Ones

Introducció als fenòmens ondulatoris

Marc Figueras Atienza

PID_00159121

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

Aquest mòdul està dedicat a les ones, és a dir, al moviment ondulatori. Segurament tots teniu una idea intuïtiva de què és una ona i segur que també heu vist ones en l'aigua i potser heu sentit a parlar d'ones sonores o d'ones electromagnètiques.

Amb el que estudiareu en aquest mòdul podreu descriure de forma molt més precisa què és una ona. Trobareu una definició exacta d'ona i descobrireu com es poden descriure matemàticament. Veureu que les ones es generen quan es produeix una pertorbació i veureu també de quina manera es poden propagar.

L'objectiu general és tenir una visió global dels fenòmens ondulatoris, alguns dels quals es tractaran amb més detall en mòduls posteriors (les ones acústiques en el mòdul "Acústica" i les electromagnètiques en la resta d'aquesta assignatura, amb una part concreta dedicada a la llum). El fet que tots els fenòmens ondulatoris es poden descriure de la mateixa manera, independentment del cas particular que estiguem tractant, és la idea fonamental que pretén establir aquest mòdul.

Objectius

Els objectius que ha d'aconseguir l'estudiant una vegada treballats els continguts d'aquest mòdul són:

1. Saber què és una ona i quines característiques defineixen el moviment ondulatori.
2. Conèixer els diferents tipus d'ones i les seves característiques definitòries.
3. Saber com es pot descriure matemàticament una ona.
4. Conèixer i identificar l'equació d'ones i poder obtenir-la en algun cas particular.
5. Saber què és una ona harmònica i com es pot descriure.
6. Poder identificar els paràmetres bàsics de qualsevol ona harmònica en diverses situacions.
7. Saber què passa quan es troben dues o més ones en un mateix punt i veure com es pot descriure matemàticament aquest fet.
8. Saber què els passa a les ones quan els imposem condicions de contorn.
9. Tenir clar quan i com es produeixen els fenòmens de reflexió i refracció d'ones.
10. Saber què passa quan l'emissor de les ones es troba en moviment relatiu respecte a l'observador.
11. Tenir una idea qualitativa dels aspectes energètics de les ones, mitjançant els conceptes d'energia i intensitat.
12. Saber com interaccionen les ones quan travessen medis materials i quins fenòmens es poden produir.

1. Les ones

En aquest primer apartat del mòdul estudiarem de forma general les ones, el moviment ondulatori. Definirem què és una ona i veurem quins tipus diferents d'ones podem observar. Posteriorment, intentarem trobar-ne una descripció matemàtica tan general com sigui possible.

1.1. Què és una ona?

Tots hem llençat alguna vegada una pedra dins d'un toll d'aigua (i si no, podeu provar-ho ara mateix!). Què passa quan ho fem? Quan la pedra cau a l'aigua, veiem com l'aigua al voltant del punt on ha caigut comença a moure's amunt i avall; després l'aigua una mica més allunyada, que abans estava ben tranquil·la, també comença a moure's amunt i avall (vegeu la figura 1). De fet, si ens hi fixem bé, aquest moviment amunt i avall de l'aigua va arribant cada vegada més lluny.

Figura 1. Ones en la superfície de l'aigua

Font: Wikimedia Commons; autor: Roger McLassus

El que hem fet en tirar la pedra és **pertorbar** l'aigua, és a dir, hem fet que s'allunyi de la seva situació normal, de la seva situació "tranquil·la" en què no es movia, i ara, en canvi, es mou amunt i avall. I no només això; a més, aquest moviment de l'aigua amunt i avall, aquesta **pertorbació**, es **propaga**, és a dir, a mesura que passa el temps arriba cada vegada més lluny del punt on l'hem originat.

Bé, això que acabem de crear a la superfície de l'aigua és una **ona**. Podem veure com es creen i es propaguen ones quan llencem una pedreta en un toll d'aigua, però també quan donem un cop al cordill d'estendre la roba, per exemple. En tots dos casos creem una pertorbació en un lloc i aquesta pertorbació es propaga a altres punts (a altres punts del toll d'aigua en el primer exemple i a altres punts del cordill, en el segon). Això també passa quan produïm un so; en aquest cas l'ona no és evident, no la podem "veure"; en canvi sí que és evident la propagació d'una pertorbació des d'un lloc d'origen cap a un altre, que en aquest cas és el so i, per tant, la podem "sentir".

En tots aquests casos hi ha mecanismes físics que fan que una pertorbació que es produeix en un lloc tingui uns efectes en un altre lloc, situat a una certa distància, i després d'un cert temps. A més a més, fixem-nos que només es propaga la **pertorbació**, no hi ha cap cos ni cap altre agent físic que es desplaci des del lloc d'origen fins al lloc d'arribada. En cada cas, la pertorbació consistirà en una variació d'alguna magnitud física respecte a un valor inicial; aquesta magnitud pot ser:

Mecanisme físic

Entenem per mecanisme físic un conjunt de forces que fan canviar l'estat d'un sistema, és a dir, que modifiquen la situació en què es troba un cos o un conjunt de cossos.

- un desplaçament,
- la pressió,
- la densitat,
- el camp elèctric,
- etc.

i el mecanisme mitjançant el qual la variació d'aquesta magnitud es propaga per l'espai serà molt diferent. Per exemple, en el cas de l'ona que provoquem en l'aigua en llençar-hi una pedreta, la magnitud que pertorbem és l'altura de la superfície de l'aigua, que va variant amunt i avall, i aquesta pertorbació es propaga gràcies a les atraccions que hi ha entre les molècules de l'aigua.

En general, doncs, la magnitud física considerada realitzarà alguna mena d'oscil·lació al voltant d'un punt d'equilibri però sense patir cap desplaçament net. Aquesta magnitud, i especialment la seva variació a mesura que passa el temps, ens caracteritzarà l'ona; és a dir, descriurem l'ona mitjançant la variació d'aquesta magnitud. En la figura 2 podeu veure una representació esquemàtica d'una pertorbació, una ona, que es propaga cap a la dreta amb una certa velocitat v.

Punt d'equilibri

El punt d'equilibri és el valor que té una magnitud física quan no la pertorbem. En el cas de l'aigua, el punt d'equilibri és l'altura de l'aigua quan està "tranquil·la", abans de tirar-hi la pedra.

El fet que la pertorbació es vagi propagant ens indica que s'està propagant energia, que és la que permet que la magnitud pertorbada en un punt també pugui resultar pertorbada en un altre punt un temps després. En altres paraules, i tornant novament a l'exemple del toll d'aigua, quan llencem la pedra a l'aigua, li comuniquem una certa energia, que és la que provoca la pertorbació. I posteriorment aquesta energia es va propagant i és la que permet que la pertorbació vagi apareixent més i més lluny.

Figura 2. Pertorbació que es propaga cap a la dreta

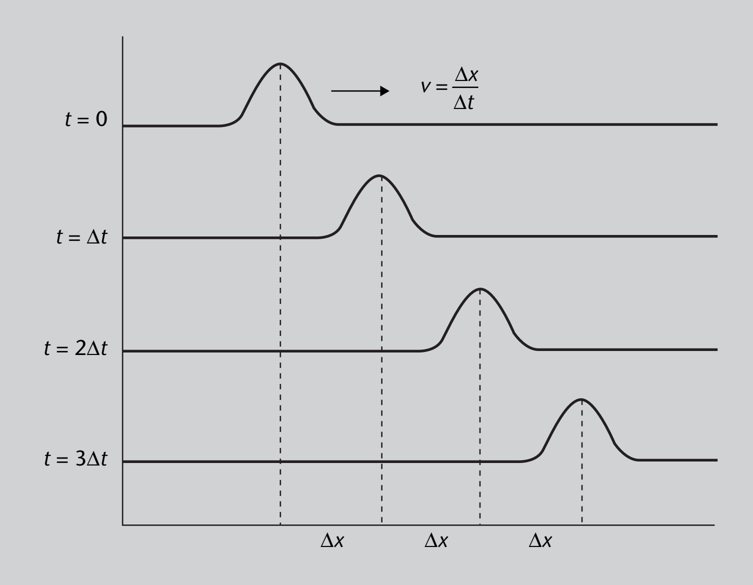


Figura 2

Pertorbació (ona) que es propaga cap a la dreta, representada en diferents instants de temps ($t = 0$, $t = \Delta t$, etc.). La velocitat de propagació d'aquesta pertorbació, v, és l'espai recorregut, Δx dividit pel temps emprat en recórrer-lo, Δt.

Una **ona** és una pertorbació que es propaga per l'espai i el temps, amb transport d'energia i quantitat de moviment però sense transport net de matèria.

Fixeu-vos que la definició remarca el fet que en una ona no hi ha moviment net de matèria, només hi ha propagació d'energia i de quantitat de moviment. És aquesta propagació d'energia la que fa que la pertorbació vagi arribant cada vegada més lluny.

Atès que, a partir d'aquesta definició, el mecanisme físic particular d'una ona resulta irrellevant, la branca de la física que s'ocupa de les ones n'estudia les propietats genèriques, independentment del seu origen físic. És cert que, en darrer terme, per a cada cas particular haurem de considerar de quin tipus d'ones estem parlant, però les característiques generals del moviment ondulatori són genèriques per a qualsevol tipus d'ona. Totes les ones presenten fenòmens com ara la reflexió i la refracció, la interferència, la difracció, la dispersió i altres que anirem comentant en aquest mòdul, independentment de quina mena d'ones siguin.

Ara ja hem vist, doncs, què és una ona. A continuació el que farem és, en primer lloc, veure com es poden classificar diferents tipus d'ones, i després intentarem trobar una descripció matemàtica de les ones, és a dir, trobar un conjunt d'equacions que, quan les solucionem, ens permetin saber com es comportarà una ona. Una vegada tinguem clar com podem descriure matemàticament qualsevol ona, passarem a un cas particular especialment important, les anomenades *ones harmòniques*, que també ens serviran per a introduir uns quants conceptes habituals en parlar d'ones, com la longitud d'ona o la freqüència.

1.2. Tipus d'ones

En el subapartat anterior hem vist que en cada cas particular la magnitud pertorbada en un moviment ondulatori pot ser diferent, i també ho pot ser el mecanisme de propagació d'aquesta pertorbació. Així i tot, podem classificar les ones en funció de diverses característiques. D'aquesta manera tenim:

1) En funció de la direcció de la pertorbació respecte a la propagació de l'ona:

a) ones transversals,

b) ones longitudinals,

c) ones mixtes.

2) En funció de si necessiten un medi per a propagar-se:

a) ones mecàniques,

b) ones no mecàniques.

3) En funció de la seva propagació:

a) ones planes,

b) ones circulars,

c) ones esfèriques.

Vegem amb detall cadascun d'aquests tipus.

1.2.1. Ones en funció de la direcció de la pertorbació

La primera classificació possible és en funció de la direcció de la pertorbació respecte a la direcció de propagació de l'ona. És a dir, en quina direcció es mou la magnitud física que caracteritza l'ona quan la comparem amb la direcció de propagació de l'ona. En aquest cas, les ones es poden separar en dos grans grups: transversals i longitudinals.

Recordeu

La magnitud física que caracteritza l'ona és la que que fem servir per a descriure-la, estudiant-ne la variació en funció del temps.

En una **ona transversal** la pertorbació és perpendicular a la direcció de propagació de l'ona. En una **ona longitudinal** la pertorbació és paral·lela a la direcció de propagació.

Exemple. Ones longitudinals i ones transversals

Les ones sonores són un exemple d'ones longitudinals, i també les ones en una molla i algunes ones sísmiques, com les ones P. En aquests casos, la pertorbació consisteix en un desplaçament de les partícules del medi endavant i endarrere en la mateixa direcció en què s'està propagant l'ona. En la figura 3a podeu veure una representació d'una ona longitudinal: les partícules del medi es mouen endavant i endarrere i creen zones de major o menor densitat (representades com a més fosques o més clares).

Enllaços d'interès

Podeu veure animacions d'ones transversals i longitudinals, força aclaridores, a: http://www.youtube.com/watch?v=Rbuhdo0AZDU, http://www.youtube.com/watch?v=MoVz2ENJb8M i a http://www.youtube.com/watch?v=f66syH8B9D8.

Les ones electromagnètiques són un exemple d'ones transversals. També ho són les ones que podem generar en una corda fent-ne oscil·lar un extrem amunt i avall, les ones superficials a l'aigua o algunes ones sísmiques, com les ones S. En la figura 3b podeu veure una representació d'una ona transversal: la magnitud que varia ho fa perpendicularment a la direcció de propagació (en aquest cas particular, a més, ho fa seguint la forma d'una funció sinusoïdal, però podria tenir qualsevol forma).

Figura 3. Ones transversals i longitudinals

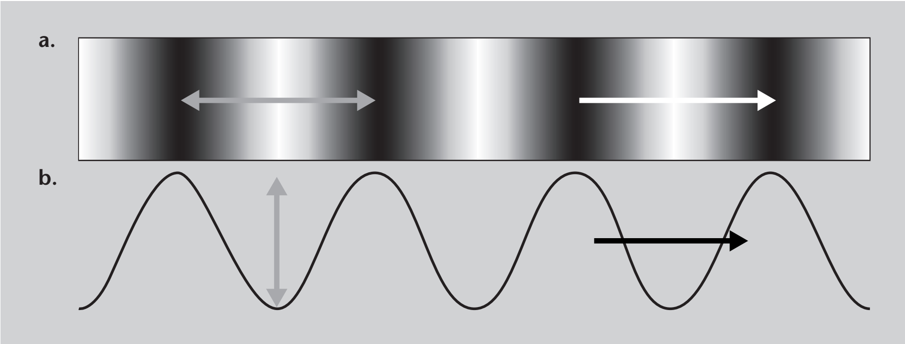


Figura 3

a. Ona longitudinal. El color més fosc o més clar indica un valor més alt o més baix de la magnitud pertorbada (densitat, pressió, etc.).
b. Ona transversal. El perfil de l'ona representa els valors que assoleix la magnitud pertorbada, que sempre varia en direcció perpendicular a la direcció de propagació.
En ambdós casos, les fletxes grises indiquen la direcció en què es produeix la pertorbació, la fletxa blanca i la fletxa negra mostren la direcció de propagació de l'ona.

Polarització i ones transversals

En el cas de les ones transversals, la pertorbació, com acabem de dir, és perpendicular a la direcció de propagació, però encara podem afinar més. La direcció definida per la pertorbació es pot mantenir sempre igual, girar al voltant de la direcció de propagació d'una manera ben definida* o anar canviant aleatòriament. Podem imaginar-ho en el cas d'una ona que produïm en una corda fent-ne oscil·lar un extrem amb la mà: podem fer-ho movent sempre la mà amunt i avall, o bé anar canviant la direcció de moviment de la nostra mà (ara amunt i avall, ara de dreta a esquerra, ara alguna cosa entremig, etc.). La propietat que descriu aquest fenomen s'anomena *polarització*. Quan la direcció de la pertorbació es manté sempre igual o canvia de manera ben definida es diu que l'ona és polaritzada; en cas contrari, que l'ona és no polaritzada. Dos exemples de polarització molt típics són la polarització lineal i la polarització circular.

*** Quan diem "d'una manera ben definida" ens referim al fet que va canviant de manera que es pot expressar amb una funció matemàtica.**

La **polarització** és la condició d'una ona transversal per la qual la direcció en què es produeix la pertorbació té una relació ben definida respecte a la direcció de propagació. En una **ona polaritzada linealment** la direcció de la pertorbació sempre es manté igual respecte a la direcció de propagació. En una **ona polaritzada circularment** la direcció de la pertorbació gira amb una velocitat angular constant respecte a la direcció de propagació.

En la figura 4a podeu veure una representació de dues ones polaritzades linealment (una amb polarització en l'eix x i l'altra amb polarització en l'eix y) i en la figura 4b, la d'una ona polaritzada circularment. Totes les ones es propaguen en la direcció de l'eix z. En el cas de les ones polaritzades linealment (figura 4a), la pertorbació es produeix sempre amb una mateixa orientació respecte als eixos x i y, és a dir, la magnitud que varia sempre ho fa mantenint aquesta orientació. En els dos casos mostrats, l'orientació d'una ona és paral·lela a l'eix *x* i la de l'altra, a l'eix *y*, tot i que podria formar qualsevol angle. Així, la projecció de la pertorbació sobre el pla *xy* és simplement una línia recta. En el cas de l'ona polaritzada circularment (figura 4b), la pertorbació va girant amb velocitat angular constant al voltant de l'eix *z* i la seva projecció sobre el pla *xy* seria una circumferència.

Enllaços d'interès

No us preocupeu si us costa una mica visualitzar mentalment els diversos tipus de polarització; no és fàcil! Podeu ajudar-vos amb algunes animacions, com les següents miniaplicacions (*applets*) de Java disponibles a: http://fys.kuleuven.be/pradem/applets/suren/Twave/PolWave.html o http://www.enzim.hu/~szia/cddemo/edemo2.htm per a ones polaritzades linealment i http://www.enzim.hu/~szia/cddemo/edemo7.htm per a ones polaritzades circularment.

Figura 4. Representació esquemàtica de la polarització

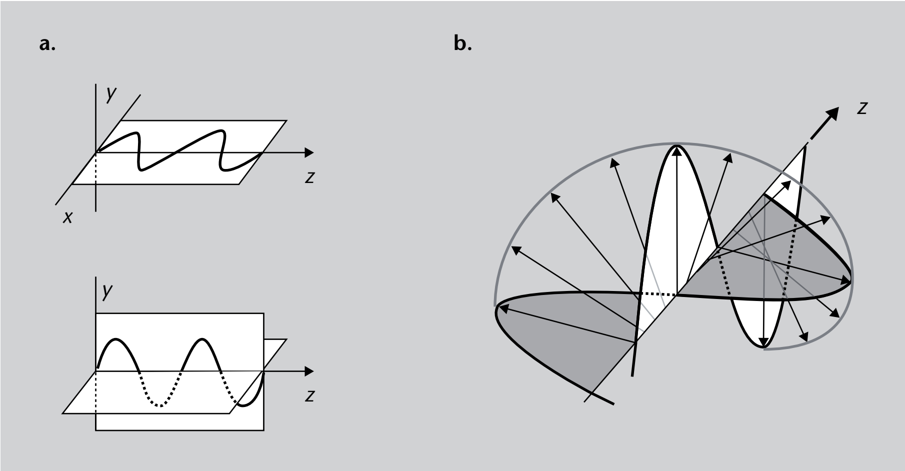


Figura 4

Ones polaritzades. En tots dos casos les ones es propaguen en la direcció de l'eix *z*.
a. Ones polaritzades linealment.
b. Ona polaritzada circularment.

En alguns casos les ones són una barreja d'ones transversals i ones longitudinals, a vegades anomenades *ones mixtes*. En realitat, les ones superficials que es produeixen a l'aigua són ones mixtes, ja que l'aigua es desplaça verticalment i també horitzontalment i les partícules realitzen moviments relativament complexos. En la figura 5 podeu veure un exemple d'ones mixtes.

Figura 5. Ones mixtes en la superfície de l'aigua

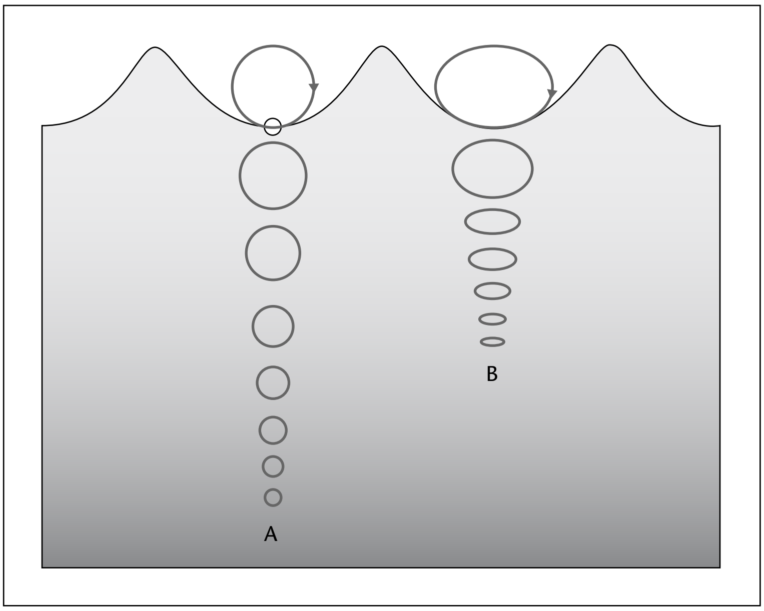


Figura 5

Les partícules descriuen una combinació de moviment transversal i moviment longitudinal en aigües profundes (A) o aigües poc profundes (B). Podeu veure una animació d'aquesta mena de moviment ondulatori a: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/Mouvement_dans_une_vague_en_eau_peu_profonde.gif.

1.2.2. Ones en funció del medi de propagació

A vegades també es diferencien les ones en funció de si necessiten un medi per a propagar-se o no en necessiten cap. Les **ones no mecàniques** poden propagar-se sense cap medi. En són un exemple les ones electromagnètiques, que estan formades per un camp elèctric i un camp magnètic variables que es van reforçant mútuament i es propaguen. Un altre exemple són les ones gravitatòries, però com que són hipotètiques, no hi entrarem: per a nosaltres, les úniques ones no mecàniques seran les electromagnètiques.

En el mòdul "Propagació d'ones electromagnètiques" s'explica què vol dir això dels camps elèctric i magnètic que es van reforçant mútuament.

Totes les altres ones que considerem necessiten un medi per a propagar-se i, en general, s'anomenen **ones mecàniques**. Quan una ona es propaga per un medi, hi ha algunes limitacions. Si totes les parts que formen el medi estiguessin rígidament unides, no es podrien desplaçar unes respecte a les altres, de manera que no es podria generar cap ona, cap mena de pertorbació. D'altra banda, si el medi fos extraordinàriament flexible, l'ona tampoc no es podria propagar: no hi hauria manera de fer que la pertorbació en un punt es transmetés a un altre punt adjacent. Des d'un punt de vista físic es diu que una ona no es pot propagar en un medi infinitament rígid ni tampoc en un medi infinitament flexible.

1.2.3. Ones en funció de la seva propagació

Finalment, la darrera classificació, en funció de la propagació, no afecta una ona individual, només s'utilitza quan considerem un conjunt d'ones emeses per una font. Quan tenim moltes ones que es propaguen conjuntament és útil introduir els conceptes de *front d'ona* i de *raig*.

El **front d'ona** és el conjunt de punts en què totes les ones que considerem es troben en el mateix estat d'oscil·lació. És a dir, és el conjunt de punts en què totes les ones es troben en el seu punt més alt, per exemple (o en el seu punt més baix, tant se val; la idea important és que estiguin en un mateix estat d'oscil·lació).

Els **rajos** són línies perpendiculars en tot moment al front d'ona, que ens indiquen en quina direcció s'està propagant l'ona.

Quan el front d'ona és pla, els rajos són paral·lels i tenim una **ona plana**. Això vol dir, a partir de la definició de front d'ona que acabem de donar, que tots els punts que estan en un mateix estat d'oscil·lació formen un pla. Una ona en una dimensió sempre és una ona plana, mentre que en dues i tres dimensions, si som prou lluny del focus emissor d'ones, sempre podem considerar que les ones són, aproximadament, planes. En la figura 6 podeu veure una representació esquemàtica d'un front d'ona pla, és a dir, d'una ona plana.

Figura 6. Representació esquemàtica d'un front d'ona pla

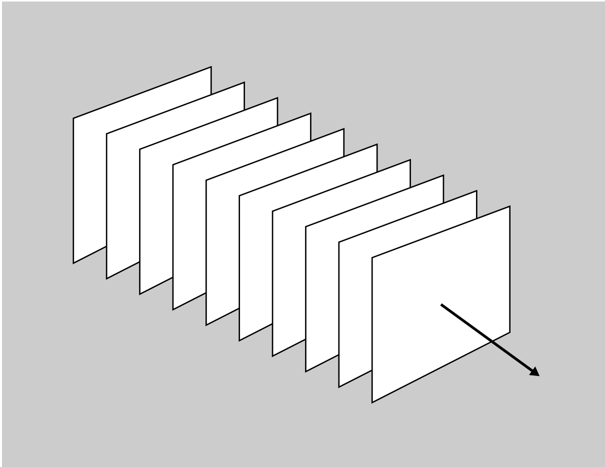


Figura 6

Cada pla representa el conjunt de punts on totes les ones que formen el front tenen el seu valor màxim.

Si una font puntual emet ones en un medi en dues o tres dimensions, el front d'ona formarà, respectivament, circumferències o esferes centrades en la font emissora i tenim una **ona circular** o una **ona esfèrica**, en cada cas. Tornant a l'exemple de la pedra que llencem en un toll, en aquest cas tenim precisament ones circulars que es van propagant a partir del punt on hem llençat la pedra.

Enllaç d'interès

Podeu veure una animació, que resulta potser més clara que la fotografia de l'aigua del començament del mòdul, a: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blender3D_CircularWaveAnim.gif.

1.3. Què hem après?

En aquest primer apartat ens hem limitat a plantejar la qüestió bàsica per a començar a treballar: què és una ona? L'hem definida com una pertorbació que es propaga per l'espai i transporta energia i quantitat de moviment, però no matèria. Aquesta és la idea a partir de la qual començarem a tractar les ones amb més detall.

També hem fet una mica de classificació de les ones i hem mirat com les podem classificar en funció de diversos paràmetres. Així, hem considerat ones longitudinals i ones transversals (i aquestes ens han dut a introduir el concepte important de polarització); ones mecàniques i ones no mecàniques; i ones planes, circulars i esfèriques.

2. Descripció matemàtica de les ones

Una vegada presentada una descripció general de les ones i vistos els diferents tipus en què es poden classificar, el pas següent és mirar de trobar-ne una descripció matemàtica. Fins ara hem descrit les ones d'una manera qualitativa, que no ens permet treballar-hi. Necessitem descriure-les d'una manera quantitativa i això és, precisament, el que farem ara: buscarem una equació que ens servirà per a qualsevol tipus d'ona i que, quan la solucionem, ens dirà com evoluciona l'ona al llarg del temps, és a dir, com es propaga i quin valor té la pertorbació en cada punt de l'espai i en cada moment. Amb aquesta equació ja podrem treballar amb les ones amb tota generalitat.

2.1. La funció d'ona

Imaginem una pertorbació que en un moment donat, que considerarem inicial, es troba en una certa posició que també considerarem inicial. La forma de la pertorbació la descrivim amb una certa funció y que dependrà del temps i del punt de l'espai on estiguem: $y = f(x,t)$. La forma concreta de la pertorbació i, per tant, de la funció y ara és irrellevant, només ens interessa saber com variarà en funció del temps.

Funcions

Quan representem una funció com $y = f(x,t)$ vol dir que la magnitud y és funció de x i de t.

Considerarem que aquesta pertorbació es propaga en una dimensió, cap a la dreta (podem suposar també cap a l'esquerra, la discussió seria equivalent), i sense deformar-se (és a dir, la forma de l'ona en un punt és exactament igual a la que tenia en un altre punt un temps abans), com podeu veure a la figura 7. Després d'un cert temps t, la pertorbació, doncs, s'ha propagat en el sentit positiu de x amb una certa velocitat v i es trobarà en un cert punt x; per tant, $x = x_0 + vt$ i, així, $x_0 = x - vt$. La funció $y = f(x)$, que ens descriu aquesta pertorbació en el punt x, ha de ser igual a com era en el punt i el moment inicials, $y = f(x_0)$, perquè recordeu que hem dit que la pertorbació no es deforma. Així, imposem aquesta condició:

Si un objecte es desplaça a velocitat constant, recorre un espai que és igual a la seva velocitat multiplicada pel temps.

$$y = f(x) = f(x_0) = f(x - vt) \tag{1}$$

Ara bé, l'ona també es pot propagar cap a l'esquerra, en el sentit negatiu de x. Un raonament igual a l'anterior ens duu llavors a:

$$y = f(x + vt) \tag{2}$$

Figura 7. Pols d'ona que es propaga cap a la dreta

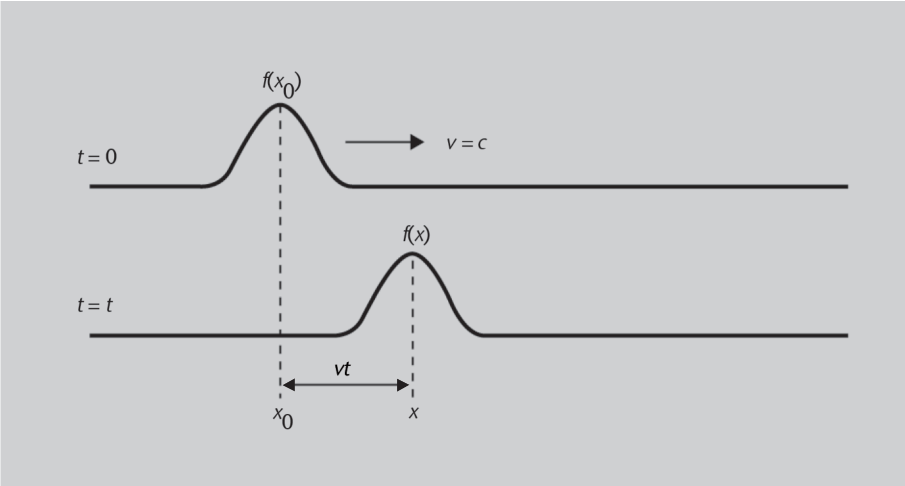


Figura 7

Representació esquemàtica d'una ona que es propaga cap a la dreta, en dos instants de temps, $t = 0$ i $t = t$. Després d'un temps t, la pertorbació s'ha propagat en el sentit positiu de x amb una certa velocitat v i es trobarà en un cert punt x; per tant, $x = x_0 + vt$ i, així, $x_0 = x - vt$. La funció $y = f(x)$ que ens descriu aquesta pertorbació en el punt x ha de ser igual a com era en el punt i el moment inicials, $y = f(x_0)$, de manera que $f(x) = f(x_0)$.

Així, en general, la funció:

$$y = f(x \pm vt) \tag{3}$$

és la **funció d'ona**. Qualsevol ona, sigui del tipus que sigui, complirà aquesta equació, aquesta relació funcional. Dit d'altra manera, qualsevol ona es podrà descriure mitjançant una funció que depèn de $x \pm vt$.

2.2. L'equació d'ones

Fins ara hem descrit matemàticament una ona de manera molt genèrica. El cert és que l'expressió $f(x \pm vt)$ (equació 3) només ens diu quina dependència en x i en t ha de tenir qualsevol tipus de pertorbació que es propaga per l'espai, però no ens diu com és exactament aquesta pertorbació ni quina és la magnitud física que resulta pertorbada. En cada cas particular, aquesta magnitud serà diferent i els mecanismes pels quals es propaga la pertorbació també seran diferents. Així i tot, el que farem ara és veure si és possible trobar alguna expressió que hagi de complir la magnitud pertorbada, independentment del procés físic involucrat, i que ens permeti saber com evoluciona l'ona a mesura que passa el temps i a mesura que es desplaça.

Per a fer això aplicarem a un parell de casos significatius un procediment que ja coneixem: calcularem el moviment de la pertorbació a partir de les forces que actuen sobre el medi que estem pertorbant, de la mateixa manera que calculem el moviment d'un cos sotmès a determinades forces.

Com ho fèiem per a trobar el moviment d'un cos sabent les forces que hi actuen? En primer lloc trobàvem la resultant de les forces i després aplicàvem la segona llei de Newton, $F = ma$, per a obtenir l'acceleració; una vegada coneguda l'acceleració podíem arribar a determinar el moviment del cos. Ara farem exactament això.

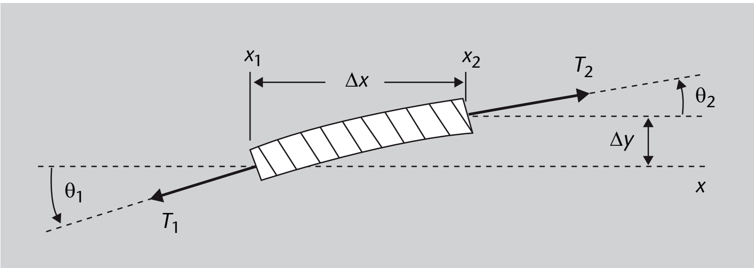
2.2.1. Equació d'ones transversal: una corda

En primer lloc ens preocuparem d'una ona que es propaga per una corda. Considerem un tros de corda com el que es mostra en la figura 8. La corda es mou amunt i avall, però no de dreta a esquerra ni d'esquerra a dreta; així, la magnitud física pertorbada és el desplaçament de la corda en la direcció vertical, $y(x,t)$. La longitud del tros de corda és Δx i la seva densitat lineal és λ, de manera que la massa total del tros de corda és

$$m = \lambda \Delta x \tag{4}$$

La tensió, que anomenarem $\vec{T}$, a què està sotmès el tros de corda en els seus extrems és $\vec{T}_1$ per un extrem, i $\vec{T}_2$ per l'altre, que formen uns angles θ_1 i θ_2 amb l'horitzontal. Podeu veure aquesta situació en la figura 8, on hem representat el fragment de corda i les tensions que hi actuen.

Figura 8. Fragment d'una corda sotmesa a un moviment ondulatori



El que volem ara és aplicar la segona llei de Newton a aquest fragment de corda; és a dir, calcular la resultant de les forces que hi actuen i igualar-la a la massa per l'acceleració que es produeix. Comencem per calcular la força total en la direcció horitzontal:

$$F_x = T_2 \cos\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 \tag{5}$$

Ara bé, suposem que els angles són petits i llavors l'expressió anterior es redueix a:

$$F_x \approx T_2 - T_1 \tag{6}$$

Però com que en la direcció horitzontal no hi ha moviment, l'acceleració és zero i tenim $F_x = m \cdot 0$ i, per tant:

$$T_2 - T_1 = 0 \tag{7}$$

Densitat lineal

La densitat lineal de massa d'un material, λ (la lletra grega lambda minúscula), és la massa del material, m, per unitat de longitud, l: $\lambda = \frac{m}{l}$.

Recordeu

La magnitud pertorbada $\boldsymbol{y}$ és funció del temps $\boldsymbol{t}$ i de l'espai $\boldsymbol{x}$, ja que és diferent en cada punt i en cada moment.

Δ és la lletra grega delta majúscula, de manera que Δx es llegeix "delta ics". λ és la lletra grega lambda minúscula.

θ és la lletra grega theta minúscula (correspon aproximadament al so de la *z* castellana o del dígraf *th* anglès).

Figura 8

Els extrems del fragment, situats a x_1 i x_2 i de longitud Δx, estan sotmesos a unes forces T_1 i T_2, que formen respectivament uns angles θ_1 i θ_2 respecte a l'horitzontal.

Recordeu

Si els angles són petits sempre podem aproximar els sinus pels angles o per les tangents i els cosinus per 1. És a dir, $\cos\alpha \approx 1$ i $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$.

o, el que és el mateix:

$$T_2 = T_1 \tag{8}$$

Passem ara a la direcció vertical. La força en aquesta direcció és:

$$F_y = T_2 \sin\theta_2 - T_1 \sin\theta_1 \tag{9}$$

Novament, aprofitant que els angles són petits, això es redueix a:

$$F_y = T_2 \tan\theta_2 - T_1 \tan\theta_1 \tag{10}$$

i abans hem trobat que, aproximadament:

$$T_2 = T_1 \tag{11}$$

valor que anomenarem simplement T. Llavors, tornant a l'equació 10, amb aquest resultat tenim:

$$F_y = T \tan\theta_2 - T \tan\theta_1 \tag{12}$$

$$F_y = T(\tan\theta_2 - \tan\theta_1) \tag{13}$$

Ara bé, la tangent d'aquests angles és precisament la derivada del desplaçament vertical, $y(x,t)$, respecte a x calculada en els punts respectius.

Així:

$$F_y = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right] \tag{14}$$

Pendent d'una corba en un punt

Recordeu que el pendent d'una corba en un punt, que és la seva derivada, és igual a la tangent de l'angle que forma la corba amb l'horitzontal en aquell punt.

Fixeu-vos que utilitzem la derivada parcial (∂) ja que y depèn tant de x com de t, però ara només ens interessa la seva variació respecte a x.

Derivada parcial respecte a una variable

Si una funció depèn de dues o més variables, la seva derivada parcial respecte a una d'aquestes variables és simplement la seva derivada respecte a aquesta variable considerant les altres variables com a constants.

Aquesta és la força resultant. Ja tenim el membre de l'esquerra de la segona llei de Newton, la F de la fórmula $F = ma$. Ara ens cal el membre de la dreta, la massa per l'acceleració.

Recordeu que havíem vist que la massa de la corda es podia expressar en funció de la densitat lineal com a $\lambda\Delta x$ (equació 4). D'altra banda, recordeu que l'acceleració és simplement la segona derivada del desplaçament respecte al temps, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Per tant, la massa per l'acceleració és:

$$\lambda \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15}$$

i, per tant, l'expressió sencera $F = ma$ queda, utilitzant les equacions 14 per a la força i 15 per a la massa per l'acceleració:

$$T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right] = \lambda \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{16}$$

Aquesta expressió sembla molt enrevessada, però el membre de l'esquerra el podem simplificar: com fem tantes vegades en física, hem considerat un tros de corda de longitud arbitrària Δx, que ara cal avaluar en el límit en què la longitud tendeix a zero, perquè estem suposant implícitament que la variació de y respecte a x és constant, i això només és cert en general quan l'interval Δx és infinitament curt.

Així doncs, si passem el Δx de la dreta dividint a l'esquerra i fem el límit de $\Delta x \to 0$, l'expressió anterior queda com a:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right] = \frac{\lambda}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{17}$$

Ara fixeu-vos que el límit que tenim és precisament la definició de derivada. En aquest cas és una derivada respecte a x. Per tant, tenim la derivada respecte a x de $\partial y/\partial x$, és a dir, la seva segona derivada:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right] = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{18}$$

Finalment, doncs, la segona llei de Newton aplicada a la corda tensa ens dóna:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{19}$$

No us espanteu per l'aspecte de l'equació 19, no ens està dient res més que la segona derivada de y respecte a x ha de ser sempre igual a λ/T vegades la segona derivada de y respecte a t. Es tracta d'una equació diferencial, però de moment no ens preocuparem de saber com es resol. Hem obtingut una equació que ens descriu una ona en una corda, que és el que volíem.

Derivada d'una funció

Cal recordar que la derivada d'una funció $f(a)$ es defineix de la següent manera:

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

En el cas de l'equació 17, Δx fa el paper de h, $\frac{\partial y}{\partial x}$ fa el paper de f i recordeu també que els punts 1 i 2 estan separats per aquesta distància Δx, de manera que el punt 2 és el punt 1 + Δx.

2.2.2. Equació d'ones longitudinal: un gas

Ara considerem un cas ben diferent: les ones longitudinals de pressió que es propaguen per un gas, és a dir, el so. Les molècules del gas, amb una densitat ρ, es desplacen a dreta i esquerra respecte a la seva posició d'equilibri, de manera que creen variacions de densitat, ja que va variant el nombre de molècules que hi ha en cada tros i, per tant, variacions de pressió; així, com a magnitud pertorbada podem considerar el desplaçament de les molècules en la direcció longitudinal, $u(x,t)$, o la densitat $\rho(x,t)$ o la pressió $p(x,t)$.

ρ és la lletra grega rho minúscula i es llegeix "ro".

No explicarem ara amb detall el procés, com hem fet en el cas anterior, simplement donarem el resultat final, que és:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\rho}{B}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \qquad (20)$$

Recordeu

En general, $f(x,t)$ vol dir que la variable f depèn de les dues variables x i t, és a dir, de la posició i del temps.

on B és el mòdul de compressibilitat del medi per on es propaga l'ona, o mòdul de volum, que es defineix com la pressió necessària per a produir un canvi unitari de volum. De fet, el mòdul de compressibilitat en la propagació del so fa el paper anàleg al de la tensió T, en el cas de l'ona en una corda, ρ fa el paper de λ i p fa el paper del desplaçament y.

El mòdul de compressibilitat

El mòdul de compressibilitat, o mòdul de volum, B, es defineix com la pressió necessària per a produir un canvi unitari de volum. Per a l'acer, per exemple, $B \approx 160$ GPa i per a l'aigua $B \approx 2{,}2$ GPa, mentre que per a l'aire, en un procés adiabàtic (és a dir, sense intercanvi de calor), $B = 0{,}142$ GPa.

2.2.3. Equació d'ones general

Fixeu-vos que en ambdós casos hem trobat una expressió gairebé igual (les equacions 19 i 20) que ens relacionen la segona derivada de la magnitud pertorbada (el desplaçament vertical y en un cas, la pressió de l'aire p en l'altre) respecte a la direcció de propagació amb la segona derivada d'aquesta magnitud respecte al temps i amb un factor de proporcionalitat que depèn de característiques del medi (λ/T en un cas i ρ/B en l'altre). Aquesta relació és, precisament, la relació que estàvem buscant.

En el cas més general, doncs, qualsevol ona que es propaga en una dimensió compleix la relació

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (21)$$

on u és la pertorbació i k és una constant de proporcionalitat entre la segona derivada de la pertorbació respecte a l'espai i la segona derivada de la pertorbació respecte al temps (constant que ja hem vist que és igual a λ/T en el cas de la corda i ρ/B en el cas del so).

2.2.4. L'equació d'ones en tres dimensions

L'equació que acabem de presentar és per a ones que es propaguen en una sola dimensió, com les que es propaguen per una corda o una ona de pressió, un so, que es propaga en línia recta. Podem trobar una expressió equivalent però que sigui més general, per a tres dimensions?

La resposta és que sí. Si al començament de la nostra derivació de l'equació 21 considerem una magnitud $\vec{u}$, que depèn de les tres coordenades espacials x, y i z i del temps t –és a dir, tenim una magnitud $\vec{u}(x,y,z,t)$–, i seguim el mateix procediment, arribarem a un resultat semblant però vàlid per a tres dimensions. No en farem la derivació matemàtica, ja que en aquests moments no ens aporta cap concepte nou i és lleugerament més complexa. Així, el resultat que s'obté és:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{u} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{u} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{u} = k\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \tag{22}$$

És a dir, és el mateix que teníem en l'equació 21, però ara amb les derivades per a cada direcció. De fet, una cosa que es pot fer, encara que potser d'entrada us espanta, es treure $\vec{u}$ factor comú. Llavors us queda:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{u} = k\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \tag{23}$$

Per a simplificar aquesta mena d'equacions, habitualment es defineix un operador anomenat *nabla*, que es representa amb el símbol $\vec{\nabla}$, de la forma següent:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{24}$$

Així, l'equació anterior es pot escriure de forma més compacta així:

$$\nabla^2 \vec{u} = k\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \tag{25}$$

Aquesta relació és l'**equació d'ones** en tres dimensions.

2.2.5. Caràcter general de l'equació d'ones

Ara bé, com podem estar segurs que qualsevol tipus d'ona complirà aquesta equació? És realment general? Al capdavall, només hem escollit dos casos particulars d'ona i hem vist que tots dos ens donaven una equació del tipus 21. Segur que qualsevol altra mena d'ona també es podrà descriure amb les expressions 21 o 25? Bé, al començament havíem trobat la forma genèrica de la funció d'ona, que és $f(x-vt)$ i que sabem que és completament general per a totes les ones. Per veure que qualsevol ona satisfà l'equació 21 apliquem l'equació d'ona a una funció d'ona qualsevol $f(x-vt)$ i veiem si es compleix.

Per a simplificar la notació farem:

$$\alpha \equiv x - vt \tag{26}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} \equiv y' \tag{27}$$

y' es llegeix "y prima"

i llavors, aplicant la regla de la derivació en cadena tenim:

La regla de la cadena

La regla de la cadena en la derivació ens assegura que per a una funció $f(x,y)$ es compleix

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = y'\frac{\partial \alpha}{\partial x} \tag{28}$$

i

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = y'\frac{\partial \alpha}{\partial t} \tag{29}$$

Però com que:

Tingueu present que fer $\frac{\partial(x-vt)}{\partial x}$ és derivar $x-vt$ respecte a x, i per això dóna 1. Igualment, fer $\frac{\partial(x-vt)}{\partial t}$ és derivar $x-vt$ respecte a t, i per això dóna $-v$.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial(x-vt)}{\partial x} = 1 \tag{30}$$

i

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial(x-vt)}{\partial t} = -v \tag{31}$$

les derivades anteriors de les equacions 28 i 29 es redueixen a:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' \tag{32}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -vy' \tag{33}$$

Si ara fem les segones derivades d'aquestes dues darreres expressions obtindrem, en primer lloc:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y'' \tag{34}$$

Fixeu-vos que en aquest cas només estem escrivint la segona derivada d'una altra manera, com a y''. Pel que fa a $\frac{\partial y}{\partial t}$, per a fer la segona derivada hem d'aplicar novament la regla de la cadena, fent servir l'equació 33:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(-vy') = -v\frac{\partial y'}{\partial t} = -v\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = v^2 y'' \quad (35)$$

En definitiva, doncs, amb aquesta darrera equació hem arribat a:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 y'' \quad (36)$$

I recordant que y'' no és res més que una altra manera d'escriure $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (equació 34), arribem a:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (37)$$

és a dir, obtenim l'equació d'ones.

Recapitulem això que acabem de fer: hem partit de la funció d'ona $f(x-vt)$, que sabem que és general per a qualsevol mena d'ones, i li hem fet les derivades segones que ens diu l'equació d'ones (expressió 21) per a veure si es compleix la igualtat. El resultat ha estat que sí; la funció d'ona satisfà l'equació d'ones. Això vol dir que qualsevol mena d'ona satisfarà l'equació d'ones 21. I si ho féssim en el cas de tres dimensions obtindríem exactament el mateix: que qualsevol ona en tres dimensions satisfarà l'expressió 25.

Ara ja podem estar tranquils, ja que hem aconseguit demostrar que totes les ones es podran descriure amb aquesta equació diferencial, tant se val si són ones sobre la superfície de l'aigua, ones de pressió com el so o ones electromagnètiques. Ben equipats amb aquest resultat, ja ens podrem enfrontar a l'estudi de les ones que vulguem, que és el que farem en la resta d'aquest mòdul i en els mòduls següents. No està gens malament!

Relació amb la velocitat de propagació

Abans d'acabar aquest apartat, fixem-nos que si comparem la constant k que apareix en l'equació 21 amb la constant que ens ha aparegut en l'equació 37, resulta que k és igual a $1/v^2$, i v és, precisament, la velocitat de propagació de l'ona. Aquest resultat és general i, per tant, podem afirmar:

$$k = \frac{1}{v^2} \quad (38)$$

Així, en el cas de la corda tensa, l'equació d'ones de la qual era 19, podem relacionar la velocitat de propagació amb la densitat i la tensió de la corda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}} \tag{39}$$

També ho podem fer en el cas de la propagació del so, que segueix l'equació d'ones 20, i relacionar la seva velocitat de propagació amb la densitat del medi i el seu mòdul de compressibilitat:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{40}$$

En definitiva, acabem de veure que l'equació d'ones és general per a tot tipus d'ones i, a més a més, hem aconseguit relacionar la velocitat de propagació de l'ona amb característiques intrínseques del medi pel qual es propaga.

En el mòdul "Equacions de Maxwell", quan parlem d'ones electromagnètiques, es troba una relació entre la velocitat de propagació de l'ona i les característiques intrínseques del medi pel qual es propaga.

2.3. Què hem après?

Aquest apartat ha estat fortament matemàtic. Primer, hem començat considerant l'expressió matemàtica que han de complir totes les ones. Aquesta expressió matemàtica, la **funció d'ona**, és molt genèrica i serveix per a tot tipus d'ona, independentment del cas particular que ens ocupi. Ara bé, aquesta funció d'ona $f(x \pm vt)$ només ens diu quina dependència ha de complir qualsevol tipus de pertorbació que es propaga en l'espai, però no ens diu com és exactament ni quina és la magnitud física pertorbada.

Amb això no n'hi ha prou. Ens agradaria trobar una expressió més concreta per a qualsevol mena d'ones, una expressió que ens digués com canvia l'ona en funció del temps i de l'espai. Aquest ha estat el pas més complex, que hem realitzat per a un cas particular: hem determinat el moviment de la pertorbació a partir de les forces que actuen sobre el medi que estem pertorbant, de la mateixa manera que calculem el moviment d'un cos sotmès a determinades forces, aplicant la segona llei de Newton. Amb aquest procediment hem arribat a una expressió, l'**equació d'ones**, que, lluny de ser vàlida només per al cas que hem estudiat, és totalment vàlida per a qualsevol tipus d'ona, fet que hem pogut demostrar.

Després d'aquest tractament tan general de les ones passarem a estudiar un tipus concret d'ona, les ones harmòniques.

3. Ones harmòniques

Quan en una ona, la magnitud que varia en funció del temps assoleix els mateixos valors a intervals periòdics, es tracta d'una **ona periòdica**. Si, a més a més, aquesta variació segueix una llei sinusoïdal o cosinusoïdal es tracta d'una **ona harmònica**. Això és equivalent a dir que, en una ona harmònica, en cada punt la magnitud que varia ho fa seguint un moviment vibratori harmònic simple.

Periodicitat

Que una magnitud sigui *periòdica* vol dir que, després de passar un temps determinat, el valor de la magnitud torna a ser el mateix i això passa sempre.

En els subapartats següents ens limitarem a estudiar amb més detall les ones harmòniques. A primera vista això pot semblar molt restrictiu, ja que, al capdavall, ens podem imaginar que només en casos molt concrets les ones es comportaran d'una manera tan "amigable". La importància d'estudiar ones harmòniques no rau tant en el fet de la seva possible aplicació directa a la descripció d'ones reals que, efectivament, poques vegades són perfectament harmòniques, sinó al fet que, com veurem més endavant, qualsevol ona es pot expressar com una suma de diverses ones harmòniques. Aquest resultat, que és el **teorema de Fourier**, és una eina extraordinàriament potent per a analitzar el moviment ondulatori.

Moviment vibratori harmònic simple

Un moviment vibratori harmònic simple és el que fa un cos que oscil·la al voltant d'un punt d'equilibri i la seva posició en funció del temps es pot descriure amb una funció sinus o cosinus, és a dir, $x(t) \propto \sin t$ o $x(t) \propto \cos t$.

Podeu recordar el teorema de Fourier en l'apèndix del mòdul.

3.1. Descripció de les ones harmòniques

Tal com acabem de comentar, en una ona harmònica la magnitud física de l'ona varia en el temps, en cada punt de l'espai, de forma sinusoïdal. I, com passa amb totes les ones, la variació és en funció de la variable $x - vt$, encara que aquí escriurem la dependència en l'espai i el temps d'una altra manera. Així, doncs, expressarem l'ona harmònica com:

$$f(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \tag{41}$$

on:

- A és l'**amplitud** de l'ona, que correspon al valor màxim de la pertorbació en un punt determinat,
- x és la posició,
- t és el temps,
- k és una magnitud anomenada **nombre d'ona**,
- ω és una altra magnitud anomenada **freqüència angular** i
- ϕ és l'anomenada **fase inicial**, que simplement ens diu el valor de la funció d'ona en l'origen de coordenades i en l'instant inicial.

ω és la lletra grega omega minúscula i ϕ és la fi minúscula.

Abans d'explicar aquests conceptes detalladament val la pena fer una ullada a la forma d'aquesta equació. Fixeu-vos que la representació gràfica de l'equació 41 es pot fer en funció de x o en funció de t. Això ens dóna una doble periodicitat: en el temps i en l'espai. En la figura 9 podeu veure dues "instantànies" d'una ona harmònica: en la figura 9a es mostra l'ona en un moment concret; en la figura 9b podeu veure la variació en funció del temps en un punt determinat de l'espai.

Funcions sinus i cosinus

En lloc d'utilitzar la funció sinus podem utilitzar la funció cosinus i les dues descripcions de l'ona són completament equivalents. Recordeu que per a passar d'un sinus a un cosinus n'hi ha prou amb desplaçar l'origen de coordenades π radians o, dit d'una altra manera: $\sin\alpha = \cos\alpha + \pi$.

Figura 9. Doble periodicitat d'una ona harmònica

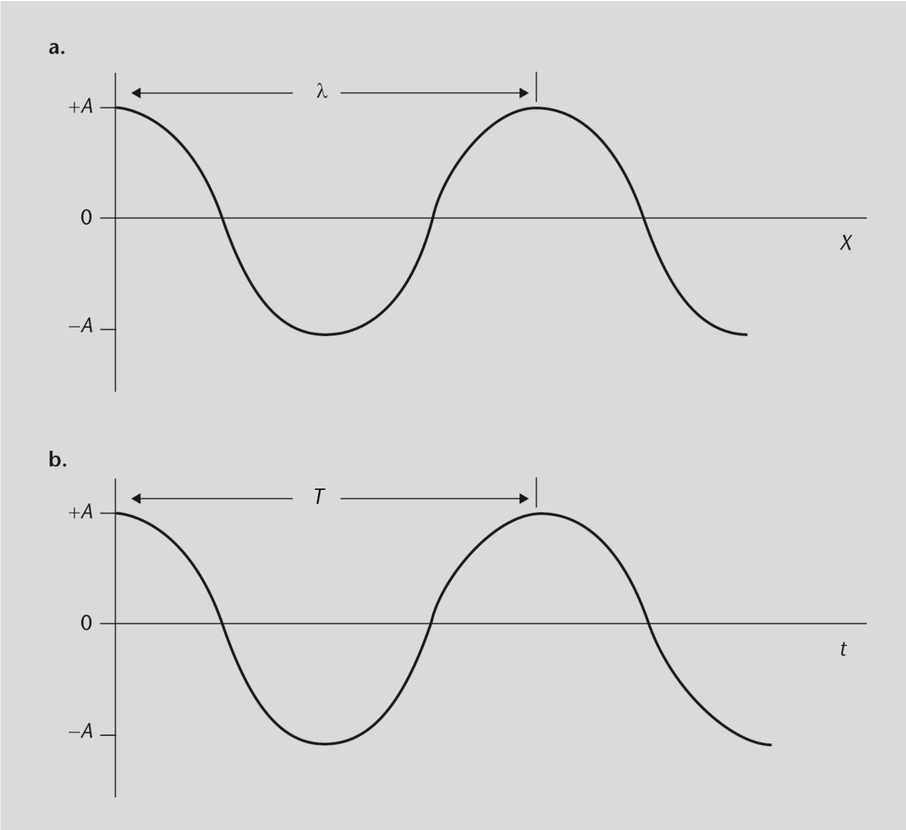


Figura 9

a. Imatge d'una ona harmònica que es propaga en la direcció x en un instant de temps t determinat. La longitud entre dos màxims consecutius és la longitud d'ona λ.
b. Evolució en funció del temps t d'una ona harmònica en un punt x determinat. El temps entre dos màxims consecutius és el període T.

Passem ara a veure què signifiquen el nombre d'ona (k) i la freqüència angular (ω); en el camí ens apareixeran també el concepte de longitud d'ona (λ) i el concepte de període (T).

3.1.1. El nombre d'ona i la longitud d'ona

Comencem preguntant-nos quina és, en un instant de temps determinat, la distància mínima entre dos punts de l'ona, x i x', que tenen el mateix valor de la pertorbació (per exemple, la distància entre dos màxims o entre dos mínims). Aquesta pregunta és equivalent a plantejar l'equació:

$$A\sin(kx - \omega t + \phi) = A\sin(k(x + x') - \omega t + \phi) \qquad (42)$$

Com que el sinus és una funció periòdica amb període 2π, les dues expressions tindran el mateix valor quan $x' = 2\pi/k$. Aquesta distància s'anomena **longitud d'ona** i s'acostuma a simbolitzar amb la lletra grega lambda minúscula, λ, que és, doncs, la distància entre dos punts que estan en el mateix estat de vibració.

Una magnitud associada a la longitud d'ona és el **nombre d'ona**, que simbolitzem amb k. Podem pensar en el concepte de nombre d'ona a partir de la situació següent: en un moment donat "fem una fotografia" de l'ona i ens preguntem: quants màxims hi ha en un metre? Com que la longitud d'ona és la longitud que hi ha entre dos màxims consecutius, $1/\lambda$ ens dirà quants màxims hi ha en un metre. Això ho multipliquem per 2π i tenim la magnitud que anomenem *nombre d'ona*. Així tenim:

Unitats m i m^{-1}

En el Sistema Internacional d'unitats, la longitud d'ona s'expressa en metres (m) i el nombre d'ona en metres elevat a menys u (m^{-1}).

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{43}$$

Aquest factor 2π pot semblar estrany, però només és una qüestió convencional: com que les funcions sinusoïdals són periòdiques amb període 2π, si no posem aquest factor 2π l'hauríem d'anar arrossegant tota l'estona, de manera que és més fàcil definir una magnitud que ja l'inclogui i així ens estalviem anar afegint el 2π a tot arreu. Podríem perfectament treballar amb la inversa de la longitud d'ona en lloc del nombre d'ona, és simplement qüestió de comoditat.

3.1.2. La freqüència i el període

Ara fem-nos la pregunta equivalent però en funció del temps: en un punt determinat de l'espai, quant triga a repetir-se el mateix estat de pertorbació? (per exemple, quant triguen a produir-se dos màxims?). De manera molt semblant a com ho hem fet abans, aquesta pregunta és equivalent a plantejar l'equació

$$A\sin(kx - \omega t + \phi) = A\sin(kx - \omega(t + t') + \phi) \tag{44}$$

Com que el sinus és una funció periòdica amb període 2π, les dues expressions tindran el mateix valor quan $t' = 2\pi/\omega$. Aquest temps és el **període**, que simbolitzem amb la lletra T, que és, doncs, el temps que triga l'ona a ser un altre cop en el mateix estat de vibració.

Una magnitud associada al període és la **freqüència angular**. Podem considerar la freqüència a partir de la situació següent: si ens trobem en un punt de l'espai i ens arriba una ona, quants màxims ens arriben en un segon? Aquest valor és la **freqüència**, la inversa del període, que simbolitzem amb f. Aquest valor multiplicat per 2π és la freqüència angular, que simbolitzem amb la lletra grega omega minúscula, ω.

Unitats s, Hz i rad/s

En el Sistema Internacional d'unitats el període s'expressa en segons (s), la freqüència s'expressa en hertzs (Hz) i la freqüència angular s'expressa en radians per segon (rad/s).

Així, doncs:

$$\omega = 2\pi f \tag{45}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \tag{46}$$

Sovint la freqüència també se simbolitza amb la lletra grega nu minúscula, ν. Cal anar amb compte a no confondre-la amb una ve baixa, ja que són molt semblants gràficament.

Conjuntament, l'argument $(kx-\omega t)$ que apareix dins del sinus en l'equació 41 s'anomena **fase** de l'ona. Fixeu-vos també que durant un temps igual a un període, T, l'ona s'ha desplaçat una longitud igual a la longitud d'ona λ; per tant, com que en general $x = vt$ i en aquest cas la velocitat és la velocitat de propagació de l'ona, v, tenim que

$$\lambda = vT \tag{47}$$

Si de l'expressió anterior aïllem la v, obtenim:

$$v = \frac{\lambda}{T} \tag{48}$$

i ja hem vist que $1/T = f$ (equació 46), de manera que podem escriure:

$$v = \lambda f \tag{49}$$

Aquesta darrera expressió ens relaciona la velocitat de propagació d'una ona (v) amb la seva freqüència (f) i la seva longitud d'ona (λ). També es pot reescriure, utilitzant l'equació 43 i el fet que $\omega = 2\pi f$, com a

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{50}$$

En la taula 1 resumim les magnituds principals en la descripció d'una ona harmònica, juntament amb els seus símbols i unitats de mesura en el Sistema Internacional.

Taula 1

Magnitud	Símbol	Unitat (SI)
Longitud d'ona	λ	m
Freqüència	f, ν	Hz
Freqüència angular	ω	rad/s
Període	T	s
Nombre d'ona	k	m^{-1}
Fase inicial	ϕ	-
Velocitat de propagació	v, c	m/s
Amplitud	A	segons tipus d'ona

Exemple. Càlcul de la freqüència i el període

Suposeu que la funció d'ona d'una ona harmònica que es propaga en una corda horitzontal és $y(x,t) = 0{,}03\sin(2{,}2x - 3{,}5t)$, on y és el desplaçament de la corda en la direcció vertical i totes les magnituds estan expressades en unitats del Sistema Internacional.

1) Determineu el valor de l'amplitud, el nombre d'ona, la longitud d'ona, la freqüència, la freqüència angular, la fase inicial i la velocitat de propagació.

2) Quin és el desplaçament màxim a què arriba un tros qualsevol de la corda?

3) Quina és la velocitat d'un punt de la corda en funció del temps? (compte: no pas la velocitat de propagació de l'ona!)

4) Quina és la velocitat màxima d'un punt qualsevol de la corda?

Solució

1) Com que la funció d'ona està expressada en la forma $A\sin(kx - \omega t + \phi)$, ja podem saber directament A, k, ω i ϕ:

- amplitud: $A = 0{,}03$ m,
- nombre d'ona: $k = 2{,}2\ \text{m}^{-1}$,
- freqüència angular: $\omega = 3{,}5\ \text{s}^{-1}$,
- fase inicial: $\phi = 0$.

A partir del nombre d'ona podem trobar la longitud d'ona (λ), utilitzant l'equació 43:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2{,}2} = 2{,}86\ \text{m} \tag{51}$$

Igualment, a partir de la freqüència angular podem obtenir el període (T) i la freqüència (f), si fem servir l'equació 46 i el fet que $f = 1/T$:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3{,}5} = 1{,}80\ \text{s} \tag{52}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}80} = 0{,}557\ \text{Hz} \tag{53}$$

Ara podem trobar la velocitat de propagació (v), recordant l'equació 49:

$$v = \lambda f = 2{,}86 \cdot 0{,}557 = 1{,}59\ \text{m/s} \tag{54}$$

2) Si recordeu la definició d'amplitud que hem donat al començament del subapartat 3.1., veureu que l'amplitud és precisament el valor màxim que assoleix la pertorbació que caracteritza l'ona. En el cas que ens ocupa, la pertorbació és el desplaçament y i ja sabem que l'amplitud A és igual a 0,03 metres.

Per tant, el desplaçament màxim a què arriba un tros qualsevol de corda és 0,03 metres.

3) Ens pregunten quina és la velocitat d'un punt de la corda en funció del temps. Bé, sabem que la posició en funció del temps és $y(x,t) = 0{,}03\sin(2{,}2x - 3{,}5t)$. D'altra banda, segurament recordeu, del que heu après a cinemàtica, que la velocitat és la derivada de la posició respecte al temps. Per tant, només cal que derivem l'expressió de la posició respecte al temps:

$$v(x,t) = y'(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = 0{,}03(-3{,}5)\cos(2{,}2x - 3{,}5t) = -0{,}105\cos(2{,}2x - 3{,}5t) \tag{55}$$

Observació

Per representar la velocitat d'un punt, fem servir y' en lloc de v per no confondre-la amb la velocitat de l'ona.

Aquesta és, doncs, la velocitat en funció del temps. L'expressió ens diu quina és la velocitat de qualsevol punt de la corda en un instant de temps qualsevol, igual que la funció d'ona ens diu quina és la posició y de qualsevol punt de la corda en un instant de temps qualsevol.

4) Acabem de trobar la velocitat y' de la corda: $y'(x,t) = -0{,}105\cos(2{,}2x - 3{,}5t)$. Com que és una funció cosinus, el màxim valor tindrà lloc quan el cosinus valgui* ± 1 i llavors la velocitat màxima serà $\pm$ 0,105 m/s. El signe més correspon als casos en què la corda es mou cap a dalt i el signe menys als casos en què es mou cap avall.

* Recordeu que un sinus i un cosinus sempre tenen un valor comprès entre -1 i 1.

Ara també ens podem preguntar quin desplaçament té la corda quan s'assoleix aquesta velocitat màxima. La velocitat màxima s'assoleix quan

$$\cos(2{,}2x - 3{,}5t) = \pm 1 \tag{56}$$

i això passa només si

$$2{,}2x - 3{,}5t = 0, \pm\pi \tag{57}$$

I quan $2{,}2x - 3{,}5t$ val precisament $\pm\pi$, quin valor té $y(x,t)$? Introduïm els valors a $y(x,t)$:

$$y_{y'=\text{màx}} = 0{,}03\sin(0) = 0 \tag{58}$$

$$y_{y'=\text{màx}} = 0{,}03\sin(\pm\pi) = 0 \tag{59}$$

És a dir, quan la velocitat és màxima, el desplaçament de la corda és nul. Si recordeu les característiques del moviment vibratori harmònic simple us adonareu que és el mateix resultat, però això no ens ha de sorprendre: ja hem comentat al començament de l'apartat 3 que en una ona harmònica, en cada punt la magnitud que varia ho fa seguint un moviment vibratori harmònic simple.

Moviment vibratori harmònic simple

Recordeu, novament, que un moviment vibratori harmònic simple és el que fa un cos que oscil·la al voltant d'un punt d'equilibri i la seva posició en funció del temps es pot descriure amb una funció sinus o cosinus.

3.2. Velocitat de grup, velocitat de fase i dispersió

En tota la descripció que hem fet de les ones harmòniques no ens hem preocupat de si l'ona comença i acaba en un moment donat, és a dir, si la font d'ones comença a emetre les ones en un moment determinat, n'emet durant un cert temps i finalment deixa d'emetre'n. Implícitament hem considerat que l'ona harmònica que estudiàvem s'estava produint sempre i a tot l'espai; en resum, que era infinita. És rellevant aquesta observació? Hi ha gaire diferència entre considerar una ona harmònica que comença i acaba o considerar-ne una d'il·limitada?

La resposta és que sí, i la diferència és força important. Fixeu-vos en la figura 10. Hi podem veure dues ones: l'ona que es mostra a la part de baix és una ona harmònica com les que hem estudiat fins ara, és infinita i no comença ni acaba mai. Però aquesta situació no és real, les ones sempre comencen a generar-se en un moment determinat i s'estan generant durant un cert temps, fins que s'acaba la causa que les provoca. En aquesta situació, més real, tindrem una cosa semblant a la que es mostra a la part de dalt de la figura. Aquesta ona és el que s'anomena un **tren d'ones** o **paquet d'ones**.

La primera ona, en realitat, no és una ona harmònica (fixeu-vos que no podem descriure aquesta gràfica simplement com una funció sinus o una funció cosinus!). És una ona harmònica entre els punts inicial i final, però això no ens serveix, ja que la descripció que en fem ha de servir per a qualsevol valor de x en qualsevol instant de temps t.

Figura 10. Paquet d'ones i ona infinita

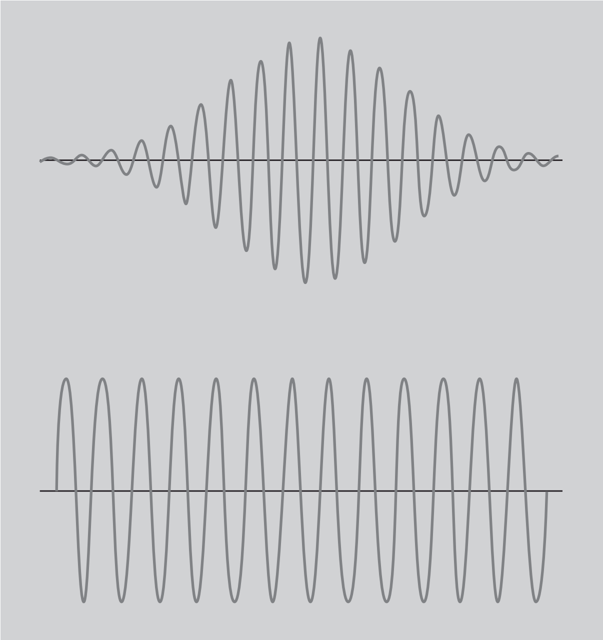


Figura 10

A dalt: un tren d'ones o paquet d'ones, resultat d'haver començat a generar una ona harmònica en un moment determinat, generar-la durant un temps i, finalment, parar. A baix: una ona harmònica infinita, que no comença ni acaba mai.

Havíem comentat al començament de l'apartat 3 que, segons el teorema de Fourier, qualsevol ona es pot expressar com la suma d'ones perfectament harmòniques, cadascuna amb una certa amplitud i freqüència. Així, un tren d'ones com el de la figura 10 també el podrem expressar com la suma d'ones harmòniques. Si les ones harmòniques que formen el tren d'ones viatgen totes amb la mateixa velocitat v, el tren també ho fa.

Consulteu l'apèndix del mòdul per a recordar el teorema de Fourier.

Si, en canvi, la velocitat v depèn de la freqüència que té l'ona, uns components (unes ones harmòniques) del tren d'ones es desplaçaran més ràpidament que altres. Això provocarà que el tren d'ones es propagui a una velocitat diferent de la de cada ona i es deformi. Aquest fenomen s'anomena *dispersió*.

La velocitat de propagació de l'ona, és a dir, la velocitat a què avancen els màxims i mínims de l'ona, s'anomena més específicament **velocitat de fase**, mentre que la velocitat a què es desplaça el tren d'ones conjuntament és la **velocitat de grup**.

La **dispersió** és el fenomen pel qual la velocitat de fase d'una ona que es propaga per un medi depèn de la seva freqüència. Un medi en què es produeix dispersió és un **medi dispersiu**.

La dispersió es produirà sempre que hi hagi propagació de diverses freqüències en un medi dispersiu. Aquestes diverses freqüències poden ser presents perquè en realitat tenim un tren d'ones i no una ona infinita, com hem comentat fa un moment, o també perquè l'ona contingui diverses freqüències, independentment de si es tracta d'un tren d'ones finit o d'una ona infinita.

Veurem en detall aquesta darrera situació en el mòdul "Òptica geomètrica", on parlarem de dispersió bàsicament com a resultat d'aquest cas.

Dispersió en un medi

La dispersió en un medi pot ser causada pel material del medi, que respon de manera diferent a freqüències diferents, o pot ser causada per limitacions geomètriques de la forma del material.

L'exemple més típic del primer cas és la dispersió de la llum quan es propaga per un vidre: la velocitat de fase depèn de la freqüència (color) de la llum i, així, els diferents colors es refracten en angles diferents.

Un exemple del segon cas es dóna en la propagació de senyals per fibres òptiques o, en general, per qualsevol mena de guia d'ones, la geometria de les quals determina quines freqüències s'hi poden propagar i quines no i amb quina velocitat.

Explicarem més detalladament el procés de dispersió de la llum en el mòdul "Òptica geomètrica".

En els mòduls "Òptica geomètrica" i "Propagació d'ones electromagnètiques" es parla breument de la propagació de senyals per fibres òptiques.

Ara que ja hem vist qualitativament la diferència entre velocitat de fase i velocitat de grup i com es produeix la dispersió, les descriurem amb més precisió. En l'equació 50 ja havíem vist que la velocitat de propagació de l'ona, la velocitat de fase, es pot expressar com:

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{60}$$

La velocitat de grup, en canvi, s'expressa com la derivada de ω respecte a k (no en farem la demostració, només us donem el resultat):

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{61}$$

La relació que hi ha entre ω i k s'anomena **relació de dispersió**.

Malgrat que no en fem la demostració, sí que val la pena pensar una mica en perquè la velocitat de grup és la derivada de ω respecte a k i la velocitat de fase és ω/k.

El següent paràgraf, extret de Feynman (1963), és força aclaridor:

"Considerem dues ones, de longitud d'ona lleugerament diferent. Estan desfasades, en fase, desfasades, etc. Aquestes ones representen, en realitat, les ones a l'espai viatjant amb freqüències lleugerament diferents. Ara, com que la velocitat de fase, la velocitat dels nodes d'aquestes dues ones, no és exactament la mateixa, passa una cosa nova. Suposem que ens posem al damunt d'una d'aquestes ones, en una cresta, i mirem a l'altra; si les dues anessin a la mateixa velocitat, l'altra ona es quedaria on era respecte a nosaltres, mentre viatgem al damunt de la primera. Anem sobre aquesta cresta i just al nostre costat tenim la cresta de l'altra ona [...]. Però resulta que les dues velocitats no són iguals. Hi ha una petita deferència de freqüència i, per tant, una petita diferència de velocitat, però a causa d'aquesta diferència de velocitat, mentre viatgem sobre una ona, l'altra es mou cap endavant, per exemple, o cap enrere, respecte a nosaltres. Així, a mesura que passa el temps, què li passa a un node? Si movem un tren d'ones un xic endavant, el node es mou endavant (o endarrere) una distància considerable. Així, la suma d'aquestes dues ones té una envolupant i, a mesura que les ones viatgen, l'envolupant viatja amb elles a una velocitat diferent. La velocitat de grup és la velocitat a què es transmetran els senyals modulats."

R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands (1963), *The Feynman lectures on Physics* (p. 48-7)

En la figura 13 podeu veure dues ones de longitud d'ona lleugerament diferent.

La distinció entre les dues velocitats és important, perquè la velocitat de grup és la velocitat a què es propagarà qualsevol modulació que tingui una ona.

Si calculem la velocitat de fase ω/k en determinats medis podem trobar que és superior a la velocitat de la llum en el buit! Tot i així, cal pensar que per a propagar algun tipus d'informació s'ha de modular una ona d'alguna manera; si no, és impossible propagar cap mena de senyal. Fins i tot enviar una ona sinusoïdal perfecta per a indicar alguna mena d'esdeveniment (com ara un senyal de ràdio en una única freqüència i sense modular) també ens dóna una modulació: l'ona no és infinita, l'hem "encès" en algun moment i ja no tenim, per tant, una ona infinita, sinó un tren d'ones, com hem comentat abans. Així doncs, resulta impossible enviar informació a una velocitat superior a la de la llum en el buit, ja que la velocitat de grup, la velocitat a què es propaga qualsevol modulació és sempre inferior a la velocitat de la llum en el buit.

Com que la modulació d'una ona és la manera en què podem transmetre informació d'un lloc a un altre mitjançant aquesta mateixa ona, resulta que qualsevol mena d'informació que volguem transmetre (per exemple, un senyal SOS, mitjançant ones electromagnètiques de la banda de radiofreqüència) viatjarà a la velocitat de grup, no pas a la velocitat de fase. En resum: per a transmetre informació cal que hi hagi algun "canvi" en l'ona, i els "canvis" es propaguen a la velocitat de grup.

Càlcul de la velocitat de fase i grup

Suposem que la relació de dispersió (equació 61) per a una determinada ona que es propaga en un medi és

$$k = \frac{\omega}{c} - \frac{A}{\omega c} \tag{62}$$

on A és una constant positiva i c és la velocitat de la llum en el buit. Fixeu-vos que és la relació normal $k = \omega/c$ (equació 50) més un terme que depèn inversament de la freqüència. Calculem la velocitat de fase (equació 60):

$$v = v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c} - \frac{A}{\omega c}} = c\frac{\omega^2}{\omega^2 - A} \tag{63}$$

que és clarament superior a c, ja que $\omega^2/(\omega^2 - A)$ sempre és més gran que 1.

Calculem ara la velocitat de grup. Com que disposem de k en funció de ω, en lloc de calcular $d\omega/dk$ (equació 61) calcularem $dk/d\omega$:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} \tag{64}$$

i després fem la inversa i tindrem v_g. Calculem, doncs, aquesta derivada:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} + \frac{A}{\omega^2 c} \tag{65}$$

Enllaços d'interès

Podeu veure unes animacions de paquets d'ones que es propaguen amb i sense dispersió a les següents adreces:

- Amb dispersió: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wave_packet_(dispersion).gif.
- Sense dispersió: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wave_packet_(no_dispersion).gif.

Per tant:

$$v_g = c\frac{1}{1 + A/\omega^2} \tag{66}$$

I això sí que és sempre més petit que c, ja que el quocient que acompanya c sempre serà més petit que 1. En resum, amb aquest exemple hem vist que la velocitat de fase pot ser més gran que la velocitat de la llum en el buit, c, però que malgrat tot la velocitat de grup serà sempre inferior a c.

3.3. Què hem après?

Després del tractament totalment general de les ones que hem fet en l'apartat anterior, en aquest ens hem centrat en un tipus concret d'ona, les ones harmòniques, que són aquelles en què la magnitud varia sinusoïdalment en funció del temps.

Aquesta restricció pot semblar força important, però el teorema de Fourier ens garanteix que qualsevol mena d'ona la podrem expressar com la suma d'ones sinusoïdals. Així, l'estudi concret de les ones harmòniques ens permet estudiar, en el fons, qualsevol tipus d'ona. I de fet, en tot el que resta d'aquest mòdul sempre treballarem amb ones harmòniques.

En el nostre estudi de les ones harmòniques hem introduït una sèrie de conceptes que són molt útils en l'anàlisi de fenòmens ondulatoris: la longitud d'ona, el nombre d'ona, la freqüència, el període i l'amplitud. Aquestes magnituds ens apareixeran repetidament sempre que tractem problemes relacionats amb les ones.

4. Superposició d'ones

Fins ara ens hem dedicat a descriure les ones i veure'n algunes característiques. Però sempre hem parlat d'una única ona, de manera que ara ens podem preguntar: "i què passa quan dues ones es troben al mateix lloc? hi ha alguna mena d'interacció entre elles?"

A continuació intentarem respondre aquestes preguntes i després passarem a alguns casos particulars, com els batements, que es produeixen quan es troben ones de freqüències molt semblants, o les ones estacionàries (ja en l'apartat següent), que es produeixen quan les ones estan confinades en l'espai i no es poden propagar indefinidament.

4.1. El principi de superposició

Observeu la primera imatge de la figura 11: hi ha dues ones que es propaguen per una corda, una cap a la dreta i l'altra cap a l'esquerra. Està clar que arribarà un moment en què les dues es trobaran en un mateix punt de la corda. Què passara? Es destruiran ambdues ones? Se'n crearà una de nova?

Figura 11. Superposició de dos polsos

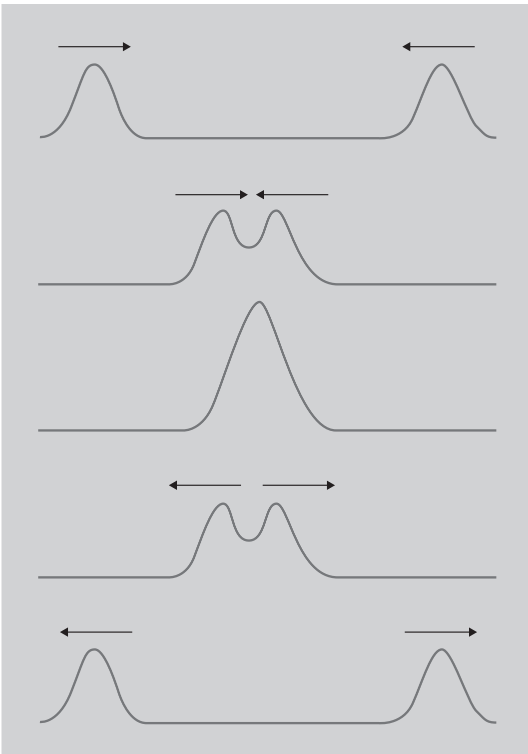


Figura 11

Dos polsos d'ones es propaguen per una corda en sentits oposats. Quan es troben en un mateix punt, la pertorbació en la corda resulta ser igual a la suma de les pertorbacions que cada una de les ones provocaria per separat.

El que passa en aquesta situació, que podeu veure en les imatges de la figura 11, és que la forma resultant del “xoc” entre les dues ones és una nova ona igual a la suma de les dues ones. És a dir, el desplaçament que l’ona resultant provoca en la corda és igual a la suma dels desplaçaments que provocarien cadascuna de les ones per separat. Això és el que s’anomena *principi de superposició*.

Enllaç d’interès

Podeu veure una animació que exemplifica el principi de superposició a: http://www.st-andrews.ac.uk/~bds2/optics/applet2/superposition.htm. És una miniaplicació de Java; cal tenir Java instal·lat.

Segons el **principi de superposició**, quan dues o més ones es troben en un punt de l’espai, l’ona resultant és la suma algebraica de les ones individuals.

D’aquesta manera, la funció d’ona que descriurà la superposició de dues o més ones serà simplement la suma de les dues o més funcions d’ona de cadascuna de les ones. En altres paraules, si $u(x,t)$ és la funció d’ona que descriu una ona i $v(x,t)$ és una altra funció d’ona que descriu una altra ona diferent, la superposició de les dues ones es descriurà mitjançant la funció d’ona:

$$w(x,t) = u(x,t) + v(x,t) \tag{67}$$

Activitat

Suposem que $y_1(x,t)$ i $y_2(x,t)$ són dues funcions d’ona que, en conseqüència, compleixen l’equació d’ona 21. Demostreu que la suma de les dues funcions $y_3(x,t) = Ay_1(x,t)+By_2(x,t)$ també compleix l’equació d’ona.

Indicació: recordeu que l’equació d’ona és (equació 21):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{68}$$

4.2. Superposició d’ones harmòniques

Per a tractar matemàticament la superposició d’ones ens limitarem al cas d’ones harmòniques, que són més fàcils de manipular. Recordeu que això no representa cap gran problema, ja que segons el teorema de Fourier qualsevol ona es pot expressar com la suma d’ones harmòniques.

Considerarem dues ones harmòniques de la mateixa amplitud i, per a veure com és l’ona resultant de la seva superposició, les sumarem tal com afirma el principi de superposició i veurem que en resulta una nova ona, diferent de les dues ones originals. Partim, doncs, de les dues ones harmòniques següents:

$$y_1 = A\sin(k_1 x - \omega_1 t) \tag{69}$$

$$y_2 = A\sin(k_2 x - \omega_2 t + \delta) \tag{70}$$

on δ és el desfasament de la segona ona respecte a la primera. Ja hem dit que escollim dues ones de la mateixa amplitud; podríem plantejar la situació amb dues ones d'amplituds diferents, però l'anàlisi matemàtica es complica força i el resultat no és diferent conceptualment. Així doncs, la suma de les dues ones harmòniques y_1 i y_2, que simbolitzarem y_s, és:

$$y_s = y_1 + y_2 = A\sin(k_1x - \omega_1 t) + A\sin(k_2x - \omega_2 t + \delta) \tag{71}$$

Aquesta equació es pot simplificar utilitzant la relació trigonomètrica:

$$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \tag{72}$$

En el nostre cas tenim que:

$$\theta_1 = k_1x - \omega_1 t \tag{73}$$

$$\theta_2 = k_2x - \omega_2 t + \delta \tag{74}$$

de manera que:

$$y_s = 2A\cos\left(\frac{k_1x - \omega_1 t - k_2x + \omega_2 t - \delta}{2}\right)\sin\left(\frac{k_1x - \omega_1 t + k_2x - \omega_2 t + \delta}{2}\right) \tag{75}$$

Si agrupem els termes de dins del sinus i el cosinus i definim, per comoditat:

$$\Delta k = k_1 - k_2 \tag{76}$$

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \tag{77}$$

Recordeu

Δ és la lletra grega delta majúscula i s'acostuma a utilitzar per a simbolitzar un increment o una diferència.

podem expressar aquesta equació com:

$$y_s = 2A\cos\left(\frac{\Delta kx - \Delta\omega t - \delta}{2}\right)\sin\left(\frac{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t + \delta}{2}\right) \tag{78}$$

Aquesta expressió pot semblar un xic complexa i no ens hi entretindrem massa, però val la pena estudiar aquesta situació amb més detall en dos casos particulars: quan les dues ones tenen exactament la mateixa freqüència (i nombre d'ona) i quan les dues ones tenen freqüències molt properes.

4.2.1. Superposició amb freqüències iguals

Si les dues freqüències són iguals tenim que $\omega_1 = \omega_2$, que anomenarem simplement ω i llavors $\Delta\omega = 0$, i també que $k_1 = k_2$, que anomenarem simplement k i $\Delta k = 0$. Aplicant això a l'equació 78 obtenim:

$$y_s = 2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \delta/2\right) \tag{79}$$

on hem utilitzat el fet que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$. Com podem interpretar aquest resultat? Fixeu-vos que tenim l'expressió típica d'una ona harmònica, un sinus de $kx - \omega t$, amb una certa fase inicial i una "cosa" davant del sinus que hauria de ser l'amplitud de l'ona resultant. Si us hi fixeu bé, veureu que aquesta "cosa" és un factor que és constant, no depèn de x ni de t. Aquest factor és precisament l'amplitud de l'ona resultant, que només depèn de δ, la diferència de fase entre les dues ones originals:

$$A_s = 2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \tag{80}$$

Recordeu que δ és la lletra grega delta minúscula.

Com que el cosinus sempre té un valor entre 1 i –1, l'amplitud de l'ona resultant serà màxima (igual a $2A$) quan $\delta = 0$, ja que llavors $\cos 0 = 1$. Igualment, l'amplitud serà mínima (igual a zero) quan $\delta = \pi$, perquè llavors $\cos\pi = 0$.

Recordeu

L'amplitud és el valor màxim de la pertorbació, sigui positiu o negatiu.

Així:

- En el primer cas, quan $\delta = 0$, tindrem una ona d'amplitud igual al doble de les ones originals, la màxima que podem obtenir; aquesta situació s'anomena **interferència constructiva**. Podeu veure aquesta situació en la figura 12a.
- En el segon cas, quan $\delta = \pi$, tindrem una ona d'amplitud nul·la, és a dir, no tindrem cap mena d'ona; aquesta situació s'anomena **interferència destructiva**. Podeu veure aquesta situació en la figura 12b.
- Per a qualsevol altre valor de la diferència de fase entre les ones, ens trobarem en una situació intermèdia.

Figura 12. Interferència constructiva i destructiva

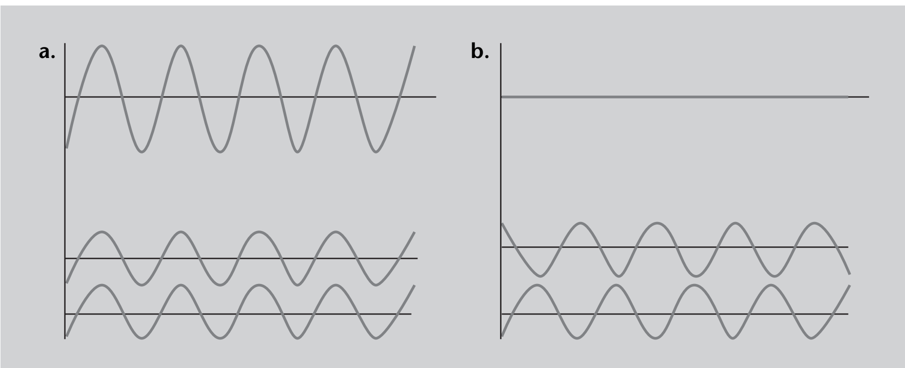


Figura 12

a. Interferència constructiva de dues ones harmòniques.
b. Interferència destructiva de dues ones harmòniques.

Exemple. Interferència d'ones

Suposeu que dues ones de la mateixa freqüència i amplitud es mouen en una mateixa direcció, de manera que se superposen. La seva amplitud és de 4 cm.

1) Si la diferència de fase entre elles és $\pi/2$, quina amplitud té l'ona resultant de la seva superposició?

2) Quina hauria de ser la diferència de fase perquè l'amplitud resultant fos també igual a 4 cm?

Solució

1) Tenim un desfasament igual a $\pi/2$ i una amplitud de 4 cm, per tant:

- $\delta = \pi/2$.
- $A = 0{,}4$ m.

Com acabem de veure, l'amplitud de l'ona resultant només depèn de l'amplitud original i de la diferència de fase entre les dues ones, segons l'equació 80. Per tant:

$$A_s = 2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right) = 2 \cdot 0{,}4\cos\left(\frac{\pi/2}{2}\right) \tag{81}$$

Recordant que els angles sempre els expressem en radians, el càlcul ens dóna:

$$A_s = 0{,}566 \text{ m} \tag{82}$$

2) Ara ens demanen la situació contrària: determinar la diferència de fase δ per a obtenir una amplitud resultant determinada:

- $A_s = 0{,}4$ m.
- $A = 0{,}4$ m.

Per tant, utilitzant novament l'equació 80:

$$0{,}4 = 2 \cdot 0{,}4\cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \tag{83}$$

Això ho podem reduir a

$$\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \tag{84}$$

i, per tant,

$$\frac{\delta}{2} = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \tag{85}$$

que dóna:

$$\frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \tag{86}$$

Això, en graus, són 60° i 300°, respectivament, Per tant:

$$\delta = \frac{2\pi}{3}, \frac{10\pi}{3} \tag{87}$$

Recordeu que 360° són 2π radians. Així, per passar de radians a graus cal multiplicar per 360 i dividir per 2π.

que, en graus són 120° i 600°, respectivament. Ara bé, 600° és el mateix que 240°, ja que 600° = 240° + 360°.

4.2.2. Superposició amb freqüències molt properes: batements

L'altre cas particular que volem estudiar de l'equació 78 és el cas de la superposició de dues ones amb freqüències lleugerament diferents, és a dir, freqüències molt properes. Aquesta situació dóna lloc al fenomen dels **batements**. Potser alguna vegada, en sentir determinats sons, com algunes notes musicals, sirenes o simplement el brunzit constant de dues o més màquines, haureu notat com, de cop i volta, la intensitat del so començava a augmentar i disminuir, provocant una mena de batec. Aquest "batec" que sentiu són els batements, que es produeixen sempre que se superposen dues ones les freqüències de les quals són un xic diferents. Aquest és el fenomen que estudiarem a continuació.

Enllaç d'interès

Si voleu sentir un fenomen de batement, escolteu el so que trobareu a: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Beatfrequency.ogg.

Abans d'analitzar el problema matemàticament, però, observeu la figura 13, que ens mostra aquestes dues ones. En aquesta imatge les dues ones de la part superior (y_1 i y_2), superposades, donen lloc a l'ona inferior. La representació és en funció del temps i, per tant, mostra com evolucionen les ones al llarg del temps en un punt determinat, sense tenir en compte el seu desplaçament en l'espai.

Figura 13. Superposició amb freqüències lleugerament diferents: batements

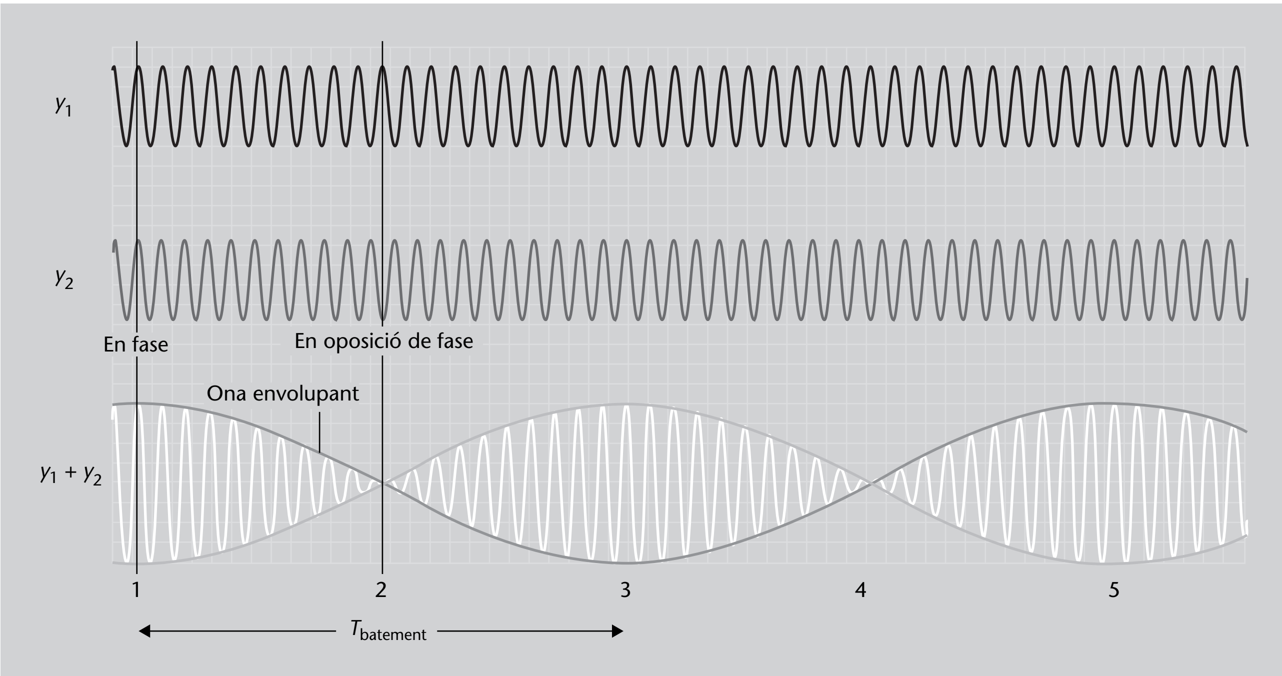


Figura 13

La superposició de l'ona y_1 i l'ona y_2, amb freqüències lleugerament diferents, dóna lloc a l'ona que es representa en la part inferior, $y_1 + y_2$, que mostra el fenomen dels batements.

Suposem que les dues ones comencen estant en fase, de manera que se sumen tal com es veu en el punt 1 de la figura. La segona ona té una freqüència lleugerament superior a la primera, de manera que la va avançant lentament fins que, finalment, es troba mig cicle per davant. En aquest moment, que correspon al punt 2 de la figura, les dues ones es troben en oposició de fase i la seva suma és igual a zero; així, l'amplitud de l'ona resultant és nul·la.

Posteriorment, la segona ona segueix avançant la primera fins que tornen a trobar-se ambdues en fase i l'amplitud resultant torna a ser màxima (punt 3 de la figura). Fixeu-vos que l'ona resultant té una freqüència molt semblant a la de les dues ones superposades (a continuació en determinarem el valor exactament) i una amplitud que varia lentament entre un valor màxim i zero. En el cas del so, això correspondria a un so que va pujant i baixant de volum lentament, com el que heu pogut sentir en començar aquest subapartat si heu visitat l'enllaç d'interès que us hem indicat.

Ara analitzem el problema matemàticament, a partir de l'equació general 78. Com que les dues freqüències són molt semblants podem considerar una freqüència angular mitjana:

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tag{88}$$

i un nombre d'ona mitjà:

$$k_m = \frac{k_1 + k_2}{2} \tag{89}$$

Així, l'expressió 78 quedarà:

$$y_s = 2A\cos\left(\frac{\Delta kx - \Delta\omega t - \delta}{2}\right)\sin\left(k_m x - \omega_m t + \delta/2\right) \tag{90}$$

Per a entendre millor aquest resultat, oblidem-nos ara de la dependència espacial (la dependència en x), preocupem-nos només del que passa en un determinat punt en funció del temps (per exemple, ens podem centrar en el punt $x = 0$), i considerem $\delta = 0$:

$$y_b = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\sin\left(\omega_m t\right) \tag{91}$$

És a dir, tenim una ona amb una freqüència ω_m l'amplitud de la qual resulta modulada (és a dir, modificada) pel factor $\cos(\Delta\omega t/2)$, que és una modulació de freqüència $\Delta\omega/2$. Ara bé, fixeu-vos que aquesta freqüència és la de la modulació, la de l'envolupant, però els màxims i mínims resultants es produeixen cada meitat de període (podeu observar-ho en la figura 13). Per tant, la freqüència que es detecta dels batements és el doble de la freqüència de modulació:

Els batements no són més que un exemple de modulació d'amplitud (AM, d'amplitud modulada).

$$\omega_{\text{batement}} = \Delta\omega \tag{92}$$

Aquesta freqüència s'anomena **freqüència de batement** i és molt més lenta que les freqüències originals i que la freqüència mitjana ω_m.

Si aquestes dues ones fossin ones sonores, què sentiríem? Suposant que la diferència de freqüències fos prou petita, l'ona resultant resultaria intensa quan les dues components estiguessin en fase i molt fluixa quan estiguessin en contrafase. El to de l'ona resultant (la freqüència) estaria a mig camí entre el de les dues ones originals i la sentiríem més forta i més fluixa a intervals regulars. Això és el que haureu pogut sentir en el so que us hem presentat al principi d'aquest subapartat 4.2.2. Quan la diferència entre les dues freqüències supera unes poques desenes de hertzs ja començaríem a sentir dues notes (dues freqüències) clarament separades i desapareixen els batements.

Enllaç d'interès

Podeu consultar l'adreça http://www.phys.unsw.edu.au/jw/beats.html#sounds, on trobareu diversos exemples de superposició d'ones sonores que podeu escoltar i determinar si les sentiu com a batement o com a notes separades.

Afinació d'instruments

El fenomen dels batements s'utilitza molt sovint en l'afinació d'instruments. Si tenim un diapasó, que dóna una freqüència precisa que ens serveix de referència, i, al mateix temps, fem que l'instrument que volem afinar emeti un so que teòricament ha de ser d'aquella mateixa freqüència, podrem saber si està lleugerament desafinat. Si ho està, sentirem batements; llavors cal anar actuant sobre l'instrument (per exemple, tensant o destensant una corda en els instruments de corda) fins que sentim que desapareixen els batements (o es fan mínims), fet que indica que la diferència entre les freqüències del diapasó i de l'instrument és nul·la o molt petita.

Exemple. Afinació d'instruments

Suposeu que volem afinar la corda d'un piano (en realitat poden ser dues cordes, però ara no entrarem en això) corresponent a la tecla que dóna la nota *la* central del teclat. Idealment, el *la* ha de ser d'una freqüència de 440 Hz; per tant, ens fem amb un diapasó de 440 Hz. Colpegem el diapasó i, alhora, toquem la tecla del *la* del piano i sentim uns batements a 3 polsos per segon. Això ens indica que el piano està una mica desafinat, però quina nota ens està donant?

Com que sentim 3 polsos per segon, la freqüència de batement és de 3 Hz, i segons l'equació 92:

$$3 = \omega_{\text{piano}} - 440 \tag{93}$$

o bé:

$$3 = 440 - \omega_{\text{piano}} \tag{94}$$

segons si la freqüència que dóna el piano és més alta o més baixa que el diapasó. Per tant, la freqüència del piano serà 443 Hz o 437 Hz.

Batements i registres d'un orgue

Un registre és un conjunt de tubs d'un orgue que reben l'aire conjuntament. Corresponen als botons que hi ha sobre el teclat de l'orgue i l'instrumentista els pot activar o desactivar per a aconseguir diversos tipus de sons.

Com a curiositat referent als batements podem assenyalar que alguns orgues disposen d'un registre anomenat *voix céleste* ('veu celestial', en francès) que consisteix precisament en un o dos conjunts de tubs molt lleugerament desafinats respecte a les notes correctes. Aquest registre s'utilitza juntament amb altres registres per a provocar batements que donen al so principal una lleugera ondulació i un efecte agradable i càlid.

Claviller d'un piano vertical

El fenomen dels batements s'utilitza per a afinar instruments de corda, com el piano. Cada nota correspon a una, dues o tres cordes, que han d'estar perfectament afinades a la nota corresponent. La seva freqüència es pot ajustar (afinar) girant més o menys les clavilles on estan agafades. En la part inferior podeu veure els martellets que colpegen les cordes quan es polsa una tecla i, gairebé tocant les cordes, els apagadors, que premen les cordes una vegada es deixa de polsar la tecla per a evitar que segueixin vibrant.

Font: Wikimedia Commons; autor: Till Westermayer

Notes musicals

En música, una nota no és res més que un so d'una freqüència determinada (i també d'una durada determinada, però aquest aspecte ara no ens interessa).

4.3. Què hem après?

Avançant una mica més en el nostre estudi de les ones, ens hem plantejat la qüestió de què passa quan dues o més ones es troben en un punt de l'espai. Hem vist que el principi de superposició ens garanteix que quan es troben dues o més ones, l'ona resultant és la suma algebraica de les ones individuals. Això ens ha permès descriure matemàticament aquest fenomen, cosa que hem fet detalladament en el cas d'ones harmòniques.

El resultat obtingut l'hem aplicat a un parell de casos particulars més simples però que són prou representatius de molts fenòmens físics: el cas en què les dues ones tenen la mateixa freqüència i el cas en què tenen freqüències semblants (cas que dóna lloc als batements).

El *la* i els 440 Hz

En l'exemple del piano desafinat us hem dit que la nota *la* correspon a una freqüència de 440 Hz. En realitat, això no és sempre així. El *la* correspon a 440 Hz en l'afinació estàndard internacional, però algunes orquestres prefereixen afinar els instruments de manera que el *la* correspongui a 442 o 444 Hz, mentre que en la interpretació de música barroca sovint s'utilitza una afinació del *la* a 415 Hz, una mica més greu.

5. Ones i condicions de contorn

En tot el que hem fet fins ara sobre les ones, sempre hem considerat que es podien propagar indefinidament, que el medi pel qual viatjaven no tenia cap límit o frontera. En molts casos això no és així. Si tornem als exemples amb què començàvem el mòdul, el toll d'aigua i el cordill d'estendre la roba, ja veiem que les ones que hi produïm no es poden propagar indefinidament: el toll d'aigua és limitat, en algun moment les ones arribaran al final; en el cordill passa el mateix: està subjectat per dos extrems i l'ona hi arribarà tard o d'hora.

Ara, doncs, cal fer un pas endavant i enfrontar-nos a un problema que encara no havíem considerat: si el medi per on es propaga una ona està limitat, té una "frontera", què li passa a l'ona quan arriba a aquest límit? Desapareix? Rebota? Provoca algun efecte en el medi que hi ha a l'altra banda de la frontera?

Experimentalment s'observa que quan una ona arriba a la frontera que determina la separació entre el medi per on s'està propagant i un altre medi, part de l'energia i de la quantitat de moviment que transporta l'ona es transmet a l'altre medi, mentre que una altra part de l'energia i el moment "roman" a l'ona, que resulta reflectida (surt "rebotada", podríem dir-ne). Normalment, la part de l'energia que s'ha transmès provoca la formació d'una nova ona en aquest altre medi. Segons com sigui el medi, la nova ona que s'ha creat es pot propagar fàcilment, i s'observa sense dificultat, o bé s'esmorteeix molt ràpidament.

Exemple. Propagació i esmorteïment d'ones

Alguns exemples ens ajudaran a comprendre millor aquest fet:

- Quan la llum (que recordeu que és una ona electromagnètica) arriba a un medi qualsevol, part de la seva energia es reflecteix i part es transmet cap a aquell medi. Si el medi és transparent tenim un cas en què es crea una nova ona, que es progaga fàcilment en aquest segon medi i s'observa sense dificultat (els medis transparents deixen passar la llum!). En canvi, si el medi és opac, la part d'energia que s'ha transmès no es pot propagar i s'esmorteeix molt ràpidament (i, a més, l'energia que transportava la llum es transforma en altres tipus d'energia; generalment en energia tèrmica, és a dir, el medi s'escalfa).

- Un altre exemple. Quan sentim el televisor dels veïns és perquè les ones sonores que emet es propaguen per l'aire i quan arriben a la paret que separa el nostre pis del seu, part de la seva energia rebota i part es transmet al segon medi (la paret). En aquest cas, l'ona que es crea en el segon medi es pot propagar amb una certa facilitat i arriba a la segona superfície de la paret (la que dóna al nostre pis), on novament torna a canviar de medi i es propaga per l'aire de la nostra habitació fins a nosaltres. No sentim perfectament el televisor dels veïns per diverses raons: en primer lloc, malgrat que l'ona s'ha propagat relativament bé, també s'ha esmorteït una mica, és a dir, ha perdut una mica d'energia; en segon lloc, no totes les freqüències s'han transmès igual de bé (per això és molt més fàcil sentir sons de baixa freqüència que no pas sons molt aguts).

Cal tenir en compte que per a cada tipus d'ona i per a cada frontera entre medis diferents, els processos físics concrets que es produeixen en aquesta reflexió i transmissió d'energia poden arribar a ser molt complexos, implicar reflexions i transmissions múltiples i altres complicacions. Tot i així, el procés bàsic és el que acabem de comentar: part de l'energia es transmet al medi que hi ha a l'altra banda de la frontera i part es queda al medi inicial.

En el mòdul "Propagació d'ones electromagnètiques" podeu trobar les expressions matemàtiques que descriuen quina part de l'energia es transmet al medi incial i quina es reflecteix en cada cas particular. Allà es fa per al cas d'ones electromagnètiques, però els resultats són generals per a qualsevol mena d'ones.

5.1. Reflexió i refracció

Com ja hem dit en l'apartat anterior, quan una ona arriba a la frontera entre dos medis, part de la seva energia es transmet al segon medi i part es queda al medi inicial. El procés pel qual part de l'energia es queda al medi inicial és la **reflexió**.

Per exemple, en la figura 14 podeu veure què passa quan una ona que es propaga per una corda arriba a un punt fix, on està subjectada. Quan l'ona arriba al final es reflecteix i, a més, resulta invertida. Si, en canvi, la corda està unida a un extrem lliure, l'ona es reflecteix però no resulta invertida.

Enllaç d'interès

Podeu experimentar amb una animació en Java a: http://www.surendranath.org/Applets/Waves/TwaveRefTran/TwaveRefTranApplet.html.

Figura 14. Reflexió d'una ona en una corda

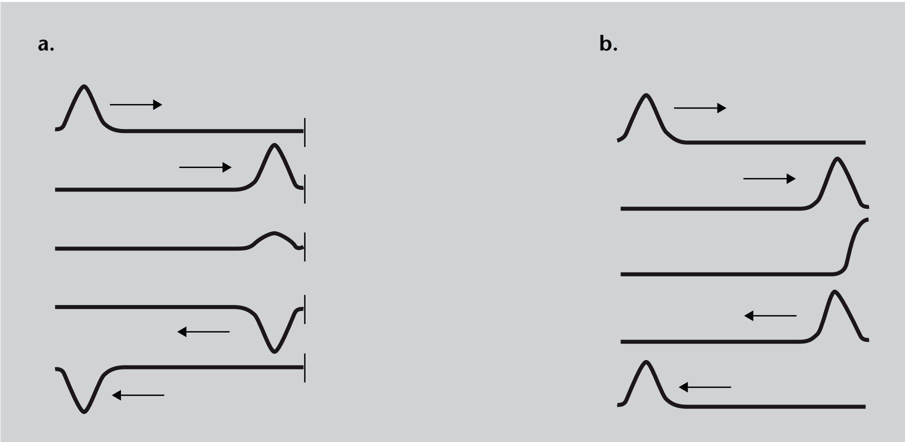


Figura 14

a. Reflexió en un extrem fix: l'ona reflectida s'inverteix.
b. Reflexió en un extrem lliure: l'ona reflectida no s'inverteix.
En ambdós casos, en una situació real, una petita part de l'energia de l'ona també passaria al segon medi (sigui quin sigui), en forma de vibracions en aquest segon medi.

Quan, en la transmissió, l'ona que es forma a l'altra banda de la frontera segueix una direcció diferent a la de l'ona original, es parla de **refracció**. La refracció normalment es caracteritza mitjançant la direcció de l'ona incident i de l'ona transmesa respecte a la direcció perpendicular (també anomenada *normal*) a la superfíce de separació. Quan la velocitat de l'ona en el segon medi és més gran que en el medi inicial, l'ona es desvia allunyant-se de la normal; quan la velocitat de l'ona en el segon medi és menor que en el primer, en canvi, l'ona es desvia apropant-se a la normal.

En el mòdul "Òptica geomètrica" s'estudia detalladament la refracció i es pot veure que el procés segueix sempre una llei determinada, la llei de Snell, que estableix quantitativament la desviació de l'ona transmesa.

5.2. Ones estacionàries

Ara considerarem, per simplicitat, una ona que es propaga en una dimensió en un medi que té una longitud finita, L, i la frontera del qual és perfectament reflectora, és a dir, no hi ha transmissió d'energia a un altre medi. En aquesta situació, quan l'ona arribi a la frontera rebotarà i tornarà enrere. D'aquesta manera tindrem un cas particular de superposició de dues ones, de la mateixa amplitud i freqüència, que viatgen en sentits oposats.

Com que considerem ones harmòniques (equació 41), una de les ones serà:

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t) \tag{95}$$

i l'altra:

$$y_1 = A\sin(kx + \omega t + \phi) \tag{96}$$

Fixeu-vos que la primera ona viatja cap a la dreta i la segona, cap a l'esquerra (això ho podeu veure del fet que la primera depèn de $kx - \omega t$, mentre que la segona depèn de $kx + \omega t$). La segona ona, a més, incorpora un desfasament ϕ respecte a la primera, ja que, de moment, no sabem quina fase tindrà quan reboti en la frontera (de fet, això dependrà de la longitud del medi pel qual viatja, com veurem a continuació).

La suma de les dues ones, novament, ens duu a:

$$y_s = 2A\sin(kx + \phi/2)\cos(\omega t + \phi/2) \tag{97}$$

on hem explicat l'equació 72 i hem seguit el mateix procediment que al punt 42.

Fixeu-vos que ara ja no tenim una funció d'ona, no tenim una funció de la forma $f(x \pm vt)$ (equació 3), ja que no hi tenim una expressió del tipus $x - vt$. Ara, en cada punt de l'espai es produeix un moviment harmònic simple amb una amplitud que depèn de la posició on es troba. Aquesta amplitud val $2A\sin(kx + \phi/2)$. Fixeu-vos que aquest factor és, efectivament, l'amplitud, ja que no té dependència en el temps i només depèn de la posició. Una ona descrita per l'equació 97 s'anomena **ona estacionària**. En la figura 15 podeu veure un exemple real d'ona estacionària, creada en una corda subjectada pels dos extrems.

Una **ona estacionària** és el fenomen resultant de la propagació simultània en sentits contraris de dues (o més) ones de la mateixa freqüència, que forma una figura on hi ha punts que són fixos i punts que oscil·len amb amplitud màxima. En lloc d'observar una ona que es propaga es veu una vibració estacionària però d'amplitud diferent a cada punt.

Figura 15. Ona estacionària creada en una corda subjectada pels dos extrems

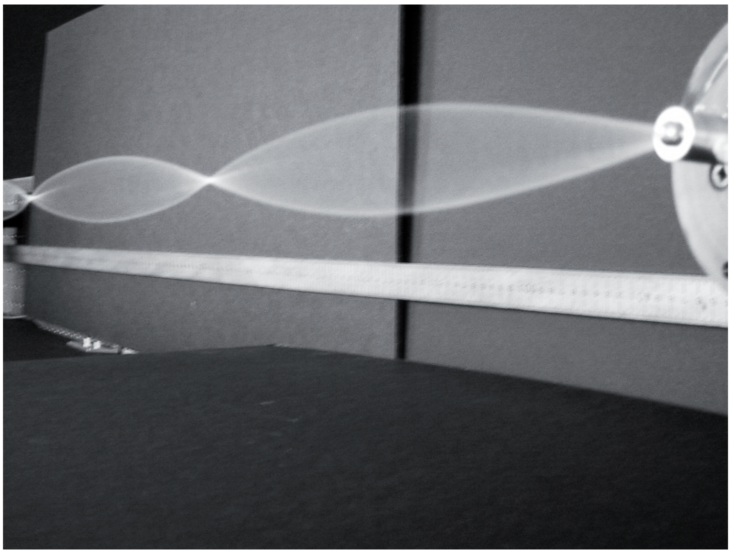


Figura 15

En cada punt de la corda es produeix un moviment harmònic simple amb una amplitud que depèn de la posició on es troba. És a dir, cada punt de la corda vibra sempre amb la mateixa amplitud.

Una ona estacionària és una ona?

Fixeu-vos que perquè una ona sigui una ona ha de complir que la seva funció d'ona sigui de l'estil $f(x \pm vt)$, cosa que aquí no es compleix. Recordeu, també, que en una ona hi ha transport d'energia i de quantitat de moviment; en canvi, en una ona estacionària no es produeix aquest transport: en cada punt de l'ona hi ha sempre la mateixa energia (perquè cada punt sempre vibra amb la mateixa amplitud). Així, en sentit estricte, una ona estacionària no és realment una ona. Però no cal amoïnar-se; com que les ones estacionàries provenen de la superposició d'ones "de debò", es poden descriure perfectament amb les eines que utilitzem per a les ones (com acabem de veure!) i parlarem d'elles com a *ones* sense preocupar-nos més.

En resum, el que és important és recordar que quan dues ones harmòniques se superposen en una zona limitada en l'espai, de manera que van rebotant contínuament en les fronteres, es crea un tipus d'ones que no semblen desplaçar-se (per això s'anomenen *estacionàries*). És una situació en què en cada punt de l'espai es produeix una vibració l'amplitud de la qual és determinada per una funció sinusoïdal que depèn del punt en qüestió.

Val la pena remarcar que, atès que l'amplitud en cada punt depèn d'una funció sinus, hi haurà punts en què l'amplitud serà sempre nul·la i altres punts en què l'amplitud serà sempre màxima, igual a $2A$. Els punts on l'amplitud és nul·la s'anomenen **nodes**, i els punts en què és màxima s'anomenen **ventres** o **antinodes**. En la figura 15 podeu veure els nodes i els ventres clarament: els nodes són els punts on la corda no està vibrant, mentre que els ventres són els punts on ho fa amb amplitud màxima. Intentem ara calcular on es troben exactament aquests punts: la seva posició dependrà de les condicions de contorn particulars del cas que estiguem tractant, de manera que ho farem per a dos casos prou il·lustratius.

5.2.1. Ones estacionàries amb els dos extrems fixos

Suposem ones estacionàries que es produeixen en un medi que està en l'eix x i que comença en $x = 0$ i acaba en $x = L$ (i, per tant, té longitud L), amb parets perfectament reflectores en què l'amplitud de l'ona ha de ser igual a zero (per exemple, els extrems d'un cordill agafat fermament pels seus extrems, com ara en l'exemple de la figura 15). Podeu veure un esquema d'aquesta situació en la figura 16. Així doncs, cal que es compleixin les condicions de contorn següents: als extrems l'amplitud, l'altura de l'ona, ha de ser zero. Expressat matemàticament, per a $x = 0$ i $x = L$, $y_s = 0$, és a dir (aplicant l'equació 97):

$$\sin(k0 + \phi/2) = 0 \qquad (98)$$

i

$$\sin(kL + \phi/2) = 0 \qquad (99)$$

Figura 16. Ones estacionàries en un medi amb fronteres perfectament reflectores

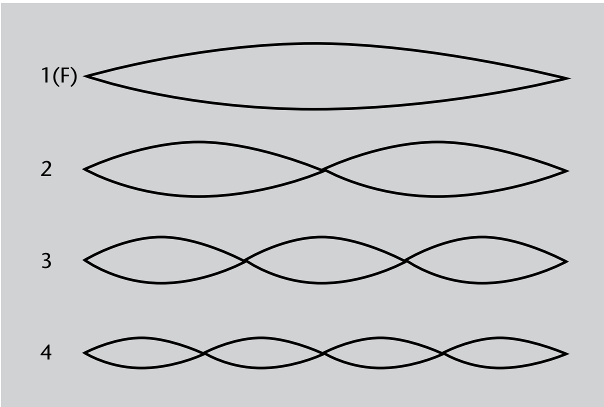


Figura 16

Ones estacionàries en un medi amb els extrems perfectament reflectors. Estan representats el mode fonamental (1) i els tres primers harmònics.

Per a satisfer la primera condició només pot ser que $\phi = 0$, de manera que la segona condició queda reduïda a:

$$\sin(kL) = 0 \qquad (100)$$

Com que sabem que la funció sinus és igual a zero només quan el seu argument és igual a zero o a un múltiple de π, la condició es redueix a:

$$kL = n\pi \qquad (n = 1,2,\ldots) \qquad (101)$$

Ja havíem vist en el subapartat 3.1. que el nombre d'ona i la longitud d'ona estan relacionats per l'equació 43, $k = 2\pi/\lambda$, de manera que si ho substituïm en l'equació anterior, tenim:

La notació $kL = n\pi \quad (n = 1,2,\ldots,)$ significa que kL és igual $n\pi$ i n pot tenir qualsevol dels valors que s'indiquen entre parèntesis, és a dir, 1, 2, 3, 4, etc.

$$\frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi \qquad (n = 1,2,\ldots) \qquad (102)$$

i, reordenant els termes:

$$\lambda = \frac{2}{n}L \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{103}$$

Fixeu-vos, per tant, que només tenim solució per a l'equació 100 quan les ones tenen unes longituds d'ona concretes, que estan determinades per la longitud del medi: podrem tenir ones de longitud d'ona igual a $2L$, L, $(2/3)L$, $(1/2)L$, $(2/5)L$, etc.

D'altra banda, com que la freqüència està relacionada amb la longitud d'ona per $f = v/\lambda$ (equació 49), podem reescriure l'equació 103 en funció de la freqüència:

$$f = n\frac{v}{2L} \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{104}$$

La freqüència més baixa possible, que correspon a $n = 1$, s'anomena **freqüència fonamental** i té el valor:

$$f_1 = \frac{v}{2L} \tag{105}$$

amb una longitud d'ona:

$$\lambda_1 = \frac{v}{f_1} = 2L \tag{106}$$

Totes les freqüències superiors a la fonamental que es poden generar en aquest sistema s'anomenen **harmònics**. Així doncs, tenim:

- la **freqüència fonamental** o primer harmònic, de freqüència $f_1 = v/2L$ i longitud d'ona $\lambda_1 = 2L$
- el **segon harmònic**, de freqüència doble a la fonamental $f_2 = v/L$ i la meitat de longitud d'ona $\lambda_2 = L$,
- el **tercer harmònic** de freqüència triple a la fonamental $f_3 = 3v/2L$ i longitud d'ona $\lambda_3 = 2L/3$,
- etc.

Aquest conjunt de freqüències s'anomena **sèrie harmònica** i són les **freqüències naturals** del sistema, és a dir, les freqüències a què pot vibrar. En la figura 16 podeu veure una representació del mode fonamental i els harmònics en aquest cas.

No s'ha de confondre la sèrie harmònica de freqüències amb la sèrie harmònica matemàtica, que és la suma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

5.2.2. Ones estacionàries amb un extrem lliure

Una altra condició de contorn que es pot donar de vegades en les ones estacionàries és un extrem fix, amb amplitud nul·la, i un altre extrem amb amplitud màxima (un extrem "obert", com passa en un tub d'orgue, per exemple). Aquesta situació la podeu veure representada en la figura 17. En aquest cas, les condicions de contorn que hem d'imposar canvien lleugerament: en un extrem l'amplitud de l'ona ha de ser zero, mentre que en l'altre ha de ser màxima. Expressat matemàticament, per a $x = 0$, $y_s = 0$ i per a $x = L$, $y_s = 2A$ i, per tant (novament, utilitzant l'equació 97):

$$\sin(k0 + \phi/2) = 0 \qquad (107)$$

i

$$\sin(kL + \phi/2) = 1 \qquad (108)$$

Figura 17. Ones estacionàries en un medi amb un extrem perfectament reflector i l'altre extrem obert

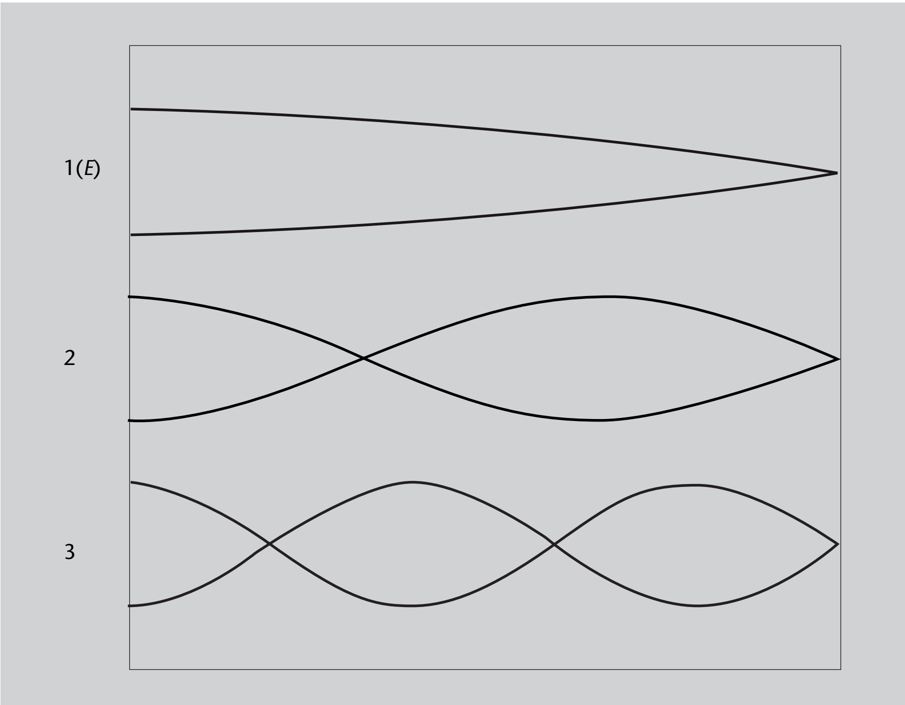


Figura 17

Ones estacionàries en un medi amb un extrem perfectament reflector i l'altre extrem obert. Estan representats el mode fonamental (1) i els dos primers harmònics.

Per a satisfer la primera condició només pot ser que $\phi = 0$ (fi igual a zero), de manera que la segona condició queda reduïda a:

$$\sin(kL) = 1 \qquad (109)$$

Com que sabem que la funció sinus és igual a 1 només quan el seu argument és igual a un múltiple senar de $\pi/2$, la condició es redueix a:

$$kL = \frac{n}{2}\pi \qquad (n = 1,3,5,\ldots) \qquad (110)$$

Ara, si tenim en compte que $k = 2\pi/\lambda$ (equació 43), la condició es redueix a:

$$\lambda = \frac{4}{n}L \qquad (n = 1,3,5,\ldots) \tag{111}$$

o, en funció de la freqüència, fent servir l'equació 49.

$$f = n\frac{c}{4L} \qquad (n = 1,3,5,\ldots) \tag{112}$$

En la figura 17 podeu veure una representació del mode fonamental i els harmònics en aquest cas.

La situació d'ones estacionàries és força comuna, i es produeix, per exemple, en les cordes o els tubs d'instruments musicals, amb ones electromagnètiques en cavitats metàl·liques, en barres, columnes i bigues amb extrems fixos, etc. I no només es produeixen ones estacionàries en sistemes unidimensionals, també les trobem en superfícies bidimensionals limitades per condicions de contorn.

Enllaç d'interès

Podeu observar animacions dels diferents modes d'oscil·lació d'una superfície amb condicions de contorn circulars a: http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Drum_vibration_animations.

Instruments de vent

La situació d'ones estacionàries amb un extrem obert es produeix en els instruments musicals de vent, com acabem de dir. Vol dir això que un instrument de vent no pot fer totes les notes que vulgui? Només podrà fer una nota fonamental i els seus harmònics, corresponents a la longitud que tingui el tub de l'instrument?

Bé, sí i no. Anem a pams. En primer lloc, tant els instruments de vent fusta (com ara les flautes o els oboès) com els instruments de vent metall (com ara les trompetes o les trompes) disposen de forats, vàlvules o pistons que permeten modificar a voluntat la llargada efectiva de l'instrument. És a dir, canviem la longitud L que hem considerat en fer l'estudi d'aquest cas. Així, podrem fer pràcticament qualsevol nota fonamental i, en conseqüència, també tots els seus harmònics.

Però això no sempre ha estat així. Antigament els instruments de vent metall no disposaven de vàlvules ni pistons, de manera que la seva longitud era fixa. Aquests instruments s'anomenen *naturals* i, efectivament, només poden fer la nota fonamental de la seva longitud i els harmònics corresponents. Us podeu preguntar també com es poden fer els diferents harmònics si no es pot canviar res en l'instrument. Bé, sí que hi ha una cosa que es pot canviar: els llavis de l'instrumentista. Aquí ja entrem en qüestions de tècnica musical, però els diferents harmònics s'aconsegueixen variant la força i la forma dels llavis i de l'aire que s'hi bufa. Els instruments naturals eren els instruments habituals de metall durant el Renaixement i el Barroc, i sovint se segueixen utilitzant quan s'interpreta música d'aquella època.

Lectura complementària

Us recomanem la lectura del capítol 49 de les *The Feynman lectures on Physics*, on hi ha una explicació força detallada i entenedora de les ones estacionàries i els modes d'oscil·lació, també en dues dimensions.

Activitat

A la pel·lícula *Voyage to the Bottom of the Sea* (1961) un vaixell vol determinar la profunditat a què es troba el *Seaview*, un submarí submergit. L'emissor del vaixell, situat al nivell del mar, emet ones sonores que interfereixen amb les ones reflectides per la coberta del submarí. Es produeixen nodes a 7 cm del focus emissor i 0,1 s després d'emeses ja no es reben ones reflectides. Sabent que la freqüència de les ones emprades és de 5.000 Hz i que la seva velocitat és independent de la pressió de l'aigua, determineu a quina profunditat és el submarí. [Adaptat de l'obra de Pont i Moreno (1994). *Física i ciència ficció*, p. 269]

Activitat

En el text hem estudiat i calculat les ones estacionàries que es produeixen en un sistema en què dos extrems són tancats (i llavors és obligatori que en els extrems hi hagi un node) i en un sistema amb un extrem tancat i un obert (i llavors s'imposa que en un extrem hi hagi un node i en l'altre un ventre). Us convidem ara a fer la mateixa anàlisi però en el cas dels dos extrems oberts. En aquest cas la condició a imposar serà la presència de ventres a cadascun dels extrems.

5.3. Difracció

En els dos subapartats anteriors hem vist què els passa a les ones quan es troben amb una frontera entre dos medis, però hi ha una altra situació que encara cal considerar: què passa quan una ona es troba amb una frontera que no "tanca" completament el medi per on s'està propagant? En altres paraules, què passa quan es troba amb un obstacle que no cobreix tot el front d'ones, o amb una frontera entre dos medis que té un forat?

Llum i difracció

L'observació de la difracció amb la llum fou un dels arguments de més pes per a la hipòtesi que la llum és una ona. Si la llum estigués formada per partícules no es produiria aquest fenomen, ja que les partícules no "s'obren" quan passen per un forat.

En el mòdul "Òptica geomètrica" es parla de la llum i la difracció.

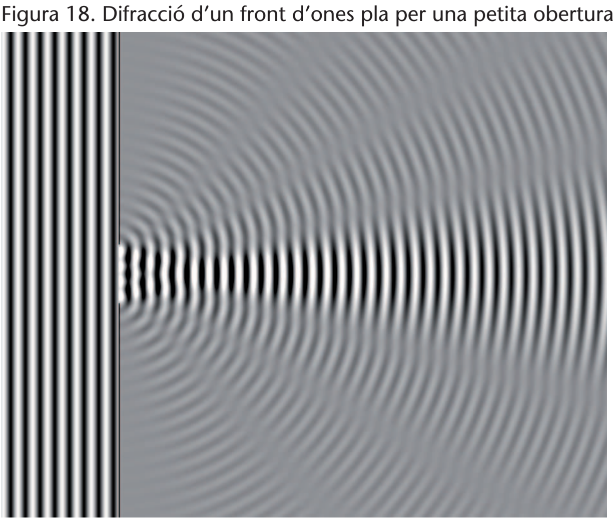
A la part del front d'ones que xoca directament amb l'obstacle li passarà exactament el que hem comentat en els subapartats anteriors: una part de l'energia de l'ona rebotarà i una altra passarà al segon medi. En canvi, la part del front d'ones que no es troba molestada per l'obstacle o es troba davant del forat semblaria que pogués seguir propagant-se normalment. Doncs bé, no és exactament així: el front d'ona tendeix a rodejar un obstacle i a "obrir-se" quan passa per un forat. Es el fenomen de la **difracció**.

La **difracció** és la desviació en la propagació d'una ona quan aquesta es troba amb obstacles o travessa obertures.

En les figures 18 i 19 teniu uns exemples de difracció de fronts d'ona plans per obertures diverses. En tots els casos podeu observar que, després de travessar l'obertura, els rajos (i els fronts d'ona), en lloc de prosseguir la seva propagació en línia recta, "s'obren" com si haguessin sortit de l'obertura en totes direccions (tingueu en compte que la figura 18 és una representació precisa i exacta, mentre que la figura 19 és només un esquema aproximat).

Recordeu que els rajos són sempre perpendiculars al front d'ona.

Figura 18. Difracció d'un front d'ones pla per una petita obertura



Font: Wikimedia Commons; autor: Dicklyon

Figura 18

Simulació numèrica (per ordinador) de la difracció d'un front d'ona pla en arribar a una frontera que conté un petit forat. Les ones que arriben a la frontera es reflecteixen (però la reflexió no es mostra en la figura). Les ones que arriben al forat segueixen endavant, però en lloc de seguir la seva direcció original, "s'obren" i es propaguen com si tinguessin l'origen en l'obertura.

La difracció es produeix sempre, però tanmateix, els seus efectes són més pronunciats quan les ones implicades tenen una longitud d'ona del mateix ordre de magnitud que les dimensions dels obstacles o obertures que provoquen la difracció. En el cas de les ones sonores, com que les longituds d'ona van des d'alguns centímetres fins a uns quants metres, la difracció és un fenomen ben habitual, ja que les dimensions típiques dels objectes quotidians també estan entre uns centímetres i uns quants metres. En canvi, en el cas de la llum, les longituds d'ona són de l'ordre de la deumilionèsima del metre (de l'ordre de 10^{-7} m) i, per tant, no la podem observar habitualment.

Figura 19. Difracció d'un front d'ones

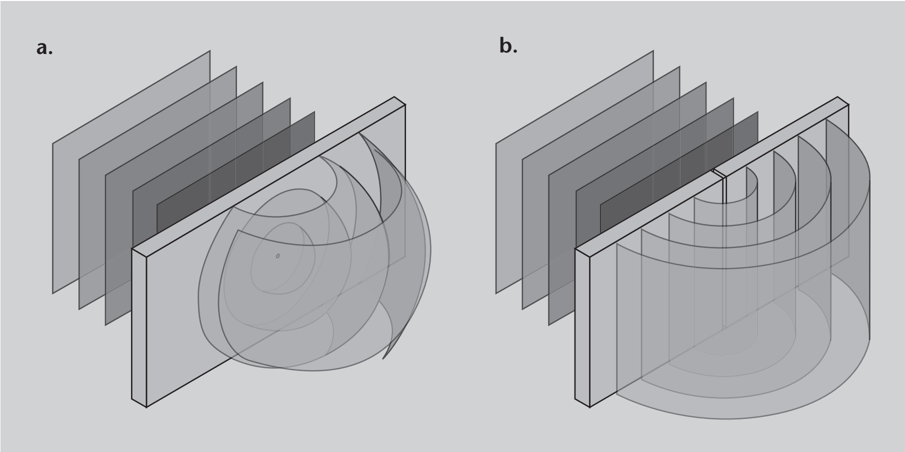


Figura 19

Esquema de la difracció d'un front d'ona pla:
a. per una petita obertura circular,
b. per una escletxa vertical.

Exemple de recapitulació

Per a recapitular una mica, abans de prosseguir, pensem per un moment en tots els possibles mecanismes que hem estudiat i pels quals, des de l'habitació on som, podem sentir algú que parla a l'habitació del costat. Per a això considerem l'exemple de la situació representada en la figura 20.

Figura 20

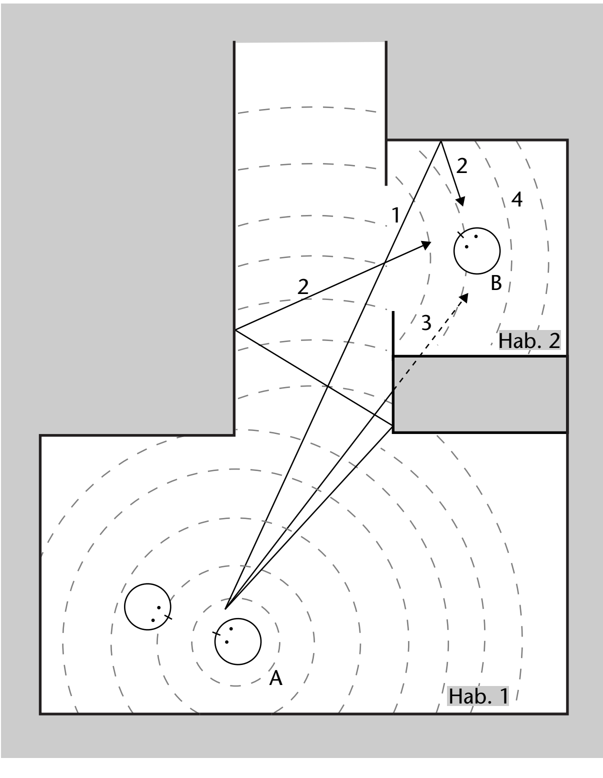


Figura 20

Com sent en Bob el que està dient l'Alícia? A l'habitació 1 hi ha l'Alícia que parla amb un amic, i a l'habitació 2 hi ha en Bob. En Bob no pot sentir el que diu l'Alícia per la propagació directa de les ones sonores d'un a l'altre (1), però sí per la reflexió de les ones (2), per la transmissió de les ones per la paret (3) i per la difracció de les ones a la porta (4). Els casos (1), (2) i (3) els hem representat amb rajos, mentre que el (4), per a no carregar massa el dibuix, l'hem representat amb el front d'ona.

En la figura veiem l'Alícia (A), que parla amb un amic a l'habitació 1. En Bob (B) és a l'altra habitació, la 2, connectada amb la 1 a través d'un passadís, i pot sentir perfectament què està dient l'Alícia. Com han arribat les ones sonores emeses per l'Alícia fins a les orelles d'en Bob? Considerem totes les possibilitats:

1) Per la propagació directa de les ones sonores: en aquest cas, com podeu veure al dibuix, la situació relativa de l'Alícia i en Bob impedeix que cap ona sonora emesa per la noia arribi directament a en Bob.

2) Per la reflexió en les parets: les ones reboten en les parets i algunes, d'aquesta manera, podran arribar fins a en Bob. Cada raig rebotarà segons la llei de la reflexió que ja hem estudiat (subapartat 5.1.), però tingueu en compte que la reflexió global serà més o menys difusa en funció de les irregularitats de la paret.

3) Per la transmissió a través de les parets: bona part de l'energia de les ones que arriben a les parets es reflecteix (i podran arribar a en Bob segons el que hem dit en el punt 2), però una altra part es transmet cap a l'interior de la paret. Si la paret no està feta d'un medi especialment absorbent, l'ona es propagarà i arribarà a la frontera de la paret amb l'habitació 2. En aquesta nova frontera part de l'energia passarà al segon medi, que ara torna a ser l'aire, i, finalment, podrà arribar a en Bob. Segurament serà una contribució molt petita, però si totes les portes estiguessin tancades i barrades, seria l'única manera que en Bob podria sentir alguna cosa del que diu l'Alícia.

4) Per la difracció en els obstacles i obertures: les ones que es propaguen pel passadís, de cop i volta troben una obertura, que és la porta de l'habitació 2. Com ja hem vist en parlar de la difracció (subapartat 5.3.), les ones "s'obriran" i s'escamparan a través d'aquesta obertura. D'aquesta manera també arribaran a en Bob.

5.4. Què hem après?

Fins ara havíem considerat les ones de forma molt general, sense preocupar-nos de si hi havia altres coses al seu voltant o no. En aquest apartat hem introduït aquest fet, que complica les coses però que cal estudiar-lo si volem considerar situacions reals en què intervinguin ones. En altres paraules, hem considerat que el medi per on es propaga una ona està limitat, té una "frontera", i hem vist què li passa a l'ona quan arriba a aquest límit.

La idea més important que us ha d'haver quedat clara pel que fa al comportament general d'una ona quan arriba a la frontera que determina la separació entre el medi per on s'està propagant i un altre medi, és que part de l'energia de l'ona es transmet a l'altre medi, mentre que una altra part de l'energia "roman" a l'ona, que resulta reflectida. Normalment, la part de l'energia que passa al segon medi provoca la formació d'una nova ona en aquest altre medi. Segons com sigui el medi, la nova ona que s'ha creat es pot propagar fàcilment, i s'observa sense dificultat, o bé s'esmorteeix molt ràpidament.

Com a casos particulars de tot el que hem dit, hem estudiat les ones estacionàries, que es formen quan en un determinat medi tenim ones que viatgen endavant i endarrere, superposant-se. També hem considerat breument el cas en què una ona xoca amb obstacles i travessa forats. En aquests casos, a més de la reflexió i/o la transmissió d'energia, té lloc el fenomen de la difracció, la desviació en la propagació d'una ona quan aquesta es troba amb obstacles o travessa obertures.

6. Moviment relatiu d'emissor i observador. L'efecte Doppler

Fins ara hem estat considerant les ones sense fer cap referència a qui o què les emet ni a qui o què les rep o les observa (excepte en l'exemple de l'Alícia i en Bob amb què acabàvem l'apartat anterior). Potser us heu quedat amb la impressió que l'emissor i el possible receptor de les ones no tenen gaire importància més enllà d'emetre o rebre. Això no és així: la situació en què es troben emissor i receptor i, més específicament, com s'estiguin movent, té una importància considerable en algunes característiques de les ones.

Potser alguna vegada us haureu adonat d'un fet curiós: som al carrer i sentim que s'apropa una ambulància, amb la sirena clarament audible. L'ambulància passa ràpidament pel nostre costat i, de cop, quan ens ha avançat i ja s'allunya de nosaltres, sentim com el so de la sirena ha canviat: ara és més greu que quan s'estava apropant. La sirena de l'ambulància emet el so que emet i no canvia pas quan ens avança; què ha passat, doncs? com és que el sentim diferent?

Les ones sonores emeses per la sirena són sempre iguals, en canvi nosaltres les hem rebudes de manera diferent, concretament les hem rebudes amb una freqüència diferent, segons si la sirena s'apropava o s'allunyava. Què els ha passat? Fixeu-vos que el que ha passat és que canvia la freqüència amb què sentim l'ona en funció de si s'apropa o s'allunya de nosaltres. Aquest fenomen es pot observar en qualsevol tipus d'ones i s'anomena *efecte Doppler*.

Christian Doppler

L'efecte Doppler rep el nom del físic austríac Christian Doppler, que el va descriure l'any 1842 en el seu treball *Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels* ("Sobre la llum colorejada de les estrelles binàries i altres estrelles del cel"). El 1845 el químic neerlandès Chistophorus Buys Ballot confirmà l'efecte en ones sonores.

L'**efecte Doppler** és el canvi de la freqüència d'una ona observada per un receptor que es troba en moviment relatiu respecte a l'emissor.

Fixeu-vos que els dos punts clau de l'efecte Doppler són el canvi de freqüència de l'ona i el fet que aquest canvi es produeix quan l'emissor de l'ona i el receptor s'estan movent un respecte a l'altre. Si no hi ha moviment relatiu entre emissor i receptor, aquest últim observarà exactament la freqüència que emet l'emissor, sense cap modificació.

Per a estudiar l'efecte Doppler considerarem el cas en què l'emissor i el receptor es mouen l'un respecte a l'altre en la direcció de la recta que els uneix. Com que el cas general pot resultar una mica enrevessat, farem primer el cas en què hi ha un emissor en repòs respecte al medi i un receptor o observador que es mou respecte a l'emissor. Després farem el cas contrari: hi ha un emissor en moviment respecte al medi i és el receptor qui està en repòs. Finalment combinarem els dos resultats per a arribar al resultat general.

6.1. Emissor en repòs i observador en moviment

Suposem primer que tenim un emissor en repòs respecte al medi en què es propaguen les ones i un receptor o observador que es mou respecte a l'emissor amb una velocitat v_o, com teniu representat en la figura 21.

Freqüència

Recordeu que la freqüència es pot determinar com el nombre de màxims que passen per un punt en una unitat de temps (per exemple, en un segon).

Figura 21. Efecte Doppler quan l'emissor és en repòs i l'observador es mou

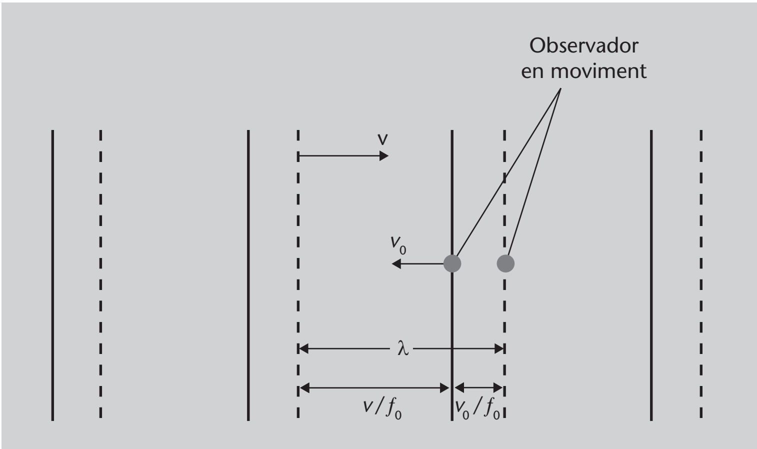


Figura 21

En l'esquema, l'observador es mou amb velocitat v_o cap a l'emissor, que emet ones de freqüència f que es propaguen a velocitat v.

Considerarem positiva la velocitat si l'observador s'apropa a l'emissor, que és el cas de la figura, i negativa en cas contari. L'emissor està emetent ones de freqüència f i, per tant, de longitud d'ona $\lambda = v/f$. Quina freqüència observarà el receptor? Si estigués en repòs, el nombre de màxims que el travessarien en una unitat de temps seria v/λ, però com que s'està movent amb velocitat v_o en veurà més, perquè s'està dirigint cap als màxims que venen cap a ell. Per tant, en realitat la velocitat relativa entre ona i observador no és v sinó $v + v_o$; així, la freqüència que observa el receptor, f_o és:

$$f_o = \frac{v + v_o}{\lambda} \tag{113}$$

Com que λ és igual a v/f, podem substituir-la en l'equació 113 i tenir:

$$f_o = f + v_o \frac{f}{v} \tag{114}$$

que podem reordenar com:

$$f_o = f\left(\frac{v + v_o}{v}\right) \tag{115}$$

Segons aquesta expressió, podem veure que si el receptor s'apropa a l'emissor ($v_o > 0$) observarà una freqüència més alta, perquè llavors el quocient $(v+v_o)/v$ és superior a 1, i si s'allunya ($v_o < 0$), més baixa, perquè llavors el quocient $(v + v_o)/v$ és menor que 1.

6.2. Emissor en moviment i observador en repòs

I si és l'emissor qui es mou i l'observador està en repòs respecte al medi? Aquest és el cas que representem en la figura 22, i un raonament anàleg al que acabem de fer ens duria a obtenir la fórmula següent, on v_e és la velocitat de l'emissor:

$$f_o = f\left(\frac{v}{v + v_e}\right) \tag{116}$$

Figura 22. Efecte Doppler quan l'emissor es troba en moviment i l'observador en repòs

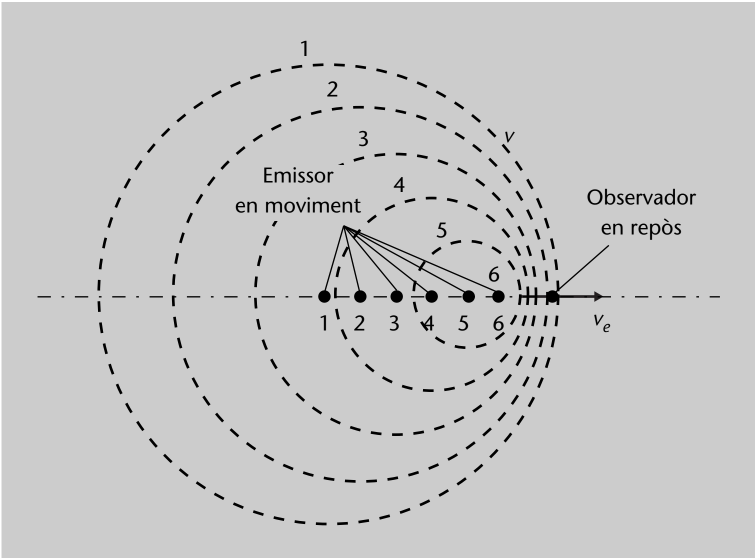


Figura 22

En l'esquema, l'emissor es mou amb velocitat v_e cap a l'observador i emet ones que es propaguen a velocitat v respecte al medi. Els punts indiquen el lloc d'emissió de cada ona.

Activitat

Obtingueu l'equació 116 seguint un raonament equivalent al que hem fet per a obtenir l'equació 115. En el procés haureu de calcular quina és la longitud d'ona emesa per l'emissor, que no és simplement v/f, ja que l'emissor s'està movent a una velocitat v_e respecte al medi, sinó:

$$\lambda = \left(\frac{v + v_e}{f}\right) \tag{117}$$

6.3. Cas general: emissor i observador en moviment

Ara ja podem combinar els dos resultats que hem obtingut per a arribar a una expressió general per a l'efecte Doppler, amb moviment d'emissor i d'observador. En l'equació 113, que ens dóna la freqüència observada pel receptor en moviment en funció de la longitud d'ona rebuda, substituïm aquesta longitud d'ona λ per l'expressió 117, perquè ara és aquesta la longitud d'ona emesa per l'emissor en moviment. Així, arribem a:

$$f_o = f\,\frac{v + v_o}{v + v_e} \tag{118}$$

Activitat

Obtingueu l'equació 118 seguint el procés que acabem de comentar: substituir la longitud d'ona que ens dóna l'equació 117, que és la longitud d'ona emesa per l'emissor en moviment, en l'equació 113, que ens dóna la freqüència observada pel receptor en moviment.

En aquesta equació de l'efecte Doppler cal anar molt amb compte amb els signes de la velocitat. Quan considerem que v_o i v_e són positives o negatives? En general considerem:

- v_o positiva quan l'observador "s'apropa" a l'ona, és a dir, es mou en sentit contrari al de propagació de l'ona que està rebent,
- v_o negativa quan l'observador "s'allunya" de l'ona.

Les ones s'emeten en totes direccions. Ara bé, per a l'efecte Doppler ens fixem només en l'ona que després detecta l'observador.

Per a v_e passa exactament el mateix:

- considerem v_e positiva quan l'emissor es mou en sentit contrari al de l'ona que emet,
- considerem v_e negativa quan l'emissor es mou en el mateix sentit que el de l'ona que emet.

En el cas que les velocitats de l'emissor i del receptor siguin força més petites que la velocitat de propagació de l'ona en el medi, l'equació 118 es pot simplificar considerant $v_o \ll v$ i $v_e \ll v$. Fent aquesta aproximació s'arriba al resultat:

$$\Delta f \approx f \frac{v_{\text{rel}}}{v} \tag{119}$$

on $v_{\text{rel}} = v_o - v_e$ i $\Delta f = f_0 - f$.

Demostració

Arribar a aquest resultat és una mica delicat. Ho demostrarem a continuació, però ho deixem com a text opcional.

Atès que considerem $v_o \ll v$ i $v_e \ll v$, inicialment podríem pensar en eliminar v_o i v_e en el numerador i el denominador de l'equació 118, però és clar, llavors ens quedaríem simplement amb el resultat que $f_o = f$. Això vol dir que hem anat massa lluny en la simplificació. El que cal fer en aquests casos és buscar una simplificació menys radical. Fixeu-vos que podem reescriure l'equació 118 com:

$$f_o = f \frac{1 + v_o/v}{1 + v_e/v} \tag{120}$$

Ara ve la part delicada: com que el quocient v_e/v és molt més petit que 1, podem aprofitar el fet que

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + \ldots \tag{121}$$

El resultat de l'equació 121 prové de desenvolupar $1/1-x$ en una sèrie de Taylor, i només és vàlid per a $|x| < 1$.

En el nostre cas considerem que x és $-v_e/v$ i llavors podem escriure l'equació 120 com:

$$f_o \approx f\left(1+\frac{v_o}{v}\right)\left(1-\frac{v_e}{v}\right) \tag{122}$$

Fent el producte dels dos parèntesis tenim:

$$f_o \approx f\left(1+\frac{v_o}{v}-\frac{v_e}{v}-\frac{v_o v_e}{v^2}\right) \tag{123}$$

Ara novament podem fer una aproximació, ja que el terme $v_o v_e/v^2$ és molt més petit que tots els altres. Fixeu-vos que és en aquest punt on hem fet l'aproximació "menys radical" que dèiem. Abans intentàvem una simplificació eliminant termes d'ordre x enfront de termes d'ordre 1 i ens quedàvem amb no res; ara anem un pas més enllà i eliminem termes d'ordre x^2 enfront de termes d'ordre x i d'ordre 1. D'aquest manera tenim:

$$f_o \approx f\left(1+\frac{v_o - v_e}{v}\right) \tag{124}$$

que encara podem reordenar com a

$$f_o - f \approx f\frac{v_o - v_e}{v} \tag{125}$$

I si ara definim Δf com la diferència entre la freqüència emesa per la font i la freqüència observada pel receptor, $f_o - f$, i v_{rel} com la velocitat relativa entre emissor i observador, és a dir, $v_o - v_e$, arribem a l'expressió simplificada de l'efecte Doppler, l'equació 119:

$$\Delta f \approx f\frac{v_{\text{rel}}}{v} \tag{126}$$

Exemple. La freqüència d'una sirena de cotxe

Comencem amb un exercici que recupera el que comentàvem al començament de l'apartat: la sirena d'un cotxe. Per a no complicar innecessàriament el problema, suposem una sirena que emet un so d'una única freqüència, un so de 440 Hz. Si aquest cotxe es mou a 90 km/h cap a nosaltres, que estem parats, quina és la freqüència que sentirem? Tingueu en compte que la velocitat del so és 340 m/s.

Solució

En aquest exemple concret tenim un emissor en moviment (una sirena) que emet ones i un observador en repòs (nosaltres). Sabem la freqüència de la sirena i sabem la velocitat de l'emissor. L'objectiu és calcular la freqüència que observem (millor dit, que sentim). Per a fer-ho, n'hi ha prou d'aplicar directament l'equació general de l'efecte Doppler (equació 118):

$$f_o = f\frac{v+v_o}{v+v_e} \tag{127}$$

D'aquesta equació sabem:

- la freqüència de l'emissor: $f = 440$ Hz,
- la velocitat de propagació de l'ona: $v = 340$ m/s,
- la velocitat de l'observador: $v_o = 0$ m/s,
- la velocitat de l'emissor: $v_e = -90$ km/h $= -25$ m/s. Fixeu-vos que és negativa, segons la convenció de signes que hem establert.

Així, doncs:

$$f_o = 440 \frac{340}{340 - 25} = 475 \text{ Hz} \quad (128)$$

Observem, per tant, una freqüència una mica més alta que la que realment està emetent la sirena, és a dir, un so més agut.

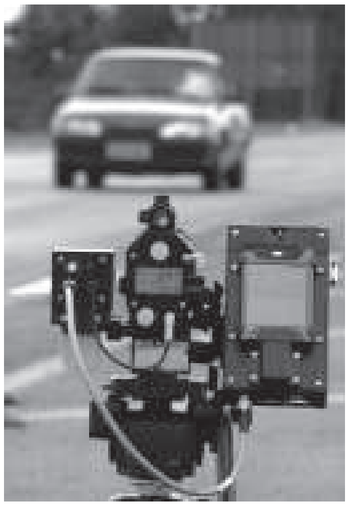
Activitat

Repetiu l'exercici anterior però ara considerant que, a més, nosaltres anem caminant cap al cotxe a una velocitat de 6 km/h. Quina freqüència observarem? I si, en canvi, ens estem allunyant del cotxe amb un altre cotxe que va a 150 km/h?

Exemple

L'efecte Doppler també s'utilitza en els radars meteorològics i en els radars de control de velocitat en les carreteres. En aquest cas es tracta d'efecte Doppler amb ones electromagnètiques de la banda de radioones. Per a mesurar la velocitat dels vehicles es té el que en podríem dir un "efecte Doppler doble". L'ona emesa pel radar a freqüència f arriba al vehicle, que la rep amb una freqüència f_o, ja que s'està apropant o allunyant del radar. Les ones que reboten en el vehicle, que ara és l'emissor, ho fan, doncs, amb freqüència f_o i el radar, que ara és l'observador, les detecta a una freqüència f_r, ja que l'emissor (el vehicle) es mou respecte a l'observador.

Tenint tot això en compte, trobeu una expressió que ens doni la velocitat del vehicle (v_v) en funció de la freqüència que emet el radar (f) i la freqüència que detecta (f_r). Podeu utilitzar el fet que, atès que el radar treballa amb ones electromagnètiques, que es desplacen a la velocitat de propagació de la llum, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, tenim $v_v \ll c$. Una vegada trobada aquesta expressió, suposeu que un radar emet ones de freqüència $f = 1{,}5 \cdot 10^9$ Hz i detecta les ones rebotades per un cotxe a una freqüència 500 Hz més baixa. Que potser li hauran de posar una multa?



Radar per al control de velocitat

Solució

Per a trobar l'expressió demanada, de moment considerem la variació total de la freqüència Δf, que serà:

$$f_r - f = \Delta f = \Delta f_1 + \Delta f_2 \quad (129)$$

on

$$\Delta f_1 = f_o - f \quad (130)$$

i

$$\Delta f_2 = f_r - f_o \quad (131)$$

Ara, aprofitant que $v_v \ll v = c$, podem utilitzar l'equació simplificada de l'efecte Doppler (equació 119) per a trobar expressions per a Δf_1 i Δf_2:

$$f_o - f = \Delta f_1 \approx f \frac{v_v}{c} \quad (132)$$

$$f_r - f_o = \Delta f_2 \approx f_o \frac{v_v}{c} \quad (133)$$

i, per tant, substituint en l'equació 129, Δf serà:

$$\Delta f \approx f\frac{v_v}{c} + f_o\frac{v_v}{c} = \frac{v_v}{c}(f + f_o) \tag{134}$$

Com que el que volem és eliminar la freqüència f_o, que no sabem, i quedar-nos només amb les que coneixem, l'emesa f i la rebuda f_r, aïllem f_o de l'equació 132:

$$f_o = \left(1 - \frac{v_v}{c}\right) f \tag{135}$$

i substituïm aquest resultat en l'equació 134:

$$\Delta f \approx \frac{v_v}{c}\left(2 - \frac{v_v}{c}\right) f \tag{136}$$

Com que v_v/c és menyspreable enfront de 2, podem eliminar aquest terme i quedar-nos simplement amb:

$$\Delta f \approx 2\frac{v_v}{c} f \tag{137}$$

i si volem aïllar la velocitat del cotxe, que és el que ens interessa, fent servir l'equació 129 ens queda:

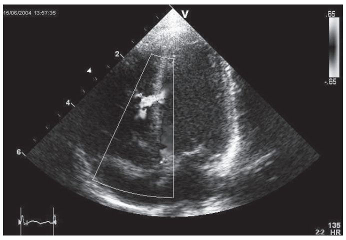
$$v_v = \frac{c}{2f}\Delta f = \frac{f_r - f}{2f} c \tag{138}$$

Aquesta expressió ens dóna, finalment, la velocitat del vehicle en funció de la freqüència emesa pel radar, f, i la freqüència detectada, f_r.

La segona part de l'exemple, el càlcul numèric del cas particular, us el deixem com a exercici.

Exemple. Ecografies Doppler

L'efecte Doppler s'utilitza sovint en ecocardiografia (l'ecografia aplicada a la cardiologia), per a observar no solament l'anatomia del cor, sinó també per a determinar la direcció i la velocitat del corrent sanguini. En certes condicions un ecocardiograma pot determinar amb precisió la direcció i la velocitat de la sang i del teixit cardíac en un punt determinat, sempre que les ones d'ultrasons que s'emeten siguin tan paral·leles al flux sanguini com sigui possible. La mesura de la velocitat permet avaluar el funcionament de les vàlvules cardíaques i del cor, possibles comunicacions anòmales entre la part dreta i l'esquerra del cor i fugues de sang a través de les vàlvules (el que s'anomena *regurgitació valvular*) i també calcular el cabal cardíac (volum de sang bombejat pel cor en un minut).



Ecocardiografia Doppler d'un cor amb comunicació interventricular

6.4. Ones de xoc

En tot el que acabem de fer sobre l'efecte Doppler, sempre hem considerat de manera implícita que la velocitat de l'emissor és més baixa que la velocitat de les ones en el medi per on es propaguen i per on es desplaça l'emissor. Això no sempre serà així, i només cal recordar que la velocitat del so en l'aire és d'uns 340 m/s (uns 1.220 km/h) per a adonar-se que un avió prou ràpid pot superar fàcilment aquesta velocitat.

Si un emissor d'ones es mou més ràpid que la velocitat de propagació de les ones que emet, al seu davant mai no hi haurà ones propagant-se, ja que les "avança" immediatament després d'emetre-les. Així, les ones es concentren darrere de l'emissor i formen una **ona de xoc**, on s'acumulen els màxims de les ones emeses. Podem observar el procés esquemàticament en la figura 23.

Figura 23. Ona de xoc

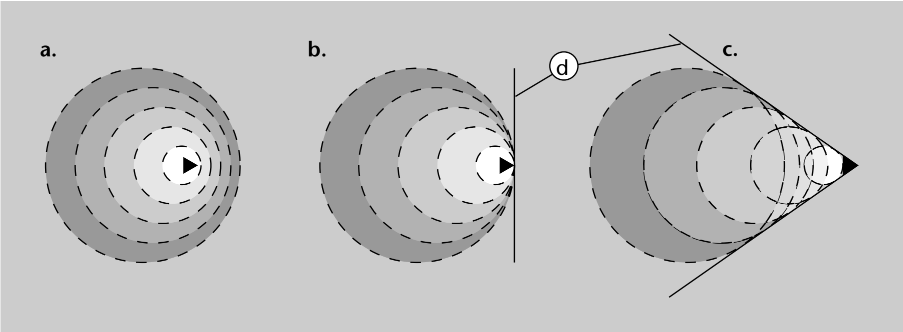


Figura 23

a. Un objecte emissor d'ones es mou en un medi amb una velocitat inferior a la velocitat de propagació d'aquestes ones. Les ones generades es propaguen en totes direccions.
b. L'objecte assoleix una velocitat igual a la de propagació de les ones. Ara ja no hi ha ones al seu davant, perquè l'objecte va tan ràpid com elles.
c. L'objecte va més ràpid que la velocitat de propagació de les ones.
d. Les ones es concentren darrere de l'emissor i formen una ona de xoc.

La formació d'ones de xoc és força comuna en el cas d'ones mecàniques, especialment sonores; en aquest cas, un observador sentirà una forta explosió quan l'ona de xoc arribi a la seva posició, el que s'anomena **explosió sònica**, produïda per l'acumulació de màxims.

Una magnitud que s'utilitza sovint en aquest context és el **nombre de Mach**, simbolitzat per M o per Ma, i que és igual al quocient entre la velocitat de l'emissor i la velocitat de propagació de l'ona, és a dir:

$$M = \frac{v_e}{v} \tag{139}$$

Igualment, es defineix l'angle de Mach, que mesura l'obertura de l'ona de xoc generada i es pot expressar en funció del nombre de Mach com a

$$\mu = \arcsin \frac{1}{M} \tag{140}$$

El símbol μ correspon a la lletra grega mu minúscula.

Fixeu-vos que quan un avió arriba a una velocitat igual a la del so en l'aire, segons l'equació 139 el nombre de Mach és

$$M = \frac{v}{v} = 1 \tag{141}$$

Velocitat del so en l'aire

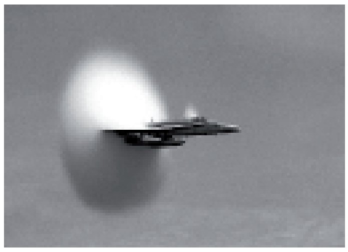
Recordeu que la velocitat del so en l'aire és d'uns 340 m/s, és a dir, 1.224 km/h, tot i que el valor és lleugerament diferent en funció de la temperatura i de la humitat.

Per això, quan un avió va a la velocitat del so es diu que "va a Mach 1" i en el moment d'arribar-hi es diu que trenca la **barrera del so**. Si anés a una velocitat igual al doble que la del so, aniria a Mach 2, etc.

Classificació de vols en aeronàutica

En aeronàutica s'acostumen a classificar els vols en funció del nombre de Mach de la següent manera:

- Subsònic: $M < 1$.
- Sònic: $M = 1$.
- Transònic: $0{,}8 < M < 1{,}2$.
- Supersònic: $1{,}2 \leq M < 5$.
- Hipersònic: $M \geq 5$.



Un F/A-18 Hornet és a punt de trencar la barrera del so sobre les aigües del Pacífic. La "boira" que s'observa darrere l'avió és produïda per la condensació del vapor d'aigua, causada per la caiguda sobtada de pressió que té lloc darrere de l'ona de xoc quan s'està arribant a Mach 1. Aquest fenomen rep el nom de *singularitat de Prandtl-Glauert* i encara no està descrit perfectament.

Rècords de velocitat

Actualment, el rècord de velocitat en un vol tripulat atmosfèric és de 3.530 km/h, aconseguit amb un avió Lockheed SR-71 Blackbird l'any 1976. En vols atmosfèrics no tripulats el rècord el té l'estatoreactor de combustió supersònica (en anglès *scramjet*) X-43A de la NASA, que assolí 12.140 km/h el 2004. Els vehicles espacials assoleixen velocitats encara superiors durant les seves reentrades a l'atmosfera: per exemple, el transbordador espacial arriba a uns 28.000 km/h quan torna a penetrar en l'atmosfera terrestre, però esclar, en aquest cas ja no estem parlant d'avions "normals". Per cert, a quins nombres de Mach corresponen totes aquestes velocitats? Com que la majoria d'aquests vols es realitzen a grans altures, on la temperatura de l'aire és molt baixa i, en conseqüència, la velocitat del so és més petita, calculeu els nombres de Mach suposant que els vols es produeixen a una altura d'11.000 metres, on la velocitat del so és de 295 m/s (1.062 km/h).

6.4.1. Ones de xoc amb llum: radiació Txerenkov

Tot i que menys habitual, les ones de xoc també es produeixen amb radiació electromagnètica, quan una partícula carregada elèctricament emet ones electromagnètiques i es mou en un medi a una velocitat superior a la de la llum. A primera vista això ens pot semblar sorprenent, perquè potser haureu sentit a dir que res no pot anar més ràpidament que la llum.

Txerenkov, Tamm i Frank

La radiació Txerenkov rep el seu nom del físic Pàvel Aleksèievitx Txerenkov, que l'observà el 1934. El 1937 Ígor Tamm i Ilià Mikhàilovitx Frank en donaren la interpretació correcta, treballs pels quals van rebre el premi Nobel de física l'any 1958.

Bé, això només és cert en part. L'afirmació correcta és que res no pot anar més ràpidament que la llum *en el buit* (de fet, aquesta afirmació és un dels principis fonamentals de la teoria de la relativitat). Res no impedeix però, que un objecte es pugui moure en un medi més ràpidament que la llum en aquell mateix medi. La radiació electromagnètica emesa en aquestes condicions forma una ona de xoc i rep el nom de **radiació Txerenkov**. Si és prou intensa, la part de radiació Txerenkov que s'emet en freqüències visibles es pot observar fàcilment com a llum blava. És precisament aquesta radiació Txerenkov la que es pot veure com una lluentor blavosa que envolta els reactors nuclears de piscina (els que tenen el nucli submergit en una gran piscina), provocada quan partícules d'alta energia procedents de les reaccions de fissió travessen l'aigua que envolta el reactor a una velocitat superior a la de la llum en l'aigua.

Lluentor blava produïda per la radiació Txerenkov al reactor de la central nuclear de Gösgen, a Suïssa

6.5. Què hem après?

En aquest apartat hem vist que el moviment entre la font que emet ones i l'observador que les detecta no és irrellevant pel que fa a una característica fonamental de les ones: la freqüència.

En general, quan emissor i receptor s'allunyen, la freqüència detectada pel receptor disminueix, mentre que quan s'apropen, augmenta. I, a més, en el cas extrem en què l'emissor es mogui més ràpidament que les pròpies ones que emet es produeix el fenomen, més o menys espectacular, de les ones de xoc i les explosions sòniques.

7. Transport d'energia en les ones

Si recordeu la definició inicial que hem donat d'ona en el subapartat 1.1., potser us estareu preguntant per què encara no hem parlat de l'energia que transporten les ones. Al capdavall, hem dit que el transport d'energia, però no de matèria, n'és la característica definitòria.

Definició d'ona

Una ona és una pertorbació que es propaga per l'espai i el temps, amb transport d'energia i quantitat de moviment però sense transport net de matèria.

Fins ara hem estat descrivint amb força detall el comportament de les ones des d'un punt de vista purament cinemàtic, és a dir, sense considerar qüestions de forces i energia. Fem un pas endavant i plantegem ara els aspectes energètics: veurem com podem descriure la quantitat d'energia que duu una ona, i també com perden energia les ones i en quines circumstàncies.

7.1. Energia d'una ona

Considerem, per simplicitat, una ona mecànica harmònica que es desplaça en un medi de densitat ρ. Com que l'ona és harmònica es pot descriure per una funció sinusoïdal, tal com hem vist en el subapartat 3.1.:

El símbol ρ correspon a la lletra grega rho minúscula.

$$f(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi) \tag{142}$$

També havíem vist que en una ona harmònica qualsevol punt de l'ona es mou amb un moviment vibratori harmònic simple. Ara bé, l'energia total en un moviment vibratori harmònic simple és igual a l'energia cinètica màxima:

Energia d'un cos que oscil·la

Quan un cos oscil·la amb un moviment vibratori harmònic simple les energies cinètica i potencial varien amb el temps, però si el sistema no perd energia (per exemple, per fregament) l'energia total és constant. En el punt central de vibració, l'energia potencial és nul·la i, per tant, tota l'energia és cinètica. L'energia cinètica és, en general, $(1/2)mv^2$.

$$E = E_{c_{\text{màx}}} = \frac{1}{2}mv^2_{\text{màx}} \tag{143}$$

Ara, doncs, ens cal trobar la velocitat* dels punts d'una ona harmònica i veure quan es fa màxima. Recordeu que la velocitat és la derivada de la posició respecte al temps. La posició és determinada per l'equació 41, que recordeu que és**:

*** Atenció, no confongueu aquesta velocitat, que és la velocitat amb què vibren els punts de l'ona, amb la velocitat de grup ni la velocitat de fase!**

$$f(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi) \tag{144}$$

**** Atenció, no confongueu aquesta $f(x,t)$ amb la freqüència f. Fixeu-vos que quan parlem de l'ona posem l'argument: (x,t), és a dir, la dependència de la funció.**

La seva derivada és:

$$v(x,t) = f'(x,t) = -\omega A\cos(kx - \omega t + \phi) \tag{145}$$

Com que és una funció cosinus, el seu valor serà màxim quan l'argument del cosinus sigui 0 o $\pm\pi$ i el cosinus, per tant, sigui igual a ± 1. Llavors la velocitat màxima, $v_{\text{màx}}$ és:

$$v_{\text{màx}} = \pm\omega A \tag{146}$$

Substituïm aquest resultat en l'equació 143 i tenim:

$$E = E_{c_{\text{màx}}} = \frac{1}{2}m(\omega A)^2 \tag{147}$$

Només ens queda ara trobar una expressió per a la massa m d'un petit volum de material. Com que la densitat, ρ, és igual a la massa, m, per unitat de volum, V, $\rho = m/V$, tenim finalment:

$$E = E_{c_{\text{màx}}} = \frac{1}{2}V\rho(\omega A)^2 \tag{148}$$

D'aquesta expressió es pot deduir que l'energia de l'ona depèn del volum de material que està vibrant, cosa que a efectes pràctics no és gaire satisfactòria, ja que és molt difícil saber quin volum vibra en cada moment. Per això és millor treballar amb la **densitat d'energia**, e, igual a l'energia per unitat de volum, $\frac{E}{V}$.

La densitat d'energia serà, doncs:

$$e = \frac{E}{V} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \tag{149}$$

El resultat important aquí és que l'energia mitjana d'una ona harmònica sempre és proporcional al quadrat de la seva freqüència i al quadrat de la seva amplitud. Fixeu-vos que això vol dir que una ona de freqüència més alta transporta més energia que una altra de freqüència més baixa de la mateixa amplitud; en concret, si una ona té una freqüència el doble d'una altra, transporta quatre vegades més energia. Potser no us convencerà gaire el fet que això ho hem fet concretament per a una ona mecànica (i per això apareix la densitat ρ), però el cert és que el resultat és general.

La **densitat d'energia** d'una ona harmònica és proporcional al quadrat de la seva amplitud i al quadrat de la seva freqüència.

7.2. Intensitat d'una ona

Una magnitud més habitual que no pas la densitat d'energia per a caracteritzar l'energia transportada per l'ona és l'energia que arriba, per unitat d'àrea i de temps (és a dir, la potència per unitat d'àrea, ja que l'energia dividida pel temps és la potència!), a una superfície imaginària perpendicular a la direcció de propagació, com la que podeu veure en la figura 24. Aquesta magnitud és la intensitat, normalment simbolitzada per I.

La **intensitat** d'una ona és la potència que arriba, per unitat d'àrea, a una superfície perpendicular a la direcció de propagació de l'ona.

Potència

La potència P es defineix com l'energia o treball (W) per unitat de temps (t): $P = \frac{W}{t}$. Es mesura en watts (W). 1 W equival a un joule per segon (J/s).

Trobem, doncs, una expressió per a la intensitat, com l'equació 149 que hem trobat per a la densitat d'energia. Per la definició d'intensitat que acabem de donar, tornem a l'expressió de l'energia 148 (no a la de la densitat d'energia) i la dividim per l'àrea i pel temps, perquè recordeu que per a obtenir la intensitat volem, precisament, l'energia per unitat d'àrea i de temps:

$$I = \frac{\frac{1}{2}V\rho(\omega A)^2}{S_\perp \cdot \Delta t} \tag{150}$$

on $S_\perp$ és l'àrea perpendicular a la direcció de propagació. De la figura 24 podem veure que precisament el volum total V es pot expressar com:

$$V = S_\perp \cdot v\Delta t \tag{151}$$

de manera que podem escriure:

$$I = \frac{\frac{1}{2}S_\perp \cdot v\Delta t\rho(\omega A)^2}{S_\perp \cdot \Delta t} \tag{152}$$

Figura 24. Esquema per al càlcul de la intensitat

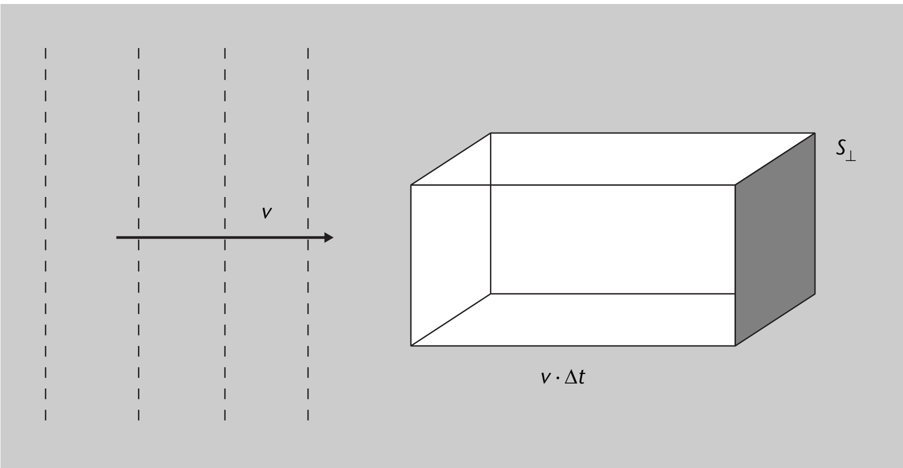


Figura 24

Una ona es propaga a velocitat v i té una energia $E = (1/2)V\rho\omega^2A^2$. La intensitat que té l'ona és l'energia per unitat de temps i unitat d'àrea perpendicular a la direcció de propagació. Simbolitzem com $S_\perp$ aquesta unitat d'àrea. El volum unitari corresponent a aquesta unitat d'àrea és $V = S_\perp \cdot v\Delta t$, ja que en la unitat de temps Δt l'ona recorre un espai $v\Delta t$.

Així, simplificant, l'expressió per a la intensitat ens queda:

$$I = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 A^2 \tag{153}$$

Aquesta magnitud és molt més fàcil de detectar i de mesurar que no pas la densitat d'energia i per això és tan útil. Fixeu-vos, però, que la dependència amb la freqüència i l'amplitud segueix sent la mateixa: proporcional al quadrat de totes dues.

7.3. Atenuació geomètrica de l'energia d'una ona

Si el medi pel qual es propaga una ona no absorbeix energia, la intensitat d'una ona plana és la mateixa a tot arreu. En canvi, amb ones circulars o esfèriques, la cosa no és així, és a dir, encara que el medi no absorbeixi energia, la intensitat de l'ona va disminuint. Per què?

Suposem una font que emet ones en totes direccions, com podeu observar en la figura 25. La potència que travessa tota una esfera de radi r_1 ha de ser la mateixa que travessa una esfera més gran de radi r_2, ja que no es perd energia entre una esfera i l'altra (això és així perquè suposem que l'espai entre les dues ones no absorbeix energia!). Per tant, utilitzant que la potència és la intensitat per l'àrea i que l'àrea d'una esfera és $4\pi r^2$:

$$I(r_1)4\pi r_1^2 = I(r_2)4\pi r_2^2 \tag{154}$$

on $I(r_1)$ és la intensitat de l'ona a la distància r_1 i $I(r_2)$ la intensitat a la distància r_2. Així, la intensitat a una distància r_2 serà:

$$I(r_2) = I(r_1)\frac{r_1^2}{r_2^2} \tag{155}$$

Què vol dir això? Considerem el radi r_1 com el punt de partida, el nostre origen; ara fixeu-vos que si anem augmentant la distància r_2 el que passa és que la intensitat a aquesta distància r_2 és cada vegada més petita, ja que depèn de $1/r_2^2$. En general, doncs, la intensitat d'una ona esfèrica va disminuint de manera inversament proporcional al quadrat de la distància a la font, és a dir disminueix com $1/r^2$. Expressat més concisament:

$$I(r) \propto \frac{1}{r^2} \tag{156}$$

Recordeu

El símbol $\propto$ es llegeix "proporcional a". S'assembla a la lletra grega alfa minúscula (α), però no són el mateix.

Aquesta disminució de la intensitat d'una ona esfèrica rep el nom d'**atenuació geomètrica**.

Figura 25. Ona esfèrica

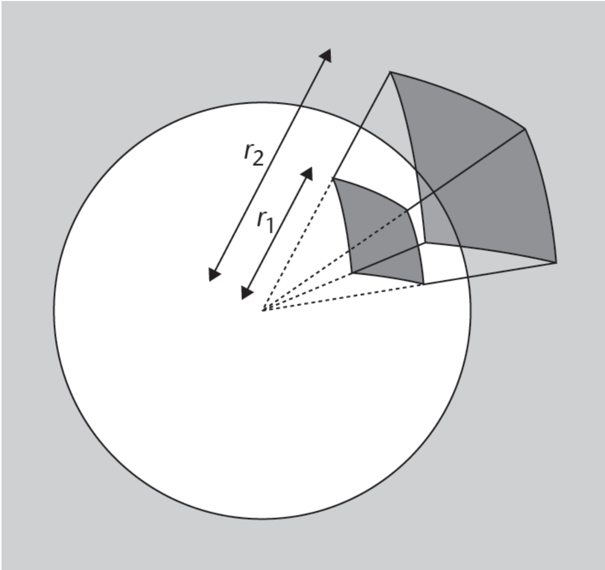


Figura 25

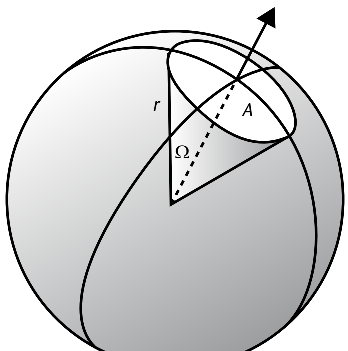
Una font emissora d'ones n'està emetent en totes les direccions de l'espai. La potència que travessa una esfera de radi r_1 ha de ser la mateixa que travessa una esfera més gran de radi r_2, ja que no es perd energia entre una esfera i l'altra. Això ens duu a que la intensitat de l'ona disminueix com $1/r^2$, com expliquem al text.

Activitat

Demostreu que en el cas d'ones circulars en dues dimensions s'arriba a un resultat similar, en què la intensitat disminueix com $1/r$, no pas com $1/r^2$. El procés per a fer la demostració és equivalent al que acabem de fer per a ones esfèriques, però tingueu present que ara, en lloc d'esferes, utilitzarem cercles.

7.3.1. Intensitat radiant

En aquells casos en què no tenim ones planes, sembla que el concepte d'intensitat no ens permet caracteritzar gaire bé l'ona, precisament perquè la intensitat varia a mesura que ens allunyem o ens apropem de la font emissora d'ones, com acabem de veure. Per a solucionar aquest fet, en lloc d'utilitzar la intensitat, que tal com hem definit abans, en començar el subapartat 7.2., és la potència per unitat d'àrea, s'utilitza la potència per unitat d'angle sòlid.



Recordeu que l'angle sòlid és l'equivalent de l'angle pla bidimensional en tres dimensions. És el con que abasta un objecte vist des d'un punt, és a dir, quant gran apareix per a un observador que el veu des d'aquell punt. Es mesura en estereoradians (sr) i una esfera completa té (subtendeix) 4π sr.

Aquesta magnitud, especialment en l'àmbit de la radiometria i la fotometria, rep el nom d'**intensitat radiant** (en radiometria) i **intensitat lluminosa** (en fotometria). És especialment útil en el cas d'ones esfèriques perquè té sempre el mateix valor independentment de la distància a què ens trobem. Això és així precisament perquè la potència ara és per unitat d'angle sòlid, que és una magnitud que no depèn de la distància.

A la intensitat radiant o intensitat lluminosa, sovint també se li diu simplement *intensitat*, però si li diem *intensitat* caldrà tenir ben present que és lleugerament diferent de la intensitat que hem definit abans en començar el subapartat 7.2.: aquesta és la potència per unitat d'angle sòlid, mentre que la intensitat que hem definit abans és la potència per unitat d'àrea.

Irradiància i il·luminació

Cal anar amb molt de compte a no embolicar-se amb les magnituds referents a l'energia i la intensitat, ja que hi ha una confusió considerable amb els seus noms segons el camp en què es treballi. Així, el que genèricament s'anomena *intensitat*, tal com l'hem definit aquí com a potència per unitat d'àrea, en radiometria i fotometria s'anomena **irradiància** i **il·luminació**, respectivament.

En resum, doncs, malgrat que en un medi una ona no perdi energia, en el cas d'ones esfèriques o circulars la seva intensitat va disminuint a mesura que s'allunya de la font emissora, per raons purament geomètriques, ja que l'ona ha d'abastar cada vegada una superfície més gran. En el subapartat següent veurem precisament què els passa a les ones si, a més a més, el medi per on es propaguen absorbeix part de l'energia que tenen.

7.4. Ones en medis materials

Ja vam explicar en el subapartat 1.2. que les ones mecàniques necessiten un medi per a propagar-se i les ones electromagnètiques, tot i que no en necessiten cap, sovint també ho fan. Ara bé, fins ara hem considerat que, en qualsevol cas, les ones no perdien mai energia en viatjar pel medi, que les ones es podien propagar indefinidament sense esmorteïr-se. Això, en general no és cert, ras i curt.

Les ones, en propagar-se per un medi, perden energia i aquesta energia és absorbida pel medi i es transforma en altres menes d'energia, sovint en calor. Tenim molts exemples d'aquest fenomen; penseu en els forns microones, per exemple, on utilitzem ones electromagnètiques per a escalfar menjar. Com s'aconsegueix, això? En un forn microones es generen ones electromagnètiques que travessen el menjar; en travessar-lo, les ones perden part de la seva energia, energia que absorbeix el medi (en aquest cas, el menjar) i es transforma en calor, amb el resultat que el menjar, després d'una estona està més calent.

Escalfament adiabàtic

El procediment pel qual el menjar s'escalfa en fer passar microones s'anomena *escalfament adiabàtic* i només es produeix si en el material hi ha molècules polars, com ara l'aigua.

Pèrdua d'energia de l'ona

Atenció, no heu de confondre la disminució de l'energia de les ones en propagar-se per un medi amb la disminució de la intensitat en ones esfèriques i circulars que hem comentat en el subapartat 7.3. Són coses diferents: aquella disminució d'intensitat és un fenomen purament geomètric i si considerem tota l'ona a una certa distància de la font, segueix tenint la mateixa energia total que quan es va emetre. Ara estem considerant una disminució de l'energia total de l'ona, independentment de si, a més a més, la intensitat disminueix per qüestions geomètriques.

Ara ens hem de preguntar si podem descriure aquesta pèrdua d'energia, aquesta atenuació, i trobar alguna expressió que ens digui com disminueix l'energia d'una ona en funció de l'espai que recorre pel medi.

En molts casos resulta que l'energia que absorbeix un medi per unitat d'àrea, per unitat de temps i per unitat de longitud, és a dir, la intensitat perduda per unitat de longitud recorreguda, és aproximadament proporcional a la intensitat de l'ona en aquell punt (vaja, la idea és que "més energia tens, més energia perds"). Aquí cal recordar que les variacions de les magnituds sempre les podem expressar rigorosament amb derivades. En aquest cas, doncs:

$$-\frac{dI}{dx} = \alpha I \qquad (157)$$

on α és el **coeficient d'atenuació** del medi, un factor de proporcionalitat que tindrà un valor determinat en cada cas particular. Fixeu-vos que hem posat un signe negatiu perquè l'ona *perd* energia. La integració d'aquesta equació diferencial ens dóna una solució de tipus exponencial:

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x} \tag{158}$$

on I_0 és la intensitat en la font emissora, per a $x = 0$. La gràfica d'aquesta funció la podeu veure en la figura 26. Hi hem representat dues, una amb α petit i una altra amb α gran.

Figura 26. Atenuació exponencial

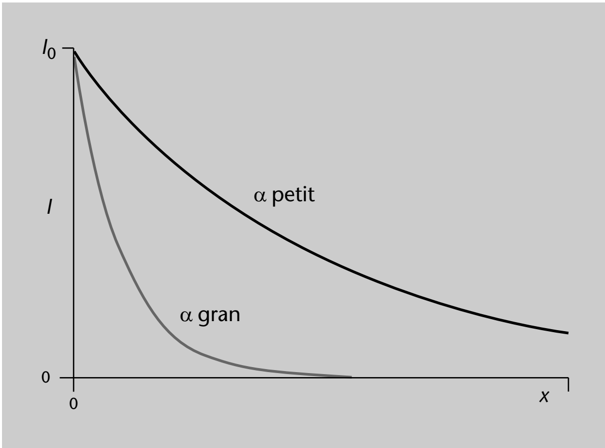


Figura 26

La intensitat d'una ona disminueix exponencialment a mesura que recorre més longitud de medi.

Aquest resultat d'una atenuació exponencial d'una ona en travessar un medi material només és aproximat, però és prou vàlid en molts casos, com ara les ones electromagnètiques en medis que són conductors elèctrics o les ones en una corda, en què sempre hi ha present el fregament.

Exemple d'atenuació exponencial de la intensitat

Una font aproximadament puntual emet un so amb una potència de 10^{-3} W. La freqüència d'aquest so és tal que per a les condicions ambientals particulars del problema, el valor de α és 0,005 m^{-1}. Quina és la intensitat del so a 1 metre, a 10 metres i a 1 quilòmetre?

Solució

Per a resoldre el problema cal recordar que tenim dos tipus d'atenuació de l'ona a mesura que ens allunyem de la font emissora:

- una atenuació purament geomètrica, que té lloc independentment de les característiques del medi, que ja hem explicat en el subapartat 7.3.;
- una atenuació física provocada per l'absorció d'energia en el medi.

Sabem que la font emet ones d'una potència 10^{-3} W. Si no hi hagués gens d'absorció, a 1 metre de distància, aquesta potència estaria repartida per una superfície igual a $4\pi r^2$, amb $r = 1$. Per tant, si no hi hagués absorció, la intensitat, que és la potència per unitat d'àrea, seria:

$$I(1)_{\text{at. geom.}} = \frac{P}{A} = \frac{10^{-3}}{4\pi 1^2} = 8 \cdot 10^{-5}\ \text{W/m}^2 \tag{159}$$

Ara bé, en realitat la intensitat és més baixa, ja que hi ha hagut una atenuació física provocada per l'absorció d'energia. Calculem aquesta atenuació segons l'equació 158 i sabent que ens diuen que $\alpha = 0{,}005\ \text{m}^{-1}$:

$$I(1)_{\text{at. fis.}} = I_0 e^{-0{,}005\cdot 1} = 0{,}995 I_0 \tag{160}$$

És a dir, trobem que l'atenuació fa que, a 1 metre de distància de la font, la intensitat sigui 0,995 vegades (és a dir, un 99,5%) la intensitat que hi hauria sense atenuació. Així, la intensitat final a 1 metre de distància serà:

$$I(1) = I(1)_{\text{at. geom.}} \cdot 0{,}995 = 7{,}92 \cdot 10^{-5}\ \text{W/m}^2 \tag{161}$$

Us convidem a fer vosaltres els casos per a 10 metres i 1 quilòmetre. Quins fets destacables podeu observar a mesura que ens allunyem de la font? Especialment, observeu com a 1 quilòmetre de distància l'atenuació física (que a 1 metre només ens reduïa la intensitat en un 0,5%) té un efecte molt important, reduint la intensitat en un 99,3%!

En definitiva, hem vist com una ona pot perdre energia a causa de l'absorció de part d'aquesta energia pel medi per on s'està propagant. En el cas més simple, aquesta atenuació es pot expressar com una llei exponencial en funció de la distància recorreguda en el medi.

Per acabar, i a mode de referència, en la taula 2 resumim les magnituds principals en la descripció de l'energia d'una ona, juntament amb els seus símbols i unitats de mesura en el Sistema Internacional.

Taula 2

Magnitud	Símbol	Unitat (SI)	Nom de la unitat
Energia	E	J	Joule
Potència	P	W	Watt
Densitat d'energia	e	J/m^3	Joule per metre cúbic
Intensitat	I	W/m^2	Watt per metre quadrat
Angle sòlid	Ω	sr	Estereoradian
Intensitat radiant	I	W/sr	Watt per estereoradian
Coeficient d'atenuació	α	m^{-1}	Metre elevat a menys u
Amplitud	A	segons el tipus d'ona	–

7.5. Què hem après?

En aquest apartat hem vist què els passa a les ones des del punt de vista energètic. Hem pogut determinar que l'energia que transporta una ona és proporcional al quadrat de la seva freqüència i al quadrat de la seva amplitud. Tanmateix, l'energia no és una magnitud útil a efectes pràctics i per això hem definit la intensitat, més fàcil de mesurar i de treballar-hi, i que té la mateixa dependència amb l'amplitud i la freqüència que l'energia.

També hem vist que, malgrat que en un medi una ona no perdi energia, en el cas d'ones esfèriques o circulars la seva intensitat va disminuint a mesura que s'allunyen de la font emissora, per raons purament geomètriques, ja que l'ona ha d'abastar cada vegada una superfície més gran. Si el medi per on es propaga l'ona absorbeix part de la seva energia, a aquesta atenuació geomètrica cal afegir l'atenuació física, provocada per la transmissió de part de l'energia de l'ona al medi. En concret, hem vist que en molts casos aquesta atenuació física es pot descriure aproximadament amb una llei exponencial.

8. Problemes resolts

8.1. Enunciats

1. Una ona harmònica es propaga en un medi amb una freqüència de 30 Hz i una longitud d'ona de 60 cm. La seva amplitud és de 2 mm. Com la podeu descriure matemàticament? És a dir, quina és l'equació d'aquesta ona? Expresseu-la en unitats del Sistema Internacional.

2. Una ona sonora en l'aire produeix una variació de pressió que es pot expressar com

$$p(x,t) = 0{,}75 \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-340t)\right) \tag{162}$$

on totes les magnituds estan expressades en unitats del Sistema Internacional. Calculeu:

a) l'amplitud de l'ona,
b) la longitud d'ona,
c) la freqüència de l'ona,
d) la velocitat de propagació de l'ona.

3. Una ona estacionària en una corda fixa pels seus dos extrems es pot expressar com a

$$y(x,t) = 0{,}024 \sin(52{,}3x) \cos(480t) \tag{163}$$

on totes les magnituds s'expressen en unitats del Sistema Internacional. Determineu la velocitat de les ones que es propaguen en aquesta corda i quina és la distància entre els nodes de l'ona estacionària.

4. Suposeu que a 10 m d'un avió a reacció la intensitat de les ones sonores que emet és de 10^3 W/m^2. A quina distància la intensitat del so seria igual a 10^{-3} W/m^2? (Suposeu que les ones són esfèriques i que no hi ha absorció d'energia per part de l'aire.)

5. Per una corda accionada per mitjà d'un vibrador de 120 Hz es propaguen ones transversals de longitud d'ona 31 cm.

a) Quina és la velocitat de propagació de les ones per la corda?
b) Si la tensió de la corda és d'1,20 N, quina és la massa d'un fragment de 50 cm de la corda?

6. Una ona de freqüència 120 Hz es propaga per una corda amb una amplitud de 0,16 mm. Quina quantitat d'energia conté la corda, la massa de la qual és de 80 grams?

7. Un aligot vola allunyant-se directament d'un observador d'ocells i en direcció a un penya-segat, a una velocitat de 15 m/s. L'aligot emet un xiscle amb una freqüència de 800 Hz.

a) Quina freqüència del xiscle sent l'observador?
b) Quina freqüència sent l'observador, del xiscle que ha rebotat primer al penya-segat?

8. Un noi que passeja s'apropa cap a nosaltres i s'està allunyant d'una paret a 1 m/s mentre xiula tranquil·lament. Curiosament notem uns batements a 4 polsos per segon.

a) Com és que sentim aquests batements?
b) Quina és la freqüència del xiulet del noi?

9. Determineu la velocitat d'un tren el xiulet del qual, quan passa pel costat d'un receptor aturat a la vora de la via, disminueix la freqüència en un 10%.

8.2. Solucions

1. Ens diuen que l'ona té els valors següents:

- freqüència: $f = 30$ Hz,
- longitud d'ona: $\lambda = 0{,}6$ m,
- amplitud: $A = 0{,}002$ m,
- fase inicial: $\phi = 0$. Com que no ens l'especifiquen, podem escollir el valor 0.

Per a poder escriure l'equació d'una ona harmònica (equació 41):

$$f(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi) \tag{164}$$

ens cal també k i ω. Per a trobar k utilitzem la relació (equació 43):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}6} = 10{,}47 \text{ m}^{-1} \tag{165}$$

I per a trobar ω utilitzem la relació

$$\omega = 2\pi f = 188{,}49 \text{ rad/s} \tag{166}$$

Per tant, l'equació d'aquesta ona harmònica serà:

$$f(x,t) = 0{,}002\sin(10{,}47x - 188{,}49t) \tag{167}$$

2.

a) Si recordeu com podem expressar una ona harmònica (equació 41):

$$f(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi) \tag{168}$$

i ho comparem amb l'expressió que ens han donat, veiem que:

- l'amplitud és: $A = 0{,}75$ m,
- el nombre d'ona és: $k = \pi/2$ m^{-1},
- la freqüència angular és: $\omega = 340\pi/2$ rad/s,
- la fase inicial és: $\phi = 0$.

Per tant, l'amplitud és igual a 0,75 m.

b) La longitud d'ona, λ, la podem calcular a partir de la relació (equació 43):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{169}$$

Com que k ja l'hem trobat en l'apartat 1, podem determinar λ:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4 \text{ m} \tag{170}$$

Així, la longitud d'ona és igual a 4 metres.

c) La freqüència la podem calcular a partir de la freqüència angular, que ja sabem (equació 45):

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{340\pi/2}{2\pi} = 85\,\text{Hz} \tag{171}$$

d) Finalment, la velocitat de propagació la podem trobar a partir de l'expressió (equació 49):

$$v = \lambda f \tag{172}$$

Com que ja sabem λ i f, substituïm els seus valors i tenim:

$$v = 4 \cdot 85 = 340\,\text{m/s} \tag{173}$$

3. En el subapartat 5.2. ja heu vist que l'equació d'una ona estacionària és (equació 97):

$$y_s = 2A\sin(kx + \phi/2)\cos(\omega t + \phi/2) \qquad (174)$$

Comparant amb l'equació que ens han donat tenim:

- $2A = 0{,}024$ m,
- $k = 52{,}3$ m^{-1},
- $\omega = 480$ s^{-1},
- $\phi = 0$.

La velocitat la podem trobar a partir de la relació (equació 50):

$$v = \frac{\omega}{k} = 9{,}18\,\text{m/s} \qquad (175)$$

Per a determinar on es troben els nodes d'aquesta ona, primer podem trobar la longitud d'ona, utilitzant l'expressió (equació 43):

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0{,}12\,\text{m} \qquad (176)$$

I com que cada node està separat per una longitud igual a la meitat de la longitud d'ona, la distància entre nodes serà, doncs, 0,06 m.

4. Una manera de plantejar el problema és calcular quina és la potència total de les ones sonores emeses per l'avió, aprofitant el fet que sabem quina és la intensitat a 10 metres. Com que sabem que no hi ha absorció, la potència ha de ser la mateixa a qualsevol altra distància, només que repartida per una superfície més o menys gran.

Així doncs, a 10 metres tenim una intensitat (diguem-li I_{10}) de 10^3 W/m^2. Multiplicant la intensitat per l'àrea tindrem la potència. I com que les ones són esfèriques, l'àrea és la superfície d'una esfera, $4\pi r^2$:

$$P = I_{10} \cdot 4\pi r^2 = 10^3 \cdot 4\pi 10^2 = 1{,}26 \cdot 10^6\,\text{W} \qquad (177)$$

Aquests $1{,}26 \cdot 10^6$ watts són els mateixos que hi haurà a qualsevol altra distància, en concret, a la distància que correspongui a una intensitat de 10^{-3} W/m^2:

$$1{,}26 \cdot 10^6 = 10^{-3} \cdot 4\pi r^2 \qquad (178)$$

D'aquí aïllem r:

$$r = \sqrt{\frac{1{,}26 \cdot 10^6}{4\pi 10^{-3}}} \approx 10.000\,\text{m} \tag{179}$$

És a dir, a una distància d'uns 10 km.

5.

a) Fixeu-vos que l'enunciat del problema ja ens està dient quina és la freqüència de les ones, f = 120 Hz, i també la seva longitud d'ona, λ = 31 cm = 0,31 m. Així, només cal utilitzar la relació (equació 49):

$$v = \lambda f = 0{,}31 \cdot 120 = 37{,}2\,\text{m/s} \tag{180}$$

b) Recordeu que, en derivar l'equació d'ones, havíem trobat que en les ones es té una relació general entre la velocitat de propagació i les propietats del medi (equació 38). En el cas d'una corda tensa aquesta relació és, més específicament (equació 39):

$$v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}} \tag{181}$$

Com que en l'apartat *a* ja hem calculat la velocitat de propagació, v, i ens diuen que la tensió T és igual a 1,20 N, de l'equació anterior podem trobar la densitat lineal de massa, λ, aïllant-la:

$$\lambda = \frac{T}{v^2} = \frac{1{,}20}{(37{,}2)^2} = 8{,}67 \cdot 10^{-4}\,\text{kg/m} \tag{182}$$

Ara, amb la densitat lineal de massa, és a dir, amb la massa per unitat de longitud de la corda, podem trobar directament la massa, m, d'una longitud l, de 50 cm = 0,5 m de corda:

$$\lambda = \frac{m}{l} \Rightarrow m = \lambda \cdot l = 8{,}67 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}5 = 4{,}33 \cdot 10^{-4}\,\text{kg} \tag{183}$$

És a dir, 50 cm de corda tenen una massa de 0,43 grams.

6. Recordeu que l'energia transportada per una ona és proporcional al quadrat de l'amplitud i de la freqüència, segons l'expressió (equació 147):

$$E = \frac{1}{2} m(\omega A)^2 \tag{184}$$

En el cas que ens ocupa tenim:

- la massa: $m = 0{,}08$ kg,
- l'amplitud: $A = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ m,
- la freqüència: $f = 120$ Hz, d'on podem obtenir la freqüència angular, $\omega = 2\pi f = 754{,}98$ rad/s.

Amb tot això, ja podem determinar E:

$$E = \frac{1}{2} 0{,}08(754{,}98 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-4})^2 = 5{,}8 \cdot 10^{-4}\,\text{J} = 0{,}58\ \text{mJ} \tag{185}$$

7.

a) Per a obtenir la freqüència detectada per l'observador primer hem de considerar en quina situació ens trobem. En aquest cas es tracta d'un observador en repòs i un emissor en moviment que s'allunya de l'observador. Utilitzem llavors l'equació general de l'efecte Doppler (equació 118):

$$f_o = f \frac{v + v_o}{v + v_e} \tag{186}$$

amb:

- $f = 800$ Hz,
- $v = 340$ m/s (considerem la velocitat del so),
- $v_o = 0$ m/s,
- $v_e = 15$ m/s, fixeu-vos que és positiva perquè, en el cas considerat, emissor i ona emesa van en sentits contraris.

Amb tot això, l'equació anterior és:

$$f_o = 800 \frac{340 + 0}{340 + 15} = 766{,}20\,\text{Hz} \tag{187}$$

és a dir, una freqüència lleugerament més baixa.

b) Ara la situació és molt semblant però amb una diferència significativa: l'emissor i l'ona emesa van en el mateix sentit. Després aquesta ona emesa rebota en el penya-segat i torna enrere fins a l'observador, però com que el penya-segat està en repòs, no afecta en res la freqüència de l'ona. Fixeu-vos que això és diferent del cas del radar de la policia, que hem estudiat en l'apartat 6; en aquell cas l'ona rebotava en el cotxe, però el cotxe estava en moviment i, per tant, sí modificava la freqüència de l'ona.

Així doncs, tenim:

- $f = 800$ Hz,
- $v = 340$ m/s (considerem la velocitat del so),

- $v_o = 0$ m/s,
- $v_e = -15$ m/s, fixeu-vos que és negativa perquè, en el cas considerat, emissor i ona emesa van en el mateix sentit.

Amb tot això, l'equació anterior és:

$$f_o = 800\frac{340+0}{340-15} = 836{,}92\,\text{Hz} \tag{188}$$

és a dir, una freqüència lleugerament més alta.

8.

a) L'única possibilitat perquè sentim batements és la superposició de dues ones de freqüències lleugerament diferents. En aquest cas, com que el noi s'apropa cap a nosaltres, rebem directament d'ell una freqüència lleugerament més alta. Però, alhora, el noi s'allunya de la paret i la paret rep una freqüència lleugerament més baixa, que rebota i finalment també ens arriba a nosaltres. Aquestes dues ones, amb freqüències lleugerament diferents, la que ens ve directament del noi i la que ens arriba després de rebotar a la paret, són les que, superposades, produeixen els batements.

b) Per a trobar la freqüència original del xiulet partim de la informació que ens donen: la freqüència de batement és igual a 4 s^{-1}. Segons l'equació 92 sabem que la freqüència de batement és igual a la diferència entre les freqüències angulars de les ones superposades:

$$\omega_{\text{batement}} = \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \tag{189}$$

o bé, en termes de freqüència:

$$\omega_{\text{batement}} = \omega_1 - \omega_2 = 2\pi(f_1 - f_2) \tag{190}$$

Ara ens cal trobar les dues freqüències en funció de la freqüència original. Apliquem la fórmula de l'efecte Doppler (equació 118):

$$f_o = f\frac{v+v_o}{v+v_e} \tag{191}$$

En el nostre cas tenim una velocitat de l'observador, v_o igual a zero, mentre que la velocitat de l'emissor, v_e, és positiva en un cas i negativa en l'altre, seguint el conveni que hem establert de fer-la positiva quan té sentit contrari al de l'emissió de l'ona considerada i negativa quan té el mateix sentit que l'ona considerada. Així, les dues freqüències f_1 i f_2 seran:

$$f_1 = f\frac{v}{v+v_n} \tag{192}$$

$$f_2 = f\frac{v}{v-v_n} \tag{193}$$

D'aquí:

$$\omega_{\text{batement}} = 2\pi\left(f\frac{v}{v+v_n} - f\frac{v}{v-v_n}\right) \tag{194}$$

Fem la suma dins del parèntesi i ens queda:

$$\omega_{\text{batement}} = 2\pi\left(f\frac{v(v-v_n) - v(v+v_n)}{(v+v_n)(v-v_n)}\right) \tag{195}$$

Recordeu que:
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

$$\omega_{\text{batement}} = 2\pi f v\left(\frac{2v_n}{v^2 - v_n^2}\right) \tag{196}$$

Recordeu que el que volem trobar és f, de manera que l'aïllem de l'expressió anterior i tenim:

$$f = \frac{\omega_{\text{batement}}}{2\pi}\frac{v^2 - v_n^2}{2v_n v} \tag{197}$$

Tots els valors de l'equació anterior ja els coneixem:

- $f_{\text{batement}} = \omega_{\text{batement}}/2\pi = 4\ \text{s}^{-1}$,
- $v_n = 1$ m/s,
- $v = 340$ m/s.

Així, tenim:

$$f = 4 \cdot \frac{340^2 - 1^2}{2 \cdot 1 \cdot 340} = 680\,\text{Hz} \tag{198}$$

9. En primer lloc, cal tenir clar què vol dir que la freqüència ha disminuït en un 10%. Si la freqüència ha disminuït en un 10% és que la diferència entre la freqüència emesa original, f, i la freqüència observada, f_o, és un 10% de la freqüència original:

$$f - f_o = 0{,}1f \tag{199}$$

D'altra banda sabem que, per l'efecte Doppler, la freqüència observada i l'emesa estan relacionades per (equació 118):

$$f_o = f\frac{v + v_o}{v + v_e} \tag{200}$$

on v_o és la velocitat de l'observador i v_e, la de l'emissor. Com que en el nostre cas l'observador està en repòs, $v_0 = 0$:

$$f_o = f\frac{v}{v + v_e} \tag{201}$$

Si aïllem v_e d'aquesta expressió, trobem:

$$f_o(v + v_e) = fv \tag{202}$$

$$f_o v + f_o v_e = fv \tag{203}$$

$$f_o v_e = v(f - f_o) \tag{204}$$

$$v_e = v\frac{f - f_o}{f_o} \tag{205}$$

I si substituïm el resultat de 199 tenim:

$$v_e = v \cdot 0{,}1 \cdot \frac{f}{f_o} \tag{206}$$

De fet, encara podem simplificar més. Si a 199 posem f en funció de f_o, tenim:

$$0{,}9f = f_o \tag{207}$$

I d'aquí:

$$v_e = v \cdot 0{,}1 \cdot \frac{f}{0{,}9f} = 0{,}11v \tag{208}$$

Atès que el so es propaga a 340 m/s, tenim

$$v_e = 0{,}11 \cdot 340 = 37{,}8 \text{ m/s} \tag{209}$$

Apèndix. El teorema de Fourier

En la seva forma més simple (l'única que ens interessa ara), el teorema de Fourier estableix que qualsevol funció periòdica $f(x)$ es pot expressar com una suma infinita (una sèrie) de termes de la manera següent:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \tag{210}$$

on a_0 i a_n i b_n són els anomenats coeficients de Fourier que es poden calcular mitjançant les expressions següents:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \quad n \geq 0 \tag{211}$$

i

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \quad n \geq 1 \tag{212}$$

Resum

En aquest mòdul hem donat una visió general del moviment ondulatori. L'objectiu era poder distingir i analitzar les característiques fonamentals de les ones, de manera qualitativa però també quantitativa. En aquest sentit, aquest objectiu es resumeix en tenir ben clara la definició d'ona, "una pertorbació que es propaga per l'espai i el temps, amb transport d'energia i quantitat de moviment però sense transport net de matèria" i el seu significat i saber que això es pot descriure de manera precisa amb l'equació d'ones.

Una vegada establerta l'equació d'ones, no ens hi hem entretingut gaire, perquè una anàlisi detallada és relativament complexa i ja la fareu quan estudieu, concretament, les ones electromagnètiques. Per això hem passat a un cas particular que es pot analitzar de manera molt simple: les ones harmòniques, les que es poden descriure amb una funció sinus o cosinus. Com que el teorema de Fourier ens assegura que qualsevol ona es pot escriure com la suma d'ones harmòniques, l'estudi d'aquesta mena d'ones resulta molt més interessant del que podia semblar inicialment.

Posteriorment hem afegit una mica més de complexitat al nostre estudi i, en lloc de considerar només una ona, n'hem considerat dues o més que es poden trobar en un punt de l'espai. És en aquest moment quan hem estudiat la superposició d'ones i hem vist que les ones se sumen de manera senzilla. Aquesta superposició dóna lloc a fenòmens interessants, com els batements, per exemple.

El següent pas ha estat imposar condicions de contorn a les ones, és a dir en lloc de suposar que es poden propagar indefinidament, ens hem preguntat què passa quan una ona es troba amb una frontera que delimita dos medis. El resultat més general és que una part de l'energia que duu l'ona passa a l'altra banda de la frontera i l'altra part "rebota" i torna al medi original. A banda d'això, en alguns casos concrets, que hem estudiat, es produeixen ones estacionàries.

A continuació hem introduït en la discussió el paper de l'observador o receptor de les ones i hem vist com l'estat de moviment que tingui respecte a la font emissora d'ones no és en absolut irrellevant, sinó que determina quina és la freqüència observada de l'ona.

Per a acabar, hem estudiat els aspectes energètics associats a les ones i hem vist que l'energia que duu una ona és proporcional al quadrat de la seva amplitud i al quadrat de la seva freqüència. En lloc de l'energia total o la densitat d'energia, que són magnituds difícils de mesurar, hem introduït la intensitat, molt més habitual i pràctica. També hem considerat breument com poden perdre energia les ones quan es propaguen per un medi que n'absorbeix.

Amb tot això hem intentat donar una sèrie de conceptes generals i fonamentals sobre les ones que, posteriorment, podreu aplicar amb més deteniment a qualsevol mena d'ones. En el mòdul "Acústica" ho fareu breument amb ones mecàniques sonores, però, sobretot, ho fareu amb molt més detall quan estudieu les ones electromagnètiques.

Exercicis d'autoavaluació

1. L'energia d'una ona...
 a) és proporcional a la seva amplitud.
 b) és inversament proporcional a la seva intensitat.
 c) és proporcional al quadrat de la seva amplitud.
 d) és proporcional al quadrat de la seva intensitat.

2. La longitud d'ona d'una ona sonora de freqüència 850 Hz, suposant que la velocitat de propagació en l'aire és 340 m/s, és...
 a) 0,85 m.
 b) 2,89 m.
 c) 4,00 m.
 d) 0,40 m.

3. Una ona té una longitud d'ona de 20,93 cm i es propaga per un medi a una velocitat de 91,46 m/s. La seva frequència és...
 a) 436,98 Hz.
 b) 4,36 Hz.
 c) 0,23 Hz.
 d) $2{,}29 \cdot 10^{-3}$ Hz.

4. Una ona esfèrica que es propaga en un medi no absorbent...
 a) té sempre la mateixa intensitat.
 b) té sempre la mateixa densitat d'energia.
 c) té sempre la mateixa energia.
 d) té sempre la mateixa intensitat radiant.

5. La polarització és un fenomen que es produeix...
 a) en tot tipus d'ones.
 b) només en ones transversals.
 c) només en ones mecàniques.
 d) només en ones planes.

6. Quan una font emissora d'ones es mou cap a nosaltres, la freqüència que nosaltres detectem de les ones és...
 a) més baixa que l'emesa per la font.
 b) més alta que l'emesa per la font.
 c) igual que l'emesa per la font.
 d) igual que l'emesa per la font, però amb menys longitud d'ona.

7. La velocitat de propagació de les ones emeses per una font en moviment és...
 a) igual a la suma de les velocitats de la font i de propagació.
 b) diferent que si no s'estigués movent, però la relació entre les dues és complicada.
 c) la mateixa que si no s'estigués movent.
 d) Totes les anteriors són falses.

8. Es produeixen batements quan...
 a) se superposen dues ones de longituds d'ona lleugerament diferents.
 b) se superposen dues ones de freqüències iguals.
 c) se superposen dues ones d'amplituds lleugerament diferents.
 d) se superposen dues ones lleugerament desfasades.

Solucionari

1. c; **2.** d; **3.** a; **4.** c; **5.** b; **6.** b; **7.** c; **8.** a

Glossari

amplitud *f* Separació màxima respecte a la posició d'equilibri que pren una magnitud vibratòria oscil·lant.

angle de fase *m* Vegeu **fase inicial**

efecte Doppler *m* Modificació que experimenta la freqüència d'una ona quan l'emissor i el receptor es troben en moviment relatiu.

fase *f* Estat d'una ona en un instant i posició determinats, expressat pel valor de la magnitud que la descriu.

fase inicial *f* Valor de la fase d'un fenomen periòdic en l'instant inicial i en la posició inicial.
sin. **angle de fase**

freqüència *f* Nombre de cicles o oscil·lacions que realitza una magnitud d'un fenomen periòdic per unitat de temps.

freqüència angular *f* Magnitud característica d'un fenomen periòdic que és igual a la freqüència multiplicada per 2π.

front d'ona *m* Conjunt de tots els punts adjacents d'una ona que es troben en el mateix estat d'oscil·lació.

longitud d'ona *f* Distància mínima entre dos punts d'una ona que es troben en el mateix estat d'oscil·lació.

nombre d'ona *m* Magnitud característica d'un fenomen periòdic igual a 2π dividit per la longitud d'ona.

nombre de Mach *m* Nombre adimensional que proporciona la relació entre la velocitat d'un objecte que es mou en un fluid i la velocitat del so en aquest fluid.

ona *f* Pertorbació que es propaga per l'espai i el temps, amb transport d'energia i quantitat de moviment però sense transport net de matèria.

ona harmònica *f* Ona que es pot expressar matemàticament mitjançant una funció sinusoïdal.

polarització *f* Condició d'una ona transversal per la qual la magnitud característica de l'ona manté una orientació determinada respecte a la direcció de propagació, sigui constant o amb una variació temporal ben definida.

Bibliografia

Feynman, R. P.; Leighton, R. B.; Sands, M. (1963). *The Feynman lectures on Physics* (capítols 47–51). Reading, Massachusetts: Addison Wesley.

French, A. P. (1974). *Vibraciones y ondas*. Barcelona: Editorial Reverté.

Isalgué Buxeda, A. (1995). *Física de la llum i el so*. Barcelona: Edicions UPC ("Politext", 41).

José Pont, J.; Moreno Lupiáñez, M. (1994). *Física i ciència-ficció* (capítol 7). Barcelona: Edicions UPC ("Politext", 33).

Tipler, P. A.; Mosca, G. (2005). *Física para la ciencia y la tecnología* (5a edició, volum 1B). Barcelona: Editorial Reverté.