Radiació

Radiació d'un dipol

Antoni Pérez Navarro

PID_00159127

Universitat Oberta
de Catalunya

Índex

Introducció

Fins ara heu vist que els camps electromagnètics es propaguen en forma d'ones i, fins i tot, heu pogut comprovar que la llum és una ona electromagnètica més. De fet, hem obtingut les mateixes lleis per a qualsevol ona electromagnètica que les que ja havíeu vist per a l'òptica. Heu estudiat també com es propaguen aquestes ones, tant en el mòdul "Propagació d'ones electromagnètiques", com en el mòdul "Línies de transmissió". Potser el més sorprenent de tot plegat és que solament canviant la freqüència podem tenir coses tan diferents com microones, llum visible o rajos X. Però també sorprèn que aquestes ones es puguin propagar en el buit, sense cap tipus de medi, i malgrat que hagi desaparegut l'element que les va produir. I és aquest, precisament, el punt que no hem tractat encara: com es produeixen les ones electromagnètiques? Aquest és el tema que atacarem en aquest mòdul.

Saber com es generen les ones electromagnètiques és fonamental sobretot per dos motius:

1) per a poder-les crear quan convé, com es fa amb la ràdio, la televisió, els forns microones, les radiografies, i una gran quantitat d'altres aplicacions; i

2) per a poder-les captar, quan convé, com seria el cas, un cop més, de la ràdio o la televisió.

Val a dir que el tema de la generació d'ones és molt ampli i mereixeria una assignatura en exclusiva. És per això que aquí ens centrarem a donar la idea de com es generen i fer, amb una mica més de detall, l'exemple més senzill (o millor dit, menys complicat): el dipol elèctric oscil·lant.

El mòdul es divideix en dues grans parts: en el primer apartat veureu com es produeixen les ones electromagnètiques i us adonareu que són un tipus de radiació; en el segon apartat estudiarem un dels casos més senzills de generador d'ones electromagnètiques: el dipol elèctric oscil·lant.

Objectius

Els objectius que ha d'aconseguir l'estudiant una vegada treballats els continguts d'aquest mòdul són:

1. Saber què és la radiació.
2. Saber com es produeix la radiació electromagnètica.
3. Conèixer el concepte de temps retardat. Comprendre que les ones electromagnètiques es desplacen a una velocitat finita i, per tant, cal tenir en compte el retard de l'ona per a arribar a un punt determinat.
4. Conèixer el concepte d'antena.
5. Conèixer i comprendre els passos que cal seguir per a calcular la potència radiada per una antena.
6. Conèixer les coordenades polars esfèriques.
7. Saber interpretar un diagrama de radiació.
8. Saber fer aproximacions per a simplificar una expressió complexa.
9. Saber què és un dipol elèctric oscil·lant.

1. Origen de la radiació

L'objectiu principal d'aquest mòdul és veure com es produeixen les ones electromagnètiques. Però, d'on partim? Partirem del que ja coneixem.

Hem dit en la introducció que fins ara no hem vist com es generen les ones electromagnètiques, però aquesta afirmació no és del tot certa. En els mòduls "Ones" i "Propagació d'ones electromagnètiques" heu estudiat que una ona electromagnètica està constituïda per uns camps elèctric i magnètic variables en el temps. És cert que, estrictament, no hem explicat com es genera l'ona, però sí que hem vist com es generen un camp elèctric i un camp magnètic. Per tant, en certa manera, ja tenim un punt de partida i és això precisament el que farem en aquest apartat: veure com es produeix l'ona electromagnètica a partir d'aquests camps.

Amb aquest enfocament no veurem com es genera qualsevol ona electromagnètica, sinó solament les que es poden produir fent oscil·lar càrregues elèctriques, però són aquestes, precisament les que ens interessen en aquest mòdul.

Producció d'ones d'altes freqüències

Per a produir ones d'altes freqüències, com la llum o els rajos X, es podrien fer oscil·lar càrregues però en la pràctica no es fa i s'utilitzen altres mètodes.

Començarem l'apartat amb la definició d'un concepte que és clau: el de radiació. Tot seguit, veurem com podem calcular aquesta radiació a partir dels camps elèctric i magnètic, en què tindrem en compte que l'ona electromagnètica es desplaça a una velocitat finita i, per tant, triga un temps a arribar a qualsevol punt, fet que donarà lloc al concepte de temps retardat. Amb aquest concepte buscarem quines són, en aquest cas, les expressions dels potencials escalar i vectorial i obtindrem així les expressions dels potencials retardats. Amb tots aquests elements ja tindrem les eines matemàtiques i conceptuals necessàries per a calcular les ones electromagnètiques que genera un dispostiu determinat, i això és el que farem en l'últim subapartat: introduir alguns dels dispositius més importants pel que fa a la generació i captació de les ones electromagnètiques de ràdio (que són les que ens interessen en aquest mòdul): les antenes.

Les expressions dels potencials escalar i vectorial es tracten al mòdul "Lleis de Maxwell".

1.1. Definició de radiació

Enllaços d'interès

Podeu visitar la pàgina web del Diccionari de l'Institut d'Estudis Catalans a: http://dlc.iec.cat.
Podeu visitar la pàgina web del Diccionari de la Real Academia de la Lengua Española a: http://rae.es/rae.html.

Abans de començar, en sentit estricte, cal que definim un concepte que és cabdal i que anirà apareixent al llarg de tot el mòdul (i que a més, li dóna títol): el concepte de radiació. Podem trobar definicions diverses però ens quedarem amb la que resulta més útil per als objectius de l'assignatura, i que coincideix en diversos diccionaris normatius, com el de l'Institut d'Estudis Catalans o el de la Real Academia de la Lengua Española.

La radiació és l'emissió i transferència d'energia en forma d'ones electromagnètiques o partícules.

Per al que ens interessa en aquest mòdul, ens quedarem només amb la transmissió d'energia en forma d'ones electromagnètiques. Així, resulta que en tota l'assignatura, el que hem estat estudiant és, precisament, com es propaga la radiació; en aquest mòdul farem un pas més i ens centrarem en com es produeix.

Ara que ja tenim definit el concepte que volem estudiar, podem començar.

1.2. Radiació a partir dels camps elèctric i magnètic

Com a primer pas, pensem una mica com es poden produir ones electromagnètiques, fent servir només allò que sabem:

- Una ona electromagnètica està formada per uns camps elèctric i magnètic, com el seu nom indica.
- En l'origen dels camps elèctric i magnètic tenim les dues idees següents:

– Una càrrega crea un camp elèctric.
– Una càrrega en moviment, amb una velocitat $\vec{v}$, crea un camp magnètic.

Amb la situació així plantejada creàvem camps elèctrics i magnètics que podien ser variables o no i, en qualsevol cas, el que obteníem era el camp en presència de la seva font (càrregues o càrregues en moviment). Ara volem anar més enllà, volem crear una ona viatgera, és a dir, uns camps elèctric i magnètic que es vagin realimentant mútuament de manera que es puguin propagar en el buit sense necessitat que hi hagi la font. És a dir, necessitem crear uns camps elèctric i magnètic que siguin capaços de sobreviure malgrat que l'element que els va crear hagi desaparegut. O dit amb unes altres paraules, volem crear una ona electromagnètica com les que hem vist als mòduls "Ones" i "Propagació d'ones electromagnètiques".

Com han de ser uns camps elèctric i magnètic per a satisfer aquesta condició? La resposta la podem obtenir gràcies a dues de les lleis de Maxwell:

Les equacions de Maxwell s'estudien al mòdul "Lleis de Maxwell".

- De la Llei de Faraday sabem que quan el flux de camp magnètic, Φ_B, varia en el temps, es produeix un camp elèctric, $\vec{E}$:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (1)$$

- De la llei d'Ampère sabem que quan el flux de camp elèctric, Φ_E, varia en el temps, es produeix un camp magnètic, $\vec{B}$:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{2}$$

És a dir, necessitem una variació en el temps per tal que un camp magnètic generi un camp elèctric i per tal que un camp elèctric generi un camp magnètic. Dit d'altra manera, necessitem una variació en el temps perquè un camp magnètic i un camp elèctric es puguin alimentar mútuament.

Ara fixeu-vos en un detall: per tal de tenir un camp magnètic necessitem una càrrega en moviment, amb una velocitat v. Per tant, si el camp ha de variar en el temps, cal que la velocitat d'aquesta càrrega variï en el temps. I què és la variació de la velocitat en funció del temps? És l'acceleració!

Recordeu

L'acceleració es defineix com la variació de la velocitat a mesura que passa el temps: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Així doncs, sembla que si accelerem una càrrega ja en tenim prou per a poder generar un camp magnètic variable i, com podem veure a partir de la llei de Faraday, si tenim un camp magnètic que varia en el temps, podem induir un camp elèctric. Si la variació és tal que el camp elèctric induït també varia en el temps, per la llei d'Ampère s'induirà un camp magnètic, i així successivament. En resum, a partir de la càrrega accelerada podem tenir un camp elèctric i un camp magnètic que s'alimenten mútuament i donen lloc, així, a una ona electromagnètica.

Però, realment pot ser tan simple tot plegat? N'hi ha prou amb una càrrega accelerada per a generar una ona electromagnètica? Doncs la resposta és que sí.

La demostració matemàtica és força complicada, però es pot afirmar que una càrrega accelerada radia, és a dir, emet una ona electromagnètica.

Observació

Es pot *radiar* una ona electromagnètica o un feix de partícules. Tanmateix, en aquest mòdul parlarem només dels casos en què es radia una ona electromagnètica.

Per tant, ja hem trobat, tot i que només ho haguem fet qualitativament, de quina manera es pot originar la radiació. D'aquesta manera ja tenim un punt de partida. Tot seguit veurem, d'una manera intuïtiva, com es produeix aquest fenomen. Ho farem amb l'exemple més senzill: la radiació d'un dipol elèctric oscil·lant. Ara bé, no penseu que pel fet de ser l'exemple més senzill és el menys important, com veureu a l'apartat 2.

1.2.1. El dipol oscil·lant

Un dipol consisteix en dues càrregues q amb signe oposat separades una certa distància, l. A partir d'aquests paràmetres es defineix el moment dipolar $\vec{p}$

com el producte del valor de la càrrega pel vector que les uneix, $\vec{r}$, que serà un vector de mòdul $\vec{p}$:

$$\vec{p} = q\vec{r} \tag{3}$$

Aquest és l'exemple més simple de dipol, però en realitat quan parlem de dipol l'únic que volem dir és que hi ha una càrrega positiva i una negativa del mateix valor separades una determinada distància. Aquestes càrregues poden ser, per exemple, conjunts de càrregues o densitats volúmiques de càrrega. Així, podeu tenir una situació com la de la figura 1 on tenim dos filferros, cadascun amb una càrrega diferent, separats una certa distància. Això també seria un dipol.

Figura 1. Dipol connectat a un generador de corrent d'alta freqüència

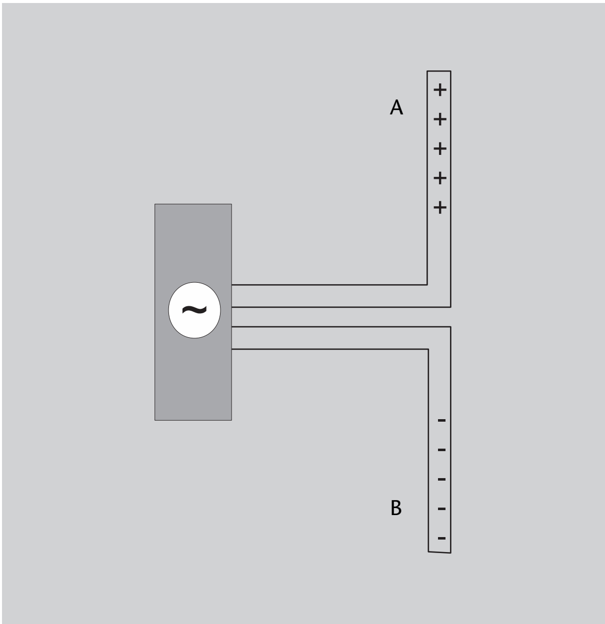


Figura 1

A la figura hi ha les càrregues positives a dalt i les negatives a baix. Tanmateix, a mesura que passa el temps, el generador d'alta freqüència fa que la situació vagi oscil·lant entre aquesta i la inversa.

El que tenim a la figura 1 és, però, una situació més elaborada. Els dos filferros estan connectats a un generador de corrent altern d'alta freqüència. Això vol dir, bàsicament, que el generador fa circular les càrregues "molt de pressa". Per tant, en un instant hi ha a dalt les positives i a baix les negatives; i en l'instant següent la situació és la inversa.

Intensitat

Recordeu que un corrent o, el que és el mateix, una intensitat, no és res més que un conjunt de càrregues en moviment i es defineix com: $I = \frac{dq}{dt}$.

La idea bàsica és que el generador crea una diferència de potencial que "treu" els electrons de la porció A i els porta a la porció B. Tot seguit, l'efecte s'inverteix i "treu" els electrons de la porció B i els porta, un altre cop, cap a la porció A, i així successivament. Seria un procés equivalent al que faria un malabarista amb unes taronges, que les va tirant constantment cap amunt i aquestes tornen sempre a la seva mà: la taronja està constantment accelerada ja que sempre hi actua l'acceleració de la gravetat. Aquest cas seria semblant, en el sentit que els electrons estan anant constantment d'un filferro a l'altre i, per tant, estan accelerats.

Podeu veure el procés a la successió d'imatges de la figura 2. A la primera imatge teniu representat el camp que crea un dipol, que va de les càrregues positives a les negatives (figura 2a). Tot seguit, en el "viatge" de les càrregues negatives del filferro *A* al *B*, hi haurà un instant d'equilibri en el qual no hi haurà camp (figura 2b). I a continuació, quan totes les càrregues negatives hagin arribat al punt inferior, tindrem que el camp elèctric s'haurà invertit (figura 2c). A causa d'aquesta oscil·lació, aquest dipol s'anomena **dipol oscil·lant**.

Procés de conducció

En realitat el procés de conducció no funciona ben bé amb els electrons "viatjant" d'un extrem a l'altre del cable, sinó que els electrons van xocant constantment els uns amb els altres i és l'efecte d'aquests xocs el que es propaga. Tanmateix, pel que fa a aquest mòdul, en tenim prou a pensar que van viatjant.

Figura 2. Procés de creació d'una ona electromagnètica

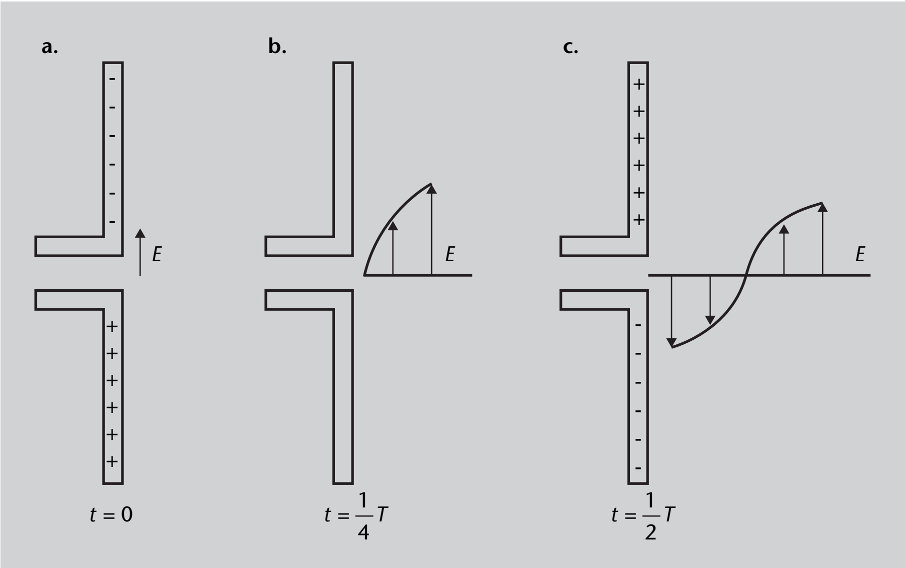


Figura 2

Dipol connectat a un generador de corrent d'alta freqüència.
a. Les càrregues negatives són a dalt i les positives, a baix, amb la qual cosa el camp elèctric $\vec{E}$ apunta cap amunt;
b. Coincideix amb l'instant en què no hi ha separació de càrregues i, per tant, el camp elèctric és 0;
c. Les càrregues negatives són a baix, la situació inversa de la presentada a la part **a**.
Al costat del dipol teniu representat el camp i com aquest es va desplaçant en el temps. També hi teniu indicat quina fracció de període, T, correspon a cada càrrega: de **a** a **c** ha passat mitja oscil·lació i, per tant, $\frac{1}{2}T$; en conseqüència a **b**, $\frac{1}{4}T$.

D'altra banda, al costat de cada figura teniu representada l'evolució del camp elèctric (el camp magnètic serà perpendicular al camp elèctric i dirigit en la direcció cap enfora i cap endins del pla del paper). Com podeu veure a la figura, el que s'hi ha representat és la meitat d'una oscil·lació completa, és a dir, durant un temps que és la meitat d'un període i és per això que ho assenyalem amb el símbol $\frac{1}{2}T$ a la figura 2c i $\frac{1}{4}T$ a la figura 2b.

Segons es veu al mòdul "Ones", un període és el temps que triga una ona a fer una oscil·lació completa.

De l'explicació prèvia ja podeu deduir que en la radiació d'un dipol oscil·lant com el que hem dibuixat, els camps elèctric i magnètic oscil·len (fixeu-vos que *E* canvia en el temps, i segons la llei de Faraday (1), crearà un camp magnètic). I fixeu-vos que els màxims i mínims d'ambdós camps coincidiran, per la qual cosa l'oscil·lació serà en fase.

El que us hem presentat en aquest subapartat és un cas que mostra gràficament la generació d'una ona electromagnètica. Tot i que la situació es podria complicar molt, aquest exemple ens serveix per a entendre el procés d'una manera intuïtiva. D'altra banda, en aquest mòdul ens centrarem només en el tipus d'ona que hem vist generar-se en la figura 2, que correspon al tipus d'ona amb què hem treballat en la resta de mòduls: les ones planes.

En les ones planes els camps són perpendiculars entre si i perpendiculars a la direcció de moviment.

Ara que ja tenim una idea de com es genera una ona electromagnètica, hi ha un altre element que hem de considerar. Fixeu-vos que en el modul "Ones" hem parlat molt del fet que les ones es propaguen a una certa velocitat. Ara bé, quan hem tractat les ones electromagnètiques en els mòduls "Lleis de Maxwell" i "Propagació d'ones electromagnètiques", ens hem limitat a dir a quina velocitat viatjaven, però, en sentit estricte, no hem tingut en compte aquest fet. Ara ja no podem obviar-ho més i, per tal d'estudiar com es produeix la radiació, hem de tenir present que triga un temps a propagar-se. Això és, precisament, el que estudiarem tot seguit.

1.2.2. Temps retardat

Fins ara hem estat parlant de què produeix els camps elèctric i magnètic. Ara bé, quan es crea un camp elèctric, aquest camp no apareix automàticament a tot l'espai, sinó que es crea en el punt on hi ha la càrrega, i llavors "viatja" a través de l'espai. És per això que en les imatges de la figura 2 teniu representats els camps corresponents, no només al dipol tal com està en aquell instant, sinó també com estava en instants previs. De fet, quan heu estudiat les ones, tant electromagnètiques com mecàniques, al llarg dels mòduls anteriors, heu vist sempre que es desplacen a una certa velocitat, que en el cas de les ones electromagnètiques en el buit és la velocitat de la llum, c.

Cal tenir en compte, per tant, quant fa que es va produir el camp electromagnètic que estem veient. És a dir, imagineu-vos que mireu una ona (que seria com dir una oscil·lació del camp electromagnètic) en un determinat instant, diguem-li t. Aquesta oscil·lació s'ha pogut produir per una situació com la que us hem mostrat al subapartat 1.2.1. La pregunta seria: quan es va produir l'oscil·lació que estem mesurant? És a dir, quan es va originar l'oscil·lació? quan va començar el "viatge" de l'ona?

La resposta a aquesta pregunta la podeu trobar fent servir la cinemàtica. L'ona es mou en línia recta i a velocitat constant, és a dir, amb un moviment rectilini i uniforme; per tant:

$$Espai = Velocitat \cdot Temps \tag{4}$$

En aquest cas, la velocitat és la velocitat a què es propaga l'ona pel buit, que és la velocitat de la llum en el buit: c. Per tant, si som a una distància R de la font, tenim que el temps que ha trigat l'ona a arribar al punt que estem mirant és:

$$Temps_{arribada} = \frac{R}{c} \tag{5}$$

Així doncs, el moment en què es va produir l'oscil·lació que estem mirant, que anomenarem t', serà el temps actual, t, menys el temps que ha trigat aquesta oscil·lació a arribar, és a dir, el temps que hem trobat en l'equació 5, $\frac{R}{c}$. Per tant:

$$t' = t - \frac{R}{c} \tag{6}$$

Fixeu-vos que hem trobat aquest temps fent servir un concepte tan fonamental com el moviment rectilini i uniforme. El que hi ha al darrere és que el camp electromagnètic que genera una càrrega no apareix instantàniament a tot l'espai, sinó que triga un temps a arribar.

Les ones electromagnètiques en el buit es desplacen a una velocitat igual a la velocitat de la llum en el buit, c. Per tant, si estem situats a una distància R del punt en què s'ha produït l'ona, el temps que ha trigat a arribar està determinat per l'equació:

$$t' = t - \frac{R}{c} \tag{7}$$

La qüestió del temps retardat

Aquest fet es tracta al mòdul "Ones", però val la pena que hi penseu ara, perquè ha estat un tema cabdal de la ciència en general i de la física en particular durant centenars d'anys. Ara esteu molt acostumats al fet que sigui així, i les seves conseqüències apareixen en una gran quantitat de pel·lícules, llibres i articles de divulgació. Alguns exemples són:

- Els senyals i missatges que enviï una nau espacial que sigui a Mart triguen un temps a arribar, que dependrà de com de lluny estigui en cada moment Mart de la Terra (com que ambdós planetes orbiten al voltant del Sol, la distància entre ells varia).

- Les ones de tota mena que ens arriben de les estrelles (llum, ones de ràdio, rajos X, etc.), han trigat anys a arribar-nos. Per exemple, en el cas de l'estrella més propera al Sol, Proxima Centauri, triguen poc més de 4 anys. És a dir, és a una distància un pèl superior a 4 anys-llum. Aquest fet dóna peu a la frase que potser heu sentit algun cop que "quan mirem les estrelles, estem mirant el passat".

Hi hauria un llarg etcètera d'exemples, però el que val la pena recordar és que aquesta idea és relativament nova i no apareix fins el 1864, quan James Clerk Maxwell va publicar el seu *A dynamical theory of the electromagnetic field* ("Una teoria dinàmica del camp electromagnètic").

Tanmateix, quin és l'efecte real que té aquest fet en les equacions de l'electromagnetisme? Ho veurem tot seguit.

1.3. Els potencials retardats

Hem vist en el subapartat anterior que les ones electromagnètiques es desplacen a una velocitat finita. Per tant, si mesurem el camp elèctric o magnètic en un instant determinat, t, i volem calcular com es va produir aquest camp, no hem de tenir en compte la càrrega o el corrent en el moment en què fem la mesura, sinó en el moment en què es va generar el camp. Per a obtenir-lo caldrà tenir en compte el temps que ha trigat l'ona electromagnètica a arribar al punt on fem la mesura, és a dir, el temps t' de l'equació 7.

Com afecta aquest temps a les equacions que hem fet servir fins ara per a calcular els camps elèctric i magnètic? Per a veure-ho, podríem fer servir les expressions que ens permeten calcular els camps elèctric o magnètic, però ho farem a partir de l'expressió dels potencials escalar i vectorial. Conceptualment és el mateix i, com veureu al llarg d'aquest mòdul, s'ajusta molt més a la manera de treballar habitual en temes de radiació, ja que així els càlculs se simplifiquen molt.

Els potencials escalar i vectorial s'estudien en el mòdul "Lleis de Maxwell".

Per a començar, us mostrarem primer que és equivalent treballar amb els potencials escalar i vectorial a treballar amb els camps elèctric i magnètic. Després obtindrem l'expressió d'aquests potencials i, finalment, veurem com canvien els potencials quan tenim en compte la velocitat finita de propagació de l'ona, és a dir, el retard de l'ona. Són el que es coneixen com a **potencials retardats**.

1.3.1. Equivalència entre treballar amb els potencials i amb els camps

Per a veure que és equivalent treballar amb els potencials escalar i vectorial a treballar amb els camps elèctric i magnètic, partirem de les equacions de Maxwell. En particular, partirem de la següent equació:

Les equacions de Maxwell s'estudien al mòdul "Lleis de Maxwell" d'aquesta assignatura.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad (8)$$

D'altra banda, el potencial vectorial, $\vec{A}$ es pot escriure en funció del camp magnètic com:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad (9)$$

Recordeu que l'operador $\vec{\nabla}$ es diu *nabla*.

Si substituïm primer el camp magnètic pel potencial vectorial a l'equació 8, tenim:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{A}}{\partial t} = 0 \qquad (10)$$

Que podem reescriure de la següent manera:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial(\vec{A})}{\partial t} = 0 \qquad (11)$$

Derivada i rotacional

Permutar el rotacional, $\vec{\nabla}\times$, i una derivada, $\frac{\partial(\vec{\nabla})}{\partial t}$, és un tema delicat des del punt de vista matemàtic. Tanmateix, des del punt de vista físic, sovint ho podem fer perquè el món real, normalment, coincideix amb el cas matemàtic en què es pot fer.

I d'aquí podem treure $\vec{\nabla} \times$ factor comú i tenim:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial(\vec{A})}{\partial t} \right) = 0 \qquad (12)$$

Haver arribat en aquest punt és important, ja que hi ha un teorema que afirma que si el rotacional de quelcom és igual a 0, és a dir:

$$\vec{\nabla} \times Quelcom = 0 \qquad (13)$$

llavors aquest *quelcom* es pot escriure com el gradient d'un potencial escalar, ϕ:

$$Quelcom = -\vec{\nabla}\phi \qquad (14)$$

De fet, podríem escriure a (14) $\vec{\nabla}\phi$, sense el signe, però el posem perquè el cas físic que tractem va amb signe menys.

Fixeu-vos que l'equació 12 compleix aquest teorema, amb un *quelcom* que és:

$$Quelcom = \vec{E} + \frac{\partial(\vec{A})}{\partial t} \qquad (15)$$

I per tant:

$$\vec{E} + \frac{\partial(\vec{A})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \qquad (16)$$

I d'aquí:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial(\vec{A})}{\partial t} \qquad (17)$$

on ϕ és el potencial escalar i $\vec{A}$ és el potencial vectorial.

Aquest és un primer resultat important.

A partir del potencial vectorial, $\vec{A}$, i fent servir la tercera llei de Maxwell (equació 8), hem trobat que podem escriure el camp elèctric en funció d'un potencial escalar, ϕ, i del potencial vectorial, $\vec{A}$:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial(\vec{A})}{\partial t} \qquad (18)$$

Ara bé, no us sobta aquest últim terme? Si recordeu el repàs d'electrostàtica que hem fet al modul "Lleis de Maxwell", ja sabíem que podem escriure el camp elèctric en funció d'un potencial escalar; aleshores, com és que ara resulta que també depèn de la derivada parcial respecte al temps del potencial vectorial? És el mateix el potencial escalar que hem trobat aquí que el que havíem trobat a electrostàtica?

Respondrem les preguntes començant pel final: la resposta a l'última pregunta és que sí, el potencial escalar, ϕ, que apareix aquí, és el mateix que havíem vist en el cas de l'electrostàtica. I aleshores, què significa la derivada parcial? La clau està en el fet que ara no estem en una situació **estàtica**. En electrostàtica, una derivada respecte al temps és igual a zero i per això no ens apareixia. Ara, en canvi, tenim càrregues en moviment i corrents i per això ens apareix aquest segon terme.

Amb tot el que hem fet en aquest subapartat, ja hem vist que podem treballar amb potencials (escalar i vectorial) i, a partir d'ells, trobar els corresponents camp elèctric i magnètic amb les equacions 17 i 9. Per tant, a partir d'ara treballarem amb el potencial escalar i el potencial vectorial. Ara bé, com els calculem?

Tot seguit veurem com són les expressions dels potencials escalar i vectorial. Per a fer-ho, partirem d'un fet, si més no intuïtiu: si els camps elèctric i magnètic satisfan l'equació d'ona (que heu vist al mòdul "Ones"), i aquests camps són equivalents als potencials, satisfaran també els potencials una equació d'ona? La resposta a aquesta pregunta és que sí i veureu que aquest *sí* ens conduirà a les expressions dels potencials escalar i vectorial retardats.

1.3.2. Equació d'ones dels potencials escalar i vectorial

Sabem que els camps elèctric i magnètic satisfan l'equació d'ona. Doncs bé, resulta que els potencials escalar i vectorial satisfan també una equació d'ona. No en farem la deducció, perquè és força complicada i el que és important és el resultat.

Al mòdul "Propagació d'ones electromagnètiques" es veu amb detall que els camps elèctric i magnètic satisfan l'equació d'ona.

Així, tenim per al potencial vectorial:

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} \tag{19}$$

I per al potencial escalar:

$$\vec{\nabla}^2\phi - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{20}$$

Si la notació amb l'operador nabla us resulta encara incòmoda, també podeu escriure les equacions amb derivades parcials. És a dir, substituir l'operador $\vec{\nabla}$ per la derivada respecte a les tres components de la posició:

Recordeu que l'operador $\vec{\nabla}$ es diu *nabla*.

$$\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial\vec{r}^2} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} \tag{21}$$

I per al potencial escalar:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \vec{r}^2} i - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \tag{22}$$

Aquestes equacions d'ona són per al buit. Si teniu un medi material només cal que substituïu ε_0 per ε i μ_0 per μ.

Fixeu-vos que, a diferència del que havíem fet en el mòdul "Propagació d'ones electromagnètiques", aquí sí que tenim en compte les fonts del camp electromagnètic, és a dir, tant la densitat de càrrega, ρ, com la densitat de corrent, $\vec{J}$. I són aquestes les equacions que volem resoldre.

Densitat de càrrega i densitat de corrent

Recordeu que la densitat de càrrega ρ és la càrrega q per unitat de volum: $\rho = \frac{dq}{dV}$ i la densitat de corrent J és la intensitat I per unitat de volum: $J = \frac{dI}{dV}$

Tanmateix, resoldre les equacions 19 i 20 no és trivial i no aporta res, per la qual cosa, un cop més, us posarem el resultat: l'expressió general dels potencials escalar i vectorial, que es diuen **potencials retardats**, a causa de la dependència que tenen del temps retardat, equació 7.

1.3.3. Expressions dels potencials retardats

Per a trobar les expressions dels potencials retardats, partirem de les equacions d'ona dels potencials vectorial, A (equació 19) i escalar, ϕ (equació 20). Aquestes equacions se satisfan quan els potencials tenen les següents expressions (no us espanteu en veure-les, només us les ensenyem per a comentar-ne algunes característiques).

1) Potencial escalar

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,',t')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} dv' \tag{23}$$

És a dir, el potencial escalar ϕ depèn tant de la posició en què el calculem, $\vec{r}$, com de l'instant t, i per això posem $\phi(\vec{r},t)$. I aquest potencial depèn de:

- ε_0: és a dir, del medi. En aquest cas seria el buit. Si fos un altre medi substituiríem ε_0 per ε.
- $\vec{r}$: és la posició del punt on volem calcular el potencial.
- $\vec{r}\,'$: és la posició de les fonts, és a dir de la densitat de càrrega ρ.
- $\rho(\vec{r}\,',t')$: correspon a la densitat volúmica de càrrega. Però fixeu-vos, i això és un element important, que la densitat volúmica depèn de $\vec{r}\,'$, és a dir, de la posició de les càrregues, i de t' (vegeu el subapartat 1.2.2.), és a dir, de l'instant en què es va produir la radiació que estem calculant, és a dir, depèn de la distribució de càrregues que va crear la radiació.
- $\vec{r} - \vec{r}\,'$: és la distància de la font al punt on calculem el potencial.

D'altra banda, la integral sobre V (de volum) fa referència al fet que cal integrar a totes les fonts. Teniu representats els diversos paràmetres en la figura 3.

Figura 3. Definició dels paràmetres del potencial retardat

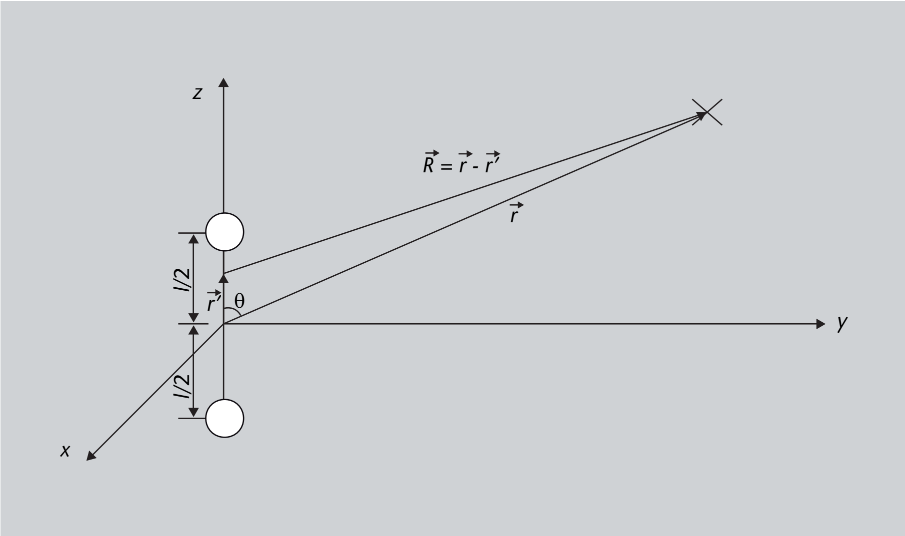


Figura 3

Teniu representats els paràmetres dels potencials retardats: el vector $\vec{r}$ és la posició del punt on volem calcular el potencial; $\vec{r}'$ és la posició de les fonts, que són les dues boles grises que teniu representades. Aquestes dues càrregues estan separades una distància l.

2) Potencial vectorial

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}dv' \tag{24}$$

Recordeu que el potencial vectorial és, efectivament, un vector. Per tant, l'equació 24 equival, en realitat, a tres equacions, una per a cada component. Els paràmetres són els mateixos que en l'equació 23. La diferència és que la font del camp magnètic no és la densitat de càrrega, sinó la densitat de corrent, $\vec{J}$. Fixeu-vos que aquesta densitat de corrent també depèn de $\vec{r}'$ i de t', és a dir, de la posició en què es troba la densitat de corrent i del temps en què es va produir l'oscil·lació que ha produït l'ona que estem mesurant.

Resumint, el potencial escalar, ϕ, i el potencial vectorial, $\vec{A}$, estan especificats per les expressions:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}',t')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}dv' \tag{25}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}dv' \tag{26}$$

on:

- ε_0 és la permitivitat elèctrica del buit (si en lloc del buit fos un altre medi, seria ε).
- $\vec{r}$ és la posició del punt on volem calcular el potencial.
- $\vec{r}'$ és la posició de les fonts, és a dir, de la densitat de càrrega ρ en el cas del potencial escalar i de la densitat de corrent $\vec{J}$ en el cas del potencial vectorial.

- $\vec{r}-\vec{r}'$ és la distància de la font al punt on calculem el potencial.
- $\rho(\vec{r}',t')$ correspon a la densitat volúmica de càrrega.
- $\vec{J}(\vec{r}',t')$ correspon a la densitat de corrent.

Ambdós potencials depenen del temps retardat, $t' = t - \frac{R}{c}$ (equació 7) i per això reben el nom de **potencials retardats**

Ara bé, si recordeu el càlcul de potencial en electrostàtica, sempre havíem de dir quin origen agafàvem per al potencial. Veurem tot seguit quin és l'origen que se sol agafar.

1.3.4. La condició de Lorentz

Si recordeu els cursos d'electrostàtica, o el repàs que se n'ha fet al mòdul "Lleis de Maxwell", sempre dèiem que el potencial escalar està definit llevat d'una constant. És a dir, que cal triar l'origen del potencial. Amb el potencial vectorial passa una cosa semblant. Una situació del mateix estil continua essent vàlida amb els potencials retardats.

Per tant, amb les expressions que hem vist en el subapartat 1.3.3. (equacions 25 i 26) no en tenim prou: cal triar aquests orígens.

Hi ha moltes maneres de fer-ho, però habitualment el que es fa és triar la que es coneix com a *condició de Lorentz*.

La **condició de Lorentz** per camps en el buit diu que la divergència del potencial vectorial ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$) és proporcional a la derivada respecte al temps del potencial escalar ($\frac{\partial \phi}{\partial t}$), canviada de signe. La constant de proporcionalitat és la inversa de la velocitat de la llum, c. Matemàticament s'expressa:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \qquad (27)$$

Fixeu-vos que aquesta expressió ens està relacionant el potencial escalar amb el potencial vectorial, amb la qual cosa, quan haguem trobat un, podrem trobar l'altre.

La definició de divergència es veu al mòdul "Lleis de Maxwell".

Un cop arribats en aquest punt, en què ja tenim els ingredients matemàtics per a obtenir la radiació d'un element, passem a veure, com a exemple, els elements radiants per excel·lència: les antenes.

1.4. Antenes

Fins aquí hem vist, des d'un punt de vista teòric, com es produeix la radiació electromagnètica i hem mostrat els ingredients matemàtics necessaris per a calcular-la. Veurem ara un exemple dels dispositius en què es produeix (o es capta) aquesta radiació.

Per a començar classificarem la radiació en dos tipus, segons quin sigui el seu origen:

- **Radiació natural**: la que es genera de forma natural, com seria la que ens arriba de les estrelles (en forma de llum, ones de ràdio microones, etc.).
- **Radiació artificial**: la que es genera mitjançant l'activitat de l'home. Exemples en serien les ones de les retransmissions de ràdio o televisió.

Tipus de radioactivitat

En la classificació de radiació no hem inclòs directament la radioactivitat, ja que ens centrem en radiació d'ones electromagnètiques i no de partícules. En el cas de la radioactivitat, n'hi ha de tres tipus: dos són de partícules i el tercer, aquest sí, és d'ones electromagnètiques, en particular de radiació γ.

D'entre els dispositius que permeten generar radiació artificialment n'hi ha uns d'especialment importants i que ens ajudaran molt a entendre aquest mòdul: les antenes. Aquests dispositius permeten tant emetre com captar la radiació. De fet, amb una passejada per qualsevol ciutat segur que veureu molts exemples d'antenes que fan tant una cosa com l'altra: antenes emissores de ràdio, de televisió, de telefonia mòbil, etc. I gairebé tots portem a sobre antenes receptores en el telèfon mòbil, o bé les tenim a casa nostra per a poder veure la televisió, o en els mòdems sense fils, en l'ordinador portàtil o en els telèfons portables.

Ja veieu, doncs, perquè les antenes són tan importants: són a tot arreu. I són un, dels dispositius per excel·lència per a "controlar" les ones electromagnètiques. Sense elles estaríem en la mateixa situació que un home primitiu que conegués el foc però que no sabés com crear-lo ni com controlar-lo.

Exemple d'antena de mitja ona. Fixeu-vos que té la forma del dipol que hem vist en la figura 1. Font: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Half_-_Wave_Dipole.jpg

En aquest mòdul no estudiarem les antenes en profunditat, però sí que convé que en tingueu algunes nocions. D'altra banda, tot i que les antenes es poden fer servir tant per a captar com per a emetre, aquí ens limitarem al cas de l'emissió. El cas de la recepció és conceptualment molt semblant (tot i que no exactament igual). D'entrada, començarem definint què és una antena.

L'Institute of Electrical and Electronics Engineering* (IEEE) defineix una antena com la part d'un sistema transmissor o receptor dissenyada específicament per a radiar o rebre ones electromagnètiques.

*** En català, Institut d'Enginyeria Elèctrica i Electrònica.**

Hi ha molts tipus d'antenes, segons quina sigui la freqüència de la radiació que es vulgui emetre o rebre. Alguns exemples són:

- **Antenes amb fil**: en són exemples els dipols, o els monopols, que serien les típiques antenes del cotxe, espires, etc.
- **Antenes d'obertura i reflectors**: en són exemples les antenes parabòliques.

A l'apartat 2 es veu un exemple de dipol.

Ara bé, les antenes no només són capaces d'emetre o captar ones electromagnètiques, sinó que també són capaces de fer-ho en una determinada direcció.

1.4.1. Direccionalitat

Si alguna vegada us trobeu en la situació d'haver de col·locar una antena de televisió, del tipus que sigui, veureu que heu de posar l'antena d'una determinada manera per tal de captar bé l'emissió. Això és degut al fet que les antenes no capten ni reben la radiació de la mateixa manera en totes les direccions, sinó que hi ha unes direccions privilegiades. De fet, l'objectiu d'una antena és radiar tota la potència en la direcció adequada. Aquesta direccionalitat s'acostuma a representar amb un diagrama de radiació.

Un diagrama de radiació és una representació gràfica de les propietats de radiació d'una antena, en totes les direccions de l'espai, a una distància fixa.

Un diagrama de radiació mostra, per tant, la potència radiada en cada direcció, és a dir, la densitat de potència radiada.

La manera de construir el diagrama és mesurar el camp elèctric a una determinada distància de l'antena, és a dir, sobre una esfera amb l'antena com a centre. Tanmateix, tot i que la radiació s'emet en tres dimensions (en l'espai), normalment el diagrama es fa en dues dimensions. És com si féssim un tall de l'esfera en un pla que sigui especialment interessant (per exemple, el de màxima radiació). En teniu un exemple en la figura 4, on teniu:

- En l'eix horitzontal, les direccions d'emissió des de –180° a +180° i en el centre, 0°, la direcció de màxima radiació.
- En l'eix vertical teniu la densitat de potència radiada en aquella direcció. Fixeu-vos en un detall: el màxim val 1. Això és perquè l'hem normalitzat a 1. És a dir, hem mirat quin és el valor màxim i hem dividit tots els valors per aquest valor.

Noteu que la figura mostra que, efectivament, les antenes són direccionals, ja que en la direcció de màxima radiació, la potència és gairebé 10 vegades més gran que en la resta. Ara bé, aquesta potser no és la manera més clara de mostrar-ho.

Hi ha un altre tipus de representació, que es coneix com a *representació polar* (vegeu la figura 5). En aquest cas es mostren els angles realment com a angles i la figura representa, efectivament, les diverses direccions de l'espai.

Figura 4. Densitat de potència radiada per una antena en un tall principal

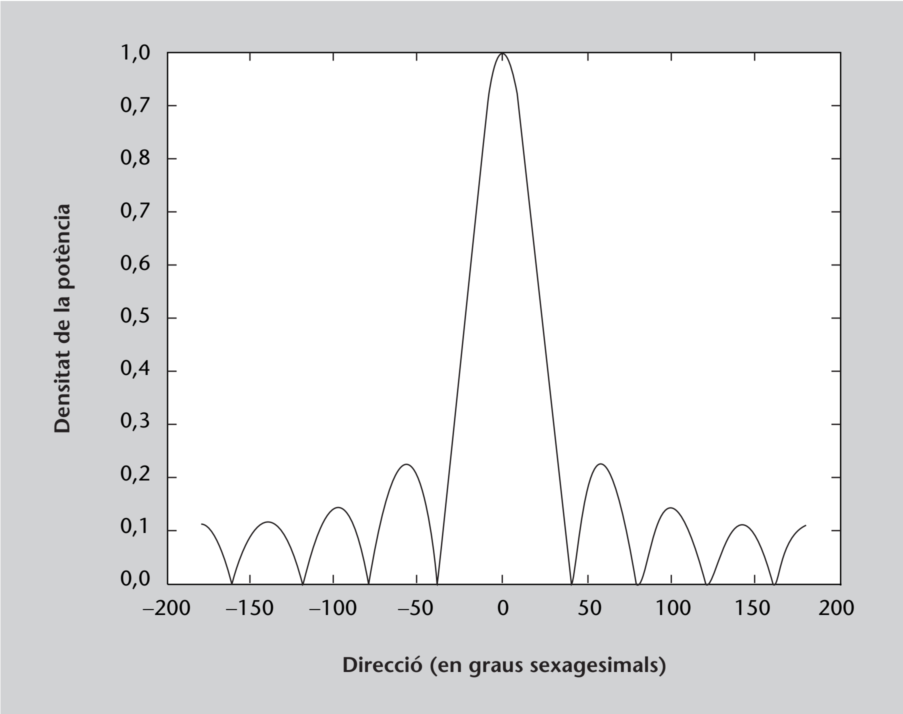


Figura 4

Representació de la densitat de potència radiada en funció de la direcció de l'espai en coordenades cartesianes per a un tall principal. Els 0° graus són la direcció de màxima radiació i la representació va des de –180° a +180°. La densitat de potència està normalitzada a 1 i podeu veure que és una potència 10 vegades superior a la dels pics següents.

Figura 5. Representació polar de la densitat de potència

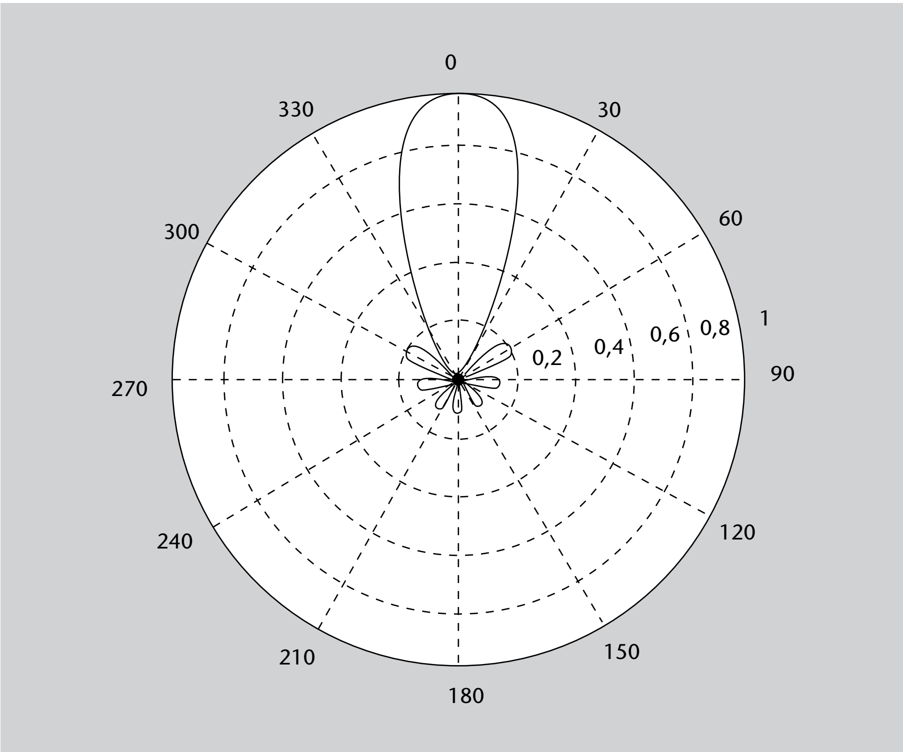


Figura 5

Representació de la densitat de potència radiada en funció de la direcció de l'espai, en coordenades polars, per a un tall principal.

Els diagrames de les figures 4 i 5 descriuen l'antena i són molt típics. Tant, que els diversos elements que hi apareixen tenen noms propis. Tot seguit us n'indiquem alguns, que teniu representats a la figura 6:

- **Lòbul principal** o **feix principal**: és la zona de màxima radiació.

- **Lòbuls secundaris**: són la resta de lòbuls.

- **Amplada de feix a –3 dB**: indica en quin punt s'ha reduït a la meitat la potència radiada. Fixeu-vos que com més ample sigui aquest valor, "menys direccional" serà l'antena.

- **Relació del lòbul principal a secundari**: és el quocient entre el valor del lòbul principal i el del lòbul secundari més gran. Aquest quocient ens dóna, per tant, una idea de quanta potència es perd en la resta de direccions. La situació ideal seria que els lòbuls secundaris no existissin, per la qual cosa, com més gran sigui aquest quocient, menys potència es perd en les altres direccions. Tingueu present que tot el que radiï fora de la direcció que volem, és potència que, per a nosaltres, s'està perdent.

- **Relació davant-darrere**: és el quocient entre el valor del lòbul principal i el valor del lòbul en la direcció diametralment oposada. Aquest valor té sentit perquè sovint trobem antenes que, per la seva simetria, és com si tinguessin dos màxims, un al davant i l'altre al darrere. Per tant, aquest valor ens està dient si, a més d'emetre en una única direcció, l'antena emet també en un únic sentit.

Figura 6. Diagrama de radiació de la figura 4 amb els paràmetres que permeten descriure'l

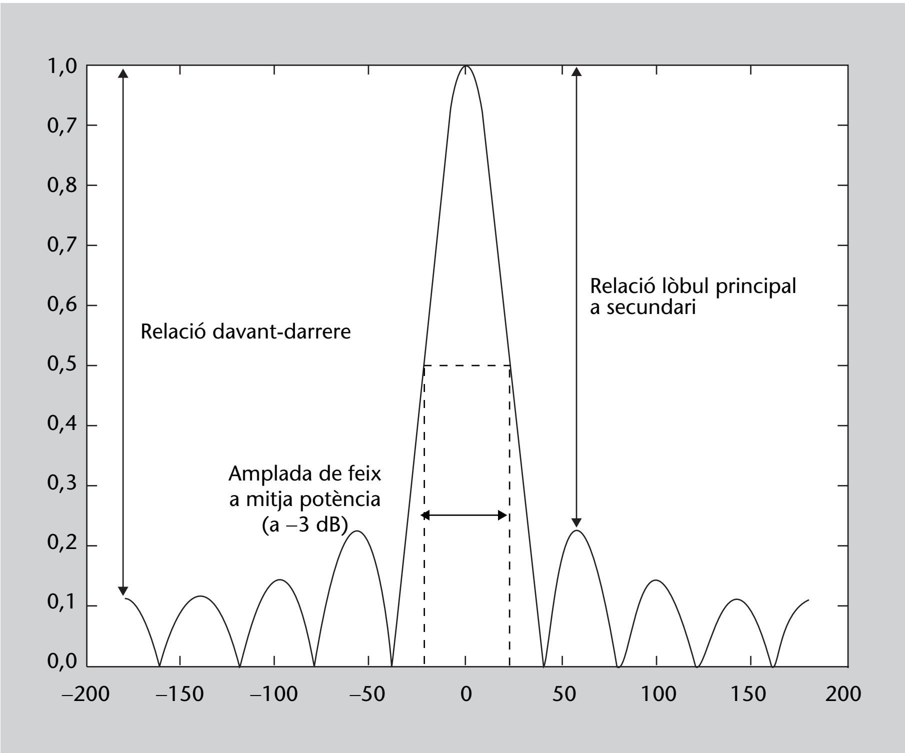


Figura 6

Representació de la figura 4, però amb els diversos paràmetres dels diagrames de radiació definits: la relació davant-darrere, l'ample del feix a –3 dB i la relació de lòbul principal a lòbul secundari.

Exemple. Relació davant-darrere

Obtindrem la relació davant-darrere dels diagrames polars de les figures 5 i 7.

En el primer cas, per a obtenir la relació davant-darrere del diagrama de la figura 5, tenim el problema que costa molt de veure la proporció que va enrere. Tanmateix, podem mirar el diagrama equivalent en cartesianes, la figura 4. Per a fer-ho cal mirar l'alçada del diagrama a 0° (1, perquè està normalitzada) i la potència del diagrama en la direcció 180°, que és 0,1. Si feu el quocient obteniu que:

$$\textit{Relació davant-darrere}_{Figura\ 5} = \frac{1}{0{,}1} = 10 \tag{28}$$

Per tant, aquesta antena es pot considerar direccional.

En el cas de la figura 7 podem veure la relació directament en el diagrama polar. Fixeu-vos que el lòbul en la direcció de 0° és el doble de gran que el que hi ha a 180°.

$$\textit{Relació davant-darrere}_{Figura\ 7} = 2 \tag{29}$$

Figura 7. Exemples de radiació

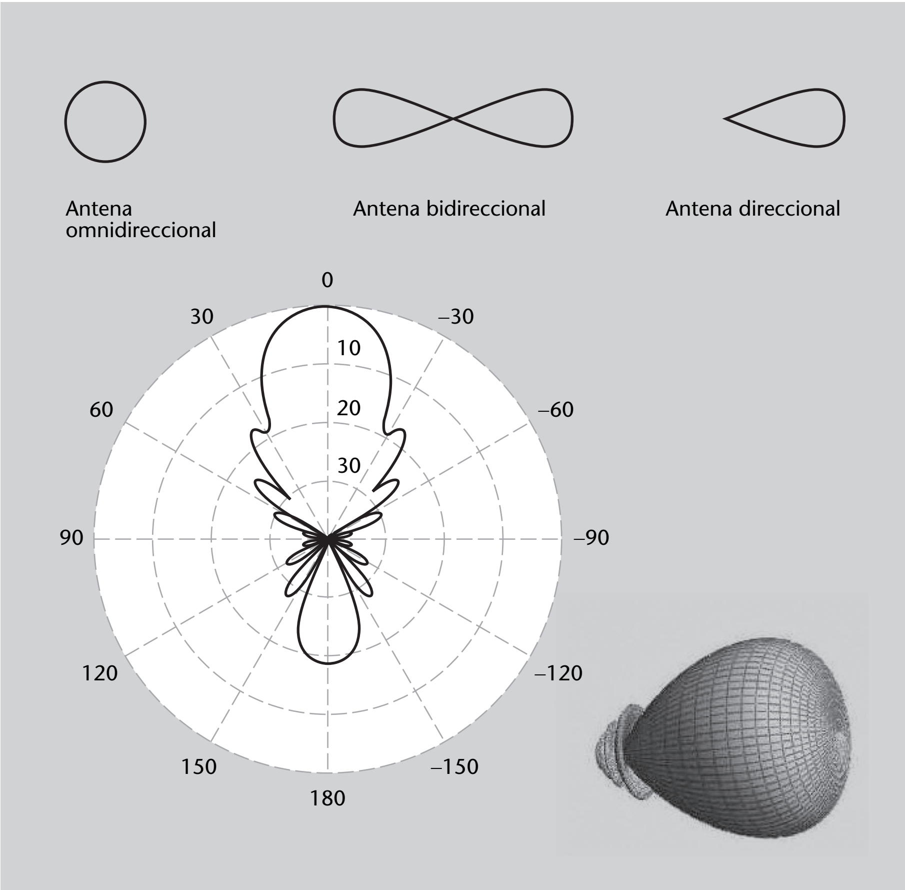


Figura 7

Exemples de radiació per a diversos tipus d'antenes: omnidireccional, és a dir, que radia igual en totes direccions; bidireccional, és a dir, que radia en dues direccions diametralment oposades; i direccional, és a dir, que només radia en una direcció. Teniu també un diagrama de radiació d'una antena principalment direccional, i una representació en tres dimensions (recordeu que els diagrames mostren només un pla).

Observeu que en l'argot d'antenes es parla de direcció per a referir-se al sentit.

Fins ara hem estat dient que les antenes radien en una direcció determinada i que, per tant, són direccionals. Però ho són realment? En la figura 7 podeu veure alguns exemples de radiació per a diversos tipus d'antennes: omnidireccional, és a dir, que radia igual en totes direccions; bidireccional, és a dir, que radia en dues direccions diametralment oposades; i direccional, és a dir, que només radia en una direcció. De fet, aquests tres tipus d'antenes són casos ideals, mentre que les antenes reals tenen una mica de cada cas: es considerarà d'un tipus o un altre segons el caràcter que predomini. En la figura podeu veure també un diagrama de radiació d'una antena principalment di-

El decibel es tracta en el mòdul "Ones" i en el mòdul "Acústica"; ens indica un guany (o una pèrdua respecte a una diferència). En el cas de les antenes, –3 dB indica el punt en què la potència s'ha reduït a la meitat.

reccional, i una representació en tres dimensions (recordeu que els diagrames mostren només un pla).

Ara bé, com podem saber si una antena és més direccional que una altra? Per a fer-ho es defineix la directivitat.

La **directivitat** d'una antena és el quocient entre el que radia una antena en una direcció determinada i el que hagués radiat la mateixa antena en aquella direcció si fos isòtropa (és a dir, si fos una antena que radiés el mateix en totes les direccions).

Amb tota aquesta informació ja us podeu fer una idea bàsica de com són les antenes i com s'hi treballa. En l'apartat següent, el de radiació d'un dipol, farem el càlcul de la radiació d'una antena per al que és, potser, el cas més senzill, el del dipol elèctric oscil·lant.

1.5. Què hem après?

Fins ara hem vist, des d'un punt de vista més aviat qualitatiu, i fent servir només la informació que ja teníem, com es poden generar les ones electromagnètiques. Bàsicament hem vist:

- que una càrrega accelerada radia (subapartat 1.2.1.);
- que es poden tenir càrregues accelerades simplement amb un dipol oscil·lant (subapartat 1.2.1.);
- que les ones es desplacen en el buit a una velocitat c i, per tant, triguen a arribar a un punt situat a una distància R del seu origen un temps $t' = t - \frac{R}{c}$ (equació 7);
- que els potencials que depenen del temps t' són els potencials retardats.
- les principals característiques dels dispositius que es fan servir per a emetre i captar ones electromagnètiques: les antenes (subapartat 1.4.).

Ara que hem fet un estudi qualitatiu de com es genera la radiació veurem com podem fer els càlculs per a trobar quantitativament aquesta radiació. Ara bé, què ens interessa calcular realment? Recordeu que la radiació és la propagació d'energia i, de fet, el que voldrem saber és quina és l'energia radiada i en quina direcció es radia aquesta energia. D'aquesta manera serem capaços de tenir control sobre quant es radia i cap a on.

En l'apartat següent farem aquest càlcul en el cas més senzill: el dipol oscil·lant. Tanmateix, veureu que és força complex i haurem de fer algunes aproximacions. Així i tot, ens servirà per a veure el procés del càlcul de la radiació.

2. Radiació emesa per un dipol elèctric oscil·lant

Fins aquí hem vist, qualitativament, com es produeix la radiació electromagnètica. Ara ho farem matemàticament amb un objectiu: saber quanta energia es radia, i quina és la potència radiada i en quina direcció es radia.

Farem el càlcul per al cas del dipol elèctric oscil·lant, que ja hem vist en el subapartat 1.2.1. Aquest element es pot considerar, de fet, un dels models més senzills d'antena (vegeu el subapartat 1.4.). Tot i així, el simplificarem i ja us avancem que no farem tots els passos i que haurem de fer algunes aproximacions: els càlculs de radiació són molt llargs i complexos i molts queden més enllà dels objectius d'aquesta assignatura. Tanmateix, podreu veure el procés que cal seguir i els resultats que obtindrem que, tot i no ser exactes, sí que seran una bona aproximació.

Un cop definit el dipol que estudiarem, els passos que cal seguir per a calcular-ne la radiació són els següents:

1) Calcular el potencial vectorial.

2) Calcular els camps elèctric i magnètic, mitjançant el potencial vectorial calculat en el pas anterior.

3) Calcular el vector de Poynting, mitjançant els camps elèctric i magnètic calculats en el pas anterior.

4) Calcular la potència radiada, mitjançant el vector de Poynting calculat en el pas anterior.

Ja veieu, doncs, que necessitem cada pas per a fer el següent. D'altra banda, aquí podeu veure també perquè necessitàvem introduir el potencial vectorial, ja que és en el càlcul de problemes de radiació on adquireix la màxima rellevància.

Acabarem l'apartat amb una breu discussió sobre la validesa dels resultats obtinguts.

2.1. Definició del dipol elèctric oscil·lant

El dipol elèctric que farem servir és el que ja heu vist en la figura 3, i que teniu en la figura 8.

Figura 8. Dipol elèctric oscil·lant

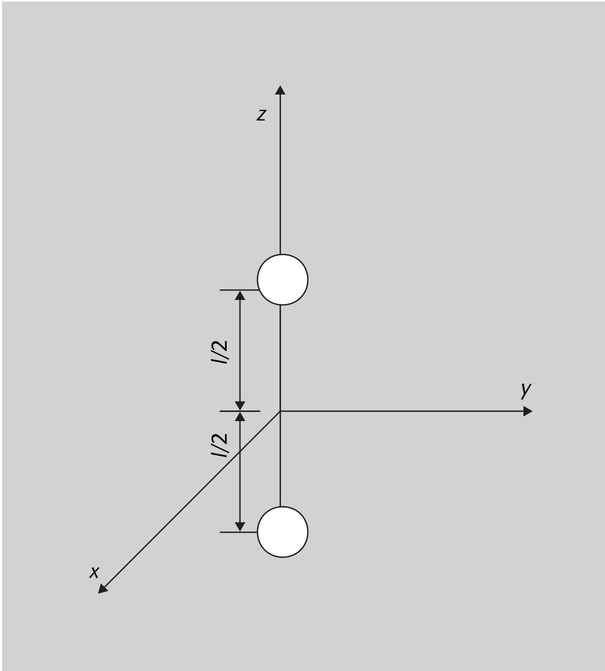


Figura 8

Les càrregues q estan unides per un fil de longitud l centrat a l'origen. El moment dipolar del sistema és $\vec{p} = q\vec{r} = ql\vec{k}$ i pel fil circula una intensitat $I = \frac{dq}{dt}$.

En el dipol hi ha dues càrregues, una positiva i l'altra negativa, separades per un fil d'una longitud l. El seu moment dipolar (recordeu l'equació 3 del subapartat 1.2.1.) és, per tant:

$$\vec{p} = q\vec{r} = ql\vec{k} \tag{30}$$

On hem expressat el vector $\vec{r}$ en funció del vector unitari en la direcció z: $\vec{r} = l\vec{k}$.

Fins aquí tot seria igual que en el cas de les situacions electrostàtiques. Tanmateix, per tal que aquest dipol radiï, cal tenir en compte els elements que ja hem vist en el subapartat 1.2., bàsicament el fet que la càrrega ha de variar en el temps, és a dir, cal que:

$$\frac{dq}{dt} \neq 0 \tag{31}$$

I, per tant:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \neq 0 \tag{32}$$

Ara bé, si recordeu la definició d'intensitat, l'equació 31 és, precisament, la intensitat:

$$I = \frac{dq}{dt} \tag{33}$$

Així doncs, hem arribat al mateix que havíem trobat en l'exemple qualitatiu del subapartat 1.2.

En realitat aquesta seria la mateixa situació que hem vist en el subapartat 1.2.1., però simplificada, ideal. Diem *ideal* perquè si hi ha una variació de càrrega tenim una intensitat, però perquè això passi necessitem un generador, com teníem en la figura 1. En aquest cas, però, el de la figura 8, ens quedem només amb el fet que en variar la càrrega hi ha una intensitat. De fet, en tenir en compte que hi ha una intensitat, estem considerant, implícitament, el generador.

Ja tenim, per tant, la situació plantejada. Ara començarem a fer els càlculs per a arribar a obtenir la potència radiada.

2.2. Càlcul de la radiació

No oblideu que el nostre objectiu és obtenir la potència radiada pel dipol. Per a veure com podem arribar-hi, fem el raonament cap enrere:

1) La potència, P, es defineix com la variació d'energia, E, en el temps:

$$P = \frac{dE}{dt} \tag{34}$$

2) L'energia total radiada, E, es calcula fent la integral del vector de Poynting, $\vec{S}$, en totes les direccions de l'espai. El vector de Poynting és l'energia radiada en una direcció i, per tant, sobre una àrea infinitament petita da. Així doncs, hem de fer una suma d'infinites parts, infinitament petites, i això és una integral: cal fer una integral sobre totes les direccions fins a cobrir una àrea A que envolti completament el dipol:

$$E = \int_A \vec{S} \cdot d\vec{a} \tag{35}$$

3) El vector de Poynting, $\vec{S}$, dóna l'energia de l'ona electromagnètica en la direcció de propagació, i es calcula a partir del camp elèctric i magnètic amb l'expressió que heu vist en el mòdul "Ones":

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \tag{36}$$

4) Els camps $\vec{E}$ i $\vec{B}$ es poden calcular a partir de les expressions del potencial escalar, ϕ, i del potencial vectorial, $\vec{A}$ (equacions 9 i 18), que us hem mostrat en el subapartat 1.3.1.

5) Gràcies a la condició de Lorentz que hem vist en el subapartat 1.3.4. (equació 27) podem calcular el potencial escalar, ϕ, a partir del potencial vectorial, $\vec{A}$.

6) I, finalment, podem calcular el potencial vectorial amb l'expressió 26 que hem vist en el subapartat 1.3.3.

És a dir, podem partir del càlcul del potencial vectorial i, a partir d'aquest, desfer el camí fins a la potència radiada.

Potser el que més crida l'atenció és el fet que partim del potencial vectorial. Per què no partim, per exemple, del camp elèctric com fèiem en electrostàtica? En electrostàtica es pot calcular el camp elèctric que produeix un dipol (dues càrregues separades una distància *l*) o, fins i tot, distribucions més complicades. Aleshores, per què no ho fem d'aquesta manera?

Activitat

Sabríeu respondre a la pregunta anterior? Per què no ho fem com en electrostàtica?

Penseu-hi un moment abans de seguir llegint i, un cop tingueu alguna resposta, continueu. Potser ja haureu vist el motiu, que ens ha aparegut abans, en el subapartat 1.3.1. en un raonament similar: no estem en electrostàtica i, per tant, el càlcul no seria vàlid ara; però a més, si calculéssim el camp magnètic a partir del camp elèctric en electrostàtica, ens donaria 0 perquè no depèn del temps. Per a veure-ho, recordeu que tant en la llei de Faraday (equació 1) com en la llei d'Ampère (equació 2), per a generar un camp a partir de l'altre, cal que el primer varïi en el temps.

Per tant, ens ho hem de pensar dues vegades abans de fer res. El que hauríem de fer és calcular els camps creats per un dipol que depèn del temps, i tenir-ne en compte la dependència temporal. Ara bé, ni tan sols això no és immediat. Si recordeu el subapartat 1.3., hem vist que quan mesurem el camp electromagnètic en un determinat punt i en un instant determinat, en realitat aquell camp s'ha produït en un altre lloc i en un instant de temps anterior al que estem mesurant.

Per tots aquests motius, quan treballem amb radiació i volem fer càlculs de radiació, en comptes de calcular directament els camps elèctric i magnètic, calculem els potencials escalar i vectorial. I per a aquestes magnituds sí que tenim unes expressions que tenen en compte que l'ona electromagnètica ha trigat un cert temps a arribar al punt en què fem la mesura: són les expressions dels potencials retardats (vegeu el subapartat 1.3.3.). I com ja havíem vist, si calculem els potencials retardats, ja podem obtenir les expressions dels camps per mitjà de les equacions 9 i 18. Per tant, és equivalent treballar amb els potencials a treballar amb els camps, però molt més senzill (penseu que el potencial escalar no és ni tan sols un vector).

D'altra banda, quan hem mostrat les expressions dels potencials, hem hagut d'imposar una condició, la condició de Lorentz, l'equació 27 del subapartat 1.3.4., que reproduïm aquí per comoditat:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{37}$$

Aquesta condició relaciona els potencials escalar i vectorial, per la qual cosa no cal que els calculem tots dos, sinó que n'hi ha prou de calcular-ne un i després, a partir d'aquest, calcular l'altre mitjançant aquesta condició.

Resumint, per a calcular la potència radiada per un dipol, començarem calculant el potencial vectorial i, a partir d'aquest, els camps elèctric i magnètic. Un cop els tinguem, calcularem el vector de Poynting. Amb ell calcularem l'energia radiada i, un cop la tinguem, podrem calcular la potència radiada.

Disposem-nos, doncs, a fer tots aquests passos. Tanmateix, com ja us hem avançat al principi, l'objectiu no és que aprengueu els procediments matemàtics intermedis, que poden arribar a ser força complicats i, en la majoria de casos, són molt específics i no aporten gaire. L'objectiu és, per contra, que veieu els resultats parcials i quines equacions es fan servir per a arribar-hi, perquè conegueu el camí. L'altre element important que veureu en el procés és una sèrie d'aproximacions que sí que hauríeu d'entendre i aprendre a fer.

Lectures recomanades

Si voleu veure els càlculs fets en detall, podeu consultar les obres de Reitz (2001) o de Wangsness (1983) que teniu a la bibliografia.

Veureu que, tot i les aproximacions, el procediment de càlcul és llarg i fins al final no s'obté cap resultat. Per tant, haureu de tenir paciència i no desanimar-vos en la lectura ni espantar-vos en veure les fórmules. Cada vegada que n'obtinguem una, us indicarem en què us heu de fixar.

2.2.1. Càlcul del potencial vectorial

Doncs bé, ja estem a punt de començar i, com hem dit, partirem del potencial vectorial, però més exactament, del potencial vectorial retardat (equació 26) i que us reproduïm aquí:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} dv' \tag{38}$$

Els passos que seguirem seran:

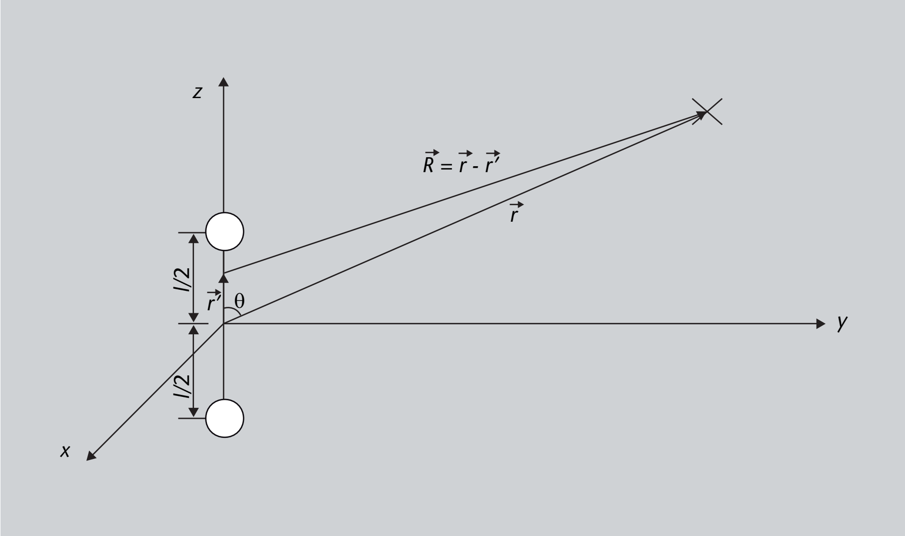
1) Trobar les variables necessàries per a fer el càlcul, i que heu pogut veure en el subapartat 1.3.3. en la figura 3 (que us reproduïm a la figura 9).

2) Fer l'aproximació que som molt lluny del dipol: $l \ll r$.

3) Fer l'aproximació que la longitud d'ona que emet el dipol és molt més gran que les dimensions del dipol: $l \ll \lambda$.

4) Obtenir l'expressió dels potencials.

Figura 9. Dipol elèctric, amb els vectors posició



Obtenció de les variables per a calcular el potencial vectorial

En el cas que ens ocupa tenim un fil que uneix les dues càrregues i pel qual circularà una intensitat. En l'equació 33 ja hem vist que la variació en el temps de la càrrega és la intensitat. En aquest cas tenim una intensitat que va en la direcció z, en lloc d'una densitat volúmica; per tant, podem fer el canvi:

$$\vec{J}dv' = Idz'\vec{k} \tag{39}$$

I queda:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{I(\vec{r}',t')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}dz'\vec{k} \tag{40}$$

Per a començar hem de trobar els diversos paràmetres, que ja havíeu vist en la figura 3, i que us reproduïm en la figura 9 per comoditat:

- $\vec{r}$: la posició del punt on volem calcular el camp.

- $\vec{r}'$: la posició de la font. En el cas del potencial vectorial la font és la intensitat. Com ja hem vist en l'equació 39, va en la direcció $\vec{k}$ i per tant:

$$\vec{r}' = z'\vec{k} \tag{41}$$

  La z' ve del fet que estem buscant els paràmetres per a l'element a integrar, és a dir, un dz' qualsevol que estigui sobre la font. Com que està en l'eix z escrivim z; i com que depèn de la font posem la prima: z'. Aquesta z' és la variable d'integració i estarà entre $-\frac{l}{2}$ i $+\frac{l}{2}$.

- I: la intensitat.

Recordeu

Normalment fem servir les variables primes per referir-nos a les fonts.

Ara ja podem calcular el terme $\|\vec{r}-\vec{r}'\|$ que hi ha al denominador de l'equació 40. Fem primer la diferència de vectors:

$$\vec{r}-\vec{r}' = \vec{r}-z'\vec{k} \tag{42}$$

I ara hem de fer el mòdul. Normalment el que faríeu és escriure el vector $\vec{r}$ amb les seves components i fer la diferència. Aleshores, per a fer el mòdul elevaríem cada component al quadrat, les sumaríem i faríem l'arrel. Ara bé, recordeu d'on ve aquesta manera de fer? Doncs de fer l'arrel quadrada del producte escalar del vector per ell mateix:

Mòdul d'un vector

Recordeu que el mòdul d'un vector $\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$ és l'arrel quadrada de la suma dels quadrats de les components:
$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$

$$\left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} \tag{43}$$

Activitat

Demostreu que és el mateix calcular el mòdul elevant cada component al quadrat, que fer-ho fent l'arrel quadrada de multiplicar el vector per ell mateix (equació 43).

És així com farem ara el mòdul de l'equació 42 ja que fent-ho així podrem simplificar els càlculs. Per tant:

$$\|\vec{r}-\vec{r}'\| = \sqrt{(\vec{r}-z'\vec{k})(\vec{r}-z'\vec{k})} = \sqrt{r^2 - 2z'\vec{k}\vec{r}' + z'^2} \tag{44}$$

Recordeu que:
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Si recordeu que el producte escalar és el producte de mòduls pel cosinus de l'angle que formen, i teniu en compte que $\vec{k}$ és un vector unitari (de mòdul 1) tenim que:

Producte escalar

Recordeu que el producte escalar de $\vec{v}$ i $\vec{w}$ és:
$\vec{v}\cdot\vec{w} = vw\cos(\alpha)$ on v és el mòdul del vector $\vec{v}$, w el mòdul del vector $\vec{w}$ i α és l'angle que formen entre ells.

$$\vec{k}\vec{r} = r\cos\theta \tag{45}$$

on θ és l'angle que forma el vector $\vec{r}$ amb la vertical, és a dir, amb el vector $\vec{k}$, com podeu veure en la figura 9.

Així, doncs, si substituïm l'equació 45 en l'equació 44, ens queda:

$$\|\vec{r}-\vec{r}'\| = \sqrt{r^2 - 2z'r\cos\theta + z'^2} \tag{46}$$

I ara farem ja una primera aproximació, que veureu que té tot el sentit si penseu en què és el que estem calculant: direm que som molt lluny del dipol, en relació a les seves dimensions.

Aproximació 1: $z' \ll r$. Zona de radiació

Volem saber quina és la potència que radia el dipol, però no oblideu que un cop s'ha produït la radiació, aquesta es va propagant i existirà encara que, immediatament després de produir-se, el dipol desaparegués. És a dir, a efectes pràctics és com si ens miréssim les ones des de molt lluny. Per tant, el que volem és veure la potència radiada pel dipol, però quan n'estem molt lluny, el que es coneix com la **zona de radiació**.

En l'expressió 42 la variable relacionada amb l és z' (que recordeu que va de $-\frac{l}{2}$ a $+\frac{l}{2}$), i la variable que indica la distància a què estem mirant la radiació és $\vec{r}$, que tindrà mòdul r. Per tant, estem dient que volem mirar la radiació quan $r >> z'$.

La **zona de radiació** correspon al cas en què estem molt lluny del dipol. És a dir, quan la distància a la qual estem calculant la potència radiada, r, és molt gran respecte a la posició de l'element radiant: $r \gg z'$.

Aquesta situació ens pot simplificar força l'expressió 42. La manera de fer-ho és un procés que val la pena seguir amb cura i entendre bé, perquè es fa servir a bastament en molts càlculs de física i enginyeria. De fet, la majoria de vegades no sabem resoldre exactament les equacions, però de vegades podem fer aproximacions que, si bé no ens permetran obtenir un resultat exacte, sí que ens donaran una idea de què està passant. En alguns casos, fins i tot, els resultats que obtinguem seran perfectament vàlids en certes situacions reals.

De fet, però, aquest cas té força sentit. Pensem-ho un moment. Se us acut algun dipol que conegueu? Fixeu-vos en el dipol que hem dibuixat en la figura 8: és com si fos una línia vertical que radia, per tant, podríem dir que és una antena vertical. Penseu en les antenes de comunicació que veiem repartides pel territori: fins i tot les més grans no tenen més que unes desenes de metres d'altura (la z') i donen servei a molts quilòmetres a la rodona (la r). És a dir, estem comparant metres (z') amb quilòmetres (r), per la qual cosa tenim que, efectivament, $z' \ll r$.

Fem, finalment, l'aproximació. Per a poder aplicar-la, l'objectiu és arribar a tenir l'expressió escrita de la següent manera:

$$\sqrt{1 - \textit{cosa molt petita}} \tag{47}$$

I per què? Doncs perquè el teorema de Taylor ens diu que si tenim això, podem fer la següent aproximació:

$$\sqrt{1 - (\textit{cosa molt petita})} \approx 1 - \frac{1}{2}(\textit{cosa molt petita}) \tag{48}$$

Teorema de Taylor

El teorema de Taylor permet escriure una expressió matemàtica com un polinomi d'infinits termes. Si s'agafen només els primers termes, estem aproximant l'expressió matemàtica.

Com que escriure *cosa molt petita* és molt molest, li direm x.

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x \tag{49}$$

I què vol dir que x sigui molt petita? Recordeu que sempre que dieu gran o petit és en relació amb alguna altra cosa. En aquest cas, atès que tenim $1-x$, el que estem dient és que x ha de ser molt més petita que 1: $x \ll 1$.

Així doncs, hem d'aconseguir escriure l'equació 42 en una forma semblant a l'equació 49. No oblideu en cap moment quina és l'aproximació que estem fent: $z' \ll r$, és a dir, la suposició que som molt lluny del dipol. Vegem quins passos s'han de seguir per a fer-ho, que, com us dèiem abans, són prou genèrics i convé conèixer-los:

1) Traiem com a factor comú el terme en què està sola la variable que té el valor més gran, en aquest cas r, de l'expressió que volem simplificar (equació 46). És a dir, traiem factor comú r^2:

$$\sqrt{r^2 - 2z'r\cos\theta + z'^2} = \sqrt{r^2\left(1 - \frac{2z'r\cos\theta}{r^2} + \frac{z'^2}{r^2}\right)} \tag{50}$$

que simplificant una mica queda:

$$r\sqrt{1 - \frac{2z'\cos\theta}{r} + \left(\frac{z'}{r}\right)^2} \tag{51}$$

Recordeu que
$\sqrt{x^2(\ldots)} = x\sqrt{(\ldots)}$

2) Si teniu diversos termes amb el quocient $\frac{z'}{r}$, quedeu-vos només amb el que tingui un exponent menor. Per què? Fixeu-vos: si $z' \ll r$, llavors $\frac{z'}{r}$ serà molt menor que 1, però si ho elevem al quadrat $\frac{z'^2}{r^2}$ encara serà més petit. Ho podeu veure si agafeu un número petit, com ara 0,01 i l'eleveu al quadrat: serà 0,0001, que és molt més petit. Per tant, podem menysprear aquesta última part en comparació amb l'altra:

$$r\sqrt{1 - \frac{2z'\cos\theta}{r} + \left(\frac{z'}{r}\right)^2} \simeq r\sqrt{1 - \frac{2z'\cos\theta}{r}} \tag{52}$$

Fem servir el símbol $\simeq$ per a indicar que dos membres són semblants, però no exactament iguals. Una manera de llegir-ho seria "és aproximadament igual a".

3) Ara fixeu-vos que, atès que $z' \ll r$, podem dir que el terme $\frac{2z'\cos\theta}{r}$ de l'equació 52 és molt més petit que 1, per la qual cosa ja hem trobat la nostra x de l'equació 49. Si fem:

$$x = \frac{2z'\cos\theta}{r} \tag{53}$$

Tenim que l'equació 52 queda de la següent manera:

$$r\sqrt{1-x} \tag{54}$$

Que ja té la forma de l'equació 49. Així, doncs, fent el desenvolupament en sèrie de Taylor (equació 49), tenim:

$$r\sqrt{1-x} \simeq r\left(1-\frac{1}{2}x\right) \tag{55}$$

4) Finalment, tornem a substituir la x pel seu valor, que està definit en l'expressió 53:

$$r\left(1-\frac{1}{2}x\right) = r\left(1-\frac{1}{2}\frac{2z'\cos\theta}{r}\right) = r\left(1-\frac{z'\cos\theta}{r}\right) \tag{56}$$

Si ara introduïm la r dins dels parèntesis, queda:

$$r - z'\cos\theta \tag{57}$$

Per tant, hem trobat que en el cas que siguem molt lluny, $z' \ll r$, podem aproximar l'expressió 42 per la 57, és a dir:

$$\|\vec{r}-\vec{r}'\| = \sqrt{r^2 - 2z'r\cos\theta + z'^2} \underbrace{\simeq}_{z'\ll r} r - z'\cos\theta \tag{58}$$

Fixeu-vos, per tant, com s'han simplificat les matemàtiques si ens situem "molt lluny", que ja hem vist que és una situació bastant habitual.

Arribats en aquest punt val la pena recordar d'on veníem: tot just començàvem a calcular el potencial vectorial (l'equació 40) i només hem obtingut el terme $\|\vec{r}-\vec{r}'\|$!

Ara ens ocuparem d'una altra part, la de la intensitat: $I(\vec{r}',t')$, per a la qual farem una nova aproximació.

Aproximació 2: $l \ll \lambda$

Fixem-nos ara en el terme $I(\vec{r}',t')$ de l'equació 40:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{I(\vec{r}',t')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}dz' \tag{59}$$

Recordeu també què és t' (equació 6, en el subapartat 1.2.2.):

$$t' = t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{c} \tag{60}$$

Ja hem vist que $\|\vec{r} - \vec{r}'\|$ es pot aproximar per $r - z' \cos\theta$ (equació 58). Substituïm aquest valor en t' (equació 60):

$$t' = t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{c} = t - \frac{r - z' \cos\theta}{c} = t - \frac{r}{c} - \frac{z' \cos\theta}{c} \tag{61}$$

I ara farem una nova aproximació, que ens ajudarà a simplificar una mica més aquesta expressió. Si $\frac{z' \cos\theta}{c}$ fos molt menor que t, podríem eliminar aquest terme de l'expressió 61. Què hauria de passar perquè això fos cert? Vegem-ho!

Mirem el valor més alt que pot tenir. Per a fer-ho, fixeu-vos que z' valdrà, com a màxim $\frac{l}{2}$, i que $\cos\theta$ valdrà, com a màxim, 1. Per tant:

$$z' \cos\theta \leq \frac{l}{2} \tag{62}$$

Així doncs, per a simplificar l'expressió 61 volem que:

$$\frac{1}{2}\frac{l}{c} \ll t \tag{63}$$

Per a veure quan es dóna aquest cas, mirem què succeeix quan ha passat un període de l'ona, és a dir, quan $t = T$:

$$\frac{l}{2c} \ll T \tag{64}$$

I d'aquí:

$$\frac{l}{2} \ll cT \tag{65}$$

I recordeu del mòdul "Ones" que cT és la longitud d'ona, per tant: $cT = \lambda$, és a dir:

$$\frac{l}{2} \ll \lambda \tag{66}$$

Així doncs, si ens quedem en el cas en què la longitud d'ona és molt més gran que la longitud del dipol, podrem eliminar el terme $\frac{z' \cos\theta}{c}$ de l'equació 61, que quedarà reduïda a:

$$t' = t - \frac{r}{c} \tag{67}$$

Recapitulant: hem fet dues aproximacions:

- Que som molt lluny del dipol ($z' \ll r$).
- Que la longitud d'ona de l'ona que emet el dipol és molt gran comparada amb les dimensions del dipol ($\frac{l}{2} \ll \lambda$).

Vegem tot seguit un breu exemple que ens permeti reflexionar sobre aquestes aproximacions.

Exemple. Aplicació de les aproximacions

Som a 1 km d'una antena en forma de dipol oscil·lant d'1 m de longitud que emet en la banda de l'UHF a 450 MHz. Volem veure si podem fer:

1) L'aproximació de ser molt lluny del dipol.

2) L'aproximació de longitud d'ona molt gran comparada amb les dimensions del dipol.

Solució

Considerarem que l'ona es desplaça pel buit i que la velocitat de l'ona en el buit és $c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ m/s.

1) Per a veure si podem fer l'aproximació de ser molt lluny del dipol, hem de veure si la distància a què ens trobem del dipol és molt més gran que les dimensions del dipol. Atès que som a $r = 1$ km = 1.000 m, i que el dipol fa $l = 1$ m de longitud, tenim que, en fer el quocient:

$$\frac{r}{l} = \frac{1.000}{1} = 10^3 \tag{68}$$

És a dir, la distància a què ens trobem és 3 ordres de magnitud més gran que la longitud del dipol. Per tant, podem fer l'aproximació de ser molt lluny.

Ordre de magnitud

Recordeu que quan escrivim un número en potències de 10, l'exponent indica l'ordre de magnitud. Així, l'ordre de magnitud de 10^3 és 3.

2) Per a veure si podem fer l'aproximació de longitud d'ona molt gran comparada amb les dimensions del dipol, hem de comparar la longitud d'ona, λ, amb les dimensions del dipol, $l = 1$ m.

Atès que ens donen la freqüència $f = 450$ MHz, hem de començar calculant la longitud d'ona. Per a fer-ho recordeu del mòdul "Ones" que les dues magnituds estan relacionades mitjançant l'equació:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2{,}9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{450 \cdot 10^6 \text{ Hz}} = 0{,}67 \text{ m} \tag{69}$$

Recordeu que 1 MHz = 10^6 Hz i que 1 Hz = 1 s^{-1}.

Si comparem aquest resultat amb les dimensions de l'antena, veiem que la longitud d'ona (0,67 m) no és ni tan sols més gran que les dimensions del dipol (1 m). Per tant, no podríem fer aquesta aproximació.

Amb tot això ja estem en condicions de trobar el potencial vectorial.

Expressió del potencial vectorial

Ara ja podríem calcular el potencial vectorial amb les dues aproximacions que hem vist: ser molt lluny del dipol, $z' \ll r$, i la longitud d'ona molt gran en relació amb les dimensions del dipol, $l \ll \lambda$. Atès que els càlculs són llargs i no aporten gaire, no els farem, sinó que donarem directament el resultat:

$$A_z(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} lI\left(t - \frac{r}{c}\right) \tag{70}$$

Atès que el dipol està situat en la direcció z, només sobreviu aquesta component en el potencial vectorial. Per tant, podem dir que el potencial vectorial d'un dipol en la direcció z, quan considerem que som molt lluny del dipol ($z' \ll r$) i que les dimensions del dipol són molt petites en comparació amb la longitud d'ona ($l \ll \lambda$), és:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} lI\left(t - \frac{r}{c}\right)\vec{k} \tag{71}$$

on:

- I és la intensitat.
- l és la longitud del dipol.
- r és la posició en què estem calculant la radiació.
- c és la velocitat de l'ona que, atès que considerem que estem en el buit, coincideix amb la velocitat de la llum en el buit.

Ara que ja tenim el potencial vectorial, el pas següent és trobar el potencial escalar. I una vegada el tinguem, amb tots dos podrem calcular els camps elèctric i magnètic.

2.2.2. Càlcul del potencial escalar

Per a trobar el potencial escalar, farem servir la condició de Lorentz (equació 37), que us reproduïm aquí:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{72}$$

No farem el càlcul explícitament, sinó que, un cop més, us donarem directament el resultat.

El potencial escalar d'un dipol en la direcció z, quan considerem que som molt lluny del dipol ($z' \ll r$) i que les dimensions del dipol són molt petites en comparació amb la longitud d'ona ($l \ll \lambda$) és:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^2}\left(\frac{q(t-r/c)}{r} + \frac{I(t-r/c)}{c}\right) \tag{73}$$

on:

- I és la intensitat.
- q és la càrrega.
- l es la longitud del dipol.
- z és la coordenada en la direcció del dipol, en aquest cas, la direcció z.
- r és la posició en què estem calculant la radiació.
- c és la velocitat de l'ona que, atès que considerem que estem en el buit, coincideix amb la velocitat de la llum en el buit.

D'aquesta expressió heu de tenir ben clar les dependències que té:

- Depèn de la càrrega q: no oblideu que pel sol fet de tenir una càrrega, encara que estigui en repòs, ja tenim camp elèctric i potencial escalar. Aquest seria, per tant, el terme electrostàtic.

- Depèn de la intensitat I: aquest seria el terme nou, causat per la variació de la càrrega en funció del temps.

- Depèn de com estaven la càrrega i la intensitat un temps anterior al temps en què fem la mesura, és a dir, en un temps $t - r/c$.

En aquest punt ja podem fer un pas més i trobar, a partir dels potencials vectorial (equació 71) i escalar (equació 73), els camps elèctric i magnètic. Abans però, us hem d'explicar un altre "artefacte matemàtic" que, tot i que no ho sembli, també ens simplificarà els càlculs: les coordenades polars esfèriques.

2.2.3. Coordenades polars esfèriques

Farem ara una parada en tot el desenvolupament per a explicar un tipus de coordenades amb el qual es treballa habitualment en electromagnetisme: les coordenades esfèriques.

Fins ara hem treballat sempre amb coordenades cartesianes, les conegudes com a x, y i z, amb els corresponents vectors unitaris $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$. Imaginem que algú ens pregunta com anar d'un punt a un altre. Si li responguéssim en cartesianes li diríem: vés tantes passes en la direcció x, tantes en la direcció y i tantes en la direcció z (tot i que en aquesta última part hauríem de volar, és clar).

Però hi ha una altra manera d'indicar com es va d'un punt a un altre i, encara que no ho sembli, és la que fem servir habitualment en la nostra vida quotidiana. Podríem haver dit a la persona en qüestió: "gira tants graus a l'esquerra, tants graus cap amunt, i després camina en línia recta tants metres". És a dir, primer "assenyalem" la direcció en què volem anar i després caminem en aquella direcció fins a arribar al lloc que toca. Donar una posició d'aquesta manera és donar-la en coordenades polars.

De coordenades polars n'hi ha de moltes menes (cilíndriques, el·lipsoidals, esfèriques, etc.), però aquí us mostrarem només les esfèriques. Les anirem construint a poc a poc. Per a fer-ho, d'entrada ens situem a l'origen de coordenades i utilitzem els eixos cartesians de referència.

- L'angle θ, que es diu *angle d'inclinació*, ens indica quant hem de girar respecte a l'eix z. Ho teniu representat en la figura 10. També hi teniu representat el vector unitari, $\vec{u}_\theta$.

La lletra θ és la lletra grega theta minúscula, que es llegeix "teta".

Figura 10. Representació de la coordenada θ de coordenades esfèriques

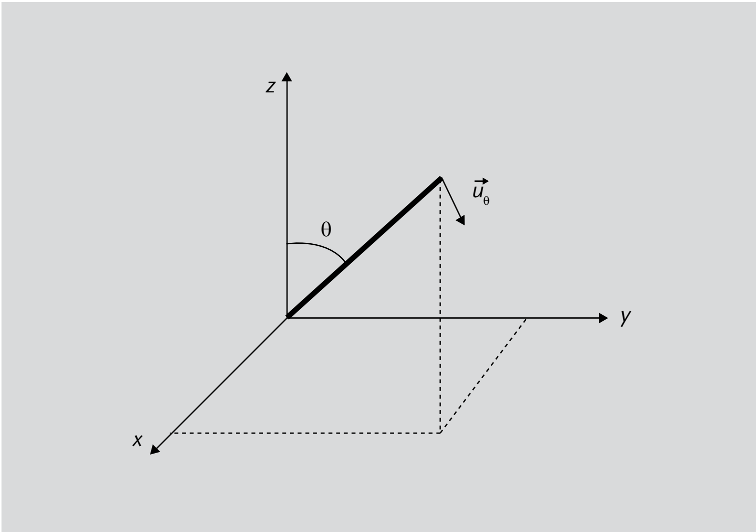


Figura 10

Fixeu-vos que el vector unitari, $\vec{u}_\theta$, va en la direcció en què creix l'angle i, per tant, tindrà una orientació diferent en cada punt. L'angle θ varia entre 0 i π.

- L'angle ϕ, que es diu *angle azimutal*, ens indica quant hem de girar respecte a l'eix x. Ho teniu representat en la figura 11. També hi teniu representat el vector unitari, $\vec{u}_\phi$.

ϕ és la lletra grega fi minúscula.

Figura 11. Representació de la coordenada ϕ de coordenades esfèriques

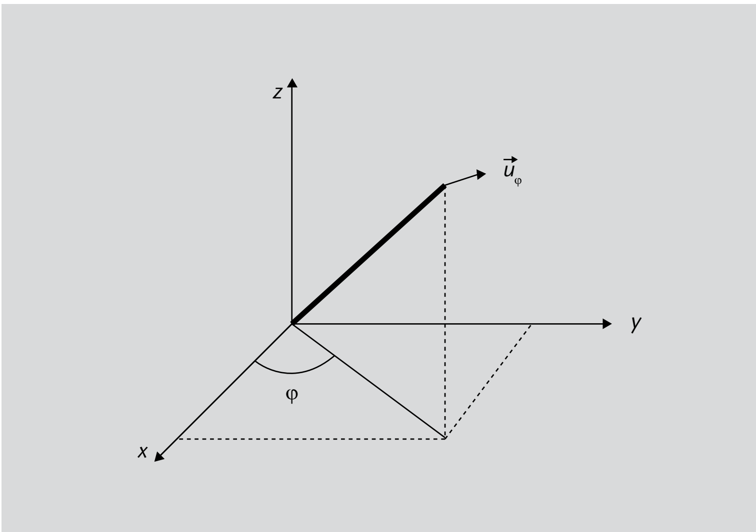


Figura 11

Fixeu-vos que el vector unitari, $\vec{u}_\phi$, va en la direcció en què creix l'angle i, per tant, tindrà una orientació diferent en cada punt. L'angle ϕ varia entre 0 i 2π.

Fixeu-vos que per a trobar l'angle ϕ primer hem de fer la projecció sobre el pla xy de la línia que ens indica la direcció (si no ho féssim així no sabríem, ni tan sols, quin angle agafar).

- Finalment, un cop ja estem "mirant" cap on volem, hem d'indicar quant hem de "caminar" per a arribar allà on volem. Això ho fem indicant la distància a l'origen r. Ho teniu representat en la figura 12. També hi teniu representat el vector unitari, $\vec{u}_r$.

Figura 12. Representació de la coordenada r de coordenades esfèriques

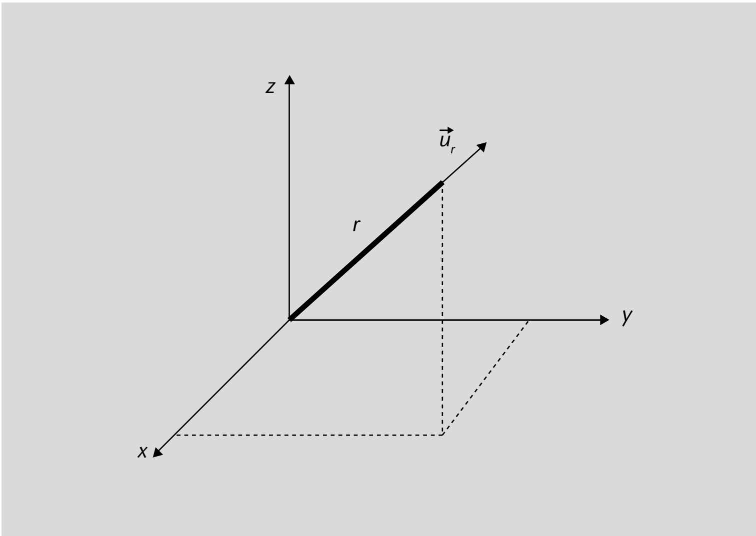


Figura 12

Fixeu-vos que el vector unitari, $\vec{u}_r$, va en la direcció en què apunta el vector $\vec{r}$ i, per tant, tindrà una orientació diferent segons la direcció en què apunti.

Teniu les tres components dibuixades conjuntament en la figura 13.

Figura 13. Coordenades esfèriques: $\vec{r}$, θ i ϕ

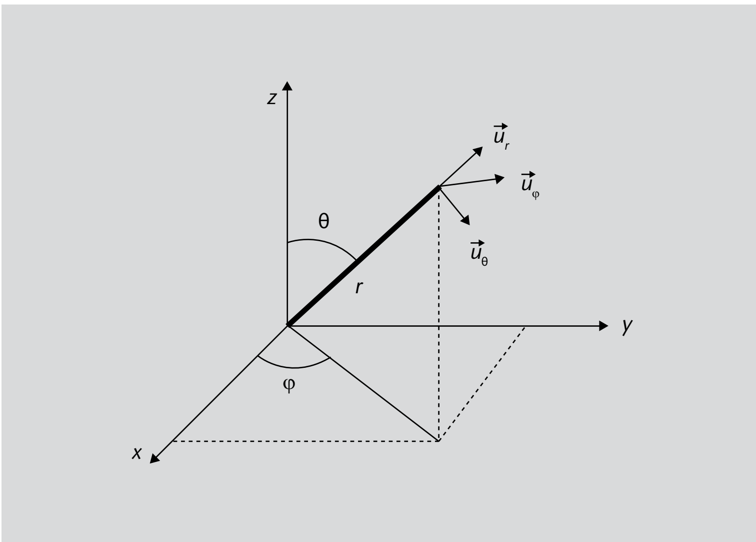


Figura 13

Representació de les coordenades esfèriques amb les tres coordenades, r, θ, i ϕ i la terna de vectors unitaris, $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, i $\vec{u}_\phi$. Fixeu-vos que aquests vectors apuntaran en direccions diferents segons el punt en què ens trobem.

Fixeu-vos que, amb tota aquesta informació podem assolir qualsevol punt de l'espai, ja que amb θ i ϕ som capaços de mirar en qualsevol direcció, i amb r

sabem quant ens hem d'allunyar en aquesta direcció. Per a fer-ho, els angles estaran entre els valors:

$$0 \leq \phi \leq 2\pi \tag{74}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \tag{75}$$

Noteu el detall que θ no varia fins a 2π, sinó solament fins a π. Per a entendre-ho només cal que penseu en vosaltres mateixos: θ seria l'angle que fa el coll amunt i avall i ϕ l'angle que podeu girar sobre vosaltres mateixos. Ara bé, només amb aquests dos moviments, pujant el cap amunt o avall i girant sobre vosaltres mateixos ja en teniu prou per a mirar a tot arreu. Si féssim variar θ entre 0 i 2π, simplement, no guanyaríem res i repetiríem direccions.

Dit tot això ja podem representar un vector en coordenades polars esfèriques:

$$\vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta + v_\phi\vec{u}_\phi \tag{76}$$

On v_r, v_θ i v_ϕ són les components del vector $\vec{v}$. Val a dir que qualsevol vector es pot escriure en qualsevol sistema de coordenades. Per tant, aquest vector també es podrà escriure en coordenades cartesianes, tot i que no ho farem en aquesta assignatura.

Transformació de coordenades polars esfèriques a cartesianes

La transformació d'un vector de coordenades polars esfèriques, $\vec{r} = r\vec{u}_r + \theta\vec{u}_\theta + \phi\vec{u}_\phi$, a coordenades cartesianes, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, queda definida mitjançant les equacions següents:

$$x = r \sin\theta \cos\phi \tag{77}$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi \tag{78}$$
$$z = r \cos\theta \tag{79}$$

La transformació d'un vector de coordenades cartesianes, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, a coordenades polars esfèriques, $\vec{r} = r\vec{u}_r + \theta\vec{u}_\theta + \phi\vec{u}_\phi$, queda definida per les equacions següents:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{80}$$
$$\arctan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \tag{81}$$
$$\arctan\phi = \frac{y}{x} \tag{82}$$

Exemple. Transformació de coordenades polars a esfèriques

Transformarem tot seguit el vector $\vec{r} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ a coordenades esfèriques i després farem la transformada inversa per a veure que recuperem el vector original en cartesianes.

Per a transformar el vector $\vec{r} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ a coordenades esfèriques hem de fer servir les equacions 80, 81 i 82, fent servir $x = 1$, $y = 2$ i $z = 3$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} = 3{,}7 \tag{83}$$

$$\arctan\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow \theta = \arctan\frac{\sqrt{5}}{3} = 0{,}64 \text{ rad} \tag{84}$$

$$\arctan\phi = \frac{y}{x} = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow \theta = \arctan 2 = 1{,}1 \text{ rad} \tag{85}$$

Per tant, el vector $\vec{r} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ en coordenades esfèriques és:

$$\vec{r} = 3{,}7\vec{u}_r + 0{,}64\vec{u}_\theta + 1{,}1\vec{u}_\phi \tag{86}$$

Fixeu-vos que les components tenen unitats diferents: la component en r té les dimensions corresponents a allò que sigui el vector $\vec{r}$ en cada cas (una distància, un camp elèctric, etc.), mentre que les coordenades θ i ϕ sempre tindran unitats angulars.

I ara hem de fer el pas invers: passar l'equació 86 a coordenades cartesianes. Per a fer-ho farem servir les transformacions 77, 78 i 79 amb $r = 3{,}7$, $\theta = 0{,}64$ rad i $\phi = 1{,}1$ rad:

$$x = r\sin\theta\cos\phi = 3{,}7\sin 0{,}64\cos 1{,}1 = 1 \tag{87}$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi = 3{,}7\sin 0{,}64\sin 1{,}1 = 2 \tag{88}$$

$$z = r\cos\theta = 3{,}7\cos 0{,}64 = 3 \tag{89}$$

De manera que comprovem que és el vector que teníem originàriament, com era d'esperar.

Observació

Val a dir que en els resultats obtinguts en les equacions 87, 88 i 89 hem aproximat a la primera xifra decimal. Si voleu que us surti exacte hauríeu d'agafar totes les xifres decimals dels càlculs anteriors.

Hi ha encara un punt molt important que hem deixat per al final: el tema dels vectors unitaris, que abordarem tot seguit.

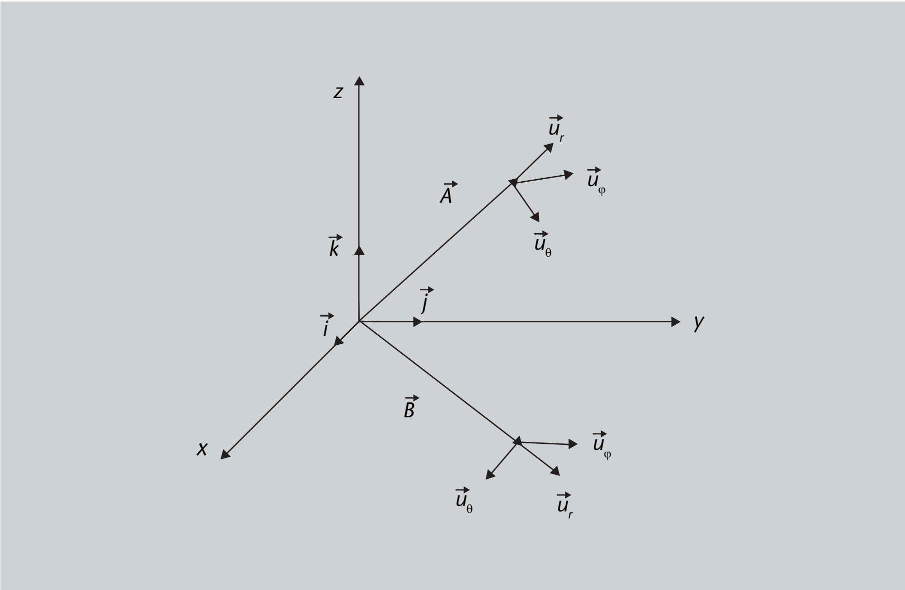
Vectors unitaris en coordenades polars

En la figura 14 teniu representats dos vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$ i també hi ha representats els vectors unitaris cartesians ($\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$) i els vectors unitaris esfèrics ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ i $\vec{u}_\phi$). Què noteu? Quina diferència hi veieu entre ambdós?

El primer que heu de notar és que només hem dibuixat una vegada els vectors unitaris en coordenades cartesianes ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), mentre que els vectors unitaris de les coordenades esfèriques ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\phi$) els hem hagut de dibuixar dues vegades, una per a cada vector. Ho hem fet així perquè els vectors unitaris esfèrics tenen una orientació diferent per a cada vector.

Els vectors unitaris de les coordenades esfèriques no són constants, a diferència del que passa amb els de les cartesianes.

Figura 14. Comparació de dos punts en coordenades esfèriques i cartesianes amb els vectors unitaris respectius



Aquest punt és molt important perquè, quan treballem amb cartesianes, podem integrar i derivar cada component per separat, sense preocupar-nos gaire del vector unitari, perquè no varia. En canvi, quan treballem amb esfèriques, haurem de vigilar sempre els vectors unitaris, perquè sí que varien. A efectes pràctics això vol dir que, per exemple, a l'hora de derivar o integrar, no els podrem treure fora de la derivada o de la integral com a constant, com feiem amb els vectors unitaris de les coordenades cartesianes.

Ara, després d'aquest incís en què hem introduït les coordenades esfèriques, podem seguir amb els càlculs que ens han de dur fins a la radiació d'un dipol. Ens havíem quedat amb el potencial escalar (subapartat 2.2.2.) i el potencial vectorial (subapartat 2.2.1.). El pas següent és obtenir els camps elèctric i magnètic, i això és el que tocaria fer ara. Abans, però, convé concretar una mica més el cas que estem tractant, i és aquí on entraran en joc les coordenades esfèriques.

2.2.4. Expressió del potencial vectorial en coordenades esfèriques

El motiu d'haver explicat les coordenades esfèriques és que quan es dóna la radiació d'un element s'acostuma a donar en coordenades esfèriques.

En les equacions 71 i 73 tenim les expressions, respectivament, del potencial vectorial i del potencial escalar, amb les aproximacions que hem fet. Fixeu-vos que fins aquí només hem considerat que tenim un dipol. Ara bé, aquestes expressions encara depenen de la càrrega q i de la intensitat I. Per a poder continuar, concretarem una mica més com són aquests elements.

Com hem vist en l'equació 31, en aquest cas la càrrega varia, i era aquesta variació la que ens donava la intensitat I. En particular triarem que la càrrega variï de la següent manera:

$$q(t') = q_0 \cos(\omega t') \tag{90}$$

Aquest és el cas que es dóna, per exemple, en una antena rectilínia de ràdio. En qualsevol cas, com sabeu pel teorema de Fourier, qualsevol funció periòdica es pot expressar com una suma de sinus i cosinus. Per tant, la tria és prou genèrica.

En el mòdul "Ones" es comenta la importància del teorema de Fourier i en el seu apèndix es presenta breument la seva formulació matemàtica.

Recordeu que en el cas que estem estudiant fem l'aproximació de ser molt lluny del dipol ($r \gg l$) i amb una longitud d'ona molt més gran a les dimensions del dipol ($\frac{l}{2} \ll \lambda$). En aquest cas hem trobat que t' es pot aproximar per $t - \frac{r}{c}$ (equació 67). Per tant, l'equació 90 queda:

Compte! Al membre esquerre de les equacions 90, 91, 92 i 94, el parèntesi indica la dependència, i no el producte.

$$q\left(t - \frac{r}{c}\right) = q_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \tag{91}$$

I derivant la càrrega podem obtenir la intensitat (equació 33):

Recordeu

$\frac{d}{dx}(\sin(g(x))) = \frac{dg(x)}{dx}\cos(g(x))$ i $\frac{d}{dx}(\cos(g(x))) = -\frac{dg(x)}{dx}\sin(g(x))$, on $g(x)$ és una funció que depèn d'x.

$$I\left(t - \frac{r}{c}\right) = -q_0\omega \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \tag{92}$$

Si ara fem el canvi:

$$I_0 = -q_0\omega \tag{93}$$

Recordeu que un signe en la intensitat només indica el sentit en què circula.

ens queda:

$$I(t - \frac{r}{c}) = I_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \tag{94}$$

A partir de la càrrega (equació 90) també podríem trobar el moment dipolar elèctric (equació 30):

$$\vec{p} = ql\vec{k} = lq_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \tag{95}$$

Amb tota aquesta informació ja podem trobar el potencial vectorial i, a partir d'ell, el potencial escalar fent servir la condició de Lorentz (equació 37). I amb els dos potencials podrem trobar, finalment, els camps elèctric i magnètic. No oblideu que el nostre objectiu és obtenir el camp elèctric i magnètic per a poder calcular el vector de Poynting i, amb ell, l'energia radiada.

Un cop més, us donem només el resultat. Això sí, tingueu present els següents punts:

- Ens quedem amb l'aproximació de ser molt lluny del dipol: $l \ll r$. A més, com hem fet en l'equació 58, ens quedem només amb els termes fins a primer ordre del quocient $\frac{l}{r}$.

- Considerem que la longitud d'ona és molt més gran que el dipol: $l \ll \lambda$.

Recordeu

Recordeu que z' està entre $-\frac{l}{2}$ i $+\frac{l}{2}$. Per tant, dir que $z' \ll r$ és com dir que $l \ll r$, que significa que la distància a què estem situats del dipol és molt més gran que el mateix dipol.

El potencial vectorial d'un dipol en la direcció z, quan considerem que som molt lluny del dipol ($z' \ll r$) i que les dimensions del dipol són molt petites en comparació amb la longitud d'ona ($l \ll \lambda$), pel qual circula una intensitat del tipus $I(t - \frac{r}{c}) = I_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$, és:

$$A_r \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0 l}{r}\cos(\theta)\sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \quad (96)$$

$$A_\theta \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0 l}{r}\sin(\theta)\sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \quad (97)$$

$$A_\phi = 0 \quad (98)$$

on:

- A_r, A_θ i A_ϕ són les components radial, en θ i en ϕ del potencial vectorial en coordenades esfèriques.
- l és la longitud del dipol.
- z és la component z.
- r és la posició en què estem calculant la radiació.
- ω és la freqüència angular de la intensitat.
- I_0 és el valor màxim de la intensitat.

De les equacions 96 a 98 veiem que el potencial vectorial només té components en r (varia amb la distància) i en θ (varia verticalment). És a dir, varia segons si ens mirem el dipol de més lluny o de més a prop; i segons si ens el mirem de més amunt o de més avall; però no varia si ens el mirem des del davant o des del darrere. Això, de fet, era esperable perquè el dipol està situat en l'eix z i és simètric en el pla xy, és a dir, té simetria cilíndrica (vegeu les figures 8 o 9).

Obtenir el potencial vectorial és, de fet, l'element mes important del càlcul de radiacions i ja conté tota la informació necessària. A partir d'aquí, la resta de passos són gairebé immediats. Tanmateix, atès que operar en coordenades esfèriques va mes enllà dels objectius del curs, només presentarem els resultats que s'obtenen i ometrem el càlcul del potencial escalar.

El pas següent és el càlcul dels camps elèctric i magnètic, per a després obtenir el vector de Poynting i, a partir d'ell, el diagrama de radiació.

2.2.5. Càlcul dels camps elèctric i magnètic

A partir del potencial vectorial (equacions 96 a 98) podem trobar els camps elèctric i magnètic, tal com hem vist en el subapartat 1.3.1. En aquest cas, un cop més, atès que hauríem de treballar amb coordenades esfèriques, n'hi ha prou amb què ens quedem amb el següent resultat: els camps elèctric i magnètic d'un dipol en la direcció z, quan considerem que som molt lluny del dipol ($z' \ll r$) i que les dimensions del dipol són molt petites en comparació amb la longitud d'ona ($l \ll \lambda$), pel qual circula una intensitat del tipus $I(t-\frac{r}{c}) = I_0 \sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]$ són els que teniu a continuació.

Camp magnètic:

$$B_r = 0 \tag{99}$$

$$B_\theta = 0 \tag{100}$$

$$B_\phi \simeq \frac{I_0 l \omega}{4\pi c^3 r} \sin(\theta) \cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] \tag{101}$$

Camp elèctric:

$$E_r \simeq 0 \tag{102}$$

$$E_\theta \simeq \frac{l I_0 \omega}{4\pi\varepsilon_0 r c^2} \sin\theta \cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] \tag{103}$$

$$E_\phi = 0 \tag{104}$$

on:

- B_r, B_θ i B_ϕ són les components radial, en θ i en ϕ del camp magnètic en coordenades esfèriques.
- E_r, E_θ i E_ϕ són les components radial, en θ i en ϕ del camp elèctric en coordenades esfèriques.
- l es la longitud del dipol.
- z' és la coordenada del dipol, en la direcció z, i varia entre $-\frac{l}{2}$ i $+\frac{l}{2}$.
- r és la posició en la qual estem calculant la radiació.
- ω és la freqüència angular de la intensitat.
- I_0 és el valor màxim de la intensitat.

Hem arribat doncs, finalment, a les expressions dels camps elèctric i magnètic. Analitzem-les una mica:

- La component radial del camp elèctric, E_r, és 0. És a dir, el camp elèctric és perpendicular a la direcció de propagació, que és $\vec{r}$. Això és el que passava en el cas de les ones planes, que vam estudiar en el mòdul "Propagació d'ones electromagnètiques". Per tant, que aquesta component sigui 0, ens diu que quan som molt lluny del dipol, l'ona emesa es comporta com una ona plana.

- La component ϕ del camp elèctric, E_ϕ, també és 0. Això és degut a la mateixa simetria del dipol, que té simetria cilíndrica: aquest està posat verticalment en l'eix z, per tant, si ens movem al seu voltant en el pla xy (és a dir, variem l'angle ϕ), veiem sempre el mateix.

La simetria cilíndrica és aquella que és semblant a un cilindre: podem rotar-lo al voltant de l'eix vertical sense que varïí.

- Atès que el camp magnètic ha de ser perpendicular al camp elèctric (vegeu la figura 17) i que l'ona es propaga en la direcció radial $\vec{r}$ i el camp elèctric només té component θ, el camp magnètic haurà de tenir, necessàriament, només component ϕ. És a dir, el camp magnètic va en la direcció que "dóna voltes" al dipol. De fet, aquest resultat era esperable: al cap i a la fi, el dipol no és més que un petit fil col·locat verticalment pel qual circula una intensitat I, i penseu en la direcció del camp magnètic al voltant d'un fil amb una intensitat I.

- Pel que fa a les expressions en si, ambdues són molt semblants:

– El primer terme, $\frac{lI_0\omega}{4\pi\varepsilon_0 rc^2}$ en el cas del camp elèctric i $\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0 l\omega}{c^3 r}$ en el cas del camp magnètic, ens està dient que els camps disminueixen amb r. Com més lluny, més petits, però aquesta disminució és com r i no com r^2, com passava en el cas d'electrostàtica o magnetostàtica.

– El segon terme, $\sin\theta$ ens està dient com varia el camp segons l'angle en què ens el mirem respecte al dipol (vegeu la figura 9).

– Finalment, el terme $\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]$ ens està indicant com oscil·la el camp, en el temps i en un punt donat.

A la figura 15 teniu representat el camp elèctric respecte el dipol. Fixeu-vos que la distància a què estem del dipol, està indicada en longituds d'ona λ. A la figura podeu veure també com varia el camp amb l'angle θ, és a dir, segons si ens mirem el dipol des de dalt o des del costat. Només representem el pla del dipol perquè, com hem dit anteriorment, el camp $\vec{E}$ no depèn de ϕ, és a dir, no varia si "donem voltes" al voltant del dipol.

Per tal que entengueu una mica millor la figura 15, us hem representat com seria el camp que generaria un dipol elèctric oscil·lant, amb una intensitat que varia amb el temps sinusoïdalment (equació 94). Ho teniu a la figura 16. Les lletres són per a indicar l'ordre de les imatges. El que hi ha representat és una successió d'imatges que mostren les línies de camp elèctric al llarg de tot un cicle de la intensitat (de tot un període).

Figura 15. Representació del camp elèctric produït per un dipol elèctric oscil·lant (equació 103)

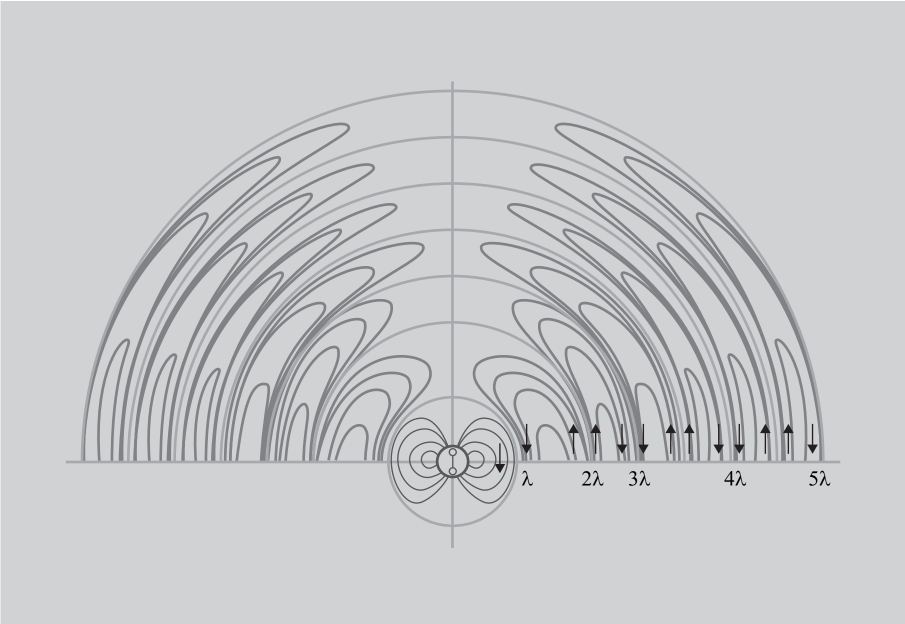


Figura 15

En el centre hi ha dibuixat el dipol i la distància es dóna en número de longituds d'ona. Fixeu-vos que només hi ha representat el semipla superior. El semipla inferior en serà una reflexió especular.

Enllaç d'interès

Podeu veure una animació de la figura 15 a: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dipole.gif.

Hi ha un altre detall de la figura que heu de notar, i és que els camps que es generen en la figura 16a es van propagant i, per tant, estan presents tota l'estona, fins a la figura 16h, però cada cop més lluny del dipol. I ara, si talleu per la meitat la figura 16h, teniu, precisament, la figura 15.

Recordeu que: $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$

D'altra banda com hem vist, el camp que estan generant depèn de la intensitat que té una variació sinusoidal (equació 94). La intensitat té una determinada freqüència angular, ω, que és la que marca les oscil·lacions de la figura 16. El fet que la freqüència estigui relacionada amb la longitud d'ona explica perquè hem donat la figura 15 amb distàncies en longituds d'ona (λ).

Per a entendre bé la figura heu de tenir molt clar què vol dir que hi hagi una intensitat: vol dir que la càrrega varia (equació 90). Per tant, el que va passant és que va variant la càrrega del dipol. Les càrregues positives i negatives s'acosten o s'allunyen entre elles, segons cap a on vagi el sentit de la intensitat. Així, en un principi, a mesura que s'allunyen les càrregues, les línies es van obrint, fins a un màxim (figura 16b), que coincideix amb el màxim de la intensitat, que té un comportament sinusoïdal (equació 94). Després, les càrregues es tornen a ajuntar i les línies de camp es tornen a fer petites (figura 16b), fins que s'ajunten les càrregues i el camp es fa 0 (figura 16d). Seria com si haguéssim tallat "una llesca". Tot seguit, entre les figures 16e i 16h, el procés es repeteix però en sentit contrari.

Figura 16. Representació de la generació del camp elèctric produït per un dipol elèctric oscil·lant (equació 103)

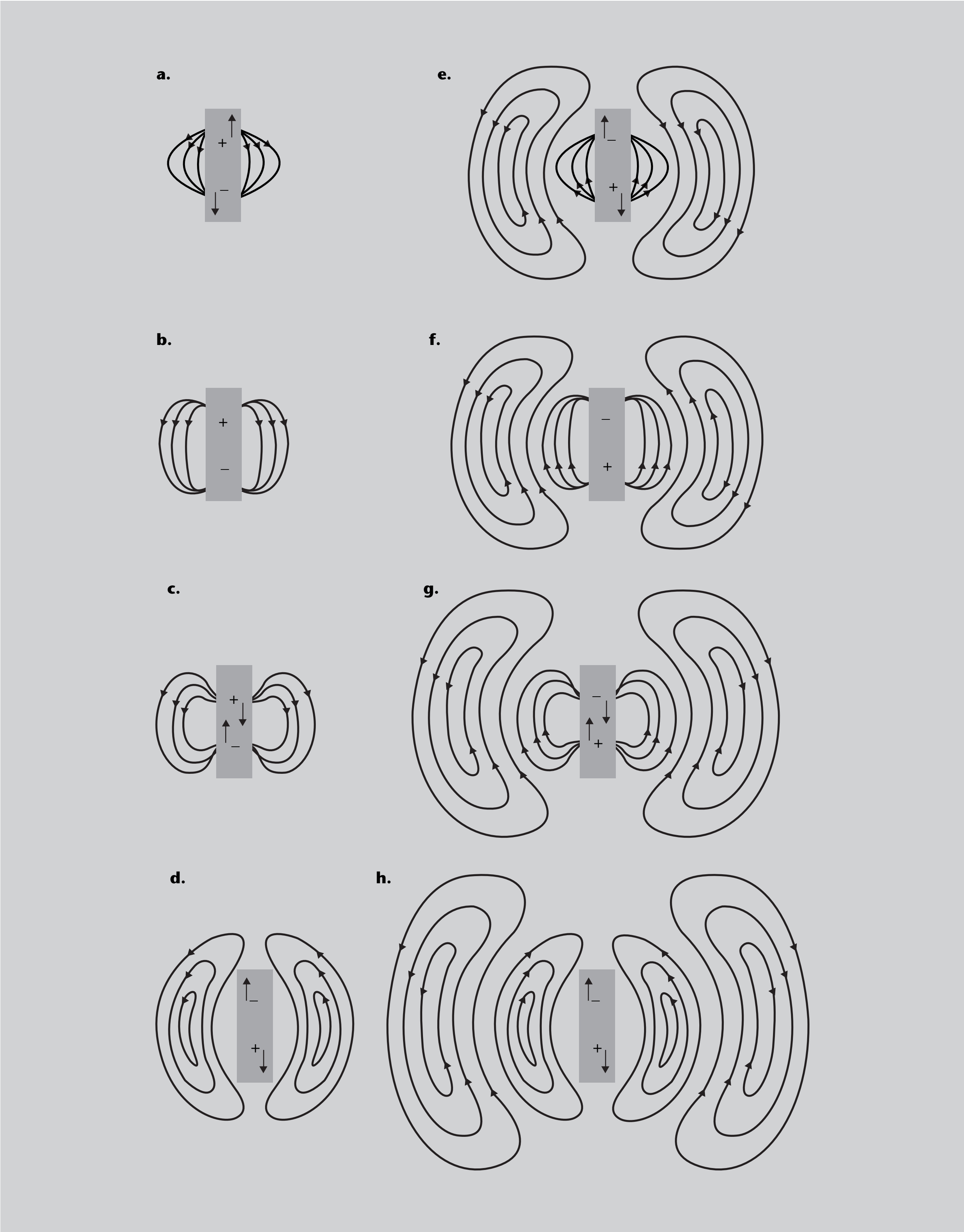


Figura 16

Procés de generació del camp elèctric que està representat a la figura 15. Les càrregues positives i negatives s'acosten o s'allunyen entre elles, segons cap a on vagi el sentit de la intensitat. Així, en un principi, a mesura que s'allunyen les càrregues, les línies es van obrint, fins a un màxim (**b**), que coincideix amb el màxim de la intensitat, que té un comportament sinusoïdal (equació 94). Després, les càrregues es tornen a ajuntar i les línies de camp es tornen a fer petites (**b**), fins que s'ajunten les càrregues i el camp es fa 0 (**d**). Seria com si haguéssim tallat "una llesca". Tot seguit, entre les figures **e** i **h**, el procés es repeteix però en sentit contrari.

Relació entre els camps elèctric i magnètic

Com hem comentat en el subapartat anterior, si us mireu les expressions 101 i 103 veureu que són molt semblants. Aquesta semblança no és casualitat i, de fet, podríem obtenir una a partir de l'altra. Ho veurem tot seguit.

En el cas que ens ocupa, ones planes harmòniques, els camps elèctric i magnètic són perpendiculars, com ja hem dit en comentar les expressions dels camps elèctric i magnètic, i perpendiculars a la direcció de propagació. Ho podeu veure en la figura 17. Per tant, ja es pot intuir que hi ha una relació entre ambdós camps, com de fet ja heu vist al mòdul "Lleis de Maxwell".

En el mòdul "Ones" d'aquesta assignatura es veu què són les ones planes harmòniques.

Figura 17. Camp elèctric ($\vec{E}$), camp magnètic ($\vec{B}$) i direcció de propagació ($\vec{k}$)

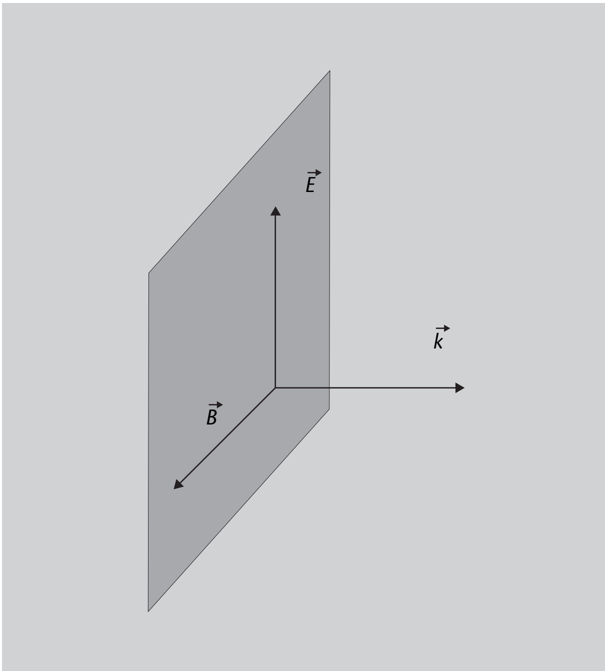


Figura 17

Representació del camp elèctric, $\vec{E}$, magnètic, $\vec{B}$ i de la direcció de propagació, $\vec{k}$. Es pot veure que tots tres són perpendiculars.

Recordeu

No confongueu el vector de propagació $\vec{k}$ amb el vector unitari en la direcció z, $\hat{k}$.

Aquesta relació existeix i és:

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{k} \times \vec{E} \quad (105)$$

Mòdul del producte vectorial

Recordeu que el mòdul del producte vectorial de dos vectors $\vec{M}$ i $\vec{N}$ és $||M \times N|| = M \cdot N \sin\alpha$, on α és l'angle que formen $\vec{M}$ i $\vec{N}$. Si ambdós vectors són perpendiculars, $\alpha = \pi/2$ i llavors $||M \times N|| = M \cdot N$.

Per tant, ja veieu que ambdós camps estan relacionats. De fet, atès que sabem en quina direcció van tots els vectors, el més senzill és mirar el mòdul:

$$B = \frac{1}{c}E \quad (106)$$

on hem aplicat que el mòdul de $\hat{k}$ és 1 ($k = 1$, recordeu que és un vectr unitari).

Activitat

Verifiqueu que les equacions 101 i 103 satisfan l'equació 106.

I arribats en aquest punt, ja podem calcular el vector de Poynting i la radiació emesa pel dipol.

2.2.6. Càlcul del vector de Poynting

El vector de Poynting ens dóna la densitat d'energia del camp electromagnètic en una direcció determinada i en el buit es calcula amb la fórmula:

El vector de Poynting s'estudia en el mòdul "Propagació d'ones electromagnètiques".

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \tag{107}$$

Es mesura en watts per segon (W/s). Atès que el camp elèctric i el camp magnètic són perpendiculars, tenim que el mòdul del vector de Poynting serà directament:

Recordeu que $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = v \cdot w \cdot \sin\alpha$, on α és l'angle que formen $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Si $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són perpendiculars ($\alpha = \pi/2$), tenim que $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = v \cdot w$.

$$S = \frac{1}{\mu_0}E \cdot B \tag{108}$$

que, si tenim present que $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$, es pot escriure com:

$$S = c^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot E \cdot B \tag{109}$$

Així doncs, per a obtenir el mòdul del vector de Poyting n'hi haurà prou de multiplicar les expressions 103 i 101 i multiplicar per $c^2\varepsilon_0$. Així obtenim:

$$S = \frac{l^2 I_0^2}{16\pi^2\varepsilon_0 r^2}\frac{\omega^2}{c^3}\sin^2\theta\cos^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \tag{110}$$

Recordeu que el vector de Poynting ens dóna l'energia que passa per unitat d'àrea i per unitat de temps en el sentit de propagació. I el que veiem és que aquesta energia anirà oscil·lant amb el temps a causa del terme $\cos^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$. El que podem fer és veure quina és aquesta energia com a mitjana.

Càlcul de la radiació mitjana

És més interessant pensar quant ha radiat el dipol com a mitjana, per a cada sentit de propagació, que mirar-ho en cada instant. Atès que la mitjana de $\cos^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$ és $\frac{1}{2}$, l'expressió 110 queda:

El valor mitjà del cosinus al quadrat és $\left\langle \cos^2 x \right\rangle = \frac{1}{2}$.

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\frac{l^2 I_0^2}{16\pi^2\varepsilon_0 r^2}\frac{\omega^2}{c^3}\sin^2\theta \tag{111}$$

Si analitzem aquesta expressió, veiem que la densitat d'energia mitjana, $\bar{S}$ dependrà de la direcció, de l'angle θ. En la figura 18 teniu representada l'expressió 111. L'hem representada només en el pla del dipol, perquè recordeu que no hi ha dependència en ϕ; és a dir, si anem donant voltes al voltant del dipol veurem sempre el mateix i, per tant, n'hi ha prou de representar el pla que conté el dipol.

El detall més important de la figura 18 és que el màxim de l'energia radiada és a la meitat del dipol i, en canvi, just en la vertical no es radia energia. És a dir, una antena com aquesta radia des del seu centre, i no pas des de la punta.

Figura 18. Dependència angular del vector de Poynting

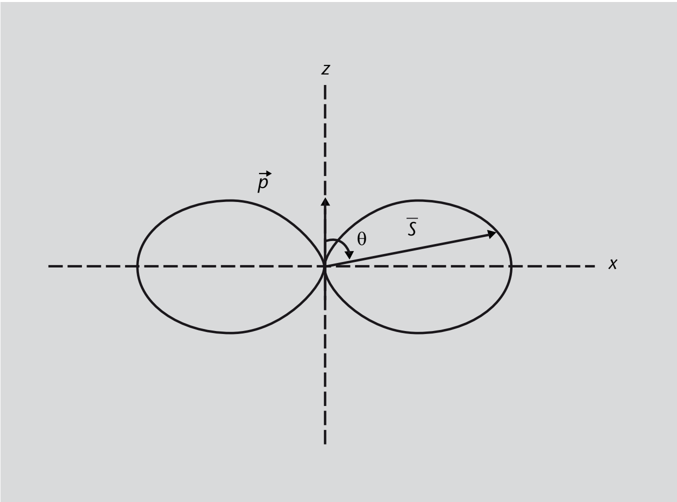


Figura 18

Dependència angular del vector de Poynting. Es mostra només el pla del dipol perquè el resultat no depèn de l'angle ϕ, és a dir, no depèn de la banda des de la qual ens mirem el dipol.

Ara ja estem en condicions de calcular l'objectiu final: la potència radiada.

2.2.7. Càlcul de la potència radiada

L'expressió de l'energia radiada mitjana, $\bar{S}$ (equació 111) ens dóna l'energia radiada per unitat d'àrea i per unitat de temps. Si volem saber quina és l'energia radiada total, per unitat de temps, és a dir, la potència radiada, hem de sumar les contribucions a totes les direccions de l'espai. Per tant, hem d'integrar per a totes les direccions de l'espai. No farem explícitament el càlcul, ja que implica una integral en coordenades esfèriques i us en donarem només el resultat.

Recordeu

La potència és igual a l'energia per unitat de temps.

La potència radiada, P, per un dipol en la direcció z, quan considerem que som molt lluny del dipol ($z' \ll r$) i que les dimensions del dipol són molt petites en comparació amb la longitud d'ona ($l \ll \lambda$), pel qual circula una intensitat del tipus $I(t-\frac{r}{c}) = I_0 \sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]$ (equació 94) és:

$$\bar{P} = \frac{l^2 I_0^2 \omega^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \qquad (112)$$

on:

- l es la longitud del dipol.
- I_0 és el valor màxim de la intensitat.
- ω es la freqüència angular.
- ε_0 és la permitivitat del medi.
- c es la velocitat de la radiació en el medi en què s'estan propagant les ones que, en el cas que estem considerant és el buit i per això fem servir la velocitat de la llum en el buit.

La potència radiada es mesura en watts, que se simbolitzen W.

Aquesta expressió normalment s'acostuma a escriure en funció de la longitud d'ona. Per a fer la transformació heu de recordar que (vegeu el mòdul "Ones"): $\omega = c\frac{2\pi}{\lambda}$ i $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, i llavors queda:

$$\bar{P} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{I_0^2}{2} \tag{113}$$

Arribats en aquest punt ja tenim la potència total radiada pel dipol, que era el nostre objectiu. Per a entendre una mica millor aquesta expressió, pensem en un circuit amb una resistència R pel qual circula una intensitat I. La potència dissipada per la resistència serà:

$$P = R \cdot I^2 \tag{114}$$

Si la intensitat és del tipus de la que tenim en el nostre dipol (expressió 94): $I = I_0 \sin(\omega t)$, la potència serà:

$$P = R \cdot I_0^2 \sin^2(\omega t) \tag{115}$$

I, com hem vist anteriorment en passar de l'equació 110 a l'equació 111, la mitjana de $\sin^2(\omega t)$ és $\frac{1}{2}$. Per tant, obtenim:

$$\bar{P} = R \cdot \frac{I_0^2}{2} \tag{116}$$

I ara compareu l'equació 116 amb l'equació 113. Resulta que podem fer la identificació:

$$R = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{117}$$

Per tant, es defineix la **resistència de radiació** d'un dipol elèctric oscil·lant com:

$$R = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (118)$$

Com en qualsevol resistència, les seves unitats són els Ω (ohms). Aquesta resistència depèn del medi (μ_0 i ε_0), de les dimensions del dipol (l) i de la longitud d'ona emesa, λ.

De fet, podem substituir les constants en l'equació 118 i trobem:

$$R = 789\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\ \Omega \quad (119)$$

Activitat

Verifiqueu el resultat de l'equació 118.

D'altra banda, no oblideu que tots els càlculs que hem fet són per al buit. Si estiguéssim dins d'un medi material n'hi hauria prou de canviar c per la velocitat de la radiació en el medi, μ_0 per μ i ε_0 per ε, on μ i ε són, respectivament, la permeabilitat magnètica i la permitivitat elèctrica del medi.

Exemple d'obtenció de la potència radiada

Obtindrem la potència radiada i la resistència de radiació per a un dipol d'1 m de longitud pel qual circula una intensitat del tipus $I = 5\sin(9\pi \cdot 10^8 t)$ A.

Per a calcular la potència radiada per aquest dipol hem de substituir en l'equació 112 amb $l = 1$, $I_0 = 5$ A i $\omega = 9\pi \cdot 10^8$ s^{-1}. Per a obtenir I_0 i ω només cal comparar la intensitat del problema amb l'expressió 94. Així obtenim:

$$\bar{P} = \frac{l^2 I_0^2 \omega^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{1^2\ \text{m}^2 \cdot 5^2\ \text{A}^2 \cdot (9\pi \cdot 10^8)^2\ \text{s}^{-2}}{6\pi \cdot 8{,}8544 \cdot 10^{-12}\ \text{A}^2\text{s}^2/\text{Nm}^2 \cdot (2{,}9979 \cdot 10^8\ \text{m/s})^3} = 44.444\ \text{W} \quad (120)$$

Recordeu que:
$c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ m/s,
$\varepsilon_0 = 8{,}8544 \cdot 10^{-12}$ A^{2}s^2/Nm^2 i
$\mu_0 = 1{,}2566 \cdot 10^{-6}$m kg /A^{2}s^2

D'altra banda, la resistència de radiació la podem calcular amb l'expressió 119. Per a ferho necessitem el valor de la longitud d'ona λ que podem obtenir a partir d'ω (vegeu el mòdul "Ones"):

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi \cdot 2{,}9979 \cdot 10^8}{9\pi \cdot 10^8} = 0{,}67\ \text{m} \quad (121)$$

I ara ja podem substituir a l'equació 119:

$$R = 789\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 789\left(\frac{1}{0{,}66}\right)^2 = 1.777{,}7\ \Omega \quad (122)$$

2.3. Discussió de la validesa del dipol com a antena

En aquest mòdul hem calculat la radiació que emet un dipol elèctric oscil·lant. És a dir, hem fet una petita antena que hem anomenat *dipol* i hem fet algunes aproximacions per a arribar a obtenir la potència de radiació del dipol, l'equació 113. Ara bé, podríem fer servir aquesta equació per a calcular la radiació d'alguna antena real? La resposta és que no, perquè en aquest resultat hem fet servir que la longitud d'ona és molt gran comparada amb les dimensions del dipol (l'aproximació de $l \ll \lambda$) i, de fet, això no és cert, com heu pogut veure en l'exemple del subapartat 2.2.1., on hem fet servir una ona del rang de l'UHF, que és el tipus d'ona que emeten les antenes habituals de televisió, per exemple.

Hi ha altres elements que no hem tingut en compte, però que queden més enllà dels objectius del curs. Tanmateix, si és tan irreal el resultat que hem obtingut, per què hem dedicat tant de temps a calcular la radiació que emet un dipol? Què ens pot ser útil d'aquest mòdul? La resposta a aquestes preguntes és que tot i que els resultats quantitatius no són correctes, sí que ho són els qualitatius i els procediments. Així:

- Hem vist que una càrrega accelerada emet radiació.

- El diagrama de radiació de la figura 18 és qualitativament correcte: un fil que radia, ho fa qualitativament com es veu en la figura.

- Hem vist una aplicació (la més important) del potencial vectorial que havíem introduït en el mòdul "Ones".

- Hem introduït el concepte de resistència de radiació (equació 118).

- Hem pogut veure els passos que cal seguir per a calcular la potència radiada per una antena.

- Hem introduït els potencials retardats, és a dir, hem tingut en compte que la radiació no es desplaça a velocitat infinita.

Amb tot això ja us podeu fer una idea, per tant, de com es pot produir radiació electromagnètica amb antenes i de com fer els càlculs corresponents.

2.4. Què hem après?

En aquest apartat hem vist un exemple de càlcul de la potència radiada. En particular, la del dipol elèctric oscil·lant, però només en el cas que som molt lluny del dipol i que la longitud d'ona és molt més gran que el dipol. Tot i aquestes aproximacions, que a més no sempre són vàlides, ni tan sols en les situacions més habituals, heu pogut veure que els càlculs són força llargs.

El procés que hem seguit per a fer el càlcul ha estat partir del final i veure què necessitàvem per a arribar-hi. Així, volem obtenir la potència total radiada. Aquesta s'obté del vector de Poynting i, per a calcular-lo, hem hagut de calcular els camps elèctric i magnètic. Ara bé, en lloc de calcular aquests camps directament, els hem obtingut a partir dels potencials retardats.

D'altra banda, al llarg de l'apartat hem vist que en algunes situacions convé fer servir un sistema de coordenades diferent del cartesià que utilitzem habitualment. Així, hem vist que també podríem representar un punt en l'espai mitjançant coordenades polars esfèriques. Val a dir, però, que hi ha molts altres sistemes de coordenades.

Finalment, hem vist els diagrames de radiació, que són una forma visual de veure cap a on es radia.

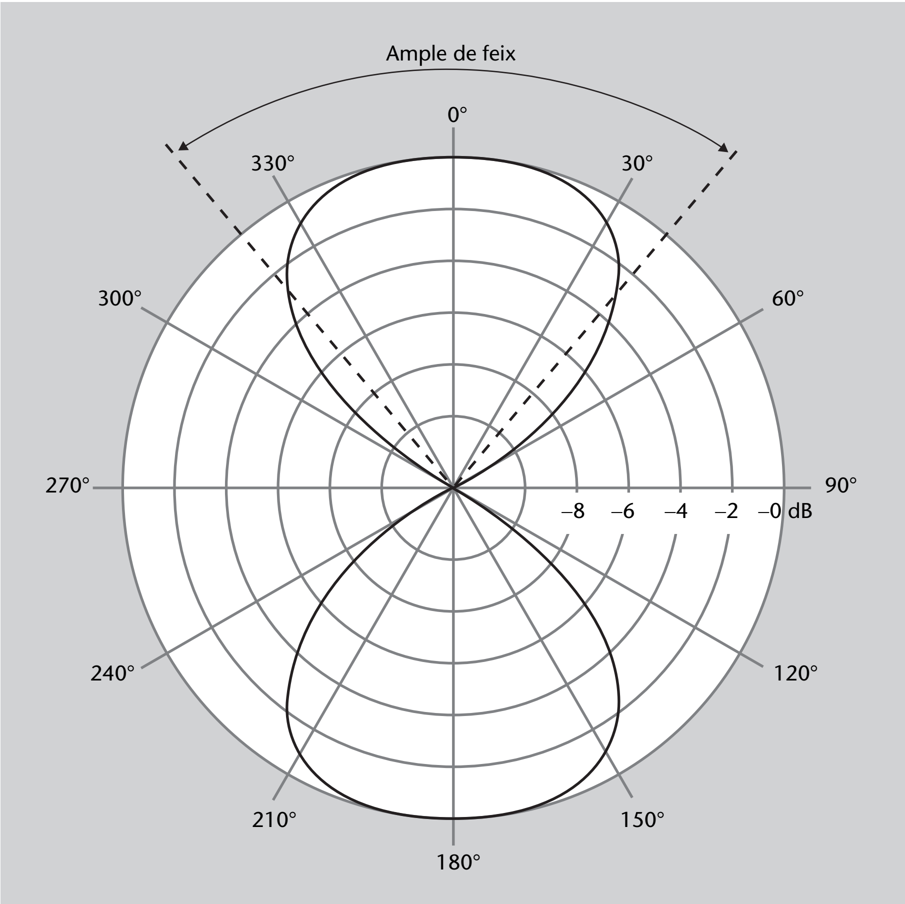
3. Problemes resolts

3.1. Enunciats

1. Del diagrama de radiació de la figura 19:

a) Obtingueu la relació davant-darrere.
b) Quin tipus d'antena és? Creieu que és una bona antena?

Figura 19



2. Obtingueu la potència radiada i la resistència de radiació per a un dipol de 0,5 m de longitud. La longitud d'ona emesa és de 5 cm i la intensitat màxima de 10 A.

a) A quina banda de l'espectre pertany la radiació emesa?
b) Quina és la potència radiada?
c) Quina és la resistència de radiació?

d) Podem fer l'aproximació de longitud d'ona molt gran comparada amb les dimensions del dipol?
e) Si som a 10 km de l'antena, podem fer l'aproximació de ser molt lluny del dipol?

Considerarem que l'ona es desplaça pel buit i que la velocitat de l'ona en el buit és $c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ m/s.

3. Per a quina banda de l'espectre electromagnètic serà vàlida l'aproximació $l \ll \lambda$ per a una antena d'1 m?

3.2. Solucions

1. a) Per a obtenir la relació davant-darrere del diagrama de la figura 19, veiem que l'antena presenta dos lòbuls de la mateixa alçada a 0° (1, perquè està normalitzada) i la potència del diagrama enrere, és a dir, a 180°, que és també 1. Si feu el quocient obteniu que:

$$\text{Rel.davant} - \text{darrere}_{\text{Fig.19}} = \frac{1}{1} = 1 \qquad (123)$$

Figura 20

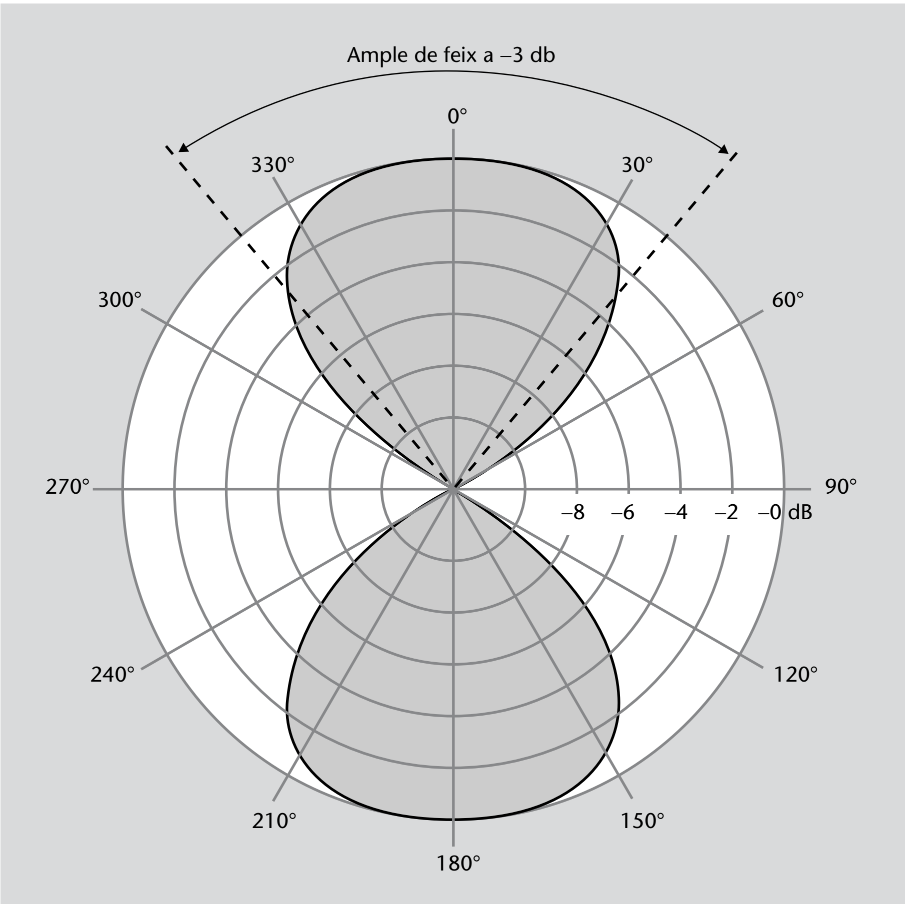


Figura 20

Figura de la solució de l'apartat b) de l'exercici 1: amplada de feix a –3 dB.

b) L'antena presenta dos lòbuls de la mateixa alçada en sentits oposats, amb una relació davant-darrere igual a 1. Per tant, estem davant d'una antena bidireccional.

Sobre si és una bona antena o no, depèn de perquè la vulguem fer servir: si només volem emetre en una direcció, no seria una bona antena, perquè emet enrere la mateixa quantitat d'energia que emet endavant.

D'altra banda, tampoc no és una antena gaire direccional ja que l'amplada de feix a –3 dB és força gran: el teniu representat a la figura 20. Si us hi fixeu, l'amplada és d'uns 90°, que és aproximadament la meitat de l'amplada màxima (180°). Si ens interessa una aplicació en què l'antena sigui molt direccional, estarem perdent molta energia en altres direccions.

2.

a) La radiació de 5 cm pertany a la zona de les microones, en particular, a les de freqüència superalta (SHF, de l'anglès *super high frequency*).

b) Per a calcular la potència radiada per aquest dipol, hem de substituir en l'equació 112 amb l = 0,5 i I_0 = 10 A. Podem obtenir ω a partir de l'equació (vegeu el mòdul "Ones"):

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 2{,}9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{0{,}05 \text{ m}} = 3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \tag{124}$$

Així obtenim:

$$\bar{P} = \frac{l^2 I_0^2 \omega^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{0{,}5^2 \text{ m}^2 \cdot 10^2 \text{ A}^2 \cdot (3{,}7 \cdot 10^{10})^2 \text{ s}^{-2}}{6\pi \cdot 8{,}8544 \cdot 10^{-12} \text{ A}^2\text{s}^2/\text{Nm}^2 \cdot (2{,}9979 \cdot 10^8 \text{ m/s})^3} =$$

$$= 7{,}9 \cdot 10^6 \text{ W} = 7{,}9 \text{ MW} \tag{125}$$

Recordeu que 1 MW = 10^6 W.

c) Podem calcular la resistència de radiació amb l'expressió 119. Per a fer-ho necessitem el valor de la longitud d'ona λ = 5 cm = 0,05 m:

$$R = 789 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 789 \left(\frac{0{,}5}{0{,}05}\right)^2 = 78.900\ \Omega \tag{126}$$

d) Per a veure si podem fer l'aproximació de longitud d'ona molt gran comparada amb les dimensions del dipol, hem de comparar la longitud d'ona, λ, amb les dimensions del dipol, l = 0,5 m.

En aquest cas, la longitud d'ona és 0,05 m i la longitud del dipol, 0,5 m, de manera que tenim:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{0{,}05}{0{,}5} = 0{,}1 \tag{127}$$

Per la qual cosa no es compleix la condició, ja que la longitud d'ona no és, ni tan sols, més gran que les dimensions del dipol.

e) Per a veure si podem fer l'aproximació de ser molt lluny del dipol, hem de veure si la distància a què estem del dipol és molt més gran que les dimensions del dipol. Atès que estem a r = 10 km = 10.000 m, i que el dipol fa l = 0,5 m de longitud, tenim que, en fer el quocient:

$$\frac{r}{l} = \frac{10.000}{0{,}5} = 2 \cdot 10^4 \qquad (128)$$

Recordeu

Quan escrivim un número en potències de 10, l'exponent indica l'ordre de magnitud. Així, l'ordre de magnitud de 10^4 és 4.

És a dir, la distància a què estem és 4 ordres de magnitud superior a la longitud del dipol. Per tant, podem fer l'aproximació de ser molt lluny.

3. Per tal que sigui vàlida l'aproximació $l \ll \lambda$, hem de buscar longituds d'ona que siguin molt superiors a 1 m. Considerarem que l'aproximació serà vàlida, almenys, quan la longitud d'ona sigui de 10 m. Això correspon a la banda de l'alta freqüència (HF, de l'anglès *high frequency*) i les bandes que queden per sobre: freqüència mitjana (MF, de l'anglès *medium frequency*), baixa freqüència (LF, de l'anglès *low frequency*) i totes les bandes que queden per sota.

Resum

Fins aquest mòdul havíem vist les propiestats de les ones en general, i de les electromagnètiques en particular: des de com es descriuen fins a com es propaguen. Quedava per veure, però, com es generen. És precisament això el que hem vist en aquest mòdul.

Hem començat definint què és la **radiació**, que per a nosaltres serà només la transmissió d'energia en forma d'ones electromagnètiques, ja que no considerarem la transmissió d'energia en forma de partícules. Tot seguit, hem pogut veure com es pot produir aquesta radiació, simplement amb un dipol elèctric connectat a un generador d'alta freqüència.

Veure com es genera i evoluciona el camp ens ha permès comprendre un concepte que ja havíem vist en els mòduls anteriors: que els camps es propaguen a una velocitat finita, que en el cas del buit és la velocitat de la llum en el buit. Hem introduït aleshores els **potencials retardats**, tant escalar com vectorial, que tenen en compte aquest retard:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}',t')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} dv'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} dv'$$

Tot seguit, hem introduït uns dispositius dissenyats específicament per a emetre o rebre radiació electromagnètica: les **antenes**, que hem vist que poden emetre o rebre en determinades direccions. Poden ser omnidireccionals, bidireccionals o direccionals segons si emeten en totes direccions, només endavant i endarrere o només endavant.

Per a representar la direccionalitat de l'emissió o recepció de les antenes es fan servir els **diagrames de radiació**, en els quals es representa la densitat d'energia radiada en cada direcció i el lòbul principal ens indica quina és la direcció principal de radiació.

En aquest punt ja disposàvem de totes les eines necessàries per a fer un exemple de radiació, i per això hem calculat la radiació d'un dipol. Per a fer-ho hem seguit els passos següents:

- Calcular el potencial vectorial.
- Calcular els camps elèctric i magnètic, mitjançant el potencial vectorial calculat en el pas anterior.

- Calcular el vector de Poynting, mitjançant els camps elèctric i magnètic calculats en el pas anterior.
- Calcular la potència radiada, mitjançant el vector de Poyting calculat en el pas anterior.

Hem fet els càlculs considerant que estàvem molt lluny del dipol i que les dimensions del dipol eren molt menors que la longitud d'ona. Aquestes aproximacions, tot i no ser vàlides en general (especialment la segona), ens permeten obtenir un resultat que ajuda a entendre la radiació del dipol des d'un punt de vista prou acurat qualitativament. Així, hem trobat que el dipol radia principalment en una direcció perpendicular al seu eix. Això es pot veure de la densitat de potència radiada, del vector de Poynting, que depèn de l'angle de radiació segons la fórmula:

$$S = \frac{l^2 I_0^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \frac{\omega^2}{c^3} \sin^2\theta \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

A partir de la densitat de potència, integrant en totes les direccions de l'espai, hem trobat que la potència radiada total és:

$$\bar{P} = \frac{l^2 I_0^2 \omega^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

I a partir d'aquest resultat hem pogut definir la resistència de radiació que, en el buit, és:

$$R = 789 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \ \Omega$$

Amb aquest mòdul tanquem, per tant, una primera aproximació a les ones electromagnètiques. Aquestes estaran presents en bona part de les assignatures de la titulació, ja que pràcticament tots els senyals amb què treballareu són ones electromagnètiques.

Exercicis d'autoavaluació

1. Quina freqüència té una microona de 5 cm de longitud d'ona?
a) 6 GHz
b) 6 MHz
c) 6 THz
d) 6 Hz

2. Podem treballar indistintament amb els potencials o amb els camps?
a) Només en el cas del potencial vector.
b) Només en el cas del potencial escalar.
c) Sí, sempre, però cal imposar condicions tant en el potencial escalar com en el potencial vectorial.
d) Sí, sempre, però cal imposar condicions només en el potencial escalar.

3. Els potencials retardats...
a) ... s'haurien de fer servir sempre.
b) ... coincideixen amb els potencials d'estàtica quan estem en electrostàtica o magnetostàtica.
c) ... tenen en compte el temps que triga a arribar el camp electromagnètic a un punt.
d) Totes les respostes anteriors són correctes.

4. Una antena amb el lòbul principal a 0°, un lòbul secundari, pràcticament de la mateixa mida, a 180° i amb la resta de lòbuls secundaris 10 vegades menors és una antena...
a) ... omnidireccional.
b) ... bidireccional.
c) ... direccional.
d) No es pot saber quin tipus d'antena és.

5. Una antena omnidireccional...
a) ... no té lòbul principal.
b) ... té molts lòbuls principals.
c) ... pot fer-ho tot.
d) ... té un lòbul principal i molts de secundaris.

6. En coordenades polars esfèriques...
a) ... les tres components tenen les mateixes unitats.
b) ... les unitats de cada component dependran de la magnitud que estem mesurant.
c) ... les components θ i ϕ sempre tindran unitats angulars.
d) Totes les respostes anteriors són correctes.

7. El vector de Poynting...
a) ... indica el flux d'energia radiada i es mesura en W/m^2.
b) ... indica el flux d'energia radiada i es mesura en J.
c) ... indica l'energia radiada i es mesura en J.
d) ... indica el flux d'energia radiada i es mesura en J/m^2.

8. La potència radiada...
a) ... indica l'energia total radiada i es mesura en W.
b) ... indica l'energia total radiada per unitat de temps i es mesura en W.
c) ... indica l'energia total radiada per unitat de temps i es mesura en J.
d) ... indica l'energia total radiada i es mesura en J.

Solucionari

1. a; **2.** c; **3.** d; **4.** b; **5.** a; **6.** c; **7.** a; **8.** b;

Glossari

amplada de feix a potència meitat *f* Valor que, en un diagrama de radiació, indica quan s'ha reduït la potència radiada a la meitat. Com més ample sigui aquest valor, menys direccional serà l'antena.

amplada de feix a –3 db *f* Vegeu **ample de feix a potència meitat**

angle d'inclinació *f* Angle del sistema de coordenades esfèriques que s'obté de la projecció de la distància radial, r, sobre l'eix z. Se sol representar amb la lletra θ i el vector unitari corresponent és $\vec{u}_\theta$.

angle azimutal *f* Angle del sistema de coordenades esfèriques que s'obté de la projecció sobre l'eix x de la projecció de l'angle d'inclinació sobre el pla xy. Se sol representar amb la lletra ϕ i el vector unitari corresponent és $\vec{u}_\phi$.

antena *f* Part d'un sistema transmissor o receptor dissenyada específicament per a radiar o rebre ones electromagnètiques. Aquesta definició és la de l'Institute of Electrical and Electronics Engineering (IEEE, Institut d'Enginyeria Elèctrica i Electrònica).

antena bidireccional *f* Antena que radia en dues direccions diametralment oposades.

antena d'obertura i reflector *f* Tipus d'antena. En són exemples les antenes parabòliques.

antena de fil *f* Tipus d'antena. En són exemples els dipols, o els monopols, que serien les típiques antenes del cotxe, espires, etc.

antena direccional *f* Antena que només radia en una direcció.

antena omnidireccional *f* Antena que radia de la mateixa manera en totes direccions.

condició de Lorentz *f* Relació entre el potencial escalar i el potencial vectorial per a camps en el buit. Expressa que la divergència del potencial vectorial ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$) és proporcional a la derivada respecte al temps del potencial escalar ($\frac{\partial \phi}{\partial t}$), canviada de signe. La constant de proporcionalitat és la inversa de la velocitat de la llum, c.

diagrama de radiació *m* Representació gràfica de les propietats de radiació d'una antena, en totes les direccions de l'espai, a una distància fixa.

dipol oscil·lant elèctric *m* Sistema de càrregues que es pot considerar igual a dues càrregues resultants, de la mateixa magnitud, però una positiva i l'altra negativa, separades una certa distància.

directivitat *f* Quocient entre el que radia una antena en una direcció determinada, i el que hagués radiat en aquella direcció la mateixa antena si fos isòtropa.

distància radial *f* Distància d'un punt en coordenades esfèriques a l'origen de coordenades. Se sol representar amb la lletra r i el vector unitari corresponent és $\vec{u}_r$.

feix principal *m* Vegeu **lòbul principal**

lòbul principal *m* Zona de màxima radiació en un diagrama de radiació.

lòbul secundari *m* Qualsevol zona d'un diagrama de radiació que no és la de màxima radiació.

moment dipolar elèctric *m* Mesura de la separació entre les càrregues positives i negatives d'un sistema. S'acostuma a representar mitjançant la lletra $\vec{p}$ i es calcula com el producte de la càrrega positiva pel vector que uneix les càrregues positives i negatives.

potència radiada *f* Energia total radiada per unitat de temps. Es mesura en watts (W).

potencial escalar elèctric *m* Energia potencial elèctrica per unitat de càrrega. És una magnitud escalar i s'acostuma a representar amb la lletra V. Està relacionat amb el camp elèctric mitjançant el gradient: el camp elèctric $\vec{E}$ és el gradient del potencial escalar canviat de signe, $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

potencial vectorial magnètic *m* Potencial associat al camp magnètic. És una magnitud vectorial i s'acostuma a representar amb la lletra $\vec{A}$. Està relacionat amb el camp d'inducció magnètica mitjançant el rotacional: el camp d'inducció magnètica $\vec{B}$ és el rotacional del potencial vector, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

potencials retardats *m pl* Expressions dels potencials escalar i vectorial que tenen en compte el temps que triga el camp electromagnètic a arribar a un punt determinat.

radiació *f* Emissió i transferència d'energia en forma d'ones electromagnètiques o partícules.

radiació artificial *f* Radiació que es genera mitjançant l'activitat de l'home. Exemples en serien les ones de ràdio o televisió.

radiació natural *f* Radiació que es genera de forma natural, com seria la que ens arriba de les estrelles (en forma de llum, ones de ràdio, microones, etc.).

relació del lòbul principal a secundari *f* Quocient entre el valor del lòbul principal i el del lòbul secundari més gran. Aquest quocient dóna idea de quanta potència es perd en la resta de direccions.

sistema de coordenades esfèriques *f* Sistema de coordenades en tres dimensions en el qual la posicio d'un punt s'especifica mitjançant la distància radial, l'angle d'inclinació i l'angle azimutal.

vector de Poynting *m* Flux d'energia total radiada pel camp electromagnètic. Es mesura en watts per metre quadrat (W/m^2).

Bibliografia

Alonso, M.; Finn, E. J. (1998). *Física. Campos y ondas* (volum 2). Mèxic: Addison Wesley Logman.

Feynman, R. P.; Leighton, R. B.; Sands, M. (1987). *Física, Vol. II: electromagnetismo y materia*. Pearson Addison Wesley

Reitz, J. R.; Milford, F. J. (2001). *Fundamentos de la teoría electromagnética* (1a edició). Mèxic: Alhambra Mexicana, S.A.

Tipler, P. A.; Mosca, G. (2005). *Física para la ciencia y la tecnología* (5a edició, volum 1B). Barcelona: Reverté.

Wangsness, R. K. (1983). *Campos electromagnéticos*. Mèxic: Editorial Limusa.