possibles A.

Exemple 2.2

Continuem amb l'exemple del dau, l'exemple 2.1. Definirem alguns successos i algunes maneres de descriure'ls:

Succés A, A = { nombre parell} = $\{2,4,6\}$
Succés B, B = {nombre més gran que 3} = $\{4,5,6\}$

En aquest exemple tenim 6 successos elementals o successos que tenen un sol element: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ i $\{6\}$.

Exemple 2.3

Rebem un missatge binari (format amb elements de $\{0,1\}$), de llargada 3 (o de mida 3).

- L'espai mostral Ω és el conjunt de tots els resultats possibles, és a dir, tots els missatges possibles de 3 bits que podem rebre. $\Omega = \{000,001,010,100,011,101,110,111\}$. Com que té 8 elements, diem que el **cardinal** de Ω és 8 i escrivim $|\Omega| = 8$.

- Ara definim alguns successos: $A = \{000,001,010\}$, B = {missatges amb un sol 0}, $C = \{011,101\}$, $D = \{010,100,011,111\}$.

Notació

Fixeu-vos en la notació. $\{000,001,010\} = \{010,000,001\}$. No importa l'ordre en què escrivim els elements d'un conjunt.

Si us hi fixeu, els diferents successos que definim són subconjunts del conjunt de tots els resultats possibles (o espai mostral) Ω. Ara veurem alguns conceptes bàsics de la teoria de conjunts que ens ajudaran a l'hora de treballar amb els successos i assignar-los probabilitats.

Definició 2.4. Donats dos conjunts A i B, de manera que tots dos pertanyen a l'espai mostral Ω (és a dir, $A,B \subset \Omega$), definim els conjunts següents:

- A^c (**conjunt complementari de** A) és el conjunt que té per elements tots els elements de Ω que no són de A. És a dir, A^c = *no passa* A. Es compleix el següent: $P(A^c) = 1 - P(A)$.

- $A \cup B$ (A **unió** B) és el conjunt que té tots els elements de A i també els de B.

- $A \cap B$ (A **intersecció** B) és el conjunt que té tots els elements de A que alhora també són de B.

- $\varnothing$ és el **conjunt buit** i Ω és el **conjunt total**.

- Diem que dos conjunts A **i** B **són disjunts** quan no tenen cap element en comú, és a dir, $A \cap B = \varnothing$ (l'únic element que tenen en comú és el conjunt buit).

- Diem que els conjunts $A_1, A_2, \cdots A_n$ formen una **partició de** Ω quan els conjunts són disjunts de dos en dos, i la unió de tots és el conjunt total. És a dir,

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{per} \quad i \neq j \quad \text{i} \quad \cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Conjunts $\varnothing$ i Ω

Fixeu-vos que els conjunts $\varnothing$ i Ω són complementaris i també disjunts.

Partició d'un conjunt

Imagineu que el conjunt Ω és un pastís que hem de repartir entre diferents persones. Això seria un exemple de partició, ja que els trossos en què dividim el pastís són disjunts (no se superposen) i la suma de tots els trossos és el pastís sencer (l'espai mostral Ω).

Exemple 2.4

En aquest exemple representem una partició, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, d'un conjunt $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, amb $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2,3\}$, $A_3 = \{4,5,6\}$, $A_4 = \{7,8\}$ i $A_5 = \{9,10\}$. La unió de tots és el total, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$, i la intersecció entre dos qualssevol és buida. Vegem-ne dues representacions.

Figura 3. Els conjunts A_1, A_2, A_3, A_4 i A_5 formen una partició del conjunt total Ω

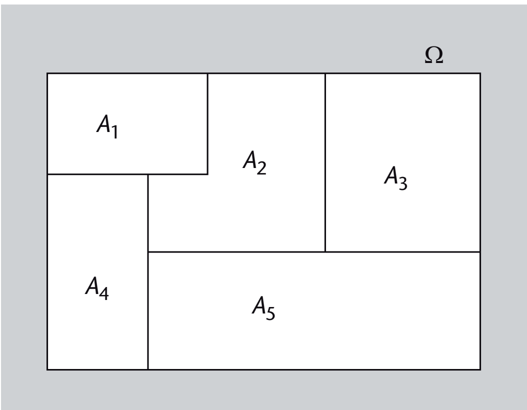


Figura 3

Exemple de partició d'un conjunt total, Ω

Figura 4. Distribució dels elements del conjunt Ω en diferents subconjunts o successos i que formen una partició

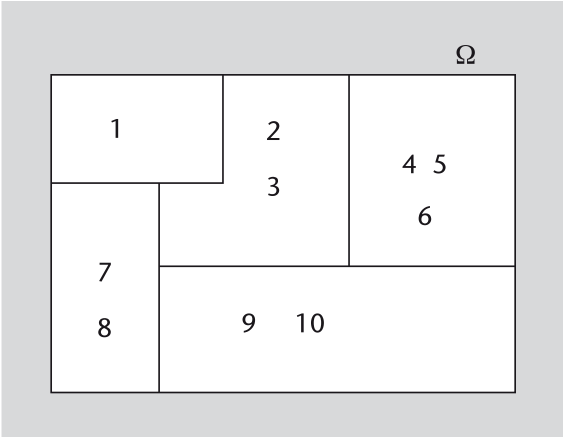


Figura 4

Distribució dels elements del conjunt Ω en diferents subconjunts o successos i que formen una partició

Vegem les definicions anteriors en termes probabilístics. Per a il·lustrar cada definició suposarem que en l'experiment de llançar un dau a l'aire, el succés A consisteix a obtenir un nombre parell i el succés B consisteix a obtenir un nombre més petit o igual que 3:

- El succés contrari de A és el conjunt complementari A^c i es realitza quan no ho fa A. En en nostre exemple del dau A^c es dóna quan obtenim un resultat imparell.

- El succés $A \cup B$ es realitza si passa A, passa B o passa A i B alhora. En l'exemple del dau això passa si obtenim un nombre parell o bé si obtenim un nombre més petit o igual que 3. És a dir, $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$. Fixeu-vos que quan obtenim un 2 es donen tots dos successos, A i B, a la vegada.

- El succés $A \cap B$ es realitza si passa A i B alhora. En el nostre exemple, $A \cap B = \{2\}$.

- $\varnothing$ és el succés impossible i Ω és el succés segur. Si llancem un dau obtenim un resultat entre 1 i 6 i és impossible obtenir un nombre fora d'aquest rang. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. És segur que obtindrem algun d'aquests valors.

- Diem que A i B són dos successos incompatibles quan no poden passar a la vegada perquè no tenen cap element en comú. És a dir, $A \cap B = \varnothing$. Si definim $C = \{1\}$, A i C són disjunts perquè si llancem un dau no es poden donar els dos successos a la vegada.

- Diem que $A_1, A_2, \cdots A_n$ formen un sistema complet de successos si formen una partició. Per exemple, si definim un tercer succés $D = \{3,5\}$, $A = \{parell\}$, $C = \{1\}$ i $D = \{3,5\}$ formen un sistema complet de successos.

Els conceptes anteriors els hem resumit a la taula següent.

En termes de probabilitat	En termes de conjunts	Notació
Succés segur	Conjunt total	Ω
Succés impossible	Conjunt buit	$\varnothing$
Succés contrari	Conjunt complementari	A^c, també $\overline{A}$
A i B	Intersecció	$A \cap B$
A o B	Unió	$A \cup B$
Successos incompatibles	Conjunts disjunts	$A \cap B = \varnothing$
Sistema complet de successos	Partició de Ω	$A_i \cap A_j = \varnothing$ $\cup A_i = \Omega$

Exemple 2.5

Considerant els conjunts de l'exemple 1.2 (missatges binaris rebuts de mida 3), podem escriure:

$$\text{Complementari de } A, \quad A^c = \{011,100,101,110,111\}$$

$$A \text{ unió } B, \quad A \cup B = \{000,001,010,011,101,110\}$$

$$A \text{ unió } C, \quad A \cup C = \{000,001,010,011,101\}$$

$$A \text{ intersecció } C, \quad A \cap C = \varnothing$$

2.2. Definició axiomàtica de probabilitat. Espai finit equiprobable

El resultat d'una experiència aleatòria no es pot preveure amb certitud. La teoria de la probabilitat dóna un *pes* a cada esdeveniment, és a dir, un nombre que avalua la certesa que tenim que un resultat es doni.

Definició 2.5. A partir d'una experiència aleatòria amb l'espai mostral Ω, considerem el conjunt format per tots els subconjunts de Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$. Una **probabilitat sobre** Ω és una aplicació que a cada subconjunt $A \subset \Omega$ li assigna un nombre real, $P(A)$, que verifica:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$. Una probabilitat és un nombre que sempre està entre 0 i 1.

2) $P(\Omega) = 1$. La probabilitat de l'espai mostral Ω és 1, ja que aquest conjunt conté tots els resultats possibles del nostre experiment. Prenem aquest 1 per conveni i diem que la probabilitat és normalitzada a 1.

3) Si $A \cap B = \varnothing$ aleshores $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. És a dir, si dos conjunts no tenen cap element en comú, la probabilitat que passi el succés A o que passi els succés B és la suma de probabilitats.

Diem que tenim un **espai de probabilitat** quan tenim un conjunt Ω en què hem definit una probabilitat.

Dels axiomes anteriors es dedueixen les propietats indicades a la proposició 2.1.

Proposició 2.1. Propietats:

1) La probabilitat del succés impossible és 0. Quan fem un experiment aleatori obtenim un resultat que pertany a l'espai mostral Ω, i per tant no es pot donar l'esdeveniment $\varnothing$. Imagineu que tirem una moneda a l'aire. El resultat ha de ser forçosament cara o creu.

2) Donat un succés qualsevol A, es verifica $P(A^c) = 1 - P(A)$. Aquesta propietat és clara si pensem que A i A^c formen una partició del total, Ω.

3) Donats dos successos A i B, la probabilitat del succés A *unió* B la podem expressar com: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Fixeu-vos en la figura 5. Si volem trobar la probabilitat del conjunt $P(A \cup B)$ hem de considerar la probabilitat de A, la probabilitat de B i restar un cop la probabilitat de $P(A \cap B)$, ja que si no l'estaríem comptant dos cops.

La prova de les tres propietats és immediata. Fem la prova de la tercera propietat. Posem el conjunt A com a unió de dos conjunts disjunts,

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c). \tag{1}$$

És a dir, el conjunt A el podem reescriure com la unió de dos conjunts: el conjunt $(A \cap B)$ (en la figura 5 correspon a la part en gris fosc) i el conjunt $(A \cap B^c)$, que és tot el conjunt A menys la part que té en comú amb B (en la figura 5 correspon a la part en gris clar).

Figura 5. Representació de $A \cap B^c$ i $A \cap B$

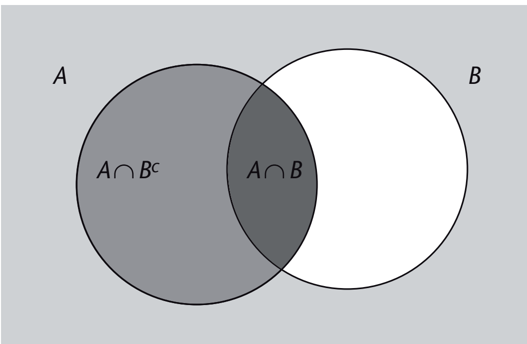


Figura 5

Representació gràfica del conjunt $A \cup B$ (A unió B). Calcularem quina és la probabilitat d'aquest succés.

Com que tenim una unió de dos conjunts disjunts (ho podem veure en la figura), la probabilitat és suma de probabilitats:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c). \tag{2}$$

De manera semblant, escrivim $A \cup B$ com a unió de dos conjunts disjunts:

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup B.$$

Llavors,

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B). \tag{3}$$

De les equacions (2) i (3) obtenim $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Definició 2.6 Espai finit equiprobable

En un **espai finit equiprobable** que té per espai mostral $\Omega = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$, cada un dels successos elementals té la mateixa probabilitat. Així,

$$P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = \cdots = P(\{a_n\}) = p,$$

i com que s'ha de verificar que

$$P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \cdots + P(\{a_n\}) = np = 1,$$

es té que la probabilitat de cada succés elemental és $P(\{a_i\}) = \dfrac{1}{n}$.

Tornem a l'experiència de llançar un dau a l'aire. L'espai mostral Ω està format per $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Per simetria del dau, cadascun dels resultats té la mateixa probabilitat de sortir i aquesta probabilitat és $p = \frac{1}{n}$, en què n és el nombre d'elements de l'espai mostral. En aquest cas $p = \frac{1}{6}$.

Ara ja sabem com podem calcular la probabilitat d'un succés elemental en un espai equiprobable. Anem un pas més enllà i ara calcularem la probabilitat d'un succés A definit en un espai equiprobable. Recordeu que en un succés podem tenir diversos successos elementals. Per a fer aquest càlcul utilitzarem la **llei de Laplace**, tal com veiem tot seguit.

Proposició 2.2. Llei de Laplace

En un espai equiprobable, la probabilitat d'un succés A és el quocient entre el nombre d'elements de A i el nombre d'elements de l'espai mostral. S'acostuma a dir

$$P(A) = \frac{\text{nombre de casos favorables}}{\text{nombre de casos possibles}}.$$

Exemple 2.6

Considerem l'experiència de llençar una moneda tres cops seguits (fixeu-vos que aquest exemple és molt similar al 2.3, en què rebíem paraules de tres bits). L'espai mostral amb tots els resultats possibles és $\Omega = \{\circ\circ\circ, \circ\circ+, +\circ\circ, \circ+\circ, ++\circ, +\circ+, \circ++, +++\}$.

Si la moneda és perfecta es tracta d'un espai **equiprobable**, ja que els successos elementals (cara o creu) tenen la mateixa probabilitat, en aquest cas $P(\circ) = P(+) = \frac{1}{2}$.

Siguin els successos següents:

A = {han sortit exactament dues cares} = $\{\circ\circ+, \circ+\circ, +\circ\circ\}$
B = {no ha sortit cap cara} = $\{+++\}$
C = {ha sortit exactament una creu} = $\{\circ\circ+, \circ+\circ, +\circ\circ\}$
D = {ha sortit almenys una creu} = $\{\circ\circ+, +\circ\circ, \circ+\circ, ++\circ, +\circ+, \circ++, +++\}$

Calculem algunes probabilitats. El fet que l'espai sigui equiprobable ens permet aplicar la llei de Laplace. En cada cas cal comptar el nombre d'elements que té el conjunt (casos favorables) i dividir per 8 (casos possibles).

Probabilitat que surtin dues cares, $P(A) = \frac{3}{8}$.
Probabilitat que no surti cap cara, $P(B) = \frac{1}{8}$.
Probabilitat que surti una creu, $P(C) = \frac{3}{8}$.
Probabilitat que almenys surti una creu, $P(D) = \frac{7}{8}$.
Probabilitat que surtin dues cares i alhora cap cara (és impossible), $P(A \cap B) = 0$.
Probabilitat que surtin dues cares o bé almenys una creu, $P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = \frac{3}{8} + \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$.
Probabilitat que surtin dues cares o cap cara, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} - 0 = \frac{4}{8}$.
Probabilitat que no surti cap cara i almenys una creu, $P(B \cap D) = \frac{1}{8}$.

2.3. Probabilitat condicionada. Successos independents

Parlem de **probabilitat condicionada** quan ja s'ha fet l'experiència i ens donen una pista sobre el resultat obtingut. Vegem-ne un exemple.

Exemple 2.7

Considerem el mateix espai de probabilitat que en l'exemple 2.6. Es realitza l'experiència i ens donen la pista que almenys ha sortit una creu. És a dir, sabem que ha succeït l'esdeveniment D, ha sortit alguna creu. Quina és la probabilitat que hagin sortit dues cares (succés A)?

És clar que ara l'espai total ha quedat reduït al conjunt

$$\{\circ\circ+, +\circ\circ, \circ+\circ, ++\circ, +\circ+, \circ++, +++\}$$

Per tant, ara, la probabilitat que hagin sortit dues cares és $\frac{3}{7}$.

Ho escrivim com $P(A|D) = \frac{3}{7}$ i en diem probabilitat de A condicionada a D. O el que és el mateix, probabilitat que passi A un cop hem fet l'experiment i sabem que ha passat D en aquell mateix experiment.

A continuació en donem la definició.

Espai mostral de la probabilitat condicionada

Fixeu-vos que en el cas de les probabilitats condicionades reduïm l'espai mostral a l'espai del succés que sabem que ha succeït. Ara, el nombre de casos possibles ja no és tot l'espai mostral Ω, sinó el conjunt d'elements del succés B.

Definició 2.7. Donats dos conjunts $A,B \subset \Omega$, amb $P(B) \neq 0$, definim la **probabilitat del conjunt** A **condicionada a** B com:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \qquad (4)$$

Es tracta de trobar la probabilitat de A, sabent que s'ha realitzat B.

Exemple 2.8.

Considerem el mateix espai de probabilitat que en l'exemple 2.6, en què llançàvem tres cops una moneda a l'aire, i calculem algunes probabilitats condicionades:

- Sabent que ha sortit almenys una creu, probabilitat que hagin sortit dues cares. És a dir, $P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{7}$. Ja ho havíem trobat en l'exemple anterior.

- Sabent que ha sortit almenys una creu, probabilitat que hagi sortit exactament una creu. És a dir, $P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{3/8}{7/8} = \frac{3}{7}$.

- Sabent que ha sortit almenys una creu, probabilitat que no hagi sortit cap cara. És a dir, $P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}$.

- Sabent que ha sortit una creu, probabilitat que hagin sortit dues cares. De fet, els successos A i C són el mateix. Per tant, $P(A|C) = 1$.

- Sabent que no ha sortit cap cara, probabilitat que hagin sortit dues cares. És a dir, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$.

Definició 2.8 Sigui $A,B \subset \Omega$. El succés A és **independent** del succés B, quan la probabilitat de A no es modifica en conèixer alguna informació de la realització de B. És a dir,

$$P(A|B) = P(A). \qquad (5)$$

Volem veure que si A és independent del succés B, llavors el succés B també és independent de A. De l'equació (4) tenim

$$P(A)P(B|A) = P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(B)P(A|B),$$

i si tenim en compte l'equació (5) i substituïm l'últim terme de la igualtat,

$$P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) = P(B)P(A), \qquad (6)$$

ara substituïm $P(A) \neq 0$ i ens queda

$$P(B|A) = P(B). \qquad (7)$$

Per tant, si A és independent de B, B també és independent de A i es verifica

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B) \qquad (8)$$

i, per tant, si A i B són independents es verifica

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \qquad (9)$$

Vegem-ne un exemple numèric.

Exemple 2.9

Siguin A i B dos successos de Ω, i sabem que $P(A \cup B) = 0{,}52$, $P(A \cap B) = 0{,}08$ i $P(A) = 0{,}4$. Veurem que A i B són independents.

Per a això veiem si es verifica la igualtat $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Aplicant la propietat $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, tenim

$$0{,}52 = 0{,}4 + P(B) - 0{,}08 \implies P(B) = 0{,}2 \implies P(A)P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08 = P(A \cap B).$$

2.4. Teorema de la probabilitat total. Teorema de Bayes

Exemple 2.10

Un aparell electrònic ha de treballar dins del rang de temperatures [10 °C,40 °C]. S'ha observat que quan la temperatura es troba en l'interval T_1 = [10 °C,20 °C] té un comportament òptim el 75% de les vegades, quan treballa a temperatures de l'interval T_2 = (20 °C,30 °C] un 55% de les vegades, i quan treballa a temperatures dins el rang T_3 = (30 °C,40 °C] un 45% de les vegades. També coneixem la freqüència de cada un d'aquests rangs de temperatura. El 25% de les vegades la temperatura és dins T_1, el 60% dins T_2 i el 15% dins T_3. Ens preguntem quina és la probabilitat que, en un moment donat a una temperatura qualsevol dins el rang [10 °C,40 °C], l'aparell tingui un comportament òptim.

Intervals oberts i tancats

Els símbols *[* i *]* s'utilitzen per a definir un interval tancat (l'interval inclou els valors dels extrems). Els símbols *(* i *)* s'utilitzen per a definir intervals oberts (l'interval no inclou els valors dels extrems). Per exemple T_1 = [10 °C,20 °C] inclou els extrems. T_2 = (20 °C,30 °C] és una temperatura a partir de 20 °C.

T_1, T_2 i T_3 formen una partició del conjunt de temperatures possible [10 °C,40 °C] perquè $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ = [10 °C,40 °C] i $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, $T_1 \cap T_3 = \varnothing$ i $T_2 \cap T_3 = \varnothing$. Si anomenem el succés O={Funcionament òptim }, podem escriure

$$O = (O \cap T_1) \cup (O \cap T_2) \cup (O \cap T_3)$$

i com que aquests conjunts són disjunts,

$$P(O) = P(O \cap T_1) + P(O \cap T_2) + P(O \cap T_3).$$

Però no coneixem el valor numèric de les probabilitats d'aquestes interseccions. De l'enunciat sabem que $P(O|T_1) = 0{,}75$, $P(O|T_2) = 0{,}55$, i $P(O|T_3) = 0{,}45$. També coneixem $P(T_1) = 0{,}25$, $P(T_2) = 0{,}60$ i $P(T_3) = 0{,}15$. Podem deduir el valor d'aquestes probabilitats:

$$\begin{aligned} P(O \cap T_1) &= P(O|T_1)P(T_1) = 0{,}1875 \\ P(O \cap T_2) &= P(O|T_2)P(T_2) = 0{,}33 \\ P(O \cap T_3) &= P(O|T_3)P(T_3) = 0{,}0675 \end{aligned}$$

Així $P(O) = 0{,}1875 + 0{,}33 + 0{,}0675 = 0{,}585$.

En aquest exemple hem aplicat el **teorema de la probabilitat total** que enunciem a continuació.

Teorema 2.1. Si $A_1, A_2, \cdots A_n$ és un sistema complet de successos de Ω i $B \subset \Omega$, podem escriure el succés B com a unió de parts disjuntes de dues en dues:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots (A_n \cap B).$$

Com que les parts són disjuntes, la probabilitat la trobem sumant les probabilitats:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

i tenint en compte l'equació (4), obtenim el **teorema de la probabilitat total**:

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n).$$

Exemple 2.11

Considerem el mateix enunciat que en l'exemple 2.10 i ens fem la pregunta següent: sabent que el funcionament de l'aparell ha estat òptim, quina és la probabilitat que ens trobem en un rang de temperatures corresponent a T_1?

És clar que el que ens demanen és $P(T_1|O)$, que és precisament el contrari de les dades que ens donen, ja que el que coneixem és $P(O|T_1)$, $P(O|T_2)$ i $P(O|T_3)$.

Com coneixem la relació, $P(T_1|O) = \dfrac{P(T_1 \cap O)}{P(O)}$, i els valors numèrics ja els hem obtingut en l'exemple anterior, tenim que $P(T_1|O) = \dfrac{0{,}1875}{0{,}585} = 0{,}3205$.

Acabem d'aplicar el que s'anomena **teorema de Bayes**. Vegem-ho de manera general.

Teorema 2.2. Teorema de Bayes

Si $A_1, A_2, \cdots A_n$ és un sistema complet de successos de Ω i $B \subset \Omega$,

$$P(B \cap A_i) = P(B|A_i)P(A_i) = P(A_i|B)P(B)$$

i obtenim la **fórmula de Bayes**:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n)}.$$

Exemple 2.12

Hi ha tres empreses, A, B i C, que fabriquen la mateixa peça d'avió en les proporcions següents, respecte del total de peces fabricades: 40%, 25% i 35%. El 10% de peces que fabrica l'empresa A són defectuoses, mentre que aquest percentatge és del 5% per a l'empresa B, i de l'1% per a C. Dins de la producció total de les tres empreses, es tria una peça a l'atzar i s'observa que és defectuosa. Calculem la probabilitat que hagi estat fabricada per l'empresa A.

Definim els successos següents:

$$D = \{\text{“la peça és defectuosa”}\}$$

$$A = \{\text{“la peça ha estat fabricada per A”}\}$$

$$B = \{\text{“la peça ha estat fabricada per B”}\}$$

$$C = \{\text{“la peça ha estat fabricada per C”}\}$$

A, B i C formen una partició, i coneixem $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}25$ i $P(C) = 0{,}35$. L'enunciat també ens dóna les dades sobre la probabilitat que la peça sigui defectuosa segons on ha estat fabricada: $P(D|A) = 0{,}1$, $P(D|B) = 0{,}05$ i $P(D|C) = 0{,}01$.

Segons el teorema de la probabilitat total,

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) = 0{,}056.$$

Amb el teorema de Bayes obtenim el que ens demanen,

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0{,}4\ 0{,}1}{0{,}056} = 0{,}714.$$

2.5. Diagrames d'arbre

A l'hora d'aplicar els teoremes de la probabilitat total i Bayes ens podem ajudar amb el que anomenem *diagrames d'arbre*.

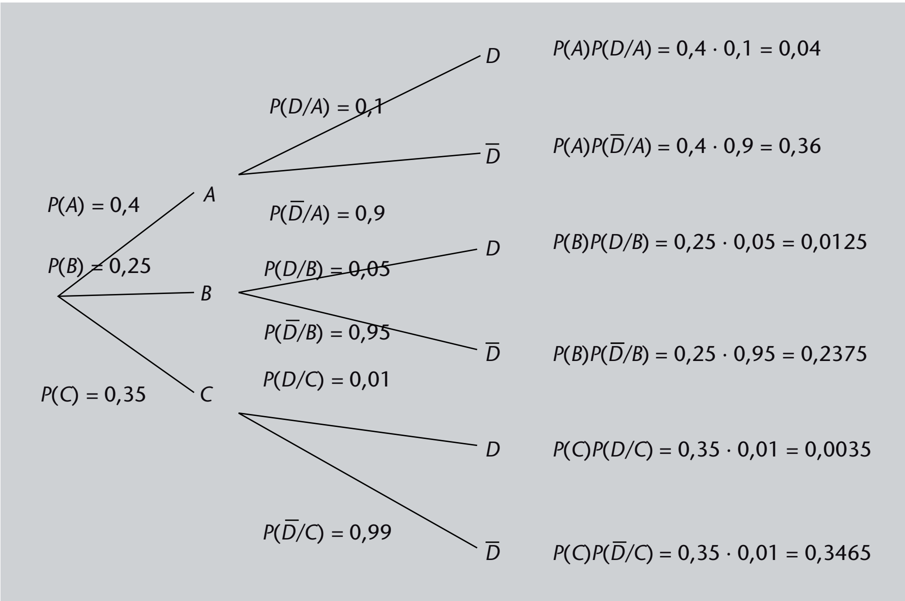
Exemple 2.13

Vegem en la figura 6 la manera de representar mitjançant un diagrama d'arbre l'experiència de l'exemple 2.12.

Figura 6

Representació gràfica d'un diagrama d'arbre en què cada branca ens indica una probabilitat.

Figura 6. Diagrama d'arbre



Algunes consideracions sobre aquests diagrames:

- Ens imaginem, temporalment, l'experiència, d'esquerra a dreta.
- Cada un dels camins, des de l'inici fins al final, representa una possibilitat de l'experiència.
- A la dreta del diagrama queden representades totes les possibilitats, i per tant, la suma és 1.
- Cada un dels segments representa un *pas* de l'experiència.
- La probabilitat que indiquem en cada un d'aquests segments està condicionada a la part del camí ja feta.
- La suma de les probabilitats de tots els segments que parteixen d'un mateix punt és 1.

Exemple 2.14

S'envia una paraula de mida 12 formada amb elements del conjunt {0,1} (cada un d'aquests elements és el que s'anomena *bit*). Una paraula possible podria ser 111000111000. Sabem que la probabilitat que un bit, independent dels altres, arribi erroni al receptor, és de 0,1. Enviem una paraula i ens plantegem les qüestions següents:

1) Quina és la probabilitat que no arribi cap bit erroni?

2) Quina és la probabilitat que arribi un bit erroni?

3) Quina és la probabilitat que arribin dos bits erronis?

4) Quina és la probabilitat que arribin tres bits erronis?

5) Quina és la probabilitat que arribi, almenys, un bit erroni?

6) Quina és la probabilitat que arribi, com a mínim, un bit erroni?

7) Quina és la probabilitat que arribi, com a màxim, un bit erroni?

Ens podem representar cada possibilitat com una seqüència de dotze lletres del conjunt $\{e,n\}$, segons el bit arribi erroni o no arribi erroni. Per exemple:

eeeeeeeeeeee	tots els bits arriben erronis
nneeeeeeeeee	tots els bits arriben erronis menys els dos primers
nennnnnnnnnn	el segon bit arriba erroni i els altres no
enennnnnnnnn	el primer i tercer bit arriben erronis i els altres no

Com que la probabilitat que un bit qualsevol arribi erroni és 0,1, i aquesta probabilitat és independent del que passa als altres bits, la probabilitat de cada una de les seqüències només depèn de la quantitat de **e** o **n**. Ara podem respondre les preguntes anteriors.

1) $P(nnnnnnnnnnnn) = 0{,}9^{12} = 0{,}28$.

2) Hem de tenir en compte que el bit erroni pot ser en la primera posició, o en la segona,. . . , o en la dotzena posició, és a dir,

$$\text{ennnnnnnnnnn, nennnnnnnnnn,}\ldots\text{,nnnnnnnnnnne.}$$

Com que la probabilitat de cada un d'aquests casos és $0{,}1 \cdot 0{,}9^{11}$,

$$P(\text{arriba un bit erroni}) = 12 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^{11} = 0{,}375.$$

3) De la mateixa manera que hem fet abans, hem de calcular quantes paraules es poden formar amb dos bits erronis, com per exemple

$$\text{eennnnnnnnnn, enennnnnnnnn,}\ldots$$

El nombre de paraules d'aquest tipus és $\binom{12}{2}$. Així,

$$P(\text{arriben dos bits erronis}) = \binom{12}{2} 0{,}1^2 0{,}9^{10} = 0{,}23.$$

4) Amb un raonament semblant al cas anterior, obtenim ara

$$P(\text{arriben tres bits erronis}) = \binom{12}{3} 0{,}1^3 0{,}9^9 = 0{,}085.$$

5) Els casos que tenen **almenys** un bit erroni són els que tenen un bit erroni més els casos que tenen dos bits erronis, etc. És a dir, són tots els casos menys el cas en què no hi ha cap bit erroni. Com que la probabilitat de tots els casos és 1, tenim $P(\text{arriba almenys un bit erroni}) = 1 - 0{,}9^{12} = 0{,}717$.

6) Ens demanen el mateix que en el cas anterior; així,

$$P(\text{arriba com a mínim un bit erroni}) = 1 - 0{,}9^{12} = 0{,}717.$$

7) En aquest cas només hem de comptar els casos que no tenen cap bit erroni més els casos en què hi ha un bit erroni,

$$P(\text{arriba com a màxim un bit erroni}) = 0{,}9^{12} + 12 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^{11} = 0{,}65.$$

Resum

En el primer apartat d'aquest mòdul hem vist que donat un conjunt de n elements els podem agrupar de diferents maneres. Hem definit els casos següents:

- Prenem m elements i considerem que es poden repetir i que han d'estar ordenats (les mostres amb ordre diferent en els seus elements les considerem diferents). Això és el que hem anomenat **variacions amb repetició** i hem vist que podem formar un total de $VR_{n,m} = n^m$ mostres diferents.

- Prenem m elements i considerem que no es poden repetir i que han d'estar ordenats (les mostres amb ordre diferent en els seus elements les considerem diferents). Això és el que hem anomenat **variacions** o **permutacions**. Podem formar un total de $V_{n,m} = n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)$ mostres diferents.

- Prenem m elements i considerem que no es poden repetir i que els elements que formen la mostra no han d'estar ordenats (les mostres amb ordre diferent en els seus elements considerem que són la mateixa mostra). Això és el que hem anomenat **combinacions**. Podem formar un total de $C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ combinacions diferents.

- Finalment, podem prendre m elements i considerar que es poden repetir i que els elements que formen la mostra no han d'estar ordenats (les mostres amb ordre diferent en els seus elements considerem que són la mateixa mostra). El nombre de combinacions possibles que podem formar d'aquest tipus és $CR_{n,m} = C_{n-1+m,m} = \binom{n-1+m}{m} = \binom{n-1+m}{n-1}$.

A continuació podeu veure un quadre resum de l'apartat de combinatòria.

	Amb repetició	Sense repetició
Importa l'ordre	Variacions amb repetició: $VR_{n,m} = n^m$	Variacions. Permutacions de n elements: $V_{n,m} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1)$
No importa l'ordre	Mostres no ordenades amb repetició: $CR_{n,m} = C_{n,m} = \binom{n-1+m}{n-1}$	Combinacions: $C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Aquestes tècniques de comptar ens ajudaran a resoldre alguns problemes bàsics en què apliquem la teoria de la probabilitat.

En l'apartat 2 d'aquest mòdul hem vist que una **experiència aleatòria** es dóna quan no en podem predir el resultat. Tota experiència aleatòria té un conjunt de resultats possibles, que és el que hem anomenat **espai mostral** Ω.

Podem definir un **succés** o **esdeveniment** prenent un subconjunt de l'espai mostral Ω. Per exemple, quan llancem un dau podem definir el succés A com *obtenir un resultat parell*. Podem definir tants successos com vulguem i cada succés tindrà associada una probabilitat d'ocórrer o no. També podem relacionar diferents successos. D'aquesta manera hem definit la noció de **succés (o conjunt) complementari**, **succés (o conjunt) unió** i **succés (o conjunt) intersecció**. Diferents successos formen una **partició** quan la seva unió ens dóna el conjunt total Ω i no tenen cap element en comú entre ells.

Algunes relacions importants pel que fa a les probabilitats són les següents:

$$P(A^c) = 1 - P(A), \tag{10}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Una noció important vista en aquest apartat és la d'**espai equiprobable**, que es dóna quan tots els resultats possibles d'un experiment tenen la mateixa probabilitat de succeir. En aquestes condicions podem aplicar la **llei de Laplace** per a calcular probabilitats. En un espai equiprobable,

$$P(A) = \frac{\text{nombre de casos favorables}}{\text{nombre de casos possibles}}. \tag{11}$$

També hem vist la noció de **probabilitat condicionada** mitjançant la qual podem calcular la probabilitat d'un succés sabent que s'ha produït un altre succés determinat. Quan els esdeveniments passats no ens donen cap pista sobre un succés concret, parlem de **successos independents**. En aquests casos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{12}$$

El **teorema de Bayes** i el **teorema de la probabilitat total** ens donen eines per a manegar probabilitats condicionades. Si $A_1, A_2, \ldots A_n$ és un sistema complet de successos, llavors:

$$P(A \cap B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \ldots + P(B|A_n)P(A_n), \tag{13}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \ldots + P(B|A_n)P(A_n)}.$$

Finalment, hem vist una manera gràfica de treballar amb probabilitats, els **diagrames d'arbre**.

Activitats

1. Disposem d'un generador de bits (0 i 1) aleatori. Amb aquest bits generem missatges de 4 paraules. Es demana el següent:

a) Escriviu l'espai mostral. Quants elements té?

b) Definiu el succés *hi ha un únic 0 en el missatge generat*.

c) Definiu el succés *hi ha almenys tres 1 en el missatge generat*.

d) Definiu el conjunt unió dels conjunts descrits en els apartats *b* i *c*.

e) Definiu el conjunt intersecció dels conjunts descrits en els apartats *b* i *c*.

2. En una bossa tenim tres boles: una de vermella, una de blava i una de groga. Triem dues boles a l'atzar. Un cop triada la primera la tornem a la bossa, de manera que per a triar la segona tornem a tenir totes tres boles dins.

a) Quina és la probabilitat d'obtenir tots dos cops la bola vermella?

b) Quina és la probabilitat d'obtenir almenys un cop la bola blava?

3. En un control de qualitat considerem que un dispositiu electrònic funciona correctament si passa una de les dues proves que s'efectuen en tots els dispositius. Sabem que el 80% dels dispositius comprovats obtenen aquesta validació. Amb el primer test es van validar el 60% dels dispositius i amb el segon test es van validar el 50% dels dispositius. Quin hauria estat el percentatge de dispositius validats si haguéssim exigit que un dispositiu funciona correctament si supera els dos tests?

4. La probabilitat que un model d'encaminador determinat falli és del 4%. Disposem d'un sistema de monitoratge que detecta correctament el 95% dels casos en què un encaminador falla, però en un 2% dels casos rebem falses alarmes (per congestió de la xarxa, per exemple). Si ens arriba una alarma, quina és la probabilitat que es tracti d'una caiguda d'un encaminador?

5. Una línia de ferrocarril té 25 estacions. Quin nombre de bitllets diferents haurem d'imprimir si cada bitllet porta impreses l'estació d'origen i l'estació de destinació?

6. Un fabricant produeix PC en dues fàbriques diferents. El 50% dels PC es produeixen a la fàbrica A i sabem que el 15% dels PC que es produeixen en A són defectuosos. També sabem que el 5% del PC que es produeixen en B són defectuosos. Si la fàbrica A produeix 1.000.000 d'unitats i la fàbrica B produeix 1.500.000 d'unitats, quina és la probabilitat d'adquirir un PC defectuós?

7. En una zona geogràfica determinada trobem cobertura de dues companyies de telefonia mòbil. També trobem dos models únics de telèfon. De diferents estudis fets als usuaris s'ha obtingut la informació següent:

- El 60% dels usuaris estan abonats a la companyia A.
- El 40% dels usuaris estan abonats a la companyia B.
- El 70% dels usuaris disposa d'un telèfon model M_1.
- El 30% dels usuaris té telèfons dels dos models.
- La probabilitat de tall de la trucada, $P(T)$, és de 0,1 per als usuaris de la companyia A, 0,15 per als usuaris de la companyia B i de 0,051 per als usuaris que utilitzen el model M_1.

Ens demanen el següent:

- Determinar si els successos A i B formen una partició de l'espai mostral d'usuaris de telefonia mòbil.
- Calcular la probabilitat de tall d'una trucada.
- Sabem que a un usuari se li ha tallat una trucada; quina és la probabilitat que tingui un telèfon de la marca M_1?
- Si sabem que un usuari no té un telèfon de la marca M_1, quina és la probabilitat que tingui un tall en una trucada?

Solucionari

1.

a) L'espai mostral, Ω, de la nostra experiència aleatòria està formada per tots els successos possibles. Fixeu-vos que en aquest experiment estem considerant mostres de 4 elements, ordenats i amb repetició. Com hem vist en el subapartat 1.1, ho hem anomenat variacions amb repetició. En aquest cas considerem 2 elements (els bits 0 i 1) agafats de 4 en 4, $VR_{2,4} = 2^4 = 16$. Els elements del conjunt Ω són els següents:

$$\Omega = \{(0000),(0001),(0010),(0011),(0100),(0101),(0110),(0111),\\ (1000),(1001),(1010),(1011),(1100),(1101),(1110),(1111)\}.$$

b) A continuació ens demanen que identifiquem el succés *hi ha un únic 0 en el missatge generat*. Anem a l'espai mostral que hem definit en l'apartat anterior i prenem aquells elements en què es dóna aquesta condició. Si anomenem aquest succés A, el podem definir com segueix:

$$A = \{(0111),(1011),(1101),(1110)\}.$$

Fixeu-vos que A és un subconjunt de l'espai mostral Ω.

c) Per a definir el succés *hi ha almenys tres 1 en el missatge generat*, com hem fet en l'apartat anterior, ens fixem en els elements de l'espai Ω que compleixen aquesta condició. Si anomenem B aquest subconjunt, el podem definir com segueix:

$$B = \{(0111),(1011),(1110),(1111)\}.$$

d) El conjunt unió de A i B està format pels elements que compleixen indistintament les condicions *hi ha un únic 0 en el missatge generat* i *hi ha almenys tres 1 en el missatge generat*. Fixeu-vos que en aquest cas els tres primers elements de B també pertanyen a A. Com que B té un element més (el missatge en què tot són 1) obtenim que la unió dels dos subconjunts és B:

$$A \cup B = B = \{(0111),(1011),(1110),(1111)\}.$$

e) El conjunt intersecció de A i B està format pels elements que compleixen simultàniament totes dues condicions. És a dir, per als elements que estiguin en els dos subconjunts. En aquest cas:

$$A \cap B = \{(0111),(1011),(1110)\}.$$

2.

a) Per a obtenir dos cops la bola vermella s'ha de donar el succés $V_1 \cap V_2$. Com que les tres boles tenen la mateixa probabilitat de sortir, és a dir, són equiprobables, podem aplicar la llei de Laplace, de manera que dividim casos favorables (que surti la bola vermella) entre casos possibles (podem obtenir qualsevol de les tres boles). Per tant, $P(V_1) = \frac{1}{3}$. Com que un cop fem la primera extracció tornem la bola al sac, per a la segona extracció partim de les mateixes condicions. Per tant, $P(V_2) = \frac{1}{3}$. Els successos són independents ja que el primer resultat no ens dóna cap pista de com serà el segon resultat; per tant, la probabilitat de la intersecció és el producte de probabilitats:

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \cdot P(V_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

b) El succés *obtenir almenys un cop la bola blava* es dóna quan l'obtenim el primer cop o bé el segon o bé tots dos cops. Haurem de calcular, doncs, la probabilitat de la unió d'aquests successos. Hem d'anar en compte de no comptar dos cops la probabilitat de la intersecció dels conjunts; per tant:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

3. Definim el succés T_1 com *passar el primer test* i el succés T_2 com *passar el segon test*. Per l'enunciat sabem el següent: $P(T_1 \cup T_2) = 0{,}8$. També tenim les probabilitats de passar cada test: $P(T_1) = 0{,}6$ i $P(T_2) = 0{,}5$. Ens demanen la probabilitat de passar el primer i el segon tests, és a dir, la probabilitat $P(T_1 \cap T_2)$. Sabem que la probabilitat de la unió és:

$$P(T_1 \cup T_2) = P(T_1) + P(T_2) - P(T_1 \cap T_2).$$

Aïllant el terme que estem buscant:

$$P(T_1 \cap T_2) = P(T_1) + P(T_2) - P(T_1 \cup T_2) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}8 = 0{,}3.$$

Si haguéssim exigit passar totes dues proves, només el 30% dels dispositius electrònics s'haurien validat.

4. Anomenem el succés C com *caiguda d'un encaminador* i el succés A com *rebre alarma*. Per l'enunciat sabem el següent: $P(C) = 0{,}04$. També sabem que $P(A|C) = 0{,}95$ i $P(A|C^c) = 0{,}2$. Apliquem el teorema de Bayes per a calcular la probabilitat que es doni una caiguda d'encaminador sabent que hem rebut una alarma:

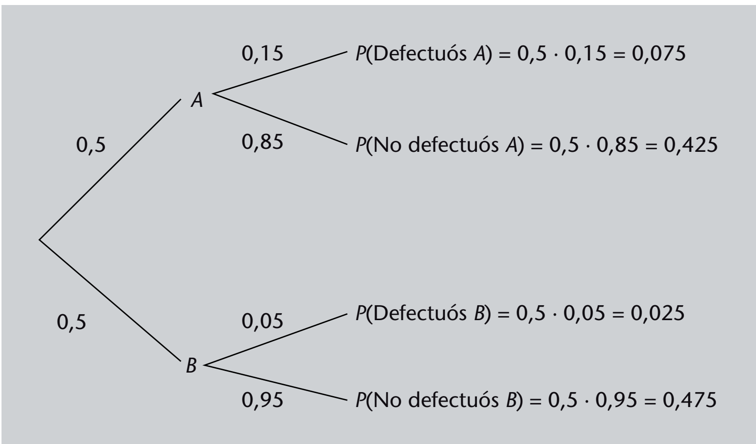
$$P(C|A) = \frac{P(C)P(A|C)}{P(A|C)P(C) + P(A|C^c)P(C^c)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}04}{0{,}95 \cdot 0{,}04 + 0{,}02 \cdot 0{,}96} = 0{,}664.$$

5. Sabem per una banda que les estacions d'origen i de destinació no es poden repetir. També sabem que donades dues estacions hem de diferenciar quina és l'origen i quina la destinació. Per tant, el nombre de bitllets diferents per imprimir el podem calcular com el nombre de variacions sense repetició de 25 elements agafats de 2 en 2. És dir:

$$V_{25,2} = 25 \cdot 24 = 600.$$

6. Una manera de resoldre aquest problema és fent el diagrama d'arbre corresponent, com podeu veure en la figura 7.

Figura 7. Diagrama d'arbre per al problema 6



El nombre de PC defectuosos és:

$$PC_{def} = 1000000 \cdot 0{,}075 + 1500000 \cdot 0{,}025 = 112500.$$

La probabilitat d'adquirir-ne un de defectuós és:

$$P(PC_{def}) = \frac{112500}{2500000} = 0{,}045.$$

7. L'enunciat ens dóna les probabilitats següents:

- $P(M_1 \cap M_2) = 0{,}3$
- $P(T|A) = 0{,}1$
- $P(T|B) = 0{,}15$
- $P(T|M_1) = 0{,}05$

Amb les dades de l'enunciat podem dir que els successos A i B (pertànyer a una companyia telefònica o l'altra) formen una partició de l'espai mostral, ja que la seva unió ens dóna el total d'usuaris de telefonia.

La probabilitat de tall en una trucada és la següent:

$$P(T) = P(T|A) \cdot P(A) + P(T|B) \cdot P(B) = 0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}15 \cdot 0{,}4 = 0{,}12.$$

A continuació calculem la probabilitat que un usuari a qui se li ha tallat la comunicació tingui un telèfon de la marca M_1:

$$P(M_1|T) = \frac{P(T|M_1) \cdot M_1}{P(T)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}7}{0{,}12} = 0{,}2917.$$

Sabent que un usuari no té un telèfon de la marca M_1, la probabilitat de tall de trucada és la següent:

$$P(T|M_1^c) = \frac{P(M_1^c|T) \cdot P(T)}{P(M_1^c)} = \frac{1 - 0{,}2917 \cdot 0{,}12}{0{,}3} = 0{,}2833.$$