

Propagació d'ones electromagnètiques

Jordi Bonastre Muñoz

PID_00159125


Índex

Introducció	5
Objectius	7
1. Propagació d'ones electromagnètiques en un medi	9
1.1. Propagació d'ones electromagnètiques	
harmòniques planes en el buit	9
1.1.1. Espectre electromagnètic	11
1.2. Propagació d'ones electromagnètiques harmòniques	
planes en medis materials no conductors	12
1.2.1. Velocitat de propagació	13
1.2.2. Índex de refracció	14
1.3. Propagació d'ones electromagnètiques harmòniques	
planes	
en medis materials conductors	15
1.3.1. Absorció i profunditat de penetració	16
1.4. Què hem après?	21
2. Polarització	22
2.1. Concepte de polarització	22
2.2. Polarització lineal	23
2.3. Polarització circular	25
2.4. Què hem après?	26
3. Reflexió i transmissió d'ones planes en un canvi de medi	28
3.1. Condicions de frontera	28
3.1.1. Condicions de frontera per al camp elèctric	29
3.1.2. Condicions de frontera per al camp magnètic	31
3.1.3. Visió global i casos particulars	32
3.2. Reflexió i transmissió a la interfície entre dos medis	33
3.2.1. Deducció de les lleis de reflexió i refracció de l'òptica	
per a qualsevol ona electromagnètica	34
3.2.2. Reflexió i transmissió d'ones polaritzades amb	
el camp elèctric perpendicular al pla d'incidència	38
3.2.3. Reflexió i transmissió d'ones polaritzades	
amb el camp elèctric paral·lel al pla d'incidència	44
3.2.4. Angle de Brewster	51
3.2.5. Angle crític	55
3.3. Què hem après?	57

4. Reflexió i transmissió per una capa prima:	
interferència	59
4.1. Concepte d'interferència	59
4.2. Estudi de les reflexions i transmissions en una capa prima	62
4.3. Què hem après?	68
5. Guies d'ona	69
5.1. Guies d'ona de secció rectangular	69
5.1.1. Modes transversals elèctrics (TE)	73
5.1.2. Modes transversals magnètics (TM)	78
5.1.3. Atenuació en una guia d'ona. Modes guiats, modes de tall i mode dominant	81
5.2. Què hem après?	84
6. Cavitats ressonants	85
6.1. Cavitats ressonants amb forma de paral·lelepípede regular	85
6.2. Què hem après?	92
7. Problemes resolts	93
7.1. Enunciats	93
7.2. Solucions	93
Resum	100
Exercicis d'autoavaluació	103
Solucionari	105
Glossari	105
Bibliografia	106
Exercicis d'autoavaluació	103
Solucionari	105
Glossari	105
Bibliografia	106

Introducció


Ja hem introduït el concepte d'ones electromagnètiques com un flux d'energia que s'intercanvia entre el camp elèctric i el camp magnètic i que es propaga per l'espai. També en vàrem deduir l'expressió matemàtica a partir de les lleis de Maxwell. Tanmateix, no vàrem entrar en cap moment en com es produeix aquesta propagació.



Vegeu el concepte d'ones electromagnètiques i d'ones electromagnètiques planes harmòniques al mòdul "Lleis de Maxwell".

En aquest mòdul ens centrarem precisament en aquest aspecte, és a dir, estudiarem la propagació de les ones electromagnètiques i els fenòmens que es produeixen a causa d'aquesta propagació. Limitarem l'estudi, això sí, a ones electromagnètiques planes harmòniques, que ja us vàrem introduir. Tanmateix, bona part dels conceptes que veurem són extrapolables a qualsevol tipus d'ones electromagnètiques.


A l'apartat 1 analitzarem com es produeix la propagació d'una ona electromagnètica en un únic medi, tant en el cas d'un material dielèctric com d'un conductor. Durant l'anàlisi ens retrobarem amb el concepte d'índex de refracció que ja vàrem estudiar. Aquí, però, el veurem aplicat a una ona electromagnètica en general. També veurem com i perquè la intensitat de les ones s'atenua quan es propaguen per certs materials.



Vegeu l'índex de refracció al mòdul "Òptica".

A l'apartat 2 veurem que els camps elèctric i magnètic poden estar orientats de moltes maneres respecte a la direcció de propagació. Estudiarem el que anomenarem *estat de polarització*.

A l'apartat 3 farem un pas més enllà i analitzarem què succeeix quan una ona travessa la interfície entre dos medis materials diferents. Entre altres coses, tornarem a deduir les propietats geomètriques que ja us vàrem explicar per a la llum, però ara ho farem des del punt de vista de la teoria electromagnètica i aplicades a les ones electromagnètiques en general.



Vegeu com la llum travessa la interfície entre medis diferents al mòdul "Òptica".

Als últims apartats estudiarem tres casos específics de configuracions que podem trobar en alguns dispositius habituals i analitzarem com s'hi comporten les ones electromagnètiques:

- El primer exemple (apartat 4) correspon a una capa prima d'un material dielèctric. En aquest tipus de configuracions es produeixen interferències, un concepte que ja vàrem veure en el mòdul "Ones" i que aquí tornarem a explicar. Deduirem com són les interferències degudes a una capa prima i veurem algunes aplicacions que fan servir aquest fenomen.
- El segon exemple que estudiarem (apartat 5) són les guies d'ona. Es tracta de dispositius on un material dielèctric està envoltat d'un material conduc-

tor en totes les direccions excepte en una. Aquesta configuració permet la propagació de certes ones electromagnètiques d'una manera eficient. En aquest mòdul analitzarem quines característiques presenten les ones que es poden propagar en aquestes situacions.

- L'últim exemple que estudiarem són les cavitats ressonants. Veurem que es tracta d'una configuració molt similar a una guia d'ona, amb la diferència que ara el material conductor limita el dielèctric per totes les direccions, és a dir, és una regió tancada. Comprovarem que en aquests dispositius es produeixen ones estacionàries i estudiarem quines característiques presenten.

Objectius

Els materials didàctics continguts en aquest mòdul proporcionen els coneixements necessaris perquè l'estudiant assoleixi els objectius següents:

1. Conèixer el mecanisme de propagació de les ones electromagnètiques i el seu tractament matemàtic en medis materials, tant dielèctrics com conductors.
2. Saber determinar, de forma quantitativa, l'atenuació que es produeix en una ona electromagnètica a causa de la conductivitat del material pel qual es propaga.
3. Entendre el concepte d'estat de polarització d'una ona electromagnètica, conèixer els diferents tipus que hi ha i saber relacionar-los amb les configuracions possibles dels camps elèctric i magnètic.
4. Entendre les propietats dels camps elèctric i magnètic a les zones interfacials entre dos medis materials diferents i saber aplicar-les a la deducció del comportament de les ones electromagnètiques en aquestes zones interfacials.
5. Saber aplicar els conceptes del punt 4 a la deducció de les relacions entre les amplituds i les intensitats de les ones incident, reflectida i transmesa en una interfície entre dos medis.
6. Conèixer la dependència de les relacions del punt 5 respecte a l'angle d'incidència i saber deduir l'existència d'uns angles "especials", l'angle de Brewster i l'angle límit o de reflexió total, i entendre'n el significat físic.
7. Entendre el comportament d'una ona electromagnètica quan travessa una làmina molt prima d'un material dielèctric i saber determinar les interferències que s'hi produeixen en funció dels paràmetres de disseny i de les característiques de l'ona.
8. Entendre el fonament físic de les guies d'ona i el comportament de les ones electromagnètiques en el seu interior. Conèixer els modes de propagació que s'hi poden produir i les freqüències de les ones que s'hi poden propagar.
9. Entendre el fonament físic de les cavitats ressonants i el comportament de les ones electromagnètiques estacionàries que s'estableixen en el seu interior. Saber determinar les característiques dels modes de vibració possibles i les freqüències característiques associades.

1. Propagació d'ones electromagnètiques en un medi

Ja hem deduït, a partir de les equacions de Maxwell, que l'energia electromagnètica es propaga mitjançant ones electromagnètiques. També vàrem “descobrir” que la velocitat de propagació d'aquestes ones en el buit és precisament la velocitat de la llum en el buit.

Tanmateix, a la vida quotidiana a què estem acostumats, el concepte de buit es converteix en una mera aproximació teòrica, ja que bona part de les ones electromagnètiques es propaguen en un medi material. Fins i tot l'aire (potser el medi que, de forma intuïtiva, trobareu més proper a aquestes característiques “ideals”) s'ha de considerar com un medi material diferent del buit.

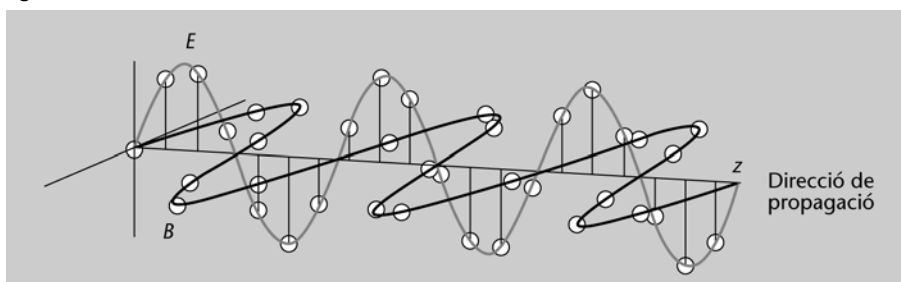
En aquest mòdul treballarem el comportament de les ones electromagnètiques que es propaguen en medis materials i trobarem resposta a alguns dels fenòmens que podeu observar sovint a la natura i que s'expliquen per la presència d'aquests medis (i, de forma especial, de transicions entre medis diferents) en el camí que segueixen les ones.

Començarem el mòdul estudiant, en el primer apartat, la propagació de les ones electromagnètiques en un únic medi i deixarem per a més endavant els fenòmens que es produeixen quan aquestes ones travessen una interfície entre dos medis diferents. Limitarem l'estudi, això sí, a ones electromagnètiques harmòniques i planes. Aquest cas és el més simple de tractar i ens servirà per a entendre els fenòmens i conceptes que veurem i que són extrapolables a una ona electromagnètica qualsevol.

1.1. Propagació d'ones electromagnètiques harmòniques planes en el buit

Ja hem vist que una ona electromagnètica harmònica plana es comporta i es propaga com una ona transversal; és a dir, la seva direcció de “vibració” o d'oscil·lació és perpendicular a la direcció de propagació. Per a veure-ho, mireu la figura 1.

Figura 1



Vegeu les equacions de Maxwell al mòdul “Lleis de Maxwell”.

Vegeu les ones transversals al mòdul “Lleis de Maxwell”.

Figura 1
Representació esquemàtica d'una ona electromagnètica.

En el dibuix podeu observar que, per a una ona electromagnètica harmònica plana que es propaga al llarg de l'eix z , tant el camp elèctric \vec{E} (indicat amb color gris clar) com el camp magnètic \vec{B} (indicat amb color gris fosc) sempre tindran una direcció perpendicular a aquest eix z , a més, sempre seran perpendiculars entre sí.

Recordeu que també vàrem veure que l'expressió matemàtica d'aquesta ona plana harmònica és, per a una ona que es propaga en la direcció \vec{k} :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (2)$$

Fixeu-vos que tant les expressions per al camp elèctric (1) com per al camp magnètic (2) estan estructurades de la mateixa manera:

- El primer factor (\vec{E}_0 o \vec{B}_0) correspon a les amplituds d'oscil·lació, és a dir, als valors màxims que poden assolir els camps. També indica la seva direcció.
- El segon factor ($e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$) rep el nom de **fasor** i es tracta d'un nombre complex el mòdul del qual és sempre 1 i que indica la fase o desfasament de l'ona en un punt i un instant determinats.
- Els paràmetres \vec{k} i ω són els que determinen les característiques de l'ona i el seu significat és idèntic al que ja vàreu veure amb les ones mecàniques. Si recordeu, ω és la freqüència angular i correspon al ritme amb què varia la fase en funció del temps en una posició determinada. \vec{k} és la constant d'ona. La seva direcció indica la direcció de propagació i el seu mòdul (que a partir d'ara, i per a simplificar, anomenarem simplement k) és l'anàleg de la freqüència angular però en l'espai, és a dir, correspon al ritme amb què varia el desfasament en funció de l'espai.

Tanmateix, tot i que són els paràmetres \vec{k} i ω els que apareixen a les equacions (1) i (2), a la vida quotidiana és molt més habitual sentir a parlar d'uns altres paràmetres: la longitud d'ona (λ) i la freqüència (f).

La longitud d'ona (λ) és la distància, al llarg de la direcció de propagació, entre dos punts consecutius que tenen el mateix desfasament (per exemple, la distància entre dos màxims). Es pot calcular a partir del mòdul de la constant d'ona:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (3)$$

Atenció

No confongueu el vector unitari en la direcció z , \vec{k} , amb la constant d'ona k .

j en comptes de i com a unitat dels nombres imaginaris

Quan es treballa en l'àmbit de l'electromagnetisme es fa servir j per a indicar la unitat imaginària i . El motiu d'aquest conveni és perquè no es produeixi confusió amb el corrent elèctric, que s'indica també amb i o I .

Recordeu

Un terme del tipus $e^{j\alpha}$ és un nombre complex equivalent a:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

on j és la unitat imaginària ($j = \sqrt{-1}$ i $j^2 = -1$).

Vegeu els paràmetres \vec{k} i ω per a una ona mecànica al mòdul "Ones".

λ és la lletra grega lambda.

Recordeu

λ correspon a una distància i, per tant, es mesura en unitats de longitud (m, mm, μ m, nm, ...).

La freqüència (f) és el nombre de cicles que realitza una ona per unitat de temps. La seva relació amb la freqüència angular (ω), que ja hem introduït, també és directa:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (4)$$

Vegeu la freqüència angular al mòdul "Ones".

Els valors de la longitud d'ona (λ) i de la freqüència (f) i, en conseqüència, també de la constant d'ona (k) i de la freqüència angular (ω), estan relacionats entre sí mitjançant el valor de la velocitat de propagació de l'ona (v):

$$v = \lambda f = \frac{\omega}{k} \quad (5)$$

Recordeu

f es mesura, en el SI, en hertz (Hz), mentre que ω es mesura en radians per segon (rad/s).

En altres paraules, podeu comprovar que la longitud d'ona (λ) i la freqüència (f), tot i poder agafar qualsevol valor de forma individual, en conjunt han de complir la condició (5). D'aquesta manera, una ona d'alta freqüència presentarà una longitud d'ona petita, mentre que una ona de baixa freqüència presentarà una longitud d'ona gran.

1.1.1. Espectre electromagnètic

Anteriorment vàrem deduir que la velocitat de propagació d'una ona electromagnètica que es propaga en el buit és:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (6)$$

Vegeu la velocitat de propagació d'una ona al mòdul "Lleis de Maxwell".

μ_0 i ϵ_0 es llegeixen "mu sub zero" i "èpsilon sub zero".

on μ_0 i ϵ_0 són, respectivament, la permeabilitat magnètica i la permitivitat elèctrica del buit. Podeu comprovar que el resultat de l'expressió anterior dóna una magnitud ben coneguda: la velocitat de la llum en el buit ($c = 2,998 \cdot 10^8$ m/s).

Recordeu

$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ C²/Nm²
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A²

La relació (5) entre λ , f i c és aplicable a qualsevol ona electromagnètica en el buit, sigui quina sigui la seva freqüència i longitud d'ona. Com que el valor de c (velocitat de la llum) és constant, el que tindrem és que els diferents valors per a les freqüències (f) determinaran diferents valors en la longitud d'ona (λ), i aquestes diferències determinaran si tindrem un tipus d'ona o un altre. Així, per exemple, els rajos X corresponen a ones electromagnètiques amb una longitud d'ona molt petita i, per tant, una freqüència molt alta, mentre que les ones de ràdio són ones amb una longitud d'ona molt gran i, per tant, una freqüència molt baixa.

Anomenem **espectre electromagnètic** al conjunt de rangs de freqüències possibles de les ones electromagnètiques.

Els diversos tipus d'ones electromagnètiques que coneixem de la vida quotidiana no són més que divisions que s'han fet en l'espectre electromagnètic en funció de la freqüència (f) o de la longitud d'ona (λ).

A la taula 1.1 us mostrem els diferents tipus d'ones electromagnètiques i les parts de l'espectre, és a dir, els rangs de freqüències o longituds d'ona, a què corresponen.

Taula 1.1. Espectre electromagnètic

Regió de l'espectre		Rang de longituds d'ona (λ)	Rang de freqüències (f)	Aplicacions més habituals	Observacions
Ràdio	Ona llarga	> 10 m	< 30 MHz	Senyals de ràdio (AM) Comunicació submarina	Es reflecteixen a la ionosfera i, per tant, poden viatjar llargues distàncies. Per això s'utilitzen per a comunicar dos punts llunyans de la Terra.
	Ona curta	10 cm - 10 m	30 MHz - 3 GHz	Senyals de ràdio (FM) Senyals de TV	No es reflecteixen a la ionosfera i, per tant, només es poden emprar per a distàncies curtes.
	Microones	1 mm - 10 cm	3 - 300 GHz	Radar Xarxes sense fils (WiFi) Forns de microones	Presenten molta atenuació en l'atmosfera i, per tant, només es poden fer servir per a distàncies molt curtes.
Infrarojos		700 nm - 1 mm	$3 \cdot 10^{11}$ - $4 \cdot 10^{14}$ Hz	Termografies Visió nocturna Controls remots	Emissió tèrmica.
Llum visible		400 - 700 nm	$4 \cdot 10^{14}$ - $7 \cdot 10^{14}$ Hz	Instrumentes òptics	Radiació visible per l'ull humà i el de la majoria d'éssers vius.
Ultraviolats		10 - 400 nm	$7 \cdot 10^{14}$ - $3 \cdot 10^{16}$ Hz	Medicina Espectrofotometria	La matèria els absorbeix molt fàcilment.
Rajos X		0,01 - 10 nm	$3 \cdot 10^{16}$ - $3 \cdot 10^{19}$ Hz	Radiografia diagnòstica Cristal·lografia	Generats per radiació d'ionització, la seva longitud d'ona està dins de l'escala dels àtoms i els cristalls atòmics.
Rajos γ		< 10^{-11} m	> $3 \cdot 10^{19}$ Hz	Esterilització Radioteràpia	Generats per interaccions subatòmiques.

Tot el que hem explicat fins aquí s'ha fet tenint en compte que les ones es propaguen en el buit. A continuació estudiarem quines modificacions s'han de considerar per a explicar el comportament de les ones electromagnètiques en presència de matèria.

Si recordeu, anteriorment vàrem fer una divisió dels materials en dos grups bàsics: dielèctrics (o no conductors) i conductors. Tot seguit tractarem aquests dos casos per separat.

1.2. Propagació d'ones electromagnètiques harmòniques planes en medis materials no conductors

De forma anàloga a com vam procedir anteriorment, començarem l'estudi del comportament de les ones electromagnètiques en un medi material amb el cas en què es propaguen per un medi dielèctric o no conductor i deixarem per a

Vegeu els materials dielèctrics i conductors al mòdul "Lleis de Maxwell".

Vegeu el comportament de les ones al mòdul "Lleis de Maxwell".
Vegeu l'índex de refracció al mòdul "Òptica".

més endavant el cas de medis conductors. Analitzarem primer com és la velocitat de propagació en un medi material i tornarem a treballar amb el concepte d'índex de refracció (n), però ara el veurem aplicat a les ones electromagnètiques en general.

1.2.1. Velocitat de propagació

Si recordeu, anteriorment us vàrem explicar l'efecte d'introduir un material dielèctric en una regió de l'espai on hi ha presents camps elèctrics o magnètics. Els valors de la permitivitat elèctrica i la permeabilitat magnètica per al buit (ϵ_0 i μ_0) se substitueixen pels seus equivalents corresponents al medi en qüestió (ϵ i μ).

Aquesta substitució és aplicable a totes les expressions on apareixen els conceptes de permitivitat o permeabilitat i, per tant, també a l'expressió per a la velocitat de propagació d'una ona electromagnètica (6). Així doncs, podreu trobar la velocitat de propagació de les ones en un medi qualsevol si coneixeu els valors de la permitivitat elèctrica (ϵ) i la permeabilitat magnètica (μ) corresponents.

La **velocitat de propagació** (v) (també anomenada velocitat de fase) d'una ona electromagnètica en presència d'un medi material és:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}} \quad (7)$$

on μ i ϵ són, respectivament, la permeabilitat magnètica i la permitivitat elèctrica absolutes del material.

Podeu comprovar que si substituïu, a l'expressió (7), els valors de la permitivitat elèctrica (ϵ) i la permeabilitat magnètica (μ) pels valors corresponents al buit (ϵ_0 i μ_0) obtindreu l'expressió que ja havíem vist per a la velocitat de propagació en el buit (6). Això vol dir que en el fons aquesta última és un cas particular de la primera.

Així doncs, podeu veure que la velocitat de propagació (v) de les ones varia de forma significativa entre un medi i un altre, ja que també ho fan els valors de ϵ i de μ . És més, fins i tot dins d'un mateix medi, si aquest no és i. h. l., la velocitat pot variar entre un punt i un altre, ja que tant la permeabilitat (μ) com la permitivitat (ϵ) depenen de molts factors, com ara la densitat o la temperatura.

La velocitat de propagació (v) d'una ona electromagnètica en un medi és un paràmetre molt important en l'estudi del seu comportament. Podem trobar multitud de taules i documents amb els valors d'aquesta velocitat per a la majoria de materials coneguts. Tanmateix, igual que passava amb la permeabilitat (μ) i la permitivitat (ϵ), el més habitual és trobar els valors en termes

Vegeu l'efecte d'un material dielèctric en presència de camps al mòdul "Lleis de Maxwell".

μ i ϵ són les lletres gregues μ i ϵ , respectivament.

v i c

En aquest mòdul farem servir v per indicar la velocitat de propagació d'una ona en un medi qualsevol i limitarem c per a indicar la velocitat de propagació de l'ona en el buit ($c = 2,998 \cdot 10^8$ m/s).

Recordeu

Un **medi i. h. l.** és un medi:

- **isòtrop:** les seves característiques electromagnètiques no depenen de la direcció de propagació.
- **homogeni:** les seves característiques són les mateixes en qualsevol punt del medi.
- **lineal:** les seves característiques elèctriques i magnètiques depenen linealment dels camps elèctric i magnètic.

relatiu, és a dir, comparats amb el seu equivalent per al buit. Per exemple, trobareu que la velocitat de propagació d'una ona per un medi és x vegades inferior que la que tindria si ho fes pel buit. Aquí entra en joc el concepte d'**índex de refracció** d'un medi.

El concepte d'índex de refracció ja us el vàrem introduir, però el tornarem a explicar en aquest mòdul, tot incloent-hi ara la seva relació amb els conceptes de permeabilitat i permetivitat.

Vegeu el concepte d'índex de refracció al mòdul "Òptica".

1.2.2. Índex de refracció

Ja hem mencionat que és molt habitual trobar les característiques elèctriques o magnètiques d'un medi en forma relativa, és a dir, en comparació amb les del buit. De fet, l'índex de refracció (n) d'un medi és una mesura de la velocitat relativa d'una ona electromagnètica respecte a la que tindria en el buit ($c = 2,998 \cdot 10^8$ m/s):

$$n = \frac{c}{v} \quad (8)$$

on v és la velocitat de propagació de l'ona en el medi en qüestió i c és la velocitat de la mateixa ona en el buit, que sempre és $c = 2,998 \cdot 10^8$ m/s.

Vegeu les característiques elèctriques o magnètiques d'un medi en forma relativa al subapartat 1.2.1 d'aquest mòdul.

L'**índex de refracció** (n) d'un medi material es defineix com el quocient entre la velocitat de propagació d'una ona electromagnètica en el buit ($c = 2,998 \cdot 10^8$ m/s) i la velocitat que té en aquest medi:

$$n = \frac{c}{v} \quad (9)$$

Atès que tant c com v són magnituds de velocitat i es mesuren amb les mateixes unitats, l'índex de refracció és adimensional (és a dir, no té unitats).

El concepte d'índex de refracció d'un medi ja el vàreu veure, però aplicat només a la llum. Ara podeu comprovar que aquest concepte es pot aplicar a qualsevol tipus d'ona electromagnètica.

Vegeu el concepte d'índex de refracció al mòdul "Òptica".

Podeu desenvolupar l'expressió (9) i substituir-ne els valors de les velocitats (c i v) per les seves relacions amb les permeabilitats (μ) i permetivitats (ϵ) respectives que heu vist a les equacions (6) i (7). Obtindreu:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}}{\sqrt{\frac{1}{\mu \epsilon}}} \quad (10)$$

Si ajunteu els termes que es troben dins de l'arrel us quedarà:

$$n = \sqrt{\frac{1}{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu \epsilon}}} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0} \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \quad (11)$$

Si us hi fixeu bé, els dos quocients que apareixen dins de l'arrel no són altra cosa que les seves permeabilitat i permitivitat relatives, μ_r i ϵ_r , que ja vàrem veure. Recordeu que eren:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad i \quad \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (12)$$

μ_r i ϵ_r es llegeixen "mu sub erra" i "epsilon sub erra".

Vegeu la permeabilitat i la permitivitat relatives al mòdul "Lleis de Maxwell".

L'índex de refracció (n) d'un medi qualsevol està relacionat amb la permeabilitat magnètica (μ_r) i la permitivitat elèctrica (ϵ_r) **relatives** del medi:

$$n = \sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r} \quad (13)$$

$$\mu_r \approx 1, \quad n \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

A excepció dels materials ferromagnètics, la majoria de materials presenten una permeabilitat magnètica relativa molt propera a 1 ($\mu_r \approx 1$). És per aquest motiu que, en alguns àmbits com ara l'òptica, trobareu sovint l'expressió per a l'índex de refracció aproximada a:

$$n \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

Podeu comprovar que tant μ_r com ϵ_r són magnituds adimensionals (és a dir, no tenen unitats). Per tant, el resultat de l'operació (13) també ho serà, tal com ja havíeu vist.

Fins aquí hem estudiat la propagació d'ones electromagnètiques en el buit i en medis dielèctrics. En tots dos casos, hem suposat que les ones es propaguen de forma indefinida, sense atenuació en la seva amplitud d'oscil·lació. Tanmateix, de ben segur que haureu observat a la vida quotidiana que hi ha objectes que deixen passar la llum, d'altres que no i d'altres que ho fan de forma parcial. Diem que els cossos presenten un cert grau d'opacitat, és a dir, que hi ha cossos més opacs que altres. El mateix es pot aplicar a d'altres tipus d'ones electromagnètiques, com ara les ones de ràdio o els rajos X (respecte a aquests últims, només cal que us imagineu una radiografia, on es pot veure que la pell deixa passar "la llum", els rajos X, mentre que els ossos hi són opacs).

Els medis conductors en general presenten una alta opacitat respecte a les ones electromagnètiques. Tot seguit estudiarem aquest cas.

1.3. Propagació d'ones electromagnètiques harmòniques planes en medis materials conductors

L'estudi de la propagació d'una ona electromagnètica en un medi conductor és molt similar al que hem realitzat fins ara per al cas del buit o d'un medi di-

elèctric. La diferència més notable, però, rau en que hem de tenir en compte que la conductivitat del material ara no és negligible.

La conseqüència principal de trobar-se en un medi material amb una conductivitat diferent de zero és que l'ona electromagnètica interacciona amb el material i part de la seva energia es consumeix durant el procés. Podríem dir que l'ona "es desgasta" a mesura que es propaga. I això es tradueix en una reducció de la seva intensitat. Ho veurem tot seguit.

1.3.1. Absorció i profunditat de penetració

Un mateix medi material pot ser més o menys opac en funció del seu gruix; de fet, si tallem un material opac molt i molt prim, pot arribar a ser transparent. És a dir, és com si l'ona electromagnètica s'anés "desgastant" a mesura que s'endinsa dins del medi material. El que en realitat està passant és que l'ona electromagnètica va cedint part de la seva energia al medi, fenomen que rep el nom d'**atenuació**.

Per a la quantificació d'aquesta atenuació, podem redefinir el concepte d'índex de refracció per tal d'introduir-hi un terme que inclogui l'atenuació de part de l'energia de les ones (les "pèrdues"). Aquests efectes es poden englobar en un nou valor de l'índex de refracció, que ara serà un nombre complex, que simbolitzarem \tilde{n} :

$$\tilde{n} = n + jk \quad (14)$$

La part real d'aquest índex de refracció complex (\tilde{n}) correspon a l'índex de refracció "normal" (n) que hem vist fins ara. La part imaginària (k) s'anomena *coeficient d'extinció* i explica les "pèrdues" o la reducció en l'amplitud de l'ona a mesura que es propaga per un medi. Aquest fenomen s'anomena *atenuació* i el detallarem a continuació.

Quan es produeix atenuació, la intensitat de l'ona, I , ve regida per l'expressió següent:

$$I = I_0 e^{-\alpha x} \quad (15)$$

on I_0 és la intensitat inicial, α és el coeficient d'atenuació del medi material i x és la distància recorreguda per l'ona dins del medi.

A la figura 2 podeu observar una representació gràfica de l'expressió anterior. Podeu comprovar que, a mesura que l'ona penetra una distància x dins del me-

Vegeu també el fenomen de l'atenuació al mòdul "Òptica".

Atenció

No les confongueu. Fixeu-vos que tenim tres "k", la \hat{k} , vector unitari en la direcció z , la k corresponent al número d'ona, i ara la k coeficient d'extinció. Fixeu-vos que la primera és un vector, la segona pot aparèixer com a vector o mòdul, i la tercera és un escalar.

\tilde{n} es llegeix "ena titlla".

Recordeu

Un nombre complex z és un nombre del tipus $z = a + jb$, on a i b són nombres reals i j és la unitat dels nombres imaginaris ($j = \sqrt{-1}$ i $j^2 = -1$).

Vegeu l'índex de refracció al subapartat 1.2.2 d'aquest mòdul.

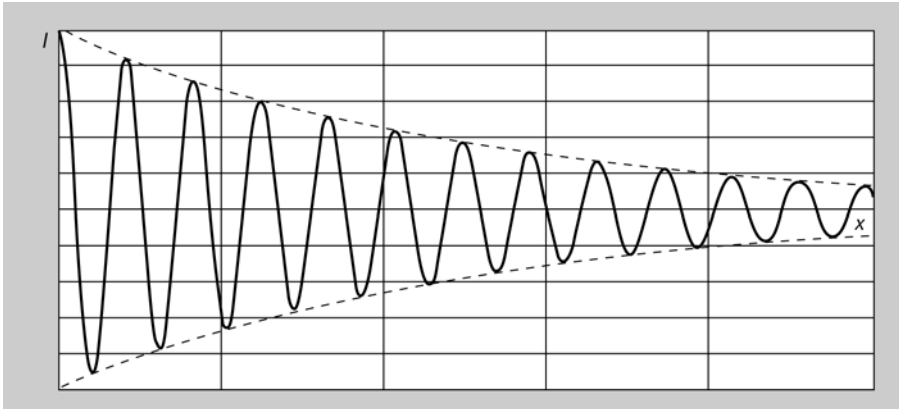
Recordeu

$e = 2,718281828459...$

α és la lletra grega alfa.

di, la intensitat de l'ona es va reduint de forma exponencial, de manera que com més gran és el valor del coeficient d'atenuació (α), més ràpidament s'atenua l'ona.

Figura 2

**Figura 2**

Representació gràfica de la reducció de la intensitat d'una ona a causa de l'atenuació per part del medi.

El coeficient d'atenuació (α) és una característica de cada medi material i mesura la rapidesa amb què es redueix la intensitat d'una ona electromagnètica quan es propaga pel medi.

Sovint, però, és molt més interessant parlar del concepte invers a l'atenuació, és a dir, de la capacitat d'una ona de penetrar dins d'un medi sense patir pèrdues significatives. Així, per exemple, a la gràfica de la figura 2 podeu observar que quan l'ona penetra una distància corresponent a quatre marques de l'eix horitzontal, la intensitat és un 20% del valor original (o el que és el mateix, s'ha reduït en un 80%). Per a un medi amb un coeficient d'atenuació (α) molt gran, aquesta mateixa caiguda es produeix en poca distància i, per tant, podríem dir que l'ona penetra menys distància dins del medi. Per contra, en un medi amb un coeficient α molt petit passa tot el contrari: l'ona recorre molta més distància abans de reduir-se en un mateix factor.

Així doncs, ja hem vist, a nivell qualitatiu, que existeix un concepte de profunditat de penetració, és a dir, una distància que pot recórrer una ona dins d'un medi abans d'atenuar-se un cert factor. Tanmateix, a nivell quantitatiu, la determinació exacta d'aquesta distància varia segons quin valor agafem com a factor de reducció de referència. Per exemple, a la figura 2 no és el mateix calcular la distància recorreguda per a una reducció del 50% que la distància per a una reducció del 80%.

Com que aquest valor de referència és arbitrari, cal definir un paràmetre estàndard per tal de poder quantificar aquesta distància de penetració i permetre'n la comparació entre medis diferents. Aquest paràmetre s'anomena **profunditat de penetració** (δ) i es defineix com el valor invers del coeficient d'atenuació:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \quad (16)$$

δ és la lletra grega delta minúscula.

La profunditat de penetració (δ) és un paràmetre que depèn tant de les característiques del material com de l'ona que el travessa. El seu valor és:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (17)$$

Recordeu

$$\pi = 3,141592658979\dots$$

on trobem els paràmetres següents:

- La **conductivitat del medi** (σ). Com més bon conductor és el medi, menys hi podrà penetrar una certa ona electromagnètica. En un conductor ideal o perfecte ($\delta \rightarrow 0$) l'ona seria completament incapaç de penetrar-hi. Per contra, en un medi dielèctric, on la conductivitat és molt petita i es pot aproximar a zero ($\sigma \approx 0$), l'ona podrà penetrar de forma gairebé indefinida. El cas extrem seria el buit ($\sigma = 0$), on l'ona no patiria cap mena d'atenuació i, per tant, la profunditat de penetració (δ) seria infinita.
- La **permeabilitat magnètica del medi** (μ). Com més magnètic és el medi, més petita és la profunditat de penetració (δ). Així, per exemple, una mateixa ona s'atenuarà de forma molt més ràpida en un material ferromagnètic que en un material no ferromagnètic (suposant que la resta de paràmetres són iguals).
- La **frequència de l'ona que es propaga** (f). A diferència dels dos factors anteriors, que depenen de les característiques del medi, aquest tercer factor depèn de les característiques de l'ona que es propaga. Com podeu comprovar a partir de l'expressió (17), com més alta és la freqüència, més petita és la profunditat de penetració (δ). Per tant, les ones de baixa freqüència tindran una atenuació més petita i una penetració molt més gran en el medi. Per contra, en les ones d'alta freqüència, el valor de δ pot reduir-se de forma significativa.

Recordeu

La **conductivitat elèctrica** σ és la "facilitat" amb què les càrregues elèctriques poden circular per un cert material. $\mu \rightarrow \infty$ correspondria a un conductor perfecte, mentre que $\mu = 0$ correspondria a un aïllant perfecte.

Recordeu

Els materials ferromagnètics presenten en general una permeabilitat magnètica molt gran ($\mu \gg \mu_0$).

Podeu comprovar, a partir de l'expressió (15), que la profunditat de penetració (δ) correspon a la distància que ha de recórrer l'ona perquè la seva intensitat disminueixi un factor e .

La reducció de la intensitat d'una ona electromagnètica quan aquesta es propaga per un medi material s'anomena **atenuació**. La intensitat de l'ona (I) a una distància (x) a l'interior del medi és:

$$I = I_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \quad (18)$$

on I_0 és la intensitat inicial i δ és la **profunditat de penetració**, que és igual a:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (19)$$

on μ i σ són la permeabilitat magnètica i la conductivitat elèctrica del medi material, respectivament, i f és la freqüència de l'ona.

Recordeu

$$e = 2,718281828459\dots$$

Exemple d'absorció i profunditat de penetració

L'aigua de mar presenta una conductivitat aproximadament un miler de vegades més gran que la de l'aigua corrent, a causa de l'elevada concentració de sals que conté. Aquesta alta conductivitat dificulta en gran mesura la comunicació amb els submarins.

La intensitat (I) d'una ona electromagnètica que arriba a un receptor submergit en l'aigua disminueix exponencialment segons l'equació (18):

$$I = I_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$$

on δ és la profunditat de penetració, un paràmetre que disminueix amb el valor de la freqüència de l'ona transmesa, segons l'equació (19):

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

Si sabem que per a una freqüència $f = 10$ kHz, la profunditat de penetració és $\delta = 2,25$ m, mentre que per a una freqüència 100 vegades més gran ($f = 1$ MHz) tenim que $\delta = 0,22$ m, determineu:

- La intensitat d'una ona I (expressada en % respecte a la intensitat inicial I_0) a una profunditat d'1 m, per a les dues freqüències anteriors.
- La profunditat a què ha d'arribar la primera ona ($f = 10$ kHz) per tal de patir la mateixa atenuació que la primera ($f = 1$ MHz).
- Repetiu l'apartat anterior per a dues freqüències qualssevol.

Solució

a) Per tal de determinar la intensitat a una certa profunditat, cal conèixer o bé el valor del coeficient d'atenuació (α) o bé el seu valor invers, la profunditat de penetració (δ). En aquest exemple, coneixem el segon.

Com que només necessitem determinar el valor de la intensitat en termes relatius, és a dir, volem saber el percentatge respecte al valor total, hem de calcular el quocient entre les intensitats final i inicial. Ho trobarem a partir de l'expressió (18):

$$I = I_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \Rightarrow \frac{I}{I_0} = e^{-\frac{x}{\delta}} \quad (20)$$

Per tant, només ens queda substituir el valor de la distància recorreguda ($x = 1$ m) i la profunditat de penetració corresponent:

$$\text{Per a l'ona de 10 kHz } (\delta = 2,25 \text{ m}): \quad \frac{I}{I_0} = e^{-\frac{x}{\delta}} = e^{-\frac{1}{2,25}} = 0,064 = 6,4 \%$$

$$\text{Per a l'ona de 1 MHz } (\delta = 0,22 \text{ m}): \quad \frac{I}{I_0} = e^{-\frac{x}{\delta}} = e^{-\frac{1}{0,22}} = 0,011 = 1,1 \%$$

b) La intensitat relativa de la primera ona després d'haver recorregut una distància x_1 és, segons l'expressió (20):

$$\frac{I_1}{I_0} = e^{-\frac{x_1}{\delta_1}} \quad (21)$$

Per a la segona ona, la intensitat després d'haver recorregut una distància x_2 és:

$$\frac{I_2}{I_0} = e^{-\frac{x_2}{\delta_2}} \quad (22)$$

Com que hem de comparar les distàncies recorregudes per cadascuna de les ones quan aquestes han patit exactament la mateixa reducció en la intensitat, cal igualar les expressions (21) i (22):

$$e^{-\frac{x_1}{\delta_1}} = e^{-\frac{x_2}{\delta_2}} \quad (23)$$

Podem igualar directament els exponents, ja que a totes dues bandes hi ha la mateixa base:

$$-\frac{x_1}{\delta_1} = -\frac{x_2}{\delta_2} \quad (24)$$

Si separem les distàncies recorregudes (x_1 i x_2) a una banda i les profunditats de penetració (δ_1 i δ_2) a l'altra, quedarà:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\delta_2}{\delta_1} \quad (25)$$

I, finalment, substituïm els valors de les profunditats de penetració corresponents (δ_1 i δ_2):

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{2,25}{0,22} \approx 10 \text{ vegades}$$

És a dir, l'ona amb $f = 10$ kHz ha de recórrer una distància 10 vegades superior que la de $f = 1$ MHz per tal de patir la mateixa atenuació.

c) Per a repetir l'apartat anterior per al cas de dues freqüències qualssevol, cal procedir de la mateixa manera. Per tant, partirem de l'equació (25) i continuarem a partir d'ella. Farem servir el subíndex 1 per a la primera ona i el subíndex 2 per a la segona:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\delta_2}{\delta_1} \quad (26)$$

Ara, però, hem de substituir els valors de δ_1 i δ_2 per les expressions generals de la profunditat de penetració (19):

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{1}{\sqrt{\pi f_2 \mu \sigma}} \frac{1}{\sqrt{\pi f_1 \mu \sigma}} \quad (27)$$

Podem simplificar:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{\sqrt{f_2}} = \frac{\sqrt{f_1}}{\sqrt{f_2}} = \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} \quad (28)$$

Per tant, la relació entre les distàncies recorregudes per dues ones de freqüència diferent perquè pateixin la mateixa atenuació serà:

$$\frac{x_2}{x_1} = \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} \quad (29)$$

Podeu comprovar que la distància recorreguda disminueix amb la freqüència, ja que la proporcionalitat és inversa: com més gran sigui la freqüència 2 respecte a la 1, més petita serà la longitud de penetració. Així doncs, per a una bona recepció submarina, és preferible fer servir ones de baixa freqüència, ja que presenten una profunditat de penetració més gran.

1.4. Què hem après?

En aquest apartat hem vist com es propaga una ona electromagnètica tant pel buit com per un medi material. També hem vist que aquest tipus d'ones sempre són ones transversals (recordeu la figura 1). És a dir, que les direccions d'oscil·lació o de "vibració" són perpendiculars a la direcció de propagació.

Tanmateix, fins ara no hem entrat en detall sobre com són aquestes direccions d'oscil·lació. Penseu que, per a una direcció determinada, existeixen infinites direccions perpendiculars. Al següent apartat explicarem aquest aspecte.

2. Polarització

Anteriorment vàrem veure que en una ona electromagnètica tant el camp elèctric com el camp magnètic són perpendiculars a la direcció de propagació i també perpendiculars entre sí (recordeu la figura 1). Però la pregunta que ens podem fer és: vol dir això que si coneixem la direcció de propagació coneixem per força la direcció dels camps elèctric i magnètic?

Per a respondre a aquesta pregunta, observeu la figura 3. Fixeu-vos que totes les combinacions de vectors \vec{E} i \vec{B} que hem dibuixat satisfan les dues condicions:

- \vec{E} i \vec{B} són perpendiculars entre sí,
- \vec{E} i \vec{B} són perpendiculars a la direcció de propagació.

Figura 3

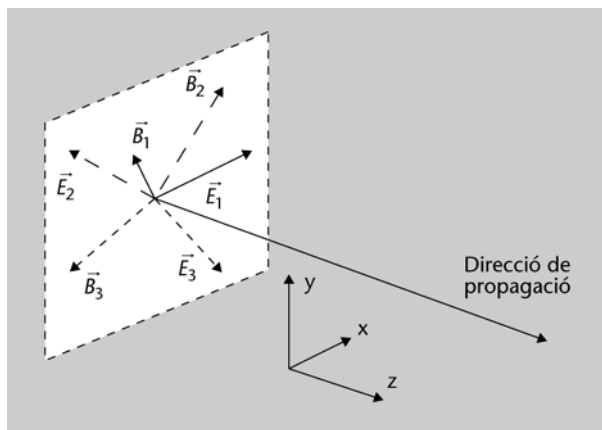


Figura 3

Representació gràfica de la polarització lineal.

Totes les parelles de vectors \vec{E} i \vec{B} són perpendiculars entre sí i perpendiculars a la direcció de propagació.

Per tant, donada una direcció de propagació específica, existeixen infinites configuracions possibles per als camps elèctric i magnètic. En altres paraules, els camps poden "estar posats" de moltes maneres.

En aquest apartat estudiarem les diferents configuracions de camp elèctric i magnètic que podem trobar en una ona electromagnètica. És el que anomenem **polarització** d'una ona.

A continuació explicarem aquest concepte de polarització i més endavant estudiarem els tipus que hi ha. En concret, limitarem l'anàlisi als dos més importants: la polarització lineal i la polarització circular.

2.1. Concepte de polarització

Com ja hem dit, en una ona electromagnètica els camps elèctric \vec{E} i magnètic \vec{B} "vibren" sempre en direccions perpendiculars a la direcció de propagació i per-

Vegeu la perpendicularitat entre el camp elèctric i el camp magnètic al mòdul "Lleis de Maxwell".

Observació

No heu de confondre la **polarització** d'una ona electromagnètica amb la polarització elèctrica en un dielèctric. Tot i tenir noms idèntics, són conceptes diferents.

Vegeu la polarització al mòdul "Ones". Vegeu la polarització elèctrica en un dielèctric a l'apartat 1 del mòdul "Lleis de Maxwell".

pendicular entre ells. També hem vist que existeixen infinites orientacions possibles que satisfan aquestes dues condicions. La pregunta que ens fem ara és: els camps mantenen la mateixa direcció a mesura que una ona electromagnètica es propaga?

La resposta és que depèn del cas. Per exemple:

- Podem trobar-nos que, efectivament, els camps mantinguin (oscil·lin en) la mateixa direcció tota l'estona. Aquest és el cas de la polarització lineal, que veurem més endavant.
- Però també podria passar que les direccions dels camps elèctric i magnètic no es mantinguessin constants sinó que anessin variant. Això sí, sempre ho farien respecte a un pla perpendicular a la direcció de propagació com el de la figura 3, ja que en cas contrari ja no seria una ona transversal. Tot seguit veurem que aquest tipus de configuració correspon a les polaritzacions circular o el·líptica (aquesta última la citarem però no l'estudiarem).

Vegeu la polarització lineal al subapartat 2.2 d'aquest mòdul.

Vegeu la polarització circular al subapartat 2.3 d'aquest mòdul.

D'altra banda, no podem oblidar que bona part de les ones electromagnètiques que es creen de forma natural no es poden englobar en cap dels casos anteriors. Això és perquè aquestes ones electromagnètiques són, en realitat, superposicions de moltes ones produïdes per un nombre molt gran de fonts diferents i disposades de forma aleatòria (per exemple, els àtoms d'una bombeta d'incandescència). En conseqüència, aquestes ones estaran polaritzades en totes direccions, tot i que el que diem és que es tracta d'ones "no polaritzades".

El coneixement del concepte de polarització és vital i necessari per a entendre bé altres conceptes que veurem més endavant. Per exemple, en una interfície de canvi de medi, dues ones electromagnètiques aparentment similars es poden comportar de manera diferent en funció de la seva polarització.

Tot seguit veurem els dos tipus de polarització més importants: la polarització lineal i la polarització circular. Per a simplificar el text, en l'estudi ens referirem sempre a les direccions només del camp elèctric (\vec{E}) i obviarem les del camp magnètic (\vec{B}). Aquest fet no afecta el resultat, ja que, com ja hem vist, el camp magnètic sempre té direcció perpendicular al camp elèctric i a la direcció de propagació. Per tant, si coneixem les característiques d'un dels dos i la direcció de propagació, tindrem les de l'altre.

Recordeu

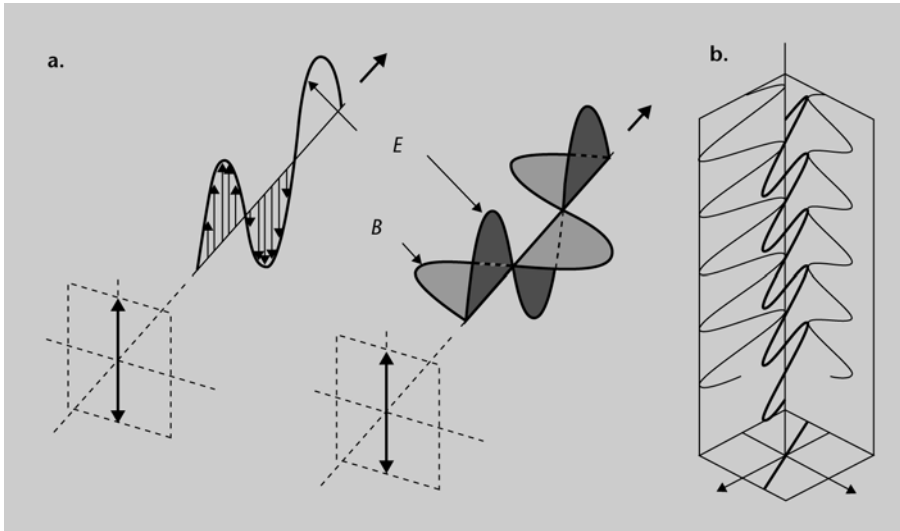
Els camps elèctric \vec{E} i magnètic \vec{B} sempre són perpendiculars entre ells.

2.2. Polarització lineal

El primer estat de polarització que estudiarem serà la polarització lineal. Diem que una ona electromagnètica presenta aquest estat de polarització si el seu camp elèctric (\vec{E}) sempre oscil·la o "vibra" en la mateixa direcció a mesura que l'ona es propaga.

A la figura 4a podeu observar un exemple d'una ona electromagnètica amb polarització lineal. Podeu comprovar que si observem l'ona "des del davant", és a dir, si ens ubiquem en un punt en el camí de propagació de l'ona, el que veurem és que els vectors dels camps elèctric (\vec{E}) i magnètic (\vec{B}) tracen sempre una línia recta. D'aquí ve el nom de *polarització lineal*.

Figura 4

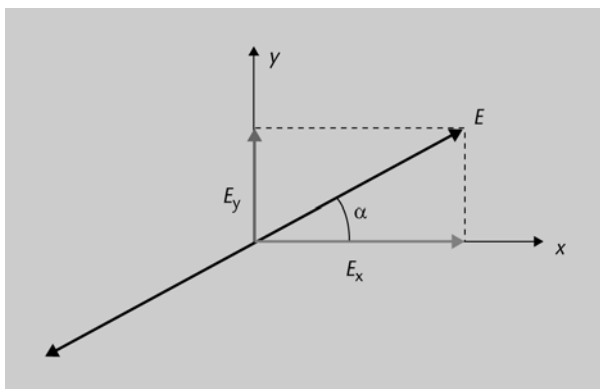
**Figura 4**

Representació gràfica de la polarització lineal.

Compte! Només hem dibuixat la projecció del camp elèctric E . Recordeu que el camp magnètic B és perpendicular.

A la figura 4b mostrem també una ona electromagnètica amb polarització lineal però ara hem fet que la direcció del camp no coincideixi amb cap dels eixos de coordenades. D'aquesta manera podeu comprovar que les seves components respecte a aquestes direccions "dibuixen" totes dues una forma sinusoidal i, a més, es troben en fase entre sí. En altres paraules, per a una ona que es propaga en la direcció z , quan el camp és màxim en l'eix x també ho és en l'eix y , i el mateix succeeix per als mínims. Aquest últim punt és important; implica que podem considerar una ona polaritzada linealment en una certa direcció com una suma de dues (o més) ones polaritzades de forma lineal en direccions diferents, sempre i quan aquestes es trobin en fase. Farem servir aquesta propietat més endavant.

Figura 5

**Figura 5**

Descomposició d'un camp elèctric polaritzat linealment en dues components independents també polaritzades de forma lineal.

A la figura 5 us mostrem un exemple d'un camp elèctric que està polaritzat linealment, és a dir, que oscil·la en una mateixa direcció, marcada per l'angle α

respecte a l'eix x . Podeu comprovar que aquest camp es pot representar com una composició d'una component que “vibra” en l'eix x (\vec{E}_x) i d'una altra que ho fa en l'eix y (\vec{E}_y).

Un exemple on està involucrada la polarització lineal el trobeu a la llum solar que es reflecteix sobre la superfície de l'aigua, que després de reflectir-se queda, en bona part, polaritzada linealment. Si observem l'aigua amb una càmera o unes ulleres que disposin d'un filtre que impedeix el pas d'ones amb aquesta polarització, no veurem tota aquesta llum solar reflectida en l'aigua. En conseqüència, l'aigua es veurà molt més transparent que quan l'observem a ull nu (de fet, moltes fotografies d'aigües suposadament cristal·lines estan fetes amb filtres d'aquest tipus, precisament per eliminar bona part dels reflexos de la llum solar).

Un altre aspecte que subratlla la importància de la polarització lineal és el fet que quan les ones incideixen sobre una interfície entre dos medis materials, l'ona reflectida està polaritzada linealment de forma parcial o fins i tot total. Això vol dir que bona part de les ones que detectem (la llum mateixa, per exemple), com que en general són el resultat de múltiples reflexions sobre els objectes que existeixen al voltant, estaran sovint polaritzades de forma lineal. Per aquest motiu moltes ulleres de sol es fan amb vidres que inclouen filtres per a llum polaritzada, ja que d'aquesta manera se n'augmenta l'eficàcia sobre el que interessa filtrar (per exemple, la llum reflectida sobre la neu) però no sobre la resta.

Diem que una ona electromagnètica presenta **polarització lineal** si el camp elèctric (o magnètic) sempre oscil·la en una mateixa direcció.

Això és equivalent a dir que, per a una ona que es propaga al llarg de la direcció z , les components del camp elèctric (o magnètic) en les direccions x i y es troben en fase entre elles.

$$\begin{aligned}\vec{E} &= (E_x \vec{i} + E_y \vec{j}) e^{j(kz - \omega t)} \\ \vec{B} &= (B_x \vec{i} + B_y \vec{j}) e^{j(kz - \omega t)}\end{aligned}\quad (30)$$

Un cop introduïda la polarització lineal, en què el camp elèctric sempre oscil·la en una mateixa direcció, passem a estudiar un cas una mica més complex: la polarització circular.

2.3. Polarització circular

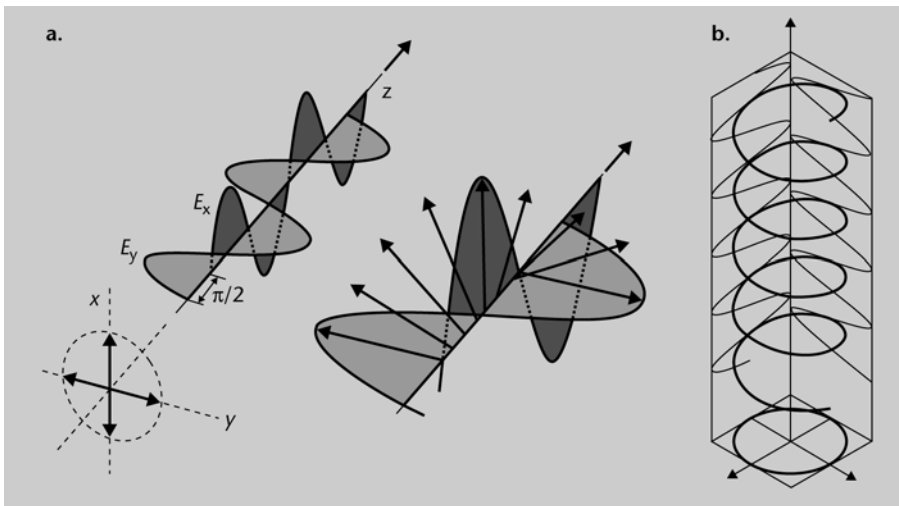
Com ja hem mencionat, diem que una ona electromagnètica presenta polarització circular si els camps elèctric o magnètic no oscil·len sempre en la mateixa direcció a mesura que l'ona es propaga, i a més a més varien d'una determinada manera, que veurem tot seguit.

Vegeu el concepte de polarització al subapartat 2.1 d'aquest mòdul.



A la figura 6a podeu visualitzar un exemple d'una ona amb polarització circular. En el primer esquema podeu comprovar que, per a una ona que es propaga al llarg de l'eix z , les components del camp elèctric en les direccions x i y (\vec{E}_x i \vec{E}_y) estan desfasades un angle $\varphi = \pi/2$. En altres paraules, quan la component \vec{E}_x és màxima, la component \vec{E}_y és mínima, i a l'inrevés. En el segon esquema, les fletxes corresponen a la composició d'aquestes dues components desfasades.

Figura 6

**Figura 6**

Representació gràfica de la polarització circular.
Compte! Només hi hem representat les dues components del camp elèctric i no hi hem representat el camp magnètic.

D'altra banda, la figura 6b mostra el dibuix imaginari que traça el vector del camp elèctric. Com podeu comprovar, la projecció sobre un pla perpendicular a la direcció de propagació (el pla de la part inferior de la figura), correspon a una circumferència i d'aquí prové la denominació *polarització circular*.

Diem que una ona electromagnètica presenta **polarització circular** si la projecció del camp elèctric (o magnètic) respecte a un pla perpendicular a la direcció de propagació "dibuixa" un cercle.

Això és equivalent a dir que, per a una ona que es propaga al llarg de la direcció z , les components del camp elèctric (o magnètic) en les direccions x i y es troben desfasades un angle $\varphi = \pi/2$:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_x \vec{i} e^{j(kz-\omega t)} + E_y \vec{j} e^{j(kz-\omega t+\pi/2)} \\ \vec{B} &= B_x \vec{i} e^{j(kz-\omega t)} + B_y \vec{j} e^{j(kz-\omega t+\pi/2)}\end{aligned}\quad (31)$$


2.4. Què hem après?

En aquest apartat hem estudiat el concepte de polarització de les ones electromagnètiques. Aquest concepte detalla com "estan posats" els camps elèctric i magnètic respecte a la direcció de propagació de l'ona.

Recursos a Internet

Més informació sobre polarització (en anglès):
<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/phyopt/polclas.html#c1>

Hem estudiat els dos tipus de polarització més comuns: la polarització lineal i la polarització circular.



Vegeu la polarització lineal al subapartat 2.2 d'aquest mòdul.
Vegeu la polarització circular al subapartat 2.3 d'aquest mòdul.

Existeix un tercer tipus de polarització que anomenem **polarització el·líptica**. No entrarem en detall sobre aquest tipus de polarització perquè queda més enllà dels objectius de l'assignatura, però sí direm que es tracta d'un cas general que engloba les dues polaritzacions anteriors.

3. Reflexió i transmissió d'ones planes en un canvi de medi

Fins aquí hem vist com es propaguen les ones electromagnètiques per un únic medi. Tanmateix, una ona electromagnètica que es propaga per un medi material generalment hi entra a través d'una superfície de separació que el separa d'un altre medi (per exemple, l'aire o el buit). És en aquestes interfícies de separació on es produeixen els fenòmens més interessants des del punt de vista del comportament de les ones electromagnètiques.

Ja us varem mostrar un petit avanç d'aquests fenòmens quan us varem descriure el comportament de la llum en passar d'un medi a un altre amb un índex de refracció diferent. No obstant això, ens varem limitar a descriure'l i no varem explicar el perquè d'aquests comportaments. Això és el que farem en aquest apartat.

En el primer apartat reprendrem les equacions de Maxwell que us hem introduït en el mòdul anterior i les estudiarem en el cas concret que necessitem: la frontera entre dos medis. Més endavant aplicarem aquest resultat per a analitzar el comportament d'una ona electromagnètica en incidir sobre una interfície.

! Vegeu un avanç de la reflexió al mòdul "Òptica".

3.1. Condicions de frontera

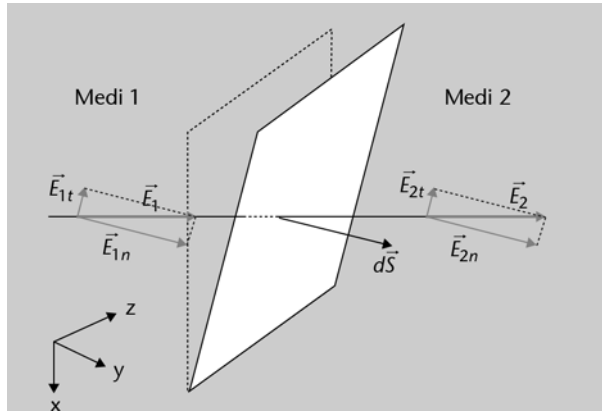
Les ones electromagnètiques, en passar d'un medi a un altre, han de satisfer una sèrie de condicions. Aquestes condicions són aplicables als camps elèctric i magnètic en tota la regió propera a la zona de separació dels dos medis, que anomenarem a partir d'ara **zona interfacial** o **interfície de canvi de medi** i es dedueixen a partir de les equacions de Maxwell. Per a facilitar l'estudi d'aquestes condicions farem l'anàlisi de les components normals (perpendiculars a la interfície) i tangencials (paral·leles a la interfície) per separat. Per a entendre millor com són aquestes components, observeu la figura 7.

A l'esquema podeu visualitzar una interfície entre dos medis materials i les respectives components del camp elèctric (\vec{E}) a totes dues bandes:

- En el medi 1, el camp elèctric és \vec{E}_1 , i les seves components normal i tangencial a la superfície són \vec{E}_{1n} i \vec{E}_{1t} , respectivament.
- En el medi 2, el camp total és \vec{E}_2 i les components són \vec{E}_{2n} i \vec{E}_{2t} .

Per a simplificar la imatge, només hem inclòs les components del camp elèctric, però el mateix procediment és aplicable també al camp magnètic \vec{B} .

Figura 7

**Figura 7**

Representació gràfica de les components normal i tangencial del camp elèctric a la zona interfacial.

A continuació estudiarem per separat les condicions que han de satisfer el camp elèctric, d'una banda, i el camp magnètic, de l'altra, a la zona interfacial entre dos medis qualssevol. Com ja hem dit, per a cada estudi analitzarem per separat les components normals i les components tangencials a la superfície de contacte. Començarem primer amb l'anàlisi de les del camp elèctric i, després, farem el mateix amb les del camp magnètic.

3.1.1. Condicions de frontera per al camp elèctric

Les components normals (o perpendiculars) i tangencials (o paral·leles) a la superfície de separació, del camp elèctric, han de satisfer, a la zona interfacial entre dos medis qualssevol, una sèrie de condicions. Per a trobar-les procedirem amb el raonament següent:

Suposeu en primer lloc que no existeix cap càrrega elèctrica a la zona interfacial. Això vol dir que el nombre de línies de camp que entren a la interfície per una banda és el mateix que les que en surten per l'altra. És a dir, el camp elèctric és el mateix a totes dues bandes.

Ara suposeu que sí que existeixen càrregues a la zona interfacial. Sota aquest supòsit, sí que hi haurà generació o destrucció de línies de camp i, per tant, el camp elèctric no serà el mateix a totes dues bandes. És a dir, hi haurà una discontinuïtat en el valor del camp elèctric. A la figura 8 podeu veure un exemple simplificat amb una sola càrrega puntual (en realitat hi ha càrrega a tota la superfície de separació, però en dibuixem només una perquè així es veu millor la idea que volem transmetre).

En el dibuix, fixeu-vos en la descomposició del camp elèctric en components normals i tangencials (línies discontinües) a la superfície de separació dels dos medis. Podeu comprovar que les components tangencials o paral·leles a la interfície (\vec{E}_{1t} i \vec{E}_{2t}) són idèntiques a totes dues bandes, mentre que les components normals (\vec{E}_{1n} i \vec{E}_{2n}) presenten una certa discontinuïtat (un "salt") en la magnitud, ja que en una banda apunten en un sentit, i en l'altra apunten en l'altre.

La determinació del valor exacte d'aquest "salt" en el valor del camp no la farem en detall. Sí que us direm però, que es pot deduir a partir de la llei de Gauss per al camp electrostàtic, que ja varem veure.

Vegeu la llei de Gauss per al camp electrostàtic al mòdul "Lleis de Maxwell".

Figura 8

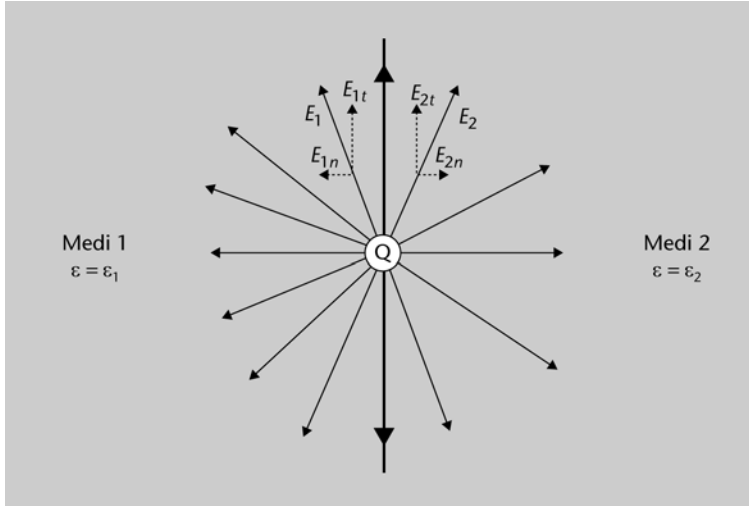


Figura 8

Representació gràfica de les components normal i tangencial del camp elèctric en presència d'una càrrega elèctrica a la interfície entre dos medis

Les components **normals** (o perpendiculars) del **camp elèctric** a cadascuna de les dues bandes d'una interfície entre dos medis materials (E_{1n} i E_{2n}) han de complir la condició següent:

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma \quad (32)$$

on ε_1 i ε_2 són les permitivitats elèctriques dels dos medis i σ és la densitat superficial de càrrega en aquella regió de la zona interfacial.

Aquesta mateixa expressió es pot reescriure en termes del camp de desplaçament elèctric D :

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \quad (33)$$

Per a facilitar la claredat de les expressions, farem servir simplement E per a indicar el mòdul d'una magnitud

vectorial $\|\vec{E}\|$

Recordeu

El camp elèctric (\vec{E}) i el camp de desplaçament elèctric (\vec{D}) estan relacionats per la permitivitat del medi material (ε), segons l'expressió següent, si el material és isòtrop, homogeni i lineal:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Pel que fa a la component tangencial, ja hem dit que és idèntica a totes dues bandes de la interfície.

Les components **tangencials** (o paral·leles) del **camp elèctric** a la zona interfacial entre dos medis materials (E_{1t} i E_{2t}) són idèntiques a totes dues cares de la interfície:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (34)$$

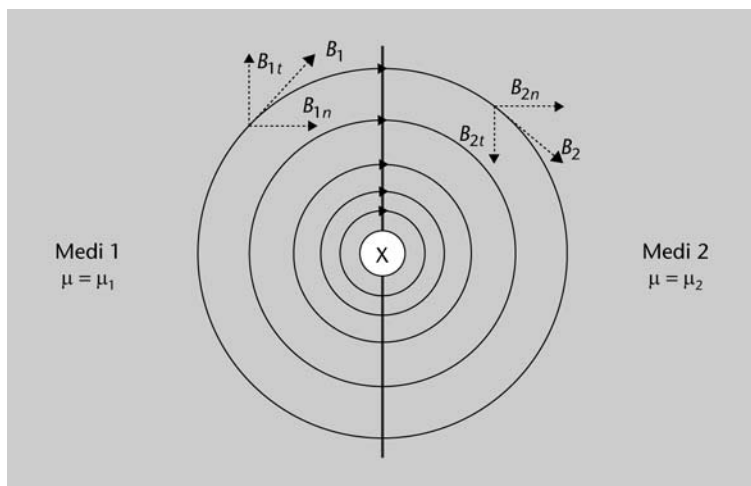
Un cop determinades les condicions que ha de satisfer el camp elèctric en una zona interfacial, procedim a estudiar les del camp magnètic.

3.1.2. Condicions de frontera per al camp magnètic

Per a determinar les condicions corresponents al camp magnètic, es pot aplicar el mateix raonament que hem aplicat per al camp elèctric a l'apartat anterior. Tanmateix, si recordeu, varem veure que no existeixen "càrregues magnètiques" i, per tant, les línies de camp magnètic no es poden generar ni destruir enlloc.

A la figura 9 podeu observar un exemple d'un camp magnètic creat per un corrent elèctric que circula per la interfície entre dos medis. La direcció del corrent elèctric és perpendicular al pla del paper i el símbol \otimes indica que el sentit del corrent és cap endins. Hem mostrat només un cas molt simplificat amb només un "fil" de corrent puntual; en realitat hi ha corrent a tota la superfície, però en dibuixem només un perquè així es veu millor la idea que volem transmetre. Podríem arribar a la mateixa conclusió si el corrent fluís per tota la interfície.

Figura 9



En el dibuix podeu comprovar que la discontinuïtat (el "salt") en la magnitud del camp magnètic es produeix només en la component tangencial, mentre que la component normal es manté igual a totes dues bandes de la interfície.

Les component **normals** (o perpendiculars) del **camp magnètic** a la zona interfacial entre dos medis materials (B_{1n} i B_{2n}) és idèntica a totes dues bandes:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (35)$$

La determinació de l'expressió exacta del "salt" en la component tangencial a la superfície de separació no l'explicarem en detall, però sí que avançarem que es pot deduir a partir de la llei d'inducció de Faraday i de la llei d'Ampère-Maxwell, que ja us varem explicar.

Recordeu

En un diagrama, per a representar vectors o direccions perpendiculars al pla del paper es fa servir la notació següent:

\otimes o \times per a indicar que el sentit és cap endins (del lector cap al paper),

\odot o \bullet per a indicar que el sentit és cap enfora (del paper cap al lector).

Vegeu el raonament de perquè no existeixen "càrregues magnètiques" al mòdul "Lleis de Maxwell".

Figura 9

Representació gràfica de les components normal i tangencial del camp magnètic en presència d'un corrent elèctric a la interfície entre dos medis.

Vegeu la llei de Faraday i la llei d'Ampère-Maxwell al mòdul "Lleis de Maxwell".

La diferència entre les components **tangencials** (o paral·leles) dels **camp magnètics** a cadascuna de les bandes d'una interfície entre dos medis materials (B_{1t} i B_{2t}) és proporcional a la component perpendicular de la densitat superficial de corrent en aquella regió de la interfície:

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} - \frac{B_{2t}}{\mu_2} = j_{\perp} \quad (36)$$

on μ_1 i μ_2 són les respectives permeabilitats magnètiques i j_{\perp} és la densitat de corrent que circula per la interfície. Aquesta mateixa expressió es pot reescriure en termes de la intensitat de camp magnètic H :

$$H_{1t} - H_{2t} = j_{\perp} \quad (37)$$

La densitat de corrent j_{\perp} té el mateix paper que la densitat de càrrega en el cas de les condicions de frontera per al camp elèctric. Tanmateix, fixeu-vos en el subíndex \perp . Aquest símbol vol dir "perpendicular" i aquí es fa servir per a indicar que només cal tenir en compte la component del corrent elèctric perpendicular a la direcció que s'ha pres com a component tangencial.

Aquest matís és necessari perquè, tot i que només existeix una sola direcció normal a la interfície, hi ha infinites direccions que es poden considerar com a tangencials o paral·leles. Imagineu-vos, per exemple, que el pla del paper que esteu llegint correspon a una interfície entre dos medis materials. Qualsevol ratlla que hi dibuixeu seguirà una línia paral·lela a aquest pla i, per tant, es podrà considerar com a component tangencial.

3.1.3. Visió global i casos particulars

Ara que ja hem vist com són les condicions que han de satisfer tant el camp elèctric com el camp magnètic, les visualitzarem en conjunt, a la taula 3.1.

Taula 3.1

	Camp elèctric	Camp magnètic
Components normals	$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma$ $D_{1n} - D_{2n} = \sigma$	$B_{1n} = B_{2n}$
Components tangencials	$E_{1t} = E_{2t}$	$\frac{B_{1t}}{\mu_1} - \frac{B_{2t}}{\mu_2} = j_{\perp}$ $H_{1t} - H_{2t} = j_{\perp}$

Hem optat per mostrar alguns elements de la taula 3.1 de les dues maneres possibles. El motiu és que, tot i que en aquest text farem servir la primera forma (és a dir, només en funció de \vec{E} i \vec{B}), és molt habitual trobar en molts textos les condicions escrites de la segona forma (és a dir, en funció dels camps de desplaçament elèctric \vec{D} i de la intensitat de camp magnètic \vec{H}).

Densitat de corrent

A la figura 9 heu vist un exemple d'una densitat de corrent perpendicular a la component tangencial (j_{\perp}).

Recordeu

El camp magnètic (\vec{B}) i la intensitat de camp magnètic (\vec{H}) estan relacionats per la permeabilitat del medi material (μ), segons l'expressió següent:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

És interessant estudiar les condicions de continuïtat de la taula per a un cas particular: quan no hi ha cap càrrega ($\sigma = 0$) ni corrent ($j = 0$) sobre la interfície. Aquesta situació és molt habitual i, atès que les expressions se simplifiquen de forma notable, val la pena analitzar-la.

Les condicions de continuïtat per a interfícies on no hi ha cap càrrega ($\sigma = 0$) ni cap corrent elèctric ($j_{\perp} = 0$) són:

Taula 3.2

	Camp elèctric	Camp magnètic
Components normals	$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$ $D_{1n} = D_{2n}$	$B_{1n} = B_{2n}$
Components tangencials	$E_{1t} = E_{2t}$	$\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$ $H_{1t} = H_{2t}$

Un cop conegudes les condicions que han de satisfer els camps elèctric i magnètic en una zona interfacial, i que són conseqüència directa del compliment de les lleis de Maxwell, passarem a aplicar-les a l'estudi del comportament de les ones electromagnètiques quan es troben amb una interfície de canvi de medi.

3.2. Reflexió i transmissió a la interfície entre dos medis

Quan una ona electromagnètica incideix en una superfície de canvi de medi, el seu comportament no serà aleatori sinó que vindrà determinat per les condicions de frontera que us acabem d'introduïr.

Anteriorment vàreu veure que el comportament de la llum quan incideix sobre una superfície de canvi de medi es regeix per unes lleis determinades. Tot seguit deduirem aquestes mateixes lleis a partir d'aquestes condicions de frontera i, d'aquesta manera, podrem comprovar que es poden aplicar a qualsevol tipus d'ona electromagnètica.

En primer lloc, farem una sèrie de suposicions que ens simplificaran la deducció. Són les que enunciem a continuació.

- 1) La zona interfacial es pot considerar com un únic pla infinit, és a dir, com una zona suficientment prima, infinitament extensa i completament plana.
- 2) A la zona interfacial no hi ha cap càrrega elèctrica ($\rho \approx 0$) ni cap corrent elèctric ($j \approx 0$). Això vol dir que es poden aplicar les condicions de frontera de la taula 3.2.
- 3) Les dues bandes de la zona interfacial són suficientment extenses com per a negligir les possibles reflexions múltiples que s'hi poguessin produir a causa de la presència de l'altre extrem.

Vegeu les condicions de frontera al subapartat 3.1 d'aquest mòdul.

Vegeu el comportament de la llum en canviar de medi al mòdul "Òptica".

4) Els medis de totes dues bandes són i. h. l. (isòtrops, homogenis i lineals) i no magnètics.


5) L'ona incident és una ona harmònica plana i està polaritzada linealment.

Cap de les suposicions anterior afecta de forma significativa el resultat final i les poques modificacions que hi introdueixen queden fora de l'objectiu d'aquest mòdul.

Un cop considerades aquestes simplificacions, vegem què succeeix quan una ona electromagnètica incideix sobre la interfície. L'experiència quotidiana ens diu que part de l'ona es reflectirà i part es transmetrà cap al segon medi. Estudiarem les característiques tant de l'ona reflectida com de l'ona transmesa. En tots dos casos podreu comprovar que arribarem al mateix resultat que vàrem trobar anteriorment.

3.2.1. Deducció de les lleis de reflexió i refracció de l'òptica per a qualsevol ona electromagnètica

Com ja hem dit, quan una ona electromagnètica incideix sobre una interfície de canvi de medi, una part es reflecteix i no arriba a penetrar en el segon medi, mentre que l'altra part travessa la interfície i continua propagant-se pel segon medi. A continuació estudiarem les característiques d'aquestes dues ones.

Per a simplificar, treballarem només amb el camp elèctric. Recordeu que la direcció del camp magnètic es pot determinar directament a partir de la del camp elèctric. 

Comencem per escriure les expressions dels camps elèctrics corresponents a les ones incident (38), reflectida (39) i transmesa (40). Com ja hem dit, estem suposant que es tracta d'ones harmòniques planes amb polarització lineal:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{j(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} \quad (38)$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{j(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)} \quad (39)$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{j(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t)} \quad (40)$$


on \vec{E}_{0i} , \vec{E}_{0r} i \vec{E}_{0t} són les amplituds, \vec{k}_i , \vec{k}_r i \vec{k}_t són les constants d'ona i ω_i , ω_r i ω_t són les freqüències angulars de les ones incident, reflectida i transmesa, respectivament. Per tant, fixeuvos que el subíndex i vol dir "incident", el subíndex r , "reflectida" i el subíndex t , "transmesa".

A la figura 10 podeu visualitzar un esquema amb les ones incident, reflectida i transmesa.

Recordeu

Un medi i. h. l. és un medi:

- **isòtrop:** les seves característiques electromagnètiques no depenen de la direcció de propagació.
- **homogeni:** les seves característiques són les mateixes en qualsevol punt del medi.
- **lineal:** les seves característiques elèctriques i magnètiques depenen linealment dels camps elèctric i magnètic.

 Vegeu les característiques de les ones reflectides i de les ones transmeses al mòdul "Òptica".

Recordeu

Els camps elèctric \vec{E} i magnètic (\vec{B}) sempre són perpendiculars entre sí.

Recordeu

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

A l'esquema de la figura podeu identificar els elements següents:

- **pla de la interfície:** pla que conté la interfície de separació entre els dos medis. En el dibuix, correspon al pla xz .
- **pla d'incidència:** més endavant veurem que les ones incident, reflectida i transmesa es propaguen sobre un mateix pla, aquest és el pla d'incidència. Es tracta d'un pla perpendicular a la interfície. En el dibuix, correspon al pla xy .
- **angles d'incidència (θ_i), de reflexió (θ_r) i de transmissió (θ_t):** angles que formen les direccions de propagació de les ones incident, reflectida i transmesa respecte a una direcció perpendicular al pla d'incidència

θ és la lletra grega theta minúscula (pronunciada com la zeta castellana).

Figura 10a

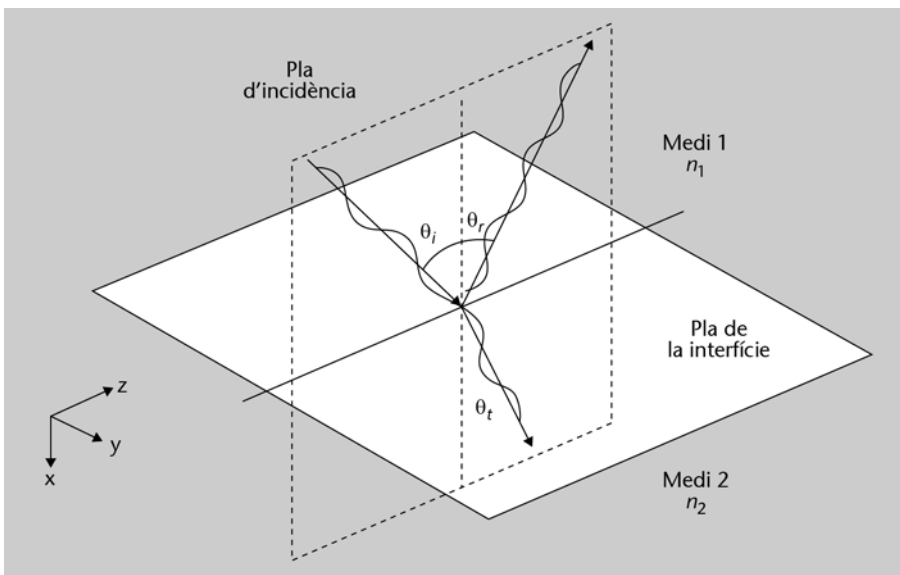
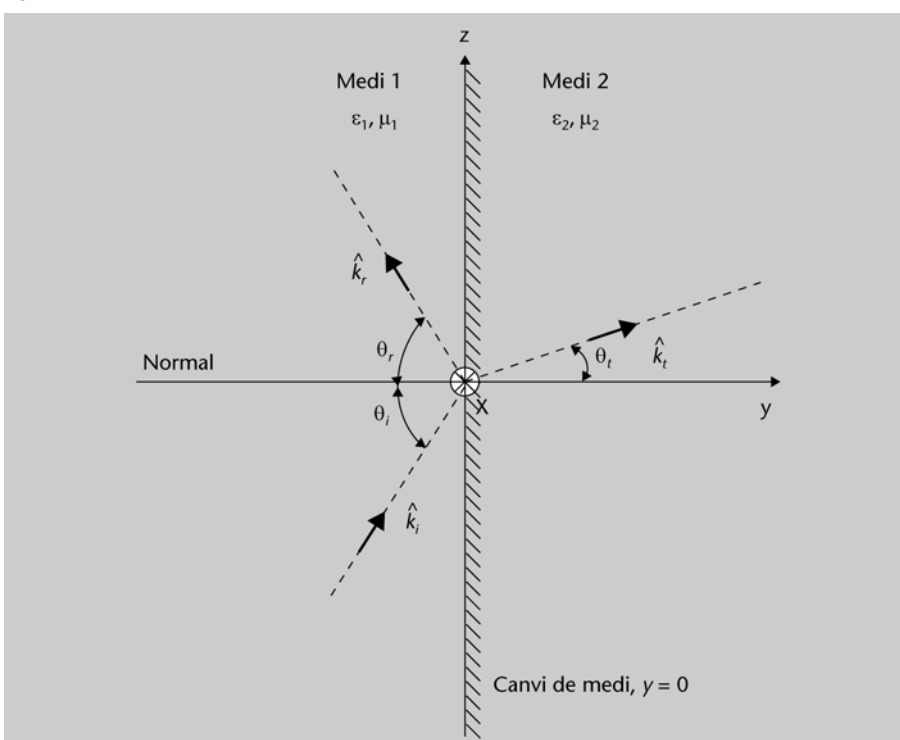


Figura 10

Representació gràfica de les ones incident, reflectida i transmesa.

Figura 10b



Recordeu

El símbol \otimes indica una fletxa que entra al paper. El símbol \odot indica una fletxa que surt del paper.

Tall transversal

Durant l'instant precís en què l'ona entra en contacte amb la interfície, les tres ones presents (incident, reflectida i transmesa) coexisteixen i, com que es troben a la zona interfacial, els camps elèctric i magnètic han de satisfer les condicions de frontera que ja us hem introduït. En concret, analitzarem la condició que ha de satisfer la component tangencial del camp elèctric, que recordem que havia de ser idèntica a totes dues bandes de la interfície ($E_{1t} = E_{2t}$). Per tant, tindrem:

$$E_{it} + E_{rt} = E_{tt} \quad (41)$$

on E_{it} és la component tangencial del camp elèctric de l'ona incident, E_{rt} és la de l'ona reflectida i E_{tt} és la de l'ona transmesa. Fixeu-vos que, atès que només hem agafat una component del vector, no cal posar la fletxeta de vector.

Atès que la condició de l'expressió (41) s'ha de satisfer **en qualsevol instant i en qualsevol punt de la interfície**, a partir de les equacions (38), (39) i (40) deduïm que:

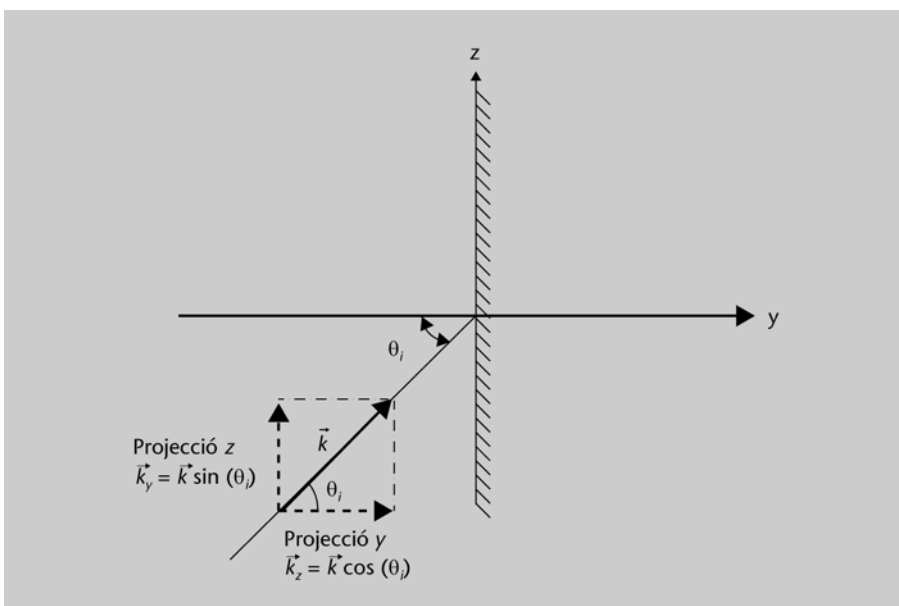
$$\omega_i t = \omega_r t = \omega_t t \quad (42)$$

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r} \quad (43)$$

La condició (42) implica que les freqüències d'oscil·lació són les mateixes per a totes tres ones. La condició (43) duu a les conseqüències següents:

1) L'ona incident, l'ona reflectida i l'ona transmesa es propaguen en el mateix pla. Aquest pla l'anomenem *pla d'incidència* i ja l'hem mencionat a la figura 10.

Figura 10c



Projecció en els eixos

Vegeu les condicions de frontera al subapartat 3.1 d'aquest mòdul.



2) Com que $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r}$, tindrem que (vegeu la figura 10c):

$$k_{iz} \sin \theta_i = k_{rz} \sin \theta_r \quad (44)$$

és a dir, que la projecció en l'eix z de \vec{k}_i i \vec{r} és igual a la component z de $\vec{k}_r \cdot \vec{r}$, que és equivalent a:

$$\frac{\omega}{c} n_1 z \sin \theta_i = \frac{\omega}{c} n_1 z \sin \theta_t \quad (45)$$

i, per tant:

$$\begin{aligned} \sin \theta_i &= \sin \theta_r \\ \theta_i &= \theta_r \end{aligned} \quad (46)$$

És a dir, que l'angle de reflexió ha de ser igual a l'angle d'incidència, que és la **lleï de la reflexió** que ja vàrem veure.

3) Com que $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}$, tindrem que

$$k_{iz} \sin \theta_i = k_{tz} \sin \theta_t \quad (47)$$

que és equivalent a:

$$\frac{\omega}{c} n_1 z \sin \theta_i = \frac{\omega}{c} n_2 z \sin \theta_t \quad (48)$$

i, per tant:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (49)$$

La relació (49) és la **lleï de Snell** que ja vàrem veure, aplicada a la llum, i que aquí podem comprovar que es pot ampliar a qualsevol ona electromagnètica. De fet, el que heu pogut veure també és que hem arribat a les mateixes de l'òptica però ara a partir de les lleis de Maxwell.

Recordeu

$$\begin{aligned} \text{Com que } k &= \frac{\omega}{v} \text{ i } n = \frac{c}{v} : \\ k &= \frac{\omega}{c} n \end{aligned}$$

Vegeu el mòdul "Òptica geomètrica" d'aquesta assignatura.

Recordeu

$$\begin{aligned} \text{Com que } k &= \frac{\omega}{v} \text{ i } n = \frac{c}{v} : \\ k &= \frac{\omega}{c} n \end{aligned}$$

Vegeu la lleï de Snell aplicada a la llum al mòdul "Òptica".

Vegeu les condicions de l'òptica geomètrica al mòdul "Òptica".

Quan una ona electromagnètica incideix sobre una interfície de contacte entre dos medis no conductors, les direccions de les ones incident, reflectida i transmesa han de satisfer les condicions de l'òptica geomètrica que ja vàrem estudiar:

- 1) L'ona incident, l'ona reflectida i l'ona transmesa es propaguen en el mateix pla (anomenat *pla d'incidència*).
- 2) L'angle de reflexió ha de ser igual a l'angle d'incidència: $\theta_i = \theta_r$.
- 3) L'angle de transmissió es relaciona amb l'angle d'incidència mitjançant la lleï de Snell: $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$.

θ_i , θ_r i θ_t són els angles de les ones incident, reflectida i transmesa mesurats des d'un pla perpendicular a la superfície. n_1 i n_2 són els índexs de refracció dels medis respectius.

En resum, podeu veure que es pot determinar en tot moment el recorregut que seguiran tant l'ona reflectida com l'ona transmesa només amb el coneixement de:

- l'angle d'incidència (θ_i),
- els índexs de refracció dels dos medis involucrats (n_1 i n_2).

No obstant això, de seguida topareu amb algunes qüestions que encara no s'han resolt:

- Com són les intensitats dels feixos reflectit i transmès? És a dir, com varia l'amplitud de l'ona?
- Hi haurà sempre el mateix comportament siguin quines siguin les característiques de l'ona incident?

Reflexionem primer una mica respecte a la segona pregunta. Si analitzeu les condicions de frontera que ja hem vist i que hem resumit a les taules 3.1 i 3.2, podeu deduir que els camps presenten comportaments diferents a la zona interfacial en funció de com estan orientats respecte la superfície. Això vol dir que, en efecte, observarem diferències en el comportament de les ones segons l'orientació dels camps, és a dir, segons la seva **polarització**.

Tot i que, *a priori*, l'anàlisi completa de la incidència sobre una interfície pot semblar molt complicada, recordeu que ja us varem explicar que una ona polaritzada en una direcció es pot descompondre com la suma de diverses ones polaritzades en diferents direccions. Per tant, podem estudiar per separat el comportament de cadascuna d'aquestes ones en què s'ha descompost.

Atès que la descomposició es pot fer en qualsevol nombre de components i respecte a qualsevol direcció, cal escollir una configuració que simplifiqui els càlculs i ens sigui d'utilitat. Les direccions que escollirem són:

- polarització amb el camp elèctric perpendicular al pla d'incidència,
- polarització amb el camp elèctric paral·lel al pla d'incidència.

A continuació analitzarem els comportaments de cadascun d'aquests dos casos específics. Més endavant els veurem de forma conjunta i també n'estudiarrem alguns casos particulars.

3.2.2. Reflexió i transmissió d'ones polaritzades amb el camp elèctric perpendicular al pla d'incidència

La primera configuració que analitzarem serà la d'una ona que està polaritzada de forma lineal amb el seu camp elèctric perpendicular al pla d'incidència. L'objectiu

Vegeu les condicions de frontera al subapartat 3.1 d'aquest mòdul.

Vegeu la polarització a l'apartat 2 d'aquest mòdul.

Vegeu de forma conjunta aquestes dues polaritzacions i alguns dels seus casos particulars als subapartats 3.2.4 i 3.2.5 d'aquest mòdul.

que perseguim és veure com varia l'amplitud de l'ona en reflectir-se i refractar-se. A la figura 11 podeu visualitzar aquesta configuració.

En el dibuix podeu comprovar que la direcció perpendicular al pla d'incidència correspon a la direcció de l'eix z i, per tant, és paral·lela al pla de la interfície. Això vol dir que, en aquesta configuració, el camp elèctric només tindrà component tangencial respecte a la interfície del canvi de medi.

Figura 11a

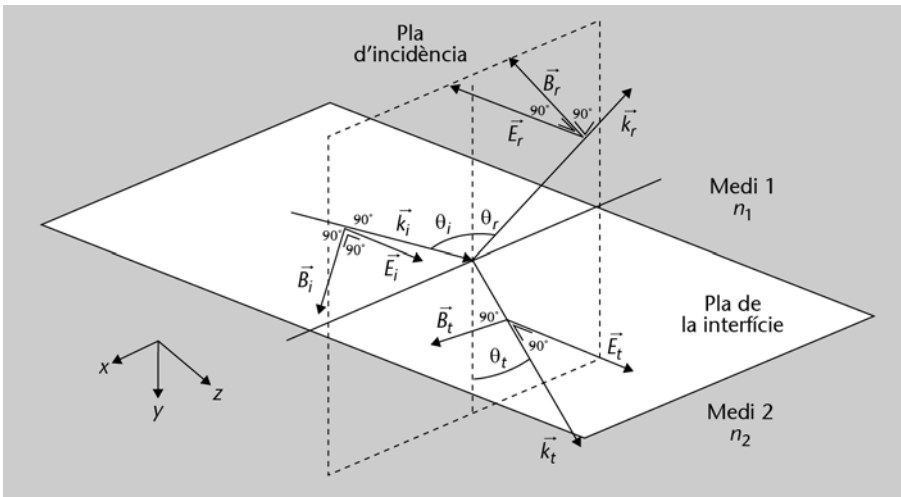
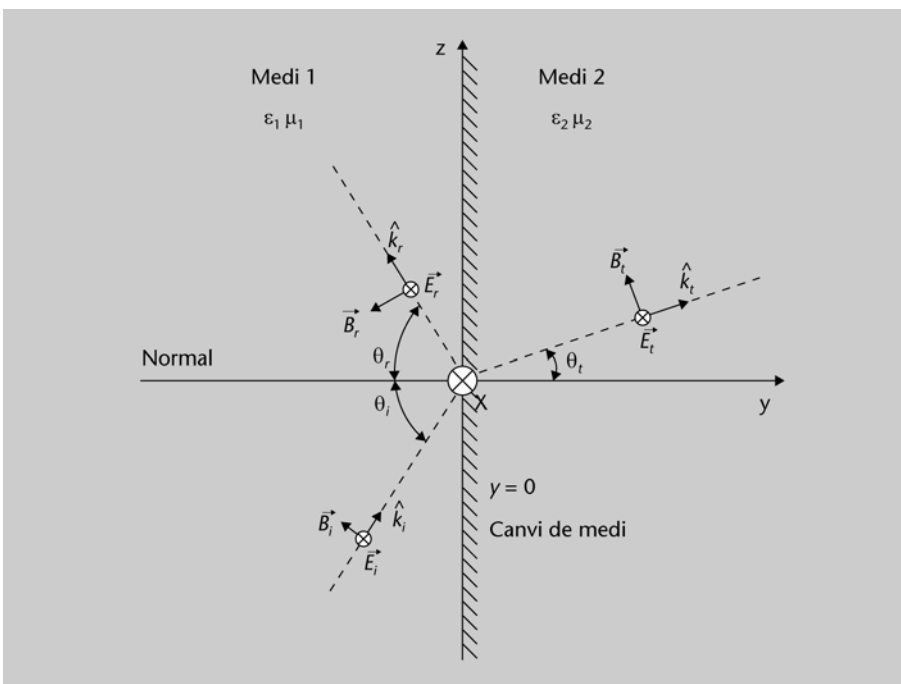


Figura 11

Ones incident, reflectida i transmesa en una interfície entre dos medis per al cas en què l'ona incident està polaritzada amb el camp elèctric perpendicular al pla d'incidència.

Figura 11b



Recordeu

El símbol \otimes indica una fletxa que entra al paper. El símbol \odot indica una fletxa que surt del paper.

Tall transversal

Condicions de frontera del camp elèctric

Si apliqueu la condició de frontera per a la component tangencial del camp elèctric (consulteu la taula 3.2) tindreu que:

$$E_i + E_r = E_t \tag{50}$$

on E_i , E_r i E_t són, respectivament, els camps elèctrics per a les ones incident, reflectida i transmesa.

L'equació (50) mostra la relació entre els camps elèctrics de les ones incident, reflectida i transmesa. Tanmateix, podeu observar que aquesta expressió no és suficient per a determinar el valor exacte dels camps elèctrics reflectit i transmès, ja que tenim dues incògnites (E_r i E_t). Ens cal, doncs, trobar una segona condició.

Condicions de frontera del camp magnètic

La segona condició la podeu trobar si procediu de forma anàloga amb el **camp magnètic**. En aquest cas, l'aplicació de les condicions de frontera per a les components tangencials resulta (consulteu la taula 3.2):

$$\frac{B_i \cos \theta_i}{\mu_1} - \frac{B_r \cos \theta_r}{\mu_1} = \frac{B_t \cos \theta_t}{\mu_2} \quad (51)$$

on B_i , B_r i B_t són els camps magnètics per a les ones incident, reflectida i transmesa, θ_i i θ_t són els angles d'incidència i de transmissió i, com que suposem que es tracta de medis no magnètics, podem fer $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ a l'equació (51) i simplificar:

$$\frac{B_i \cos \theta_i}{\mu_0} - \frac{B_r \cos \theta_r}{\mu_0} = \frac{B_t \cos \theta_t}{\mu_0} \quad (52)$$

I fent servir que $\theta_i = \theta_r$ (equació (46)) tenim:

$$(B_i - B_r) \cos \theta_i = B_t \cos \theta_t \quad (53)$$

Per a trobar les relacions entre les amplituds dels camps elèctrics fem servir la relació entre els camps elèctric i magnètic que ja vàrem veure:

$$\frac{n_1}{c} (E_i - E_r) \cos \theta_i = \frac{n_2}{c} E_t \cos \theta_t \quad (54)$$

Si simplifiquem el terme c , que es troba a totes dues bandes, obtindreu la segona condició buscada:

$$n_1 (E_i - E_r) \cos \theta_i = n_2 E_t \cos \theta_t \quad (55)$$

Així doncs, amb les equacions $E_i + E_r = E_t$ (50) i (55) el que hem trobat són dues relacions entre tres paràmetres: els camps elèctrics de l'ona incident (E_i), de l'ona reflectida (E_r) i de l'ona transmesa (E_t). Us les tornem a mostrar una al costat de l'altra:

$$E_i + E_r = E_t \quad (56)$$

$$n_1 (E_i - E_r) \cos \theta_i = n_2 E_t \cos \theta_t \quad (57)$$

A les expressions $E_i + E_r = E_t$ (56) i (57) hi ha dos paràmetres desconeguts, E_r i E_t , i un tercer que sí que és conegut, E_i . Podeu combinar aquestes expressions

Recordeu

La relació entre els camps elèctric i magnètic és:

$$B = \frac{1}{v} E$$

i, per tant:

$$B = \frac{n}{c} E$$

Vegeu la relació entre els camps elèctric i magnètic al mòdul "Leis de Maxwell".

per tal de trobar una expressió individual per a cadascun dels dos valors desconeguts.

Determinació de l'ona reflectida

Per tal de trobar la primera relació, la que determina l'amplitud de l'ona reflectida, substituïu el valor de E_t de l'equació (56) dins de l'equació (57):

$$n_1(E_i - E_r)\cos \theta_i = n_2(E_i + E_r)\cos \theta_t \quad (58)$$

Tot seguit, agrupeu en una banda els termes dependents de E_r i a l'altra els de E_i i traieu factor comú:

$$\begin{aligned} n_1E_r \cos \theta_i + n_2E_r\cos \theta_t &= n_1E_i \cos \theta_i - n_2E_i\cos \theta_t \\ (n_1\cos \theta_i + n_2\cos \theta_t)E_r &= (n_1\cos \theta_i - n_2\cos \theta_t)E_i \end{aligned} \quad (59)$$

Així trobareu la primera de les relacions que estàvem buscant, la relació entre l'ona reflectida i l'ona incident:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (60)$$

Determinació de l'ona transmesa

Per a trobar la segona relació, la de l'amplitud de l'ona transmesa, ara heu d'aïllar el valor de E_r a l'equació $E_i + E_r = E_t$ (56):

$$E_r = E_t - E_i \quad (61)$$

I substituïm aquest valor a l'equació (57):

$$n_1(E_i - E_t + E_i)\cos \theta_i = n_2E_t \cos \theta_t \quad (62)$$

Com abans, podeu agrupar en una banda els termes que depenen de E_t i a l'altra els que depenen de E_i i després treure'n factor comú:

$$\begin{aligned} -n_1E_t \cos \theta_i - n_2E_t \cos \theta_t &= -2n_1E_i \cos \theta_i \\ (n_1\cos \theta_i + n_2\cos \theta_t)E_t &= (2n_1\cos \theta_i)E_i \end{aligned} \quad (63)$$

I així trobem la segona de les relacions que estàvem buscant:

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (64)$$

Les equacions (60) i (64) demostren que es poden determinar, en tot moment, els quocients entre les amplituds de les ones reflectida i incident i de l'ona transmesa i incident, respectivament, si es coneixen únicament els índexs de refracció dels dos medis (n_1 i n_2) i l'angle d'incidència (θ_i). Bé, a la figura també apareix l'angle de transmissió, (θ_t), però aquest el podem trobar a partir de l'angle d'incidència mitjançant la llei de Snell (49).

Aquests quocients s'anomenen **coeficients de Fresnel per a polarització perpendicular**, i se simbolitzen, de forma respectiva, r_s per a l'ona reflectida i t_s per a l'ona transmesa.

Els **coeficients de Fresnel de reflexió (r_s) i transmissió (t_s)** per a una ona amb polarització perpendicular al pla d'incidència són:

$$r_s = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (65)$$

$$t_s = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (66)$$

on θ_i i θ_t són els angles d'incidència i transmissió, respectivament, i n_1 i n_2 són els índex de refracció dels dos medis.

Els coeficients de Fresnel (r_s) i (t_s) expressen la relació entre les **amplituds** de les ones reflectida i transmesa respecte a l'amplitud de l'ona incident. Val a dir, també, que el que coneixem de forma habitual com a **intensitat** d'una ona no és aquesta amplitud, sinó el valor mitjà del flux d'energia per unitat d'àrea, com veurem tot seguit.

Determinació de les intensitats

Si recordeu, anteriorment us vàrem explicar que aquest flux d'energia venia determinat pel vector de Poynting (\vec{S}), i que aquest era proporcional al producte entre el camp elèctric i el camp magnètic. A més, aquests dos camps són proporcionals entre sí:

$$I \propto \|\vec{S}\|; \|\vec{S}\| \propto \|\vec{E}\| \cdot \|\vec{B}\|; \|\vec{B}\| \propto \|\vec{E}\| \quad (67)$$

Per tant, la intensitat d'una ona electromagnètica és proporcional al quadrat de la seva amplitud.

La **intensitat** d'una ona electromagnètica és proporcional al **quadrat** de la seva amplitud:

$$I \propto \|\vec{E}\|^2 \quad (68)$$

És per això que, a la pràctica, es defineixen uns coeficients anàlegs als coeficients de Fresnel anteriors però aplicats a la intensitat en comptes de l'amplitud. Són les anomenades **reflectància (R_s)** i **transmitància (T_s)**:

$$R_s = \frac{I_r}{I_i} \quad (69)$$

Subíndex 's'

Habitualment es fa servir la lletra *s* en comptes de *p* per a indicar que la polarització és perpendicular al pla, i així diferenciar-la de la polarització paral·lela (que sí que fa servir la lletra *p*). L'elecció de la lletra *s* ve del mot alemany *senkrecht*, que significa 'perpendicular'.

Vegeu el vector de Poynting al mòdul "Lleis de Maxwell".

$a \propto b$ es llegeix "*a* és proporcional *ab*".

Intensitat i amplitud

El concepte d'intensitat d'una ona com el quadrat de l'amplitud ja el vàreu veure en el mòdul "Ones i Acústica", on s'aplicava a ones mecàniques.

$$T_s = \frac{I_t}{I_i} \quad (70)$$

Fixeu-vos que, atès que la intensitat de l'ona reflectida o transmesa no poden ser mai més grans que la incident, tant la reflectància (R_s) com la transmitància (T_s) seran més petites que 1.

Així, doncs, hem trobat que el valor de la reflectància (R_s) correspon al quocient dels quadrats de les amplituds de les ones reflectida i incident (69):

$$R_s = \frac{I_r}{I_i} = \frac{E_r^2}{E_i^2} \quad (71)$$

I així trobem una relació directa entre la reflectància (R_s) i el coeficient de Fresnel de reflexió (r_s):

$$R_s = r_s^2 \quad (72)$$

La **reflectància** (R_s) per a una ona electromagnètica polaritzada amb el camp elèctric (\vec{E}) perpendicular al pla d'incidència és:

$$R_s = \frac{I_r}{I_i} = r_s^2 = \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2 \quad (73)$$

on n_1 i n_2 són els índex de refracció dels medis 1 i 2, θ_i i θ_t són els angles d'incidència i transmissió, respectivament, i r_s és el coeficient de Fresnel de reflexió per a polarització perpendicular.

Per a trobar el valor de la transmitància (T_s) heu d'aplicar el principi de conservació de l'energia. En altres paraules, cal considerar que tota l'energia de l'ona incident s'ha de "repartir" entre l'ona reflectida i l'ona transmesa. Això es tradueix en què:

$$R_s + T_s = 1 \quad (74)$$

I, per tant:

$$\begin{aligned} T_s &= 1 - R_s \\ T_s &= 1 - r_s^2 \end{aligned} \quad (75)$$

Si substituïu r_s pel seu valor:

$$T_s = 1 - \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2 \quad (76)$$

Després de fer algunes operacions, acabareu obtenint l'expressió següent:

$$T_s = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left(\frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2 \quad (77)$$

Podeu comprovar, a partir de l'expressió (66), que el contingut de l'interior del parèntesi correspon al valor de t_s . Per tant:

$$T_s = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_s^2 \quad (78)$$

La **transmitància** (T_s) per a una ona electromagnètica polaritzada amb el camp elèctric (\vec{E}) perpendicular al pla d'incidència és:

$$T_s = \frac{I_t}{I_i} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_s^2 = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left(\frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2 \quad (79)$$

on n_1 i n_2 són els índex de refracció dels medis 1 i 2, θ_i i θ_t són els angles d'incidència i transmissió, respectivament, i t_s és el coeficient de Fresnel de transmissió.

Ja hem vist com es comporta, en arribar a una zona interfacial, una ona polaritzada amb el camp elèctric perpendicular al pla d'incidència. Durant l'estudi hem introduït els coeficients de Fresnel (r_s i t_s), que mostren les relacions entre les amplituds de les ones incident, reflectida i transmesa, i també els conceptes de reflectància (R_s) i transmitància (T_s), que fan el mateix per a les intensitats. A continuació repetirem l'estudi per al cas en què l'ona està polaritzada amb el camp elèctric paral·lel al pla d'incidència.

3.2.3. Reflexió i transmissió d'ones polaritzades amb el camp elèctric paral·lel al pla d'incidència

L'estudi de la component amb polarització paral·lela al pla d'incidència podria semblar, *a priori*, una mica més complicat que la perpendicular. Observeu la figura 12.

Figura 12a

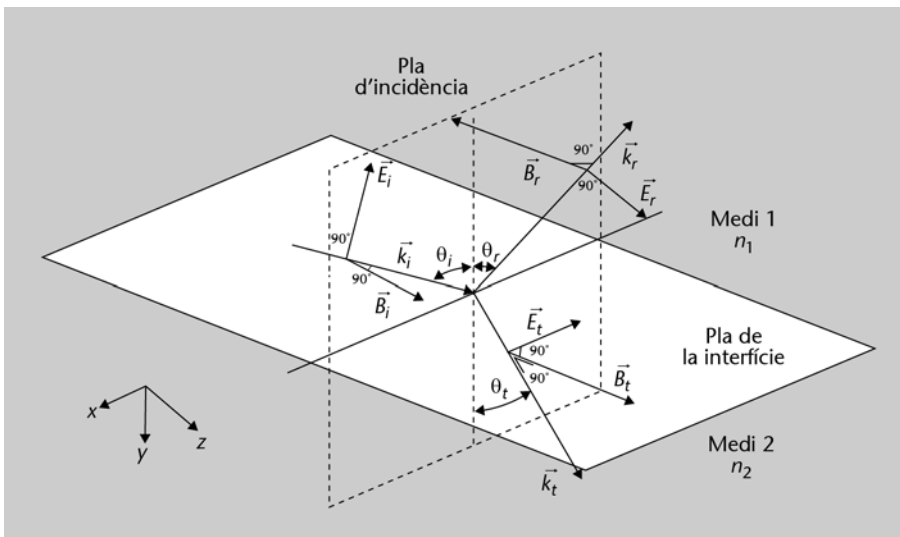
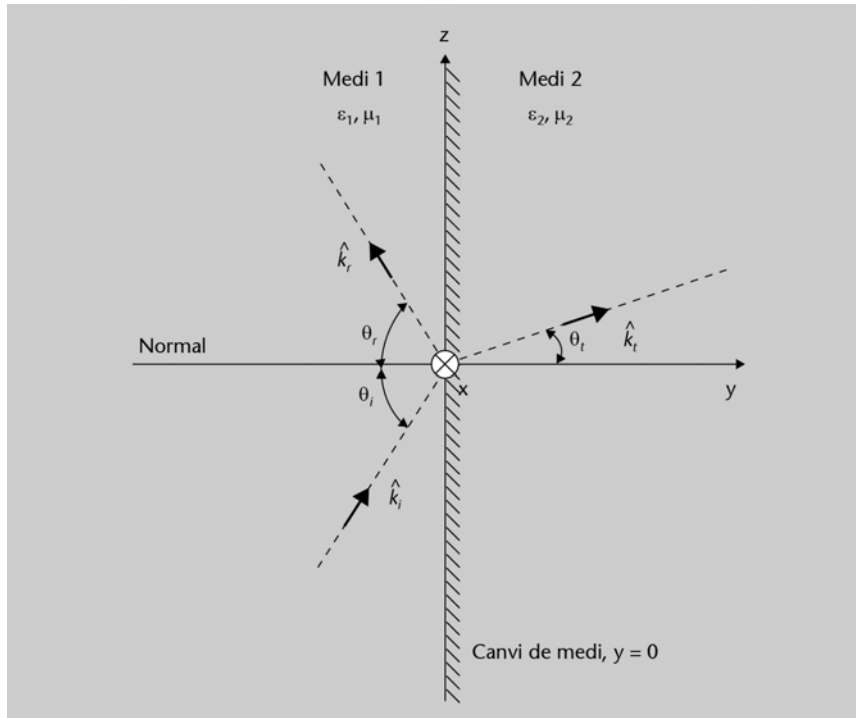


Figura 12

Ones incident, reflectida i transmesa en una interfície entre dos medis per al cas en què l'ona incident està polaritzada amb el camp elèctric paral·lel al pla d'incidència.

Figura 12b



Tall transversal

Com podeu veure en el dibuix, a diferència del cas anterior, en què podíem veure que una direcció perpendicular al pla d'incidència (el pla yz) sempre era paral·lela al pla de la interfície (el pla xz), una direcció paral·lela al pla d'incidència pot estar en qualsevol orientació respecte al pla de la interfície. És a dir, pot ser tant paral·lela com perpendicular o com obliqua. Aquesta indeterminació fa difícil la seva simplificació.

De totes maneres, hi ha un camí alternatiu que simplifica l'anàlisi: podeu fer servir el camp magnètic en comptes del camp elèctric. Recordeu que, en una ona electromagnètica, tots dos camps són perpendiculars entre sí. Això vol dir que una ona polaritzada amb el seu camp elèctric paral·lel al pla d'incidència (pla yz) tindrà el seu camp magnètic perpendicular a aquest pla i, en concret, en la direcció de l'eix x . A la figura 12 ho podeu visualitzar.

Condicions de frontera del camp magnètic

Com en el cas de la polarització perpendicular, tornarem a suposar que no hi ha cap càrrega ni corrent elèctric a la interfície. Per tant, la condició de frontera del camp magnètic tangencial a la superfície és, segons l'expressió de la taula 3.2:

$$B_i - B_r = B_t \quad (80)$$

on B_i , B_r i B_t són els camps elèctrics per a les ones incident, reflectida i transmesa, respectivament.

Per a trobar les relacions entre les amplituds dels camps elèctrics fem servir, com abans, la relació entre els camps elèctric i magnètic que ja vàrem veure:

$$\frac{n_1}{c} E_i - \frac{n_1}{c} E_r = \frac{n_2}{c} E_t$$

Recordeu

El símbol \otimes indica una fletxa que entra al paper. El símbol \odot indica una fletxa que surt del paper.

Recordeu

La relació entre els camps elèctric i magnètic és:

$$B = \frac{1}{v} E$$

I, per tant:

$$B = \frac{n}{c} E$$

Vegeu la relació entre els camps elèctric i magnètic al mòdul "Lleis de Maxwell".

$$n_1(E_i - E_r) = n_2 E_t \quad (81)$$

Aquesta és la primera condició que necessitem. Com que conté dues incògnites (E_r i E_t), cal obtenir-ne una segona. Aplicarem la condició de frontera per a la component tangencial del camp elèctric.

Condicions de frontera per al camp elèctric

A la zona interfacial, la component tangencial del camp elèctric ha de satisfer la condició corresponent de la taula 3.2. Per tant,

$$\begin{aligned} E_i \cos \theta_i + E_r \cos \theta_i &= E_t \cos \theta_t \\ (E_i + E_r) \cos \theta_i &= E_t \cos \theta_t \end{aligned} \quad (82)$$

Ja tenim, doncs, les dues condicions que buscàvem. Les tornem a mostrar una al costat de l'altra:

$$n_1(E_i - E_r) = n_2 E_t \quad (83)$$

$$(E_i + E_r) \cos \theta_i = E_t \cos \theta_t \quad (84)$$

Podeu comprovar que a les expressions $n_1(E_i - E_r) = n_2 E_t$ (83) i (84) hi ha dos paràmetres desconeguts, E_r i E_t i un tercer que sí que és conegut, E_i . De forma anàloga a com hem procedit anteriorment, podeu combinar-les per a trobar una expressió individual per a l'amplitud de l'ona reflectida i de l'ona transmesa.

! Vegeu el procediment de condicions de frontera al subapartat 3.2.2 d'aquest mòdul.

Determinació de l'amplitud de l'ona reflectida

Per tal de trobar la primera relació, comenceu per aïllar el valor de E_t a l'equació $n_1(E_i - E_r) = n_2 E_t$ (83):

$$E_t = \frac{n_1(E_i - E_r)}{n_2} \quad (85)$$

I ara substituïu E_t a l'equació (84):

$$(E_i + E_r) \cos \theta_i = \frac{n_1(E_i - E_r)}{n_2} \cos \theta_t \quad (86)$$

Podeu agrupar en una banda els termes que depenen de E_r i a l'altra els que depenen de E_i i treure'n factor comú:

$$E_r \cos \theta_i + \frac{n_1}{n_2} E_r \cos \theta_t = -E_i \cos \theta_i + \frac{n_1}{n_2} E_i \cos \theta_t \quad (87a)$$

$$\left(\cos \theta_i + \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_t \right) E_r = \left(-\cos \theta_i + \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_t \right) E_i \quad (87b)$$

I d'aquí trobem l'expressió següent:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{-\cos \theta_i + \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_t}{\cos \theta_i + \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_t}$$

Per acabar, podeu “arreglar-la” una mica si multipliqueu a dalt i a baix per n_2 , i obtindreu la primera de les relacions que estàvem buscant:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{-n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \quad (88)$$

Determinació de l'amplitud de l'ona transmesa

Per tal de trobar la segona relació (E_r/E_i), heu d'aïllar el valor de E_r a l'equació $n_1(E_i - E_r) = n_2E_t$ (83):

$$E_r = E_i - \frac{n_2E_t}{n_1} \quad (89)$$

I ara substituiu E_r a l'equació (84):

$$\left(E_i + E_i - \frac{n_2E_t}{n_1} \right) \cos \theta_i = E_t \cos \theta_t \quad (90)$$

Com abans, podeu agrupar en una banda els termes dependents de E_t i a l'altra, els de E_i i treure'n factor comú:

$$\begin{aligned} -\frac{n_2}{n_1} E_t \cos \theta_i - E_t \cos \theta_t &= -2E_i \cos \theta_i \\ \left(\frac{n_2}{n_1} \cos \theta_i + \cos \theta_t \right) E_t &= (2 \cos \theta_i) E_i \end{aligned} \quad (91)$$

I d'aquí trobem l'expressió següent:

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2 \cos \theta_i}{\frac{n_2}{n_1} \cos \theta_i + \cos \theta_t}$$

Podeu multiplicar a dalt i a baix per n_1 i obtindreu la segona de les relacions que estàvem buscant:

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \quad (92)$$

De forma anàloga a com hem vist per al cas de la polarització perpendicular, podeu comprovar que les relacions (88) i (92) demostren que es poden determinar, en tot moment, els quocients entre les amplituds de les ones reflectida i incident, i de les ones transmesa i incident, respectivament, si es coneixen únicament els índexs de refracció dels dos medis (n_1 i n_2) i l'angle d'incidència (θ_i). Pel que fa al valor de θ_t que apareix a (92), es pot obtenir a partir de la llei de Snell (49).

Aquests quocients s'anomenen **coeficients de Fresnel per a polarització paral·lela**, i es simbolitzen, de forma respectiva, r_p per a l'ona reflectida i t_p per a l'ona transmesa.

Vegeu el procediment per a polarització perpendicular al subapartat 3.2.2 d'aquest mòdul.

Els coeficients de Fresnel de reflexió (r_p) i transmissió (t_p) per a polarització paral·lela són:

$$r_p = \frac{E_r}{E_i} = \frac{-n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \quad (93)$$

$$t_p = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \quad (94)$$

on θ_i i θ_t són els angles d'incidència i transmissió, respectivament, i n_1 i n_2 són els índex de refracció dels dos medis.

Determinació de les intensitats

Els coeficients de Fresnel (r_p) i (t_p) expressen la relació entre les **amplituds** de les ones reflectida i transmesa respecte a l'amplitud de l'ona incident. Tal com heu vist per a la polarització perpendicular, també podeu definir la reflectància (R_p) i la transmitància (T_p) com el quocient entre les intensitats de les ones:

$$R_p = \frac{I_r}{I_i}$$

$$T_p = \frac{I_t}{I_i} \quad (95)$$

Recordeu que el valor de la reflectància (R_p) correspon al quocient dels quadrats de les amplituds de les ones reflectida i incident:

$$R_p = \frac{I_r}{I_i} = \frac{E_r^2}{E_i^2} \quad (96)$$

Per tant:

$$R_p = r_p^2 \quad (97)$$

La **reflectància** (R_p) per a una ona electromagnètica polaritzada amb el camp elèctric (\vec{E}) **paral·lel** al pla d'incidència és:

$$R_p = \frac{I_r}{I_i} = r_p^2 = \left(\frac{-n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right)^2 \quad (98)$$

on n_1 i n_2 són els índex de refracció dels medis 1 i 2, θ_1 i θ_2 són els angles d'incidència i transmissió, respectivament, i r_s és el coeficient de Fresnel de reflexió per a polarització paral·lela.

Vegeu el procediment per a polarització perpendicular al subapartat 3.2.2 d'aquest mòdul.

Per a trobar el valor per a la transmitància (T_p) heu d'aplicar la relació $T_p = 1 - R_p$:

$$T_p = 1 - \left(\frac{-n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right)^2 \quad (99)$$

Després de fer algunes operacions, acabareu obtenint l'expressió següent:

$$T_p = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left(\frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right)^2 \quad (100)$$

Podeu comprovar, a partir de l'expressió (94), que el contingut de l'interior del parèntesi correspon al valor de t_p . Per tant,

$$T_p = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_p^2 \quad (101)$$

Per a una ona electromagnètica amb **polarització perpendicular** i que incideix sobre una interfície entre dos medis, la **transmitància (T_s)** és el quocient entre les **intensitats** de l'ona transmesa i de l'ona incident:

$$T_p = \frac{I_t}{I_i} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_p^2 = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left(\frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right)^2 \quad (102)$$

on n_1 i n_2 són els índex de refracció dels medis 1 i 2, θ_i i θ_t són els angles d'incidència i transmissió, respectivament, i t_p és el coeficient de Fresnel de transmissió.

Ja hem estudiat els dos casos que considerem com a "bases". A la taula 3.3 podeu visualitzar de forma conjunta els coeficients que acabem d'estudiar per als dos casos.

Taula 3.3

	Polarització perpendicular al pla d'incidència	Polarització paral·lela al pla d'incidència
coeficient de Fresnel de reflexió (r)	$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$	$r_p = \frac{-n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}$
coeficient de Fresnel de transmissió (t)	$t_s = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$	$t_p = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}$
Reflectància $R = r^2$	$R_s = \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2$	$R_p = \left(\frac{-n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right)^2$
Transmitància $T = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t^2$	$T_s = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left(\frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2$	$T_p = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left(\frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right)^2$

Per a totes les expressions, n_1 i n_2 són els índexs de refracció respectius dels medis 1 i 2, i θ_i i θ_t són els angles d'incidència i de refracció. Recordeu que els angles sempre es mesuren respecte a la perpendicular al pla de la interfície.

Anteriorment ja vàrem veure que qualsevol ona electromagnètica es pot considerar com una combinació de diverses ones amb polaritzacions lineals en direccions diferents, com per exemple aquests dos casos que hem estudiat. Així doncs, el coneixement del comportament per separat de les polaritzacions perpendicular i paral·lela ens permet determinar de forma completa el comportament de qualsevol ona en una interfície de canvi de medi.

Val la pena estudiar un cas particular per a les expressions anteriors: el d'una ona que es propaga en una direcció perpendicular a la interfície de canvi de medi. Aquest cas s'anomena de forma habitual **incidència normal**. Els motius per a estudiar-lo són:

- És un cas força habitual.
- Les expressions se simplifiquen considerablement.
- Ajuda a entendre bé els conceptes de reflectància i transmitància.

Per a determinar les expressions corresponents a aquest cas, simplement cal agafar el cas general per a la polarització perpendicular de la taula 3.3 i fer la substitució $\theta_i = 0$ i $\theta_t = 0$ (aquest últim valor s'obté a partir del d'incidència mitjançant la llei de Snell (49)).

Taula 3.4

	Expressió per al cas general		Coefficients per a incidència normal ($\theta = 0$)
coeficient de Fresnel de reflexió (r)	$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$	\Rightarrow	$r_n = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$
coeficient de Fresnel de transmissió (t)	$t_s = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$	\Rightarrow	$t_n = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$
Reflectància $R = r^2$	$R_s = \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2$	\Rightarrow	$R_n = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$
Transmitància $T = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t^2$	$T_s = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left(\frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2$	\Rightarrow	$T_n = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2$

Podeu comprovar que, igual que en els casos que hem estudiat anteriorment, en aquest cas particular també es compleix que $R_n + T_n = 1$ per a qualsevol valor de n_1 i n_2 .

Exemple de determinació de les intensitats

Sobre un vidre ($n \approx 1,5$) hi incideix, perpendicularment, un feix de radiació electromagnètica d'intensitat 50 W/m². Calculeu:

- La intensitat de la radiació reflectada.
- La intensitat de la radiació transmesa a l'interior del vidre.

Vegeu la polarització a l'apartat 2 d'aquest mòdul.

$\theta = 0^\circ$ o $\theta = 90^\circ$?

Recordeu que en l'estudi de la reflexió i transmissió, els angles sempre es mesuren respecte a la perpendicular a la interfície. Per tant, en el cas d'incidència normal, l'angle és $\theta = 0$.

Vegeu la reflexió i transmissió d'ones polaritzades als subapartats 3.2.2 i 3.2.3 d'aquest mòdul.

Solució

Si llegiu bé l'enunciat del problema, podeu veure que es tracta d'una ona electromagnètica que incideix de forma perpendicular. Així doncs, farem servir les expressions corresponents al cas d'incidència normal ($\theta = 0$).

D'altra banda, atès que tant les dades de què disposem com les que se'ns demana trobar són totes elles magnituds d'intensitat, vol dir que haurem de treballar amb la reflectància (R_n), per a la radiació reflectida, i la transmitància (T_n), per a la radiació transmesa.

a) El primer que hem de fer és determinar la reflectància per a incidència normal corresponent a la interfície. Com que l'enunciat no ens diu res al respecte, suposarem que el medi 1 és l'aire ($n_1 \approx 1$). Fem el càlcul a partir de l'expressió de la taula 3.4:

$$R_n = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left(\frac{1 - 1,5}{1 + 1,5} \right)^2 = 0,04 \quad (103)$$

De la definició de reflectància (73), podeu deduir que la intensitat de la radiació reflectida serà:

$$I_R = R_n I_0 = 0,04 \cdot 50 = 2 \text{ W/m}^2 \quad (104)$$

b) Per a la determinació de la radiació transmesa, procedim de forma anàloga però ara amb el valor de la transmitància:

$$T_n = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 = \frac{1,5}{1} \left(\frac{2}{1 + 1,5} \right)^2 = 0,96 \quad (105)$$

També podríem haver-la determinat mitjançant la propietat $R_n + T_n = 1$:

$$T_n = 1 - R_n = 1 - 0,04 = 0,96 \quad (106)$$

Com en el punt (a), podem determinar la intensitat de la radiació transmesa a partir de la intensitat incident i el valor de la transmitància:

$$I_T = T_n I = 0,96 \cdot 50 = 48 \text{ W/m}^2 \quad (107)$$

Podeu comprovar que la suma dels resultats dels dos apartats dona la intensitat total (50 W/m^2).

Ja hem vist els coeficients de Fresnel (r i t) i els conceptes de reflectància (R) i transmitància (T). Hem vist que tots aquests paràmetres depenen de:

- els índexs de refracció del dos medis (n_1 i n_2),
- l'angle d'incidència de l'ona (θ_i).

L'angle de transmissió (θ_t), com ja hem dit diverses vegades, no el tenim en compte perquè ve determinat directament per l'angle d'incidència, mitjançant la llei de Snell (49): $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$.

Tot seguit, analitzarem els coeficients de la taula 3.3 i veurem com els afecten tant els índexs de refracció com l'angle d'incidència. Començarem per estudiar un fenomen que depèn només de la polarització, l'angle de Brewster; i continuarem amb un cas que només es dona quan $n_1 > n_2$ i que ja heu vist anteriorment, l'angle crític.

3.2.4. Angle de Brewster

A partir de les expressions dels coeficients de Fresnel (r i t) i de la reflectància (R) i la transmitància (T) de la taula 3.3, podem estudiar la relació entre les in-

Vegeu l'angle crític i la reflexió interna total al mòdul "Optica".



tensitats o les amplituds de les ones incident, reflectida i transmesa per a una interfície entre dos medis no conductors i per a qualsevol angle d'incidència.

Centrarem l'anàlisi en l'expressió per a la reflectància (R), ja que és el paràmetre més interessant i a partir del qual es dedueix la resta. Aquests altres paràmetres es poden calcular de forma directa a partir de les relacions (74), (73), (o (98)) i (79) (o (102)), que us tornem a recordar:

$$T = 1 - R \quad (108)$$

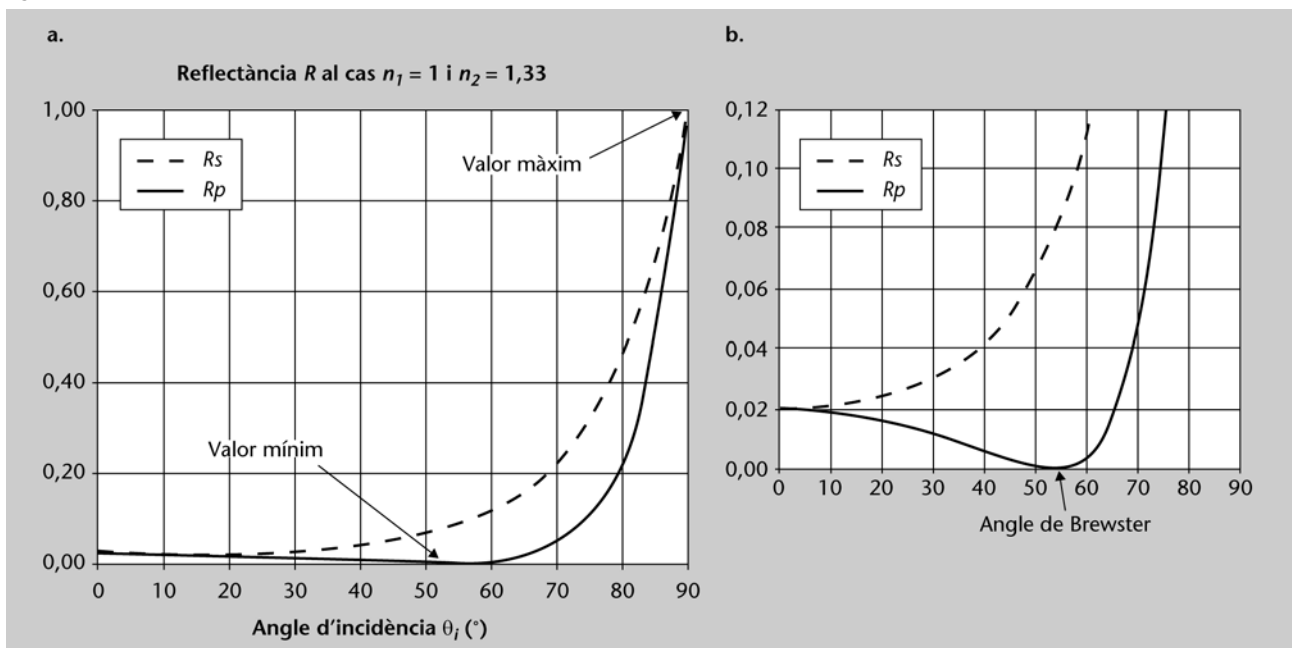
$$r = \sqrt{R} \quad (109)$$

$$t = \sqrt{\frac{n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_t}} T \quad (110)$$

Tot seguit estudiarem com és la reflectància (R) per al cas particular en què l'índex de refracció del primer medi és inferior al del segon ($n_1 < n_2$) (l'estudi és equivalent a fer-ho per a $n_1 > n_2$, però aquest segon cas el deixem per a més endavant). Un exemple d'aquest cas en què $n_1 < n_2$ podria ser una ona que es propaga per l'aire ($n_1 \approx 1$) i entra a l'aigua ($n_2 \approx 1,33$).

A la figura 13 us mostrem gràficament la reflectància en funció de l'angle d'incidència (θ_i) per a aquest exemple, tant per a la polarització perpendicular (R_s) com paral·lela (R_p).

Figura 13



Si observeu les corbes tant de la polarització perpendicular (R_s) com de la paral·lela (R_p) a la figura 13a, podeu comprovar que, en tots dos casos, els valors màxims de la reflectància es troben per a angles propers a $\theta \approx 90^\circ$. Aquesta situació s'anomena *incidència rasant*, i en ella l'ona incident es propaga de forma paral·lela a la interfície. Per a angles propers a aquesta regió, la reflectància

Vegeu la reflexió i transmissió d'ones polaritzades als subapartats 3.2.2 i 3.2.3 d'aquest mòdul.

Recordeu

L'angle d'incidència (θ_i) és l'angle que forma la direcció de propagació de l'ona amb el pla d'incidència, no amb el pla de la interfície

Figura 13

- Reflectància en funció de l'angle d'incidència per al cas ($n_1 < n_2$).
- Ampliació de la regió prop a l'angle de Brewster.

és gran i la transmitància es fa gairebé nul·la. Aquest és el motiu pel qual, per exemple, un llac molt tranquil actua com un mirall quan el mirem des de la seva mateixa altura i, en canvi, no succeeix el mateix quan l'observem des de més amunt.

Però si us fixeu de nou en la mateixa figura, veureu que també hi ha un valor mínim de la reflectància. On es troba aquest valor mínim? I encara més, podem arribar a trobar algun angle per al qual la reflectància es faci 0? La figura 13b mostra una ampliació de la regió propera a aquest mínim.

Observeu primer la corba per a la polarització perpendicular (R_s). Podeu veure que el valor mínim correspon al cas $\theta \approx 0^\circ$, anomenat d'incidència normal o perpendicular, però així i tot, el valor de la reflectància no arriba fer-se 0. La conseqüència és que sempre hi haurà una part de l'ona que es veurà reflectida, és a dir, no tindrem mai una transmissió completa ($T_s < 1$).

Per contra, si us fixeu en la corba per a polarització paral·lela (R_p) observareu que el mínim en la reflectància ja no correspon a l'angle $\theta \approx 0^\circ$, sinó que existeix un altre angle d'incidència per al qual no només la reflectància és mínima, sinó que fins i tot es fa zero (figura 13b). Aquest angle "especial" s'anomena **angle de Brewster**.

L'angle de Brewster és un concepte nou que no havíeu vist, ja que els seus efectes s'obtenen a partir de la polarització de l'ona. És a dir, l'angle de Brewster no es pot mostrar des d'un punt de vista purament fenomenològic com el que havíem fet servir anteriorment, en el cas de l'òptica geomètrica.

Determinem, doncs, el valor exacte de l'angle de Brewster. Us heu de fixar en l'expressió per a la reflectància R_s de la taula 3.3:

$$R_p = \left(\frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \right)^2 \quad (111)$$

L'angle de Brewster correspon al valor de θ_i per al qual la reflectància és nul·la, és a dir, l'angle per al qual el numerador de l'expressió (111) es fa zero. Aquest angle es pot trobar a partir de l'anomenada **lleï de Brewster**:

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (112)$$

Com podeu comprovar, el valor exacte de l'angle de Brewster depèn únicament dels índexs de refracció dels dos medis implicats.

$$\theta \approx 90^\circ \text{ o } \theta = \frac{\pi}{2} ?$$

Recordeu que la forma més adequada de mesurar els angles és en radians, ja que és així com estan definides les funcions matemàtiques.

Tanmateix, en aquest text farem una excepció per als angles geomètrics i els especificarem en graus sexagesimals ($^\circ$), ja que és com se sol fer en el món quotidià.

Això sí, només ho farem per als angles geomètrics, mai en els desfasaments ja que, en aquest cas, s'haurien de fer servir els radians.

Activitat

Deduïu la llei de Brewster a partir de $n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i = 0$. Recordeu que θ_i i θ_t es relacionen a través de la llei d'Snell. Ajuda: $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$.

L'**angle de Brewster** (θ_B) és l'angle d'incidència per al qual la reflectància corresponent a la polarització paral·lela a l'eix d'incidència (R_p) es fa zero i només es reflecteix la component perpendicular. Per tant, per a aquest angle, l'ona reflectida sempre presentarà polarització perpendicular.

El seu valor exacte depèn només dels valors dels índexs de refracció dels dos medis implicats i es pot trobar mitjançant la **llei de Brewster**:

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (113)$$

on n_1 i n_2 són els índexs de refracció dels medis.

Exemple de l'angle de Brewster

Determineu l'angle de Brewster per a la interfície entre l'aire ($n \approx 1$) i l'aigua ($n \approx 1,33$).

Solució

Per a trobar l'angle de Brewster per a la interfície aire-aigua, heu de fer servir la llei de Brewster (113):

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

Només cal substituir els valors de n_1 i n_2 corresponents ($n_1 \approx 1$ i $n_2 \approx 1,33$):

$$\tan \theta_B = \frac{1,33}{1} \Rightarrow \theta_B = \arctan 1,33 = 53^\circ$$

En resum, una ona amb polarització lineal paral·lela al pla d'incidència i que incideix sobre una interfície entre dos medis amb un angle d'inclinació igual a l'angle de Brewster (θ_B) corresponent, tindrà reflectància nul·la i, per tant, es transmetrà completament.

Però què succeeix si l'ona incident no presenta aquest tipus de polarització? Per exemple, suposeu una ona "no polaritzada". Recordeu que en realitat això vol dir que l'ona presenta polarització en infinites direccions. Recordeu també que una polarització lineal en qualsevol direcció de polarització es pot representar com una combinació de polarització paral·lela i polarització perpendicular. Quan aquesta ona incideix amb l'angle de Brewster (θ_B) la seva component paral·lela no es veurà reflectida mentre que la component perpendicular sí. Per tant, l'ona reflectida només presentarà polarització perpendicular.

Un cop hem estudiat el comportament en el cas $n_1 < n_2$ passem tot seguit a analitzar el cas contrari: una interfície en què $n_1 > n_2$. Veureu que apareix un fenomen nou que ja us vàrem descriure anteriorment i que ara explicarem més detalladament.

Vegeu la polarització a l'apartat 2 d'aquest mòdul.

Vegeu l'angle crític al mòdul "Òptica".

3.2.5. Angle crític

Podem aplicar el mateix procediment que hem seguit anteriorment per a determinar el comportament d'una ona en el cas en què l'índex de refracció del primer medi és més gran que el del segon ($n_1 > n_2$). Un exemple d'aquest cas és la mateixa interfície entre l'aigua ($n \approx 1,33$) i l'aire ($n \approx 1$) que hem vist abans, però ara vista "des de l'altra banda" (des de dins de l'aigua).

Vegeu el procediment per a l'angle de Brewster al subapartat 3.2.4 d'aquest mòdul.

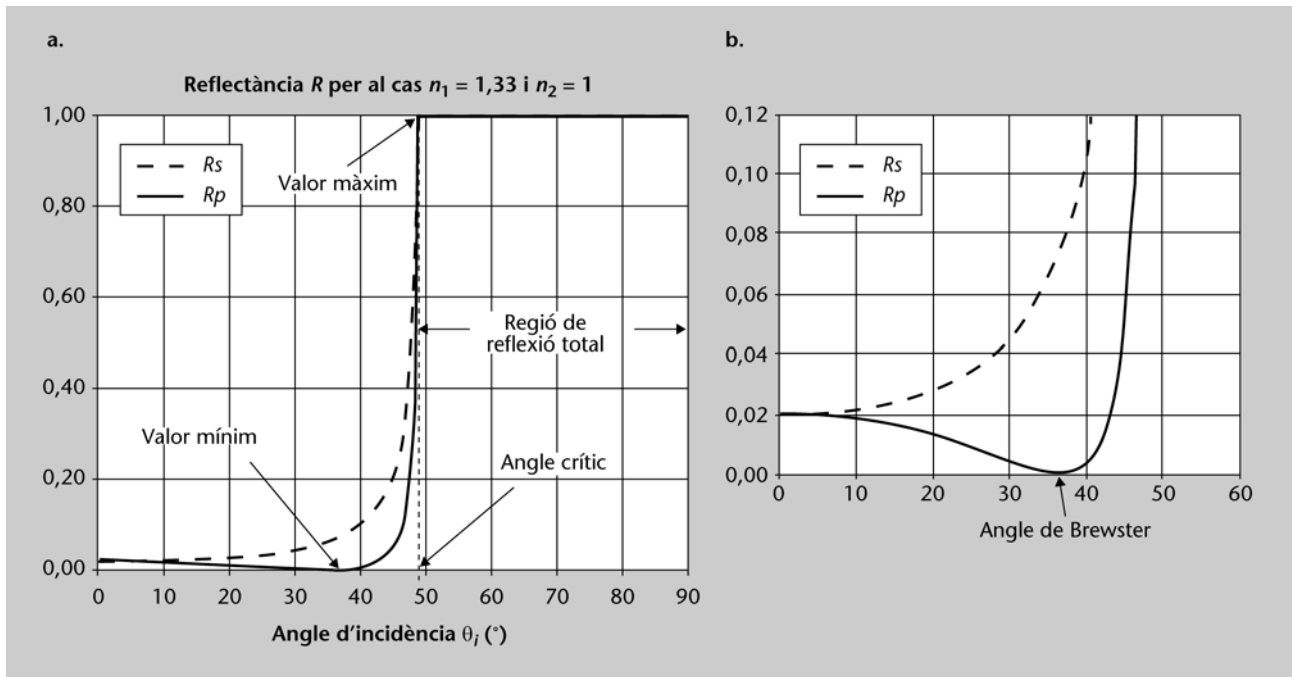
Com abans, estudiarem només el valor de la reflectància, ja que la resta de coeficients es troben a partir d'aquesta. Analtzem com evoluciona la reflectància en funció de l'angle d'incidència (θ_i) segons les expressions de la taula 3.3:

$$R_s = \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2$$

$$R_p = \left(\frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \right)^2 \quad (114)$$

Tal com hem fet en el cas anterior, us presentem la figura 14, on hem representat de forma gràfica les expressions per a les reflectàncies (114). Hem fet servir com a exemple la interfície entre l'aigua ($n_1 \approx 1,33$) i l'aire ($n_1 \approx 1$). Noteu que, a diferència del cas de l'angle de Brewster, aquí l'ona va en sentit contrari, és a dir, de l'aigua a l'aire.

Figura 14



Fixeu-vos que la forma de les corbes és molt similar al cas $n_1 < n_2$ (figura 13) i, fins i tot, tornem a trobar l'angle de Brewster (això sí, ara amb un valor inferior a l'altre cas). Però el fenomen més rellevant el trobem per a un angle més gran.

En efecte, podeu observar com hi ha tota una regió, a partir d'un angle determinat, on la reflectància és 1. És a dir, existeix un angle límit a partir del qual

Figura 14

a. Reflectància en funció de l'angle d'incidència per al cas $n_1 > n_2$.
b. Ampliació de la regió prop a l'angle de Brewster

tota l'ona es reflecteix i ja no hi ha ona transmesa. Aquest angle s'anomena **angle crític**, **angle límit** o **angle de reflexió total**.

La determinació del valor exacte de l'angle crític es pot fer a partir de qualsevol de les equacions (114). Només cal imposar $R_s = 1$ (o bé $R_p = 1$):

$$R_s = \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2 = 1 \quad (115)$$

La solució de l'equació (115) ens dóna la relació per a trobar l'angle crític (θ_c):

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (116)$$

No hem detallat el procés de resolució de l'equació (116) perquè queda més enllà dels objectius de l'assignatura, i hem passat directament al resultat. Sí que us direm que ha calgut aplicar la llei de Snell (49), $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, i la identitat trigonomètrica $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

Activitat

Obtingueu l'equació (116).

L'**angle crític**, **angle límit** o **angle de reflexió total** (θ_c) és l'angle d'incidència a partir del qual una ona que incideix sobre una interfície de separació de dos medis es reflecteix de forma total i no es transmet cap a l'altre medi. El seu valor depèn només dels valors dels índexs de refracció dels dos medis implicats:

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (117)$$

on n_1 i n_2 són els índexs de refracció respectius dels dos medis.

L'angle límit només apareix quan el l'índex de refracció del primer medi és més gran que el del segon ($n_1 > n_2$).

Com podeu comprovar, la relació (117) és la mateixa que ja vàreu veure anteriorment, en el cas de l'òptica geomètrica.

Vegeu l'angle crític i la reflexió interna total al mòdul "Optica".



Com en el cas de l'angle de Brewster, el valor específic de l'angle crític depèn únicament dels índexs de refracció respectius dels medis implicats (n_1 i n_2). El significat físic d'aquest angle és que una ona que incideix sobre una interfície de separació de medis amb un angle d'incidència més gran que l'angle crític corresponent, pateix l'efecte de la reflexió total i no es transmet cap al segon medi. Un

exemple d'aquest fenomen el podeu trobar si observeu la superfície de l'aigua vista des de sota. Per a certs angles, la superfície apareix com un mirall.

L'existència d'un angle crític és una propietat molt interessant que es fa servir en multitud d'aplicacions. Una de les més comunes és en el disseny de fibres òptiques, on el que interessa és que la llum que s'hi propaga es reflecteixi internament de forma indefinida.

Exemple d'angle crític

Determineu l'angle crític per a la interfície entre l'aigua ($n \approx 1,33$) i l'aire ($n \approx 1$).

Solució

Per determinar l'angle crític heu de fer servir la relació (117):

$$\sin \theta_c = \frac{n_1}{n_2}$$

Si substituïu els valors dels índexs de refracció corresponents a l'aigua ($n_1 \approx 1,33$) i l'aire ($n_2 \approx 1$), tindreu:

$$\sin \theta_c = \frac{1}{1,33} = 0,75 \quad (118)$$

Per acabar, calculeu l'angle crític a partir del resultat (118):

$$\theta_c = \arcsin 0,75 = 49^\circ$$

3.3. Què hem après?

En aquest apartat hem estudiat els comportament de les ones quan incideixen sobre una interfície entre dos medis.

Per començar hem vist les "bases" per a aquest estudi, les condicions de frontera, és a dir, les condicions que els camps elèctric i magnètic han de satisfer obligatòriament a les regions properes a les interfícies entre dos medis. Aquestes condicions són conseqüència directa de les lleis de Maxwell que vàrem veure en el mòdul corresponent, tot i que aquí les hem mostrat des d'un punt de vista més intuïtiu.

A continuació hem analitzat el comportament de les ones en travessar una interfície i hem deduït les mateixes lleis de reflexió i refracció que vàreu veure anteriorment, però ara amb més detall i des d'un punt de vista de les ones electromagnètiques.

Durant l'estudi hem comprovat que existeixen diferències en el comportament entre una ona i una altra segons la seva polarització i, per tant, hem dividit l'anàlisi en dos casos: un per a una ona amb polarització lineal i amb el camp elèctric perpendicular al pla d'incidència i l'altre amb el camp elèctric paral·lel. Aquests dos casos són la "base" a partir de la qual es pot estudiar el comportament general.

Vegeu les lleis de reflexió i de refracció de la llum al mòdul "Òptica".



També durant l'estudi hem trobat que existeixen alguns angles concrets per als quals es produeixen uns comportament específics. És el cas de l'angle de Brewster, que correspon a l'únic angle d'incidència per al qual una ona podria transmetre's completament i no reflectir-se. I també és el cas de l'angle crític, angle a partir del qual succeeix precisament el contrari, és a dir, l'ona es reflecteix completament i no hi ha transmissió.

4. Reflexió i transmissió per una capa prima: interferència

Fins aquí hem estudiat la propagació de les ones electromagnètiques i el seu comportament en trobar-se amb una interfície entre dos medis materials diferents. Ja tenim, doncs, les “eines” necessàries per a poder analitzar algunes configuracions concretes que es troben de forma habitual en moltes aplicacions quotidianes.

Vegeu la propagació de les ones electromagnètiques als apartats 1 i 2 d'aquest mòdul.
Vegeu el seu comportament en trobar-se una interfície e a l'apartat 3 d'aquest mòdul.

Si recordeu, quan vàrem deduir els coeficients de Fresnel i els conceptes de reflectància i transmitància vàrem establir una sèrie de condicions per a simplificar el càlcul. Una d'elles feia referència a que les dues bandes de la interfície tenien una extensió infinita. Però què succeiria si aquesta suposició no fos certa, és a dir, si el segon medi tingués un gruix determinat?

Vegeu els coeficients de Fresnel al subapartat 3.2 d'aquest mòdul.

Aquesta configuració s'anomena **capa prima** i, tal com podeu observar a la figura 17, es tracta d'un sistema amb tres medis material involucrats: el medi d'“entrada”, el medi de l'interior de la capa i el medi de “sortida”. També podeu observar que en el sistema hi ha presents dues interfícies de canvi de medi.

Les capes primes són molt habituals en moltes aplicacions dels àmbits de la telecomunicació i de l'òptica, ja que, com veureu en aquest apartat, una de les seves propietats és que produeixen interferències. Aquest fenomen, que ja us vàrem introduir aplicat a ones mecàniques, és el fonament en què es basen bona part dels mecanismes per a separar o filtrar ones de diferent longitud d'ona.

Vegeu les interferències aplicades a ones mecàniques al mòdul “Ones”.

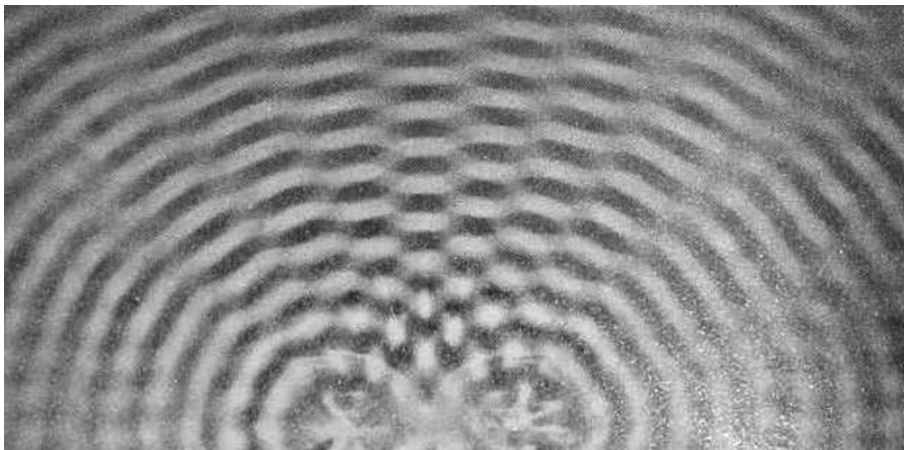
En aquest apartat estudiarem el comportament d'una ona electromagnètica quan travessa una capa prima i com varia en funció de les característiques tant de la capa com de l'ona mateixa. Abans, però, tornarem a explicar el concepte d'interferència en una ona.

4.1. Concepte d'interferència

Abans d'entrar en l'estudi de les interferències degudes a una capa prima, és necessari recordar-vos el concepte d'interferència. Aquest fenomen ja el vàreu veure i per a explicar-vos millor en què consisteix començarem amb un exemple. A la figura 15 podeu observar dues ones circulars amb fonts molt properes i que interfereixen entre sí.

Vegeu el concepte d'interferència al mòdul “Ones”.

Figura 15

**Figura 15**

Exemple d'interferències creades per dues ones circulars

La figura mostra les interferències creades per l'acció conjunta de dues ones (en aquest cas, circulars) de les mateixes característiques però provinents de dues fonts independents. Les zones clares representen els màxims en l'amplitud de l'ona, mentre que les zones fosques representen els mínims. A la imatge podeu comprovar que existeixen punts on l'amplitud és **sempre** màxima i d'altres on és sempre mínima. No els heu de confondre amb els màxims i mínims de les ones. Aquests últims es desplacen a mesura que l'ona es propaga, mentre que els punts en qüestió romanen en posicions determinades i fixes, que depenen de factors geomètrics.

L'explicació de l'existència d'aquests punts rau en què, atès que la distància que ha de recórrer cadascuna de les ones des del seu respectiu origen fins arribar al punt en qüestió és diferent, també ho serà el seu desfasament.

Anteriorment us vàrem introduir el principi de superposició, que deia que la magnitud de l'ona resultant de la superposició de dues ones és la suma algebraica de les magnituds de cadascuna en aquell instant. Aquesta suma es fa tenint en compte també el signe de les magnituds, de tal manera que si una ona arriba amb la seva magnitud positiva i l'altra ho fa amb la magnitud negativa, es compensaran de forma parcial o fins i tot total. Per tant, la magnitud de l'ona resultant en un punt i en un instant determinats depèn del desfasament amb què arriben les ones respectives. A aquest fenomen se l'anomena *interferència*.

Per a visualitzar aquest fenomen, val la pena analitzar els dos casos extrems: quan les ones arriben en fase entre elles i quan les ones arriben en contrafase. A la figura 16 us mostrem un exemple esquemàtic amb aquests dos casos.

Vegeu el principi de superposició al mòdul "Ones".



Figura 16

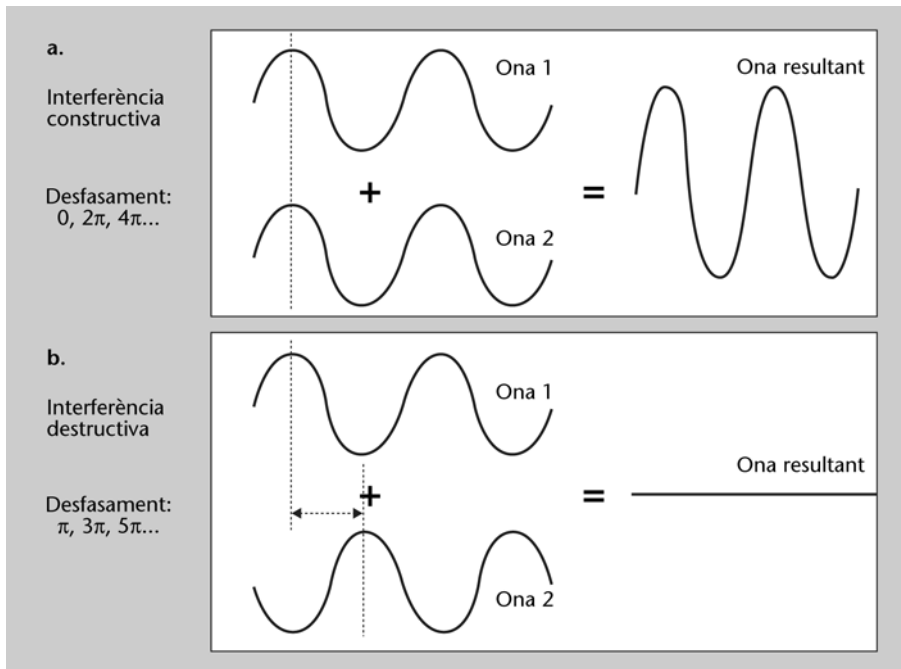


Figura 16

Explicació esquemàtica dels conceptes d'interferència:

- a) interferència constructiva
b) interferència destructiva

A la figura 16a, les dues ones estan completament **en fase**. Aquesta situació succeeix quan el desfasament és un múltiple parell de π ($0, 2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi$). En aquest cas, l'amplitud resultant és la suma de les dues amplituds. Diem que es tracta d'una **interferència constructiva**.

A la figura 16b les dues ones tenen **fases oposades**. Aquesta situació succeeix quan el desfasament és un múltiple senar de π ($0, 3\pi, \dots, (2n + 1)\pi$). En aquest cas, l'amplitud resultant és la diferència entre les dues amplituds. Diem que es tracta d'una **interferència destructiva**.

Recordeu

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sin(\theta + 2\pi) \\ \cos \theta &= \cos(\theta + 2\pi) \\ e^{j\theta} &= e^{j(\theta+2\pi)}\end{aligned}$$

per a qualsevol valor de θ

Es diu que en un punt on es propaguen dues ones de fonts diferents es produeix una **interferència constructiva** quan la diferència en el desfasament ($\Delta\varphi$) de totes dues és un múltiple **parell** de π :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 2n\pi \\ (\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots)\end{aligned}\quad (119)$$

En els punts on es compleix aquesta condició, l'amplitud d'oscil·lació és **màxima**.

Es diu que en un punt on es propaguen dues ones de fonts diferents es produeix una **interferència destructiva** quan la diferència en el desfasament ($\Delta\varphi$) de totes dues és un múltiple **senar** de π :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= (2n + 1)\pi \\ (\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots)\end{aligned}\quad (120)$$

En els punts on es compleix aquesta condició, l'amplitud d'oscil·lació és **mínima**.

Delta fi

Δ és la lletra grega delta majúscula i s'acostuma a usar per a indicar una diferència o un canvi en la magnitud a què acompanya.

Així, $\Delta\varphi$ indica una diferència de φ i es llegeix "delta fi".

En la resta de casos ens trobarem en un terme mitjà. Heu de tenir present que l'amplitud serà més gran com més s'apropi a un múltiple parell de π , i més petita com més s'apropi a un múltiple senar.

Un cop ja coneixeu el concepte d'interferència, podem procedir, ara sí, a l'estudi de les reflexions i transmissions successives que es produeixen en una capa prima.

4.2. Estudi de les reflexions i transmissions en una capa prima

Com ja vàrem veure, quan una ona incideix sobre una superfície de canvi de medi es genera una ona reflectida i una altra transmesa. En el cas d'una capa prima, un cop l'ona incident ha travessat la primera interfície, es troba amb una segona interfície, corresponent a l'altra cara de la capa prima.

A la figura 17 podeu visualitzar un exemple esquemàtic d'una capa prima de gruix l a l'interior de la qual hi ha un medi material B amb índex de refracció n . La capa està ubicada entre dos medis (A i C). Per a simplificar, suposarem que aquests medis A i C són l'aire, amb un índex de refracció molt proper al del buit ($n = 1$); també suposarem que el medi B és un medi no conductor que no presenta absorció.

Vegeu les ones reflectides i les ones transmeses a l'apartat 3 d'aquest mòdul.

Figura 17

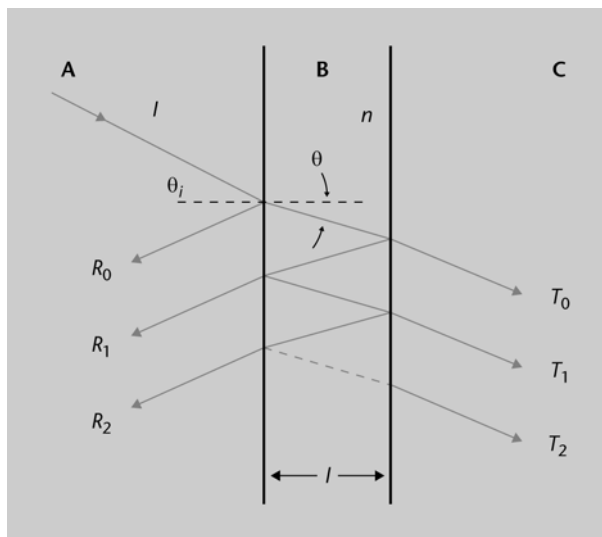


Figura 17

Esquema de les reflexions i transmissions successives en una capa prima

En el dibuix podeu veure una ona (I) que viatja per un medi material A. En incidir sobre la interfície de separació amb el medi B, es "divideix" en dues ones: una ona reflectida (R_0) que retorna cap al medi A i una ona transmesa que es propaga per l'interior de B amb un angle θ respecte a la perpendicular a la superfície.

L'ona que ha continuat el seu camí per l'interior de B ara es troba amb la segona interfície, la que separa B i C. En conseqüència, torna a generar dues no-

ves ones: una nova ona reflectida que “torna enrere” per l’interior de B i una ona transmesa (T_0) que continua el seu camí ja per l’exterior del medi C.

De la mateixa manera, l’ona que ja ha estat reflectida un cop i s’està propagant cap enrere per l’interior de B es retroba amb la primera interfície entre A i B per on ja ha passat abans, però ara ho fa en sentit contrari. De nou, podeu veure que tornen a generar-se dues ones: una nova ona reflectida que continua a l’interior de B i una ona (R_1) que travessa la interfície i continua el seu camí per l’exterior, A.

Aquest procés es repeteix de forma indefinida i es generen les ones R_2, R_3 , etc., en el medi A i T_1, T_2 , etc. en el medi C.

Limitarem l’anàlisi a l’últim grup d’ones (les del medi C), ja que són les que ens interessin. A partir de la figura 18 podeu deduir que les ones que es propaguen pel medi C (T_0, T_1, T_2, \dots) són totes paral·leles i la seva direcció de propagació és exactament la mateixa que la de l’ona incident inicial I (desplaçades lateralment, això sí).

Figura 18

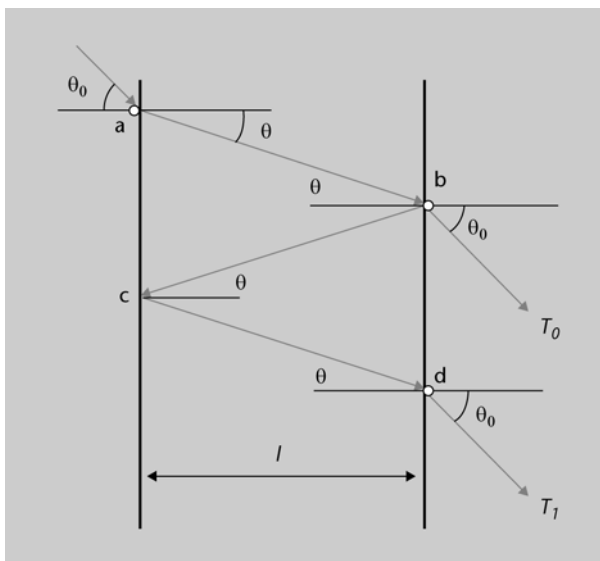


Figura 18

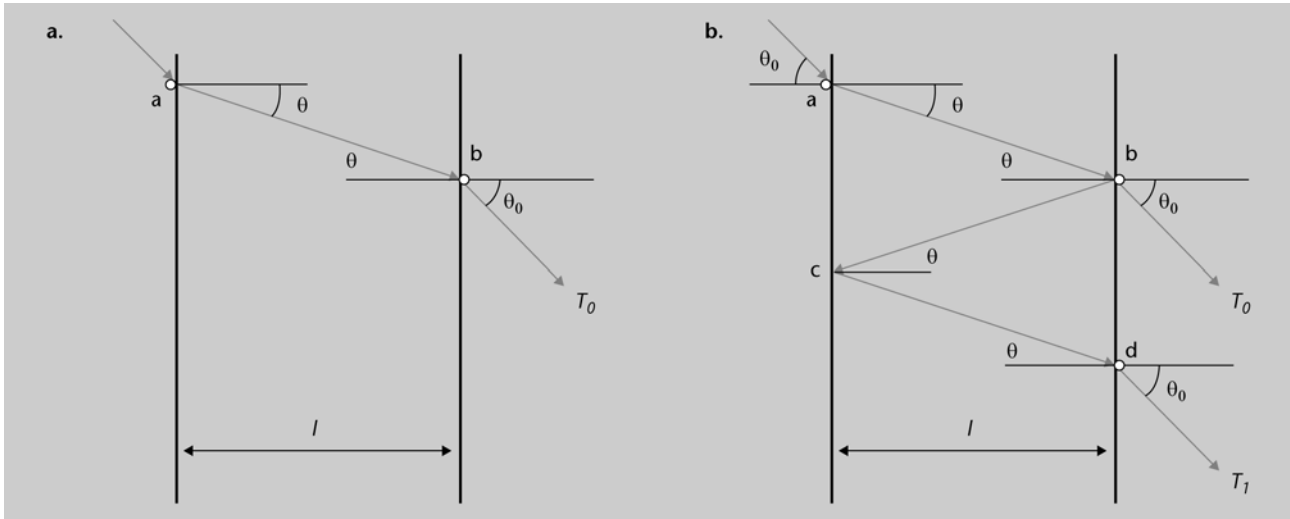
Esquema de les reflexions i transmissions successives en una capa prima. S’hi han inclòs els angles involucrats.

En efecte, si analitzeu bé la geometria de la imatge, podeu comprovar que tots els angles de les reflexions internes són iguals (θ). Per tant, i atès que els medis exteriors presenten el mateix índex de refracció ($n = 1$), els angles exteriors també han de ser iguals (θ_0).

Ara bé, ja sabem que apareix un nombre indefinit d’ones paral·leles i equidistants entre sí, però com són aquestes ones. Són totes iguals entre sí?

Per a respondre a aquesta pregunta, feu una ullada a la figura 19, on us mostrem els recorreguts que fan l’ona T_0 , que no ha patit cap reflexió interna (figura 19a), i l’ona T_1 , que ha patit dues reflexions internes (figura 19b).

Figura 19

**Figura 19**

Comparativa dels recorreguts de les ones T_0 i T_1 .

Podeu comprovar que totes dues ones fan una part del recorregut compartit, en concret fins el punt **b**. A partir d'aquí, l'ona T_1 farà un recorregut "de més" respecte a l'ona T_0 . Tot seguit analitzarem per separat com afecta aquest recorregut a la intensitat i l'amplitud de l'ona, d'una banda, i al seu desfasament, de l'altra.

Intensitat i amplitud

Al llarg del recorregut entre **b** i **d**, l'ona T_1 pateix dues reflexions internes i, per tant, la seva intensitat es veurà reduïda un cert factor degut a aquestes reflexions. Si recordeu, anteriorment (equacions (73) o (98)) us vàrem introduir el concepte de reflectància com el quocient entre les intensitats de les ones reflectida i incident:

$$R = \frac{I_r}{I_i} \quad (121)$$

on I_i i I_r són les intensitats de les ones incident i reflectida, respectivament.

Per tant, la reducció de la intensitat de l'ona T_1 respecte a la de T_0 a causa de la distància addicional recorreguda entre **b** i **d** és:

$$\frac{I_1}{I_0} = R \cdot R = R^2 \quad (122)$$

on I_0 i I_1 són les intensitats de les ones T_0 i T_1 , i R és la reflectància de les dues interfícies entre el medi interior B i els medis exteriors A i C. Fixeu-vos que hem multiplicat per R dos cops perquè hi ha hagut dues reflexions.

El mateix raonament es podria aplicar a les successives ones T_2, T_3, \dots Per a una hipotètica ona T_m , la reducció de la intensitat a causa de les successives reflexions internes seria:

$$\frac{I_m}{I_0} = R^{2m} \quad (123)$$

Vegeu el concepte de reflectància al subapartat 3.2 d'aquest mòdul.

on I_0 i I_m són les intensitats de les ones T_0 i T_m , i R és la reflectància de les dues interfícies entre el medi interior B i els medis exteriors A i C. Noteu que l'exponent $2m$ és degut al fet que l'ona T_m ha sofert $2m$ reflexions a l'interior de la capa prima.

Per a trobar la reducció de l'amplitud heu de recordar que la intensitat és proporcional al quadrat de l'amplitud (consulteu l'equació (68)). Per tant, per a l'ona T_m , tindrem que:

$$\frac{A_m}{A_0} = \sqrt{R^{2m}} = R^m \quad (124)$$

on A_0 i A_m són les amplituds (tant del camp elèctric com del camp magnètic) de les ones T_0 i T_m i R és la reflectància de les dues interfícies entre el medi interior B i els medis exteriors A i C.

Desfasament

Hem deixat per al final, però, l'aspecte de l'ona més rellevant per al nostre propòsit: el seu desfasament. Si recordeu, hem iniciat aquest apartat introduint el concepte d'interferència i hem vist que aquesta era deguda al desfasament entre dues ones que arriben a un mateix punt en un cert instant. Per tant, és important deduir el desfasament de l'ona per a després poder-lo comparar amb el de la resta d'ones que s'han produït.

Anteriorment us vàrem explicar el concepte de desfasament i la seva relació amb la distància recorreguda per l'ona. Recordeu que el desfasament present en una ona degut al recorregut que ha efectuat en propagar-se en la direcció x és:

$$\varphi = k \cdot x \quad (125)$$

on k és la constant d'ona en el medi **interior** (B) i x és la distància recorreguda.

Per a calcular el desfasament φ degut a la propagació al llarg de tot el gruix de la capa prima, heu de determinar la distància recorreguda per a travessar-la. Observeu de nou la figura 19. Si l'ona s'estigués propagant en una direcció perpendicular a les interfícies, la distància recorreguda seria $x = l$. Però, atès que l'ona es propaga per l'interior amb un angle θ , la distància recorreguda serà $x = \frac{l}{\cos \theta}$, llavors:

$$\varphi = k \cdot \frac{l}{\cos \theta} \quad (126)$$

Podeu comprovar, a la figura 19b, que l'ona T_1 travessa la capa prima dues vegades. Per tant el desfasament serà dues vegades el de l'expressió (126):

$$\varphi = \frac{2kl}{\cos \theta} \quad (127)$$

Vegeu el concepte de desfasament al mòdul "Ones".

Recordeu

La constant d'ona k és un dels paràmetres d'una ona i està relacionada amb la seva freqüència (f) i la seva velocitat de propagació (v):

$$k = \frac{f}{v}$$

Per a una hipotètica ona T_m , el desfasament serà $2m$ vegades el de l'expressió (126):

$$\varphi = \frac{2mkl}{\cos \theta} \tag{128}$$

Tanmateix, no hem acabat aquí amb el desfasament, ja que hi ha una altra contribució al desfasament que també heu de tenir en compte. Si us fixeu en la figura 20a, el fet que les ones transmeses es propaguin en una direcció no perpendicular a la superfície fa que els punts de "sortida" no estiguin a la mateixa distància del front d'ona. Per què fos així, l'ona T_1 hauria de tenir el punt de sortida a e.

Figura 20

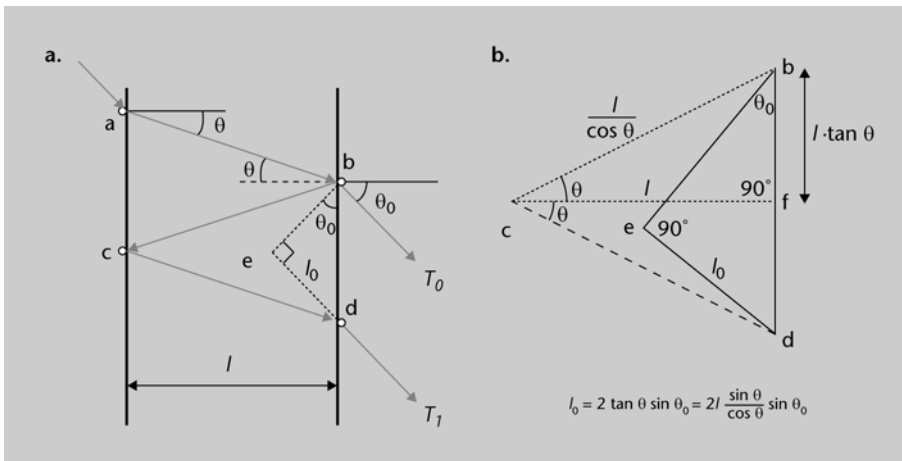


Figura 20
Comparativa dels recorreguts de les ones T_0 i T_1 .

En efecte, podeu comprovar com el punt **d** es troba avançat una distància l_0 respecte al punt **b**. Aquest avançament es tradueix en el càlcul del desfasament com un terme que cal **restar** al desfasament total que hem calculat fins ara:

$$\varphi = -k_0 l_0 \tag{129}$$

on k_0 és la constant d'ona en el medi **exterior** (C).

Per a determinar el valor exacte d'aquesta distància l_0 , cal que observeu l'esquema de la figura 20b. Si feu servir les relacions trigonomètriques que s'hi indiquen, podreu comprovar que el valor de l_0 és:

$$l_0 = 2l \cdot \tan \theta \sin \theta_0 \tag{130}$$

Si us hi fixeu, l'últim terme es pot substituir, mitjançant la llei de Snell (49), que ja hem vist, amb la consideració que el medi exterior és l'aire ($n_0 \approx 1$):

Vegeu la llei de Snell al subapartat 3.2 d'aquest mòdul.

$$\sin \theta_0 = n \sin \theta \tag{131}$$

on n és l'índex de refracció del medi interior (B).

Si substituïu la igualtat (131) dins de l'expressió per a l_0 (130) tindreu:

$$l_0 = 2nl \cdot \tan \theta \sin \theta \quad (132)$$

Per tant, el desfasament total de l'ona T_m serà la resta dels desfasaments deguts a (128) i a (132) combinats amb (129):

$$\varphi = \frac{2mkl}{\cos \theta} - k_0 2nl \tan \theta \sin \theta \quad (133)$$

Finalment, podeu expressar les constants d'ona k i k_0 en funció de la longitud d'ona (λ) de l'ona incident i dels índexs de refracció respectius:

$$k = \frac{2\pi n}{\lambda}; k_0 = \frac{2\pi n_0}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (134)$$

On n_0 correspon a l'índex de refracció de c que en el nostre cas és 1.

Si substituïu els valors de les igualtats (134) dins del desfasament total tindreu, finalment:

$$\varphi = 4\pi l \frac{n}{\lambda} \left(\frac{m}{\cos \theta} - \tan \theta \sin \theta \right) \quad (135)$$

Ja coneixem la variació en l'amplitud (124) i en el desfasament (135) que es produeix en l'ona T_m en travessar la capa prima. Podeu reunir tots dos conceptes en un únic factor:

$$\frac{A_m}{A_0} = R^m e^{j4\pi l \frac{n}{\lambda} \left(\frac{m}{\cos \theta} - \tan \theta \sin \theta \right)} \quad (136)$$

L'expressió (136) és poc pràctica, ja que hi intervé l'angle θ , que és l'angle de les reflexions internes i no es pot mesurar directament. Tanmateix, l'expressió es pot simplificar de forma considerable si suposem valors petits de θ . Aquesta és una situació molt habitual, ja que per a la majoria d'aplicacions en què es fan servir les capes primes, en general les ones hi incideixen de forma perpendicular i, per tant, es pot fer l'aproximació $\theta \approx 0$. Sota aquesta suposició podeu fer les substitucions següents:

$$\sin \theta \approx 0; \cos \theta \approx 1; \tan \theta \approx 0 \quad (137)$$

La reducció en les magnituds del camp elèctric (E) o del camp magnètic (B) d'una ona que es pateix m reflexions internes en una capa prima per a angles d'incidència molt petits ($\theta \approx 0$) és:

$$\frac{E_m}{E_0} = \frac{B_m}{B_0} \approx R^m e^{jm \frac{4\pi}{\lambda} nl} \quad (138)$$

Recordeu

1. la constant d'ona (k) és:

$$k = \frac{2\pi f}{v}$$

2. l'índex de refracció (n) d'un medi és:

$$n = \frac{c}{v}$$

3. i la relació entre la freqüència f i la longitud d'ona λ és:

$$f \cdot \lambda = c$$

Recordeu

Qualsevol nombre complex es pot representar de la forma $Ae^{j\alpha}$. Quan aquest nombre multiplica una ona, el factor A (mòdul) només modifica la seva amplitud, mentre que el factor $e^{j\alpha}$ (fasor), el que fa és modificar el seu desfasament.

on l és el gruix de la capa prima, n és l'índex de refracció del medi del seu interior, R és la reflectància entre el medi interior i el medi exterior i λ és la longitud d'ona de l'ona incident.

Hem vist que quan una ona electromagnètica incideix sobre una de les cares d'una capa prima, a l'altra banda es genera una sèrie indefinida d'ones paral·leles amb les mateixes característiques que l'ona inicial però amb valors d'amplitud i desfasament diferents.

Al principi de l'apartat hem introduït el concepte d'interferència i hem explicat que quan dues (o més) ones arriben a un punt amb amplitud i desfasament diferent, es produiran interferències. Aquest és precisament l'efecte que es busca en una capa prima.

El desfasament entre els diferents feixos que es produeixen depèn, segons l'expressió (138), de la longitud d'ona λ de l'ona incident (també depèn d'algunes característiques del dispositiu mateix, com ara el gruix l o l'índex de refracció del seu interior n , però aquestes són fixes). Per tant, el que trobarem és que algunes ones produiran interferència constructiva i unes altres produiran interferència destructiva, segons el valor de θ .

Els dispositius que es basen en aquesta configuració de capa prima s'anomenen interferòmetres de Fabry-Pérot i es fan servir per a la detecció o el filtratge d'ones amb unes longituds d'ona determinades.

4.3. Què hem après?

En aquest apartat hem vist el primer dels exemples de configuracions bàsiques, una capa prima d'un material dielèctric, i hem estudiat el comportament de les ones electromagnètiques quan hi incideixen.

Hem començat explicant el concepte d'interferència i el seu fonament físic, per tal de poder-lo fer servir més endavant.


A continuació hem analitzat el comportament específic de les ones a l'interior d'una capa prima i hem vist que el resultat és que les ones transmeses produiran interferències que podran ser constructives o destructives en funció de la seva longitud d'ona.

Vegeu el concepte d'interferència al subapartat 4.1 d'aquest mòdul.

Vegeu el comportament de les ones a l'interior d'una capa prima al subapartat 4.2 d'aquest mòdul.

5. Guies d'ona

Ja hem estudiat el comportament d'una ona electromagnètica quan incideix sobre una capa prima. Hem vist que aquesta configuració té moltes aplicacions força interessants, en especial com a filtres d'ones.



Vegeu el comportament d'una ona en incidir sobre una capa prima a l'apartat 4 d'aquest mòdul.

En aquest apartat estudiarem una nova configuració també molt habitual en el món quotidià. Es tracta de regions limitades per medis materials en totes les seves direccions excepte en una. És a dir, com un tub de longitud indefinida. Aquesta configuració s'anomena **guia d'ona**.

En el món hi ha un gran nombre d'estructures que es poden considerar o catalogar com a guies d'ona. Aquests elements es fan servir principalment per a propagar ones electromagnètiques destinades a transmetre informació. Aquests "senyals" són, en general, ones de freqüència elevada i sovint ens trobem que no podrien ser transmises d'altres maneres, ja sigui per la baixa eficiència dels sistemes emprats o bé perquè produirien interferències sobre altres dispositius.

En aquest apartat estudiarem el comportament de les ones en estructures d'aquest tipus i explicarem el fonament físic en què es basen. Podríem dir, de forma molt simplificada, que una guia d'ones canalitza un cert tipus d'ones electromagnètiques i permet que es propaguin amb una atenuació mínima. Per contra, altres freqüències es veuran molt atenuades i, per tant, serà gairebé impossible la seva propagació per la guia d'ona. Això explica, per exemple, que ens sigui molt difícil sintonitzar una emissora de ràdio quan circulem per un túnel molt llarg. Podríem dir que el túnel està actuant com a guia d'ona i no deixa passar les ones de ràdio perquè, com veurem, les guies d'ona només propaguen determinades longituds d'ona.

De què depèn que unes ones es puguin propagar per una guia d'ona i altres no? Depèn de diversos factors, els més rellevants dels quals són la seva geometria i les seves dimensions.

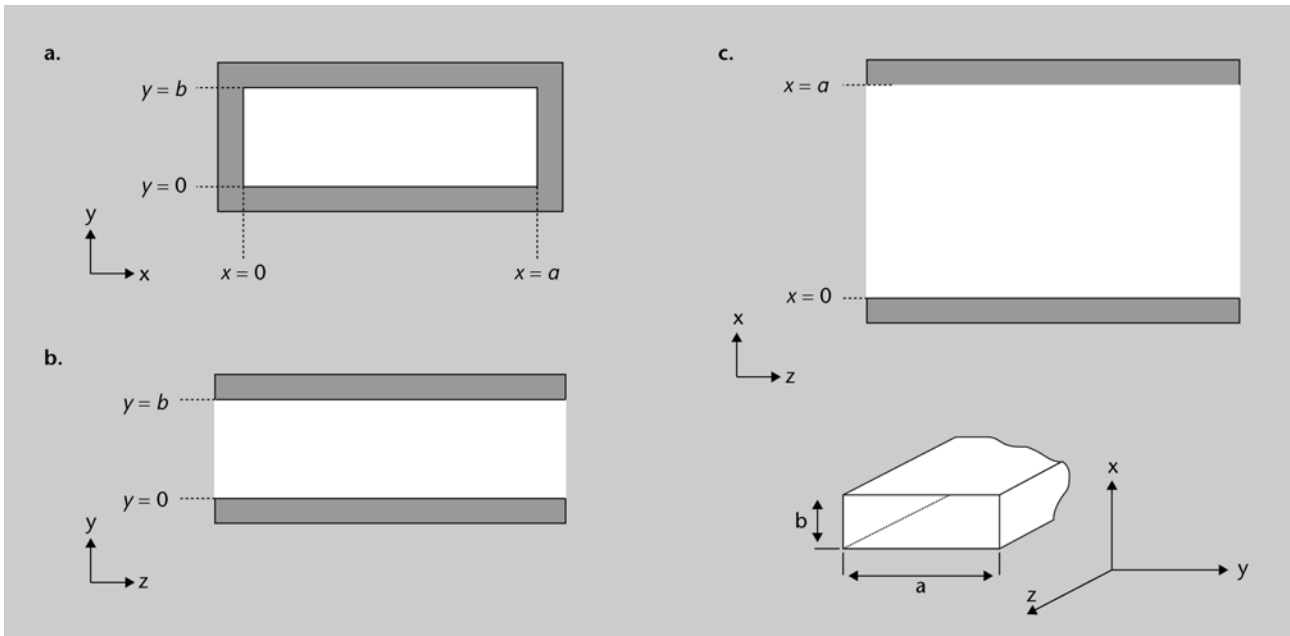
Per a no allargar el text de forma considerable, limitarem l'estudi al cas més simple: les guies d'ona de secció rectangular. L'estudi d'aquest cas és suficient per a entendre el fonament físic general de les guies d'ona.

5.1. Guies d'ona de secció rectangular

Ja hem dit que una guia d'ona és una regió de l'espai limitada per un medi material en totes les seves direccions excepte en una. En una guia d'ona de secció

rectangular, la regió està limitada per dos parells de plans paral·lels entre sí de tal manera que, vist des dels costats oberts, s'observarà una secció amb forma rectangular; (a la figura 21 podeu visualitzar-ne un dibuix esquemàtic). Les direccions x i y són les que estan limitades, mentre que la direcció z és la que es troba lliure.

Figura 21



En el dibuix es mostren les diferents seccions d'una guia d'ona rectangular de dimensions a i b . Veurem més endavant que precisament els valors exactes de a i b determinen les característiques de les ones que s'hi poden propagar.

Tot seguit estudiarem el comportament de les ones electromagnètiques a l'interior d'una guia d'ona rectangular. Atès que l'anàlisi completa pot arribar a ser força complicada, considerarem una sèrie de suposicions i aproximacions, que corresponen a les situacions més habituals a la pràctica i no afecten el resultat general de forma significativa. Aquestes suposicions són:

- Les parets limitadores són d'un material **conductor perfecte** ($\sigma \rightarrow \infty$). Recordeu que, segons l'equació (19), la conductivitat d'un material augmenta l'atenuació sobre les ones electromagnètiques que s'hi propaguen. Un material amb una alta conductivitat presenta una atenuació elevada, i això vol dir que les ones no poden penetrar-hi. Per tant, si les parets de la guia d'ona són conductores perfectes, la conseqüència és que les parets actuen com a "barreres"
- A l'interior de la guia hi ha o bé el **buit** o bé un **material dielèctric i. h. l.** Això vol dir que els valors corresponents de la permitivitat elèctrica (ϵ) i de la permeabilitat magnètica (μ) són constants i reals.

Figura 21

Esquema d'una guia d'ona de secció rectangular.

a) Secció transversal, pla xy , és a dir, vista des de davant.

b) Longitudinal, pla yz , és a dir, com si l'haguéssim tallat longitudinalment des de dalt.

c) Longitudinal des de dalt, pla xz , és a dir, com si l'haguéssim tallat per fer un entrepà.

Recordeu

Un **medi i. h. l.** és un medi:

- **isòtrop**: les seves característiques electromagnètiques no depenen de la direcció de propagació.
- **homogeni**: les seves característiques són les mateixes en qualsevol punt del medi.
- **lineal**: les seves característiques elèctriques i magnètiques depenen linealment dels camps elèctric i magnètic.

- Per a simplificar els càlculs, suposarem els eixos de coordenades tal com es mostren a la figura 21. Els eixos x i y corresponen a les direccions dels dos plans que determinen la secció rectangular, mentre que l'eix z correspon a la direcció longitudinal de la guia d'ona. Aquesta suposició no afecta el resultat final, ja que l'elecció dels eixos de coordenades és totalment arbitrària.

Una vegada tenim clares les suposicions anteriors, suposeu ara que a l'interior de la guia d'ona es propaga una ona electromagnètica al llarg de la direcció longitudinal (z). La podeu representar mitjançant les expressions següents:

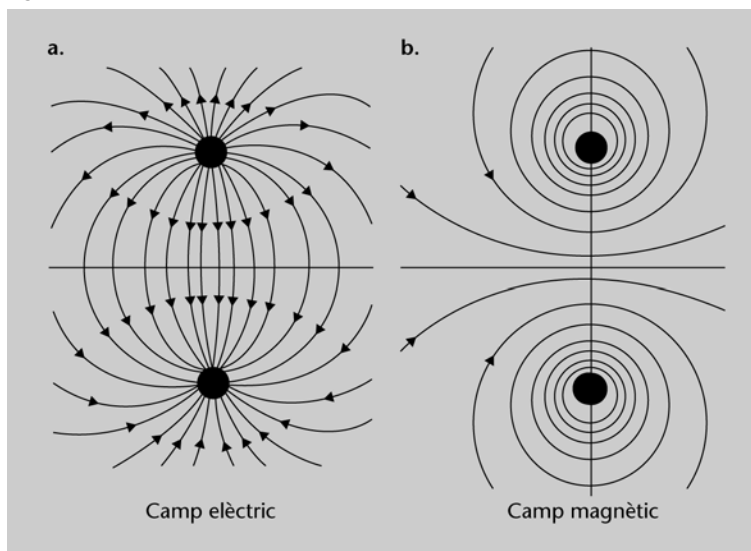
$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0(x, y) \cdot e^{j(kz - \omega t)} \\ \vec{B} &= \vec{B}_0(x, y) \cdot e^{j(kz - \omega t)}\end{aligned}\quad (139)$$

on \vec{E}_0 i \vec{B}_0 són les amplituds d'oscil·lació dels camps elèctric i magnètic i $e^{j(kz - \omega t)}$ és el fasor corresponent.

Les expressions (139) són la generalització d'un nombre infinit d'ones possibles. No obstant això, i com ja hem insinuat abans, no totes es poden propagar en una guia d'ona. Les solucions possibles estan limitades a aquelles que compleixen una sèrie de condicions, les anomenades *condicions de contorn*. En una guia d'ona com la que estem estudiant, aquestes condicions es deuen al fet que la regió està limitada físicament per les parets conductores.

Les condicions de contorn es poden determinar a partir de les propietats dels camps elèctric i magnètic a les regions properes a un conductor. A la figura 22 podeu visualitzar un exemple que us permetrà entendre aquestes condicions. A l'exemple hem fet servir la configuració més bàsica d'un material conductor (fils rectilinis perpendiculars al pla del paper), per facilitar-ne la comprensió.

Figura 22

**Recordeu**

Un terme del tipus $e^{j\alpha}$ és un nombre complex equivalent a:
 $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$
 on j és la unitat imaginària
 ($j = \sqrt{-1}$ i $j^2 = -1$).

Recordeu

Una equació diferencial en general pot tenir infinites solucions. Les **condicions de contorn** són les condicions que la geometria o la física d'un problema obliguen a satisfer i que permeten discriminar entre les solucions matemàtiques que són vàlides i les que no.

Figura 22

Exemple dels camps elèctric i magnètic a les rodalies de dos conductors. L'esquema ens permet deduir les condicions de contorn a causa de la presència d'un material conductor.

a) Camp elèctric en les rodalies d'un pla conductor.

b) Camp magnètic al voltant d'un pla conductor.

Fixeu-vos que dins el conductor hi ha la imatge especular del que hi ha fora.

- El **camp elèctric** a la superfície de les parets conductores no pot tenir component tangencial (figura 22a). Fixeu-vos que les línies de camp entren perpendiculars a la superfície de separació. Aquesta condició és una característica del camp elèctric en regions properes a un material conductor i ja l'heu vista anteriorment.
- El **camp magnètic** a la superfície de les parets conductores no pot tenir component normal (figura 22b). Fixeu-vos que les línies de camp són tangents a la superfície de separació. Aquesta condició és una característica del camp magnètic en regions properes a un material conductor i ja l'heu vista anteriorment.

Vegeu les característiques del camp elèctric al subapartat 3.1.1 d'aquest mòdul. Vegeu les característiques del camp magnètic al subapartat 3.1.2 d'aquest mòdul.

Aquestes condicions de contorn són de compliment obligatori per a qualsevol material conductor i per a qualsevol geometria. Per tant, les expressions (139), que realment són ones electromagnètiques possibles, estaran limitades a aquelles que compleixin aquestes condicions.

Anomenem **mode** a cadascuna de les ones electromagnètiques possibles que compleixen les condicions de contorn i que, per tant, es poden propagar en una guia d'ona.

Els modes corresponents a una guia d'ona són les oscil·lacions "bàsiques" que s'hi poden produir. Totes les oscil·lacions en els camps elèctric i magnètic que es produiran en una guia d'ona són combinacions d'un nombre indefinit d'aquests modes.

Per tal de determinar com són aquests modes el que farem serà fer una classificació segons com siguin els seus camps elèctric o magnètic. És important que noteu que aquesta classificació que realitzarem no és l'única possible i la seva elecció és arbitrària. Els motius que ens porten a procedir amb aquesta classificació són:

- Aquesta classificació ens permet simplificar els càlculs.
- És una classificació que es fa servir de forma habitual en l'estudi de les guies d'ones.
- Qualsevol mode que es produeixi en una guia d'ones rectangular es pot descompondre en una combinació de diversos modes d'aquests dos grups.

Així doncs, tindrem que els modes d'ones electromagnètiques en una guia d'ona es poden classificar en:

- **Modes transversals elèctrics (TE)**

En aquests modes, la component del camp elèctric en la direcció longitudinal (eix z) de la guia d'ona és zero ($E_z = 0$) per a qualsevol punt del seu interior.

Etapa transitòria

En realitat el procés mitjançant el qual es "discriminen" certes ones de les altres (el que anomenem etapa transitòria) és força més complex. Tanmateix, el que ens interessa per al nostre propòsit és només l'estat final (o estacionari). És a dir, que els modes són les úniques ones que es mantenen.

- **Modes transversals magnètics (TM)**

En aquests modes, ara és la component del camp magnètic la que és zero en la direcció longitudinal de la guia d'ona ($B_z = 0$) per a qualsevol punt del seu interior.

A continuació estudiarem aquests dos primers grups de modes per separat. Començarem pels modes transversals elèctrics.

5.1.1. Modes transversals elèctrics (TE)

Com ja hem mencionat, en un mode transversal elèctric (TE) el camp elèctric és nul en la direcció longitudinal ($E_z = 0$). Per tant, tindrem:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x}(x,y) \cdot e^{j(kz-\omega t)} \\ E_y &= E_{0y}(x,y) \cdot e^{j(kz-\omega t)} \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (140)$$

on E_{0x} i E_{0y} són les amplituds d'oscil·lació.

Per la seva banda, atès que tant E_x com E_{0y} són components d'una ona electromagnètica, hauran de satisfer les equacions d'ona corresponents:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 E_x &= 0 \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 E_y &= 0 \end{aligned} \quad (141)$$

on μ i ϵ són la permeabilitat magnètica i permetivitat elèctrica del medi a l'interior de la guia d'ona.

I, atès que es tracta del camp elèctric, s'hauran de satisfer les condicions de contorn corresponents. És a dir, que el camp elèctric no tingui component tangencial a les regions al voltant de les parets conductores. Per a veure com es tradueixen aquestes condicions a la guia d'ona, observeu la figura 23.

A partir de l'esquema (a) podeu deduir que:

$$\begin{aligned} E_x(y=0) &= E_x(y=b) = 0 \\ E_y(x=0) &= E_y(x=a) = 0 \end{aligned} \quad (142)$$

Un cop determinades les condicions de contorn del problema, ja podem resoldre les equacions (141). No detallarem el procés de resolució perquè queda més enllà dels objectius de l'assignatura i passarem directament al resultat.

Recordeu

L'equació diferencial que explica el comportament d'una ona qualsevol que es propaga amb una velocitat c és:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \bar{u} = 0$$

i

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Vegeu les equacions d'ones al mòdul "Lleis de Maxwell".

Les components del camp elèctric a l'interior de la guia d'ona són:

$$\begin{aligned}
 E_x &= A_{E_x} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(kz-\omega t)} \\
 E_y &= A_{E_y} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(kz-\omega t)} \\
 E_z &= 0 \\
 (m, n &= 0, 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned} \tag{143}$$

on A_{E_x} i A_{E_y} són les amplituds d'oscil·lació o valors màxims de cada component, a i b són les dimensions de la guia d'ona i m i n són qualsevol combinació de nombres enters.

Més endavant explicarem el significat de les equacions i del seus paràmetres. Abans, però, procedirem al càlcul del camp magnètic:

$$\begin{aligned}
 B_x &= B_{0x}(x,y) \cdot e^{j(kz-\omega t)} \\
 B_y &= B_{0y}(x,y) \cdot e^{j(kz-\omega t)} \\
 B_z &= B_{0z}(x,y) \cdot e^{j(kz-\omega t)}
 \end{aligned} \tag{144}$$

Com en el cas del camp elèctric, el camp magnètic també ha de satisfer les condicions de contorn. En aquest cas, però, les que s'han de fer zero són les components normals (per a entendre millor d'on surten, torneu a consultar la figura 21):

$$\begin{aligned}
 B_x(x=0) &= B_x(x=a) = 0 \\
 B_y(y=0) &= B_y(y=b) = 0
 \end{aligned} \tag{145}$$

Tampoc explicarem el procés de resolució de l'equació i us donarem directament el resultat:

$$\begin{aligned}
 B_x &= A_{B_x} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(kz-\omega t)} \\
 B_y &= A_{B_y} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(kz-\omega t)} \\
 B_z &= A_{B_z} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(kz-\omega t)} \\
 (m, n &= 0, 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned} \tag{146}$$

on A_{B_x} , A_{B_y} i A_{B_z} són les amplituds d'oscil·lació o valors màxims de cada component, a i b són les dimensions de la guia d'ona i m i n són qualsevol combinació de nombres enters.

Ara sí que ja podem analitzar les equacions (143) i (146):

- El primer terme de les equacions (A_{B_x}, A_{B_y}, \dots) correspon als valors màxims que poden assolir els camps. No entrarem en detall en els seus valors exactes, ja que no entra dins els objectius d'aquest mòdul.
- El segon i tercer terme inclouen les dependències dels camps respecte a les direccions transversals x i y . Fixeu-vos que en tots els casos es tracta de funcions harmòniques del tipus $\sin(kx)$, $\cos(ky)$, etc. Els valors de k són diferents per a x i per a y i depenen de les dimensions de la guia en les direccions respectives, com en el cas de les ones estacionàries que ja vàreu veure.

En efecte, si fem un tall transversal i analitzem l'amplitud de qualsevol de les components del camp al llarg d'un dels eixos, podeu comprovar que es comporta com una ona estacionària amb una longitud d'ona que sempre serà un divisor exacte de la distància entre les parets respectives. Els valors de m i n indiquen precisament el nombre de màxims al llarg de les direccions respectives x i y . A la figura 23 es mostra, a tall d'exemple, com seria l'amplitud de la component E_y al llarg de la direcció x per als casos $m = 1, 2, 3$ i 4 .

Vegeu les ones estacionàries al mòdul "Ones".

Figura 23

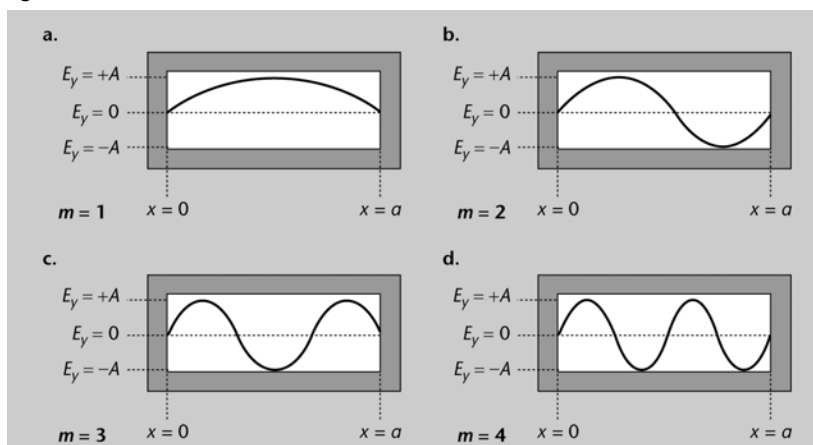


Figura 23

Esquema dels modes d'oscil·lació d' E_y que es produeixen al llarg d'una de les direccions transversals de la guia d'ona (a l'exemple, la direcció x) per als casos:

- $m = 1$,
- $m = 2$,
- $m = 3$,
- $m = 4$.

A l'exemple de la figura podeu comprovar que $m = 1$ implica que el camp presenta un màxim d'amplitud al llarg de l'eix x , $m = 2$ indica que se'n produeixen dos (un de positiu i un de negatiu). I així successivament per a $m = 3, 4, 5, \dots$ Per la seva banda, tot i que no ho hem inclòs a la figura, $n = 1$ indicaria que hi haurà un màxim al llarg de la direcció y , $n = 2$ vol dir que n'hi haurà dos, etc. Els casos $m = 0$ i $n = 0$ no els hem inclòs perquè impliquen que el camp és constant en la direcció respectiva.

- L'últim terme ($e^{j(kz-\omega t)}$) és el fasor de l'ona corresponent. Recordeu que el fasor indica com varia el desfasament tant en el temps com en la direcció longitudinal (z).

Les diferents combinacions de valors de m i n determinen cadascun dels modes possibles en una guia d'ona. Per a identificar els modes, els denominem

fent servir la notació TE_{mn} , on els subíndexs corresponen als valors respectius de m i n .

En una guia d'ona, un mode **transversal elèctric** TE_{mn} és aquell en el qual no hi ha component del camp elèctric en la direcció longitudinal (z).

Per al cas d'una guia d'ona de secció rectangular, els camps elèctric i magnètic en un mode TE_{mn} són:

$$\begin{aligned} E_x &= A_{E_x} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(kz-\omega t)} \\ E_y &= A_{E_y} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(kz-\omega t)} \\ E_z &= 0 \\ B_x &= A_{B_x} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(kz-\omega t)} \\ B_y &= A_{B_y} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(kz-\omega t)} \\ B_z &= A_{B_z} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(kz-\omega t)} \end{aligned} \quad (147)$$

on A_{E_x} , A_{E_y} , A_{B_x} , A_{B_y} i A_{B_z} són les amplituds d'oscil·lació o valors màxims de cada component, a i b són les dimensions de la guia d'ona i m i n són qualsevol combinació de nombres enters ($m, n = 0, 1, 2, 3 \dots$).

Per a acabar d'entendre el significat dels modes, analitzarem un cas particular: el mode TE_{10} . Aquest és, juntament amb el TE_{01} , el mode més simple i també el més fàcil d'entendre. Vegem com són el camp elèctric (\vec{E}) i magnètic (\vec{B}) en aquest mode. Per a trobar-los cal substituir $m = 1$ i $n = 0$ a les expressions (147):

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= A_{E_y} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{j(kz-\omega t)} \\ E_z &= 0 \\ B_x &= A_{B_x} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{j(kz-\omega t)} \\ B_y &= 0 \\ B_z &= A_{B_z} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{j(kz-\omega t)} \end{aligned} \quad (148)$$

Recurs a Internet

En el web <http://www.falstad.com/embox/guide.html> (en anglès) trobareu una mini-aplicació (*applet*) on podeu visualitzar una simulació dels modes transversals elèctrics (TE) en una guia d'ona rectangular.

Existeix el mode TE_{00} ?

El "mode" TE_{00} no existeix com a tal, ja que això implicaria $E_x = 0$, $E_y = 0$ i $E_z = 0$. És a dir, que no hi hauria cap ona.

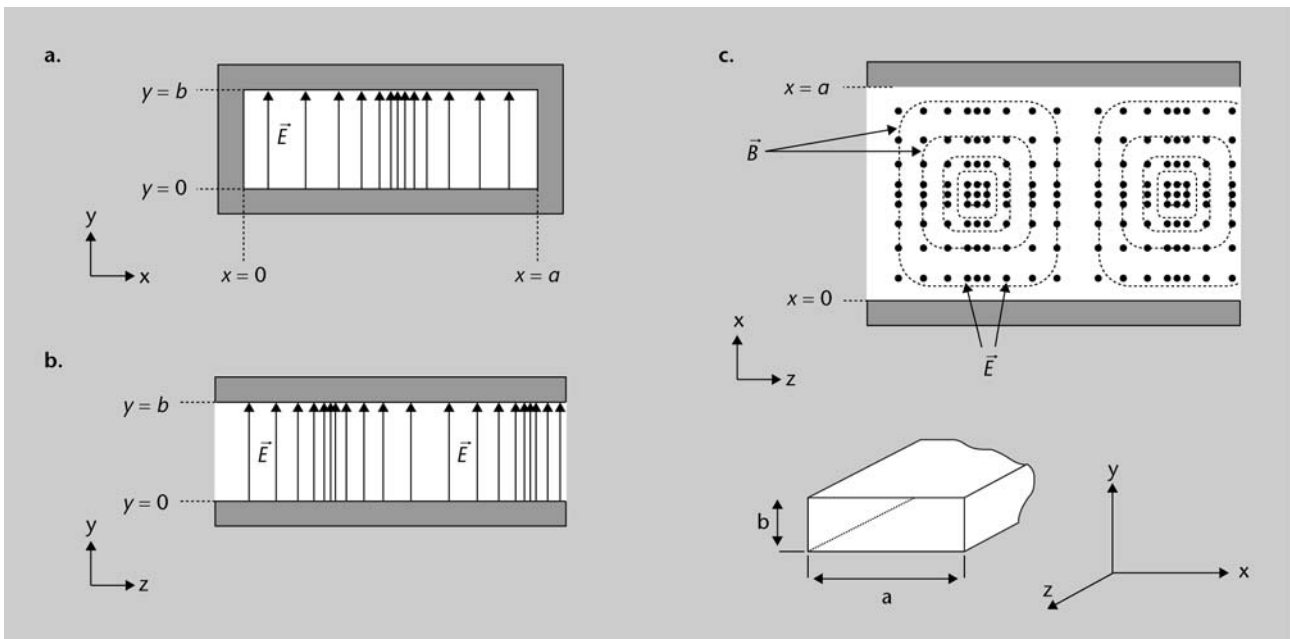
Recordeu

$$\begin{aligned} \sin 0 &= \sin 2\pi = \dots = 0 \\ \cos 0 &= \cos 2\pi = \dots = 1 \end{aligned}$$

A la figura 24 podeu visualitzar una representació gràfica de les amplituds d'aquests camps en una secció transversal, és a dir, vista des de davant (figura 24a), longitudinal, des de dalt (com si l'haguéssim tallat per fer un entrepà, figura 24b) i des del costat (figura 24c).

Fixeu-vos primer en el camp elèctric. Com que $E_x = 0$ i $E_z = 0$, aquest camp només presenta component en la direcció y . En els esquemes a i b podeu comprovar que, efectivament, el camp elèctric sempre apunta en aquesta direcció (fletxes contínues). A l'esquema c el camp elèctric és perpendicular al pla del paper i pot anar cap enfora (per això està representat amb el símbol \bullet).

Figura 24

**Figura 24**

Esquema del camp elèctric i magnètic en un mode TE_{10} d'una guia d'ona de secció rectangular.

a) secció transversal, pla xy , és a dir, vista des de davant. El camp elèctric es representa amb fletxes verticals.

b) secció lateral, pla zy . El camp elèctric es representa amb fletxes verticals.

c) longitudinal des de dalt, pla xz . És a dir, com quan tallem una barra de pa per un entrepà. El camp magnètic es representa amb línies discontinües, i el camp elèctric amb fletxes verticals i creus o punts segons si entra o surt del paper.

La seva amplitud és una funció sinusoidal que es fa zero a $x = 0$ i a $x = a$ i té un màxim en el centre de la guia. Per això les línies de camp estan més separades a prop de les parets i més juntes cap al centre. Podeu comprovar que aquest comportament de E_x , E_y i E_z està totalment en concordança amb la condició de contorn que diu que el camp elèctric només pot ser normal a la paret de la guia d'ona (mireu les figures 25a i 25b).

Pel que fa al camp magnètic, podeu comprovar que ara succeeix justament a la inversa: no hi ha component en la direcció y ($B_y = 0$) però sí en la resta (observeu la figura 24c, on s'ha representat amb línies discontinües). Aquest fet no us hauria de sorprendre si recordeu que els camps elèctric i magnètic sempre són perpendiculars entre sí.

L'amplitud de B_x varia igual que la de E_y , és a dir, és zero a $x = 0$ i a $x = a$ i té un màxim en el centre de la guia. L'amplitud de B_z , en canvi, és màxima a $x = 0$ i a $x = a$ i presenta un mínim en el centre de la guia. Podeu comprovar que aquest comportament de B_x , B_y i B_z està totalment en concordança amb la condició de contorn que diu que el camp magnètic només pot ser tangencial a la paret de la guia d'ona (vegeu la figura 24c).

Ja us hem introduït el concepte de modes d'una guia i hem vist el primer grup de classificació: els modes transversals elèctrics (TE). A continuació veurem el segon grup: els modes transversals magnètics (TM).

5.1.2. Modes transversals magnètics (TM)

En els modes TE que hem estudiat fins ara hem inclòs tots aquells que no presenten component del camp elèctric en la direcció de propagació ($E_z = 0$). En aquest apartat estudiarem aquells que no presenten component del camp magnètic en aquesta mateixa direcció ($B_z = 0$). Aquests modes reben el nom de transversals magnètics (TM). Els modes TM podríem dir que són els complementaris dels transversals elèctrics (TE).

Per tant, les expressions dels camps elèctric i magnètic per als modes TM són:

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_{0x}(x,y) \cdot e^{j(kz-\omega t)} \\
 E_y &= E_{0y}(x,y) \cdot e^{j(kz-\omega t)} \\
 E_z &= E_{0z}(x,y) \cdot e^{j(kz-\omega t)} \\
 \\
 B_x &= B_{0x}(x,y) \cdot e^{j(kz-\omega t)} \\
 B_y &= B_{0y}(x,y) \cdot e^{j(kz-\omega t)} \\
 B_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{149}$$

on E_{0x} , E_{0y} , etc. són les amplituds d'oscil·lació.

Les expressions anteriors han de satisfer les equacions d'ones que ja vàrem veure anteriorment:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 \vec{E} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 \vec{B} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{150}$$

Tal com hem procedit amb els modes TE, hem d'imposar que les solucions de les equacions (150) satisfacin les condicions de contorn. Recordem quines eren aquestes condicions (per a veure-les més clares, torneu a fer una ullada a les figures 21 i 22):

- El **camp elèctric** (\vec{E}) no pot tenir component tangencial sobre la superfície de les parets conductores:

$$\begin{aligned}
 E_x(y=0) &= E_x(y=b) = 0 \\
 E_y(x=0) &= E_y(x=a) = 0
 \end{aligned}
 \tag{151}$$

Recordau

L'equació diferencial que explica el comportament d'una ona qualsevol que es propaga amb una velocitat c és:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{u} = 0$$

Vegeu les equacions d'ones al mòdul "Lleis de Maxwell".

- El **camp magnètic** (\vec{B}) no pot tenir component normal sobre la superfície de les parets conductores:

$$\begin{aligned} B_x(x=0) = B_x(x=a) &= 0 \\ B_y(y=0) = B_y(y=b) &= 0 \end{aligned} \quad (152)$$

El procés de resolució de les equacions (150) queda més enllà dels objectius de l'assignatura i passarem directament al resultat. Observareu que el resultat és molt similar al que hem trobat per als modes TE. L'única diferència està en les components E_z i B_z (les components longitudinals), a causa de la definició mateixa dels modes TE i TM.

De forma anàloga al cas dels modes TE, per als modes transversals magnètics (TM) fem servir la denominació TM_{mn} , on els subíndexs corresponen als valors respectius de m i n .

En una guia d'ona, un mode **transversal magnètic** TM_{mn} és aquell en el qual no hi ha component del camp magnètic en la direcció longitudinal (z). Per a una guia d'ona de secció rectangular, els camps elèctric i magnètic en un mode d'aquest tipus són:

$$\begin{aligned} E_x &= A_{E_x} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(kz-\omega t)} \\ E_y &= A_{E_y} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(kz-\omega t)} \\ E_z &= A_{E_z} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(kz-\omega t)} \\ B_x &= A_{B_x} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(kz-\omega t)} \\ B_y &= A_{B_y} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(kz-\omega t)} \\ B_z &= 0 \end{aligned} \quad (153)$$

on A_{E_x} , A_{E_y} , A_{E_z} , A_{B_x} i A_{B_y} són les amplituds d'oscil·lació o valors màxims de cada component, a i b són les dimensions de la guia d'ona i m i n són qualsevol combinació de nombres enters ($m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$).

El significat dels components de les equacions (153) és el mateix que en el cas dels modes TE, per tant, ens limitarem a assenyalar les petites diferències que hi trobem.

- La diferència més notable la trobem en les components longitudinals (E_z i B_z). Ara la component longitudinal del camp elèctric no és zero ($E_z \neq 0$),

Recurs a Internet

En el web <http://www.falstad.com/embox/> (en anglès) trobareu una miniaplicació (*applet*) on podeu visualitzar una simulació dels modes transversals magnètics (TM) per a una guia d'ona rectangular.

Existeix el mode TM_{00} ?

El "mode" TM_{00} no existeix com a tal, ja que això implicaria $E_x = 0$, $E_y = 0$ i $E_z = 0$. És a dir, que no hi hauria cap ona.

mentre que per al cas dels modes TE sí que ho era ($E_z = 0$). En canvi, per al camp magnètic és precisament a l'inrevés ($B_z = 0$ per als modes TM i $B_z \neq 0$ per als modes TE). Aquesta diferència no ens hauria de sorprendre, ja que prové de la definició mateixa de TE i TM.

- A_{E_x} , A_{E_y} , ... corresponen als valors màxims que poden assolir els camps. Aquests valors no tenen perquè ser els mateixos que en el cas dels TE. Simplement hem fet servir la mateixa notació per a no complicar les equacions. Tot i així, com en el cas dels modes TE, no entrarem en detall en els seus valors exactes, ja que no entra dins els objectius d'aquest mòdul.
- Els modes corresponents a $m = 0$ (TM_{01} , TM_{02} , TM_{03} , ...) i a $n = 0$ (TM_{10} , TM_{20} , TM_{30} , ...) no existeixen com a tals, ja que això implicaria que tindriem alhora $E_z = 0$ i $B_z = 0$. Aquest cas particular, de fet, s'anomena **mode transversal electromagnètic** (TEM) i, tot i ser una solució matemàticament possible, no correspon a una ona que es pugui propagar per una guia d'ones com la que estem estudiant. L'estudi de guies d'ones on sí que es poden propagar els modes TEM tampoc entra dins dels objectius d'aquest mòdul.

Recordeu

$\sin 0 = 0$

Ja hem vist que existeix un nombre infinit de modes TE i de modes TM que es poden propagar per una guia d'ona, i que cadascun d'ells presenta unes característiques diferents. Ara bé, una pregunta que no ens hem fet és si tots ells es propaguen de forma indefinida dins la guia d'ona o si, pel contrari, pateixen una atenuació significativa. Tot seguit estudiarem aquest aspecte.

Al mòdul "Línies de transmissió" trobareu un cas en què sí fem servir els modes TEM.

5.1.3. Atenuació en una guia d'ona. Modes guiats, modes de tall i mode dominant

A la pràctica s'observa que en una guia d'ona hi ha modes que pateixen una atenuació elevada i que, per tant, no es poden propagar a grans distàncies, mentre que hi ha d'altres en què l'atenuació és molt més petita i, per tant, són aptes per a la propagació de senyals.

Es pot demostrar que existeix un criteri que determina quins modes es consideren del primer grup i quins del segon. Es tracta de l'anomenada **relació de dispersió**:

$$k_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (154)$$

on k_{mn} és la constant de propagació de l'ona corresponent al mode TE_{mn} (o TM_{mn}), ω és la freqüència angular de l'ona, μ i ϵ són la permitivitat elèctrica i la permeabilitat magnètica del medi i a i b són les dimensions del rectangle.

El valor de k_{mm} , la constant de propagació de l'ona, és el que determina quin comportament tindrà el mode en qüestió. Fixeu-vos que aquest valor pot ser real o imaginari en funció del signe de l'expressió continguda dins de l'arrel. Estudiem-ne els dos casos:

- Quan el radicand és **positiu**, la constant de propagació és un nombre **real** i, per tant, correspon a la d'una ona que es propaga indefinidament en la direcció de la guia d'ona. No hi haurà una atenuació significativa (a excepció de l'atenuació pròpia del medi de propagació). Com podeu comprovar, aquesta condició no es verifica per a qualsevol mode, sinó només per a aquells, els valors m i n dels quals, ho fan possible. Aquests modes s'anomenen **modes guiats**.
- Quan el radicand és **negatiu**, la constant de propagació és un nombre **imaginari pur** i, per tant, correspon a la d'una ona que presenta una certa atenuació, en general elevada. Els modes que compleixen aquesta condició s'anomenen **modes de tall**, i no es poden propagar en aquesta guia d'ona.

S'anomenen **modes guiats** aquells que es poden propagar per una guia d'ona específica. La condició que han de complir és:

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 < \omega^2 \mu \epsilon \quad (155)$$

S'anomenen **modes de tall** aquells que no es poden propagar per una guia d'ona específica. La condició que han de complir és:

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 > \omega^2 \mu \epsilon \quad (156)$$

on m i n són els índexs del mode corresponent (TE_{mm} o TM_{mm}), a i b són les dimensions de la secció rectangular, ω és la freqüència angular de l'ona propagada i μ i ϵ són, respectivament, la permeabilitat magnètica i la permitivitat elèctrica del medi de propagació.

Així doncs, podeu comprovar que, donada una ona d'una certa freqüència, aquesta només es podrà propagar per la guia en qüestió segons certs modes: aquells que presenten uns valors de m i n suficientment petits perquè compleixin la relació (155). En canvi, els modes amb índexs m i n que no satisfan aquesta relació, no es podran propagar per a aquesta freqüència.

De la mateixa manera, també podem analitzar el sentit invers. És a dir, donat un mode específic, determinar les freqüències de les ones que es poden propagar de forma indefinida per la guia d'ona. Existeix una freqüència límit

que divideix l'espectre en aquests dos grups. El seu valor s'obté a partir de la relació (155):

$$\begin{aligned}\omega^2 \mu \epsilon &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \\ \omega^2 &= \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{\mu \epsilon} \\ \omega &= \sqrt{\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{\mu \epsilon}} \\ \omega &= \pi \sqrt{\frac{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}{\mu \epsilon}}\end{aligned}\quad (157)$$

Anomenem **frequència de tall** (f_t) d'un mode TE_{mn} o TM_{mn} a la freqüència mínima per sota de la qual una ona no pot propagar-se segons aquell mode. El seu valor és:

$$f_t = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (158)$$

on m i n són els índexs del mode corresponent (TE_{mn} o TM_{mn}), a i b són les dimensions de la secció rectangular i μ i ϵ són, respectivament, la permeabilitat magnètica i la permitivitat elèctrica del medi de propagació.

Com podeu comprovar, cada mode (TE_{mn} o TM_{mn}) presenta una freqüència de tall diferent. Si calculéssiu aquesta freqüència per a cada mode, trobaríeu que un d'ells presenta el valor més petit de tots. O el que és equivalent, imagineu-vos que partiu d'una freqüència molt elevada, és a dir, que us trobeu per sobre de la freqüència de tall per a molts modes. Supposeu ara que aneu disminuint la freqüència de forma gradual. A poc a poc anireu superant un a un, per sota, les freqüències de tall dels diferents modes, i això vol dir que cada cop hi haurà menys modes possibles. Finalment arribareu a un punt en què només quedarà un únic mode segons el qual l'ona es podria propagar: aquell que presenta la freqüència de tall més baixa. A aquest mode se l'anomena **mode dominant**.

Denominem **mode dominant** o **fonamental** d'una guia d'ona al mode que presenta una freqüència de tall (f_t) més petita.

Recordeu

La freqüència f i la freqüència angular ω es relacionen mitjançant:

$$\omega = 2\pi f$$

La freqüència de tall (f_t) del mode dominant indica quina és la freqüència mínima que es podrà propagar per aquella guia d'ona. Freqüències més petites no seran possibles, ja que estarien per sota de la freqüència de tall més petita possible.

A partir de l'expressió per a la f_t (158) podeu comprovar que els modes que presenten una freqüència més petita són aquells en què els valors de m i n són els més petits possibles. Atès que la combinació $m = 0$ i $n = 0$ no té gaire sentit perquè no correspon a cap mode (de fet, vol dir que no hi ha cap ona), el mode dominant correspon al cas $m = 0$ i $n = 1$, és a dir, al mode TE_{01} .

Així doncs, el mode dominant en una guia d'ona rectangular sempre és el mode TE_{01} , ja que, tal com hem explicat, el mode TM_{01} no existeix com a tal.

Exemple de freqüència de tall

Determineu els tres modes amb freqüències de tall més petites per a una guia d'ona de dimensions $a = 1,3$ cm i $b = 2,0$ cm. Calculeu també el valor de les seves freqüències de tall. Suposeu que a l'interior de la guia hi ha el buit.

Solució

Per a resoldre el problema, el més pràctic és fer una taula amb les freqüències de tall f_t per als primers valors de m i n . Per a calcular aquestes freqüències heu de fer servir l'expressió (158). Recordem-la:

$$f_t = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (159)$$

Ja podeu calcular els elements de la taula per a diferents valors de m i n . Les dades que heu de fer servir són:

- $a = 1,3$ cm
- $b = 2,0$ cm
- $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$ (permeabilitat magnètica del buit)
- $\epsilon = \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$ (permitivitat elèctrica del buit)

f_t	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$m = 0$	-	7,5 GHz	15,0 GHz	...
$m = 1$	11,5 GHz	13,8 GHz
$m = 2$	24,3 GHz
$m = 3$

Hem marcat amb negreta els tres valors més petits, que és el que ens demana l'enunciat. Les caselles amb punts suspensius les podeu deixar sense calcular perquè ja sabem amb seguretat que els nombres que obtindreu seran més grans que els tres que ja tenim marcats.

Així doncs, els modes i les freqüències que se'ns demanen són:

- 1) Mode dominant: transversal elèctric TE_{01} amb $f_t = 7,5$ GHz
- 2) Segon mode: transversal elèctric TE_{10} , amb $f_t = 11,5$ GHz

Recordeu

Els "modes" TE_{00} i TM_{00} no existeixen com a tals, ja que implicarien $E_x = 0$, $E_y = 0$ i $E_z = 0$. És a dir, que no hi hauria cap ona.

Hipòtesi

Per arribar a aquesta conclusió hem suposat que el rectangle és com el de la figura 21, és a dir, que $a < b$.

Si fos a l'inrevés ($a > b$), el mode dominant correspondria al cas

$m = 1$ i $n = 0$, és a dir el mode T_{10} .

Vegeu que no existeix el mode TM_{01} al subapartat 5.1.2 d'aquest mòdul.

3) Tercer mode: transversal elèctric TE_{11} o bé transversal magnètic TM_{11} , amb $f_t = 13,8$ GHz

Noteu que hem inclòs a la llista el mode transversal magnètic TM_{11} però no el TM_{01} ni el TM_{10} . Recordeu que els modes del tipus TM_{0n} i TM_{m0} no existeixen.

5.2. Què hem après?

En aquest apartat hem vist que les ones es poden propagar per una regió limitada en l'espai per parets conductores, les anomenades guies d'ona i hem estudiat el cas particular d'un tub de secció rectangular. En aquest cas, hem vist que a causa de les condicions de contorn es propaguen determinades ones de camps elèctric i magnètic, el que anomenem modes. Hem vist també que hi ha una freqüència, la freqüència de tall, per sota de la qual no es propaga l'ona, la qual cosa explica fenòmens quotidians com el fet que la ràdio no se sent dins un túnel. Què passaria si tanquèssim el tub i el convertíssim en una caixa? Ho veurem tot seguit.

6. Cavitats ressonants

Ja hem estudiat dues de les estructures més habituals que ens trobem en aplicacions de l'àmbit de l'òptica i de les telecomunicacions: la capa prima i la guia d'ona. Ens queda, però, presentar-vos una última configuració: la **cavitat ressonant** o **ressonador**. Tot i que és possible que, per aquest nom, no conegueu cap exemple d'aquest tipus de configuració, segur que canviu de parer quan us presentem una aplicació ben coneguda que la fa servir: els forns de microones que trobeu a qualsevol cuina.

Es considera com a cavitat ressonant qualsevol regió de l'espai limitada per un medi conductor en totes direccions. És a dir, és com una caixa tancada les "parets" de la qual són d'un material conductor.

L'aplicació principal de les cavitats ressonants és el seu ús com a dispositius d'emmagatzematge d'energia en forma de camps elèctrics i magnètics oscil·lants.

El comportament de les ones electromagnètiques en una cavitat ressonant és molt similar al d'una guia d'ona. Tanmateix, a diferència d'aquesta última, on existeix una direcció en la qual les ones poden propagar-se indefinidament, en una cavitat ressonant les ones presents no es propaguen, sinó que experimenten reflexions contínues sobre les superfícies fins que adopten la forma d'ones estacionàries, d'acord amb la geometria de la cavitat.

En aquest apartat estudiarem les característiques d'aquestes ones estacionàries. Limitarem l'anàlisi a un cas específic: les cavitats ressonants amb forma de paral·lelepípede regular (com una caixa de sabates).

6.1. Cavitats ressonants amb forma de paral·lelepípede regular

Tot i que existeix una gran varietat de formes i dimensions, com a exemple específic de cavitat ressonant considerarem el cas simple d'una cavitat en forma de paral·lelepípede regular (prisma rectangular). Els principis de funcionament són sempre els mateixos i, per tant, es pot generalitzar a tot tipus de cavitats ressonants.

El procediment per a determinar com són les ones que s'estableixen a l'interior de la cavitat és molt similar al que hem utilitzat per a les guies d'ona. Comencem escrivint les equacions per als camps elèctric i magnètic:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y, z) \cdot e^{j(-\omega t)}$$

Vegeu la capa prima a l'apartat 4 d'aquest mòdul.
Vegeu la guia d'ona a l'apartat 5 d'aquest mòdul.

$$\vec{B} = \vec{B}_0(x, y, z) \cdot e^{j(-\omega t)} \tag{160}$$

Figura 25

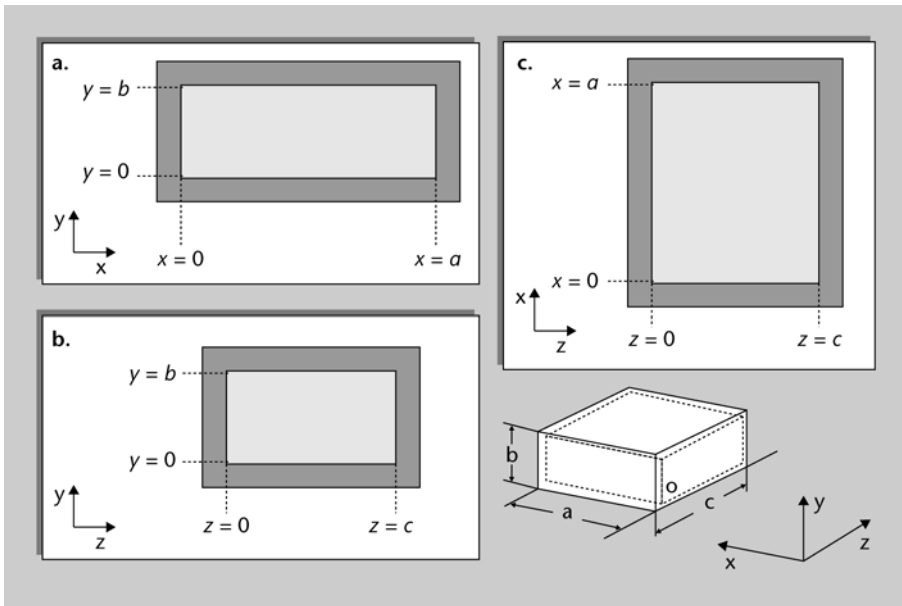


Figura 25
 Esquema d'una cavitat resonant amb forma de paral·lelepípede regular.
 a) Secció transversal, pla xy, és a dir, vista des de davant.
 b) Longitudinal des de dalt, pla yz.
 c) Longitudinal des de dalt, pla xz, és a dir, com si l'haguéssim tallat per fer un entrepà.

on \vec{E}_0 i \vec{B}_0 són les amplituds dels camps i $e^{j(-\omega t)}$ són els fasors, que en aquest cas només depenen del temps. El motiu és que com que la cavitat està tancada per tot arreu, tenim una situació en què cal aplicar condicions de contorn a les ones en qualsevol direcció. Aquesta situació genera ones estacionàries en totes les direccions i, si recordeu el que ja hem vist, les ones estacionàries no es propaguen i, per tant, el terme dins del cosinus (o el que és el mateix, dins de l'exponencial complexa) no dependrà de $\vec{k} \cdot \vec{r}$.

Vegeu les ones estacionàries al mòdul "Ones".

Tal com hem procedit per a les guies d'ona, cal que imposeu que totes les components dels camps satisfacin les respectives equacions d'ona:

Vegeu les guies d'ona al subapartat 5.1 d'aquest mòdul.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 E_x &= 0 & \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 B_x &= 0 \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 E_y &= 0 & \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 B_y &= 0 \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 E_z &= 0 & \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 B_z &= 0 \end{aligned} \tag{161}$$

on E_x, E_y , i E_z són les components del camp elèctric en les tres direccions principals, B_x, B_y , i B_z són les del camp magnètic i μ i ϵ són, respectivament, la permeabilitat magnètica i la permitivitat elèctrica del medi que hi ha a l'interior de la cavitat resonant.

Recordeu
 L'equació diferencial que explica el comportament d'una ona qualsevol que es propaga amb una velocitat c és:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{u} = 0$$

També com en el cas de les guies d'ona, les equacions (161) tenen infinites solucions matemàtiques, de les quals només tindran sentit físic aquelles que compleixin les condicions de contorn, pel fet que les parets de la cavitat són conductores.

Aquestes condicions són les mateixes que en el cas d'una guia d'ona, amb la diferència que ara cal aplicar-les a totes tres dimensions (en el cas de la guia d'ona només s'havien d'aplicar a les direccions x i y). Observeu la figura 25, on podeu veure que, des de tots els punts de vista, la zona està tancada.

Determinem quines són les condicions de contorn.

- El **camp elèctric** (\vec{E}) no pot tenir component tangencial sobre la superfície de les parets conductores. Analitzem els esquemes de la figura 25.

Vegeu que el camp elèctric no pot tenir component tangencial sobre la superfície de les parets conductores al subapartat 3.1.1 d'aquest mòdul.

Segons la secció paral·lela al pla xy (figura 25a), això vol dir que:

$$\begin{aligned} E_x(y=0) &= E_x(y=b) = 0 \\ E_y(x=0) &= E_y(x=a) = 0 \end{aligned} \quad (162)$$

Segons la secció paral·lela al pla yz (figura 25b), vol dir que:

$$\begin{aligned} E_y(z=0) &= E_y(z=c) = 0 \\ E_z(y=0) &= E_z(y=b) = 0 \end{aligned} \quad (163)$$

I segons la secció paral·lela al pla xz (figura 25c), tindrem que:

$$\begin{aligned} E_x(z=0) &= E_x(z=c) = 0 \\ E_z(x=0) &= E_z(x=a) = 0 \end{aligned} \quad (164)$$

- El **camp magnètic** (\vec{B}) no pot tenir component normal sobre la superfície de les parets conductores. Si tornem a analitzar la figura 25 trobem:

Vegeu que el camp magnètic no pot tenir component normal sobre la superfície de les parets conductores al subapartat 3.1.2 d'aquest mòdul.

$$\begin{aligned} B_x(x=0) &= B_x(x=a) = 0 \\ B_y(y=0) &= B_y(y=b) = 0 \\ B_z(z=0) &= B_z(z=c) = 0 \end{aligned} \quad (165)$$

Com en el cas de les guies d'ona tampoc no detallarem el procediment de resolució de les equacions (161) i donarem directament el resultat:

Els camps elèctric i magnètic a l'interior d'una **cavitat ressonant** amb forma de paral·lelepípede regular de dimensions a , b i c prenen la forma d'ones estacionàries:

$$E_x = A_{E_x} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right) e^{-j\omega t}$$

Recurs a Internet

En el web <http://www.falstad.com/embox/index.html> (en anglès) trobareu una mini-aplicació (*applet*) on podeu visualitzar una simulació dels modes presents en una cavitat ressonant.

$$\begin{aligned}
 E_y &= A_{E_y} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right) e^{-j\omega t} \\
 E_z &= A_{E_z} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c}z\right) e^{-j\omega t} \\
 B_x &= A_{B_x} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c}z\right) e^{-j\omega t} \\
 B_y &= A_{B_y} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c}z\right) e^{-j\omega t} \\
 B_z &= A_{B_z} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right) e^{-j\omega t} \\
 &\quad (m, n, p = 0, 1, 2, \dots) \qquad (166)
 \end{aligned}$$

on A_{E_x} , A_{E_y} , A_{E_z} , A_{B_x} , A_{B_y} i A_{B_z} són les amplituds o valors màxims dels camps, a , b i c són les dimensions de la cavitat ressonant i m , n i p són qualsevol combinació de nombres enters positius. $e^{-j\omega t}$ és el fasor, que en aquest cas només depèn del temps, atès que tenim ones estacionàries.

L'anàlisi de les equacions (166) és molt similar al que vàrem fer per a les guies d'ona:

- El primer terme de les equacions (A_{E_x} , A_{E_y} , A_{E_z} , A_{B_x} , A_{B_y} i A_{B_z}) correspon als valors màxims que poden assolir els camps. No entrarem en detall en els seus valors exactes, ja que no entra dins dels objectius d'aquest mòdul.
- El segon, tercer i quart termes inclouen les dependències dels camps respecte a les tres direccions possibles (x , y i z). Fixeu-vos que en tots els casos es tracta de funcions harmòniques del tipus $\sin(kx)$, $\cos(ky)$, etc. Els valors d'aquesta constant k són diferents per a cadascuna de les direccions i estan determinats per les dimensions de la cavitat, com en el cas de les ones estacionàries que ja us vàrem introduir.
- Si feu un tall transversal imaginari en qualsevol de les tres direccions i analitzeu l'amplitud del camp al llarg de qualsevol dels eixos que s'observen, observareu el mateix comportament que ja vàrem veure en una guia d'ona. És a dir, trobareu que l'amplitud dibuixa una corba sinusoidal amb un "període" igual a un divisor exacte de la distància entre les dues parets en qüestió. Els valors de m , n i p indiquen precisament el nombre de màxims al llarg de les direccions respectives x , y i z . A la figura 26 es mostra, a tall d'exemple, com seria l'amplitud de la component E_y al llarg de la direcció x per als casos $m = 1, 2, 3$ i 4 .

Vegeu el concepte d'ones estacionàries al mòdul "Ones i acústica".

Figura 26

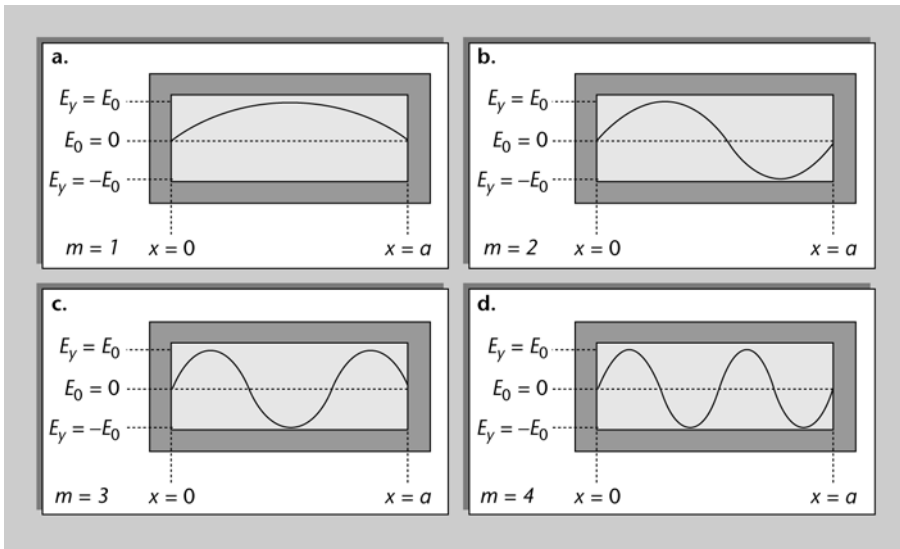


Figura 26
Esquema dels modes d'oscil·lació d' E_y que es produeixen al llarg de la direcció x :
a) $m = 1$,
b) $m = 2$,
c) $m = 3$, i
d) $m = 4$.

- L'últim terme ($e^{-j\omega t}$) és el fasor de l'ona corresponent. En aquest cas només presenta dependència temporal, ja que la resta de variables (x, y i z) estan incloses dins les funcions harmòniques anteriors.

Les diferents combinacions de valors de m, n i p determinen cadascun dels modes que es poden produir en una cavitat ressonant.

En una cavitat ressonant, s'anomena **mode de vibració** a cadascuna de les combinacions de valors enters de m, n i p .

Per acabar d'entendre el significat dels modes, analitzarem un cas particular: el mode 101. Vegem com són el camp elèctric (\vec{E}) i magnètic (\vec{B}) en aquest mode. Per trobar-los cal substituir $m = 1, n = 0$ i $p = 1$ a les expressions (166):

101 es llegeix "u zero u" (no "cent u"), ja que es refereix a tres xifres diferents.

$$\begin{aligned}
 E_x &= 0 \\
 E_y &= A_{E_y} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{c}z\right) e^{-j\omega t} \\
 E_z &= 0 \\
 B_x &= A_{B_x} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{c}z\right) e^{-j\omega t} \\
 B_y &= 0 \\
 B_z &= A_{B_z} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{c}z\right) e^{-j\omega t} \\
 (m, n, p &= 0, 1, 2, \dots) \tag{167}
 \end{aligned}$$

Recordeu
 $\sin 0 = \sin 2\pi = \dots = 0$
 $\cos 0 = \cos 2\pi = \dots = 1$

A la figura 27 podeu visualitzar una representació gràfica de les amplituds d'aquests camps en les tres seccions possibles: en una secció transversal, és a

dir, vista des de davant (figura 27a), longitudinal, des de dalt (com si l'haguéssim tallat per fer un entrepà, figura 27c) i des del costat (figura 27b).

Fixeu-vos primer en el camp elèctric. Com que $E_x = 0$ i $E_z = 0$, aquest camp només presenta component en la direcció y . En els esquemes *a* i *b* podeu comprovar que, efectivament, el camp elèctric sempre apunta en aquesta direcció (fletxes contínues). A l'esquema *c* el camp elèctric és perpendicular al pla del paper i va "cap enfora" respecte al paper (per això està expressat amb el símbol \bullet).

Figura 27

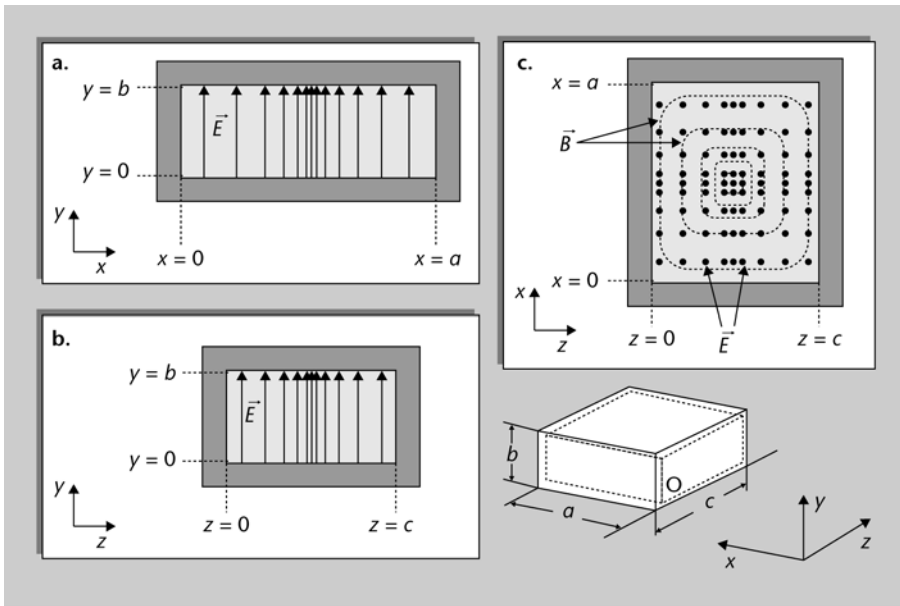


Figura 27

Esquema del camp elèctric i magnètic en un mode TE_{10} d'una guia d'ona de secció rectangular:

- Secció transversal, pla xy , és a dir, vista des de davant. El camp elèctric es representa amb fletxes verticals.
- Secció lateral, pla yz . El camp elèctric es representa amb fletxes verticals.
- Longitudinal des de dalt, pla xz . És a dir, com quan tallem una barra de pa per fer un entrepà. El camp elèctric es representa amb punts i el camp magnètic amb línies discontinües.

L'amplitud del camp elèctric és una funció sinusoidal que es fa zero a $x = 0$ i a $x = a$, i a $z = 0$ i a $z = a$ té un màxim en el centre de la guia. Per això les línies de camp estan més separades a prop de les parets i més juntes cap al centre. Podeu comprovar que aquest comportament de E_x , E_y i E_z està totalment en concordança amb la condició de contorn que diu que el camp elèctric només pot ser normal a les parets.

Pel que fa al camp magnètic, podeu observar que ara succeeix justament a la inversa que en el camp elèctric: no hi ha component en la direcció y ($B_y = 0$) però sí en la resta (observeu les línies discontinües a la figura 27c). Aquest fet no us hauria de sorprendre si recordeu que el camp elèctric i magnètic sempre són perpendiculars entre ells.

Fins aquí us hem explicat com són els modes que es "podrien" produir en una cavitat ressonant de forma general. Com en el cas de les guies d'ona, ara hauríem de determinar quines ones (és a dir, quines freqüències) "sobreviuran" a l'estat transitori i es mantindran en l'estat estacionari. Tanmateix, a diferència de les guies d'ona on hi havia un cert interval de freqüències possibles, en una cavitat ressonant només hi haurà un únic valor possible.

Recordeu

El terme *transitori* es refereix als fenòmens i comportaments que s'observen en l'estat inicial i durant un temps finit, mentre que el terme *estacionari* es refereix als fenòmens que "sobreviuen" de forma indefinida.

La relació que assigna una freqüència determinada a cada mode es pot deduir a partir de l'“obligació” que les equacions del camp elèctric i magnètic en una cavitat ressonant (166) satisfacin l'equació d'ones corresponent:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad (168)$$

No detallarem el procés de resolució perquè queda més enllà dels objectius de l'assignatura i donarem directament la relació que cerquem:

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2 = \omega^2 \mu\epsilon$$

$$m, n, p = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (169)$$

La relació (169) implica, com ja hem dit, que existeix una **única** freqüència possible per a cada mode d'una cavitat ressonant.

Recordeu

L'equació diferencial que explica el comportament d'una ona qualsevol que es propaga amb una velocitat c és:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{u} = 0$$

La **freqüència característica** d'un mode de vibració (f_{mnp}) és la freqüència corresponent a les ones estacionàries corresponents. Per a una cavitat ressonant amb forma de paral·lelepípede regular de dimensions a , b i c , el valor d'aquesta freqüència és:

$$f_{mnp} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}$$

$$m, n, p = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (170)$$

on m , n i p són els índexs corresponents al mode de vibració i μ i ϵ són la permeabilitat magnètica i la permitivitat elèctrica del medi material de l'interior de la cavitat.

Recordeu

$$\omega = 2\pi f$$

Exemple de freqüència característica d'un mode de vibració

Determineu la freqüència característica del mode 101 per a una cavitat ressonant de dimensions $a = 2,0$ cm, $b = 1,5$ cm i $c = 3,0$ cm a l'interior de la qual hi ha aire ($\mu \approx \mu_0$ i $\epsilon \approx \epsilon_0$).

Solució

La freqüència característica d'un mode d'una cavitat ressonant amb forma de paral·lelepípede està determinada per l'equació (170). Per a trobar la freqüència corresponent al mode 101 hem de substituir $m = 1$, $n = 0$ i $p = 1$, és a dir:

$$f_{101} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

$$f_{101} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 10^{-2}}\right)^2 + \left(\frac{0}{1,5 \cdot 10^{-2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{3 \cdot 10^{-2}}\right)^2}}{2\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 9 \text{ GHz} \quad (171)$$

Les cavitats ressonants permeten l'emmagatzematge d'energia en camps elèctrics i magnètics oscil·lants de forma indefinida. Les pèrdues d'energia que es puguin produir són degudes a les successives reflexions a les parets dels conductors pel fet que aquests no són del tot perfectes com havíem suposat a l'inici, és a dir, σ és molt gran però no arriba a ser $\sigma \rightarrow \infty$.

6.2. Què hem après?

Es aquest apartat hem agafat la guia rectangular de l'apartat anterior i l'hem tancat, transformant-la en una caixa. El que es coneix com a caixa ressonant o ressonades. Com en el cas de les guies d'ona, en la cavitat ressonant només estan permesos alguns modes. En aquest cas però, hi ha una única freqüència permesa per mode, que es diu freqüència característica.

7. Problemes resolts

7.1. Enunciats

- 1) Una ona de ràdio presenta una longitud d'ona $\lambda = 9$ m quan es propaga per un medi no magnètic amb una permeabilitat elèctrica relativa $\epsilon_r = 9$. Calculeu la freqüència d'aquesta ona. Podeu fer servir l'aproximació $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s.
- 2) Es necessita enviar un missatge a un submarí que es troba a una profunditat de 120 m. Per tal que el submarí pugui rebre de forma correcta el senyal, cal que l'ona arribi al seu destí amb una intensitat que sigui com a mínim un 1% de la que té quan s'emet (en altres paraules, l'atenuació no pot superar el 99%). Determineu la freqüència màxima que pot tenir l'ona per tal que el missatge pugui ser llegit. La conductivitat de l'aigua de mar és $\sigma = 4,8 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$.
- 3) Una ona que es propaga per un medi amb índex de refracció n_1 incideix sobre una interfície amb un altre medi amb índex n_2 amb un angle d'incidència $\theta = 63,43^\circ$ i s'observa que no es produeix cap ona reflectida. Es decideix reorientar la interfície de tal manera que s'aconsegueix que l'ona hi incideixi de forma perpendicular, i aleshores s'observa que sí que existeix una ona reflectida. Determineu la intensitat d'aquesta ona reflectida, expressada en termes relatius respecte a la intensitat de l'ona incident. Com ha de ser la polarització de l'ona incident perquè aquest exemple correspongui a un cas real?
- 4) Determineu les freqüències de tall dels modes TE_{10} , TE_{01} i TE_{11} per a una guia d'ona de secció rectangular de dimensions $a = 1,5$ cm i $b = 3,0$ cm, suposant que:
 - a) a l'interior de la guia hi ha el buit,
 - b) a l'interior de la guia hi ha un material no ferromagnètic amb $n = 1,50$.
- 5) Determineu les freqüències característiques dels modes 110, 101 i 111 per a una cavitat ressonant amb forma de paral·lelepípede regular de dimensions $a = 20$ cm, $b = 25$ cm i $c = 30$ cm, suposant que:
 - a) a l'interior de la guia hi ha el buit,
 - b) a l'interior de la guia hi ha un material no ferromagnètic amb $n = 1,50$.

7.2. Solucions

- 1) La longitud d'ona λ i la freqüència f d'una ona estan relacionades mitjançant la velocitat de propagació v . Ho varem veure per a una ona en general i per a una ona electromagnètica en particular:

$$\lambda \cdot f = v \quad (172)$$

Vegeu la relació entre la longitud d'ona i la freqüència per a una ona en general al mòdul "Ones" i per a una ona electromagnètica al mòdul "Lleis de Maxwell".

Ja hem vist que la velocitat de propagació d'una ona electromagnètica en un medi qualsevol (v) s'expressa en relació a la velocitat en el buit (c) mitjançant el concepte d'índex de refracció (n):

$$v = \frac{c}{n} \quad (173)$$

Vegeu l'expressió de la velocitat en un medi en relació a la velocitat en el buit al subapartat 1.2.1 d'aquest mòdul.

I d'altra banda sabem que l'índex de refracció depèn de la permeabilitat magnètica i la permitivitat elèctrica relatives (μ_r i ϵ_r) del material (13):

$$n = \sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r} \quad (174)$$

Com que es tracta d'un medi no magnètic, la permeabilitat magnètica es pot aproximar a $\mu_r \approx 1$ i, per tant, obtenim:

$$n \approx \sqrt{\epsilon_r} \quad (175)$$

Així doncs, ja només ens queda combinar l'expressió (175) amb la (173), i la (172):

$$\lambda \cdot f = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (176)$$

I com que el que volem calcular és la freqüència f :

$$f = \frac{c}{\lambda \sqrt{\epsilon_r}} \quad (177)$$

Ja només ens queda substituir els valors de l'enunciat:

$$\begin{aligned} \lambda &= 9 \text{ m} \\ \epsilon_r &= 9 \\ c &\approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (178)$$

I obtenim el resultat:

$$f = \frac{3 \cdot 10^8}{9\sqrt{9}} = 11,1 \text{ MHz} \quad (179)$$

2) A diferència de l'aigua pura, que presenta una conductivitat molt petita, l'aigua de mar presenta una conductivitat relativament alta ($\sigma = 4,8 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$) a causa de l'elevada concentració de sals. Per tant, es pot considerar, fins a cert punt, com un medi conductor. Això vol dir que les ones electromagnètiques que es propaguen per l'oceà pateixen una atenuació significativa.

Recordem l'expressió per a l'atenuació en funció de la profunditat x que ja hem vist (18) :

$$I = I_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\frac{x}{\delta}} \quad (180)$$

on δ és l'anomenada *profunditat de penetració*.

L'enunciat ens diu que el senyal emès ha de ser capaç d'arribar a una profunditat de $x = 120$ m sense baixar de l'1% del seu valor inicial (és a dir, sense que l'atenuació superi el 99%). Això vol dir que:

$$\frac{1}{100} = e^{-\frac{120}{\delta}} \quad (181)$$

A partir d'aquí podem deduir el valor de la profunditat de penetració (δ) mínima necessària per tal que el senyal arribi correctament, és a dir, per tal que la seva intensitat no baixi per sota d'aquest llindar de l'1%. Ho fem traient logaritmes a les dues bandes de l'equació:

$$\ln\left(\frac{1}{100}\right) = -\frac{120}{\delta} \quad (182)$$

$$\delta = -\frac{120}{\ln\left(\frac{1}{100}\right)} = 26,1 \text{ m} \quad (183)$$

D'altra banda, hem vist també la relació entre la profunditat de penetració (δ) i la freqüència (f) (19) :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (184)$$

Si aïllem la freqüència (f) tenim:

$$f = \frac{1}{\delta^2 \pi \mu \sigma} \quad (185)$$

Ja només ens queda substituir els valors. La profunditat de penetració (δ) és la que hem calculat a (183), la permeabilitat magnètica és aproximadament la del buit, ja que l'aigua de mar és un medi no ferromagnètic, i la conductivitat elèctrica (σ) està indicada a l'enunciat:

$$\delta = 26,1 \text{ m}$$

$$\mu \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$$

$$\sigma = 4,8 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1} \quad (186)$$

Vegeu l'atenuació en funció de la profunditat al subapartat 1.3.1 d'aquest mòdul.

Vegeu la relació entre la profunditat de penetració i la freqüència al subapartat 1.3.1 d'aquest mòdul.

Per tant, la freqüència (f) màxima possible és:

$$f = \frac{1}{26,1^2 \cdot \pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4,8} = 77,7 \text{ Hz} \quad (187)$$

3) Abans de resoldre el problema hem de llegir detingudament l'enunciat i identificar-ne les dades rellevants:

a) Existeix un angle ($\theta = 63,43^\circ$) per al qual no hi ha ona reflectida. Aquest angle ha de ser per força l'**angle de Brewster** corresponent a la interfície, atès que és l'únic angle per al qual es pot produir aquest fenomen. Per tant, s'ha de satisfer la llei de Brewster que ja hem vist (113):

$$\tan 63,43^\circ = \frac{n_2}{n_1} \quad (188)$$

Vegeu la llei de Brewster al subapartat 3.2.4 d'aquest mòdul.

Atès que tenim dues incògnites, no podem trobar els valors exactes de n_1 i n_2 , però sí que podem trobar la relació entre tots dos:

$$\begin{aligned} n_2 &= n_1 \tan 63,43^\circ \\ n_2 &= 2n_1 \end{aligned} \quad (189)$$

$$\tan 63,43^\circ = 2$$

b) L'existència d'aquest angle de Brewster implica per força que l'ona incident està polaritzada amb el camp elèctric **paral·lel al pla d'incidència**, ja que és l'únic cas en què pot haver-hi una reflectància $R_p = 0$.

c) Quan l'ona incideix sobre la interfície de forma perpendicular, l'expressió de la reflectància R_p , (144), se simplifica mitjançant:

$$\begin{aligned} \theta_i &= 0^\circ \\ \theta_t &= 0^\circ \end{aligned} \quad (190)$$

Vegeu la reflectància $R_p = 0$ al subapartat 3.2.4 d'aquest mòdul. Vegeu la reflectància en cas d'incidència perpendicular al subapartat 3.2.3 d'aquest mòdul.

I resulta:

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (191)$$

Recordeu

Els angles es mesuren respecte al pla d'incidència, que és perpendicular al pla de la interfície. Per tant, per a incidència perpendicular o normal, tenim $\theta = 0^\circ$.

Com abans, tornem a tenir dues incògnites, però podem resoldre l'equació si apliquem la relació (189). Així reduïrem l'equació a una sola incògnita:

$$R = \left(\frac{n_1 - 2n_1}{n_1 + 2n_1} \right)^2 = \left(\frac{n_1}{3n_1} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^2 \quad (192)$$

La intensitat de l'ona reflectida es troba a partir de la reflectància que acabem de trobar:

$$\frac{I_r}{I_i} = R = \frac{1}{9}$$

4) La freqüència de tall d'un mode TE_{mn} en una guia de secció rectangular de dimensions a i b es pot calcular a partir de l'expressió (158):

$$f_t = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (193)$$

En aquesta guia d'ona, $a = 1,5$ cm i $b = 3,0$ cm.

a) Per al cas del buit, hem de fer servir $\mu = \mu_0$ i $\epsilon = \epsilon_0$.

Mode TE_{10} :

$$f_t = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{1}{0,015}\right)^2 + \left(\frac{0}{0,030}\right)^2} = 9,97 \text{ GHz}$$

Recordeu

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \end{aligned}$$

Mode TE_{01} :

$$f_t = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{0}{0,015}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,030}\right)^2} = 4,98 \text{ GHz}$$

Mode TE_{11} :

$$f_t = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{1}{0,015}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,030}\right)^2} = 11,14 \text{ GHz}$$

Recordeu

Per a un medi no ferromagnètic, podem aproximar:

$$\begin{aligned} n &\approx \sqrt{\epsilon_r} \\ \epsilon_r &\approx n^2 \end{aligned}$$

b) Per a un medi no ferromagnètic amb índex de refracció $n = 1,50$, podem fer servir:

$$\begin{aligned} \mu &\approx \mu_0 \\ \epsilon &= \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \approx n^2 \epsilon_0 = 2,25 \epsilon_0 \end{aligned} \quad (194)$$

Mode TE_{10} :

$$f_t = \frac{1}{2\sqrt{2,25\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{1}{0,015}\right)^2 + \left(\frac{0}{0,030}\right)^2} = 6,64 \text{ GHz}$$

Mode TE_{01} :

$$f_t = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{0}{0,015}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,030}\right)^2} = 3,32 \text{ GHz}$$

Mode TE_{11} :

$$f_t = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{1}{0,015}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,030}\right)^2} = 7,43 \text{ GHz}$$

5) La freqüència característica d'un mode mnp en una cavitat ressonant amb forma de paral·lelepípede de dimensions a , b i c es pot calcular a partir de l'expressió (170):

$$f_{mnp} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2} \quad (195)$$

En aquesta cavitat ressonant, $a = 20 \text{ cm}$, $b = 25 \text{ cm}$ i $c = 30 \text{ cm}$.

a) per al cas del buit, hem de fer servir $\mu = \mu_0$ i $\epsilon = \epsilon_0$.

Mode 110:

$$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{1}{0,20}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,25}\right)^2 + \left(\frac{0}{0,30}\right)^2} = 960 \text{ MHz}$$

Recordeu

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \end{aligned}$$

Mode 101:

$$f_{101} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{1}{0,20}\right)^2 + \left(\frac{0}{0,25}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,30}\right)^2} = 901 \text{ MHz}$$

Mode 111:

$$f_{111} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{1}{0,20}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,25}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,30}\right)^2} = 1.082 \text{ MHz}$$

b) Per a un medi no ferromagnètic amb índex de refracció $n = 1,50$, podem fer servir:

$$\begin{aligned} \mu &\approx \mu_0 \\ \epsilon &= \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \approx n^2 \epsilon_0 = 2,25 \epsilon_0 \end{aligned} \quad (196)$$

Recordeu

Per a un medi no ferromagnètic, podem aproximar:

$$\begin{aligned} n &\approx \sqrt{\epsilon_r} \\ \epsilon_r &\approx n^2 \end{aligned}$$

Mode 110:

$$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{2,25\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{1}{0,20}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,25}\right)^2 + \left(\frac{0}{0,30}\right)^2} = 640 \text{ MHz}$$

Mode 101:

$$f_{101} = \frac{1}{2\sqrt{2,25\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{1}{0,20}\right)^2 + \left(\frac{0}{0,25}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,30}\right)^2} = 601 \text{ MHz}$$

Mode 111:

$$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{2,25\mu_0\varepsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{1}{0,20}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,25}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,30}\right)^2} = 722 \text{ MHz}$$

Resum

La velocitat de propagació de les ones electromagnètiques en un medi material depèn de la permitivitat elèctrica i de la permeabilitat magnètica del material:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}} \quad (197)$$

Per al cas del buit ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ i $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$), la velocitat correspon a la velocitat de la llum en el buit ($c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$).

Aquesta velocitat es pot representar de forma relativa mitjançant el concepte d'**índex de refracció** (n) d'un medi, que és el quocient entre la velocitat d'una ona en el buit i la velocitat de la mateixa ona en el medi en qüestió. El valor de l'índex de refracció està relacionat amb la permeabilitat i la permitivitat relatives del medi:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (198)$$

Quan l'ona es propaga per un medi conductor, la seva intensitat es redueix de forma gradual a causa del fenomen de l'**atenuació**. La **profunditat de penetració** (δ) mesura la distància que una ona és capaç de penetrar dins d'un medi conductor abans d'atenuar-se un cert factor. Aquesta distància depèn de la freqüència de l'ona i de la conductivitat del medi:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (199)$$

L'estat de **polarització** d'una ona electromagnètica indica com "estan posats" els camps elèctric i magnètic. Els dos tipus de polarització que hem estudiat són:

- **Polarització lineal:** el camp elèctric sempre oscil·la en una mateixa direcció.
- **Polarització circular:** la projecció del vector del camp elèctric respecte a un pla perpendicular a la direcció de propagació dibuixa una circumferència.

Quan una ona incideix en una interfície entre dos medis materials part de l'energia es propagarà mitjançant una ona reflectida i l'altra mitjançant una ona transmesa. La geometria que involucra les direccions de propagació d'aquestes tres ones (incident, reflectida i transmesa) és regida per les mateixes lleis de l'òptica geomètrica que s'apliquen a la llum. En canvi, la relació entre

les intensitats depèn del seu estat de polarització. Podem estudiar aquesta relació per a dos casos específics, ja que, a causa de les propietats dels vectors, qualsevol estat de polarització genèric es pot representar com una combinació lineal d'aquests dos estats.

	Polarització perpendicular al pla d'incidència	Polarització paral·lela al pla d'incidència
Reflectància $R = r^2$	$R_s = \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2$	$R_p = \left(\frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right)^2$
Transmitància $T = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t^2$	$T_s = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left(\frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2$	$T_p = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left(\frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right)^2$

Per a una ona polaritzada de forma paral·lela al pla d'incidència, existeix un cert angle, anomenat **angle de Brewster**, per al qual la reflectància es fa 0 i això vol dir que tota l'ona es transmet cap al segon medi. Per a una ona amb polarització perpendicular al pla d'incidència, no existeix aquest angle.

Per altra banda, si l'índex de refracció del primer medi és més gran que el del segon ($n_1 > n_2$), existirà també un angle límit a partir del qual hi ha reflexió total i l'ona no es pot propagar cap al segon medi. Aquest angle s'anomena **angle crític** o **angle de reflexió total**.

Quan una ona incideix sobre una configuració basada en una capa molt prima d'un material dielèctric, es descompon en un nombre indefinit de feixos paral·lels amb desfasaments diferents, cadascun d'ells degut a un nombre diferent de reflexions internes.

Una **guia d'ona** és un dispositiu de geometria variable en el qual un material dielèctric està envoltat per un material conductor en totes les seves direccions excepte una, que correspon a la direcció de propagació. Sota aquesta configuració, només certes ones electromagnètiques s'hi poden propagar, els anomenats **modes de propagació**. Les característiques d'aquests modes estan determinades per la geometria i les dimensions de la guia d'ona. La més important és la **freqüència de tall**, que és la freqüència mínima per sota de la qual una ona no es pot propagar per la guia d'ona.

$$f_t = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (200)$$

Una **cavitat ressonant** és un volum d'un material dielèctric envoltat per un conductor en totes direccions. En el seu interior es produeixen una sèrie d'ones estacionàries les característiques de les quals estan determinades pels anomenats **modes de vibració**, que depenen de la geometria i les dimensions

de la cavitat. Cada mode de vibració presenta una única freqüència possible, l'anomenada **freqüència característica** del mode:

$$f_{mnp} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2} \quad (201)$$

Exercicis d'autoavaluació

- La velocitat de propagació d'una ona electromagnètica és....
 - sempre igual a $c = 2,998 \cdot 10^8$ m/s.
 - més alta com més grans són la permitivitat i la permeabilitat del medi.
 - més baixa com més grans són la permitivitat i la permeabilitat del medi.
 - sempre la mateixa sigui quin sigui el medi per on es propagui.
- La profunditat de penetració d'una ona en un material conductor és...
 - més gran com més alta és la freqüència de l'ona.
 - més gran com més baixa és la freqüència de l'ona.
 - independent de la freqüència de l'ona però dependent de la conductivitat del material.
 - independent de la freqüència de l'ona i de la conductivitat del material.
- En una ona electromagnètica amb polarització lineal...
 - els camps elèctric (\vec{E}) i magnètic (\vec{B}) no són perpendiculars entre sí.
 - tant \vec{E} com \vec{B} oscil·len sempre en una mateixa direcció respectiva i són perpendiculars entre sí.
 - \vec{E} oscil·la sempre en una mateixa direcció però \vec{B} no.
 - \vec{B} oscil·la sempre en una mateixa direcció però \vec{E} no.
- En una interfície entre dos medis qualssevol...
 - els camps elèctric (\vec{E}) i magnètic (\vec{B}) són idèntics a totes dues bandes.
 - les components tangencials de \vec{E} i \vec{B} són idèntiques a totes dues bandes.
 - les components tangencials de \vec{E} i les components normals de \vec{B} són idèntiques a totes dues bandes.
 - les components normals de \vec{E} i la components tangencials de \vec{B} són idèntiques a totes dues bandes.
- En una interfície entre dos medis no conductors...
 - la reflectància i la transmitància sempre han de sumar 1 sigui quina sigui la direcció de polarització de l'ona incident.
 - la reflectància i la transmitància han de sumar 1 només per a les ones amb polarització paral·lela al pla d'incidència.
 - la reflectància i la transmitància han de sumar 1 només per a les ones amb polarització perpendicular al pla d'incidència.
 - la reflectància no pot arribar a fer-se zero mai.
- En una interfície entre l'aire ($n \approx 1$) i un vidre ($n \approx 1,5$)...
 - existeix un angle de Brewster i un angle crític en tots dos sentits.
 - només existeix angle de Brewster en un sentit però angle crític en tots dos sentits.
 - hi ha angle de Brewster en tots dos sentits però només hi ha angle crític quan l'ona incideix des del costat de l'aire.
 - hi ha angle de Brewster en tots dos sentits però només hi ha angle crític quan l'ona incideix des del costat de l'aigua.
- En una guia d'ona rectangular, el camp elèctric d'una ona que es propaga en el mode TE_{01} presenta components...
 - E_x i E_y
 - només E_x
 - només E_y
 - No es pot propagar cap ona en aquest mode, perquè el primer subíndex és un 0.
- En una guia d'ona rectangular, el camp elèctric d'una ona que es propaga en el mode TM_{01} presenta components...
 - E_x i E_y
 - només E_x
 - només E_y
 - No es pot propagar cap ona en aquest mode, perquè el primer subíndex és un 0.
- En una guia d'ona rectangular de dimensions $a = 1$ cm i $b = 2$ cm a l'interior de la qual hi ha el buit, la freqüència mínima per sota de la qual una ona no s'hi pot propagar és...
 - 748 kHz.
 - 7,48 GHz.
 - 14,95 GHz.
 - 1495 kHz.

10. De les magnituds següents, quina correspon a la freqüència característica del mode de vibració 110 d'una cavitat ressonant de dimensions $a = 1$ cm, $b = 2$ cm i $c = 3$ cm? Suposeu que el medi de l'interior és el buit.

- a) 1,03 MHz.
- b) 10,3 GHz.
- c) 1,67 MHz.
- d) 16,7 GHz.

Solucionari

1. c; 2. b; 3. b; 4. c; 5. a; 6. d; 7. b; 8. d; 9. b; 10. d

Glossari

amplitud *f* Separació màxima que pren una magnitud oscil·latòria respecte la posició d'equilibri.

angle de Brewster *m* Angle per al qual una ona electromagnètica amb polarització paral·lela al pla d'incidència no es reflecteix i es transmet completament. Això és equivalent a dir que l'ona reflectida està per força polaritzada perpendicularment al pla d'incidència. El seu valor depèn dels índexs de refracció dels dos medis.

angle crític *m* Angle a partir del qual una ona electromagnètica que incideix sobre una interfície de separació entre dos medis es reflecteix completament i, per tant, no existeix ona transmesa. El seu valor depèn dels índexs de refracció dels dos medis.

sin. **angle de reflexió total**

angle de reflexió total *m*

sin. **angle crític**

camp elèctric *m* Entitat matemàtica que s'utilitza per a concentrar, amb una sola expressió, tota la informació elèctrica en un punt de l'espai.

camp magnètic *m* Entitat matemàtica que s'utilitza per a concentrar, amb una sola expressió, tota la informació magnètica en un punt de l'espai.

capa prima *f* Dispositiu basat en una configuració formada per un material dielèctric d'un gruix relativament prim sobre el qual es fan incidir ones electromagnètiques per tal que s'hi produeixin interferències.

cavitat ressonant *f* Dispositiu basat en una configuració en la qual un medi dielèctric està limitat per un material conductor en totes direccions. En una cavitat ressonant es produeixen ones estacionàries amb unes freqüències determinades.

coeficients de Fresnel *m pl* Relacions entre les amplituds de les ones incident i reflectida, i incident i transmesa per a una interfície entre dos medis. Els valors dels coeficients varien en funció dels índexs de refracció dels dos medis implicats, i també en funció de la polarització de l'ona incident.

conductor *m* Material en el qual, a causa de la seva estructura microscòpica, poden haver-hi càrregues lliures que es veuran afectades per la presència d'un camp elèctric i, per tant, permetran al material conduir corrent elèctric.

constant d'ona *f* Ritme de variació del desfasament respecte l'espai, igual a 2π dividit per la longitud d'ona.

dielèctric *m* Material en el qual, a causa de la seva estructura microscòpica, les càrregues que hi ha estan lligades i no es poden moure lliurement.

fase *f* Estat d'una ona en un instant i posició determinats.

freqüència *f* Nombre de cicles o oscil·lacions que realitza una magnitud oscil·latòria i periòdica per unitat de temps.

freqüència angular *f* Ritme de variació de la fase en funció del temps. És igual a la freqüència multiplicada per 2π .

freqüència de tall *f* Freqüència mínima per sota de la qual una ona no pot propagar-se per una guia d'ona segons un cert mode.

guia d'ona *f* Dispositiu basat en una configuració en la qual un medi dielèctric està limitat per un material conductor en totes direccions excepte una. Una guia d'ona permet la propagació de certes ones d'una manera eficient.

incidència normal *f* Situació en la qual una ona electromagnètica incideix sobre una interfície de canvi de medi de forma perpendicular a aquesta.

intensitat *f* Potència d'una ona per unitat de superfície. És proporcional al quadrat de l'amplitud de l'ona.

línies de camp *f pl* Línies imaginàries que serveixen per a dibuixar el camp i per a donar una idea de quina seria la direcció i la intensitat del camp electrostàtic en un determinat punt de l'espai.

longitud d'ona *f* Distància mínima entre dos punts d'una ona que tenen el mateix estat d'oscil·lació.

mode *m* Ona electromagnètica amb una configuració determinada que es pot propagar per una guia d'ona o pot establir-se de forma estacionària en una cavitat ressonant.

ona *f* Pertorbació que es propaga per l'espai i el temps, amb transport d'energia però sense transport net de matèria.

ona electromagnètica *f* Ona que propaga energia electromagnètica.

ona harmònica *f* Ona la magnitud de la qual es pot expressar matemàticament per una funció sinusoidal.

permeabilitat magnètica *f* Propietat dels medis materials que dóna compte de les seves propietats magnètiques. En el valor de la permeabilitat es concentren tots els efectes microscòpics relacionats amb el camp magnètic.

permitivitat elèctrica *f* Propietat dels medis materials que dóna compte de les seves propietats elèctriques. En el valor de la permitivitat es concentren tots els efectes microscòpics relacionats amb el camp elèctric.

polarització *f* Condició d'una ona transversal per la qual la seva magnitud característica està establerta amb una orientació determinada respecte la direcció de propagació.

polarització circular *f* Polarització en el qual la direcció d'oscil·lació del camp elèctric (o magnètic) d'una ona transversal varia periòdicament de manera que la seva projecció sobre un pla perpendicular a la direcció de propagació dibuixa un cercle. Això és equivalent a dir que les components en la direccions x i y estan desfasades un angle $\pi/2$.

polarització lineal *f* Polarització en el qual el camp elèctric (o magnètic) d'una ona transversal sempre oscil·la en una mateixa direcció. Això és equivalent a dir que les components en la direccions x i y estan en fase.

reflectància *f* Relació entre les intensitats de l'ona incident i l'ona reflectida per a una interfície entre dos medis. El seu valor varia en funció dels índexs de refracció dels dos medis implicats i també en funció de la polarització de l'ona incident.

transmitància *f* Relació entre les intensitats de l'ona incident i l'ona transmesa per a una interfície entre dos medis. El seu valor varia en funció dels índexs de refracció dels dos medis implicats i també en funció de la polarització de l'ona incident.

Bibliografia

Dios, F.; Artigas, D.; Reolons, J.; Comerón, J.; Canal, F. (1998). *Campos electromagnéticos*. Barcelona: Edicions UPC.

Lorrain, P.; Corson, D. (1972). *Campos y ondas electromagnéticos*. Madrid: Selecciones Científicas.

Reitz, J.; Milford, F.; Christy, R. (1960). *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Pearson Addison-Wesley.