

# Línies de transmissió

Xavier Xirgu Aleixandre

PID\_00159126



# Índex

<b>Introducció</b> .....	7
<b>Objectius</b> .....	10
<b>1. Línies de transmissió</b> .....	11
1.1. Concepte de línia de transmissió .....	11
1.2. Característiques físiques de les línies de transmissió .....	14
1.2.1. Representació esquemàtica de les línies de transmissió ...	15
1.2.2. Classificació de les línies de transmissió en funció de la seva secció transversal .....	16
1.2.3. Característiques pròpies de les línies .....	17
1.3. Senyals dins de les línies de transmissió .....	18
1.4. Característiques del model de les línies de transmissió .....	20
1.4.1. Hipòtesi inicial: aproximació quasiestàtica .....	20
1.4.2. Camps elèctrics i magnètics entre conductors .....	21
1.5. Model de línia de transmissió .....	23
1.6. Equacions d'ona en una dimensió o equacions del telegrafista .....	28
1.6.1. Impedància característica .....	29
1.6.2. Aproximació a línies de transmissió ideals .....	31
1.7. Coeficient de reflexió .....	33
1.8. Possibles valors de la impedància de càrrega, $Z_L$ .....	36
1.8.1. Impedància de càrrega real .....	36
1.8.2. Impedància de càrrega imaginària .....	38
1.8.3. Impedància de càrrega complexa .....	39
1.9. Què hem après? .....	39
<b>2. Exemples de circuits</b> .....	41
2.1. Circuits amb una línia de transmissió .....	41
2.1.1. Coeficient de reflexió en el generador .....	41
2.2. Circuits amb dues línies de transmissió: coeficient de transmissió .....	43
2.3. Què hem après? .....	45
<b>3. Transmissió de senyals sinusoidals</b> .....	46
3.1. Els senyals sinusoidals .....	46
3.2. Propietats dels senyals sinusoidals .....	48
3.2.1. Longitud d'ona .....	48
3.2.2. Interferència .....	49
3.3. Coeficient de reflexió en una línia de transmissió ideal amb senyals sinusoidals .....	51
3.3.1. Coeficient de reflexió en la càrrega .....	53

3.4. Impedància d'entrada en una línia de transmissió amb senyals sinusoidals .....	53
3.5. Periodicitat de la impedància d'entrada, o línies de $\lambda/2$ .....	55
3.5.1. Impedància en curtcircuit i en circuit obert .....	56
3.6. Inversor d'impedància d'entrada o línies de $\lambda/4$ .....	58
3.7. Ones estacionàries .....	59
3.7.1. Relació d'ona estacionària .....	63
3.8. Què hem après? .....	64
<b>4. La carta d'Smith</b> .....	66
4.1. Descripció de la carta d'Smith .....	66
4.2. Com s'utilitza la carta d'Smith .....	73
4.2.1. Exemple d'utilització de la carta d'Smith .....	75
4.2.2. Exemple de determinació d'impedàncies de càrrega .....	78
4.3. Precisió de la carta d'Smith .....	80
4.4. Què hem après? .....	81
<b>5. Adaptació d'impedàncies</b> .....	82
5.1. Adaptació en sèrie .....	82
5.2. Adaptació en paral·lel .....	84
5.3. Transformador $1/4$ .....	86
5.4. Què hem après? .....	88
<b>6. Tipus de línies de transmissió</b> .....	89
6.1. Petita introducció a les pèrdues .....	89
6.1.1. Pèrdues del conductor .....	89
6.1.2. Pèrdues per radiació .....	90
6.1.3. Pèrdues per escalfament del dielèctric .....	90
6.1.4. Pèrdues per acoblament i descàrrega .....	90
6.2. Paràmetres característics de les línies de transmissió amb pèrdues .....	91
6.2.1. Línies de pèrdues baixes .....	92
6.2.2. Efecte de l'atenuació en el coeficient de reflexió .....	92
6.3. Tipus de línies de transmissió .....	93
6.3.1. Línies de plaques paral·leles .....	93
6.3.2. Línies bifilars .....	95
6.3.3. Línies de transmissió coaxials o concèntriques .....	96
6.3.4. Línies triplaca .....	97
6.3.5. Línia micropista .....	98
6.3.6. Línies coplanàries .....	99
6.4. Què hem après? .....	100
<b>7. Problemes resolts</b> .....	102
7.1. Enunciats .....	102
7.2. Solucions .....	102

---

<b>Resum</b> .....	108
<b>Exercicis d'autoavaluació</b> .....	111
<b>Solucionari</b> .....	113
<b>Glossari</b> .....	113
<b>Bibliografia</b> .....	113



## Introducció

En altres mòduls heu vist quines són les característiques principals de les ones electromagnètiques, com es propaguen en el buit, entre plaques conductores o en guies d'ones. En aquest mòdul parlarem d'un nou element relacionat amb la propagació de les ones electromagnètiques: les línies de transmissió.

Vegeu les característiques principals de les ones electromagnètiques i com es propaguen als mòduls "Lleis de Maxwell" i "Propagació d'ones electromagnètiques".

El primer que us podeu preguntar a l'hora de pensar en les línies de transmissió pot ser: què són? com són aquests dispositius? per a què serveixen?

Per a intentar respondre aquestes preguntes podem fer ús de la Viquipèdia, que diu:

“Una línia de transmissió és una estructura material utilitzada per a dirigir la transmissió d'energia en forma d'ones electromagnètiques, compronent el tot o una part de la distància entre dos llocs que es comuniquen.”

Perquè us feu una idea: el cable que porta el senyal de televisió des de l'antena fins al televisor és una línia de transmissió (tot i que molt llarga en comparació amb algunes de les que veurem en aquest mòdul).

Us pot semblar que connectant una antena a un receptor mitjançant un cable qualsevol n'hi ha prou per a tenir una bona recepció d'un senyal, però no és així.

### La necessitat de les línies de transmissió

Us posarem un parell d'exemples per tal d'entendre millor per què són necessàries les línies de transmissió i quins problemes ens podem trobar en connectar dos dispositius.

Prenguem com a exemple un circuit compost per una aixeta i una rentadora. Entre aquests dos dispositius necessitem una mànega, que és l'element que farà la funció de línia de transmissió, per tal de connectar ambdós aparells i poder transmetre l'aigua des de l'aixeta fins a la rentadora. Si l'aixeta està oberta, depèn del gruix i llargària de la mànega que la vostra rentadora rebí tota l'aigua que necessita per a rentar la roba. Mirem-ho amb més detall:

- Si, per exemple, posem una mànega molt estreta i llarga, hi haurà una gran resistència al pas de l'aigua i la rentadora no rebrà prou aigua (a part que possiblement l'aixeta no tindrà prou potència o pressió per a traslladar tota l'aigua fins a l'entrada de la rentadora), de forma que es pot espatllar per manca d'aigua.
- Si, en el cas contrari, utilitzem una mànega massa gruixuda, hi haurà menys resistència, però podem tenir massa entrada d'aigua, de manera que la rentadora tampoc funcioni correctament.

Per tant, ens cal dissenyar tot el sistema per tal que la rentadora rebí la quantitat exacta d'aigua que necessita i així poder rentar la roba sense problemes. En aquest cas direm que el sistema es troba ben adaptat o ben acoblat.

Us mostrarem més funcionalitats de la línia de transmissió amb el següent exemple:.

Possiblement alguna vegada tots hem tingut una corda molt llarga a les mans que s'ha enganxat amb alguna cantonada o algun obstacle del terra. Instintivament tots hem agafat la corda i hem fet un moviment bruscat amb el braç per tal de generar un moviment o "senyal" que es propagués a través de la corda i el qual, en arribar a l'obstacle, la desenxanxés. Ara bé, quan el "senyal" arriba a l'obstacle poden passar dues coses:

- si l'obstacle ha absorbit tota l'energia que hem transmès a la corda, aquesta quedarà enganxada.
- però si l'obstacle no ha pogut aguantar tota l'energia del senyal que circula per la corda, aquesta es desenganxarà.

A l'hora de generar aquesta pertorbació, o senyal, també hem de tenir en compte les propietats de la corda que tenim a les mans. En el cas de tenir una corda molt pesant haurem de fer un gran esforç per a propagar el senyal, o no tindrà prou força per a arribar fins a l'obstacle; si la corda es molt llarga el senyal tampoc arribarà a l'obstacle que enganxa la corda.

En el cas de les línies de transmissió no es transmetrà un senyal generat per un moviment físic, com el del nostre braç, sinó una diferència de potencial que es propagarà per l'interior de la línia.

Els exemples anteriors ens mostren símils de línies de transmissió per tal que us feu una idea de quins problemes podem tenir a l'hora de connectar un dispositiu generador d'un senyal i un altre dispositiu receptor del senyal. Aquests problemes suposen un gran obstacle a l'hora de dissenyar, per exemple, sistemes de transmissió i recepció de ràdio, en què el senyal és molt sensible a alteracions i atenuacions. També poden suposar un obstacle per a dissenyar dispositius com filtres de ràdio, a causa de les característiques dels senyals a filtrar, en què podem fer servir les línies de transmissió per a modificar el nostre senyal.

En aquest mòdul veurem com podem dissenyar les línies de transmissió, l'element de connexió entre dos dispositius, per a obtenir el millor grau d'acoblament o adaptació possible (recordeu l'exemple anterior).

El terme *acoblament* s'utilitza quan un senyal s'ha transmès en la seva totalitat, sense que hagi sofert cap tipus de pèrdua o atenuació des del dispositiu que el genera fins al dispositiu que el rep.

En el primer apartat d'aquest mòdul explicarem què són les línies de transmissió per tal que en tingueu una idea conceptual i en farem un model equivalent per a poder treballar-hi fàcilment. Un cop tinguem el model equivalent, en definirem els paràmetres principals. En l'apartat 2 veurem uns exemples d'aplicació del model equivalent directament sobre circuits i com evolucionen els senyals per l'interior de la línia de transmissió.

En l'apartat 3 estudiarem el cas particular de la transmissió de senyals sinusoidals per la línia de transmissió i com es creen les ones estacionàries dins de les línies.

En l'apartat 4 us presentarem una eina imprescindible per a treballar amb les línies de transmissió: la carta d'Smith. Ja veureu que aquesta eina pot simplificar-vos molt la feina i tots els càlculs. En l'apartat 5 veureu uns exemples aplicats d'ús de la carta d'Smith.

En l'apartat 6 us presentarem una introducció a les línies de transmissió amb pèrdues, així com als diferents tipus de línies de transmissió que us podeu trobar en el dia a dia. També donarem un cop d'ull a les línies del tipus micropista



i triplaca, molt importants ja que són les més utilitzades en els circuits integrats que es fan actualment.

Només ens queda desitjar-vos ànims per a estudiar aquest mòdul i si en algun moment penseu que les línies de transmissió semblen complicades, no us espanteu; ho són, però no tant com sembla al principi, i ja veureu que amb la carta d'Smith tots els càlculs se simplifiquen força.

## Objectius

Els principals objectius d'aquest mòdul són els següents:

- 1.** Entendre què és una línia de transmissió.
- 2.** Comprendre els paràmetres que defineixen una línia de transmissió per tal de saber com funciona.
- 3.** Entendre el concepte de transmissió de la diferència de potencial entre dos punts d'un circuit.
- 4.** Aprendre el funcionament de la carta d'Smith, quina és la seva utilitat, els paràmetres que la defineixen i com utilitzar-la.
- 5.** Entendre el concepte d'adaptació d'impedàncies en les línies de transmissió.
- 6.** Comprendre els conceptes explicats i saber-los aplicar en el disseny de circuits, i entendre com varia el seu comportament en funció de la freqüència.
- 7.** Tenir la base d'alguns dissenys de línies de transmissió, inclosos els de les del tipus micropista i triplaca, per tal d'obtenir un coneixement més general de les diferents estructures i configuracions en les quals cal tenir en compte les línies de transmissió.

## 1. Línies de transmissió

Iniciarem la introducció a les línies de transmissió amb l'objectiu que entengueu conceptualment:

- com són les línies de transmissió,
- quina és la seva funció,
- quins elements les componen,
- com són els senyals que hi circulen.

Després veureu com podem construir un model elèctric que es comporti igual que les línies de transmissió, mitjançant elements passius tan bàsics com una resistència, un condensador i una bobina.

### 1.1. Concepte de línia de transmissió

Tal com hem dit en la introducció del mòdul, les línies de transmissió serveixen per a transmetre senyals elèctrics (ones electromagnètiques) d'un dispositiu a un altre.

Seguint amb l'exemple de la corda, imagineu-vos que ara la corda està lligada a una paret, en lloc d'estar enganxada a un obstacle del terra. Si generem un moviment brusc amb el braç, podem comparar els elements d'aquest exemple amb els elements d'un circuit elèctric (vegeu les figures 1a i 1b):

- A la figura 1a teniu un circuit que inclou un generador de senyals sinusoidals, format per  $V_0$  i  $Z_0$ , una línia de transmissió (element central), i una càrrega o impedància,  $Z_L$ .
- A la figura 1b teniu la representació de l'exemple d'una persona amb un extrem d'una corda a la mà i l'altre extrem lligat a una paret.

A l'hora de fer la comparació, el nostre braç seria la font del senyal corresponent a la font de tensió en el circuit; la corda, la nostra línia de transmissió; i l'obstacle, el nostre dispositiu que rep el senyal i en fa ús (el processa) o simplement el dissipa.

Figura 1

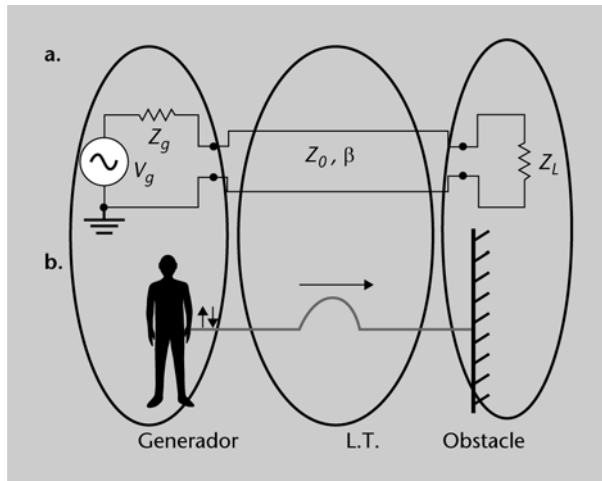


Figura 1

Comparació del circuit elèctric amb una línia de transmissió (a) i un moviment generat amb les mans en una corda lligada a la paret (b).

En la figura a) la font de tensió faria de generador,  $Z_L$  faria de càrrega o obstacle i la corda faria de línia de transmissió.

En el cas dels circuits elèctrics, el que intentem transmetre a través de la línia és un senyal elèctric (o ona electromagnètica) caracteritzat per una tensió i un corrent.

El senyal elèctric estarà generat per una font de tensió, que connectarem a la línia de transmissió. Com que tota font de tensió està formada per dos pols (un de positiu i un altre de negatiu), necessitarem connectar la línia de transmissió a aquests dos pols. Per tal de poder utilitzar el nostre símil de la corda, necessitem tenir dues cordes per a poder simular els dos pols de la font de tensió i de la línia de transmissió (vegeu la figura 2). El que mesurarem en el símil serà la diferència de posició entre les dues cordes a una distància determinada de les nostres mans.

Figura 2

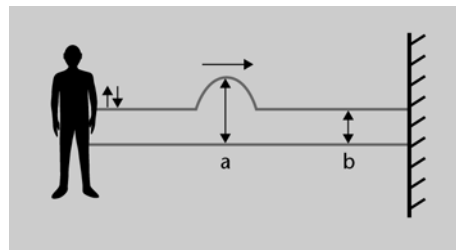


Figura 2

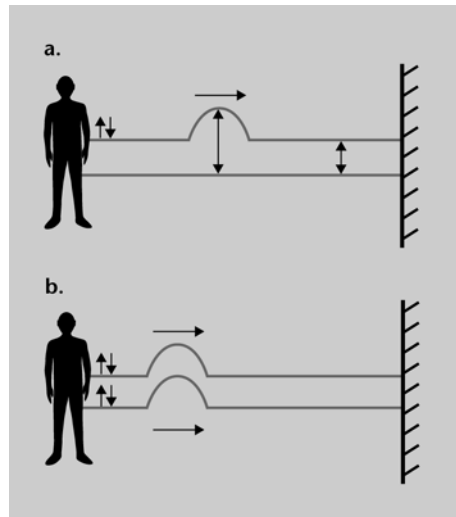
Representació de la transmissió de senyals mitjançant la propagació d'una pertorbació en dues cordes. En el punt  $a$  tindrem una amplitud de senyal diferent de la del punt  $b$  (zero).

Els senyals generats per la font de tensió poden tenir qualsevol forma:

- tensió constant, exemple de només fer un moviment bruscat amb un braç i deixar l'altre quiet, tal com podeu veure a la figura 3a;
- tensió alterna, exemple de realitzar un moviment amb els dos braços, amb un valor de pic determinat per la diferència de potencial entre els dos terminals de la font, figura 3b.

D'aquesta manera, la nostra línia de transmissió serà un dispositiu que connectarem als dos pols d'una font de tensió, pel qual circularà el senyal generat (ja sigui un senyal en corrent continu, DC, o en altern, AC).

Figura 3

**Figura 3**

Símil de generació de tensió en corrent continu (a) o en altern (b), en funció de si generem el senyal amb un braç o amb tots dos.

Tal com hem dit a la introducció del mòdul, no n'hi ha prou amb utilitzar un cable o fil elèctric per a connectar una font i un aparell, cal que el cable estigui adaptat al senyal que es vol propagar i a l'aparell al qual va connectat.

En les línies de transmissió el que farem és analitzar com es propaga un corrent (i també una tensió) en **forma d'ona**. Com tota ona, aquesta es propaga i pot "impactar" contra els elements del circuit i reflectir-s'hi totalment o parcialment.

Cal recalcar que en les línies de transmissió és molt important la seva longitud respecte a la longitud d'ona, de forma que si tenim una línia molt curta, no podrem utilitzar-la com a línia de transmissió, ja que l'ona no hi podrà circular. En els circuits en què la longitud d'ona és superior a la llargada del circuit no es pot aplicar el concepte de línia de transmissió; en aquest cas fem servir la teoria de circuits.

És important que us quedeu amb el concepte de **línia de transmissió**:

És un dispositiu que serveix per a transmetre senyals electromagnètics, en forma d'ona, d'una font a una càrrega.

El seu funcionament es basa en el temps que tarda el senyal, o ona electromagnètica, en propagar-se per l'interior de la línia de transmissió.

El fet que el funcionament de les línies de transmissió es basi en el temps de propagació del senyal concorda amb el fet que la longitud de la línia de transmissió ha de ser molt més llarga que la longitud d'ona del senyal.

Utilitzant l'exemple de la corda, si tenim una corda molt curta, ens serà molt difícil, o fins i tot impossible, generar un senyal que s'hi pugui propagar.

## 1.2. Característiques físiques de les línies de transmissió

Un cop vista la idea de línies de transmissió, vegem exactament què són.

Definirem físicament la **línia de transmissió** com un sistema de dos, o més, conductors separats per un dielèctric i amb les característiques següents:

- Els conductors es troben en disposició paral·lela.
- Els conductors estan immersos en un medi dielèctric.
- La secció transversal del sistema no canvia al llarg del seu recorregut.

Però què ens està dient aquesta definició? Doncs, en altres paraules, que:

- Una línia de transmissió està formada per, almenys, dos conductors: si penseu en el cable de la televisió, fixeuvos que és un cable coaxial, amb un conductor a dins i un altre a fora (vegeu la figura 4).
- Que els conductors estan en un medi dielèctric, és a dir, aïllant: un cop més, si pensem en el cable de la televisió, tenim que els dos conductors estan separats pel plàstic.
- Que la disposició dels dos conductors és sempre igual. Si prenem com a exemple de línia de transmissió el cable de l'antena, podem tallar el cable en qualsevol punt i la secció que veurem serà exactament la mateixa en tots els punts, de manera que no ha canviat la seva secció transversal. La secció transversal permet, fins i tot, classificar les línies de transmissió.

### Recordeu

L'aire també és un dielèctric.

Figura 4

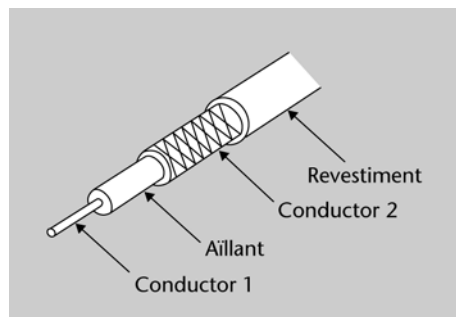


Figura 4

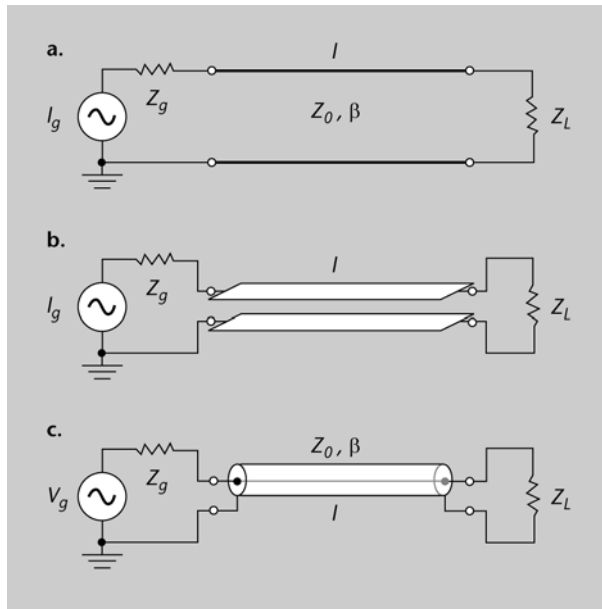
Cable coaxial d'una antena de televisió. Podeu observar els dos conductors, disposats concèntricament, el material aïllant entre ambdós, i el revestiment de plàstic.

Un cop vist què són les línies de transmissió, hem de veure com treballar-hi esquemàticament. Penseu en els circuits elèctrics: un condensador és un objecte físic, però quan dibuixem un circuit el representem només amb dues barres verticals. Amb les línies de transmissió fem el mateix: les representem esquemàticament.

### 1.2.1. Representació esquemàtica de les línies de transmissió

Tot seguit us mostrarem com es representen les línies de transmissió. Per a fer-ho, agafarem tres maneres diferents de representar-les, com les que teniu a la figura 5: bifilars, plano-paral·leles i concèntriques.

Figura 5



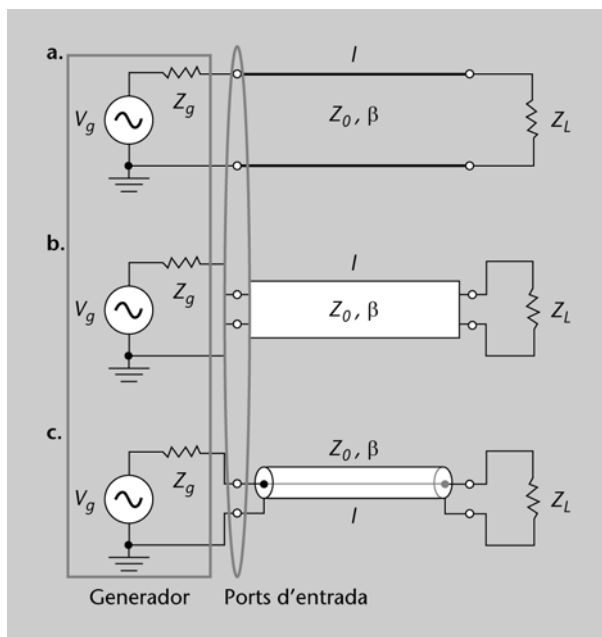
**Figura 5**

Diverses representacions gràfiques de les línies de transmissió: a) bifilars, formades per dos fils conductors en paral·lel; b) planes; c) concèntriques, formades per dos conductors concèntrics un respecte a l'altre (font: en.wikipedia.org).

Fixeu-vos que totes les representacions esquemàtiques de les línies estan formades per:

- un port d'entrada format per dos pols o connectors, al qual normalment connectarem un generador de tensió (figura 6),

Figura 6



**Figura 6**

Situació dels ports d'entrada en una línia de transmissió, on es connecten els generadors de senyals.

- els dos o més conductors en la configuració apropiada: paral·lela o concèntrica,
- un port de sortida igualment format per dos pols o connectors, al qual connectarem una càrrega,  $Z_L$ , (el subíndex  $L$  prové del mot anglès *load*, 'càrrega'), presentada a la figura 7 de la forma més general.

Figura 7

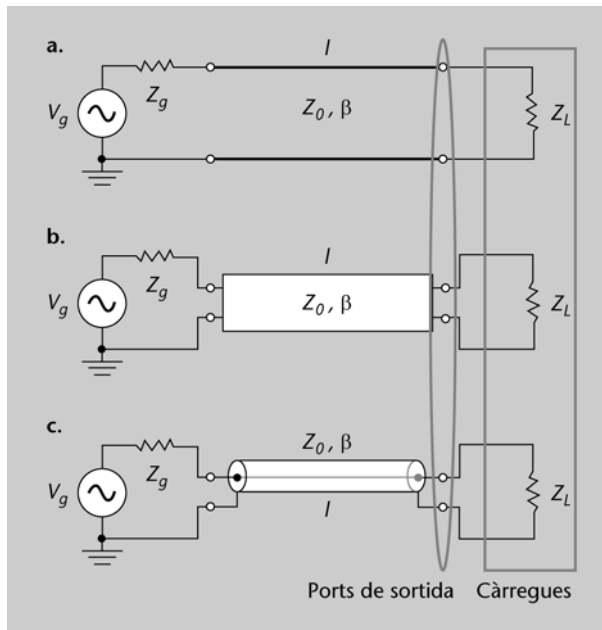


Figura 7

Posició dels ports de sortida de les línies de transmissió i de les càrregues.

Els components bàsics de les línies de transmissió són:

- Port d'entrada
- Els conductors (dos o més)
- Port de sortida

Ara bé, per què hem triat precisament aquestes tres possibles representacions? Doncs perquè cadascuna respon a un tipus diferent de línia de transmissió, segons quina sigui la seva secció transversal, com veureu tot seguit.

Val a dir, però, que a l'hora de treballar amb esquemes de circuits, es fa servir indistintament qualsevol dels tres tipus de representacions, independentment de la línia a què correspon.

### 1.2.2. Classificació de les línies de transmissió en funció de la seva secció transversal

En funció de la seva secció transversal podem trobar línies de transmissió dels següents tipus:

- **Bifilars.** La línia està formada per dos fils, o conductors, en disposició paral·lela com podeu veure a la figura 5a. Aquestes línies s'utilitzen en al-



gunes antenes de televisió (tot i que avui en dia el més normal és fer servir els cables coaxials).

- **Coplanàries.** La línia està formada per dos o més plans en disposició paral·lela com podeu veure a la figura 5b. Aquest tipus de línia s'utilitza en circuits integrats. Normalment es fan servir per a dissenyar les línies micropista (en anglès *microstrip*) i triplaca (en anglès *stripline*), que descriurem en l'últim apartat del mòdul.
- **Concèntriques.** La línia està formada per dos conductors cilíndrics, normalment un dins de l'altre, com els de la figura 5c. L'exemple més usual d'aquest tipus de línies és el cable de l'antena de televisió.

A part de les característiques físiques de les línies de transmissió, podem diferenciar dues línies del mateix tipus (ja sigui bifilar, coplanària o concèntrica) segons les seves característiques pròpies.

### 1.2.3. Característiques pròpies de les línies

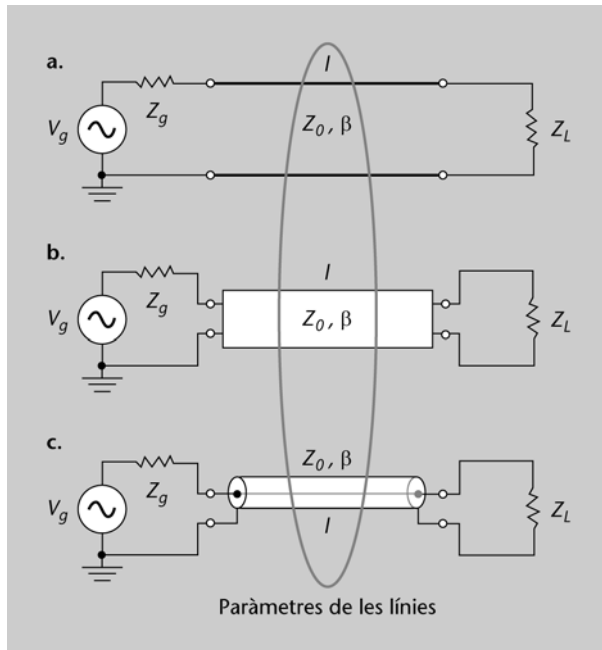
Les línies de transmissió es caracteritzen per una sèrie de paràmetres (vegeu la figura 8):

- Una impedància característica  $Z_0$  que, seguint amb el símil de la mànega, correspondria a l'efecte de tenir una mànega més estreta.
- La seva longitud  $l$  que, seguint amb el símil de la corda, correspondria a l'efecte de la llargada de la corda.
- Un coeficient de propagació  $\beta$ . Aquest paràmetre ens defineix el comportament de la línia en funció de les característiques de l'ona que hi circula. Com que estem parlant de transmetre un senyal mitjançant dos conductors, aquests tindran unes característiques i un comportament diferents en funció de la freqüència del senyal.

$\beta$  és la lletra grega minúscula i es llegeix "beta".

Utilitzant el símil de la corda, podeu pensar que si realitzem un moviment molt lleu, gairebé imperceptible, el mateix pes de la corda farà que no es propagui cap senyal. En canvi, si realitzem un senyal molt brusc, és possible que la corda es trenqui. Aquests dos fets depenen del senyal que vulguem transmetre, però també de les característiques pròpies de la corda.

Figura 8

**Figura 8**

Paràmetres de les línies de transmissió: longitud ( $l$ ), impedància característica ( $Z_0$ ) i coeficient de propagació ( $\beta$ ).

Els paràmetres que caracteritzen una línia de transmissió són:

- La seva longitud,  $l$ .
- La seva impedància característica,  $Z_0$ .
- El seu coeficient de propagació,  $\beta$ .

Val a dir que, pel que fa a la representació, en un dibuix esquemàtic es poden fer servir qualsevol de les representacions físiques mostrades a la figura 8, ja que totes estan formades pels mateixos elements comentats en els punts anteriors. La diferència en el seu ús és purament descriptiva o conceptual, ja que:

- podeu utilitzar el disseny concèntric en el cas d'estar representant un circuit amb una antena i un televisor (on s'utilitza un cable coaxial),
- o una línia bifilar en el cas que dissenyeu un circuit entre una emissora de ràdio i una antena dipolar,

però tots dos dibuixos representaran dues línies de transmissió que només es diferenciarien pels seus paràmetres, que són els que hem vist en aquest subapartat.

Tal com ho hem presentat, les línies de transmissió s'utilitzen com un dispositiu més en el disseny de circuits elèctrics.

### 1.3. Senyals dins de les línies de transmissió

Ara que ja heu vist com són les línies de transmissió i quins són els seus paràmetres característics, ens centrarem en el senyal que transmetrem dins de la línia.

Com hem dit, una font d'alimentació  $V_g$ , genera el senyal. La font crea una diferència de potencial entre els seus pols que anomenarem  $v(z,t)$  (vegeu la figura 9). Aquest senyal es transmetrà al llarg de tota la línia i les seves característiques seran funció de la posició,  $z$ , en la qual fem la mesura dins de la línia de transmissió, i del temps,  $t$ . Fixeu-vos que per això el representem amb  $v(z,t)$ :  $v$  representa el senyal i  $z$  i  $t$ , de què depèn el senyal.

Vegeu que el senyal ve generat per una font d'alimentació al subapartat 1.2 d'aquest mòdul.

Aquesta mesura és equivalent a mesurar la diferència de potencial entre els dos conductors que formen la línia. En aquest cas utilitzarem la coma de superíndex per a diferenciar les tensions i els corrents que hi ha en els pols d'entrada i de sortida de la línia.

Figura 9

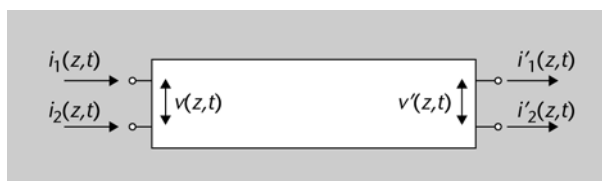


Figura 9

Corrents  $i_1$  i  $i_2$ , i tensions  $v(z,t)$  i  $v'(z,t)$ , que circulen pels ports d'una línia de transmissió, tots ells funció de la posició dins de la línia,  $z$ , i del temps,  $t$ .

Ben mirat, podeu pensar que és normal que la tensió pugui variar en funció de la posició dins de la línia. Recordeu que si tenim una corda, el moviment que hem fet amb el braç anirà propagant-se a través de la corda i hi haurà una diferència de posició entre els punts on hi hagi la pertorbació respecte als punts on la corda estigui en repòs.

Això ho podeu veure amb el símil de les cordes lligades a la paret (figura 3). Tan bon punt generem una pertorbació en una de les cordes i aquesta es propaga, la diferència de posició entre dos punts de les cordes que es troben a la mateixa distància de nosaltres pot variar en funció de:

- si la propagació està passant per aquest punt en una de les cordes,
- si el punt de la corda es troba en repòs.

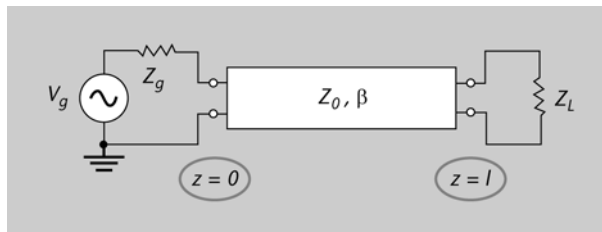
Com que aplicarem una diferència de tensió en els pols de la línia de transmissió, per la llei d'Ohm, tindrem una intensitat, o corrent, dins de la nostra línia  $i(z,t)$ . Mesurarem la intensitat entre els ports d'entrada i de sortida de la línia. Igual que la tensió, la intensitat també dependrà de la posició de la línia en què fem la mesura,  $z$ , i del temps,  $t$ .

D'aquesta manera mesurarem els corrents que circulen entre els dos pols del generador, que simbolitzarem  $i_1(z,t)$  i  $i_2(z,t)$ . Utilitzarem el subíndex 1 per al pol superior a l'entrada de la línia i el subíndex 2 per al corrent que circula pel pol inferior a l'entrada de la línia (vegeu la figura 9).

Per tal de poder treballar amb les línies de transmissió, ens cal definir l'origen relatiu i així poder localitzar la posició de l'ona que s'hi propaga sobre l'eix horitzontal,  $z$ . En el símil de les cordes  $z$  és la distància que hi ha entre nosaltres i la posició on fem la mesura entre els dos punts de les cordes.

En la majoria de casos situarem l'origen, el 0, de la línia de transmissió en la banda del port d'entrada, i l'extrem  $l$  al port de sortida, tal com podeu veure a la figura 10.

Figura 10



Un cop hem vist les característiques pròpies de les línies de transmissió i dels senyals que hi circulen, podem passar a definir sota quines condicions definirem el nostre model de línia de transmissió.

#### 1.4. Característiques del model de les línies de transmissió

En aquest subapartat construirem un model elèctric de les línies de transmissió amb la intenció de conèixer-les més a fons i veure com podem obtenir un circuit que ens sigui comprensible.

Inicialment estudiarem les característiques de les línies de transmissió des d'un punt de vista de les propietats dels elements que les formen, els conductors.

En fer circular un corrent per l'interior de dos conductors, aquests experimenten una influència mútua a causa dels camps elèctrics i magnètics que es generen.

##### 1.4.1. Hipòtesi inicial: aproximació quasiestàtica

Per a aquest estudi de la influència mútua utilitzarem el que s'anomena l'*aproximació quasiestàtica*.

L'*aproximació quasiestàtica* es basa en considerar un tros molt petit de línia de transmissió i un interval de temps molt curt, i així poder fer l'aproximació que els valors de corrent i voltatge a la línia són constants.

#### Recordeu

Sense diferència de potencial no es pot crear un camp elèctric que desplaci les càrregues elèctriques  $i$ , per tant, no es té cap corrent que circuli dins del circuit.

#### Figura 10

Posició de l'eix  $z$  sobre la línia de transmissió.

#### Criteri de signes

Més endavant en aquest mateix mòdul veureu que canviarem el criteri de signes que apareix a la figura 10. El canviarem quan estudiem l'ona que torna de la càrrega a la font, en comptes d'estudiar l'ona que va de la font a la càrrega, com fem ara.

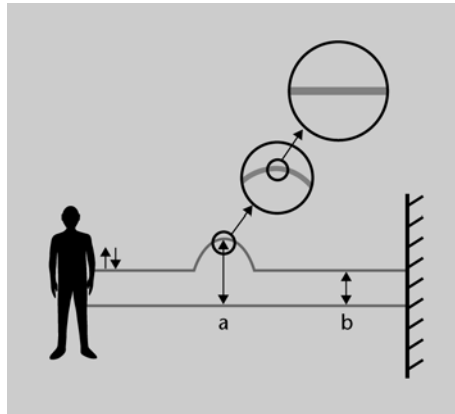
#### Observació

Això és, precisament, el que passa en els circuits que hem fet servir sempre, on la longitud d'ona és molt més llarga que el circuit  $i$ , per tant, la diferència de potencial entre dos punts de la línia, no varia amb el temps.

A partir de les propietats obtingudes de l'aproximació quasiestàtica, dissenyarem un circuit elèctric amb propietats equivalents a les de les línies de transmissió.

Podeu imaginar l'aproximació quasiestàtica com si agaféssiu un tros molt petit d'una corda on hi ha un senyal propagant-se en un instant concret. Si agafeu un tros petit de la cresta de l'ona, semblarà que la corda sigui recta (vegeu la figura 11) i, en triar un instant de temps concret, semblarà que no hi ha propagació.

Figura 11

**Figura 11**

Diferencial de corda on, per a un tros molt petit, la cresta de la propagació sembla que sigui recta.

L'aproximació quasiestàtica ens serveix per a entendre la importància de la longitud de la línia de transmissió respecte a la longitud d'ona. Si l'ona que circula té una longitud d'ona molt gran, o la línia és molt petita, semblarà que no hi ha ona i que la tensió i el corrent siguin constants al llarg de la línia.

Vegeu la importància de la longitud de la línia de transmissió respecte a la longitud d'ona al subapartat 1.1 d'aquest mòdul.

### 1.4.2. Camps elèctrics i magnètics entre conductors

Començarem analitzant el comportament de la línia de transmissió. Per a fer-ho la descompondrem en seccions elementals de llargària molt petita, el que en direm diferencials de longitud,  $dz$ .

$dz$  es llegeix "diferencial de zeta".

El que farem amb l'aproximació quasiestàtica és agafar trossos molt petits de la corda per tal que sigui fàcil d'estudiar-ne les propietats i després els ajuntarem tots per a crear el nostre model de línia de transmissió.

Podem tornar al símil de la corda; si n'agafem un tros molt petit, en podem veure els nusos i com estan entrelligats entre sí i, a partir d'aquí, aproximar un valor característic com ara la densitat, la rigidesa o la flexibilitat. De manera semblant volem veure el comportament d'una "rodanxa" molt fina d'una línia de transmissió. Podeu veure un exemple d'una "rodanxa" o secció transversal (elemental) d'una línia de transmissió coaxial a la figura 12, on podeu observar el dielèctric i els dos conductors.

Figura 12

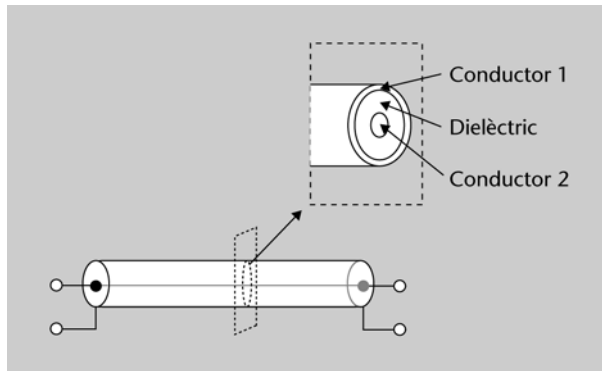


Figura 12

Secció transversal (o elemental) d'una línia de transmissió coaxial on podeu veure el conductor 1 extern, el conductor 2 intern i el dielèctric que els separa.

Per a trobar un model de línia de transmissió que sigui útil i que tingui unes propietats tan semblants com sigui possible a la realitat, però que, al mateix temps, no sigui de difícil utilització, cal fer unes hipòtesis inicials.

Plantejarem les hipòtesis següents entre dues porcions de la línia, o seccions elementals, que es troben dins del mateix pla transversal:

1) Les línies de camp elèctric que es creen entre els conductors de les dues seccions (a causa de la diferència de potencial) estan contingudes en plans transversals, és a dir, no hi ha component axial del camp elèctric. A la figura 13 podeu veure un exemple del que volem dir sobre una línia de transmissió bifilar; les línies de camp estan dins del pla transversal i no hi ha línies de camp en la direcció perpendicular al pla.

Si recordeu el mòdul d'ones, l'ona electromagnètica és una ona transversal, ja que les components dels camps elèctric i magnètic estan orientades en plans perpendiculars a la direcció de propagació. Per a definir el nostre model de línia de transmissió, utilitzarem camps electromagnètics del tipus transversal, el que es coneix com a mode transversal electromagnètic (TEM), en el qual el camp elèctric i el camp magnètic totals són perpendiculars a la direcció de propagació. Si l'ona es desplaça en la direcció  $z$  correspon a  $E_z = 0$  i  $B_z = 0$ .

Les ones que circulen entre els dos conductors són exemples d'ones TEM. Aquest mode és el mode de propagació dominant quan la secció transversal de la línia de transmissió és petita en relació amb la longitud d'ona del senyal (com és el nostre cas), és a dir, la longitud d'ona del senyal és molt més gran que la secció transversal de la línia.

Podem aplicar el mateix a les línies de camp entre dos conductors en configuració concèntrica.

2) No hi ha línies de camp magnètic entre els conductors de dues seccions elementals fora del mateix pla transversal (com podria passar a la figura 13). A la

### Pla transversal

El pla transversal és el pla perpendicular als conductors que conté dues seccions elementals dels conductors que formen la línia de transmissió. Generalment aquestes seccions elementals seran paral·leles i estaran situades a la mateixa posició,  $z$ .

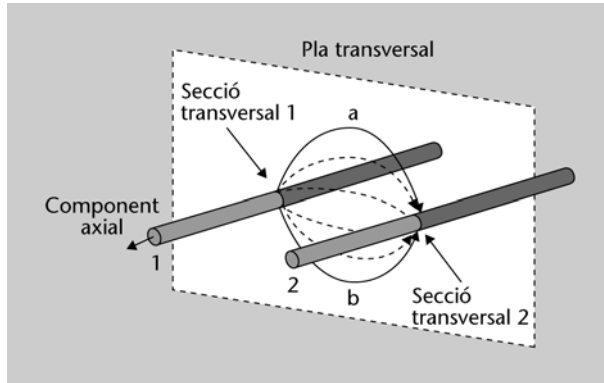
Vegeu les línies de transmissió bifilars al subapartat 1.2.2 d'aquest mòdul.

### Mode TE i mode TM

Al mòdul "Ones" heu vist els modes transversal elèctric (TE) en el qual  $E_z = 0$  i transversal magnètic (TM) en el qual  $B_z = 0$ .

figura 14 podeu veure que el camp magnètic només afecta seccions elementals que estan contingudes dins del mateix pla transversal (igual que en la hipòtesi 1, però aplicada al camp magnètic).

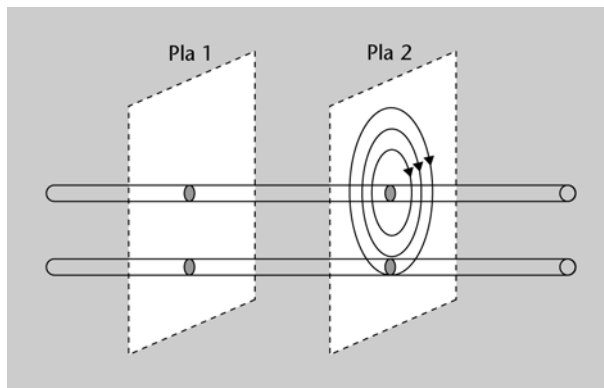
Figura 13



**Figura 13**

Línies de camp elèctric *a* i *b* entre els conductors de dues seccions elementals en un mateix pla transversal que creua els dos conductors 1 i 2, d'una línia bifilar.

Figura 14



**Figura 14**

Interacció del camp magnètic entre seccions elementals dins d'un mateix pla transversal.

El resum de les dues hipòtesis és que centrarem el desenvolupament del model de la línia de transmissió en els efectes (elèctrics i magnètics) entre seccions elementals que es trobin dins del mateix pla transversal.

### 1.5. Model de línia de transmissió

Les aproximacions del subapartat anterior ens permetran realitzar un model per a les línies de transmissió, utilitzant bàsicament elements discrets (com ara resistències, condensadors, bobines, etc.) i centrant-nos en les propietats dels conductors.

Tots els conductors tenen unes certes característiques inherents al material que el constitueix, com la conductivitat (o el seu invers, la resistivitat) i altres propietats físiques en les quals ara no entrarem, que provoquen uns efectes entre les seccions transversals que hi ha en un mateix pla transversal. A la figura

15 teniu representat el model de línia de transmissió d'una secció elemental de què parlàvem al subapartat anterior.

Amb les hipòtesis realitzades en el subapartat anterior, el potencial  $v(z,t)$  i el corrent  $i(z,t)$  que circula per una secció elemental només estan afectats per:

- Una certa resistència per unitat de longitud provocada pel mateix material del conductor, que es representa a la figura 15 amb  $R'dz$ .
- Una conductància per unitat de longitud, que representa l'aïllament entre els dos conductors a causa del dielèctric. Apareix a la figura 15 com a  $G'dz$ .
- Una capacitat per unitat de longitud entre els conductors. Aquesta capacitat és deguda al fet de tenir dos conductors a una certa distància amb un dielèctric (en el cas de línies de transmissió bifilars l'aire actua com a dielèctric) o un aïllant (en el cas de les línies coaxials) entre ambdós, que formen un condensador. Aquesta capacitat es crea entre els dos conductors i la podeu veure representada a la figura 15 com a  $C'dz$ .
- Un coeficient d'autoinducció o, el que és el mateix, una bobina disposada en un dels conductors a causa del camp magnètic creat per les càrregues en moviment dins dels conductors, que podeu veure a la figura 15 com a  $L'dz$ .

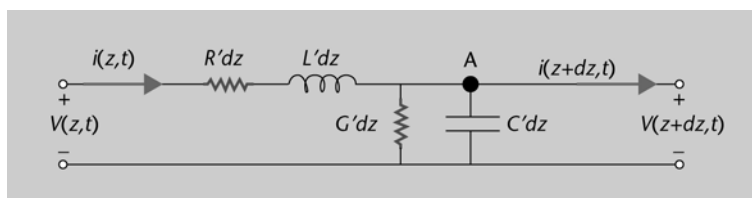
Vegeu les línies de transmissió bifilars al subapartat 1.2 d'aquest mòdul.

A la figura 15,  $L'$  i  $C'$  representen la inductància i la capacitat de la línia de transmissió per unitat de longitud, i les seves unitats són henrys per metre (H/m) i farads per metre (F/m), respectivament. Recordeu que estem analitzant un element molt petit de la línia, per tant la capacitat total del segment és la densitat lineal de capacitat per la longitud del segment,  $C'dz$ , i la inductància total és la densitat lineal d'inductància per la mateixa longitud,  $L'dz$ .

El mateix passa per a la resistència per unitat de longitud  $R'$  i la conductància per unitat de longitud  $G'$ . Aquests elements tenen unitats d'ohms per metre ( $\Omega/m$ ) i de siemens per metre (S/m). Els paràmetres de  $R'dz$  i  $G'dz$  són els paràmetres que simulen els efectes dissipatius, o d'atenuació, del nostre model de línia de transmissió.

D'aquesta manera obtenim, per a una secció elemental de llargària  $dz$ , el circuit equivalent de la figura 15.

Figura 15



#### Nota

El siemens, S, és la unitat de conductància i correspon a la inversa de l'ohm:

$$1 \text{ S} = 1 / \Omega$$

Figura 15

Model o circuit equivalent d'una secció infinitesimal d'una línia de transmissió on es presenta una resistència  $R'dz$ , una capacitat  $C'dz$ , una conductància  $G'dz$  i una inductància  $L'dz$ .



Per tal de poder analitzar el circuit de la figura 15 amb més detall, hem de descompondre'l en diferents subcircuitos i aplicar les lleis de Kirchhoff.

### Lleis de Kirchhoff

La primera llei de Kirchhoff, o **lleï de Kirchhoff dels corrents**, afirma que la suma algebraica de les intensitats que entren en un node és nul·la en qualsevol instant de temps.

La segona llei de Kirchhoff, o **lleï de Kirchhoff de les tensions**, afirma que la suma algebraica de les tensions en una malla del circuit és zero.

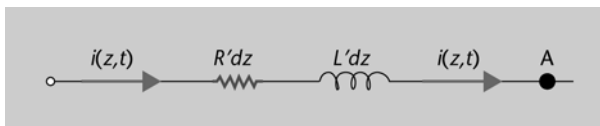
La utilització d'elements com la bobina i el condensador implica que els corrents i les tensions a l'entrada de la línia,  $i(z,t)$  i  $v(z,t)$ , i a la sortida de la línia,  $i(z+dz,t)$  i  $v(z+dz,t)$ , varien en funció del temps.

És per això que en els següents punts analitzarem com varien el corrent i la tensió per a trobar les equacions diferencials que descriuen el comportament del circuit.

#### a) Corrent d'entrada de la línia

Tal com podeu veure a la figura 16, el corrent  $i(z,t)$  que entra pel pol positiu de la línia de transmissió travessarà la resistència  $R'dz$  i la bobina  $L'dz$  i arribarà al node A de la figura 16 sense haver canviat la seva intensitat  $i(z,t)$ , ja que no hi tenim cap branca que distribueixi el corrent.

Figura 16



**Figura 16**

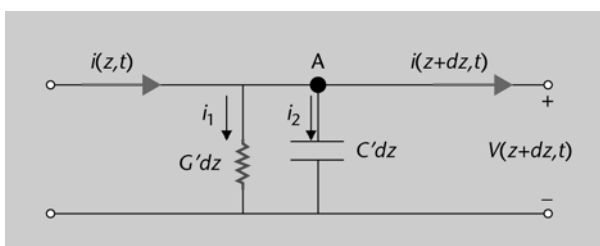
Conservació del corrent d'entrada a la línia que arriba al node A.

#### b) Corrent de sortida de la línia

Ara buscarem l'expressió del corrent als connectors de sortida de la línia de transmissió.

Al node A arriba un corrent  $i(z,t)$  i en surt un corrent  $i(z+dz,t)$ . La diferència entre aquests dos corrents, per la primera llei de Kirchhoff, ha de ser igual als corrents que circularan per la conductància i pel condensador que veieu a la figura 17. Així, podem obtenir les equacions (1) i (2) d'intensitat per a cada branca  $i_1$  i  $i_2$ .

Figura 17



**Figura 17**

Corrents que circulen per la conductància i la capacitat.

Atès que no sabem els valors exactes dels corrents  $i_1$  i  $i_2$ , el que podem fer és calcular-los a partir de la diferència de potencial entre els pols de sortida de la línia de transmissió  $v(z+dz, t)$ . Així, el corrent  $i_1$  que circula per la conductància  $G'dz$  és donat per la següent equació:

$$i_1 = G'dz \cdot v(z + dz, t) \quad (1)$$

i el corrent  $i_2$  que circula per un condensador sotmès a una diferència de potencial és donat per l'equació:

$$i_2 = C'dz \cdot \frac{\partial v(z + dz, t)}{\partial t} \quad (2)$$

Utilitzant la primera llei de Kirchhoff sobre el node A de la figura 17 obtenim l'equació dels corrents:

$$i(z + dz, t) + i_1 + i_2 - i(z, t) = 0 \quad (3)$$

Si partim de l'equació (3) i substituïm pels seus valors les equacions (1) i (2), tenim:

$$i(z + dz, t) + G'dz \cdot v(z + dz, t) + C'dz \frac{\partial v(z + dz, t)}{\partial t} - i(z, t) = 0 \quad (4)$$

Si ara dividim l'equació (4) per  $dz$ , podeu arribar a la següent equació:

$$\left[ \frac{i(z + dz, t) - i(z, t)}{dz} \right] + G'v(z + dz, t) + C' \frac{\partial v(z + dz, t)}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

Podem interpretar l'equació (5) com que qualsevol variació en el corrent que circula per la línia és deguda a la capacitat distribuïda  $C'$  multiplicada per la variació de tensió en el temps, i a la conductivitat distribuïda,  $G'$ , multiplicada per la tensió.

Si ara fem el límit de  $dz \rightarrow 0$ , el primer terme de l'equació (5), entre claudàtors, passa a ser una equació diferencial i obtenim:

$$\left. \frac{i(z + dz, t) - i(z, t)}{dz} \right|_{dz \rightarrow 0} \approx \frac{\partial i(z, t)}{\partial z} \quad (6)$$

Si substituïm l'expressió del diferencial, equació (6), en el primer i últim terme de l'equació (5), obtindrem:

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} + G'v(z, t) + C' \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

on hem aplicat que  $dz \rightarrow 0$ .

#### Recordeu

La llei d'Ohm diu que el voltatge ( $v$ ) és igual a la intensitat ( $i$ ) per la resistència ( $R$ ):  $v = Ri$ . La conductància ( $G$ ) és la inversa de  $R$  i, per tant:  $i = Gv$ .

#### Recordeu

La intensitat  $i$  que travessa un condensador de capacitat  $C$  és:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

on  $v$  és el voltatge als extrems del condensador.

#### Derivada parcial

El símbol  $\frac{\partial}{\partial t}$  significa que el que estem fent és una derivada parcial. Utilitzem la derivada parcial en lloc de la derivada normal,  $\frac{d}{dt}$ , ja que les funcions de corrent,  $i(z, t)$ , i tensió,  $v(z, t)$ , són funcions de més d'una variable,  $z$  i  $t$ , i nosaltres en fem la derivada només respecte a una d'elles, la  $t$ .

Així, hem obtingut l'equació diferencial del corrent,  $i(z,t)$ , en funció del temps  $t$  i de la posició en la línia.

### c) Tensió d'entrada de la línia

Si ara apliquem la segona llei de Kirchhoff a les malles que hi ha a la banda esquerra del node A (vegeu la figura 18):

Figura 18

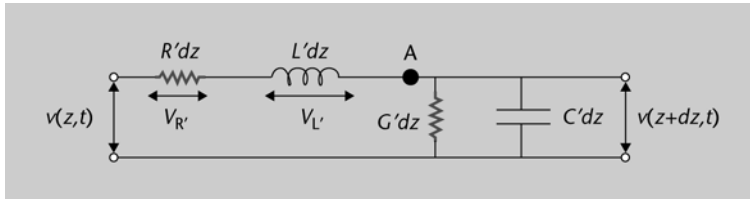


Figura 18

Model equivalent d'una línia de transmissió amb les caigudes de tensió a cada malla.

podem obtenir una equació semblant a l'equació (5) per a les tensions,  $v(z,t)$ :

$$v(z,t) - v_{R'} - v_{L'} - v(z+dz,t) = 0 \quad (8)$$

on

$$v_{R'} = R' \cdot i(z,t) \quad (9)$$

$$v_{L'} = L' \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad (10)$$

#### Recordeu

El voltatge  $v$  que cau als extrems d'una bobina d'autoinductància  $L$  és:

$$v = L \frac{di}{dt}$$

on  $i$  és la intensitat.

### d) Tensió de sortida de la línia

La tensió a la sortida de la malla és la mateixa que la tensió a l'entrada de la malla  $i$ , per tant, la caiguda de tensió a la conductància serà la mateixa que la caiguda de tensió al condensador.

Igual que en el cas dels corrents, si substituïm les equacions (9) i (10) dins de l'equació (8) podem obtenir una equació semblant a l'equació (5) per a les tensions del circuit. Llavors només ens resta dividir totes les equacions per  $dz$ :

$$\left[ \frac{v(z+dz,t) - v(z,t)}{dz} \right] + R' i(z,t) + L' \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

on l'últim terme representa la tensió que cau a la bobina. Podem interpretar l'equació (11) com que en qualsevol punt  $z$  de la línia, qualsevol diferencial en la tensió és degut a la inductància distribuïda de la línia,  $L'$ , multiplicada per la variació en el temps del corrent  $i$  a la resistència distribuïda de  $R'$  multiplicada per la intensitat.

Si fem  $dz \rightarrow 0$ , com hem fet amb la intensitat, de l'equació (11) podem obtenir l'equació diferencial per a la tensió:

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} + R' i(z,t) + L' \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

## 1.6. Equacions d'ona en una dimensió o equacions del telegrafista

Les equacions diferencials (7) i (12) ens descriuen com canvien les tensions i els corrents en el nostre model de línia de transmissió. Si podem trobar unes funcions  $i(z,t)$  i  $v(z,t)$  que compleixin les condicions de les equacions diferencials (7) i (12), haurem trobat les funcions de les ones de corrent i tensió.

No ho demostrarem aquí, però si estem en règim permanent sinusoidal, a partir de les equacions (7) i (12) podem obtenir l'equació d'ones en una dimensió per a la tensió,  $v(z,t)$ ,

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} - \gamma^2 v(z,t) = 0 \quad (13)$$

I per al corrent,  $i(z,t)$ ,

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} - \gamma^2 i(z,t) = 0 \quad (14)$$

on  $\gamma$  s'anomena **constant de propagació** de la línia de transmissió i es defineix de la següent manera:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad (15)$$

on  $\alpha$  s'anomena **constant d'atenuació** i representa el factor d'atenuació causat pels conductors de la línia de transmissió i  $\beta$  s'anomena **constant de fase** o de propagació de la ona.  $\omega$  és la **frequència angular** de l'ona que circula per la línia.

Aquestes equacions es coneixen amb el nom d'**equacions del telegrafista**.

La solució més general a l'equació d'ones per a la tensió i el corrent és:

$$v(z,t) = V^+ e^{j(\omega t - \gamma z)} + V^- e^{j(\omega t + \gamma z)} \quad (16)$$

$$i(z,t) = I^+ e^{j(\omega t - \gamma z)} + I^- e^{j(\omega t + \gamma z)} \quad (17)$$

Vegeu el subapartat 2.2.3 del mòdul "Ones".

### Equació d'ones

Fixeu-vos que tant l'equació (14) com la (15) són de l'estil de l'equació de propagació d'una ona:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - k^2 u = 0$$

on tenim la derivada segona d'una funció,  $u$ , respecte a l'espai,  $z$ , igual a una constant de propagació,  $k$ , multiplicada per la mateixa funció.

La lletra  $\alpha$  es la lletra grega alfa minúscula i es llegeix "alfa".  
La lletra  $\gamma$  es la lletra grega gamma minúscula i es llegeix "gamma".  
La lletra  $\omega$  es la lletra grega omega minúscula i es llegeix "omega".

on  $V^-$ ,  $V^+$ ,  $I^-$  i  $I^+$  representen les amplituds de les ones, i les següents equacions:

$$v^+ = V^+ e^{j\omega t - \gamma z} \quad (18)$$

$$i^+ = I^+ e^{j\omega t - \gamma z} \quad (19)$$

representen una ona de tensió,  $v^+$ , i una ona de corrent,  $i^+$ , que es propaguen en el sentit de les  $z$  creixents, o del generador cap a la càrrega. A aquestes ones les anomenarem **ones progressives**.

De la mateixa manera, parlem d'ones que es propaguen en el sentit de les  $z$  decreixents, o de la càrrega cap al generador, a les equacions següents:

$$v^- = V^- e^{j\omega t + \gamma z} \quad (20)$$

$$i^- = I^- e^{j\omega t + \gamma z} \quad (21)$$

que anomenarem **ones regressives**. Aquestes ones regressives es generen quan l'ona progressiva es reflecteix en la càrrega.

Les ones progressives es propaguen des de la font en direcció a la càrrega i les regressives es propaguen des de la càrrega cap a la font (fixeu-vos en el signe de  $\gamma z$ ).

#### Per a simplificar...

Per a simplificar, prendrem la velocitat de la llum en el buit,  $c$ , com la velocitat de propagació de les ones de tensió i de corrent per l'interior del conductor.

Les equacions (16) i (17) ens mostren que en qualsevol punt de la línia de transmissió,  $z$ , i en qualsevol instant,  $t$ , la tensió i el corrent mesurats són la suma dels valors de les dues ones corresponents (progressiva i regressiva).

Així, tots els punts de la línia de transmissió experimenten la mateixa variació en funció del temps, el factor  $j\omega t$ , però amb un retard degut a la posició, el factor  $\gamma z$ , que serà més gran com més gran sigui la distància a l'origen de la línia en l'eix  $z$ .

### 1.6.1. Impedància característica

Un cop definides les ones que circulen per la línia de transmissió, ja podem deduir-ne alguna propietat més utilitzant lleis bàsiques, com la llei d'Ohm, i jugant una mica amb les equacions deduïdes fins a aquest punt.

Si introduïm les ones progressives de les equacions (18) i (19) dins de les equacions diferencials de la tensió, equació (7), i de corrent, equació (12), obtenim

(no cal realitzar el desenvolupament pas a pas, ja que només ens interessa el resultat final):

$$\frac{\partial v^+}{\partial z} = -(R' + j\omega L') \cdot i^+(z) \quad ; \quad \frac{\partial v^+}{\partial z} = -Z \cdot i^+(z) \quad (22)$$

$$\frac{\partial i^+}{\partial z} = -(G' + j\omega C') \cdot v^+(z) \quad ; \quad \frac{\partial i^+}{\partial z} = -Y \cdot v^+(z) \quad (23)$$

Val a dir que per a l'ona regressiva obtindríeu el mateix resultat.

Fixeu-vos que en les equacions (22) i (23) la derivada de l'ona progressiva de tensió,  $v^+(z)$ , i de corrent,  $i^+(z)$ , són igual a l'altre component multiplicades per un factor. Aquests factors són la impedància  $Z$  i l'admitància  $Y$ . L'admitància té unitats d'inversa d'impedància:

$$[Y] = \frac{1}{[Z]} \quad (24)$$

Tal com acabem de dir, la relació entre el corrent i la tensió en un circuit és donada, segons la llei d'Ohm, per la impedància.

$$v = Z \cdot i \quad \rightarrow \quad \frac{v}{i} = Z \quad (25)$$

Utilitzant aquesta relació, substituint les equacions (18) i (19) a (22) i (23) arribem a:

$$\frac{v^+}{i^+} = \frac{V^+}{I^+} = Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad (26)$$

d'on obtenim  $Z_0$ , que és la **impedància característica** de la línia de transmissió en funció dels seus paràmetres distribuïts.

Definim la **impedància característica** d'una línia de transmissió,  $Z_0$ , com la impedància equivalent deguda a les propietats característiques dels conductors que formen la línia. La seva unitat de mesura és l'ohm, que es representa amb la lletra  $\Omega$ . Aquesta és la impedància equivalent que "veurà" una font connectada als borns d'entrada de la línia de transmissió.

Noteu que en aplicar la solució de l'ona de tensió i de corrent, equacions (16) i (17), a l'equació (23), l'ona de corrent regressiva,  $i^-$ , té el signe canviat respecte a l'ona de tensió regressiva,  $v^-$ . A partir de l'ona de corrent regressiva, (21), trobem:

$$\frac{\partial i^-}{\partial z} = I^- \gamma e^{(j\omega t + \gamma z)} = \gamma i^- \quad (27)$$

**Z**

En aquest cas  $Z$  representa una impedància qualsevol formada per les components resistiva i inductiva del model de línia de transmissió. Més endavant utilitzarem  $Z_0$  com la impedància característica de la línia de transmissió.

**Recordeu**

La notació [ ] indica que ens estem referint a les unitats.

**Llei d'Ohm**

La llei d'Ohm ens diu que la caiguda de tensió,  $v$ , és proporcional al corrent,  $i$ , que passa per una impedància,  $Z$ .

La lletra  $\Omega$  es la lletra grega omega majúscula i es llegeix "omega".

**Impedàncies característiques variables**

Més endavant (en el subapartat 3.2) veureu que, quan la càrrega no està adaptada, la impedància característica de la línia va variant a mesura que les ones circulen dins de la línia de transmissió. Això és degut a les reflexions de l'ona progressiva en la càrrega.

Multiplicant i dividint per  $Z_0$  i fent servir (15), (20) i (26) trobem:

$$\frac{\partial i^-}{\partial z} = \gamma i^- = I^- \cdot Z_0 \frac{\gamma}{Z_0} e^{j(\omega t + \gamma z)} = (G' + j\omega C') v^- = Y v^- \quad (28)$$

Què és com l'equació 23, però canviada de signe.

D'on, atès que l'equació (25) continua sent vàlida.

$$i^- = -\frac{v^-}{Z_0} \quad (28b)$$

Això és degut al fet que, en fer la derivada de l'ona de corrent regressiva,  $i^-$ , respecte a  $z$ , la solució té el signe canviat respecte a l'ona progressiva.

### 1.6.2. Aproximació a línies de transmissió ideals

Fins aquest punt hem estat treballant amb el model complet, utilitzant tots els paràmetres, de les línies de transmissió.

A partir d'ara utilitzarem l'aproximació de línies de transmissió sense pèrdues, per la qual cosa tindrem:

- $R' = 0$ . Considerarem que la resistència distribuïda del diferencial de línia és molt petita, ja que per a un tros de conductor molt petit, la diferència de tensió entre els seus extrems ha de ser zero.
- $G' = 0$ . Considerarem que la conductància és zero i, per tant, que la resistència és infinita o, el que és el mateix, que tenim un circuit obert en aquest punt. En anul·lar la conductància el que estem fent és eliminar els possibles contactes que pugui haver entre els dos conductors.

Si apliquem aquestes aproximacions a l'equació (26) obtenim la impedància característica d'una línia de transmissió ideal:

$$\sqrt{\frac{L'}{C'}} = Z_0 \quad (29)$$

L'aproximació de línia de transmissió sense pèrdues es defineix per  $R' = 0$  i  $G' = 0$ , i deixa només els efectes d'inducció,  $L'$ , i de capacitat,  $C'$ , entre els conductors.

Les expressions de la tensió,  $v$ , i del corrent,  $i$ , no es veuen afectades per l'aproximació de línia de transmissió ideal, de manera que quan tenim una ona progressiva i una de regressiva en qualsevol punt de la línia de transmissió, les podem calcular a partir de les equacions següents:

$$v = v^+ + v^- \quad (30)$$

$$i = i^+ + i^- = \frac{1}{Z_0}(v^+ - v^-) \quad (31)$$

#### Nota

Fixeu-vos que les equacions (30) i (31) diuen el mateix que les equacions (16), combinada amb (28) i (29) i (17) combinada amb (20), (21) i (26).

A les equacions (30) i (31) veiem que la tensió en qualsevol punt de la línia,  $v$ , és la suma de les tensions de les ones progressiva  $v^+$  i regressiva  $v^-$ . El mateix es pot aplicar al corrent que circula per la línia,  $i$  (vegeu les equacions 25 i 31).

Noteu que en la segona igualtat de l'equació (31) hem fet servir l'equació (28b), per la qual cosa la intensitat total serà la resta de les ones de tensió progressiva i regressiva, amb el factor de la impedància dividint.

#### Exemple de comparació de línia contínua i sense pèrdues

Donada una línia de transmissió on hi circula un senyal de freqüència  $f = 330$  MHz, amb els següents paràmetres:  $L' = 0,3$   $\mu\text{H}/\text{m}$ ,  $R' = 75$   $\Omega/\text{m}$ ,  $G' = 0,01$  S/m i  $C' = 450$  pF/m; calculem la seva impedància característica,  $Z_0$ , en els casos de tenir línies amb pèrdues i línies sense pèrdues (línies ideals).

#### Solució

En el cas de les línies de transmissió amb pèrdues, utilitzarem l'equació (26) per a calcular la impedància característica de la línia:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{75 + j330 \cdot 10^{+6} \cdot 2\pi \cdot 0,3 \cdot 10^{-6}}{0,01 + j330 \cdot 10^{+6} \cdot 2\pi \cdot 450 \cdot 10^{-12}}} = \sqrt{\frac{75 + j622}{0,01 + j0,933}} \quad (32)$$

Per a trobar la solució a l'arrel de l'equació (32) podem multiplicar el numerador i el denominador pel conjugat del denominador. D'aquesta manera obtindrem:

$$Z_0 = \sqrt{0,667 - j73,23} = 25,9 - j1,4 \Omega \quad (33)$$

I utilitzem l'equació (15) per al càlcul de la constant de propagació:

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \\ &= \sqrt{(75 + j330 \cdot 10^{+6} \cdot 2\pi \cdot 0,3 \cdot 10^{-6})(0,01 + j330 \cdot 10^{+6} \cdot 2\pi \cdot 450 \cdot 10^{-12})} = \\ &= \sqrt{-579,6 + j76,2} = 1,58 + j24,1 \end{aligned} \quad (34)$$

Ara podem utilitzar l'equació (29) per a calcular la impedància característica en el cas de línies de transmissió ideals. Si apliquem el valor, obtindrem:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{0,3 \cdot 10^{-6}}{455 \cdot 10^{-12}}} = 25,82 \Omega \quad (35)$$

En el cas de línies ideals, el càlcul de la constant de propagació es redueix a:

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{L'C'} = 24,09j \text{ rad/m} \quad (36)$$



Com veieu en els resultats de les equacions (33) i (35), el mòdul de  $Z_0$  és pràcticament el mateix considerant línia sense pèrdues i, per tant podem fer servir aquesta aproximació.

## 1.7. Coeficient de reflexió

Al subapartat anterior hem definit les ones progressives, aquelles que van de la font cap a la càrrega, i les regressives, aquelles que es reflecteixen en la càrrega i tornen cap a la font.

En aquest subapartat veurem com es crea l'ona regressiva en funció de la càrrega que tinguem connectada a la línia de transmissió i de l'ona progressiva que hi incideix. El coeficient que ens relaciona les ones regressives i les progressives ens permetrà, més tard, optimitzar la transmissió de la potència.

Observeu el circuit de la figura 19, en el qual tenim un generador de tensió  $V_g(t)$  amb una resistència interna  $Z_g$ , connectat a una línia de transmissió de longitud  $l$  i una impedància de càrrega  $Z_L$ .

Figura 19

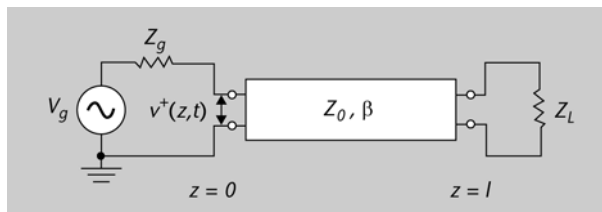


Figura 19

Circuit amb una línia de transmissió d'impedància característica  $Z_0$  i una càrrega  $Z_L$ .

Recordeu que el fonament del funcionament de les línies de transmissió es basa en el retard de les ones que hi circulen? Doncs bé, ara analitzarem el circuit de la figura 19 a partir de l'estat inicial: quan el generador ha creat el senyal a transmetre i aquest entra als connectors d'entrada de la línia. En aquest instant inicial el temps serà  $t=0$  i l'ona es trobarà a la posició  $z=0$ .

Per a calcular el valor de la tensió a l'entrada de la línia de transmissió  $v^+$ , el que cal és aplicar un divisor de tensió entre la tensió generada pel generador  $V_g$  i el circuit equivalent a la seva entrada, a  $z=0$ . Aquest circuit equivalent està format per la resistència del generador,  $Z_g$ , i la línia de transmissió, amb una impedància de valor constant  $Z_0$ . Recordeu que  $Z_0$  és la impedància equivalent que "veurà" una font connectada als borns d'entrada de la línia de transmissió.

Amb el divisor de tensió entre ambdós circuits obtenim:

$$v^+(z,t)\Big|_{z=0,t=0} = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} V_g \quad (37)$$

Si calculem el coeficient entre la tensió a l'entrada de la línia,  $v^+$ , i la intensitat que circularà per la línia de transmissió,  $i^+$ , obtindrem la seva impedància d'entrada.

$$\frac{v^+}{i^+} = Z_0 \quad (38)$$

### Observació

Tot i que a partir d'ara dibuixarem els circuits amb el generador i la seva impedància, a nosaltres només ens interessa la part del circuit de la línia de transmissió i la càrrega connectada al circuit.

No entra dins l'abast d'aquest mòdul com funciona el generador ni com es genera l'ona inicial, o progressiva.

Vegeu què és la impedància equivalent  $Z_0$  al subapartat 1.6.1 d'aquest mòdul.

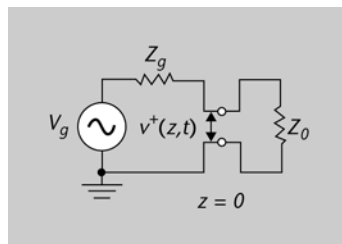
A l'equació (38) podeu veure que el quocient entre la tensió i el corrent és  $Z_0$  (recordeu l'equació (26)) i la línia presenta, per tant, una impedància d'entrada igual a  $Z_0$ .

Recordeu que ens trobem en l'instant inicial en què el generador subministra el corrent al circuit, el temps és zero,  $t = 0$ , i per això l'equació (37) no depèn del temps.

En aquest instant  $t = 0$  és quan el retard en la propagació de les ones dins de les línies de transmissió comença a tenir rellevància. En aquest instant l'ona és a l'entrada de la línia, a  $z = 0$ , per la qual cosa encara no ha recorregut la línia i no ha arribat a la càrrega. En aquest punt, la impedància d'entrada de la línia és la impedància que podríem mesurar a la sortida del generador o, el que és el mateix, a l'entrada de la línia de transmissió.

Atès que l'ona tot just ha arribat als connectors d'entrada de la línia de transmissió, sembla que l'ona encara no hagi "vist" la càrrega. A la figura 20 podeu veure el circuit equivalent per a  $t = 0$  a  $z = 0$ .

Figura 20

**Recordeu**

Les línies de transmissió basen el seu funcionament en el retard en la propagació de les ones dins de la línia.

**Figura 20**

Circuit equivalent del circuit de la figura 19 per a  $t = 0$  i  $z = 0$ . En el moment inicial l'ona progressiva es troba a l'entrada de la línia, per la qual cosa no "veu" la càrrega.

Passem ara a mirar-nos el càlcul des d'un altre punt de vista: des del punt de vista de la càrrega. Aplicant les equacions (30) i (31) podem calcular el valor de la impedància de sortida de la línia en la posició  $z = l$  i, un cop l'ona progressiva ha arribat a la càrrega, aplicant la llei d'Ohm, tenim:

$$Z_L = \frac{v(l,t)}{i(l,t)} = Z_0 \frac{v^+ + v^-}{v^+ - v^-} \quad (39)$$

On hem fet servir (30) i (31). Si de l'equació (39) n'aïllem la relació entre  $v^-$  i  $v^+$ , obtindrem un paràmetre molt important a l'hora de calcular la relació de proporcionalitat entre l'ona regressiva i l'ona progressiva. Així doncs, per a obtenir la relació entre l'ona regressiva,  $v^-$ , i l'ona progressiva,  $v^+$ , partim de (39), que us tornem a escriure sense el terme intermedi:

$$Z_L = Z_0 \frac{v^+ + v^-}{v^+ - v^-} \quad (40)$$

Ara passem el denominador de la segona part de l'equació (40) a la banda esquerra de la igualtat i així obtindrem:

$$Z_L(v^+ - v^-) = Z_0(v^+ + v^-) \quad (41)$$

Si ara multipliquem els factors comuns de cada parèntesi, obtenim:

$$Z_L v^+ - Z_L v^- = Z_0 v^+ + Z_0 v^- \quad (42)$$

De manera que només ens cal passar a cada banda de la igualtat els factors de les ones progressives,  $v^+$ , a l'esquerra, i de les ones regressives,  $v^-$ , a la dreta. Així obtindrem:

$$Z_L v^+ - Z_0 v^+ = Z_0 v^- + Z_L v^- \quad (43)$$

I si tornem a extreure com a factor comú les ones progressives i regressives, obtenim:

$$v^+(Z_L - Z_0) = v^-(Z_0 + Z_L) \quad (44)$$

Passant els elements multiplicadors comuns a una banda i els dos parèntesis a l'altre, arribem a:

$$\frac{v^-}{v^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -\frac{i^-}{i^+} = \rho_L \quad (45)$$

És a dir, a la resistència de càrrega,  $Z_L$ , l'ona regressiva està relacionada amb l'ona progressiva mitjançant un factor de proporcionalitat  $\rho_L$  que anomenarem **coeficient de reflexió en la càrrega**.

La lletra  $\rho$  és la lletra grega rho minúscula i es llegeix "ro".

Recordeu que a l'inici del mòdul hem dit que ens interessa caracteritzar les línies en funció de la seva capacitat de transmetre tot el senyal que porten cap a la càrrega. Doncs bé:

El **coeficient de reflexió en la càrrega**,  $\rho_L$ , és el paràmetre que ens indica quin percentatge (o porció) de l'ona incident NO és consumida, o utilitzada, per la càrrega i és retornada a la font en forma d'ona regressiva.

#### Nota

De vegades, en lloc de  $\rho$  es fa servir la lletra  $\Gamma$  (gamma majúscula).

$$\rho_L = \frac{v^-}{v^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (46)$$

Cal recalcar que aquest coeficient el calculem quan l'ona progressiva,  $v^+$ , ha arribat a la càrrega, a la posició  $z = l$ . És llavors quan es genera l'ona regressiva,  $v^-$ , en funció del valor de la càrrega  $Z_L$ .

Si tenim en compte que els valors de les ones varia en funció de  $z$  i  $t$  (recordeu les equacions (16) i (17)), resulta que el valor del coeficient de transmissió  $\rho$  pot anar variant al llarg de la línia de transmissió. Més endavant ja aprofundirem en aquest punt.

Ara que tenim l'expressió del coeficient de reflexió a la càrrega, podem estudiar una mica tots els casos possibles per a qualsevol valor de la impedància de càrrega que podem posar en el circuit de la figura 19.

## 1.8. Possibles valors de la impedància de càrrega, $Z_L$

Ara analitzarem els valors que pot prendre la impedància de la càrrega,  $Z_L$ , i com afecten el coeficient de reflexió. Com que la impedància de càrrega,  $Z_L$ , és un valor complex (vegeu requadre a la dreta), podem imaginar els casos següents :

- Que prengui un valor purament real, sense part imaginària.
- Que prengui un valor purament imaginari, sense part real.
- Que sigui una barreja dels dos casos anteriors.

### Càrregues purament resistives

L'expressió més general de la impedància és:  $Z = R + j\chi$ , on  $R$  representa la component resistiva (real) i  $\chi$ , la component reactiva (o imaginària). Una càrrega "purament resistiva" és aquella que només té component real,  $R$ .

### 1.8.1. Impedància de càrrega real

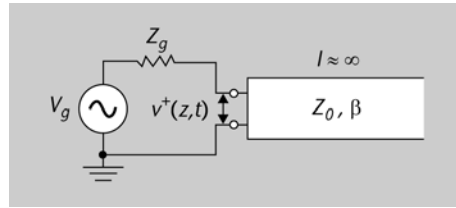
Començarem amb tots els casos possibles d'una impedància de càrrega purament resistiva:

a) Impedància de càrrega de valor igual a la impedància característica de la línia de transmissió, o el que és el mateix:  $Z_L = Z_0$ . Llavors, segons hem vist a l'equació (46)  $\rho_L = 0$ . Atès que no tenim reflexió, no existeix ona regressiva  $v^-$ . En no haver-hi ona regressiva, sembla que la línia de transmissió tingui una longitud infinita, ja que és com si l'ona progressiva estigués viatjant per sempre cap a la càrrega. Seria equivalent a tenir la línia adaptada.

Es diu que la càrrega,  $Z_L$ , està **adaptada** quan aquesta absorbeix tota la potència que el generador lliura a la línia, i no hi ha cap tipus d'ona reflectida per la càrrega. Això passa quan la impedància de la línia és igual a la impedància de la càrrega,  $Z_0 = Z_L$ .

El circuit equivalent seria el que podeu veure a la figura 21, on tenim una línia de transmissió infinitament llarga, o sense connectors de sortida.

Figura 21



**Figura 21**

Línia de transmissió de longitud infinita on no es crea ona regressiva ja que no hi ha reflexió,  $\rho_L = 0$ . Correspon al cas en què  $Z_L$  està adaptada.

Cal veure aquest cas com si tinguéssim una de les cordes de la figura 2 de longitud infinita, sense una paret on estigués lligada. D'aquesta manera, l'ona que nosaltres generem amb el braç es propagarà infinitament (recordeu que no tenim pèrdues) al llarg de tota la línia i no tindrem ona reflectida.

b) Impedància de càrrega de valor infinit,  $Z_L \rightarrow \infty$ , és a dir, molt més gran que  $Z_0$ . Llavors  $\rho_L = 1$  amb la qual cosa tenim que, segons l'equació (46),  $v^- = v^+$  (vegeu la figura 22a). En aquestes condicions es reflecteix tota l'ona progressiva en la càrrega.

Si la impedància de la càrrega és infinita, es diu que la línia de transmissió es troba en **circuit obert**.

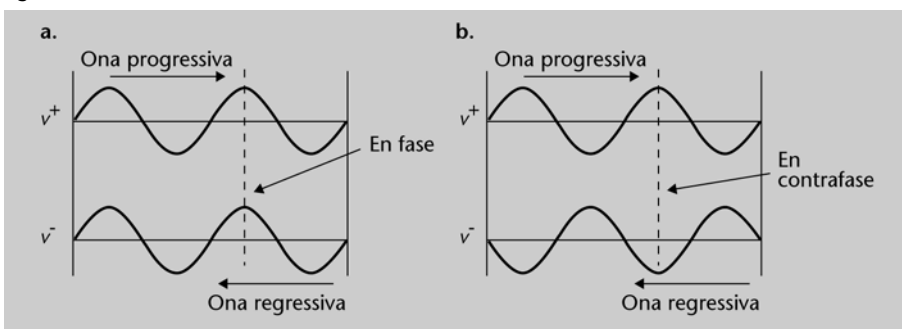
c) Impedància de càrrega de valor zero,  $Z_L = 0$ . Llavors segons l'equació (46) obtenim un coeficient de reflexió en la càrrega de  $\rho_L = -1$  amb la qual cosa:  $v^- = -v^+$  (vegeu la figura 22b).

Quan tenim una ona sinusoidal del tipus  $v(t) = V \cdot \cos(\omega t)$ , si afegim un desfasament equivalent a  $180^\circ$ , o  $\pi$  radians, obtenim el mateix valor de  $v(t)$  però multiplicat per un signe negatiu:  $v(t + \pi) = -1 \cdot v(t)$ .

L'ona reflectida es veu desfasada  $180^\circ$  (el canvi en el signe  $v^- = -1 \cdot v^+$ ) respecte a l'ona progressiva o incident. En aquest cas, la línia de transmissió es troba en **curtcircuit** i tota l'ona progressiva torna cap al generador en forma d'ona regressiva, però desfasada  $180^\circ$ , és a dir, en contrafase, amb la qual cosa l'ona total s'anul·larà.

La diferència entre els casos b) i c) anteriors es basa en el canvi de signe, o inversió, de l'ona reflectida respecte a l'ona incident. En ambdós casos tota l'energia de l'ona incident és retornada cap al generador (tindran la mateixa amplitud).

Figura 22



**Figura 22**

Ones progressiva,  $v^+$ , i regressiva,  $v^-$ , en fase quan  $Z_L \rightarrow \infty$ , (cas a) i en contrafase quan  $Z_L = 0$  (cas b).

### 1.8.2. Impedància de càrrega imaginària

Si la impedància de càrrega és purament imaginària i amb valor  $Z_L = j\chi_L$  tindrem reflexió total de la potència de l'ona progressiva cap a la regressiva. Aquest fet el podreu observar en els casos de reactàncies inductives ( $\chi_L > 0$ ) i capacitives ( $\chi_L < 0$ ).

La lletra  $\chi$  és la lletra grega chi minúscula i es llegeix "ji".

Això ho podeu comprovar si apliquem a l'equació (46) una impedància de càrrega purament imaginària:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{j\chi - Z_0}{j\chi + Z_0} \quad (47)$$

Com podeu observar en la segona part de la igualtat de l'equació (47), el numerador i el denominador són l'un el conjugat de l'altre, amb un canvi de signe

$$\rho_L = \frac{-(Z_0 - j\chi)}{Z_0 + j\chi} \quad (48)$$

Si desenvolupem la divisió per a un cas general multiplicant el numerador i el denominador pel conjugat del denominador, obtenim:

$$\begin{aligned} \rho_L &= \frac{-(Z_0 - j\chi)}{Z_0 + j\chi} = \frac{-(Z_0 - j\chi)(Z_0 - j\chi)}{(Z_0 + j\chi)(Z_0 - j\chi)} = \frac{-(Z_0^2 - j2Z_0\chi - \chi^2)}{Z_0^2 + \chi^2} = \\ &= \frac{-(Z_0^2 - \chi^2) + j2Z_0\chi}{Z_0^2 + \chi^2} = \frac{-(Z_0^2 - \chi^2)}{Z_0^2 + \chi^2} + j \frac{2Z_0\chi}{Z_0^2 + \chi^2} \end{aligned} \quad (49)$$

Ara, si calculem el mòdul del coeficient de reflexió de l'equació (49), obtindrem:

$$\begin{aligned} |\rho_L| &= \sqrt{\left(\frac{Z_0^2 - \chi^2}{Z_0^2 + \chi^2}\right)^2 + \left(\frac{2Z_0\chi}{Z_0^2 + \chi^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(Z_0^2 - \chi^2)^2 + (2Z_0\chi)^2}{(Z_0^2 + \chi^2)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(Z_0^4 + \chi^4 - 2Z_0^2\chi^2) + 4Z_0^2\chi^2}{(Z_0^2 + \chi^2)^2}} = \sqrt{\frac{(Z_0^2 + \chi^2)^2}{(Z_0^2 + \chi^2)^2}} = 1 \end{aligned} \quad (50)$$

De l'equació (50) podem deduir que, si el mòdul del coeficient de reflexió és 1, l'amplitud de l'ona regressiva serà la mateixa que la de l'ona progressiva, excepte per un canvi de fase.

#### Resistència, impedància, reactància

Quan tenim un condensador o una bobina en un circuit, aquests elements es caracteritzen idealment per un valor de capacitat, mesurada en farads [F], i un valor d'inductància, mesurada en henrys [H]. Diem "idealment" ja que els mateixos components presenten per naturalesa una resistència al pas del corrent pel seu interior, l'origen de la qual pot ser autoinductiva o autocapacitiva, segons el cas. A la resistència global en tots dos casos l'anomenarem *impedància*, la qual tindrà un caràcter complex  $Z = R + jX$ , on  $R$  representa

la resistència real i  $\chi$ , la reactància deguda a l'autoinducció o efecte capacitatiu. Aquesta reactància serà, segons el cas: inductiva,  $\chi_L = \omega L$ ; i capacitativa,  $\chi_C = -1/\omega C$ . On  $\omega$  representa la freqüència,  $\omega = 2\pi f$ .

### 1.8.3. Impedància de càrrega complexa

Si la impedància de càrrega és del tipus  $Z_L = R_0 + j\chi_L$ , el resultat que obtindrem és una combinació de tots els casos anteriors.

#### Exemple de càlcul de coeficient de reflexió

En aquest exemple calcularem el coeficient de reflexió per a una línia de transmissió amb una impedància característica  $Z_0 = 75 \Omega$ , amb una impedància de càrrega  $Z_L$ , de valors:

- a)  $Z_L = 75 \Omega$
- b)  $Z_L = 50 + j100 \Omega$ .
- c)  $Z_L = 100j \Omega$

#### Solució

Aplicant directament l'equació (46), podem obtenir el valor per al cas a):

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{75 - 75}{75 + 75} = \frac{0}{150} = 0 \quad (51)$$

En aquest cas, la línia de transmissió està completament adaptada, ja que el coeficient de reflexió és zero.

Si tornem a aplicar l'equació (46) amb el valor b) de la impedància de càrrega:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 + j100 - 75}{50 + j100 + 75} = \frac{-25 + j100}{125 + j100} = 0,268 + j0,585 \quad (52)$$

Si utilitzem l'equació (46) amb el tercer valor de la impedància de càrrega:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{j100 - 75}{j100 + 75} = \frac{-75 + j100}{75 + j100} = 0,28 + j0,96 \quad (53)$$

## 1.9. Què hem après?

En aquest primer apartat hem vist el concepte de línia de transmissió: un element que serveix per a transmetre ones electromagnètiques, com ara un senyal elèctric, d'un dispositiu a un altre. Hem vist que en les línies de transmissió és molt important la seva longitud respecte a la longitud d'ona per tal que les ones hi puguin circular. També hem explicat que basen el seu funcionament en el retard en la propagació dels senyals dins de la línia i hem mostrat que les línies de transmissió es poden classificar en funció de la seva morfologia (bifilars, coplanàries i concèntriques).

Un altre aspecte important són les principals característiques de les línies de transmissió, la impedància característica,  $Z_0$ , la seva longitud,  $l$ , i el coeficient de propagació,  $\beta$ .

Vegeu la impedància de càrrega real al subapartat 1.8.1 d'aquest mòdul.  
Vegeu la impedància de càrrega imaginària al subapartat 1.8.2 d'aquest mòdul.

A continuació hem desenvolupat un model de línies de transmissió, basat en l'aproximació quasiestàtica, que ens ha permès calcular, mitjançant components discrets, la impedància característica de la línia,  $Z_0$ , i el seu coeficient de reflexió,  $\rho$ .

Tot això ho hem fet per a qualsevol tipus de línia de transmissió. També hem fet l'aproximació a una línia de transmissió ideal, sense pèrdues, en què els paràmetres de conductància,  $G'$ , i resistència,  $R'$ , són zero.

Les solucions a les equacions que hem deduït per al model de línia de transmissió són dues ones de tensió i de corrent progressives i regressives, que viatgen del generador cap a la càrrega, i de la càrrega cap a generador, respectivament.

Per a aplicar totes aquestes definicions, en el següent apartat veurem uns exemples més pràctics.



## 2. Exemples de circuits

Fins aquí heu vist com es definia el model equivalent de la línia de transmissió, i com definíem els seus paràmetres:

- Coeficient de propagació,  $\gamma$ , que s'expressa segons l'equació (15).
- Impedància característica,  $Z_0$ , segons l'equació (29) per a línies de transmissió ideals, o sense pèrdues.
- Coeficient de reflexió en la càrrega,  $\rho_L$ , segons l'equació (46).

Amb els exemples següents veurem com aplicar el model de línia de transmissió desenvolupat fins ara i com es calculen els seus paràmetres. Al mateix temps, aprofitarem per a definir nous conceptes, com el coeficient de transmissió.

### 2.1. Circuits amb una línia de transmissió

Ara que tenim definida la línia de transmissió amb les seves propietats més importants, podem fer un parell d'exemples en detall per a veure com s'apliquen tots els conceptes que hem explicat fins ara. També aprofitarem per a introduir-ne algun de nou, derivat dels que ja hem explicat, i per a acabar d'entendre com es propaguen les ones i com podem treballar amb les eines explicades.

#### 2.1.1. Coeficient de reflexió en el generador

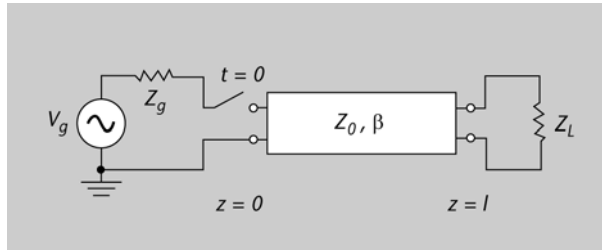
Ja hem vist que les ones que es generen es propaguen dins de la línia fins arribar a la càrrega i, en funció de les característiques d'aquesta última, l'ona progressiva es reflecteix. També hem vist que la component reflectida depèn d'un coeficient de reflexió, el qual generarà una ona regressiva que tornarà cap al generador.

Vegeu que la component reflectida depèn d'un coeficient de reflexió al subapartat 1.7 d'aquest mòdul.

Però què passa quan l'ona regressiva arriba al generador? És lògic pensar que com que el generador té una resistència, també pot actuar de càrrega i pot provocar una altra reflexió. Vegem-ho amb més detall.

Per a resoldre aquest problema utilitzarem un circuit com el de la figura 23 on tenim una font de tensió constant  $V_g = V_0$  amb una resistència interna  $Z_g = R_L$ , una línia de transmissió amb impedància característica  $Z_0$  i longitud  $l$ , i una resistència de càrrega purament resistiva,  $Z_L = R_L$ .

Figura 23

**Figura 23**

Circuit amb una línia de transmissió de característiques  $Z_0$  i  $\beta$ , i longitud  $\ell$ , amb un interruptor.

Entre el pol positiu de la font i un dels connectors del port d'entrada de la línia de transmissió hi situem un interruptor que podem obrir i tancar en el moment que nosaltres vulguem.

Per tal d'estudiar el circuit, analitzarem què passa per als següents instants:

- Instant inicial,  $t = 0$ . Quan tanquem l'interruptor i es generen les ones progressives en direcció a la càrrega.
- Instant en què l'ona progressiva arriba a la càrrega. És quan es generen les ones regressives, a  $t = T$  (on  $T$  és el temps que tarden les ones progressives en arribar a la càrrega,  $T = l/c$ ).
- Instant  $t = 2T$ , quan les ones regressives arriben al generador.

**El significat de  $T$** 

$T = l/c$  representa el temps que tarda una ona que es desplaça a una velocitat  $c$  en recórrer una distància  $\ell$  i, per tant, en recórrer tota la línia de transmissió.

El que succeeix durant el transitori, en tancar l'interruptor, ho podem definir pas a pas a mesura que es van produint els successos:

**a)** Instant inicial. A l'instant  $t = 0$  es tanca l'interruptor i permetem el pas del corrent cap a la línia de transmissió, on es genera una ona progressiva de tensió  $v_1^+$  (el subíndex 1 indica la primera ona que es genera i que es propaga per la línia en el primer cicle), l'expressió de la qual és (recordeu l'equació (37)):

$$v_1^+ = \frac{V_g \cdot Z_0}{Z_g + Z_0} \quad (54)$$

**b)** Instant  $t = l/c = T$ . En aquest instant l'ona progressiva assoleix la resistència de càrrega, on es genera una ona regressiva  $v_1^-$  segons l'equació (46):

$$v_1^- = \rho_L \cdot v_1^+ \quad (55)$$

Aquesta ona, just abans de l'instant  $t = 2T = 2l/c$ , assolirà l'extrem del generador, ja que ha tornat fins a la font.

**c)** Instant  $t = 2T$ . L'ona regressiva ha arribat al generador i es combina amb la nova ona progressiva que generi el generador  $v_2^+$  (el subíndex 2 indica l'ona

progressiva que es genera a l'arribada de l'ona regressiva 1, en el segon cicle). Aquest cas però, ja no el farem explícitament.

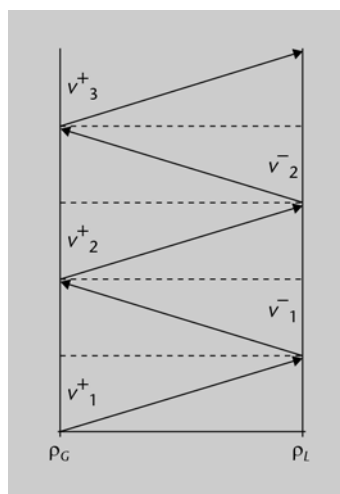
Val la pena comentar que es defineix un coeficient de reflexió en el generador com:

$$\frac{v_2^+}{v_1^-} = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = \rho_G \quad (56)$$

En aquest exemple hem definit el **coeficient de reflexió en el generador**,  $\rho_G$ , com el quocient entre l'ona incident que es genera per reflexió,  $v_2^+$ , i la que arriba reflectida de la primera reflexió a la càrrega,  $v_1^-$ .

Vist l'exemple anterior, podeu concloure que l'ona s'anirà propagant al llarg de la línia de transmissió i que cada vegada s'haurà de multiplicar l'ona incident (ja sigui a la càrrega o al generador) pel coeficient de reflexió corresponent per a obtenir l'ona reflectida. Podeu veure un diagrama representatiu de totes les ones que es van creant per les successives reflexions a la figura 24.

Figura 24



**Figura 24**

Diagrama de reflexions successives entre el generador i la càrrega.

## 2.2. Circuits amb dues línies de transmissió: coeficient de transmissió

Ara complicarem una mica més les coses. Ara veurem què passa en el cas de tenir més d'una línia de transmissió i un element resistiu entre ambdues. En l'exemple següent estudiarem aquest cas de forma general, però només estudiarem què passa quan l'ona arriba al final de la primera línia i com es propaga fins a la segona línia de transmissió. Utilitzarem com a exemple un circuit en què tindrem element resistiu en paral·lel entre les dues línies de transmissió.

A la figura 25 tenim un circuit on hi ha una resistència  $R$  en paral·lel amb la unió entre dues línies de transmissió  $a$  i  $b$  de llargària  $l_1$  i  $l_2$  respectivament, amb impedàncies característiques  $Z_{01}$  i  $Z_{02}$ , i amb una resistència de càrrega  $Z_L$  al final de la segona línia de transmissió. Per conveniència hem situat l'origen de l'eix  $z$ ,  $z = 0$ , en la posició de la resistència  $R$ , el port d'entrada de la línia  $a$  a  $z = -l_1$  i el port de sortida de la línia  $b$  a  $z = l_2$ .

Figura 25

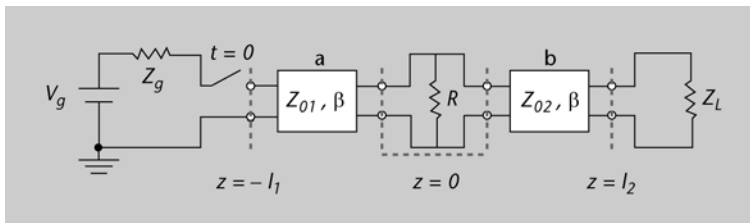


Figura 25

Circuit amb una resistència  $R$  en paral·lel entre dues línies de transmissió  $a$  i  $b$ . Centrem la resistència  $R$  a l'origen de l'eix  $z$ .

Tal com hem vist en l'exemple anterior, quan una ona progressiva es troba amb una càrrega, genera una ona reflectida (vegeu equació (54)). En aquest exemple la resistència en paral·lel  $R$  provocarà reflexions parcials de l'ona progressiva i la resta de l'ona continuarà propagant-se a través de la línia  $b$  fins a la càrrega  $Z_L$  i, així, tindrem  $v_{b1}^+ = v_{a1}^+ + v_{a1}^-$ . Fixeu-vos que estem sumant l'ona progressiva i l'ona regressiva (recordeu l'equació (30)), ja que la fase de cada ona està implícita dins de l'ona progressiva,  $v_{a1}^+$ , i de la regressiva  $v_{a1}^-$ . És a dir, el signe, si se suma o es resta, vindria donat per la fase.

A la relació entre l'ona que passa fins a la línia  $b$ ,  $v_{b1}^+$ , i l'ona que arriba a la resistència  $R$  procedent de la línia  $a$ ,  $v_{a1}^+$ , l'anomenarem **coeficient de transmissió**,  $\tau_{ab}$ . Aquest coeficient l'expressarem segons la següent equació:

$$\tau_{ab} = \frac{v_{b1}^+}{v_{a1}^+} = \frac{v_{a1}^+ + v_{a1}^-}{v_{a1}^+} \quad (57)$$

La lletra  $\tau$  és la lletra grega tau minúscula i es llegeix "tau".

En aquest exemple hem definit el **coeficient de transmissió**,  $\tau_{ab}$ , com la relació entre l'ona que arriba a la resistència  $R$ , procedent de la línia  $a$ , i l'ona que passa fins a la línia  $b$ .

$$\tau_{ab} = \frac{v_{b1}^+}{v_{a1}^+} = \frac{v_{a1}^+ + v_{a1}^-}{v_{a1}^+} \quad (58)$$

A més, es compleix que la suma del coeficient de transmissió i del de reflexió (equació (46)) és 1:

$$\tau_{ab} + \rho = 1 \quad (59)$$

Podeu veure-ho així: tenim l'ona progressiva que va del generador a la càrrega,  $v_{a1}$ . Quan arriba a la càrrega una part es reflexa,  $v_{a1}^- = \rho v_{a1}^+$  (equació (55)) i una altra part es transmet,  $v_{b1}^+ = \tau_{ab} v_{a1}^+$  (equació (58)).

Es crearà un coeficient de reflexió i un de transmissió per a cada element que hi hagi dins del circuit fins arribar a la càrrega, on l'ona incident només podrà ser reflectida o dissipada.

Amb els coeficients definits en les equacions (46), (56) i (58) podeu determinar les tensions i els corrents dins de cada línia de transmissió en cada instant.

Ara treballarem amb aquests coeficients per al cas en què es propaguin ones planes harmòniques.

### 2.3. Què hem après?

En aquest apartat hem presentat dos exemples de circuits als quals hem aplicat el model de línies de transmissió, i hem vist com circula l'ona progressiva, es reflecteix a la càrrega i es crea una ona regressiva que retorna cap a la font.

També hem aprofitat els exemples presentats en aquest apartat per a veure com s'apliquen els coneixements explicats en el primer apartat i, al mateix temps, definir el coeficient de reflexió en diversos punts de la línia de transmissió: en el generador i en la càrrega.

Un cop heu après com funcionen les línies de transmissió, hem d'analitzar els senyals que hi circulen. Ho farem a l'apartat següent.

### 3. Transmissió de senyals sinusoidals

En l'apartat anterior heu vist com podíem calcular les amplituds dels corrents i les tensions que circulaven dins d'una línia de transmissió en funció de la posició dins de la línia i del temps.

També heu vist diversos circuits als quals aplicàvem els coneixements adquirits per a calcular les diverses reflexions i encavalcaments de les ones progressives i regressives dins de les línies, i com afectaven les càrregues el comportament de les ones.

En aquest apartat:

- Veurem el comportament de les línies de transmissió quan injectem senyals purament sinusoidals a la línia.
- Estudiarem un cas particular dels senyals sinusoidals: les ones estacionàries dins de la línia. Les ones estacionàries es creen quan la càrrega està mal adaptada i apareixen reflexions (ones regressives). Estudiarem aquest cas particular perquè és molt important tenir les ones estacionàries ben controlades, ja que poden fer malbé els nostres generadors de senyals a causa del retorn de l'ona regressiva.

#### 3.1. Els senyals sinusoidals

En aquest subapartat estudiarem el comportament de les línies de transmissió excitades per generadors de senyals sinusoidals en règim permanent, és a dir, generadors que emeten ones sinusoidals, que serien les ones planes harmòniques amb què hem estat treballant al llarg de l'assignatura.

Per a això cal que introduïm la notació fasorial. Aquesta notació és una forma d'expressar les equacions (16) i (17) per mitjà d'equacions trigonomètriques (sinus i cosinus), amb l'objectiu de simplificar les equacions i el seu tractament.

Amb aquest tipus de generadors, tots els senyals aplicats a la línia es poden expressar segons una funció del tipus d'equació trigonomètrica. Podeu veure una representació d'una funció sinusoidal a la figura 26a:

$$v = |V| \cdot \sin \psi \quad (60)$$

o en notació fasorial complexa, podeu veure una representació fasorial de la funció sinusoidal a la figura 26b:

$$v = |V| \cdot e^{j\omega t - \gamma z + j\phi} \quad (61)$$

Vegeu els exemples dels subapartats 2.1 i 2.2 d'aquest mòdul.

#### Les ones sinusoidals i el teorema de Fourier

Té sentit estudiar les ones sinusoidals perquè gràcies al teorema de Fourier qualsevol ona es pot expressar com una suma d'ones sinusoidals (vegeu l'apèndix del mòdul "Ones").

#### Règim permanent

L'expressió *en règim permanent* fa referència al cas ideal en què les ones es generen permanentment i no tenim els problemes de transitoris deguts al cas inicial, en què es comencen a generar, ni al cas en què s'apaga el generador.

#### Recordeu

$\gamma$  és un número complex, per això, no posem la  $j$  en l'exponent en l'equació (61).

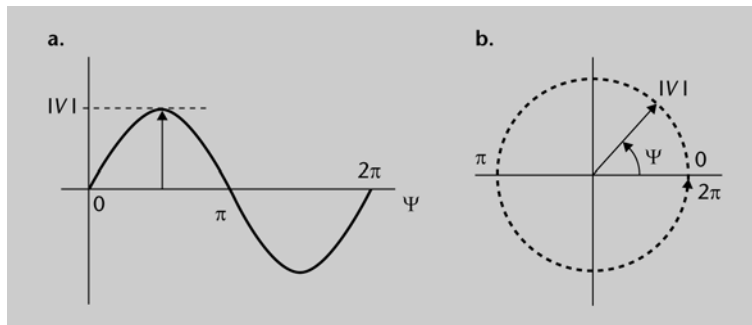
on:

- $v$  representa l'ona de tensió.
- $V$  és l'amplitud de l'ona.
- $\omega$  és la freqüència angular.
- $\gamma$  és la constant de propagació (equació 15). Aquesta constant té una part real,  $\alpha$ , i una part imaginària  $\beta$ . Només estarà dins el sinus la part imaginària, ja que la part real queda  $e^{-\alpha z}$ , i com que no és una exponència complexa no correspon a una funció trigonomètrica.
- $\phi$  una fase arbitrària qualsevol. Normalment farem  $\phi = 0$ .

Les dues barres verticals us indiquen que estem prenent el valor absolut de l'amplitud,  $V$ . Això és degut al fet que el seu signe (positiu o negatiu) el tindrem inclòs dins de la fase arbitrària  $\phi$ .

La lletra  $\phi$  és la lletra grega phi minúscula i es llegeix "fi".

Figura 26



**Figura 26**

Representació d'una ona amb amplitud  $|V|$  en forma trigonomètrica (a) o en forma de factors (b).  $\psi$  representa l'angle, o fase, de l'ona ( $\psi = \omega t - \beta z + \phi$ ).

Per a passar l'equació trigonomètrica a complexa ho podeu fer aplicant les relacions d'Euler:

$$\sin(\psi) = \frac{e^{i\psi} - e^{-i\psi}}{2i} \quad \text{i} \quad \cos(\psi) = \frac{e^{i\psi} + e^{-i\psi}}{2} \quad (62)$$

Després heu de tenir en compte que la part  $(\omega t - \beta z + \phi)$  és només una fase.

La lletra  $\psi$  és la lletra grega psi majúscula i es llegeix "psi".

**Recordeu**

Recordeu que la diferència entre el sinus i el cosinus és una fase afegida de  $90^\circ$  (o  $\pi/2$ ):

$$\cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(a)$$

Ara el que farem és expressar les ones progressives i regressives que circulen per l'interior de la línia en forma trigonomètrica (equació (60)),

L'ona progressiva de tensió (recordeu l'equació (18)) pren la forma d'una ona sinusoidal en funció de la posició,  $z$ , i del temps,  $t$ , segons l'equació (60):

$$v^+(z,t) = |V^+| e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \phi^+) \quad (63)$$

**Nota**

Fixeu-vos que la part real de  $\gamma$ ,  $\alpha$ , no queda dins la funció trigonomètrica.

I per a l'ona progressiva de corrent (recordeu l'equació (19)) també pren la forma d'una ona sinusoidal en funció de la posició,  $z$ , i del temps,  $t$ . Això ho podem expressar mitjançant l'equació:

$$i^+(z,t) = \frac{|V^+|}{Z_0} e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \phi^+) \quad (64)$$

on hem fet servir la llei d'Ohm ( $V^+ = RI^+$ ).

Les equacions (63) i (64) indiquen que el voltatge i el corrent experimenten el mateix tipus de variació sinusoidal en tots els punts de la línia. També ens diuen que aquests senyals estan molt més retardats en la seva oscil·lació com més a la dreta estiguin (factor  $\beta z$  creixent). Tanmateix, aquesta notació és incòmoda per a treballar amb línies de transmissió i a partir d'ara treballarem només en notació fasorial. D'altra banda, considerarem també que la fase inicial,  $\phi^+$ , és igual a zero.

Si recordem les equacions (18) i (19) en notació fasorial i separem la part del coeficient temporal  $e^{j\omega t}$  tenim, per a les ones progressives de tensió i corrent:

$$v^+ = V^+ e^{(j\omega t - \gamma z)} = V^+ e^{j\omega t} e^{-\gamma z} \quad (65)$$

$$i^+ = I^+ e^{j\omega t} e^{-\gamma z} \quad (66)$$

A partir d'aquest punt deixarem d'escriure la part temporal ( $e^{j\omega t}$ ) de les equacions en forma fasorial per a simplificar-les. Aquest terme sempre es pot afegir multiplicant  $e^{j\omega t}$  en els fasors, o afegint aquest terme a la fase arbitrària  $\phi$ .

Podem utilitzar les equacions (30) i (31), de manera que l'ona de tensió ens queda:

$$v = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{+\gamma z} \quad (67)$$

I la de corrent:

$$i = \frac{1}{Z_0} [V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{+\gamma z}] \quad (68)$$

on  $\gamma$  és la constant de propagació de la línia i s'expressa segons l'equació (15).

## 3.2. Propietats dels senyals sinusoidals

Una vegada definida la forma dels senyals que introduïrem a la línia de transmissió passarem a veure quines propietats tenen i com circulen.

### 3.2.1. Longitud d'ona

Recordeu que en el cas de línies de transmissió ideals, l'atenuació és nul·la,  $\alpha = 0$ , ja que no existeixen pèrdues i, per tant, substituint a (15) (que teniu produïda a la dreta):

$$\gamma = j\beta = \omega\sqrt{LC} \quad (69)$$

Vegeu les línies de transmissió ideals al subapartat 1.6.2 d'aquest mòdul.

#### La constant de propagació

L'equació (15) de la constant de propagació és:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R^+ + j\omega L^+)(G^+ + j\omega C^+)}$$



I si recordeu la definició de la velocitat de fase, tenint present que la fase és  $\omega t - \beta z$ , i que per calcular la velocitat de fase fem  $\omega t - \beta z = \text{constant}$  tenim:

$$c = v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (69b)$$

on  $\beta$  és el nombre d'ona relacionat amb la freqüència d'oscil·lació de l'ona,  $\omega$ , segons l'equació (69). La freqüència angular,  $\omega$ , es relaciona amb la freqüència lineal,  $f$ , mitjançant la següent equació:

$$\omega = 2\pi \cdot f \quad (70)$$

on  $f$  és la freqüència de l'ona que es propaga dins de la línia.

Si agafem la segona part de l'equació (69b) i hi substituïm l'equació (70), podem arribar a l'expressió:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \rightarrow \beta = 2\pi \frac{f}{c} \rightarrow \beta \frac{c}{f} = 2\pi \quad (71)$$

Atès que es compleix la relació següent per a qualsevol tipus d'ones:

$$\lambda \cdot f = c \quad (72)$$

on  $\lambda$  és la longitud d'ona, tenim:

$$\beta \left( \frac{c}{f} \right) = 2\pi \rightarrow \beta \lambda = 2\pi \rightarrow \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (73)$$

Anomenarem **longitud d'ona**  $\lambda$  a la distància mínima entre dos punts de la línia que estiguin sempre en fase o, el que és el mateix, a una distància entre ells de  $2\pi$ .

Així, segons l'equació (73), els termes que estiguin en fase han de complir  $\beta \lambda = 2\pi$ , és a dir:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c}{f} \rightarrow \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (74)$$

#### Recordeu

Velocitat de fase:

$$v_p = \frac{dz}{dt}$$

Vegeu la velocitat de fase al mòdul "Ones".

#### Recordeu

Estem considerant que les ones que estudiem es desplacen a la velocitat de la llum en el buit,  $c$ .

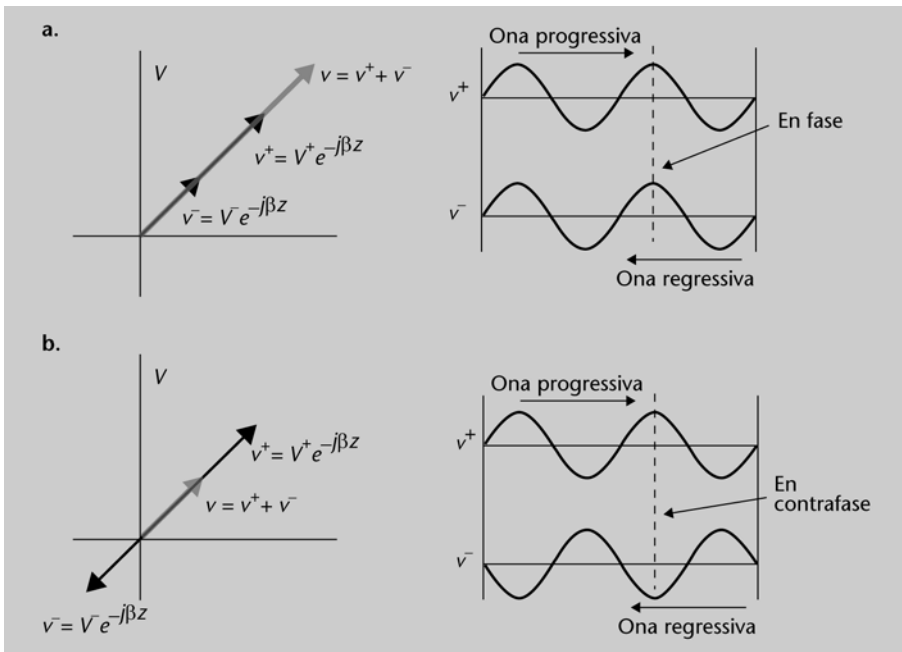
### 3.2.2. Interferència

Les ones de tensió progressives i regressives de l'equació (67) es poden interpretar com a dos vectors que es mouen en sentits contraposats en el pla complex (recordeu la notació fasorial de (63)). Per tant, la tensió total en un punt  $z$ ,  $v(z)$ , tindrà un màxim quan ambdós vectors,  $V^+ e^{-\gamma z}$  i  $V^- e^{+\gamma z}$ , se sumin, o estiguin en fase (vegeu la figura 27a), i tindrà un mínim quan ambdós vectors es restin, o estiguin en contrafase (vegeu la figura 27b). A la figura teniu tant la

Vegeu l'exemple 1.1 del subapartat 3.1.2 del mòdul "Ones".

representació en ones com la representació fasorial, en la qual els fasors apareixen dibuixats com a vectors que giren l'angle que dona la fase.

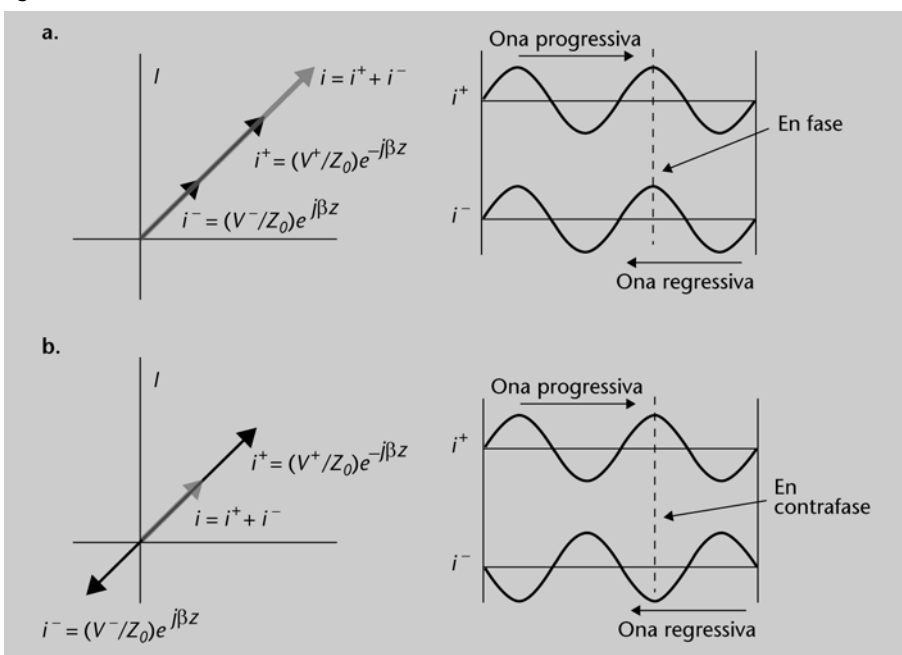
Figura 27



**Figura 27**  
Representació fasorial de les ones de tensió progressiva i regressiva en el pla complex. Suma (fletxa més gruixuda) en fase de les dues ones de tensió (a) i suma en contrafase (b).

Podem fer la mateixa suma fasorial amb les ones progressives,  $i^+ = \frac{V^+}{Z_0} e^{-\gamma z}$ , i regressives,  $i^- = \frac{V^-}{Z_0} e^{+\gamma z}$ , per al corrent (figura 28a i figura 28b):

Figura 28

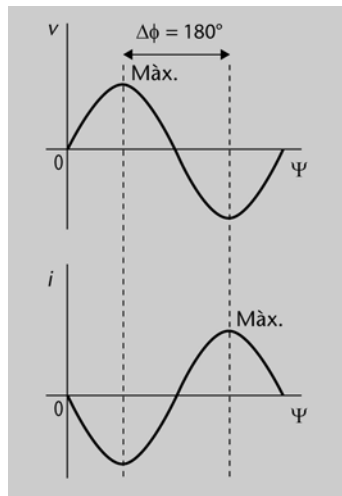


**Figura 28**  
Representació fasorial de les ones de corrent progressiva i regressiva en el pla complex. Suma (fletxa més gruixuda) en fase de les dues ones (a) i suma en contrafase (b).

Si recordeu les equacions (30) i (31), quan la tensió tingui un màxim, la intensitat  $|I|$  presentarà un mínim, i viceversa, a causa del desfasament de  $180^\circ$  entre l'ona

regressiva de tensió i l'ona regressiva de corrent (vegeu la figura 29). Aquest és el motiu que la impedància característica variï al llarg de la línia de transmissió.

Figura 29



**Figura 29**

Desfasament de 180° entre els màxims de l'ona de tensió i de l'ona de corrent.

Els màxims de tensió estaran desfasats 180° respecte als màxims de corrent i viceversa, amb els mínims respectius. Aquest desfasament provoca que quan tenim un màxim de tensió en un punt de la línia de transmissió, en aquest mateix punt hi hagi un mínim de corrent.

### 3.3. Coeficient de reflexió en una línia de transmissió ideal amb senyals sinusoidals

Ara que heu vist com interfereixen les ones progressives i regressives, podem calcular el coeficient de reflexió a partir d'aquestes ones progressives i regressives del mateix mode que hem fet abans.

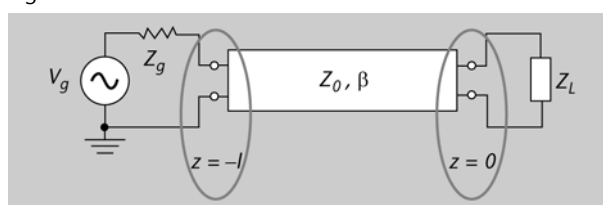
Segons les equacions (67) i (68), les ones de tensió i de corrent tenen forma sinusoidal. Això comporta que el seu valor vagi variant al llarg de la línia en funció de la posició,  $z$ . Si hem definit la impedància, segons la llei d'Ohm, com el quocient entre la tensió i el corrent, en cada punt de la línia anirà variant en funció dels valors de  $v$  i  $i$ .

Per a calcular la impedància de la línia en qualsevol punt, considerarem una secció de línia de longitud  $l$  carregada amb una impedància complexa  $Z_L$ , tal com podeu veure a la figura 30.

Vegeu la definició de coeficient de reflexió al subapartat 2.1 d'aquest mòdul.

Vegeu la impedància al subapartat 1.6.1 d'aquest mòdul.

Figura 30



**Figura 30**

Línia de transmissió carregada amb una impedància general (complexa).

Cal que us fixeu en el fet que hem canviat l'origen del sistema de referència en aquest circuit. Ara la càrrega es troba a l'origen,  $z = 0$ , i el generador de senyals es troba a  $z = -l$ . Això ho hem fet perquè partirem de les condicions en què l'ona progressiva ja ha arribat a la càrrega i, per tant, tenim un coeficient de reflexió  $\rho_L$ . A partir d'aquest punt veurem com evoluciona, o es transforma, aquest coeficient al llarg de la línia de transmissió.

El primer pas per a calcular la impedància en qualsevol punt de la línia és calcular el coeficient de reflexió de forma complexa. Per a fer-ho aplicarem l'equació (46) i tindrem present que estem en el cas sense pèrdues i, per tant,  $\alpha = 0$  (equació 69). A més, escriurem les ones de tensió progressives i regressives en forma fasorial, de manera que obtenim:

$$\rho(z) = \frac{v^-}{v^+} = \frac{V^- e^{+j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z}} = \rho_L e^{j2\beta z} \quad (75)$$

L'equació (75) ens mostra que el coeficient de propagació en qualsevol posició,  $\rho(z)$ , depèn del coeficient de reflexió en la càrrega,  $\rho_L(z = l)$  i d'una fase,  $2\beta z$ . Aquesta fase fa que el coeficient de reflexió vagi variant al llarg de tota la línia de transmissió,  $l$ .

A la variació del coeficient de reflexió al llarg de la línia, en direm **propagació** del coeficient de reflexió.

### Exemple de propagació del coeficient de reflexió

Donada una línia de transmissió ideal amb una impedància característica,  $Z_0 = 50 \Omega$ , i amb una impedància de càrrega  $Z_L = 50 + j100 \Omega$ , calculeu el coeficient de reflexió a una distància  $d = -\lambda/8$  de la càrrega (el símbol negatiu de la distància és degut al fet que partim del valor del coeficient de reflexió en la càrrega,  $z = l$ , i llavors ens desplaçem enrere  $\lambda/8$ ).

#### Solució

Per tal de poder aplicar l'equació (75) el que hem de fer en primer lloc és trobar el coeficient de reflexió en la càrrega,  $\rho_L$ .

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 + j100 - 50}{50 + j100 + 50} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \quad (76)$$

i ara ja podem calcular el coeficient de reflexió en la posició  $d = -\lambda/8$ , substituint a l'equació (75):

$$\rho(z = \frac{\lambda}{8}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j2\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad (77)$$

Noteu que hem aplicat l'equació (74) per a no haver de calcular el coeficient de propagació.

#### Recordeu

Per passar un número complex de forma binòmica

$$z = a + bi$$

a forma exponencial  $|z|e^{j\phi}$  cal fer:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\phi = \arctan \frac{b}{a}$$

Vigileu amb el signe de  $|\phi|$ .

### 3.3.1. Coeficient de reflexió en la càrrega

Per tal de trobar el coeficient de reflexió en la càrrega, cal calcular aquest coeficient de reflexió utilitzant l'equació (75) en la posició  $z = 0$ :

$$\rho_L = \rho(z=0) = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (78)$$

Fixeu-vos que l'equació (78) concorda perfectament amb l'equació (46) per al coeficient de reflexió en una càrrega:

$$\frac{v^-}{v^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \rho_L \quad (79)$$

### 3.4. Impedància d'entrada en una línia de transmissió amb senyals sinusoidals

Ara calcularem la impedància a l'entrada de la línia de transmissió quan tenim un senyal sinusoidal.

Si apliquem la llei d'Ohm i dividim l'expressió de l'ona progressiva de tensió, equació (30), per l'ona progressiva de corrent, equació (31), obtindrem la impedància a l'entrada de la línia,  $Z_{IN}$ . Aquesta impedància la podem calcular amb la següent equació:

$$Z_{IN} = \frac{v}{i} = \frac{v^+ + v^-}{i^+ + i^-} \quad (80)$$

on  $v$  i  $i$  representen la tensió i el corrent a l'entrada de la línia, en la posició  $z = -l$  en el nostre exemple.

Si apliquem l'equació (31) a l'equació (80) obtindrem:

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{v^+ + v^-}{v^+ - v^-} \quad (81)$$

I si substituïm les ones progressives i regressives de tensió i corrent per la seva notació fasorial (equació (67)), tenim:

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z} - V^- e^{j\beta z}} \quad (82)$$

També podem expressar l'equació (82) dividint el numerador i el denominador per  $V^+$ :

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{\frac{V^+}{V^+} e^{-j\beta z} + \frac{V^-}{V^+} e^{j\beta z}}{\frac{V^+}{V^+} e^{-j\beta z} - \frac{V^-}{V^+} e^{j\beta z}} \quad (83)$$

Si ara substituïm l'equació del coeficient de reflexió, que és la segona igualtat de l'equació (78), i fem  $z = -l$  ens queda:

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{e^{j\beta l} + \rho_L e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l} - \rho_L e^{-j\beta l}} \quad (84)$$

L'equació (84) expressada en la forma trigonomètrica i fent servir l'expressió (78) per a  $\rho_L$ , ens dóna la impedància a l'entrada de la línia en funció de la impedància de càrrega,  $Z_L$ , i la impedància característica,  $Z_0$ :

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta l + jZ_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + jZ_L \sin \beta l} \quad (85)$$

Fixeu-vos que aquesta expressió ens dóna, de fet, la impedància en qualsevol punt de la línia, ja que si volem la impedància en un punt de la línia, podem pensar que "tallem" la línia en aquell punt i que, per tant, té aquella longitud. Podem expressar l'equació (85) d'una forma més compacta si dividim numerador i denominador per  $\cos(\beta l)$ :

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{Z_L \frac{\cos \beta l}{\cos \beta l} + jZ_0 \frac{\sin \beta l}{\cos \beta l}}{Z_0 \frac{\cos \beta l}{\cos \beta l} + jZ_L \frac{\sin \beta l}{\cos \beta l}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} \quad (86)$$

L'equació (86) és una equació difícil de representar gràficament ja que conté termes exponencials i depèn del coeficient de reflexió en la càrrega. Per tal de poder tenir una representació gràfica de l'evolució de la impedància d'entrada, podem escriure aquesta equació de la forma:

$$Z_{IN} = Z_0 \tanh(\beta l + \delta_Z) \quad (87)$$

on

$$\delta_Z = \frac{Z_L}{Z_0} \quad (88)$$

Per tal que us feu una idea, la representació gràfica de la tangent hiperbòlica és:

Figura 31

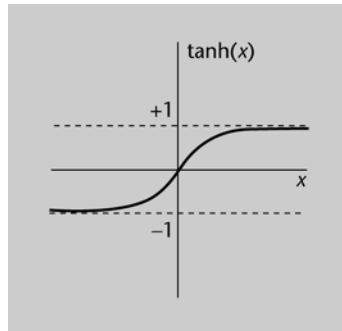


Figura 31

Representació de la funció tangent hiperbòlica de  $x$ .

O sigui que els seus valors estan fitats entre  $-1$  i  $+1$ .

### 3.5. Periodicitat de la impedància d'entrada, o línies de $\lambda/2$

Ara veurem com la impedància que podem mesurar al llarg de la línia de transmissió té un comportament periòdic.

Fixeu-vos que les equacions (85) i (86) són funcions periòdiques amb període proporcional a la longitud de la línia de transmissió,  $l$  (recordeu el factor  $\beta l$ ). Això és degut a la periodicitat de les funcions trigonomètriques que la formen, que és de  $2\pi$  radians:

$$\cos(\alpha+2\pi) = \cos(\alpha) \quad (89)$$

i

$$\sin(\alpha+2\pi) = \sin(\alpha) \quad (90)$$

I de la mateixa forma:

$$\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha) \quad (91)$$

i

$$\sin(\alpha+\pi) = -\sin(\alpha) \quad (92)$$

Les funcions trigonomètriques de les equacions (91) i (92) canvien el seu signe cada  $\pi$  radians, tot mantenint el seu valor absolut. Tanmateix, en el cas de l'equació (85) això vol dir que es canvia el signe del numerador i el denominador, per tant, el resultat és el mateix, tal com us mostrem en el següent desenvolupament, en què hem afegit  $\pi$  a l'argument per a veure'n la periodicitat:

$$\begin{aligned} Z_{IN} &= \frac{Z_L \cos(\beta l + \pi) + jZ_0 \sin(\beta l + \pi)}{Z_0 \cos(\beta l + \pi) + jZ_L \sin(\beta l + \pi)} = \frac{-Z_L \cos(\beta l) - jZ_0 \sin(\beta l)}{-Z_0 \sin(\beta l) - jZ_L \cos(\beta l)} = \\ &= \frac{-[Z_L \cos(\beta l) + jZ_0 \sin(\beta l)]}{-[Z_0 \cos(\beta l) + jZ_L \sin(\beta l)]} = Z_{IN} \end{aligned} \quad (93)$$

Si preneu l'equació (74), per tal de poder afegir aquest desfasament de  $\pi$  radians a la línia de transmissió, veureu que cal que (recordeu que  $\beta = 2\pi/\lambda$ ):

$$\beta\ell = \pi \rightarrow \ell = \frac{\lambda}{2} \quad (94)$$

D'on podem deduir que:

La impedància de les línies de transmissió té una periodicitat de  $\lambda/2$ . Aquesta periodicitat vol dir que cada  $\lambda/2$  prenen els mateixos valors, les ones de tensió i corrent. És a dir, la impedància d'entrada pren el mateix valor si anem inserint tantes línies de longitud  $\lambda/2$  com vulguem.

Tot seguit veurem alguns casos particulars, com el curtcircuit i el circuit obert.

### 3.5.1. Impedància en curtcircuit i en circuit obert

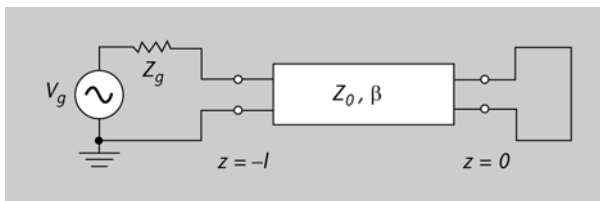
Un cop hem calculat de forma general la impedància d'entrada de la línia de transmissió, podem calcular-ne els següents casos particulars:

- Impedància en curtcircuit, que simbolitzarem  $Z_{cc}$ .
- Impedància en circuit obert, que simbolitzarem  $Z_{ca}$ .

Si preneu l'equació (84), podem concretar ambdós casos particulars en funció dels valors de la impedància de càrrega  $Z_L$ :

- Per a  $Z_L = 0$ , tenim la línia de transmissió en curtcircuit, ja que és com si tinguéssim una càrrega de resistència  $R = 0$  (vegeu la figura 32).

Figura 32



**Figura 32**

Línia de transmissió en curtcircuit.

Podem calcular la impedància a l'entrada del circuit,  $Z_{cc}$ , que serà purament reactiva. El valor d'aquesta reactància en curtcircuit l'anomenarem  $\chi_{cc}$ . Vegem-ho! Si a l'equació (85) hi substituïm  $Z_L = 0$ , obtenim:

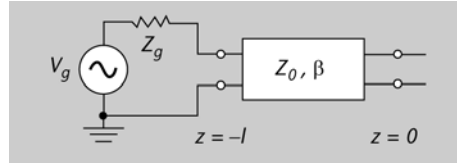
$$Z_{cc} = Z_0 \frac{jZ_0 \tan \beta\ell}{Z_0} = jZ_0 \tan(\beta\ell) = j\chi_{cc} \quad (95)$$

La lletra  $\chi$  és la lletra grega khi minúscula i es llegeix "ji".



Per a  $Z_L \rightarrow \infty$ , tenim la línia de transmissió en circuit obert, ja que si tenim una resistència infinita és com si no tinguéssim connectats els dos extrems de la línia de transmissió (vegeu la figura 33).

Figura 33



**Figura 33**  
Línia de transmissió en circuit obert.

Podem calcular l'admitància en circuit obert,  $Y_{ca}$ , que també serà purament reactiva, en funció de la reactància en circuit obert  $\chi_{ca}$ .

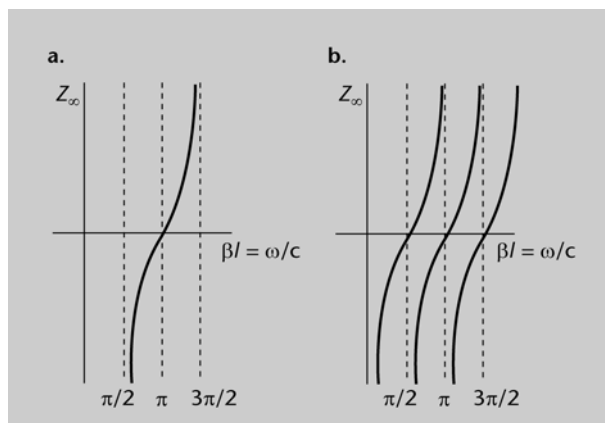
$$Z_{ca} = \frac{1}{Y_{ca}} \tag{96}$$

Si a l'equació (86) hi substituïm  $Z_L \rightarrow \infty$ , obtenim:

$$Z_{ca} = Z_0 \frac{(Z_L \rightarrow \infty) + jZ_0 \tan \beta \ell}{Z_0 + j(Z_L \rightarrow \infty) \tan \beta \ell} = -j \frac{Z_0}{\tan \beta \ell} = -j\chi_{ca} \tag{97}$$

La impedància d'entrada en els casos de circuit obert i curtcircuit és sempre reactiva, ja que la impedància  $Z$  només depèn de  $\chi$ . Els valors possibles de la impedància d'entrada en curtcircuit,  $Z_{cc}$ , i en circuit obert,  $Z_{ca}$ , els valors de l'equació (95) i (97), varien entre  $-\infty$  i  $+\infty$  segons la longitud de la línia (vegeu la figura 34a i la figura 34b).

Figura 34



**Figura 34**  
Representacions gràfiques de les impedàncies,  $Z_{cc}$ , en circuit tancat (a) i en circuit obert  $Z_{ca}$ , (b). Noteu que els seus valors varien entre  $-\infty$  i  $+\infty$ , i que entre  $Z_{cc}$  i  $Z_{ca}$  hi ha un desfasament de  $\pi/2$ .

Tal com podeu veure en els dos casos de la figura 34, la impedància en circuit obert,  $Z_{ca}$ , i en circuit tancat,  $Z_{cc}$ , tenen representacions molt semblants per a un mateix valor de  $\beta l$  llevat d'un desfasament de  $\pi/2$  radians. Aquest desplaçament es pot expressar tal com podeu veure a l'equació següent:

$$Z_{cc}(\beta \ell) = Z_{ca}(\beta \ell + \frac{\pi}{2}) \tag{98}$$

### 3.6. Inversor d'impedància d'entrada o línies de $\lambda/4$

Hem vist que quan tenim un senyal sinusoidal que circula per l'interior d'una línia de transmissió, aquest no es veu pertorbat si afegim un tros de línia de longitud igual a la meitat de la longitud d'ona del senyal sinusoidal,  $\lambda/2$ .

Ara veurem què passa si, en lloc d'una línia de  $\lambda/2$ , tenim una línia de longitud  $\lambda/4$ . Agafem aquest valor ja que la línia de transmissió presenta un comportament curiós quan la seva longitud és igual o proporcional a una quarta part de la longitud d'ona del senyal que hi circula.

Per tal de veure què passa en aquest cas operarem igual que hem fet amb l'anterior.

Vegeu com hem operat per al cas d'impedància en curtcircuit i en circuit obert al subapartat 3.5 d'aquest mòdul.

Si recordeu l'equació del coeficient de propagació, equació (74), i hi substituïm el valor de la longitud de la línia de transmissió per  $\lambda/4$ , obtenim:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda}\ell \quad (99)$$

i llavors, substituint a la dreta  $\ell$  per  $\lambda/4$ , tenim per  $\beta\ell$ :

$$\beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (100)$$

Si apliquem aquest resultat a l'equació (85) obtindrem:

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{Z_L \cos \frac{\pi}{2} + jZ_0 \sin \frac{\pi}{2}}{Z_0 \cos \frac{\pi}{2} + jZ_L \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{Z_0^2}{Z_L} \quad (101)$$

I si ara operem el resultat de l'equació (101) per tal de simplificar, obtenim:

$$\frac{Z_{IN}}{Z_0} = \frac{1}{\frac{Z_L}{Z_0}} \rightarrow \overline{Z_{IN}} = \frac{1}{\frac{Z_L}{Z_0}} \quad (102)$$

on  $\overline{Z_{IN}}$  representa la impedància d'entrada normalitzada, ja que l'hem dividit entre  $Z_0$ .

Normalment la normalització d'un paràmetre, o d'una llista de valors (per exemple entre 0 i 10), es fa per tal de passar aquest rang de valors a un rang normalitzat entre 0 i 1. Per a normalitzar, el que farem serà dividir els valors de la llista pel valor màxim de tots els possibles en aquesta llista, en el nostre exemple, 10. Així ja tenim que tots els elements de la llista tindran un valor entre 0 i 1.

En aquest cas, el que fem és normalitzar el rang de valors de la impedància d'entrada  $Z_{IN}$  al valor de la impedància característica de la línia de transmissió, dividint per  $Z_0$ .

L'equació (102) ens diu que les línies de transmissió amb una longitud de  $\lambda/4$  actuen com a **inversors d'impedàncies**, ja que a partir d'una línia de longitud igual a una quarta part de la longitud de l'ona que hi circula, la impedància normalitzada passa de ser  $\bar{Z}$  a ser  $\frac{1}{\bar{Z}}$ .

### 3.7. Ones estacionàries

Ara que heu vist com circulen els senyals sinusoidals per l'interior de les línies de transmissió, podem estudiar un cas particular del comportament de les línies quan hi circulen ones estacionàries.

Tal com indica el seu nom, les ones estacionàries són un tipus d'ona sinusoidal que tenen la propietat d'estar "quietes" dins de la línia de transmissió. Amb el terme "quietes" volem dir que sempre tenen els màxims i els mínims en la mateixa posició. Després del desenvolupament, veurem com és que les ones estacionàries presenten aquesta característica tan curiosa.

Quan per una la línia de transmissió només es transmet una ona progressiva (positiva o negativa), podem mesurar l'amplitud de la tensió mitjançant el seu valor eficaç. Aquest valor ens indica la mitjana de l'amplitud de l'ona mentre es desplaça per la línia, que romandrà constant al llarg de tota la línia.

Si preneu l'equació (65) i calculeu el valor absolut de l'ona progressiva, ens quedarà:

$$|V(z)| = |V^+| = |V^+ e^{j\omega t - j\beta z}| \quad (103)$$

El símbol de dues barres verticals  $|X|$  indica valor absolut de  $X$  o, en el cas de les tensions i els corrents, el seu valor eficaç,  $|V|$  i  $|I|$  respectivament. Calcularem el valor eficaç d'una ona de tensió sinusoidal a partir de la integració de l'ona des de  $t = 0$  fins a l'infinit  $t \rightarrow \infty$ , com a:

$$|V| = \int_0^{\infty} V_0 \sin(\omega t) dt = \frac{\sqrt{2}}{2} V_0 \quad (104)$$

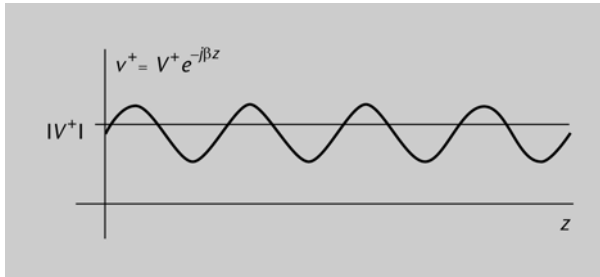
on  $V_0$  és el valor de l'amplitud de l'ona. El valor eficaç és un valor constant.

A la figura 35 podeu veure la representació de l'ona progressiva i el seu valor eficaç. Aquest valor eficaç de l'ona progressiva de tensió, equació (104), és constant per a qualsevol valor de  $z$ .

#### Recordeu

Estem estudiant el cas sense pèrdues, és a dir,  $\alpha = 0$ . Per això a (103) hem posat  $j\beta$  en lloc de  $\gamma$ .

Figura 35

**Figura 35**

Representació del valor eficaç  $|V^+|$  d'una ona de tensió progressiva  $V^+e^{-j\beta z}$ .

Ara bé, cal tenir en compte el fet següent:

Quan dins de la línia es propaguen al mateix temps una ona progressiva i una altra de regressiva, el mòdul de la tensió pot fluctuar, a causa de la interferència entre les dues ones (vegeu la figura 37), entre els següents valors (recordeu la figura 27):

- Un valor màxim que apareix quan els vectors  $V^+e^{-j\beta z}$  i  $V^-e^{+j\beta z}$  se sumen en fase i que estarà expressat per l'equació següent:

$$|V_{m\grave{a}x}| = |V^+| + |V^-| \quad (105)$$

L'equació (104) la podem expressar en funció del coeficient de reflexió,  $\rho_L$ , fent servir l'equació (46):

$$|V_{m\grave{a}x}| = |V^+|(1 + |\rho_L|) \quad (106)$$

- Un valor mínim que es produeix quan els vectors  $V^+e^{-j\beta z}$  i  $V^-e^{+j\beta z}$  se sumen en contrafase, determinats per l'equació següent:

$$|V_{m\grave{i}n}| = |V^+| - |V^-| \quad (107)$$

Aquesta equació la podem expressar en funció del coeficient de reflexió,  $\rho_L$ , tornant a fer servir l'equació (46):

$$|V_{m\grave{i}n}| = |V^+|(1 - |\rho_L|) \quad (108)$$

Aquest mínim es dona a una distància  $\lambda/4$  a la dreta o a l'esquerra de la situació del valor màxim. Recordeu que  $\beta \cdot \lambda/4 = \pi/2$  és una distància igual al desfasament per a passar d'un màxim a un mínim en una ona sinusoidal (vegeu la figura 36).

**Recordeu**

L'ona de tensió es representa com  $v$  i la seva amplitud com  $V^+$ .

Vegeu que els valors màxims i mínims són el resultat de la interferència entre l'ona progressiva i la regressiva al subapartat Interferència d'aquest mòdul.

Aquests punts de màxim i mínim els podeu veure representats a la figura 36.

Figura 36

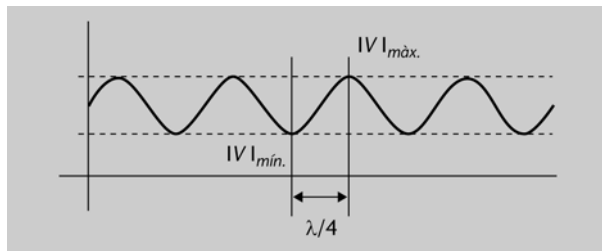


Figura 36

Distribució del mòdul de l'amplitud en una línia de transmissió amb una ona de tensió estacionària t.

A la figura 37 podeu veure com es crea l'ona d'interferència a partir de la suma entre l'ona progressiva i l'ona regressiva a mesura que ambdues es propaguen per la línia. En el cas a) les dues ones es troben quasi en fase, per la qual cosa l'amplitud de l'ona resultant és quasi el doble de la de les ones inicials. En el cas c) les dues ones es troben en contrafase, de manera que l'ona resultant té amplitud zero. En el cas b) podeu observar el cas intermedi del resultat de la interferència entre les dues ones.

Figura 37

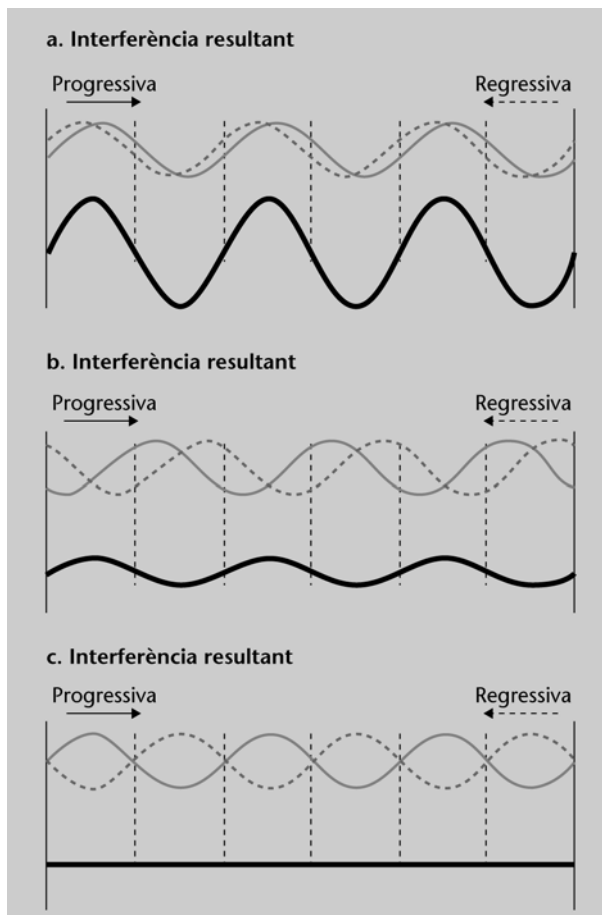


Figura 37

Patró de l'ona resultant de la interferència entre una ona progressiva (línia sòlida) i una de regressiva (línia ratllada). En el cas a. podeu observar la interferència constructiva, en el c., la destructiva, mentre que en el cas b., teniu un cas intermedi.

Ara veurem quina expressió tenen aquestes ones, que veureu que són ones estacionàries.

Si representem les equacions de les ones de tensió progressiva i regressiva en funció de la posició,  $z$ , i del temps,  $t$ , (equació (65)) ens quedarà:

$$v(z,t) = v^+(z,t) + v^-(z,t) \quad (109)$$

### Enllaç d'interès

A l'enllaç següent podeu veure com es creen les ones d'interferència en una representació en moviment. L'enllaç és: [http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Standing\\_wave\\_2.gif](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Standing_wave_2.gif)

O el que és el mateix, en les seves formes trigonomètriques:

$$v(z,t) = |V^+|\sin(\omega t - \beta z) + |V^-|\sin(\omega t + \beta z) \quad (110)$$

Si, per a simplificar, suposem que les dues ones tenen la mateixa amplitud,

$$|V^+| = |V^-| \quad (111)$$

podem utilitzar la següent igualtat trigonomètrica:

$$\sin(\theta) + \sin(\phi) = 2 \cos\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta + \phi}{2}\right) \quad (112)$$

Amb  $\theta = \omega t - \beta z$  i  $\phi = \omega t + \beta z$ , obtenim:

$$v(z,t) = 2|V^+|\cos(\beta z)\sin(\omega t) \quad (113)$$

Aquesta equació (113) no és l'equació d'una ona normal que es propaga per la línia de transmissió, ja que no té el terme  $(\beta z + \omega t)$ . Ha desaparegut per tant la propietat de propagació i és per això que parlem d'ones **estacionàries**. L'amplitud del senyal resultant serà:

$$|V| = 2|V^+|\cos(\beta z) \quad (114)$$

I cada punt de la línia de transmissió,  $z$ , vibrarà amb una freqüència angular  $\omega$ .

L'equació (113) reflecteix el fet que la tensió,  $v$ , en funció del temps  $t$  i de la posició dins de la línia,  $z$ , es veu representada per dues funcions sinusoidals:

- La primera només és funció de la posició:

$$2|V^+|\sin(\beta z) \quad (115)$$

- La segona només és funció del temps:

$$\cos(\omega t) \quad (116)$$

És a dir, tots els punts de la línia de transmissió es troben simultàniament en fase, independentment de la seva posició, ja que la fase no depèn de  $z$  (no és del tipus  $(\beta z + \omega t)$ ), tal com dèiem a l'inici d'aquest subapartat.

A la figura 37 podeu observar que els nodes de l'ona resultant sempre es troben en el mateix lloc i que només canvia l'amplitud de l'ona. Aquest fet reflecteix el caràcter d'estacionarietat. L'equació (113) representa, per tant, el que anomenem **ona estacionària** (que pren la forma de la figura 36c).

#### Recordeu

Estem en el cas  $\alpha = 0$  i, per tant,  $\gamma = j\beta$ .

#### Recordeu

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Vegeu el concepte d'ona estacionària al mòdul "Ones".

### 3.7.1. Relació d'ona estacionària

Tal com heu vist anteriorment, les ones estacionàries tenen un valor d'amplitud màxima,  $|V_{max}|$ , i un valor d'amplitud mínima,  $|V_{min}|$ . Calculem ara el paràmetre anomenat **relació d'ona estacionària (ROE)** que es defineix com el quocient entre els valors màxim i mínim de l'amplitud. El paràmetre ROE en permet mesurar, en certa manera, "com d'estacionària" és una ona estacionària.

Vegeu que les ones tenen un valor d'amplitud màxima i un valor d'amplitud mínima al subapartat 3.7 d'aquest mòdul.

El paràmetre ROE, o  $S$ , ens dóna una idea de com de "bona" és una ona estacionària en termes de com de ben definida està l'ona, o el que és el mateix, de si es poden diferenciar clarament els màxims dels mínims.

El paràmetre ROE en anglès rep el nom de *voltage standing wave ratio* i el trobareu sovint expressat amb la sigla VSWR.

L'ona estacionària es caracteritza per la relació entre el seu màxim i mínim d'interferència, donats per les equacions (105) i (107) (o (106) i (108)):

$$S = \frac{|V|_{max}}{|V|_{min}} = \frac{|V^+| + |V^-|}{|V^+| - |V^-|} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (117)$$

El paràmetre  $S$  s'anomena **relació d'ona estacionària** o ROE. Aquest paràmetre expressa com d'ideal és l'ona estacionària mitjançant la relació entre les seves amplituds màxima i la mínima. Podem relacionar aquest paràmetre amb el coeficient de reflexió mitjançant la fórmula:

$$S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (118)$$

D'on també podem trobar  $|\rho|$  a partir de  $S$ :

$$|\rho| = \frac{S - 1}{S + 1} \quad (118b)$$

En funció del valor del coeficient de reflexió, la relació d'ona estacionària pot variar entre els valors següents:

- Per a una línia adaptada (sense reflexions),  $|\rho| = 0$ , i per tant, el paràmetre és  $S = 1$ . Aquest és el valor mínim que pot tenir el paràmetre  $S$ , i ens diu que no existeix ona estacionària.
- Si a la línia hi ha una càrrega que reflecteix tota l'energia incident, el coeficient de reflexió  $|\rho| = 1$ , i el paràmetre  $S \rightarrow \infty$ . En aquest cas, l'ona reflectida és igual a l'ona incident, de manera que tota la potència retorna al generador. Aquest seria el pitjor cas, ja que l'ona estacionària és màxima i el generador es pot fer malbé si no està protegit.

Vegeu que en una línia adaptada  $|\rho| = 0$  al subapartat 1.9 d'aquest mòdul.

El valor de la relació d'ona estacionària pot variar entre 1 i  $\infty$ , i s'acostuma a expressar en decibels [dB].

$$S(\text{dB}) = 20 \log(S) \quad (119)$$

Recordeu que  $S$  representa un quocient entre tensions.

El paràmetre ROE és molt important, ja que ens dona una idea de quina potència es reflecteix de retorn cap al generador. En el cas que la potència retornada sigui molt gran, pot fer malbé el generador si no està ben protegit.

#### Observació

No confongueu  $S$  amb el paràmetre de la transformada de Laplace ja que el de Laplace és en minúscula,  $s$ .

#### Exemple de càlcul del paràmetre ROE

Calcularem el paràmetre  $S$ , o ROE, d'una línia de transmissió d'impedància característica  $50 \Omega$ , per la qual circula una ona progressiva d'amplitud  $1 \text{ V}$  i fase  $\pi/4$  radians. Carregarem aquesta línia amb una impedància de valor  $Z_L = 50 + j100 \Omega$ . També calcularem els valors de tensió màxim,  $|V_{\max}|$ , i mínim,  $|V_{\min}|$ , de l'ona estacionària.

#### Solució

El primer que haurem de fer és calcular el coeficient de reflexió en la càrrega,  $\rho_L$  (equació (46)), per tal de poder aplicar l'equació (118). Així:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 + j100 - 50}{50 + j100 + 50} = \frac{j}{1 + j} = 0,5 + j0,5 \quad (120)$$

O, en notació fasorial:

$$\rho_L = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \quad (121)$$

Ara ja podem aplicar l'equació (117):

$$S = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 5,82 \quad (122)$$

Si ara volem calcular els valors de  $|V_{\max}|$  i  $|V_{\min}|$ , aplicarem directament les equacions (105) i (107):

$$|V_{\max}| = |V^+| (1 + |\rho_L|) = \left| 1e^{j\frac{\pi}{4}} \right| \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1,7 \text{ V}_{\text{rms}} \quad (123)$$

i

$$|V_{\min}| = |V^+| (1 - |\rho_L|) = \left| 1e^{j\frac{\pi}{4}} \right| \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0,29 \text{ V} \quad (124)$$

#### Mòdul i fase d'un nombre complex

Per a passar a notació fasorial un nombre complex  $z = a + jb$ , hem de calcular el mòdul i la fase del nombre complex:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

i

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

### 3.8. Què hem après?

En aquest apartat ens hem centrat en la transmissió de senyals sinusoidals a través de les línies de transmissió.




Hem definit com són les funcions de les ones que circulen per l'interior de la línia i com van variant els paràmetres definits en el primer apartat en funció del senyal. Amb aquest objectiu hem tornat a trobar el coeficient de reflexió en la càrrega i la impedància d'entrada.

L'anàlisi de les ones ens ha mostrat una característica curiosa dels senyals sinusoidals: la seva periodicitat dins de la línia de transmissió cada  $\lambda/2$ . Aquesta propietat ens ha permès:

- Definir les impedàncies de línia en circuit obert,  $Z_{ca}$ , i en circuit tancat,  $Z_{cc}$ .
- Definir les característiques d'una línia de transmissió inversora, que inverteix la impedància que té a l'entrada i que té una longitud de  $\lambda/4$ .
- Definir les ones estacionàries com un efecte d'interferència entre la reflexió de l'ona incident en la càrrega i la pròpia ona reflectida, i definir també el seu paràmetre de relació d'ona estacionària (ROE).

Tots aquests càlculs són llargs i poden ser complicats. Al proper apartat us mostrarem com fer servir una eina que ens facilitarà molt tots els càlculs dels paràmetres anteriors, la carta d'Smith.



Recordeu que el paràmetre ROE en anglès rep el nom de *voltage standing wave ratio* i el trobareu sovint expressat amb la sigla VSWR.

## 4. La carta d'Smith

Ja heu vist com es comporten les línies de transmissió quan les utilitzem per a transmetre un senyal sinusoidal. També hem definit les impedàncies d'entrada,  $Z_{IN}$ , de les línies (recordeu les equacions (85) i (86)) i el coeficient de reflexió,  $\rho_L$ .

El càlcul de la impedància característica d'una línia de transmissió és essencial per a poder adaptar bé la línia i poder transmetre, així, tota la potència generada per la font a la càrrega. És per això, per a poder simplificar aquests càlculs, que es va inventar la carta d'Smith.

La carta d'Smith la va inventar P. H. Smith l'any 1939, mentre treballava per als laboratoris Bell, per a calcular l'adaptació de les línies de transmissió a antenes de grans dimensions. Inicialment va proposar que la carta tingués un disseny de forma quadrada, però tenia limitacions en el rang de valors que es podien utilitzar, fins que va resoldre el disseny utilitzant coordenades polars. Teniu una carta d'Smith completa a la figura 38.

### Els transmissors de ràdio

En el cas d'un sistema de transmissió de ràdio, l'antena està dissenyada específicament per al tipus d'ones que es volen transmetre, i el generador senzillament les genera. Només ens cal que la línia de transmissió que dissenyem s'adapti a aquests dos sistemes per tal de realitzar una bona transmissió del senyal.

La carta d'Smith s'utilitza, entre altres usos, per a calcular la impedància d'entrada d'una línia de transmissió a partir de la longitud de la línia en relació a la freqüència del senyal sinusoidal que hi circula, i de la seva impedància de càrrega, o, en un nivell més avançat, per a acoblar impedàncies.

En aquest apartat veurem com és la carta d'Smith, com està dissenyada i com fer-la servir, mitjançant alguns exemples.

### 4.1. Descripció de la carta d'Smith

A la carta d'Smith trobem representat:

- El coeficient de reflexió: ho estarà en forma fasorial, de manera que tindrà un mòdul i una fase:

$$\rho = |\rho|e^{j\phi} \quad (125)$$

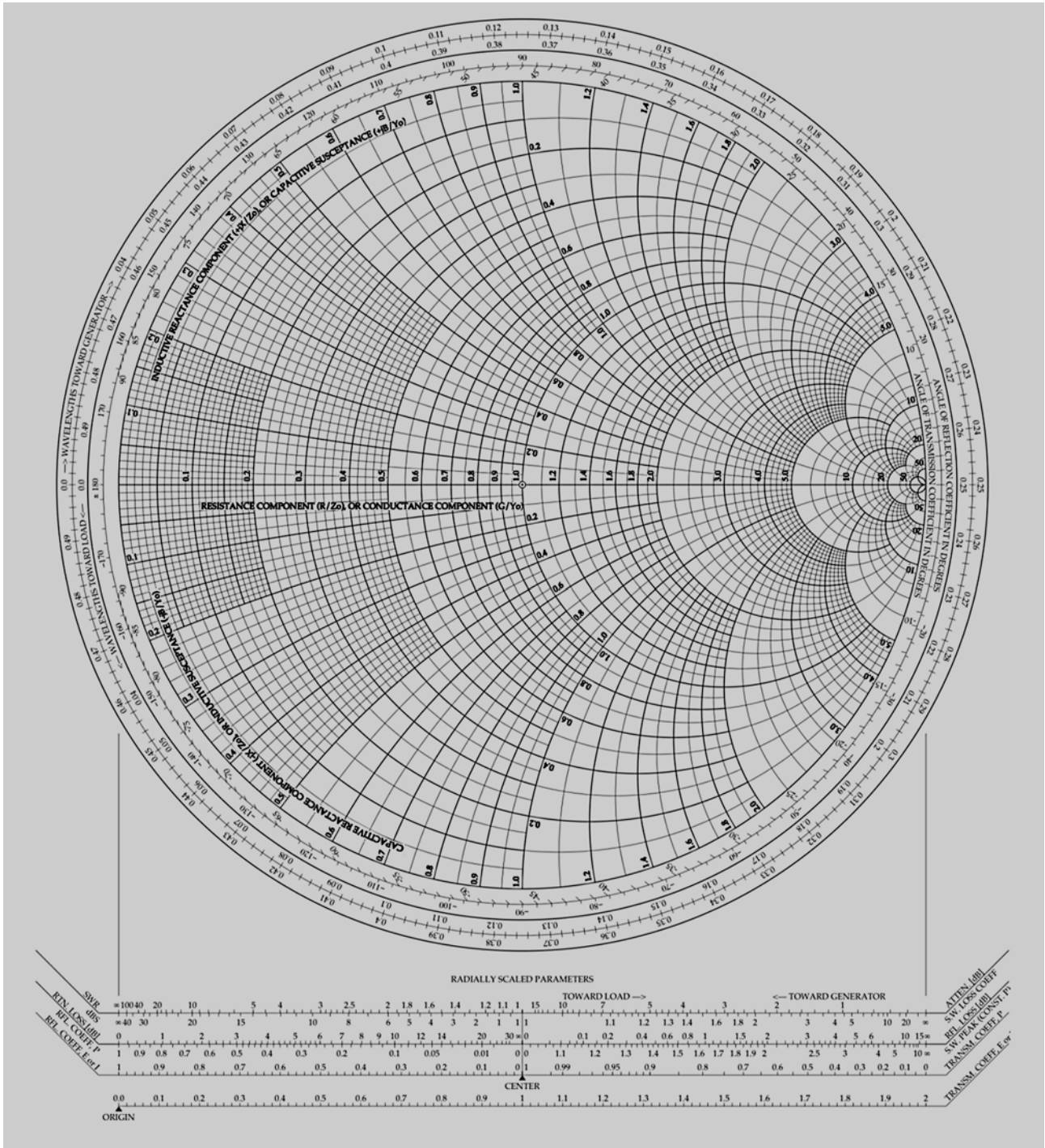
Vegeu el comportament de les línies de transmissió en transmetre un senyal sinusoidal, les impedàncies d'entrada i el coeficient de reflexió a l'apartat 3 d'aquest mòdul.

Vegeu el càlcul de la impedància característica d'una línia de transmissió al subapartat 3.4 d'aquest mòdul.

#### Recordeu

La impedància d'entrada de la línia de transmissió,  $Z_{IN}$ , varia en funció de la freqüència del senyal sinusoidal (equació (90)).

Figura 38. Carta d'Smith completa



- La impedància de la línia de transmissió,  $Z_{IN}$  (equació 85):

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta l + jZ_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + jZ_L \sin \beta l} \quad (126)$$

**Recordau**

Els nombres complexos es poden representar per components: part real i part imaginària, per exemple:  $a + jb$ ; o per mòdul i fase, per exemple:  $Ae^{j\theta}$ , on  $A$  és el mòdul i  $\theta$  l'angle o fase.

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

i

$$\theta = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

Tot i que, de fet, la carta d'Smith no representa les impedàncies així, sinó que les representa normalitzades respecte a la impedància característica de la línia de transmissió,  $Z_0$ :

$$\bar{Z} = \frac{Z}{Z_0} \quad (127)$$

Ara que ja hem vist què s'hi representa, vegem com és la carta d'Smith. Teniu una carta completa representada a la figura 38 i podeu veure que està formada per:

- Una primera circumferència exterior on s'indica la fase ( $\phi$  a l'equació 125) del coeficient de reflexió (vegeu la figura 39) en graus sexagesimals.

Figura 39

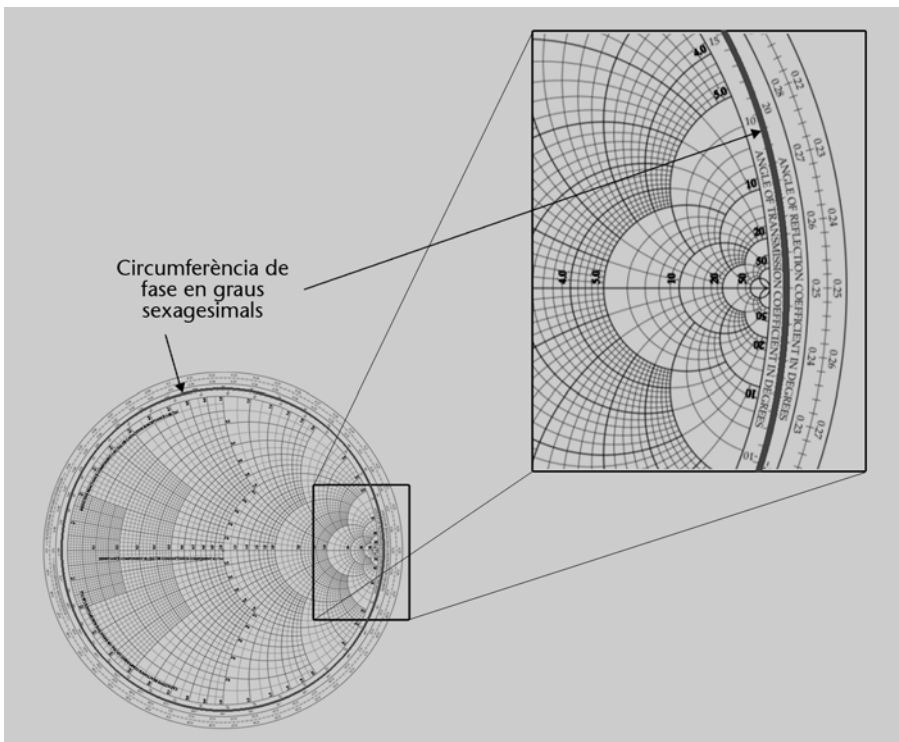


Figura 39

Circumferència de l'angle del coeficient de reflexió en graus sexagesimals.

- Una segona circumferència exterior on s'indica la longitud d'ona,  $\lambda$ , del senyal sinusoidal que hem introduït en la línia en relació amb la longitud,  $l$ , de la pròpia línia (vegeu la figura 40)  $\lambda/l$ . Aquesta circumferència ens permetrà propagar les impedàncies i els coeficients de reflexió,  $\rho$ , i transmissió,  $\tau$ , en les dues direccions de la línia de transmissió: cap al generador i cap a la càrrega. Més endavant ja veureu com s'utilitza.

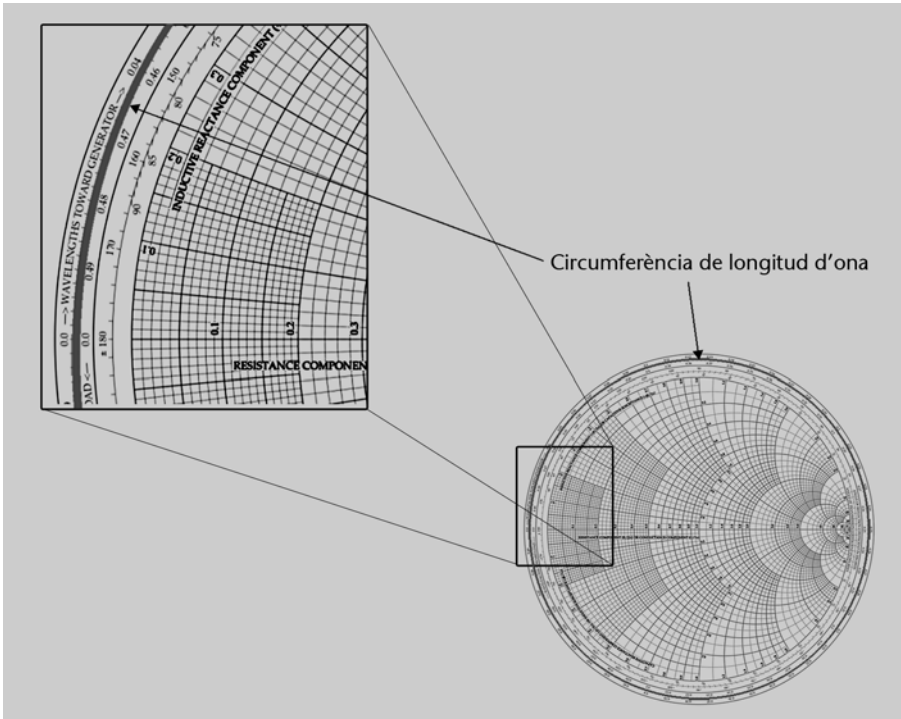
Si us fixeu en la banda esquerra de la circumferència, veureu que hi ha el 0, i a l'altre extrem hi ha el  $0,25\lambda$  (o  $\lambda/4$ ). Això reflecteix la propietat de periodicitat cada  $0,5\lambda$  (o cada  $\lambda/2$ ) que ja hem explicat.

Vegeu la periodicitat en  $\lambda/2$  al subapartat 3.5 d'aquest mòdul.

Vegeu la impedància característica d'una línia de transmissió al subapartat 3.6 d'aquest mòdul.

Vegeu la periodicitat en  $\lambda/2$  al subapartat 3.5 d'aquest mòdul.

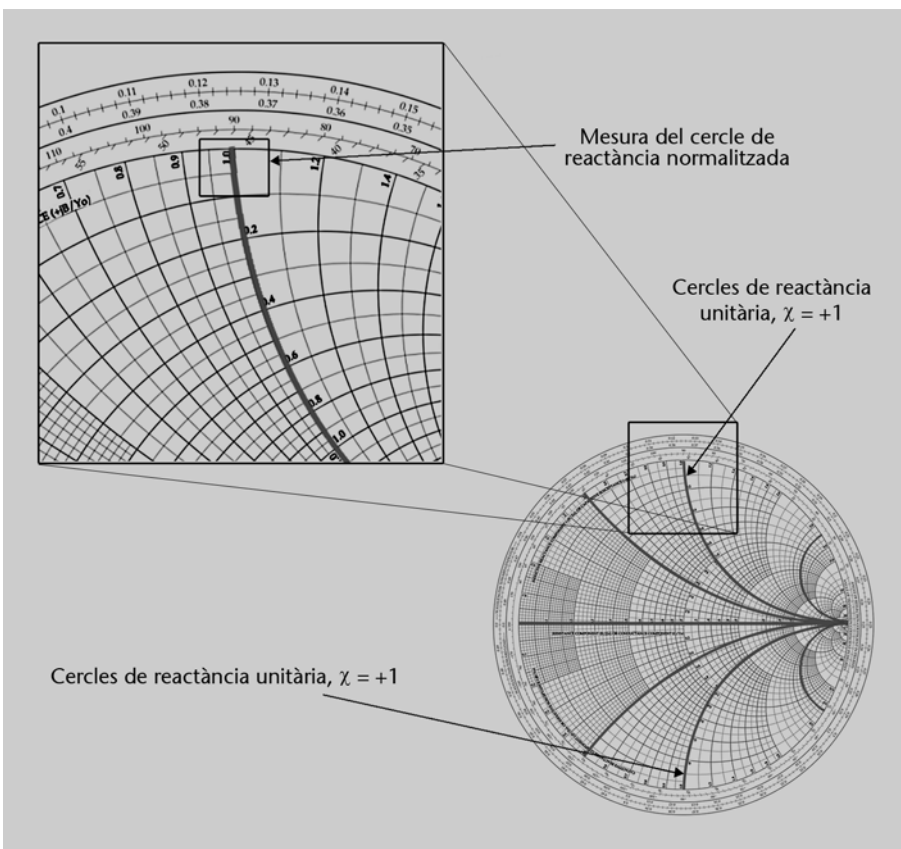
Figura 40



**Figura 40**  
Circumferència de longitud d'ona que relaciona la freqüència del senyal amb la longitud de la línia, amb doble mesura, cap al generador i cap a la càrrega.

- Unes corbes de reactància constant (vegeu la figura 41).

Figura 41



**Figura 41**  
Carta d'Smith on hem ressaltat les circumferències de reactància  $\chi$  constant i les circumferències de reactància unitària.

En aquestes corbes, la mesura de la reactància es pot llegir en el punt on la corba talla la circumferència del perímetre o, en una mesura més fina, en la circumferència que talla el centre de la carta. Les circumferències que ta-

**Recordeu**  
La reactància és la part imaginària de la impedància i que pot ser reactiva o capacitiva en funció de si és positiva o negativa, respectivament

llarien l'eix vertical que partiria la carta per la meitat són les circumferències de reactància unitària  $\chi = \pm 1$ , i aquesta disminueix a mesura que creix el radi de la circumferència de reactància constant.

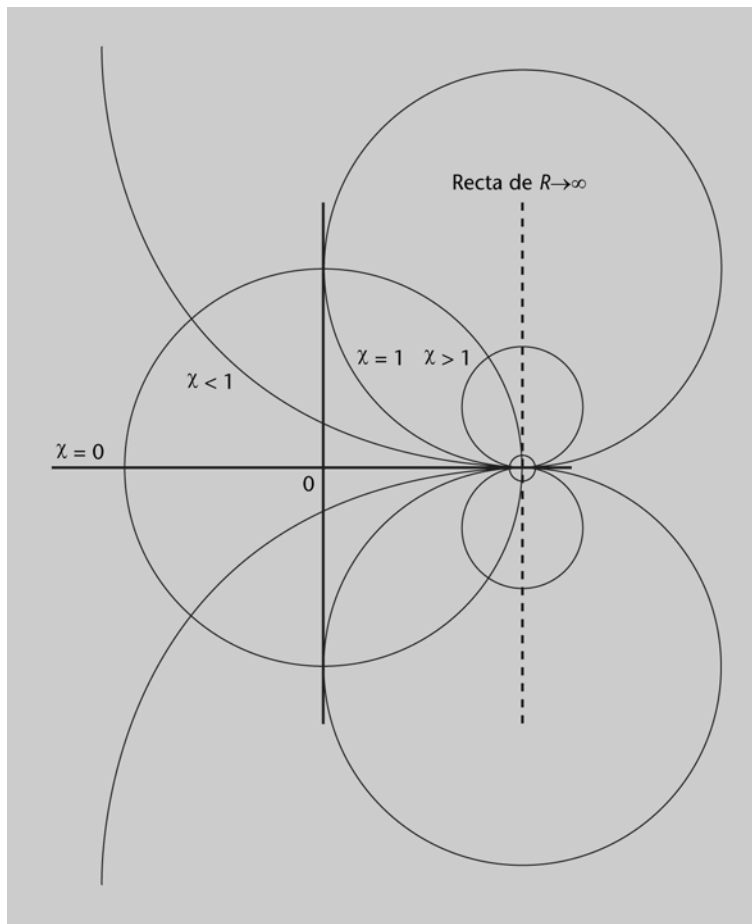
A la figura 42 podeu veure més simplificades les circumferències de reactància constant. En aquesta figura s'hi han senyalitzat:

- La circumferència de reactància zero,  $\chi = 0$ .
- La circumferència de reactància unitària.
- Les circumferències de casos intermedis amb  $\chi < 1$  i  $\chi > 1$ .

**$\chi = 0$**

La circumferència de reactància nul·la,  $\chi = 0$ , és una recta, i aquesta recta es pot considerar com una circumferència de radi infinit.

Figura 42



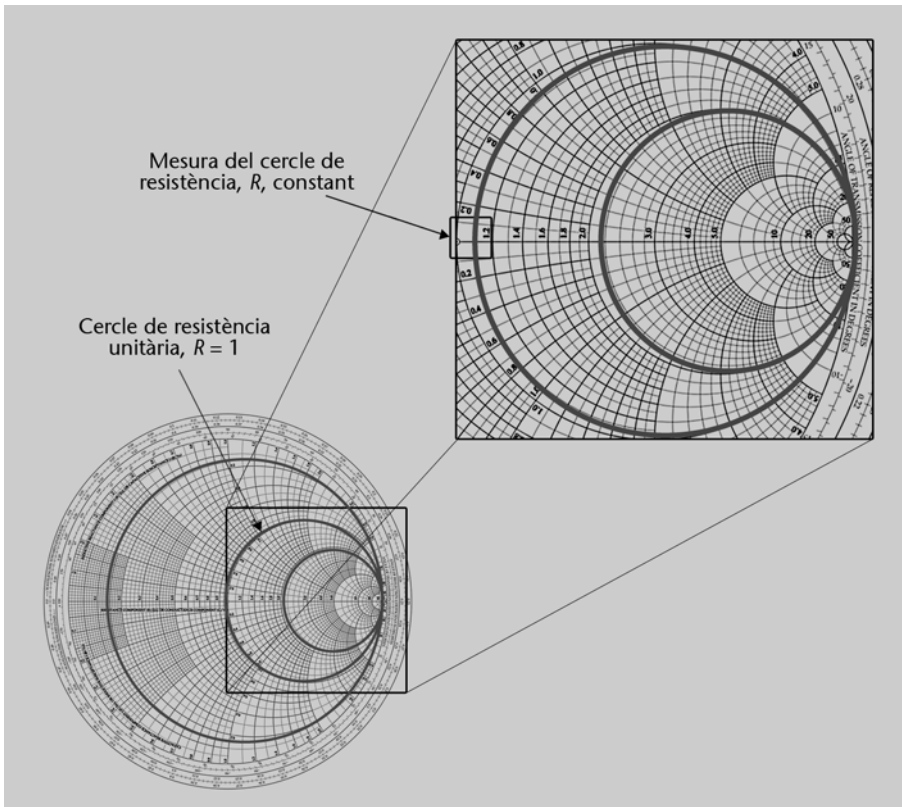
**Figura 42**

Circumferències de reactància constant per a  $\chi = 0$ ,  $\chi < 1$ ,  $\chi = 1$  i  $\chi \rightarrow \infty$ . Aquest primer cas se situa sobre l'eix d'ordenades (horitzontal).

- Unes corbes de resistència constant (vegeu la figura 43)

La mesura de la resistència es realitza quan la circumferència talla l'eix horitzontal que divideix la carta en dos hemisferis. La circumferència que passa pel centre de la carta és la circumferència de resistència unitària  $R = 1$ , que va disminuint a mesura que creix el radi de la circumferència, i viceversa.

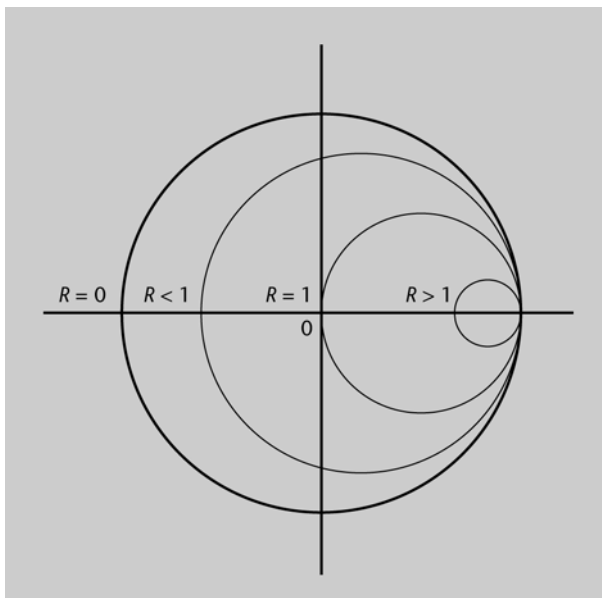
Figura 43



**Figura 43**  
Circumferències de resistència  $R$  constant en la carta d'Smith.

A la figura 44 podeu veure una simplificació de l'estructura de les circumferències de resistència constant.

Figura 44



Si tenim en compte aquestes circumferències de resistència constant, el coeficient de reflexió varia segons els diferents casos en funció del valor de  $R$  (vegeu la figura 44):

- Per a  $R = 0$  és una circumferència de radi unitari, dins del qual conviuen els casos  $R = 0$  i  $\chi = 0$ . Aquesta circumferència és la que contin-

drà tota la resta de valors de la carta i, per tant, la circumferència més externa.

- Circumferència de  $R < 1$ . El centre de la circumferència es trobarà a l'esquerra de l'eix de coordenades.
- Circumferència de  $R = 1$ . La circumferència es troba centrada sobre la part positiva de l'eix de coordenades.
- Circumferència de  $R > 1$ . El centre de la circumferència es trobarà a la dreta de la meitat positiva de l'eix de coordenades.

A partir de les circumferències de resistència i de reactància constant, podem definir certes característiques de la carta d'Smith:

**a)** Pel que fa a  $R \rightarrow \infty$  i  $\chi \rightarrow \infty$  i  $R \rightarrow 0$  i  $\chi \rightarrow 0$ . Si busquem aquests punts en la carta d'Smith de la figura 44, ens trobem:

- Que el punt de  $R \rightarrow \infty$  i  $\chi \rightarrow \infty$  es troba a la dreta de l'eix d'abscisses i representa el circuit obert. A tots els punts de l'infinít de la carta d'Smith, on  $R \rightarrow \infty$ ,  $\chi \rightarrow \infty$  o ambdós, els correspon  $\rho = 1$ .
- Que el punt de  $R \rightarrow 0$  i  $\chi \rightarrow 0$  es troba a l'esquerra de l'eix d'abscisses i representa el curtcircuit. A valors de  $Z$  simètrics respecte a l'eix de les abscisses els corresponen valors de  $\rho$  també simètrics respecte a l'eix d'abscisses. La raó d'això és que la carta és simètrica en els dos hemisferis dividits per la recta de resistències.

Vegeu el cas d'un circuit obert al cas b del subapartat 1.8.1 d'aquest mòdul.  
Vegeu el cas d'un curtcircuit al cas c del subapartat 1.8.1 d'aquest mòdul.

**b)** A la base de la carta podeu observar quatre rectes horitzontals que presenten els valors de les atenuacions de la línia (en decibels), de les pèrdues, i el que més ens interessa, del mòdul del coeficient de reflexió i de transmissió, indicats a la figura 45. El mòdul del coeficient de reflexió es pot llegir a la meitat esquerra de la recta, en canvi, el coeficient de transmissió es pot llegir a la meitat dreta.

A partir de les equacions del coeficient de reflexió (46) i de la impedància normalitzada (102), podem definir el coeficient de reflexió tal com es llegeix a la carta d'Smith, com:

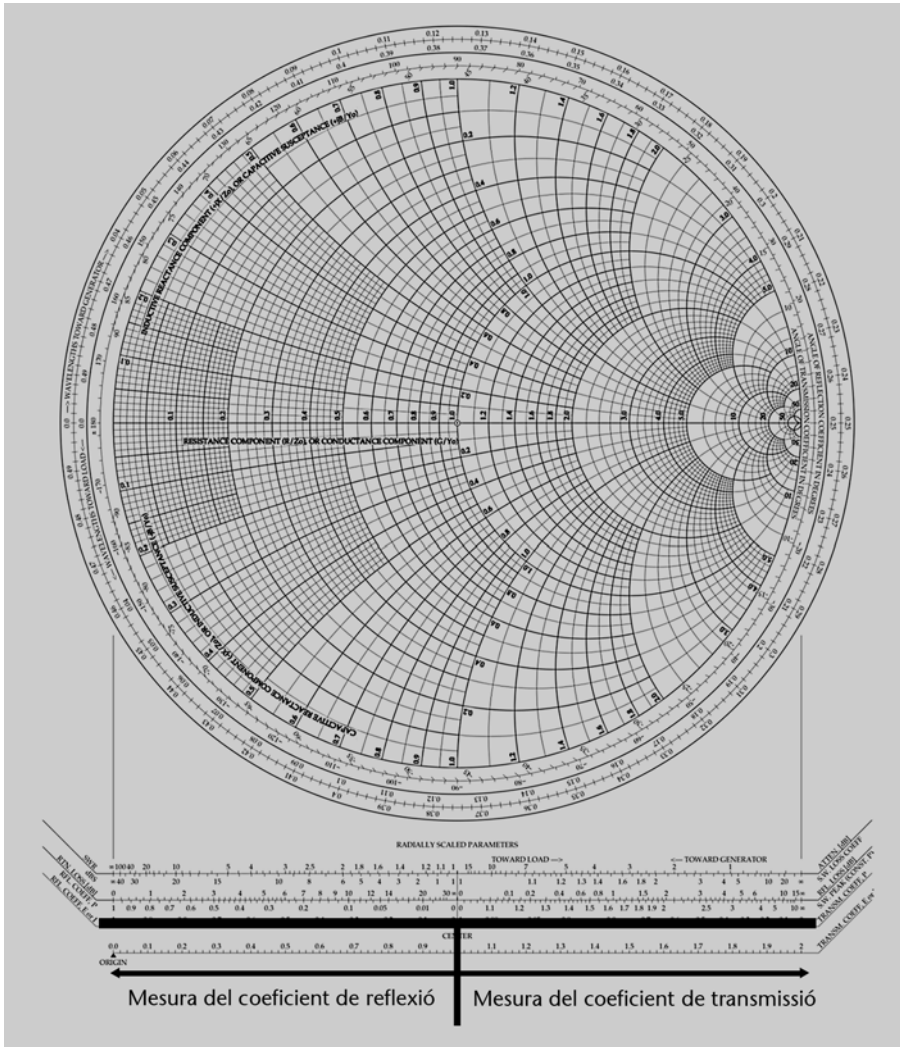
$$\rho = \frac{\bar{Z} - 1}{\bar{Z} + 1} \quad (128)$$

on hem dividit numerador i denominador de (46) per  $Z_0$  i hem definit  $\bar{Z} = \frac{Z_L}{Z_0}$ .

Ara que ja heu vist els components de la carta, veurem com es fa servir.



Figura 45



**Figura 45**  
Coeficient de reflexió i de transmissió com a projecció dels paràmetres de la carta.

### 4.2. Com s'utilitza la carta d'Smith

La carta d'Smith està dissenyada de manera que a partir dels valor de resistència i reactància es puguin llegir, de forma quasi automàtica, tots els valors dels coeficients de reflexió i transmissió utilitzant les rectes de la part inferior i les circumferències exteriors. En aquest apartat us explicarem com es llegeix la carta.

Al subapartat anterior heu vist què representen les circumferències dibuixades en la carta d'Smith i quins son els punts més importants en referència a la impedància normalitzada (tant per a la resistència com per a la reactància).

Abans d'aprendre a fer servir la carta d'Smith, cal que tingueu en compte les següents consideracions o propietats de la carta:

- a) La semicircumferència superior,  $\rho > 0$ , correspon a les impedàncies inductives (amb reactància positiva,  $\chi > 0$ ) i la part inferior,  $\rho < 0$ , a les capacitives

**Enllaç d'interès**

Podeu consultar i fer proves amb una carta d'Smith a la pàgina web Interactive Smith Chart:  
<http://www.amanogawa.com/archive/LossLessSmithChart/LossLessSmithChart-2.html>

(reactància negativa,  $\chi < 0$ ). Aquestes reactàncies tenen el mateix mòdul, però canvia el signe degut a la fase.

b) Les resistències normalitzades més grans que la unitat,  $R > 1$ , es troben contingudes dins de la circumferència de resistència constant que passa per l'origen. El punt del centre,  $R = 1$ , correspon a la impedància que adapta la línia. Recordeu la figura 44.

c) El coeficient de reflexió en una línia val (recordeu l'equació (75)):

$$\rho(z) = \rho(0)e^{2j\beta z} \quad (129)$$

De manera que quan ens movem per tota la línia, el mòdul del coeficient de reflexió  $|\rho(z)|$  és constant, mentre que la seva fase varia de manera directament proporcional a la longitud (mireu l'exponent de l'equació (129)).

Vegeu que la fase varia de manera directament proporcional a la longitud al subapartat 3.3 d'aquest mòdul. Vegeu que el coeficient de reflexió és periòdic cada  $\lambda/2$  al subapartat 3.5 d'aquest mòdul.

Figura 46

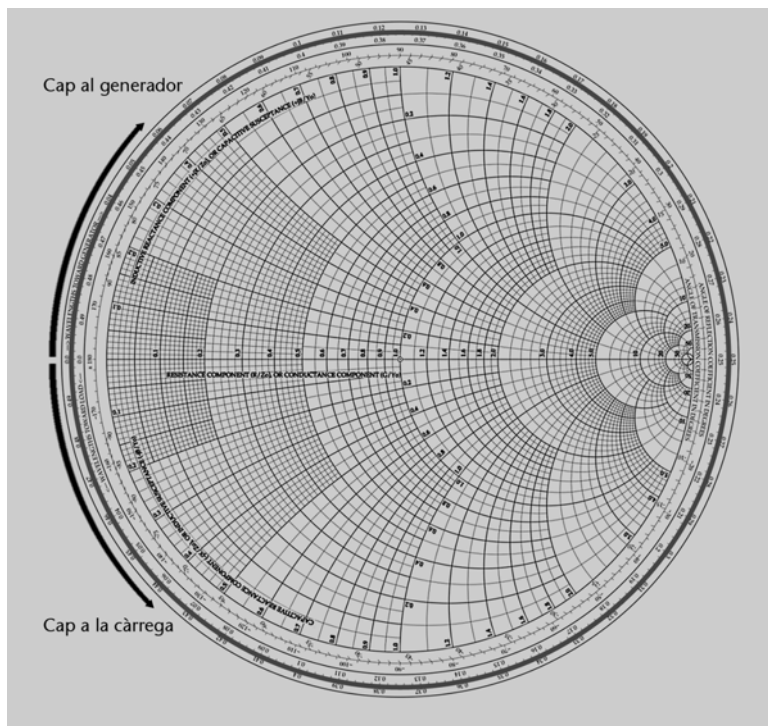


Figura 46

Direccions de les longituds d'ona relatives a la freqüència de l'ona i la longitud de la línia de transmissió segons si ens movem en direcció al generador o a la càrrega.

Recordeu que el coeficient de reflexió és periòdic cada  $\lambda/2$ . Aquesta és la raó per la qual la circumferència que mesura la fase en una posició donada de la línia de transmissió pot tenir valors de 0 a 0,5: no calen més valors perquè, després de  $\lambda/2$  tot es repeteix.

Així, la carta ens permet mantenir el mòdul fix i anar llegint el valor del coeficient de reflexió a mesura que varia la seva fase.

Noteu que si ens movem en sentit antihorari o positiu sobre la circumferència de fase de la carta d'Smith, ens movem cap a la dreta de la línia, o cap a la càr-

Vegeu la descripció de la carta d'Smith al subapartat 4.1 d'aquest mòdul.

rega, i quan ho fem en el sentit horari o negatiu, cap al generador (vegeu la figura 46).

d) Podeu calcular directament el valor de l'admitància d'una impedància situada directament sobre la carta a partir del punt simètric respecte al centre de la carta (vegeu la figura 47). Recordeu que per a invertir la impedància, només cal afegir una línia de longitud  $\lambda/4$  o, el que és el mateix, donar una volta de  $180^\circ$  a la carta d'Smith.

**Recordeu**

L'admitància és l'invers de la impedància:

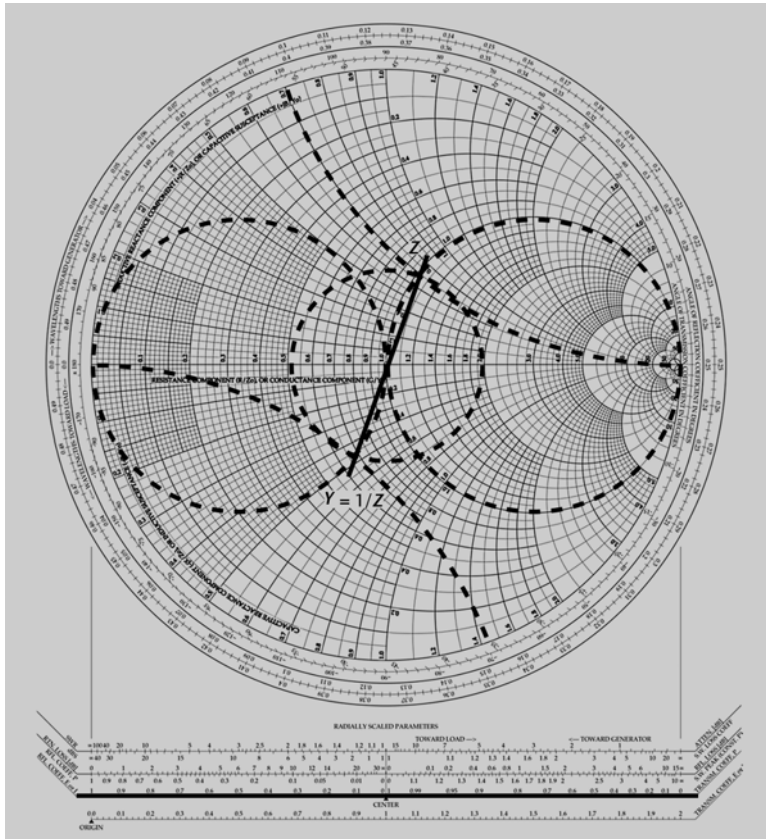
$$Y = \frac{1}{Z}$$

Vegeu que per a invertir la impedància només cal afegir una línia de longitud  $\lambda/4$  al subapartat 3.6. d'aquest mòdul.

**Figura 47**

Lectura dels valors d'admitància  $\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}$  a partir del valor de la impedància  $\bar{Z}$ .

Figura 47

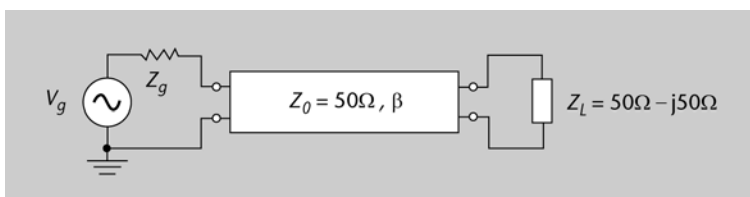


Amb aquestes propietats ben enteses, ja podem passar a veure un exemple de com fer servir la carta d'Smith.

**4.2.1. Exemple d'utilització de la carta d'Smith**

Suposem una línia de transmissió amb impedància característica  $Z_0 = 50 \Omega$  i amb una càrrega d'impedància  $Z_L = 50 - j50 \Omega$ , com la de la figura següent:

Figura 48



**Figura 48**

Línia de transmissió amb impedància característica  $Z_0 = 50 \Omega$ , i impedància de càrrega  $Z_L = 50 - j50 \Omega$ .

Ara calcularem la impedància normalitzada i el coeficient de reflexió.

Si partim de la impedància de càrrega:

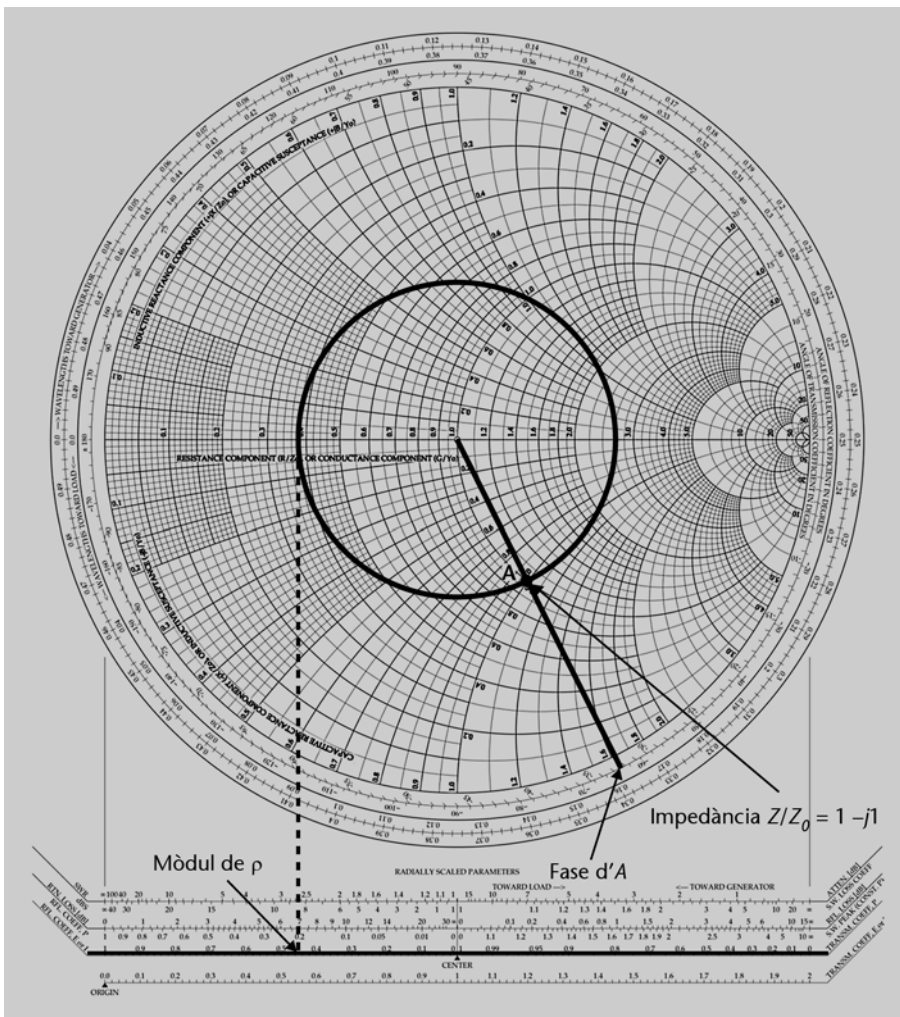
$$Z_L = 50 - j50 \Omega \tag{130}$$

i expressem aquesta impedància de forma normalitzada utilitzant l'equació (102), obtindrem:

$$\bar{Z} = \frac{Z_L}{Z_0} = 1 - j1 \Omega \tag{131}$$

On  $\bar{Z}$  és la impedància normalitzada. Podem separar l'equació (131) en part real, on tindrem  $R = 1$ , i part imaginària, on tindrem  $\chi = -1$ . El fet de tenir una reactància negativa vol dir que aquesta reactància és capacitiva.

Figura 49



**Figura 49**  
Exemple de càlcul del mòdul i la fase del coeficient de reflexió per a una impedància característica  $\bar{Z} = 1 - j1 \Omega$  i una longitud d'ona donades.

Aquest punt es localitza a la carta d'Smith mitjançant el punt on conflueixen la circumferència de resistència  $R = 1$  i la circumferència de reactància capacitiva  $\chi = -1$ , tal com podeu veure a la figura 49 (recordeu que la im-

pedància de la carta està normalitzada respecte a la impedància característica de la línia  $Z_0$ ).

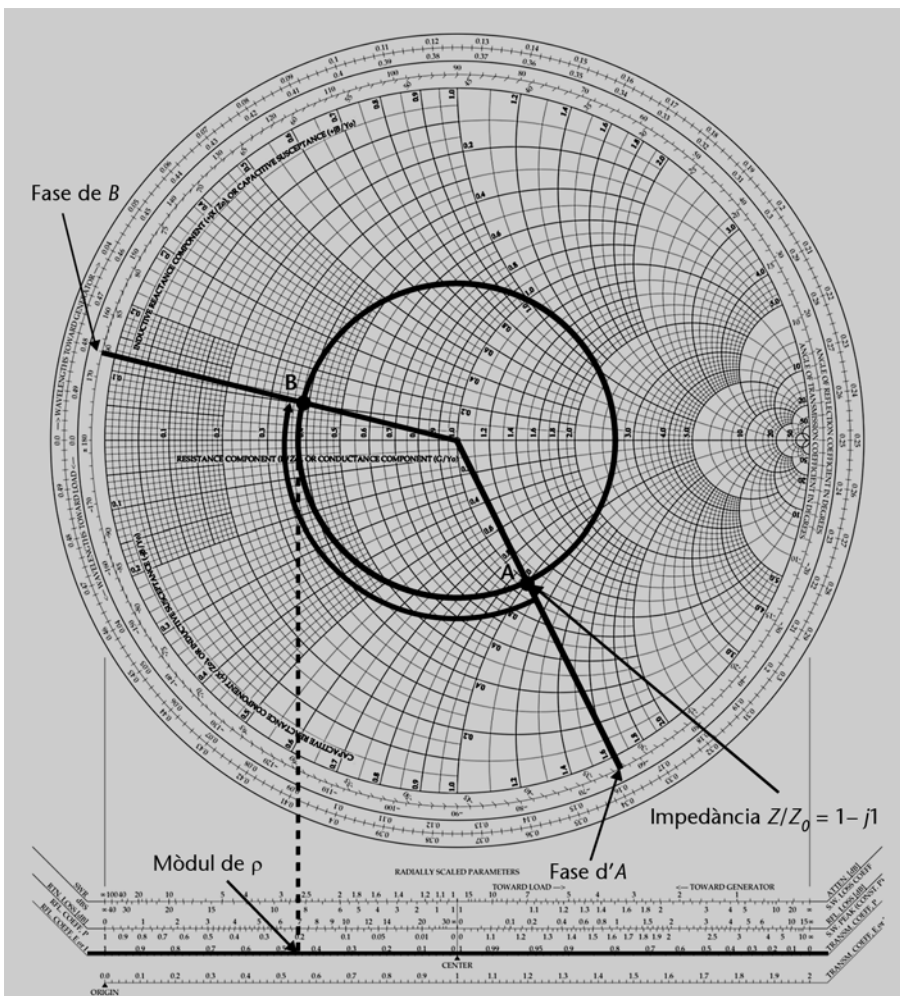
El coeficient de reflexió  $\rho$  ve donat, en mòdul, per la projecció del radi que genera la circumferència que passa pel punt de la impedància normalitzada, que està centrat en el centre de la carta (vegeu la figura 49). Aquest coeficient és únic per a tots els valors de les impedàncies de la carta que creua la circumferència.

La fase es llegeix en la circumferència exterior. Correspon al punt en què el creua una recta que surt del centre de la carta i passa pel punt de la impedància normalitzada. Així obtenim un valor del coeficient de reflexió complex  $\rho = 0,45e^{-j63,4}$  (vegeu la figura 49).

Si ara ens movem cap al generador, el punt que ens indica la impedància normalitzada es mou per sobre de la circumferència centrada en la carta en sentit horari. A mesura que recorrem la circumferència anem creuant diferents circumferències de resistència constant,  $R$ , i reactància constant,  $\chi$ , per la qual cosa obtenim diferents valors per a la impedància normalitzada  $\bar{Z}$ .

Al mateix temps que ens movem per sobre de la circumferència, també anem variant la fase del coeficient de reflexió (vegeu la figura 50).

Figura 50



**Figura 50**  
Moviment de la impedància del punt A ( $\bar{Z} = 1 - j1$ ) cap al generador fins al punt B ( $\bar{Z} = 0,38 + j0,1$ ).

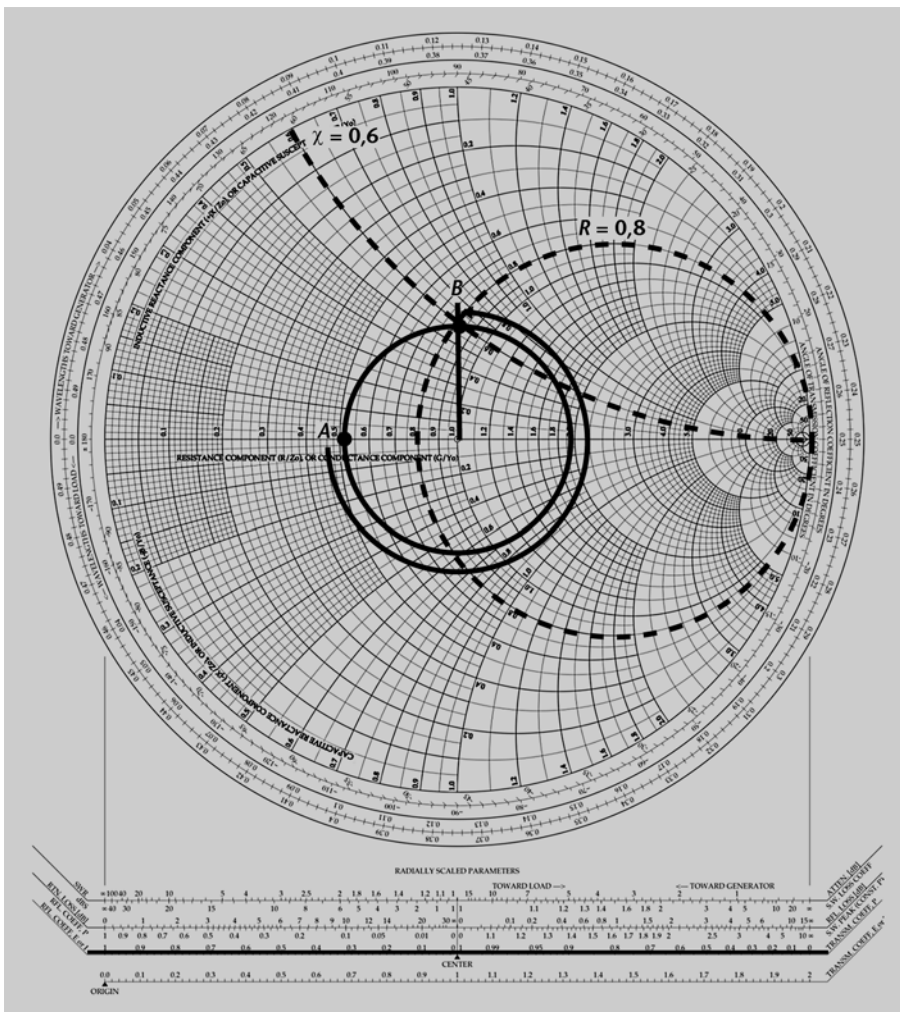
Fixeu-vos que els punts A i B de la figura 50 presenten el mateix mòdul del coeficient de reflexió,  $|\rho|$ , el que varia entre les dues impedàncies és la fase del mòdul, representats com a *Fase de A* i *Fase de B*.

### 4.2.2. Exemple de determinació d'impedàncies de càrrega

Al subapartat anterior hem vist com calculem el mòdul i la fase del coeficient de reflexió donada la impedància de la càrrega. Ara farem el càlcul a la inversa, buscarem la impedància de càrrega donada una ona que circula per la línia de transmissió.

Suposem que tenim una línia de transmissió amb una impedància característica  $Z_0 = 50 \Omega$  i volem transmetre un senyal estacionari amb una freqüència  $f = 500$  MHz. El senyal estacionari que volem transmetre té les següents característiques: el valor d'amplitud de tensió màxima és  $|V_{max}| = 6$  V; l'amplitud del mínim és  $|V_{min}| = 3$  V, i la distància d'un mínim de voltatge a la càrrega és de 142,5 cm. Amb aquestes dades, volem calcular la impedància de càrrega,  $Z_L$ .

Figura 51



**Figura 51**  
 Punt A on es creuen la circumferència de  $R = 0,5$  i l'eix  $\chi = 0$  (eix horitzontal), equivalent a  $\bar{Z} = 0,5 + j0$ , i propagació de la impedància en direcció a la càrrega una distància de  $3\lambda/8$  fins al punt B, amb una impedància  $\bar{Z} = 0,8 + j0,6$ .

En primer lloc obtindrem el valor del paràmetre de relació d'ona estacionària ROE o  $S$  (recordeu l'equació (117)), a partir del qual podem obtenir el mòdul del coeficient de reflexió  $|\rho|$ :

$$S = \frac{|V_{\max}|}{|V_{\min}|} = 2 \quad (132)$$

I, segons l'equació (118), el mòdul del coeficient de reflexió val:

$$|\rho| = \frac{(S - 1)}{(S + 1)} = \frac{1}{3} \quad (133)$$

Atès que la impedància característica de la línia,  $Z_0$ , és purament resistiva i  $S$  no té unitats (ja que és la divisió de dues impedàncies, recordeu l'equació (102)),  $\bar{Z}$  també serà purament resistiva i, per tant, la seva reactància és  $\chi = 0$ .

D'altra banda, un senyal amb freqüència  $f = 500$  MHz té una longitud d'ona  $\lambda = 60$  cm. Aquest valor el podem calcular a partir de l'equació (72):

$$\lambda \cdot f = c \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \rightarrow \lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^8} = 0,6 \text{ m} = 60 \text{ cm} \quad (134)$$

Ara transformarem la distància en centímetres entre el mínim de voltatge i la càrrega en longituds d'ona, per a tenir-ho tot en les unitats de la carta d'Smith.

En l'exemple que estem considerant ens diuen que la distància entre un mínim de voltatge i la càrrega és  $d_{\min-L} = 142,5$  cm. A partir d'aquesta informació podem extreure dues dades:

- La distància  $d_{\min-L}$  transformada en números de longitud d'ona és:

$$\frac{d_{\min-L}}{\lambda} = \frac{142,5 \text{ cm}}{60 \text{ cm}} = 2,375 = (2 + 0,375)\lambda = 2\lambda + \frac{3}{8}\lambda \quad (135)$$

i  $2\lambda + 3\lambda/8$  equival a  $3\lambda/8$ , a causa de la periodicitat de la carta d'Smith. És a dir, si surten  $2,375\lambda$ , és com si construïssim el número sumant fragments de  $\lambda/2$  i ens acabéssim quedant amb el que queda quan no n'hi ha prou per a fer un nou fragment. Així, en l'equació anterior tenim quatre fragments de  $\lambda/2$ , equivalent a  $2\lambda$ , i  $3\lambda/8$  és el que en queda.

- La posició d'un mínim de tensió, segons la llei d'Ohm, implica una impedància mínima. Si busquem el punt de mínima impedància sobre la circumferència corresponent al coeficient de reflexió  $|\rho| = 1/3$ , el trobem a  $R = 0,5$  i  $\chi = 0$  (punt A de la figura 51).

Localitzat a la carta el punt mínim d'impedància, la impedància a la càrrega cercada l'obtindrem girant en sentit antihorari (en direcció a la càrrega) l'angle equivalent a  $3\lambda/8$ . Recordeu que mitja circumferència és equivalent a  $\lambda/2$  i que  $\lambda/8$  és  $1/4$  de circumferència; per tant,  $3\lambda/8$  és equivalent a  $3/4$  de circumferència.

Fet això ja podem llegir sobre la carta d'Smith una impedància normalitzada  $\bar{Z} = (0,8 + j0,6)$ , és a dir, una impedància de càrrega,  $Z_L$ :

$$\bar{Z} = 0,8 + j0,6 \quad (136)$$

Si teniu en compte l'equació (131),

$$Z_L = \bar{Z} \cdot Z_0 \quad (137)$$

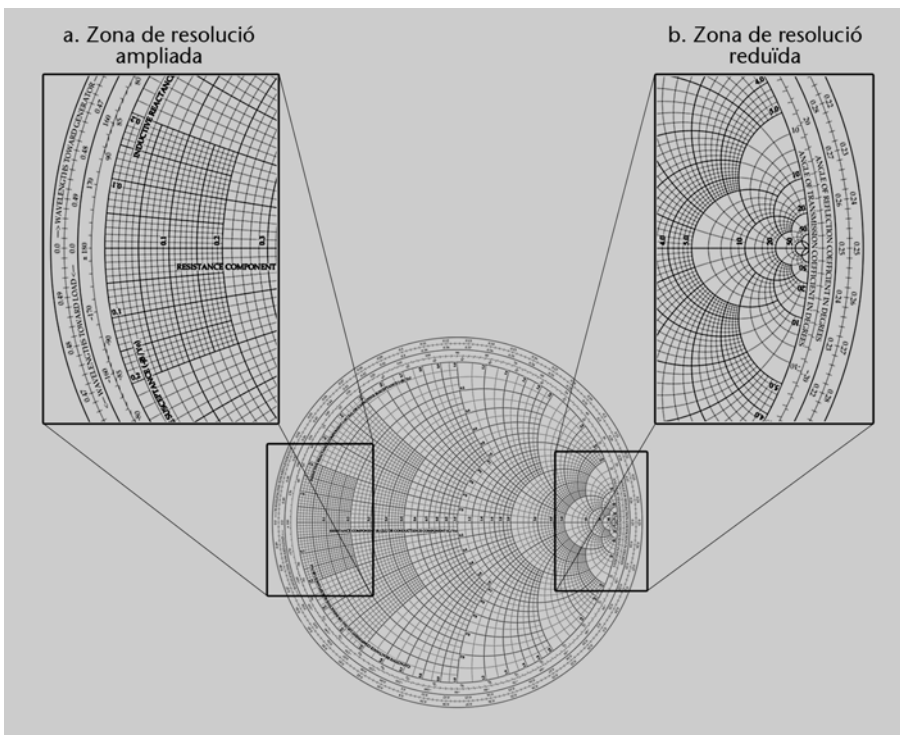
el valor real, no normalitzat, de la impedància de càrrega és:

$$Z_L = (0,8 + j0,6) \cdot 50 = 40 + j30 \Omega \quad (138)$$

### 4.3. Precisió de la carta d'Smith

A aquestes altures ja haureu notat que en alguns casos pot ser una mica difícil mesurar amb precisió el valor de la impedància amb la carta d'Smith. La carta de la figura 38 ja està dissenyada de manera que a mesura que la distància entre les circumferències de resistència constant, i de reactància constant, es va fent més gran s'introdueixen noves línies per a obtenir una mesura millor (vegeu la figura 52a). A la part de la dreta de la carta passa totalment el contrari, la precisió és molt pitjor, ja que tenim menys resolució (vegeu la figura 52b).

Figura 52



**Figura 52**

Zones de la carta d'Smith amb resolució ampliada (a) i de resolució reduïda (b).



La precisió de la carta és suficient per a la majoria dels casos en què us podeu trobar, ja que l'escala angular en el perímetre té divisions d' $1/500$  de longitud d'ona (aproximadament  $0,72^\circ$ ) i l'escala del coeficient de reflexió es pot llegir amb una precisió de  $0,002$ .

A tall d'exemple: tenim un transmissor de ràdio i volem fer arribar el senyal fins a una antena mitjançant una ona de freqüència  $f = 1.000$  MHz en un cable de  $l = 20$  cm. La carta ens dona una precisió de  $20/500 = 0,4$  mm, i és molt difícil tallar un cable coaxial amb aquesta precisió, tenint en compte el seu gruix.

#### **4.4. Què hem après?**

En aquest apartat hem definit els elements que formen la carta d'Smith i hem estudiat com s'utilitza aquesta eina.

També hem aprofitat per a fer dos exemples d'utilització, calculant les impedàncies característiques de les línies de transmissió i determinant com es "propaguen" els coeficients de transmissió al llarg de la línia.

Ara aprofitarem aquesta eina tan potent per tal de veure com podem adaptar les impedàncies mitjançant uns exemples més pràctics.

## 5. Adaptació d'impedàncies

En l'apartat anterior heu vist quins són els elements de la carta d'Smith i com s'utilitza per a calcular coeficients de transmissió i per a propagar una impedància a través d'una línia de transmissió ideal. Ara cal que passem a un nivell més avançat i provem d'utilitzar la carta per tal d'adaptar la mateixa línia a una càrrega del tipus que sigui, mitjançant la combinació en sèrie i en paral·lel d'aquests elements.

### Observació

En alguns casos la mateixa línia de transmissió actua com a càrrega per a una altra línia de transmissió.

### 5.1. Adaptació en sèrie

Podem prendre com a exemple d'adaptació en sèrie un circuit amb una impedància de càrrega normalitzada de valor  $\bar{Z}_L = (1,5 + j1)$ , com el punt A de la figura 53.

Per a adaptar la línia caldrà afegir un element en sèrie en un dels ports de la línia de transmissió. Com que la càrrega a adaptar té component real normalitzada ( $\bar{R} = 1,5$ ) i imaginària normalitzada ( $\bar{X} = 1$ ), caldria posar un element que també tingués components reals i imaginàries. Per tal de simplificar aquest element adaptador, buscarem el punt de la línia de transmissió on tinguem la part real igual a 1 (només component real) i així poder tenir un coeficient de reflexió  $\rho = 0$  (recordeu l'equació (46)).

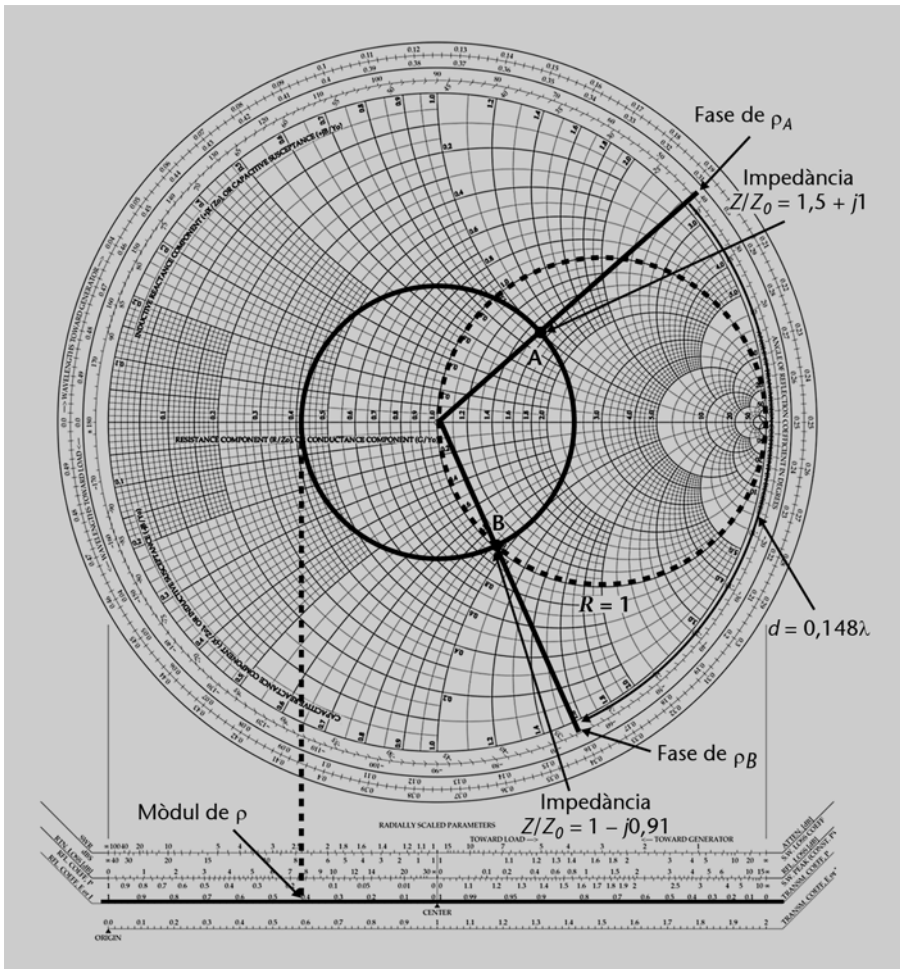
Recordeu que  $\bar{R}$  i  $\bar{X}$  són valors normalitzats i, per tant, no tenen unitats.

Buscarem el punt que talla la circumferència de  $R = 1$  de la carta més proper en direcció al generador, ja que ens trobem a la càrrega i només podem recórrer la línia en direcció al generador. Aquest punt és el valor  $\bar{Z} = 1 - j0,91$  situat en el punt B de la figura 53, que es troba a una distància  $d = 0,148\lambda$  de la càrrega, que se situa a la posició  $\bar{Z}_L = 1,5 + j1$  (punt A de la figura).

El que farem serà introduir una impedància reactiva de valor  $j\chi = +0,91$  en sèrie amb la línia (vegeu la figura 54), en el punt de la línia que és a  $0,148\lambda$  de la càrrega.

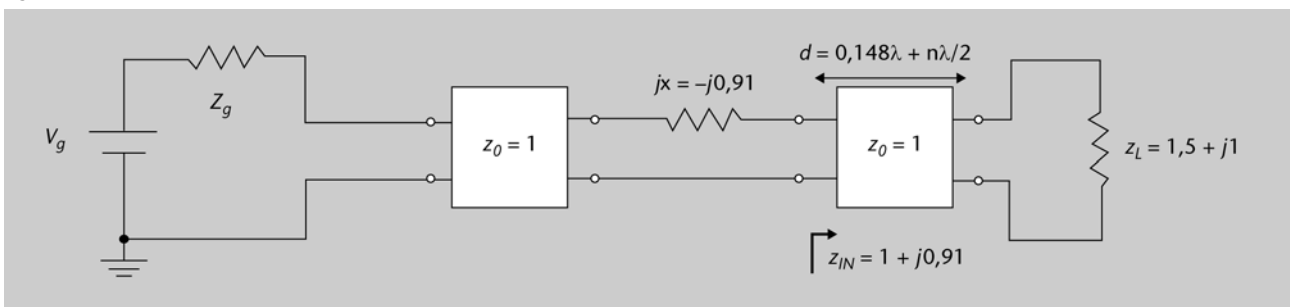
El que hem fet ha estat buscar la posició més propera a la càrrega en la qual tenim una impedància equivalent a  $\bar{Z} = 1 - j0,91$  (en aquest cas  $d = 0,148\lambda$ ), i hi hem introduït una reactància per tal de compensar la part imaginària.

Figura 53



**Figura 53**  
 Representació sobre la carta d'Smith de la impedància de càrrega  $\bar{Z}_L = 1,5 + j1$  (punt A), de la impedància normalitzada  $\bar{Z} = 1 - j0,91$  (punt B) i de la seva distància  $d = 0,148\lambda$  sobre la circumferència de longituds d'ona.

Figura 54



**Figura 54**  
 Circuit amb una línia de transmissió en què hem inserit una impedància reactiva de valor  $jx = +j0,91$  a una distància  $0,148\lambda$  de la càrrega.

La línia de transmissió queda adaptada ja que:

$$\bar{Z} = (1 - j0,91) + j0,91 = 1 \tag{139}$$

Recordeu que la línia està adaptada quan transmet tota la potència a la càrrega i, per tant, no hi ha ona reflectida. Aquest fet es dona quan el coeficient de reflexió és zero,  $\rho = 0$ , cosa que podeu comprovar substituint el resultat de l'equació (139) a l'equació del coeficient de reflexió (equació (46)):

$$\rho = \frac{\bar{Z} - 1}{\bar{Z} + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0 \tag{140}$$

## 5.2. Adaptació en paral·lel

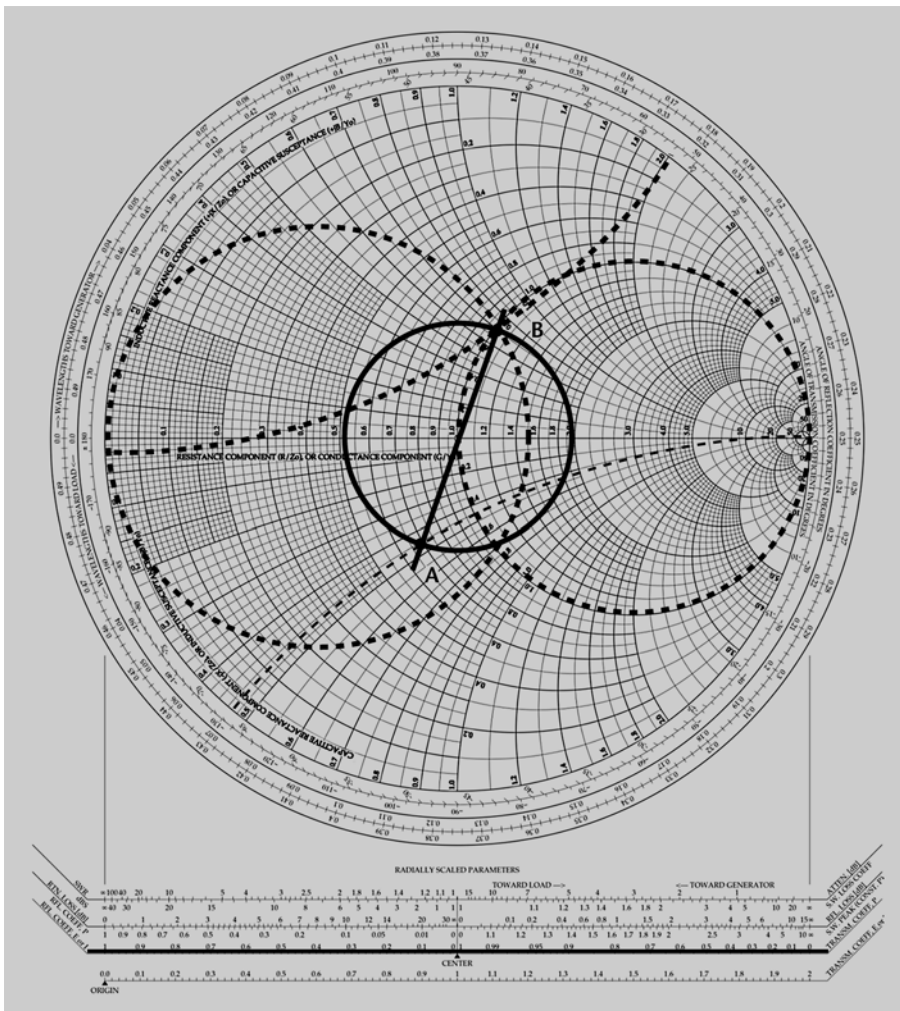
El procediment d'adaptació en sèrie no és el més utilitzat, ja que implica "obrir" la línia de transmissió per a inserir-hi la impedància en sèrie dins d'un dels conductors de la línia.

El més usual és utilitzar una impedància col·locada en paral·lel amb la línia, ja que només ens caldrà connectar-la entre els dos conductors.

Per a fer l'adaptació en paral·lel treballarem amb les admitàncies en lloc de les impedàncies, per tal de simplificar les equacions.

L'estratègia que seguirem serà la mateixa que en el cas anterior: buscarem un element en paral·lel que ens adapti la línia en funció de la impedància característica de la línia i de la seva càrrega.

Figura 55



**Figura 55**

Representació de la impedància  $\bar{Z} = 0,67 - j0,46$ , punt A, i de la seva admitància

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = 1 + j0,7, \text{ punt B.}$$

Si, com a exemple, prenem un valor d'impedància normalitzada  $\bar{Z} = 0,67 - j0,46$ , obtenim un valor d'admitància normalitzada,  $\bar{Y}$ :

$$\bar{Z} = 0,67 - j0,46 \quad (141)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{(0,67 + j0,46)} = \frac{(0,67 - j0,46)}{(0,67 - j0,46)(0,67 + j0,46)} \quad (142)$$

I, per tant:

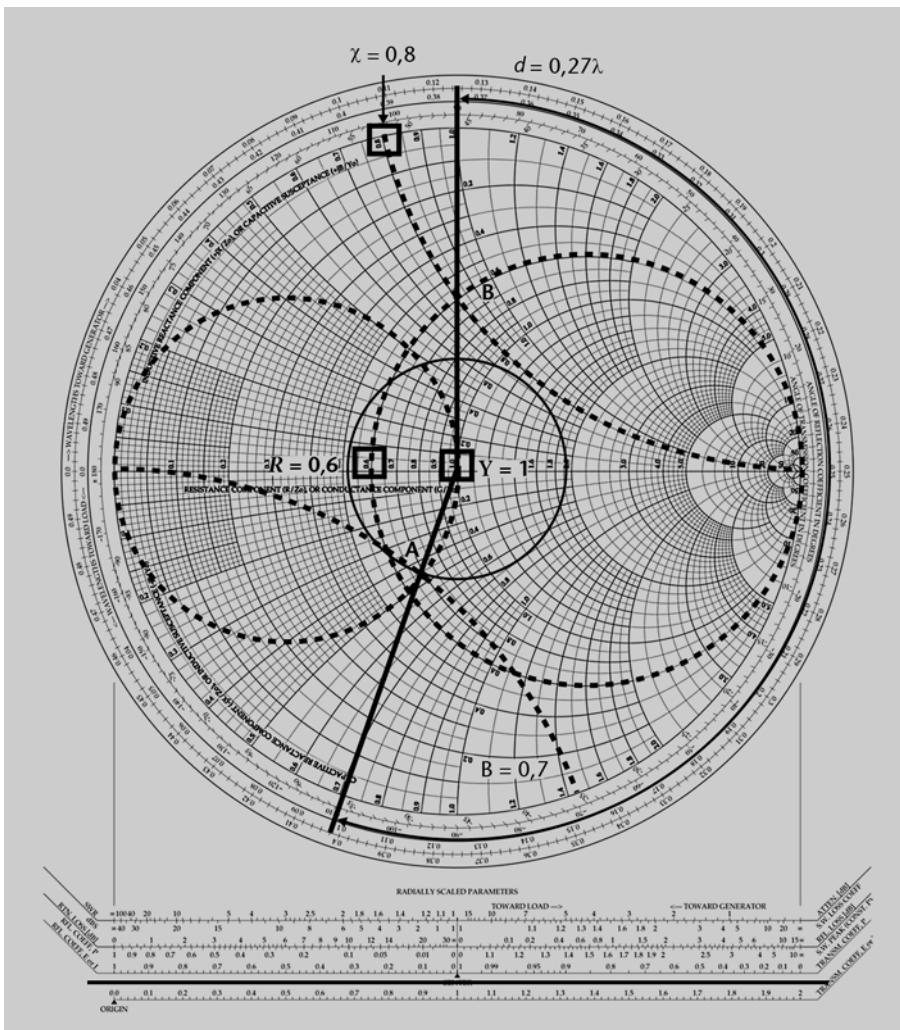
$$\bar{Y} = 1 + j0,7 \quad (143)$$

A la figura 55 podeu veure la representació de la impedància normalitzada  $\bar{Z}$  i de la seva admitància normalitzada  $\bar{Y}$ .

En aquest cas, la distància en longituds d'ona entre l'admitància normalitzada de la línia de transmissió  $\bar{Y}$  (punt B de la figura 56) i la impedància normalitzada de la càrrega  $\bar{Z}_L$  (punt A de la figura 56) és de  $0,277\lambda$ .

**Recordeu**  
La susceptància, B, és l'equivalent a la reactància,  $\chi$ , en l'admitància complexa.

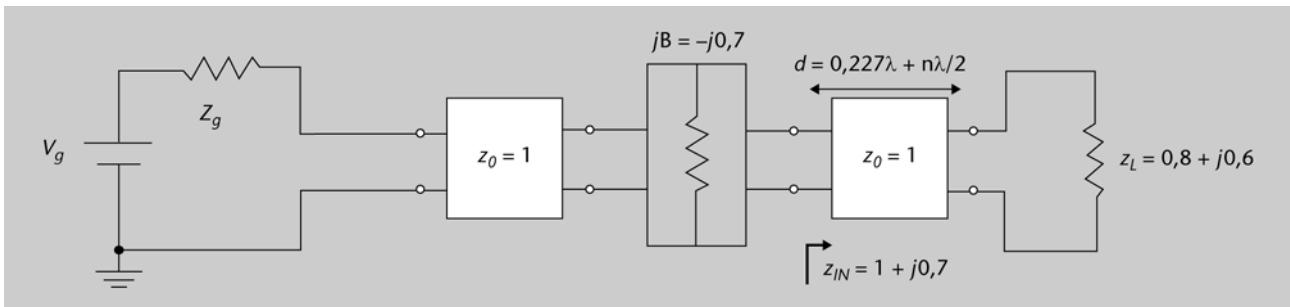
Figura 56



**Figura 56**  
Representació de l'admitància  $\bar{Y} = 1 + j0,7$ , punt A, i la impedància de càrrega,  $\bar{Z}_L = 0,67 + j0,46$ , punt B, separats una distància en longituds d'ona  $d = 0,277\lambda$ .

Si afegim en paral·lel una susceptància qualsevol de valor  $\bar{Y} = 0 + jB = 0 - j0,7$ , l'admitància que s'obté directament és  $\bar{Y} = 1$  i, així, la línia queda adaptada (vegeu la figura 57).

Figura 57



No cal anar afegint impedàncies i admitàncies per tal d'adaptar línies de transmissió. En alguns casos podem utilitzar línies de transmissió com a elements adaptadors.

Tant en el cas anterior d'adaptació d'impedàncies en sèrie, com en aquest cas, podeu fer servir un tros de línia amb un circuit obert (en el cas d'adaptació en paral·lel) o amb un curtcircuit (en el cas d'adaptació en sèrie) per tal d'obtenir els valors de reactància necessaris per a aconseguir l'adaptació de la línia principal a la seva càrrega.

Això és degut al fet que, en el cas de l'adaptació en sèrie, en tenir una línia de transmissió en curtcircuit, tenim resistència zero,  $R = 0$ , per la qual cosa només ens afecta la part reactiva de la línia. En aquest cas ens trobaríem sobre la circumferència més externa de la carta d'Smith. El cas contrari el podem aplicar en el cas de l'adaptació en paral·lel i una línia de transmissió en circuit obert.

### 5.3. Transformador $\lambda/4$

Com acabem de dir, les línies de transmissió també es poden utilitzar com a elements adaptadors.

A part del procediment d'adaptació d'impedàncies explicat en el subapartat anterior, també podem utilitzar el transformador en  $\lambda/4$  com un recurs més per a adaptar impedàncies.

Aquesta metodologia aprofita la propietat d'inversió d'impedàncies de les línies  $\lambda/4$  que ja hem explicat.

En aquest cas adaptarem una càrrega resistiva  $Z_L$  ( $Z_L = R_L$ ), a una línia d'impedància característica  $Z_0$  mitjançant una altra secció de línia de transmissió amb impedància característica (vegeu la figura 58):

$$Z'_0 = \sqrt{Z_0 Z_L} \quad (144)$$

Figura 57

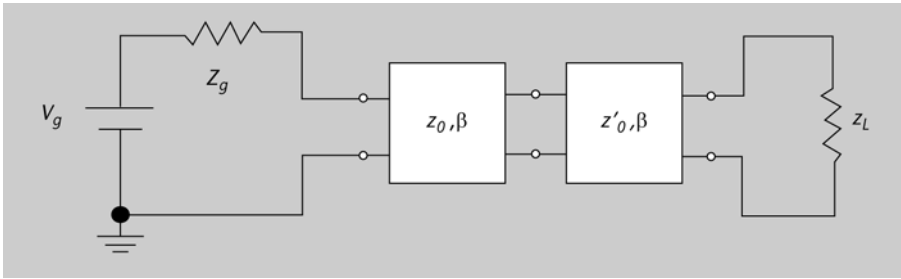
Circuit amb adaptació de la línia de transmissió amb una susceptància en paral·lel.

Vegeu la propietat d'inversió d'impedàncies de les línies  $\lambda/4$  al subapartat 3.6. d'aquest mòdul.

#### Transformadors

Utilitzarem el terme *transformador* per a expressar que l'efecte d'inserir una línia de longitud  $\lambda/4$  provoca un canvi en la impedància característica de la línia de transmissió,  $Z_0$ .

Figura 58



**Figura 58**  
Línia de transmissió amb impedància  $Z_0$  adaptada a la càrrega  $Z_L$  mitjançant una altra línia de transmissió amb impedància característica  $Z'_0$ .

Per una línia de transmissió de longitud  $l = \lambda/4$  obtenim (recordeu les equacions (71) o les (99) i (100)):

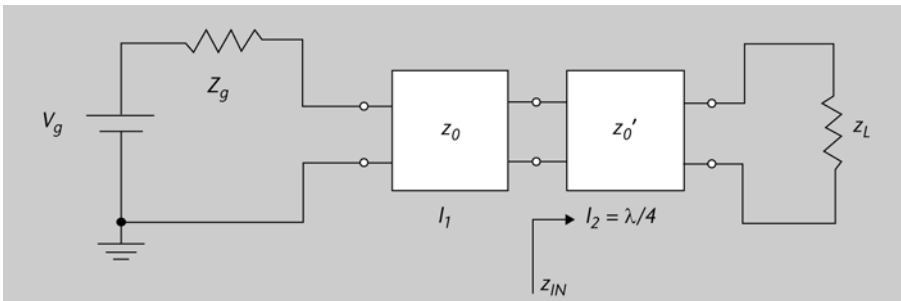
$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l \rightarrow \beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} \rightarrow \beta l = \frac{\pi}{2} \tag{145}$$

de manera que segons l'equació (101) podem calcular la impedància d'entrada utilitzant l'equació (144):

$$Z_{IN} = \frac{Z_0'^2}{R_L} = \frac{Z_0 R_L}{R_L} = Z_0 \tag{146}$$

A la figura 59 teniu el circuit amb la línia de transmissió amb impedància característica  $Z_0$ , i la línia  $\lambda/4$  que utilitzem per a realitzar l'adaptació a la impedància de càrrega  $Z_L$ .

Figura 59



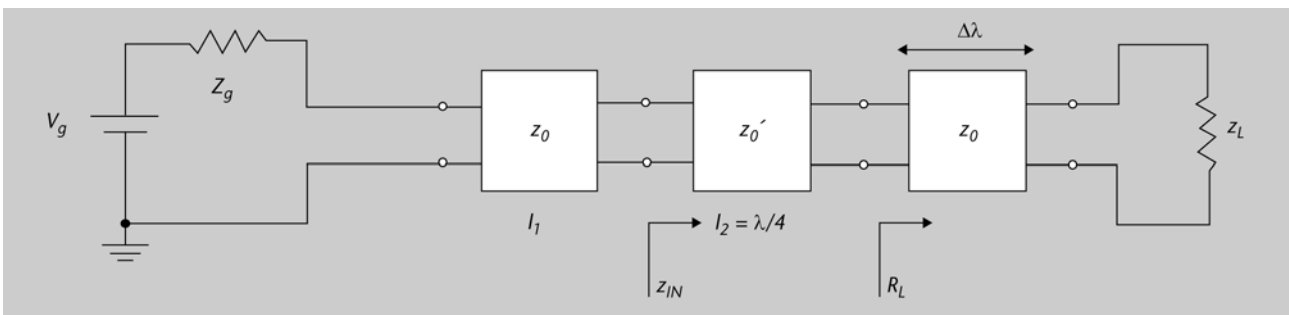
**Figura 59**  
Circuit amb adaptació d'impedàncies que utilitza una línia de longitud  $\lambda/4$ .

En el cas que la càrrega no sigui purament resistiva, teniu dues opcions:

- Inserir el transformador  $\lambda/4$ , o una línia de transmissió de longitud  $\lambda/4$ , en un punt de la línia de transmissió on la impedància d'entrada sigui purament resistiva. Això ho fem afegint la línia de longitud  $l = \lambda/4$  a una distància  $\Delta\lambda$  de la càrrega (vegeu la figura 60).

**Figura 60**  
Adaptació d'impedàncies mitjançant la inserció d'una línia  $\lambda/4$  a una distància de la càrrega en què la impedància sigui purament resistiva ( $R_L$ ).

Figura 60



Així ens mourem des de la càrrega,  $Z_L$ , cap al generador. Fent això estem resseguint la circumferència centrada en la carta i en algun punt de la línia tallarem la recta d'impedàncies purament resistives (eix horitzontal), o de reactància nul·la  $\chi = 0$  (vegeu la figura 61).

Figura 61

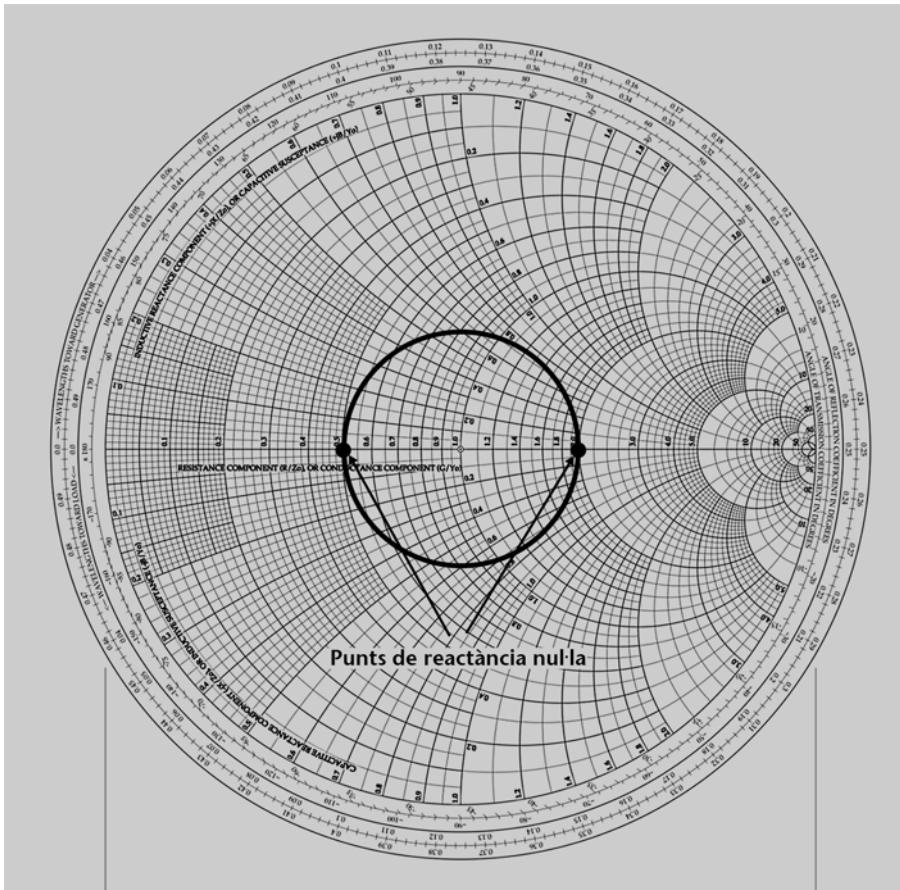


Figura 61

Punts de la circumferència centrada en la carta d'Smith que tallen la recta de reactància nul·la,  $\chi = 0$ .

- Una altra opció és cancel·lar la part reactiva de la impedància de càrrega amb un element reactiu en sèrie o en paral·lel, com en els exemples de les figures 54 i 57, i després afegir el transformador  $\lambda/4$ .

#### 5.4. Què hem après?

L'aplicació de la carta d'Smith ens ha permès adaptar impedàncies en sèrie i en paral·lel de forma ràpida i senzilla.

També hem vist com podem utilitzar les característiques de les línies de transmissió de longitud  $\lambda/4$  per tal d'ajudar-nos en les adaptacions d'impedàncies. Cal recalcar que la carta d'Smith no només ens ha estat útil per a calcular els paràmetres dels elements que hem d'utilitzar a l'hora d'adaptar les línies (la seva impedància), sinó que també ens ha estat útil per a saber en quina posició de la línia s'han de col·locar aquest elements (com la línia de  $\lambda/4$ ).



## 6. Tipus de línies de transmissió

Després d'haver iniciat, en el primer apartat, un recorregut en què heu descobert les característiques principals dels models aproximats de línies de transmissió, i algunes de les seves aplicacions al llarg del segon apartat, heu vist com tot s'anava complicant. Per sort, en el tercer apartat hem descobert la carta d'Smith, una eina que ens facilita molt els càlculs i que ens permet tenir una idea molt visual del funcionament de les línies de transmissió i de la seva adaptació.

Per a finalitzar aquest mòdul, farem un repàs ràpid a alguns dels tipus de línies de transmissió més importants que podeu trobar arreu. Des de les línies coaxials del primer exemple (el cable de l'antena del televisor) fins a les línies integrades en circuits d'alta freqüència, que van encastades directament sobre les plaques impreses d'alguns aparells.

Cal remarcar que durant tot el mòdul hem tractat les línies de transmissió com si fossin línies ideals, o sense pèrdues. Ara ens trobarem que algunes de les característiques principals de les línies que ara presentarem es basen precisament en les pèrdues.

És per això que farem primer una petita introducció a les pèrdues en les línies de transmissió i veurem com aquestes pèrdues afecten les equacions que hem vist fins ara. Després introduïrem els diversos tipus de línia. Cal dir que només presentarem les equacions que defineixen les característiques bàsiques de les línies de transmissió i que no desenvoluparem la matemàtica corresponent a la seva deducció.

### 6.1. Petita introducció a les pèrdues

Dins del model equivalent de línies de transmissió presentat en el primer apartat, podem considerar que hi ha els efectes següents que provoquen pèrdues en la línia:

- Pèrdues del propi conductor
- Pèrdues per radiació
- Pèrdues per l'escalfament del dielèctric
- Pèrdues per acoblament i descàrrega

#### 6.1.1. Pèrdues del conductor

Tota resistència per la qual circula un corrent provoca una pèrdua de potència. Aquestes pèrdues seran funció de:

- la longitud de la línia i
- el gruix del conductor.

Per tant, per tal de reduir les pèrdues del conductor, només ens cal fer servir una línia més curta, o bé un conductor més gruixut.

Cal tenir en compte que part d'aquesta pèrdua de potència és deguda a un efecte anomenat *efecte pel·licular*, que és funció de la freqüència del senyal que circula per la línia.

### Les causes de l'efecte pel·licular

L'efecte pel·licular es produeix en un conductor degut a la circulació d'un corrent pel seu interior. En tenir un corrent que circula per l'interior del conductor, es creen unes línies de camp magnètic més intenses en l'interior del conductor que en la seva superfície. Aquestes línies de camp magnètic provoquen una disminució del flux de corrent i augmenten el flux en una zona propera a la superfície del conductor.

## 6.1.2. Pèrdues per radiació

Les pèrdues per radiació són degudes al fet que els camps electromagnètics provoquen que el conductor es comporti com una antena i radiï energia cap a l'exterior.

Veureu què és una antena al mòdul "Radiació".

La quantitat d'energia radiada dependrà:

- del material utilitzat com a dielèctric,
- de la distància entre els conductors,
- de la longitud de la línia.

## 6.1.3. Pèrdues per escalfament del dielèctric

Quan tenim una diferència de potencial entre dos conductors es produeix un efecte capacitiu que provoca l'escalfament del dielèctric. Aquest escalfament es pot propagar al llarg de la línia de transmissió.

En alguns casos (com en les línies bifilars) el dielèctric és l'aire, per la qual cosa aquest efecte serà menyspreable en front d'altres tipus de pèrdues que pugui tenir la línia de transmissió.

Vegeu les línies bifilars al subapartat 1.2.2. d'aquest mòdul.

## 6.1.4. Pèrdues per acoblament i descàrrega

Les pèrdues per acoblament es donen quan, tal com indica el seu nom, es produeix una connexió entre dues línies de transmissió. Aquestes unions es poden fer de moltes maneres diferents, però són aquestes mateixes connexions mecàniques les que provoquen aquestes pèrdues per acoblament.

Les pèrdues per descàrrega (o corona) es produeixen quan la diferència de potencial entre els dos conductors supera la tensió de ruptura del material i es genera una descàrrega entre un conductor i un altre.

### Tensió de ruptura

La tensió de ruptura és el voltatge mínim a partir del qual un material aïllant esdevé conductor.

## 6.2. Paràmetres característics de les línies de transmissió amb pèrdues

Fins ara hem considerat línies ideals i hem ignorat:

- la resistència dels conductors  $R$ ,
- la possible conductivitat  $G$  del medi dielèctric que forma part de les línies (recordeu la figura 15).

Una de les primeres conseqüències de les pèrdues en les línies de transmissió és l'aparició de la dispersió, és a dir el fenomen pel qual els senyals sinusoidals que es transmeten per la línia amb freqüències diferents ho fan amb velocitats de fase diferents. Això ho podeu observar a partir de l'equació (71), en la qual, per a una mateixa línia amb constant de fase  $\beta$ , la velocitat de fase del senyal sinusoidal,  $v_f$ , varia en funció de la freqüència  $f$ .

$$\beta = \frac{\omega}{v_f} \rightarrow v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} \quad (147)$$

Noteu que l'equació (147) es diferencia de l'equació (71) pel fet d'haver substituït la velocitat de la llum per una velocitat de fase,  $v_f$ .

Ara partim de l'equació (15) en què es defineix la constant de propagació  $\gamma$  com:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad (148)$$

on  $\beta$  és la constant de fase i  $\alpha$  la constant d'atenuació amb dimensions de metre elevat a menys 1 ( $m^{-1}$ ). Com que la constant de propagació pot tenir un valor real o complex, les equacions de la tensió i del corrent (equacions (16) i (17)) en la línia no canviaran quan calculem aquestes equacions en el cas que hi hagi atenuacions:

$$v(z,t) = V^+ e^{j\omega t - \gamma z} + V^- e^{j\omega t + \gamma z} \quad (149)$$

$$i(z,t) = I^+ e^{j\omega t - \gamma z} + I^- e^{j\omega t + \gamma z} \quad (150)$$

Un cop tenim les ones de tensió i corrent quan tenim atenuacions, podem calcular la impedància característica de la línia de transmissió. Si recordeu les equacions (20), (21) i (26) i apliquem la llei d'Ohm, podem concloure:

$$\frac{v^+}{i^+} = \frac{V^+}{I^+} = Z_0 = \alpha + j\beta = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \quad (151)$$

Vegeu que els senyals sinusoidals de freqüències diferents es transmeten amb velocitats de fase diferents al subapartat 0. d'aquest mòdul.

on  $Z$  representa la impedància en sèrie i  $Y$  l'admitància en sèrie. Els valors de  $Z$  i  $Y$  venen donats per les equacions següents:

$$Z = R' + j\omega L' \quad (152)$$

$$Y = G' + j\omega C' \quad (153)$$

### 6.2.1. Línies de pèrdues baixes

Si utilitzem les línies per a transmetre senyals en una freqüència de la banda de microones, és a dir, d'alta freqüència, es dona el cas de línies amb pèrdues baixes. Això ho podeu veure pel fet que les components resistives degudes a la inductància i a la capacitància són més grans que les degudes als efectes de la resistència i la conductivitat:

$$\omega L' \gg R' \quad (154)$$

$$\omega C' \gg G' \quad (155)$$

i llavors podem deduir els valors de la constant de fase,  $\beta$ , i de l'atenuació,  $\alpha$ , aplicant les aproximacions de les equacions (154) i (155) a l'equació (151):

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \quad (156)$$

$$\alpha = \frac{R}{2Z_0} + \frac{Z_0 G}{2} \ll \beta \quad (157)$$

on  $Z_0$  és la impedància característica de la línia, que és el cas que hem estudiat durant tot el mòdul.

### 6.2.2. Efecte de l'atenuació en el coeficient de reflexió

Si ara tenim en compte els efectes de l'atenuació  $\alpha$  en el càlcul del coeficient de reflexió, obtindrem, a partir de l'equació (75):

$$\rho(z) = \rho_L e^{j2\gamma z} = \rho_L e^{-2\alpha z} e^{-j2\beta z} \quad (158)$$

En aquest cas sí que tenim un efecte atenuador en el coeficient de reflexió, ja que el tenim multiplicat per una funció exponencial amb exponent negatiu (vegeu la figura 62).

Figura 62

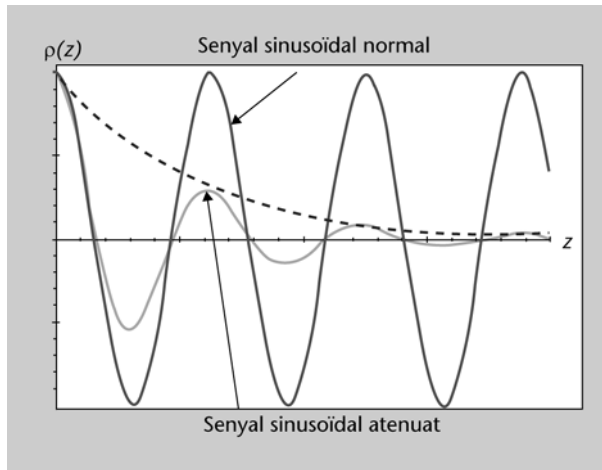


Figura 62

Coeficient de reflexió  $\rho(z)$  afectat per una atenuació exponencial negativa (línia puntejada) en funció de la distància,  $z$ .

De la mateixa manera es veuran afectades les equacions del corrent i la tensió en la línia de transmissió, equacions (65) i (66), ja que substituïrem el factor  $\gamma$  per les mateixes exponencials de l'equació (158).

$$v^+(z,t) = |V^+| e^{-\alpha z} e^{j\omega t} e^{-j\beta z} \quad (159)$$

$$i^+(z,t) = \frac{|V^+|}{Z_0} e^{-\alpha z} e^{j\omega t} e^{-j\beta z} \quad (160)$$

Ara que ja us hem presentat les principals causes de les pèrdues en les línies de transmissió i heu vist el seu efecte en les equacions que hem desenvolupat al llarg de tot el mòdul, vegem alguns dels tipus de línies més utilitzats.

### 6.3. Tipus de línies de transmissió

En aquest subapartat introduïrem alguns dels diferents tipus de línies de transmissió que s'utilitzen més usualment en els dispositius actuals.

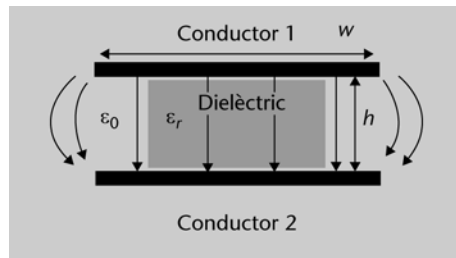
Cal que recordeu que no demostrarem les equacions que presentarem per a cada tipus de línia.

#### 6.3.1. Línies de plaques paral·leles

Les línies de transmissió anomenades *de plaques paral·leles* estan formades per dues tires de material conductor d'amplada  $w$  disposades en paral·lel i separades una distància  $h$  per un material dielèctric.

La seva anàlisi pot arribar a ser molt complicada, ja que en tenir dues plaques paral·leles, com en un condensador, existeixen unes línies de camp que no van d'una placa a l'altra seguint un camí perpendicular a les plaques, sinó que passen per l'exterior de l'espai entre els conductors (vegeu la figura 63). La distorsió creada per aquestes línies de camp s'anomena **efecte frontera**.

Figura 63



És bastant difícil realitzar un càlcul exacte dels efectes que creen aquestes línies de camp no perpendiculars, però podem simplificar els càlculs quan l'amplada del condensador és molt més gran que la distància entre les plaques,  $w \gg h$ . És llavors quan la capacitat del sistema es pot calcular utilitzant l'equació del condensador pla:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{w}{h} \quad (161)$$

on:

- $\epsilon_0$  és la constant dielèctrica del buit,
- $\epsilon_r$  és la constant dielèctrica relativa del medi,
- $w$  és l'amplada de les plaques conductores, i
- $h$  és la distància entre les dues plaques.

$\epsilon$  és la lletra grega èpsilon minúscula.

La impedància característica de la línia es pot calcular utilitzant l'equació:

$$Z_0 = \frac{l}{v_p c} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{cC} = \frac{120\pi h}{\sqrt{\epsilon_r} w} \quad (162)$$

Amb aquesta aproximació, el corrent està uniformement distribuït i el paràmetre  $R'$  (resistència per unitat de longitud) és:

$$R' = 2 \frac{R_s}{w} \quad (163)$$

on expressem la resistència total del conductor com:

$$R_s = \frac{1}{\delta \sigma} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} \quad (164)$$

on  $\sigma$  és la conductivitat del conductor i  $\delta$  la profunditat de penetració en el conductor a la freqüència  $f$ :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (165)$$

$\delta$  és la lletra grega delta minúscula  
i  $\sigma$  és la lletra grega sigma minúscula.

La profunditat de penetració és la distància que una ona de freqüència  $f$  penetra cap a l'interior del conductor.

Vegeu la profunditat de penetració en el mòdul "Propagació d'ones electromagnètiques".

Utilitzant les equacions (164) i (165) podem definir les atenuacions del dielèctric  $\alpha_d$  i del conductor  $\alpha_c$ :

$$\alpha_d = \frac{1}{2} \omega \sqrt{\mu \epsilon} \tan(\delta_l) \quad (166)$$

$\mu$  és la lletra grega mu minúscula.

$$\alpha_c = \frac{1}{2} \frac{R'}{Z_0} = R_s \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{h} \quad (167)$$

De les expressions (166) i (167) podem deduir que, per a una profunditat de penetració  $\delta$  constant amb la freqüència  $f$ ,

- l'atenuació en el dielèctric,  $\alpha_d$ , creix linealment;
- l'atenuació en el conductor,  $\alpha_c$ , creix amb l'arrel quadrada de la freqüència.

### 6.3.2. Línies bifilars

Les línies bifilars estan formades per dos conductors en forma de fil situats en paral·lel l'un respecte a l'altre (vegeu la figura 64). Es fan servir des de fa molt de temps en línies telegràfiques i telefòniques.

Figura 64

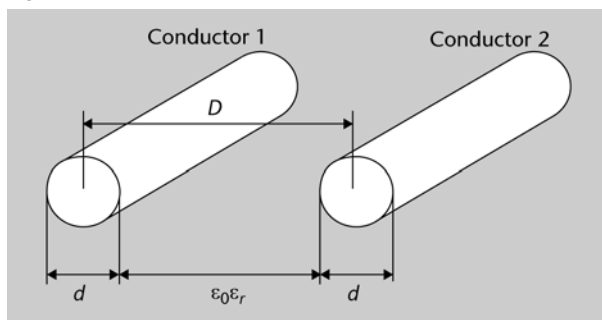


Figura 64

Línia de transmissió bifilar en què els dos conductors es troben separats per un dielèctric de constant dielèctrica relativa  $\epsilon_r$ .

Aquest tipus de línies tenen el problema que, en estar molt descobertes (normalment només estan recobertes per un revestiment de plàstic) es veuen molt afectades per radiacions i interferències externes. També tenen una atenuació intrínseca molt alta, fet que fa difícil obtenir unes impedàncies característiques prou baixes per a permetre la transmissió d'un senyal a llargues distàncies.

La impedància característica d'una línia bifilar es pot calcular mitjançant la següent equació:

$$Z_0 = \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \cosh^{-1}\left(\frac{D}{d}\right) \quad (168)$$

on:

- $D$  és la distància entre els dos conductors i
- $d$  el diàmetre dels conductors (vegeu la figura 64).

Els problemes de radiació i d'interferències en aquest tipus de línies es poden solucionar mitjançant els mètodes següents:

- El trenat dels cables. D'aquesta manera fem que la pròpia inducció creuada entre els cables sigui la menor possible gràcies al creuament d'un conductor amb un altre.
- L'apantallament utilitzant un material conductor, que fa de barrera contra interferències externes.

#### Recordeu

Dins d'un conductor el camp és zero. Penseu per exemple en la gàbia de Faraday, en què utilitzem una caixa totalment segellada i metàl·lica per tal d'aïllar el seu contingut d'interferències externes.

### 6.3.3. Línies de transmissió coaxials o concèntriques

Els conductors coaxials s'utilitzen molt ja que no tenen les deficiències de les línies bifilars.

Aquestes línies estan constituïdes per dos conductors cilíndrics concèntrics. El conductor exterior normalment es fabrica amb una malla de fils trenats sobre un nucli dielèctric (normalment de tefló o polietilè) que cobreix totalment el conductor intern (vegeu la figura 65).

Figura 65

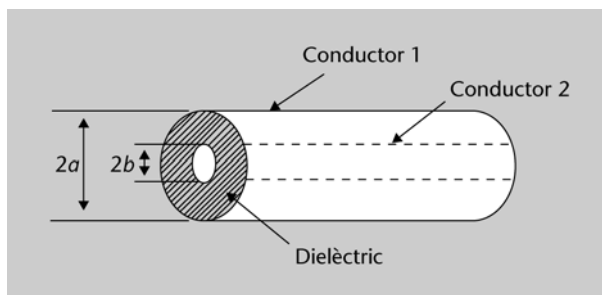


Figura 65

Disseny de línies de transmissió coaxials.

Donada la simetria de l'estructura, el corrent es distribueix uniformement i la seva impedància característica  $Z_0$  és:

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad (169)$$

i la resistència unitària  $R$ :

$$R = \frac{R_s}{2\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (170)$$



on:

- $R_s$  és la resistència total del conductor,
- $a$  és el radi exterior de la línia, i
- $b$  és el radi interior de la línia.

La seva atenuació per pèrdues en els conductors la podem definir com:

$$\alpha_c = \frac{R}{2Z_0} = \frac{R_s \sqrt{\epsilon_r}}{120 \cdot 2\pi a} \frac{1 + \frac{a}{b}}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \quad (171)$$

Noteu que l'atenuació és inversament proporcional al diàmetre del cable  $i$ , per tant, per a trams molt llargs (com per a línies de televisió per cable o Internet), convé fer-lo com més gruixut millor per tal de reduir al màxim l'atenuació. Aquesta solució no és tan fàcil com sembla, ja que un cable molt gruixut acostuma a ser molt car i molt pesant.

### 6.3.4. Línies triplaca

Les línies de transmissió triplaca estan formades per una tira conductora d'amplada  $W$  centrada entre dos plans conductors (vegeu la figura 66), separats per un dielèctric de gruix  $h$ .

En l'actualitat, l'estructura d'aquest tipus de línies està formada per dues làmines dielèctriques (de gruix  $h/2$ ) amb una de les cares metal·litzada (conductors exteriors, 1 i 3 a la figura 66, o plans de massa). D'aquestes dues làmines, una d'elles també té a l'altra cara la tira conductora central, de manera que es completa l'estructura posant en contacte les làmines dielèctriques i estrenyent-les fortament.

Les línies triplaca en anglès s'anomenen *stripline*.

Figura 66

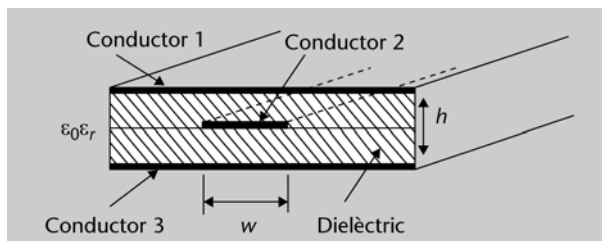


Figura 66

Estructura de la línia triplaca. Noteu que la placa del conductor 2 es troba en el dielèctric superior.

Els avantatges d'aquesta línia són:

- el seu caràcter blindat (molt protegit en front de les interferències externes), i
- la facilitat de fabricar circuits complexos mitjançant tècniques fotolitogràfiques.

El seu principal inconvenient és el seu caràcter tancat (integrat dins de la placa d'un circuit), fet que no permet la inserció de components per a dissenyar circuits més avançats o modificacions i adaptacions.

La seva impedància característica es pot calcular mitjançant:

$$Z_0 = \frac{30\pi K'(x)}{\sqrt{\epsilon_r} K(x)} \quad \text{on } x = \tanh\left(\frac{\pi W}{2H}\right) \quad (172)$$

i on  $K(x)$  i  $K'(x)$  s'anomenen *integrals el·líptiques de primera espècie* que es defineixen segons les equacions següents:

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2 \sin^2(\varphi)}} \quad (173)$$

$$K'(x) = K(\sqrt{1-x^2}) \quad (174)$$

on  $x$  és una variable qualsevol utilitzada per a l'obtenció dels valors en les integrals el·líptiques (173) i (174). En funció dels valors del quadrat de  $x$ ,  $x^2$ , podem trobar-nos amb els casos següents:

$$\text{si } 0 \leq x^2 \leq 0,5: \quad \frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{1}{\pi} \ln\left(2 \frac{1+\sqrt{x'}}{1-\sqrt{x'}}\right) = F(x') \quad (175)$$

$$\text{si } 0,5 \leq x^2 \leq 1: \quad \frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{1}{F(x)} \quad (176)$$

$$\text{on } \quad x' = \sqrt{1-x^2} \quad (177)$$

El càlcul de la resistència unitària és bastant complex, a causa de la distribució no uniforme del corrent en la placa i en els plans de massa.

També cal dir que, com a conseqüència del seu disseny, les línies triplaca tenen un molt bon comportament en freqüència.

### 6.3.5. Línia micropista

La línia micropista és una línia de transmissió plana, semblant a les línies coplanàries, formada per una tira conductora d'amplada  $W$  sobre una làmina dielèctrica de gruix  $h$  (també anomenada *substrat*) que a l'altra cara té un pla de massa (vegeu la figura 67), amb una estructura similar a la de la línia triplaca.

#### Integral el·líptica

Una integral el·líptica de primera espècie és un cas particular de la integral el·líptica. Existeixen integrals el·líptiques de primera espècie, completes i incompletes. Les primeres depenen d'una sola variable ( $x$ ) i les segones depenen de dues variables.

Les línies micropista en anglès s'anomenen *microstrip*.

Figura 67

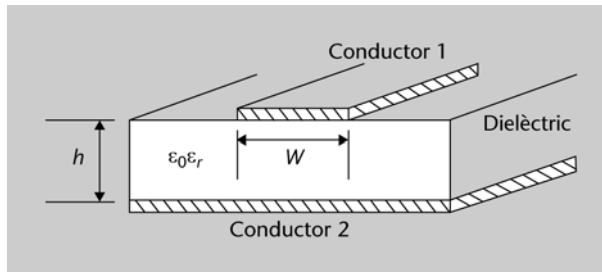


Figura 67

Estructura de la línia micropista.

Aquesta línia té l'avantatge que, en no tenir una altra capa de dielèctric al damunt, és molt més senzill realitzar circuits més avançats muntant els elements a la superfície de la placa, i també que, gràcies al seu disseny, també és més fàcil de fabricar.

La capacitat es pot calcular amb l'ajut de transformades conformes, si bé en aquest cas, a causa de la inhomogeneïtat del dielèctric cal introduir aproximacions que simplifiquin els càlculs, amb un grau d'error inferior a l'1%. La impedància característica,  $Z_0$ , en aquest tipus de línies de transmissió s'expressa segons:

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left( \frac{8h}{W} + \frac{W}{4h} \right) \quad (178)$$

on  $\epsilon_r$  és la constant dielèctrica relativa del dielèctric i  $h$  és el gruix del dielèctric; també es pot definir una constant dielèctrica  $\epsilon_{ref}$  per a  $W/h \leq 1$  com:

$$\epsilon_{ref} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left( 1 + \frac{10H}{W} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (179)$$

Si tenim  $W/h \geq 1$  obtenim:

$$Z_0 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{ref}}} \left[ \frac{W}{H} + 1,393 + 0,667 \ln \left( \frac{W}{H} + 1,444 \right) \right]^{-1} \quad (180)$$

El càlcul de l'atenuació causada pel dielèctric,  $\alpha_D$ , i al conductor,  $\alpha_C$ , en aquest cas és bastant complicat.

En aquest tipus de línies el comportament en freqüència es veu afectat per la dispersió, o diferència de velocitat de transmissió dels senyals amb diferent freqüència per l'interior de la línia.

### 6.3.6. Línies coplanàries

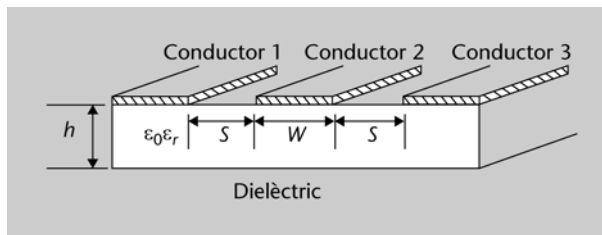
En les línies micropista els contactes a massa dels components que afegim externament s'han de realitzar a través del substrat dielèctric, que s'ha de perfo-

rar. Això, en el cas dels substrats durs, com poden ser els substrats del tipus ceràmic o de quars, implica una certa complicació.

Les línies coplanàries, que ara veurem, solucionen part del problema que tenen les línies micropista.

Les línies coplanàries estan formades per una tira conductora i dos semiplans conductors de massa, equidistants d'aquesta i situats en el mateix pla (vegeu la figura 68).

Figura 68

**Figura 68**

Estructura de la línia de transmissió coplanària.

En aquest cas es pot calcular la impedància característica de la línia de transmissió,  $Z_0$ , mitjançant l'expressió:

$$Z_0 = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_{ref}}} \frac{K'(x)}{K(x)} \quad (181)$$

on  $x$  pren el valor:

$$x = \frac{W}{W + 2S} \quad (182)$$

En aquest cas, el valor de la constant dielèctrica  $\epsilon_{ref}$  es pot calcular amb:

$$\epsilon_{ref} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} \left\{ \tanh \left[ 0,775 \ln \left( \frac{h}{S} \right) + 1,75 \right] + \frac{xS}{h} \left[ 0,04 - 0,7x + 0,01(1 - 0,1\epsilon_r)(0,25 + x) \right] \right\} \quad (183)$$

#### 6.4. Què hem après?

Al començament d'aquest apartat hem fet una petita introducció a les línies de transmissió amb pèrdues, per tal de poder definir una mica com són les equacions que regeixen el comportament de les línies de transmissió no ideals.

Hem explicat a nivell conceptual quines són les principals causes de les pèrdues en les línies de transmissió (els propis conductors, la radiació, l'escalfament i l'acoblament) i hem vist com es veien afectades les equacions dels paràmetres de les línies de transmissió.

Després hem fet un ràpid repàs a alguns dels tipus de línies de transmissió més importants que podeu trobar avui en dia i a les equacions que en defineixen els paràmetres principals, en funció de la seva estructura. Hem classificat les línies com:

- línies de plaques paral·leles
- línies bifilars
- línies coaxials o concèntriques
- línies triplaca
- línies micropista
- línies coplanàries

## 7. Problemes resolts

### 7.1. Enunciats

1) Una línia de transmissió amb impedància característica  $Z_0 = 50 \Omega$  està carregada amb una impedància de valor  $Z_L = 50 + j25 \Omega$ . Calculeu:

- a) El coeficient de reflexió en la càrrega,  $\rho_L$ .
- b) El coeficient de transmissió,  $\tau_L$ .

2) Una línia de transmissió amb impedància característica  $Z_0 = 75 \Omega$  està carregada amb una impedància de valor  $Z_L = 10 + j50 \Omega$ . Calculeu:

- a) El valor de la relació d'ona estacionària  $S$  (o ROE).
- b) Els valors d'amplitud màxim i mínim per a una ona d'amplitud  $|V| = 2 \text{ V}$  i fase  $\phi = -\pi/4$  radians.

3) Una línia de transmissió amb impedància característica  $Z_0 = 50 \Omega$  està carregada amb una impedància de valor  $Z_L = 50 + j25 \Omega$ . Utilitzant la carta d'Smith, calculeu:

- a) El coeficient de reflexió,  $\rho_L$  (mòdul i fase).
- b) El coeficient de reflexió i la impedància a  $\lambda/2$  de la càrrega.
- c) El coeficient de reflexió i la impedància a  $\lambda/8$  de la càrrega.

4) Una línia de transmissió amb impedància característica  $Z_0 = 50 \Omega$  està carregada amb una impedància de càrrega igual a  $Z_L = 25 + j50 \Omega$ . Calculeu:

- a) El coeficient de reflexió en la càrrega,  $\rho_L$ .
- b) El valor de la impedància en sèrie per tal d'adaptar la línia.
- c) La longitud d'una segona línia per tal d'adaptar la primera línia a la càrrega.

### 7.2. Solucions

1) a) Podem obtenir el coeficient de reflexió en la càrrega mitjançant l'equació 46:

$$\begin{aligned} \rho_L &= \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 + j25 - 50}{50 + j25 + 50} = \frac{j25}{100 + j25} = \\ &= 0,059 + j0,235\Omega = 0,24e^{j0,42\pi} \end{aligned} \quad (184)$$

**b)** Com el coeficient de transmissió és el complementari del coeficient de reflexió, obtenim el coeficient de transmissió amb l'equació (59):

$$\begin{aligned}\tau &= 1 - \rho = 1 - (0,059 + j0,235) = \\ &= 0,941 - j0,235 = 0,97e^{-j0,078\pi}\end{aligned}\quad (185)$$

**2) a)** Per tal de calcular el paràmetre  $S$ , primer cal calcular el coeficient de reflexió (46):

$$\begin{aligned}\rho_L &= \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{10 + j50 - 75}{10 + j50 + 75} = \frac{-65 + j50}{85 + j50} \\ &= -0,31 + j0,77 = 0,83e^{-j0,88\pi}\end{aligned}\quad (186)$$

i llavors calculem el paràmetre  $S$  amb l'equació (118):

$$S = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = \frac{1 + 0,83}{1 - 0,83} = 10,87 \quad (187)$$

**b)** Un cop tenim el valor de  $\rho_L$ , podem calcular els valors d'amplitud màxim i mínim amb les equacions (106) i (108), respectivament:

$$|V_{max}| = |V|(1 + |\rho_L|) = 2 \cdot (1 + 0,83) = 3,66 \text{ V} \quad (188)$$

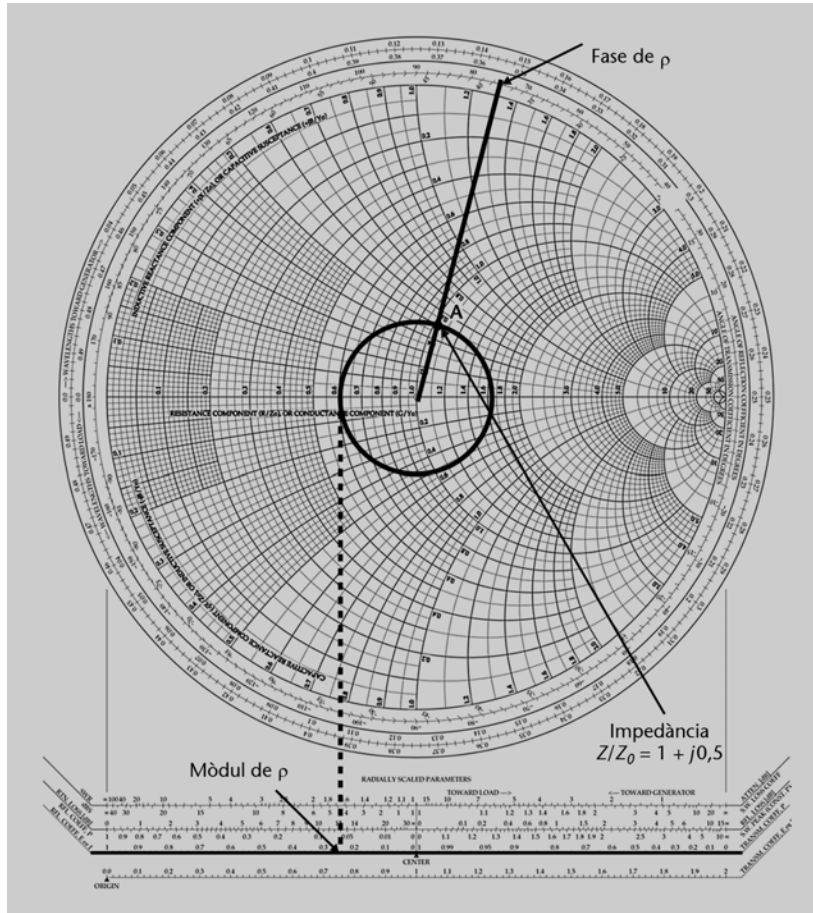
$$|V_{min}| = |V|(1 - |\rho_L|) = 2 \cdot (1 - 0,83) = 0,34 \text{ V} \quad (189)$$

**3) a)** El primer que hem de fer és normalitzar la impedància de càrrega respecte al valor de la impedància de la línia.

$$\bar{Z} = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{50 + j25}{50} = 1 + j0,5 \Omega \quad (190)$$

i ara localitzarem aquest punt sobre la carta d'Smith. Com podeu veure a la figura 69 (punt A), podeu llegir en la barra inferior el mòdul del coeficient de reflexió  $|\rho| = 0,24$ , i en la circumferència externa, la fase del coeficient de reflexió  $\angle = 75^\circ$ .

Figura 69



**Figura 69**  
Posició de la impedància normalitzada  $Z = 1 + j0,5$  a la carta d'Smith.

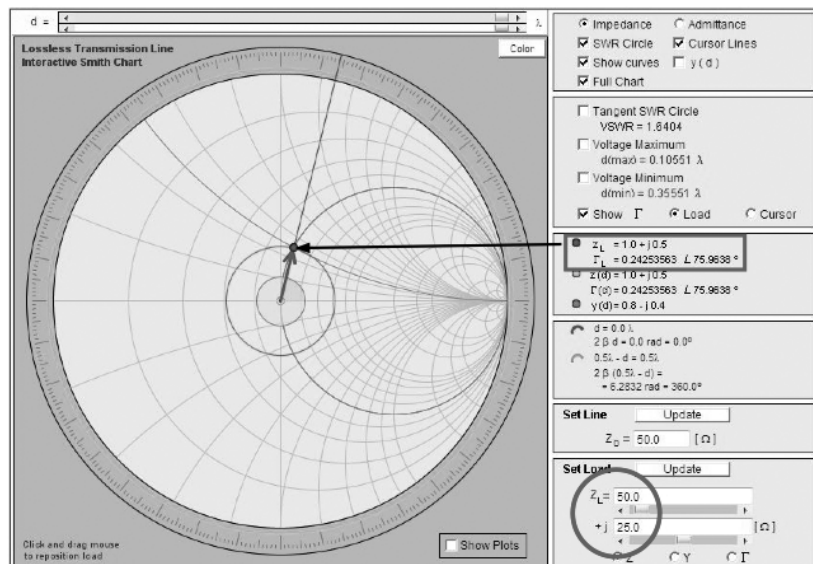
**Atenció**  
Fixeu-vos que escrivim l'angle en radians. Per passar de graus a radians només cal:  
$$\text{radian} = \text{graus} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$$

Recordeu que a causa del fet que la impedància té la part imaginària positiva, és una reactància inductiva i, per això, agafem el valor de la reactància que es troba a la part superior de la carta d'Smith.

A la figura 70 podeu observar que l'aplicació que teniu a l'enllaç d'interès us dona directament el valor del coeficient de reflexió:  $\rho_L = 0,24e^{j0,42\pi}$  ( $|\rho| = 0,24$  i  $\angle = 75^\circ = 0,42\pi$ )

**Enllaç d'interès**  
També podeu fer servir l'aplicació de la pàgina web d'Interactive Smith Chart:  
<http://www.amanogawa.com/archive/LossLessSmithChart/LossLessSmithChart-2.html>

Figura 70



**Figura 70**  
Representació de la impedància normalitzada  $Z = 1 + j0,5$  sobre la carta d'Smith utilitzant una aplicació d'Internet.



b) Per a calcular com es propaga el coeficient de reflexió al llarg de la línia de transmissió, només hem de recórrer la circumferència centrada en la carta una distància  $\lambda/2$ .

A causa de la propietat de periodicitat de les ones (i de la carta d'Smith), veurem que arribem al mateix punt al que estàvem. Per tant, el coeficient de reflexió ens queda:

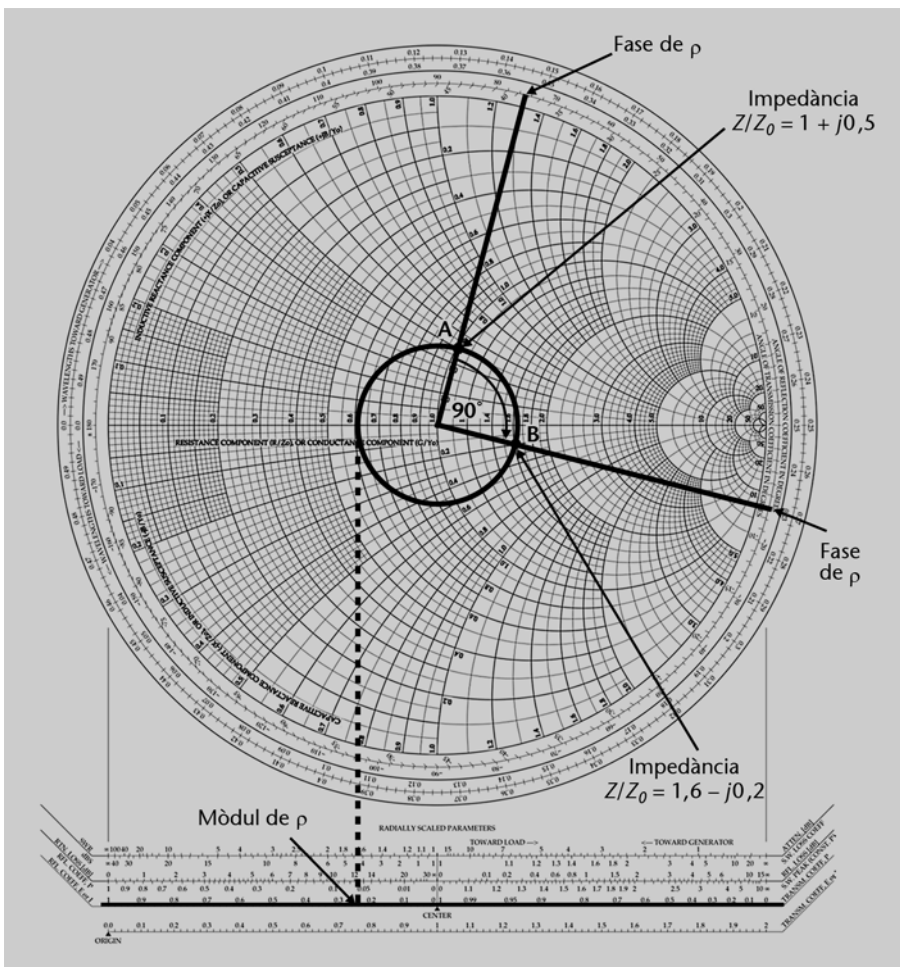
$$\rho(d = \frac{\lambda}{2}) = \rho = 0,24e^{+j0,42\pi} \tag{191}$$

I la impedància serà la mateixa:

$$\bar{Z} = 1 + j0,5\Omega \tag{192}$$

c) Si ara volem fer el mateix per a  $\lambda/8$ , només cal recórrer la circumferència en el sentit horari una distància equivalent a  $90^\circ$  (la quarta part d'una volta que seria  $\lambda/2$ ). El resultat que obtindrem serà el punt B a la següent figura:

Figura 71



**Figura 71**  
 Punt A d'impedància  $\bar{Z} = 1 + j0,5$  transformat en el punt B d'impedància  $\bar{Z} = 1,6 - j0,2$  mitjançant una rotació de  $90^\circ$ .

El coeficient de reflexió serà (fixeu-vos que passem els graus a radians per poder posar la forma exponencial):

$$\rho(d = \frac{\lambda}{8}) = \rho = 0,24e^{-j0,083\pi} \quad (193)$$

i la impedància resultant en aquest punt és:

$$\bar{Z} = 1,6 - j0,2 \Omega \quad (194)$$

Podeu comprovar els valors en l'aplicació de la pàgina web esmentada en l'apartat a) del problema.

4)

a) El primer que farem per a calcular el coeficient de reflexió és trobar la impedància normalitzada  $\bar{Z}$ :

$$\bar{Z} = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{25 + j50 \Omega}{50 \Omega} = 0,5 + j1 \quad (195)$$

A partir de la impedància normalitzada calcularem el coeficient de reflexió en la càrrega,  $\rho_L$  (amb l'equació 46):

$$\begin{aligned} \rho_L &= \frac{\bar{Z} - 1}{\bar{Z} + 1} = \frac{0,5 + j1 - 1}{0,5 + j1 + 1} = \frac{-0,5 + j1}{1,5 + j1} = \\ &= 0,076 + j0,61 = 0,62e^{j0,46\pi} \end{aligned} \quad (196)$$

b) Amb el coeficient de reflexió, podem observar que hi ha una reflexió de l'ona incident de retorn cap al generador. Per tal d'adaptar la línia cal que el coeficient de reflexió sigui  $\rho_L = 0$  (o, el que és el mateix,  $\bar{Z} = 1$ ). Perquè es compleixi aquesta condició, cal afegir una impedància normalitzada de valor  $\bar{G} = R + j\chi$  de manera que la suma de les dues impedàncies sigui:

$$\bar{Z} + \bar{G} = 1 \quad (197)$$

Si substituïm els valors de l'enunciat ens queda la següent igualtat:

$$(0,5 + j1) + (R + j\chi) = 1 \quad (198)$$

La qual podem separar per la part real i la part imaginària:

$$0,5 + R = 1 \quad (199)$$

$$j1 + j\chi = 0 \quad (200)$$

De l'equació (199) en resollem  $R = 0,5$ , i de l'equació (200)  $\chi = -1$ . Per tant, la impedància normalitzada que hem d'afegir ha de ser:

$$\bar{G} = 0,5 - j1 \tag{201}$$

I sense normalitzar:

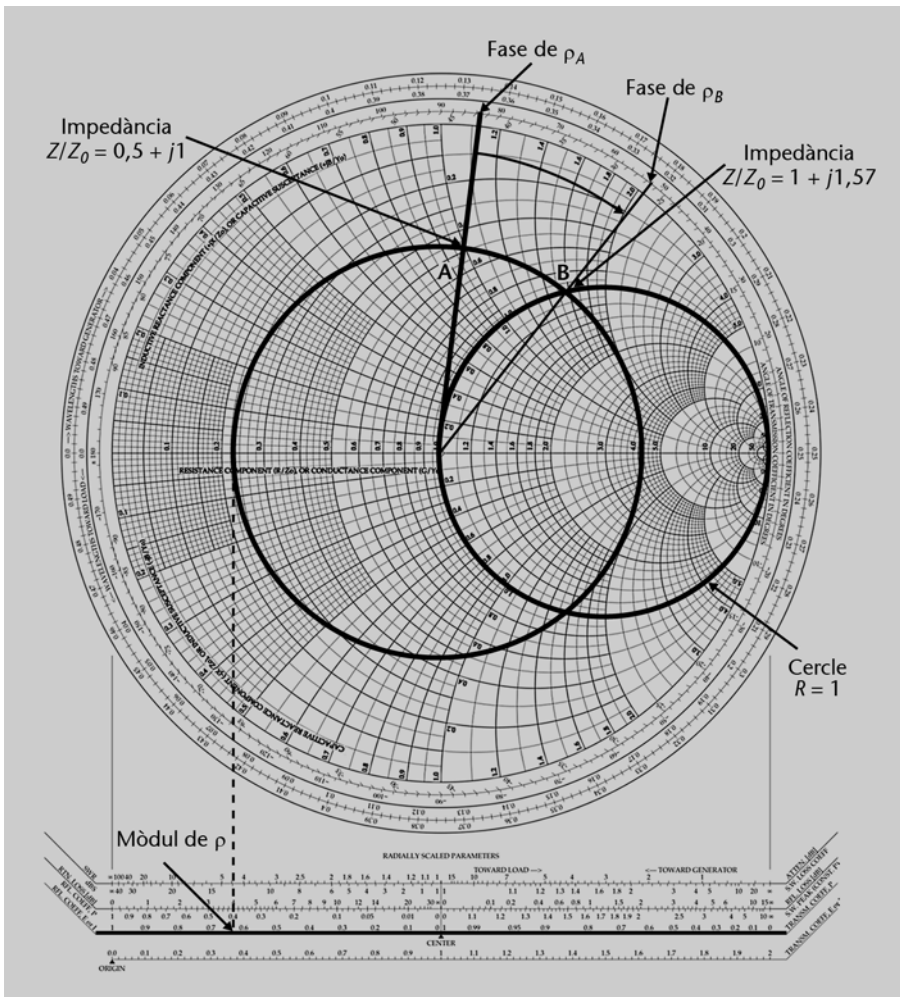
$$G = 25 - j50 \Omega \tag{202}$$

Per tal de no haver d’inserir en la línia més d’un component adaptador passiu (un purament resistiu i l’altre només reactiu), el que farem és buscar el punt de la línia de transmissió en què la part real de la impedància de càrrega és igual a 1. Per tant, buscarem el punt més proper al punt A de la carta d’Smith que talla la circumferència de  $R = 1$  (vegeu la figura 72). Aquest és el punt B.

**Reactància capacitiva**

El valor negatiu de la part imaginària de la impedància ens indica que és una reactància capacitiva.

Figura 72



**Figura 72**

Carta d’Smith amb el punt A d’impedància  $Z = 0,5 + j1$  i el punt més proper (punt B) que talla la circumferència de  $R = 1$ .

El punt més proper que talla la circumferència de  $R = 1$  es troba a una distància  $d = 0,043\lambda$  de la càrrega, en la impedància  $\bar{Z} = 1 + j1,57$ . És en aquest punt on introduïrem una reactància capacitiva de valor  $\chi = -1,57$ .

## Resum

En aquest mòdul hem definit una línia de transmissió com un element que serveix per a transmetre ones electromagnètiques, com ara un senyal elèctric, d'un dispositiu a un altre. Normalment, la línia de transmissió transmetrà els senyals d'una font fins a una càrrega.

El funcionament de la línia de transmissió es basa en el temps que tarda el senyal, o ona electromagnètica, en propagar-se per l'interior de la línia.

Els paràmetres que caracteritzen una línia de transmissió són:

- la seva longitud,  $l$ ,
- la seva impedància característica,  $Z_0$ ,
- el seu coeficient de propagació,  $\beta$ .

Utilitzarem el model de línies de transmissió quan volem transmetre senyals amb una longitud d'ona molt superior a la longitud de la línia de transmissió. Si la línia de transmissió és molt curta, no cal aplicar el model de línia de transmissió, i en tenim prou amb la teoria de circuits tradicional.

Definim un model de línia de transmissió basant-nos en l'aproximació quasi-estàtica. Aquest model, o circuit equivalent, està compost per:

- una resistència  $R'dz$ ,
- una capacitat  $C'dz$ ,
- una conductància  $G'dz$ ,
- una inductància  $L'dz$ .

De l'anàlisi diferencial del model equivalent de la línia de transmissió obtenim les equacions d'ona en una dimensió (també anomenades equacions del telegrafista) de la tensió i del corrent:

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} - \gamma^2 v(z,t) = 0 \quad (203)$$

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} - \gamma^2 i(z,t) = 0 \quad (204)$$

on  $\gamma$  és la constant de propagació de la línia de transmissió. Aquesta constant de propagació té una component deguda a l'atenuació de la línia,  $\alpha$ , i una constant de fase,  $\beta$ . La constant de propagació es defineix com:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad (205)$$

En el cas de línies de transmissió ideals, l'atenuació és nul·la,  $\alpha = 0$ .

La solució a les equacions d'ona per a la tensió i el corrent són:

$$v(z,t) = V^+ e^{j\omega t - \gamma z} + V^- e^{j\omega t + \gamma z} \quad (206)$$

$$i(z,t) = I^+ e^{j\omega t - \gamma z} + I^- e^{j\omega t + \gamma z} \quad (207)$$

Aquestes ones estan formades per una ona incident, o progressiva (superíndex positiu), i una ona reflectida, o regressiva (superíndex negatiu), que viatgen en sentits contraris. Les ones incidents viatgen de la font a la càrrega i les reflectides, de la càrrega a la font.

A partir de l'aplicació de la llei d'Ohm entre les ones de tensió i de corrent, hem definit la impedància característica de la línia de transmissió,  $Z_0$ :

$$Z_0 = \frac{v^+}{i^+} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad (208)$$

Aquest model equivalent, i la impedància característica, estan definits de la forma més propera possible a la realitat. Per tal de simplificar els càlculs, hem aproximat aquest model més real al model de línies de transmissió ideals. Les línies de transmissió ideals es caracteritzen per tenir  $R' = 0$  i  $G' = 0$ .

Si la línia de transmissió està carregada amb una impedància diferent de la impedància característica de la línia, apareixen ones reflectides. La relació entre l'ona reflectida i l'ona incident és el coeficient de reflexió:

$$\rho_L = \frac{v^-}{v^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (209)$$

L'adaptació de la línia es produeix quan no hi ha ona reflectida en la càrrega i, per tant, es compleix la condició:

$$\rho_L = 0 \quad (210)$$

Podem definir el coeficient de transmissió,  $\tau$ , de la mateixa manera que el coeficient de reflexió, com la relació entre l'ona regressiva (subíndex  $b$ ) i la nova ona progressiva que es crea (subíndex  $a$ ):

$$\tau_{ab} = \frac{v_{b1}^+}{v_{a1}^+} = \frac{v_{a1}^+ + v_{a1}^-}{v_{a1}^+} \quad (211)$$

Les ones que circulen dins de les línies de transmissió tenen una periodicitat de  $\lambda/2$ . Aquest fet provoca invariància de la impedància d'entrada quan afegim línies de transmissió de longitud igual a  $\lambda/2$ .

El coeficient de reflexió es “propaga” al llarg de la línia de transmissió en el cas sense pèrdues, segons:

$$\rho(z) = \frac{v^-}{v^+} = \frac{V^- e^{+j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z}} = \rho_L e^{j2\beta z} \quad (212)$$

De la interferència entre les ones progressives i regressives que circulen per l'interior de la línia de transmissió, apareixen les ones estacionàries. L'equació de l'ona estacionària pel cas sense pèrdues és:

$$v(z,t) = 2|V^+| \cos(\beta z) \sin(\omega t + 2\phi) \quad (213)$$

Les ones estacionàries es caracteritzen amb la relació d'ona estacionària (ROE), simbolitzat per  $S$  i que es defineix com:

$$S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (214)$$

També hem vist que la impedància de càrrega que es veu a cada punt de la línia és diferent: si posem una càrrega d'impedància  $Z_L$ , la impedància al llarg de la línia, en el cas sense pèrdues, vindrà donada per l'equació:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta z + jZ_0 \sin \beta z}{Z_0 \cos \beta z + jZ_L \sin \beta z} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta \ell}{Z_0 + jZ_L \tan \beta \ell} \quad (215)$$

Per a trobar com es propaga aquesta impedància, però també els coeficients de reflexió i transmissió, hem vist que en lloc de resoldre les equacions (75) i (58) (equacions 212 i 215), respectivament, es pot fer servir la carta d'Smith. Gràcies al mode en què aquesta carta simplifica els càlculs, és una eina indispensable a l'hora d'adaptar impedàncies.

Finalment, hem vist els principals tipus de línies de transmissió:

- línies de plaques paral·leles
- línies bifilars
- línies coaxials o concèntriques.
- línies triplaca
- línies micropista
- línies coplanàries

## Exercicis d'autoavaluació

1. Cal tenir en compte els efectes de propagació quan...
  - a) la longitud d'ona és molt superior a la longitud de la línia de transmissió.
  - b) la longitud d'ona és molt inferior a la longitud de la línia de transmissió.
  - c) no hi ha cap relació entre la longitud d'ona i els efectes de propagació.
  - d) Totes les respostes anteriors són falses.
  
2. Quan una ona progressiva incideix sobre la càrrega, ...
  - a) la càrrega absorbeix tota l'ona progressiva.
  - b) la càrrega reflecteix tota l'ona progressiva.
  - c) Una combinació de les anteriors, en funció de la relació entre la impedància de càrrega i la impedància característica de la línia.
  - d) Totes les respostes anteriors són falses.
  
3. Segons el model equivalent de línia de transmissió...
  - a) la línia es divideix en seccions elementals i cal estudiar en cada cas quins elements la constitueixen.
  - b) la línia es divideix en seccions elementals constituïdes per una resistència  $R'dz$ , una conductància  $G'dz$ , un condensador  $C'dz$  i una autoinductància  $L'dz$ , que no existeixen realment en la línia sinó que s'usen per a modelar-ne el comportament.
  - c) la línia es divideix en seccions elementals i es modelen els efectes de propagació d'aquesta secció mitjançant una resistència  $R'dz$ , una conductància  $G'dz$ , un condensador  $C'dz$  i una autoinductància  $L'dz$ , que no existeixen realment en la línia sinó que s'usen per a modelar-ne el comportament.
  - d) tota la línia es comporta com un gran condensador  $C$ .
  
4. Per a estudiar la línia sense pèrdues considerem que...
  - a) l'autoinductància,  $L'dz$ , i la capacitat,  $C'dz$ , de la línia són 0.
  - b) l'autoinductància,  $L'dz$ , i la resistència,  $R'dz$ , de la línia són 0.
  - c) la capacitat,  $C'dz$ , i la resistència,  $R'dz$ , de la línia són 0.
  - d) la resistència,  $R'dz$ , i la conductància,  $G'dz$ , de la línia són 0.
  
5. En la línia carregada amb una impedància adaptada...
  - a) l'ona de tensió no es reflecteix en la càrrega.
  - b) l'ona de tensió es reflecteix parcialment en la càrrega.
  - c) l'ona de tensió es reflecteix totalment en la càrrega.
  - d) Totes les respostes anteriors són falses.
  
6. En la línia carregada amb un circuit obert...
  - a) l'ona de tensió no es reflecteix en la càrrega.
  - b) l'ona de tensió es reflecteix parcialment en la càrrega.
  - c) l'ona de tensió es reflecteix totalment en la càrrega.
  - d) Totes les respostes anteriors són falses.
  
7. En la línia carregada amb un curtcircuit...
  - a) l'ona estacionària de tensió és 0 en la càrrega i en els punts corresponents a cada quart de longitud d'ona ( $d = \lambda/4$ ), per la qual cosa és com si tinguéssim un curtcircuit en aquests punts, sense tenir-lo realment.
  - b) l'ona estacionària de tensió és 0 en la càrrega i en els punts corresponents a cada semilongitud d'ona ( $d = \lambda/2$ ), per la qual cosa és com si tinguéssim un curtcircuit en aquests punts, sense tenir-lo realment.
  - c) l'ona estacionària de corrent és 0 en la càrrega i en els punts corresponents a cada quart de longitud d'ona ( $d = \lambda/4$ ), per la qual cosa és com si tinguéssim un circuit obert en aquests punts, sense tenir-lo realment.
  - d) l'ona estacionària de corrent és 0 en la càrrega i en els punts corresponents a cada semilongitud d'ona ( $d = \lambda/2$ ), per la qual cosa és com si tinguéssim un circuit obert en aquests punts, sense tenir-lo realment.
  
8. En la línia carregada amb un circuit obert...
  - a) l'ona estacionària de tensió és 0 en la càrrega i en els punts corresponents a cada quart de longitud d'ona ( $d = \lambda/4$ ), per la qual cosa és com si tinguéssim un curtcircuit en aquests punts, sense tenir-lo realment.
  - b) l'ona estacionària de tensió és 0 en la càrrega i en els punts corresponents a cada semilongitud d'ona ( $d = \lambda/2$ ), per la qual cosa és com si tinguéssim un curtcircuit en aquests punts, sense tenir-lo realment.
  - c) l'ona estacionària de corrent és 0 en la càrrega i en els punts corresponents a cada quart de longitud d'ona ( $d = \lambda/4$ ), per la qual cosa és com si tinguéssim un circuit obert en aquests punts, sense tenir-lo realment.

**d)** L'ona estacionària de corrent és 0 en la càrrega i en els punts corresponents a cada semilongitud d'ona ( $d = \lambda/2$ ), per la qual cosa és com si tinguéssim un circuit obert en aquests punts, sense tenir-lo realment.

9. La impedància d'entrada de la línia de transmissió és...

**a)** periòdica en els punts de la línia que són múltiples enters d'un quart de longitud d'ona ( $d = \lambda/4$ ), independentment de la impedància característica de la línia i de la impedància de càrrega.

**b)** periòdica en els punts de la línia que són múltiples enters d'un quart de longitud d'ona ( $d = \lambda/4$ ), només quan hi hagi adaptació d'impedàncies.

**c)** periòdica en els punts de la línia que són múltiples enters de la semilongitud d'ona ( $d = \lambda/2$ ), independentment de la impedància característica de la línia i de la impedància de càrrega.

**d)** periòdica en els punts de la línia que són múltiples enters de la semilongitud d'ona ( $d = \lambda/2$ ), només quan hi hagi adaptació d'impedàncies.

10. Quina de les següents afirmacions és certa?

**a)** Les línies coplanàries solucionen els problemes d'accés al substrat de les línies micropista.

**b)** Les línies triplaca estan formades per tres plaques separades per dos conductors i ofereixen una gran protecció enfront de les interferències.

**c)** La condició de "baixes pèrdues" es dona quan circulen ones electromagnètiques d'alta freqüència dins de la línia de transmissió.

**d)** Totes les respostes anteriors són certes.



## Solucionari

1. b; 2. c; 3. c; 4. d; 5. a; 6. c; 7. a; 8. b; 9. c; 10. c

## Glossari

**adaptació d'impedàncies** *f* Condició de càrrega d'una línia de transmissió que evita l'aparició de l'ona reflectida.

**carta d'Smith** *f* Eina gràfica utilitzada per a simplificar l'adaptació de la impedància d'una línia de transmissió amb la seva càrrega i, en general, per facilitar els càlculs en les línies de transmissió.

**coeficient de reflexió** *m* Relació entre l'amplitud de l'ona reflectida i l'amplitud de l'ona incident.

**coeficient de transmissió** *m* Relació entre l'amplitud de l'ona transmesa i l'amplitud de l'ona incident.

**equacions del telegrafista** *fpl* Conjunt d'equacions diferencials que relacionen el corrent i la tensió al llarg d'una línia de transmissió. A partir d'aquestes equacions es pot obtenir l'ona.

**impedància característica** *f* Relació entre l'amplitud de l'ona progressiva de tensió i l'amplitud de l'ona progressiva de corrent.

**línia de transmissió** *f* Estructura destinada al guiatge controlat o delimitat d'una ona electromagnètica.

**ona estacionària** *f* Ona resultant de la interferència, al llarg de la línia de transmissió, de l'ona progressiva i de l'ona regressiva.

**ona progressiva** *f* Ona que viatja en la direcció de  $z$  positiva, és a dir, en direcció del generador a la càrrega.

**ona regressiva** *f* Ona que viatja en la direcció de  $z$  negativa, és a dir, en direcció de la càrrega al generador.

**relació d'ona estacionària** *f* Relació entre l'amplitud màxima i mínima d'una ona estacionària. Normalment es defineix amb les amplituds de l'ona estacionària de tensió. sigla ROE

**ROE** *f* Vegeu relació d'ona estacionària.

## Bibliografia

**Bará Temes, J.** (1991). *Curs de microones*. Barcelona: Edicions UPC.

**Pozar, D. M.** (1998). *Microwave Engineering* (2a ed.). John Wiley & Sons.

