

Òptica geomètrica

L'òptica sense ones

Marc Figueras Atienza

PID_00159123



Universitat Oberta
de Catalunya

Els textos i imatges publicats en aquesta obra estan subjectes –llevat que s'indiqui el contrari– a una llicència de Reconeixement-Compartir igual (BY-SA) v.3.0 Espanya de Creative Commons. Podeu modificar l'obra, reproduir-la, distribuir-la o comunicar-la públicament sempre que en citeu l'autor i la font (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), i sempre que l'obra derivada quedi subjecta a la mateixa llicència que el material original. La llicència completa es pot consultar a <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/es/legalcode.ca>.

Índex

Introducció	5
Objectius	6
1. La llum i el seu estudi: l'òptica	7
1.1. Què és la llum?	7
1.1.1. L'espectre electromagnètic	8
1.2. Nivells de descripció de la llum	9
2. L'òptica geomètrica	11
2.1. Què és l'òptica geomètrica?	11
2.2. Les bases de l'òptica geomètrica	12
2.2.1. El principi de Fermat	12
2.2.2. Índex de refracció	13
2.3. Reflexió i refracció	14
2.3.1. La llei de la reflexió	15
2.3.2. La llei de Snell	15
2.3.3. Reflexió especular i reflexió difusa	17
2.4. La reflexió interna total	19
2.5. Una aplicació de la reflexió total: la fibra òptica	21
2.5.1. Tipus de fibres òptiques	24
2.6. Dispersió	24
2.6.1. El nombre d'Abbe	26
2.7. Què hem après?	27
3. Sistemes òptics i formació d'imatges	29
3.1. Els sistemes òptics	29
3.1.1. Concepte d'imatge	30
3.2. L'aproximació paraxial	32
3.3. Els elements cardinals d'un sistema òptic	33
3.3.1. Distància focal i potència òptica	35
3.4. Sistemes òptics simples	36
3.4.1. Dioptries	36
3.4.2. Lents	44
3.4.3. Miralls	53
3.4.4. La lupa	59
3.4.5. El microscopi compost	60
3.4.6. El telescopi	62
3.5. Aberracions	66
3.5.1. Astigmatisme	68
3.5.2. Aberració esfèrica	69

3.5.3.	Coma	70
3.5.4.	Curvatura de camp	71
3.5.5.	Distorsió.....	71
3.5.6.	Aberració cromàtica	72
3.6.	Índex de refracció no uniforme	75
3.6.1.	Miratges	75
3.6.2.	Els medis de gradient d'índex	77
3.7.	Què hem après?.....	78
4.	Percepció de la llum	79
4.1.	Els ulls com a instruments òptics	79
4.2.	L'ull humà	85
4.3.	Què hem après?.....	87
5.	Problemes resolts	88
5.1.	Enunciats	88
5.2.	Solucions	90
Resum	100
Exercicis d'autoavaluació	101
Solucionari	103
Glossari	103
Bibliografia	105

Introducció

La llum és omnipresent en les nostres vides. Amb la llum ens hi veiem, sigui la llum del Sol o sigui la llum produïda artificialment mitjançant estris creats per l'home. Amb la llum esteu llegint això, tant si ho llegiu sobre un paper com en una pantalla d'ordinador. Mireu per la finestra: si és de dia ho veureu tot inundat per la llum del Sol, si és de nit veureu una munió d'aparells que també fan llum (els fanals del carrer, els llums dels cotxes, la Lluna, etc.). Però, realment, què és la llum? I com “funciona”? És a dir, com es comporta? com la podem manipular? com la podem crear?

En aquest mòdul i en els següents intentarem respondre a algunes d'aquestes preguntes. En concret, en aquest mòdul començarem establint què és la llum, sense entrar en gaire detalls, simplement per tenir clar de què estem parlant. Després, potser de manera una mica sorprenent, deixarem de banda la pregunta de què és realment la llum per centrar-nos en un aspecte molt més pràctic: determinar com es comporta en les situacions més senzilles. Els aspectes més complexos de la llum, com es propaga i com interacciona quan es troba amb diversos tipus de materials, els deixarem per a mòduls posteriors.

Ho podem plantejar d'una altra manera: penseu en la cosa més habitual que fem amb la llum... veure-hi! Doncs començarem per aquí. Estudiarem com la llum ens permet crear imatges mitjançant uns elements concrets, com ara trossos de vidre o miralls, i, a més, intentarem saber com són les imatges que ens creen aquests elements. Això ho farem, repetim, sense entrar a considerar què és la llum; en aquest mòdul, per a nosaltres la llum serà una “cosa” que viatja en línia recta pels materials transparents i que en alguns casos es desvia d'una forma molt concreta. Aquesta manera d'abordar l'estudi de la llum és el que s'anomena **òptica geomètrica**, el tema d'aquest mòdul.

En el recorregut que farem per l'òptica geomètrica us trobareu amb les lleis que determinen com rebota i com es desvia la llum quan es troba amb certs materials, amb aplicacions simples d'aquest fet, com les fibres òptiques, i amb els instruments més simples que podem utilitzar per a manipular la llum, com els miralls i les lents. Per a anar una mica més enllà en aquest estudi, també estudiareu sistemes una mica més complexos, com els microscopis o els telescopis i, fins i tot, els ulls dels éssers vius, que no deixen de ser un instrument òptic que es pot entendre amb les eines que haureu estudiat.


Objectius

Els objectius que ha d'aconseguir l'estudiant una vegada treballats els continguts d'aquest mòdul són:

- 1.** Tenir clar que la llum és una ona electromagnètica i saber on se situa dins de la totalitat de l'espectre electromagnètic.
- 2.** Entendre els diferents nivells en què es pot descriure la llum i què es pot estudiar en cada cas.
- 3.** Entendre l'òptica geomètrica com a primera aproximació a l'estudi de la llum.
- 4.** Saber les limitacions de l'òptica geomètrica i saber com es poden superar amb l'òptica ondulatoria clàssica i l'òptica quàntica.
- 5.** Saber les bases de l'òptica geomètrica i com donen lloc a les lleis bàsiques de la reflexió i la refracció.
- 6.** Poder entendre i resoldre problemes en què intervingui la reflexió i la refracció de rajos de llum.
- 7.** Entendre què és una imatge.
- 8.** Saber com es pot determinar la imatge d'un objecte creada per un sistema òptic.
- 9.** Tenir clar que per a un primer estudi de la formació d'imatges cal utilitzar l'aproximació paraxial i saber en què consisteix.
- 10.** Utilitzar l'aproximació paraxial i les lleis de l'òptica geomètrica per a determinar la imatge creada per diversos sistemes òptics.
- 11.** Saber quines són les diferències entre el que prediu l'aproximació paraxial i la realitat i com es poden quantificar.
- 12.** Entendre el funcionament de la fibra òptica.
- 13.** Tenir una visió global i qualitativa dels diversos sistemes visuals dels éssers vius, en tant que instruments òptics.
- 14.** Tenir un coneixement una mica més detallat del sistema visual humà.

1. La llum i el seu estudi: l'òptica

En els mòduls següents estudiarem les ones electromagnètiques amb tota la generalitat que calgui, però en aquest ens limitarem només a una part de les ones electromagnètiques: les que nosaltres, els éssers humans, podem detectar sense ajuda de cap instrument, les ones electromagnètiques visibles, és a dir, la llum.



En el mòdul "Ones" s'estudien les ones en general, mentre que en el mòdul "Acústica" ens concentrem en un tipus particular d'ones mecàniques: les ones acústiques. En aquest mòdul estudiarem la part de les ones electromagnètiques que corresponen a la llum.

1.1. Què és la llum?

Cap al segle XVIII hi havia bàsicament dues teories oposades per a explicar què és la llum: la teoria corpuscular, que considerava la llum formada per partícules i tenia el suport de gent com Isaac Newton i Pierre de Laplace, i la teoria ondulatoria, que considerava que la llum és una ona i comptava amb partidaris com Robert Hooke, Christiaan Huygens, Thomas Young o Augustin-Jean Fresnel. La llum, certament, presentava moltes característiques ondulatories, com la interferència o la difracció, molt difícils d'explicar amb la teoria corpuscular. D'altra banda, però, en aquella època es creia que qualsevol ona necessitava sempre un medi per a propagar-se, mentre que la llum no semblava tenir cap problema per a propagar-se en el buit, cosa que semblava refutar la possibilitat que la llum fos una ona i donava punts a la teoria corpuscular.

Sobre els actors principals d'aquesta història...

Isaac Newton (1643–1727) fou un físic anglès, un dels més influents de la història. La seva obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Fonaments matemàtics de filosofia natural, 1687) establí les bases de tota la mecànica i aconseguí relacionar el moviment dels cossos amb les causes que el produeixen.

Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) va ser un físic i matemàtic francès. Fou un dels més importants desenvolupadors de la mecànica iniciada per Newton, basant-la totalment en l'anàlisi matemàtica. La seva obra *Mécanique Céleste* (Mecànica celeste, 1799–1825) fou fonamental en l'estudi del moviment dels planetes a partir de la mecànica de Newton.

Robert Hooke (1635–1703) fou un erudit anglès especialment conegut en física pels seus treballs sobre elasticitat (la llei de Hooke) i microscopia i per la seva anàlisi de la refracció de la llum, que el duqué a donar suport a la teoria ondulatoria.

Christiaan Huygens (1629–1695) fou un físic i matemàtic neerlandès destacat pels seus treballs sobre la naturalesa ondulatoria de la llum, però també pel descobriment de la veritable naturalesa dels anells de Saturn i de la seva lluna més gran, Tità.

Thomas Young (1773–1829) va ser un erudit britànic que treballà en nombrosos camps. En física és especialment conegut per l'experiment de la doble escletxa, que posava de

manifest les interferències d'ones lluminoses. Cal destacar que féu contribucions fonamentals per al desxiframent de l'escriptura jeroglífica egípcia.

Augustin-Jean Fresnel (1788–1827) va ser un gran estudiós de l'òptica, que amplià els resultats de Young i aplicà la hipòtesi de la naturalesa ondulatoria de la llum per a explicar una gran varietat de fenòmens.

La polèmica entre les dues teories va ser llarga, però en qualsevol cas, cap al 1850, el pes de les proves experimentals va fer abandonar gairebé definitivament la teoria corpuscular i tot semblava indicar que la llum era una ona.

En aquella mateixa època, el físic escocès James Clerk Maxwell, amb el seu gran *A Treatise on Electricity and Magnetism*, entre moltes altres contribucions fonamentals, va demostrar que un camp magnètic i un camp elèctric es poden propagar per l'espai seguint un moviment ondulatori; és a dir, en forma d'ona, que va anomenar **ona electromagnètica**. Maxwell va ser capaç de calcular la velocitat de propagació d'aquesta mena d'ones i va trobar que era gairebé idèntica a la velocitat que es coneixia aleshores de propagació de la llum.

Això duia a una possibilitat interessant que ell mateix expressà:

“Aquesta velocitat és tan propera a la de la llum que sembla que tenim raons poderoses per a concloure que també la llum [...] és una pertorbació electromagnètica en forma d'ones que es propaguen a través del camp electromagnètic d'acord amb les lleis de l'electromagnetisme.”

James Clerk Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*

És a dir, el resultat de Maxwell duia a considerar seriosament el fet que la llum no fos més que un tipus d'ona electromagnètica, d'unes freqüències determinades. I, efectivament, això va quedar confirmat poc després i, a més, per primera vegada es va aconseguir generar ones electromagnètiques: en Heinrich Hertz va aconseguir produir-ne en la banda que actualment coneixem com a UHF. Així, doncs, a final del segle XIX va quedar confirmada l'existència de les ones electromagnètiques, com predeia Maxwell, i el fet que la llum no és més que un tipus particular d'ona electromagnètica.

1.1.1. L'espectre electromagnètic

Tal com es va anar descobrint posteriorment, les ones electromagnètiques abasten des de les freqüències més baixes a les més altes. Els diversos intervals de freqüències reben noms especials que ens poden resultar familiars; els principals són: ones de ràdio (o ones radioelèctriques o radioones), microones, rajos infrarojos, llum visible, rajos ultraviolats, rajos X i rajos γ . El conjunt de totes les freqüències de les ones electromagnètiques és l'**espectre electromagnètic**, que podeu observar en la figura 1.

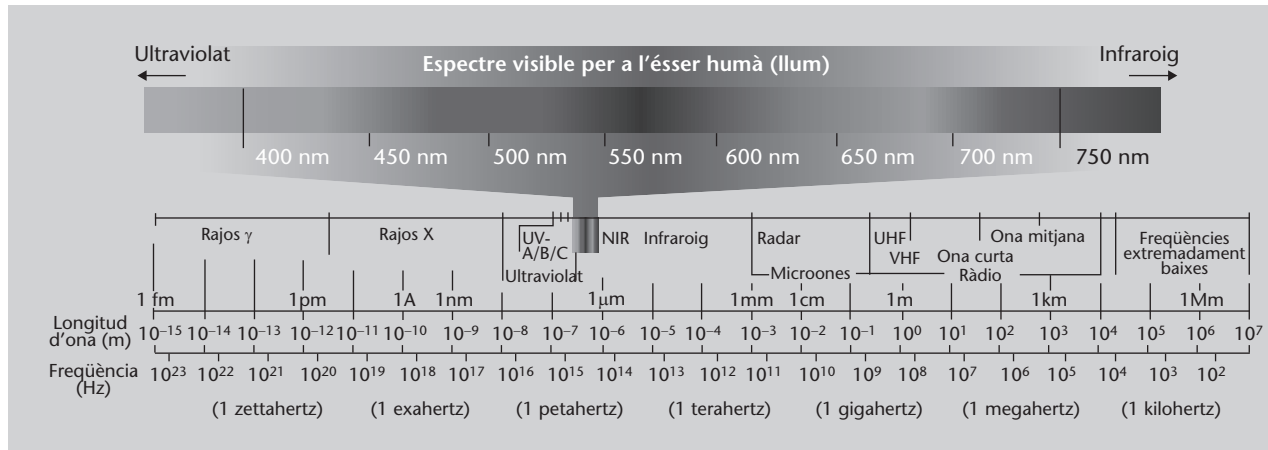
L'èter

Com que al segle XIX se seguia pensant que qualsevol ona necessitava un medi per a propagar-se, per a solucionar aquest problema es va suposar que el buit era ple d'un medi anomenat *èter* (que no té res a veure amb els compostos químics anomenats *èters*) en el qual es propagava la llum. Aquesta suposició sempre va ser molt problemàtica, i posteriorment es va demostrar totalment innecessària i fou una de les causes que van dur a plantejar la teoria de la relativitat.

En Hertz i les ones electromagnètiques

Curiosament, en Hertz, com tants d'altres en aquell moment, no s'adonà de la gran importància que tenien les ones electromagnètiques, l'existència de les quals ell acabava de confirmar de manera tan brillant. En les seves paraules: “no tenen cap mena d'utilitat [...] això només és un experiment que demostra que el mestre Maxwell tenia raó. Tenim aquestes misterioses ones electromagnètiques que no podem veure amb els ulls, però hi són!”

Figura 1. L'espectre electromagnètic



Cal tenir en compte dues coses importants:

- En primer lloc, la llum visible no és res més que l'interval de freqüències de la radiació electromagnètica que els éssers humans podem detectar de manera natural, gràcies a l'òrgan de la visió, l'ull. Aquest interval és, aproximadament $7,9 \cdot 10^{14}$ Hz – $4,0 \cdot 10^{14}$ Hz, o bé, en termes de longitud d'ona, 380 nm – 750 nm.
- En segon lloc, la separació en diferents bandes és arbitrària, però té una certa lògica atès que calen mètodes de generació i detecció diferents en cada cas.

Feta aquesta introducció a les ones electromagnètiques i vist on se situa la llum dins de l'espectre electromagnètic, ja podem passar al tema d'aquest mòdul: la llum visible. Com ja hem dit en començar el mòdul, en els mòduls següents ja estudiarem en general les ones electromagnètiques, però ara ens quedem només amb la llum. Aquesta restricció és purament antropocèntrica, ja que nosaltres podem detectar de manera natural la llum i, per tant, tenim un interès especial a estudiar-la, saber com es comporta i poder manipular-la. Això és precisament l'objecte d'estudi de l'òptica.

L'òptica és la part de la física que s'ocupa d'estudiar la llum, la seva generació, manipulació i detecció i els seus processos d'interacció amb la matèria. En òptica el concepte de *llum*, a més, s'estén des de la zona visible de l'espectre electromagnètic fins a freqüències de la regió infra-roja i ultraviolada en què encara són aplicables els mateixos conceptes que per a la llum visible.

1.2. Nivells de descripció de la llum

Ara que ja sabem que la llum és una ona electromagnètica podríem començar estudiant-la a partir de la teoria electromagnètica clàssica, és a dir, a partir de

Figura 1

En la part inferior podeu veure tot l'espectre electromagnètic, des de les longituds d'ona més petites (rajos γ) fins a les més llargues, amb els noms que s'acostumen a utilitzar per a cada interval de longituds d'ona. En la part superior podeu veure, ampliat, l'espectre visible, és a dir, la part d'ones electromagnètiques que nosaltres, els éssers humans, podem detectar amb els ulls.

les equacions de Maxwell. Sí, podríem fer-ho, però la complicació associada és considerable i és millor haver-se familiaritzat primer amb els fenòmens bàsics de la llum, d'una banda, i amb les ones electromagnètiques en general, d'una altra, per a poder tractar problemes d'òptica a partir de la descripció electromagnètica de la llum.

En lloc d'això començarem a investigar els fenòmens òptics amb l'aproximació que es va fer històricament. En molts casos, per als problemes òptics més simples de propagació de la llum, lents i construcció d'instruments, el caràcter ondulatori resulta irrellevant. Així, hom obvia qualsevol pregunta sobre què és exactament la llum i es limita a considerar que

- la llum es mou en línia recta entre dos punts d'un mateix medi,
- la llum està sotmesa a unes lleis concretes que ens diuen què li passa quan arriba a una superfície que separa dos medis diferents.

Aquesta descripció de la llum, aparentment tan simplificada, és la part de l'òptica anomenada **òptica geomètrica**.

Podem considerar diversos nivells de descripció de la llum i els fenòmens òptics que, esquemàticament, podem resumir així:

- **Òptica geomètrica.** No es planteja què és la llum. Només considera que és una "cosa" que es propaga en línia recta i està sotmesa a unes lleis determinades.
- **Òptica ondulatoria** o **òptica física.** Considera la llum com una ona i permet explicar tots els fenòmens en què es mostra el caràcter ondulatori de la llum.
- **Òptica electromagnètica.** A més de les consideracions fetes per l'òptica ondulatoria, afegeix el fet que l'ona és, específicament, una ona electromagnètica i compleix les lleis de Maxwell.
- **Òptica quàntica.** Considera la llum formada per partícules anomenades *fotons* i es basa en la mecànica quàntica. Entre altres coses, permet entendre el funcionament del làser i molts processos d'interacció entre la llum i la matèria.

Ara ens quedarem en el primer nivell, el de l'òptica geomètrica. És cert que pot semblar sorprenent que ara, després d'haver-nos esforçat tant en el mòdul d'ones per a comprendre les característiques del moviment ondulatori, vulguem descriure la llum sense considerar tot el que hem après, però aquest enfocament ens permetrà explicar molts fenòmens interessants, fins i tot descriure qualitativament el principi de funcionament de les fibres òptiques.

En els mòduls on s'estudien les ones electromagnètiques, es fa una aproximació a l'òptica física i a l'òptica electromagnètica.



2. L'òptica geomètrica

Així, què és exactament el que considerarem ara? Com hem comentat en el subapartat 1.2., ens quedem en el primer nivell de descripció de la llum: l'òptica geomètrica. En els subapartats següents veurem amb més detall què és l'òptica geomètrica, en què es basa i quines són les seves lleis fonamentals.

2.1. Què és l'òptica geomètrica?

En general, l'òptica descriu la propagació de la llum a través dels materials o del buit. Tots els materials a través dels quals es pot propagar la llum s'anomenen **transparents**; en cas contrari, s'anomenen **opacs**. En el cas de l'òptica geomètrica, per a fer aquesta descripció de la propagació de la llum es parteix d'unes hipòtesis o suposicions senzilles.

Aquí no considerarem medis translúcids, és a dir, medis que només deixen passar parcialment la llum.

L'òptica geomètrica és la part de l'òptica que s'ocupa de descriure el comportament de la llum sense plantejar-se què és exactament i considerant que:

- la llum es mou en línia recta entre dos punts d'un medi transparent,
- la llum està sotmesa a unes lleis concretes (obtingudes empíricament, és a dir, a partir d'experiments) que en determinen el comportament quan arriba a la separació entre dos medis.

Normalment, en òptica geomètrica la propagació de la llum es considera en termes del concepte de **raig**.

Un **raig** és la línia que segueix la llum en la seva propagació a través d'un medi transparent.

Una vegada definit el concepte de *raig*, les dues suposicions que hem establert fa un moment seran, més concretament:

- Els rajos es propaguen en línia recta entre dos punts d'un mateix medi transparent.

- Quan els rajos arriben a la superfície que separa dos medis, compleixen unes lleis, obtingudes experimentalment, que estudiarem en el subapartat 2.3.:
 - la llei de la reflexió,
 - la llei de Snell de la refracció

Cal dir que l'òptica geomètrica és sempre una bona aproximació quan la longitud d'ona és molt petita comparada amb les dimensions dels objectes amb què interactua la llum. Aquesta condició es compleix en la majoria d'aplicacions òptiques tradicionals.

2.2. Les bases de l'òptica geomètrica

A continuació presentarem les bases conceptuals de l'òptica geomètrica. Ja hem dit que considerem que els rajos de llum es propaguen en línia recta entre dos punts. Aquest fet, observat experimentalment, el podem afinar una mica més i obtenir-lo a partir d'un principi més bàsic, que és el principi de Fermat. És més, aquest principi també ens permet obtenir les lleis de la reflexió i de la refracció.

2.2.1. El principi de Fermat

Per a determinar com és la trajectòria que segueix un raig de llum, es pot partir de l'observació empírica que la trajectòria és sempre recta en un medi homogeni. Ara bé, quan un medi no és homogeni, la trajectòria ja no és recta i no sabem com descriure-la.

En canvi, si partim d'un principi bàsic descobert pel matemàtic Pierre de Fermat al segle XVII, podrem determinar la trajectòria de la llum en qualsevol situació. Aquest principi és l'anomenat **principi de Fermat** o **principi del temps mínim**.

El **principi de Fermat** afirma que la trajectòria que segueix un raig de llum per a anar d'un punt a un altre és tal que el temps invertit en recórrer-la és mínim.

Aquest principi es pot expressar matemàticament, però com que el tractament complet és relativament complex, tan sols l'enunciem qualitativament, sense fer-ne exemples concrets. Només comentarem que, a partir del principi de Fermat, és fàcil calcular la trajectòria seguida per un raig de llum en qualsevol tipus de medi, homogeni o no, i també que ens permet obtenir les lleis de la reflexió i de la refracció, que estudiarem d'aquí a una estona, en el subapartat 2.3.

Longitud d'ona de la llum

Per a veure que la condició de longitud d'ona petita es compleix habitualment, penseu que la longitud d'ona de la llum és d'uns quants centenars de nanometres, com hem vist en el subapartat 1.1.1., és a dir, és de l'ordre de 10^{-7} m, mentre que en les aplicacions òptiques tradicionals s'utilitzen elements sempre de dimensions superiors al mil·límetre, és a dir de l'ordre de 10^{-3} m o més, quatre ordres de magnitud més gran.

Homogeneïtat

Que un medi sigui *homogeni* significa que té les mateixes característiques a tot arreu, en qualsevol punt.

Pierre de Fermat

Pierre de Fermat (1601–1665) va ser un advocat i matemàtic francès. Fermat fou un dels més grans estudiosos de la teoria de nombres i l'anomenat Darrer Teorema de Fermat ha estat un dels problemes matemàtics més famosos de tots els temps. La seva contribució més important en física és un dels primers enunciats del principi del temps mínim.

Ara ja sabem a partir de quin principi bàsic es poden obtenir les suposicions fonamentals de l'òptica geomètrica, però ens falta caracteritzar d'alguna manera els medis per on es propaga la llum. És a dir, volem trobar alguna cosa que ens permeti diferenciar un medi d'un altre pel que fa a la propagació de la llum. Això és el que farem a continuació.

2.2.2. Índex de refracció

Per a caracteritzar els medis transparents (és a dir, els medis per on es pot propagar la llum) necessitem alguna característica definitòria. Una possible característica del medi, pel que fa a la propagació de la llum, és la velocitat de la llum en aquest medi. Com que aquesta velocitat té sempre un valor molt gran, els medis transparents solen caracteritzar-se mitjançant una magnitud anomenada *índex de refracció*.

L'**índex de refracció** d'un medi, n , és igual al quocient entre la velocitat de propagació de la llum en el buit, c_0 , i la velocitat de propagació de la llum en aquell medi, c :

$$n = \frac{c_0}{c} \quad (1)$$

Com que l'índex de refracció és el quocient de dues velocitats, es tracta d'una magnitud que no té dimensions (és a dir, que no s'expressa amb cap unitat). D'altra banda, a partir de la definició, l'índex de refracció del buit és precisament c_0/c_0 , és a dir, 1. En la taula 1 podeu veure alguns índexs de refracció de diversos materials transparents habituals.

Taula 1

Material	n per a $\lambda = 598,3$ nm
Aire (0 °C)	1,00029
Oxigen (0 °C)	1,00027
Aigua (20 °C)	1,333
Etanol (20 °C)	1,362
Benzè (20 °C)	1,501
Gel (0 °C)	1,310
Vidre comú (20 °C)	$\approx 1,51$
Vidre de quars (20 °C)	1,459
Poliestirè (20 °C)	$\approx 1,59$
Safir (20 °C)	1,769
Diamant (20 °C)	2,417

Medi transparent

Tingueu en compte que el fet de ser transparent o no, depèn de la longitud d'ona de la radiació electromagnètica. Un medi pot ser transparent a la llum i opac als rajos ultraviolats, com per exemple el vidre, o ser opac a la llum i transparent a les ones de ràdio.

Nomenclatura

En òptica és molt habitual utilitzar c_0 per a simbolitzar la velocitat de la llum en el buit i c per a la velocitat de la llum en qualsevol altre medi. En aquest mòdul seguirem aquesta nomenclatura. Ara bé, recordeu que en mòduls anteriors havíem utilitzat c per a la velocitat de la llum en general.

Índex de refracció negatiu

Actualment es poden aconseguir materials que tenen índexs de refracció negatius, anomenats **metamaterials**, que tenen propietats sorprenents, com per exemple la invisibilitat a determinades longituds d'ona. Cal dir, però, que en aquests casos l'índex de refracció ja no s'interpreta simplement com c_0/c i les coses esdevenen més complexes.

El camí òptic

A partir de l'índex de refracció es pot definir una magnitud força habitual en òptica, que és la longitud de camí òptic, o simplement, camí òptic. Se simbolitza amb L o, a vegades, amb les lletres OPL*.

* De l'anglès *optical path length*.

La **longitud de camí òptic** és el producte de la longitud recorreguda per la llum entre dos punts i l'índex de refracció del medi entre aquests dos punts, és a dir:

$$L = n \cdot s \quad (2)$$

on s és la distància. Aquesta expressió és vàlida si el medi entre tots dos punts té sempre el mateix índex de refracció, però si l'índex canvia en funció d'on ens trobem, cal reexpressar-ho com a:

$$L = \int_C n(s) ds \quad (3)$$

on $n(s)$ és ara l'índex de refracció que varia en funció de la posició. És a dir, és la integral de l'índex de refracció sobre el camí recorregut per la llum. Precisament cal usar una integral perquè l'índex de refracció està canviant en cada punt del camí.

El camí òptic equival a la longitud que un raig de llum que es desplaça per un medi hagués recorregut en el mateix temps si s'estigués desplaçant en el buit. Això és útil perquè, d'aquesta manera, amb el camí òptic, rajos de llum que es propaguen per medis diferents es poden comparar directament. Aquest fet enllaça amb el principi de Fermat que hem enunciat abans, que ara, amb el concepte de camí òptic, es pot reenunciar de la següent manera.

La trajectòria que segueix un raig de llum per a anar d'un punt a un altre és tal que el camí òptic entre els dos punts és mínim.

2.3. Reflexió i refracció

Ara que ja sabem com es propaga la llum per un medi transparent ens preguntarem què passa quan un raig de llum arriba a la superfície de separació de dos medis transparents, també anomenada **dioptrè**. En general sabem que part de l'energia "rebota" i torna al primer medi, formant un altre raig, mentre que una altra part travessa la separació i forma un raig de llum que es propaga pel

Dioptrès i diòptries

Un dioptrè és qualsevol superfície de separació entre dos medis transparents. No s'ha de confondre el terme *dioptrè* amb el terme *diòptria*, que és una unitat de mesura de la potència d'un sistema òptic i que veurem més endavant.

segon medi, habitualment amb un canvi de direcció. El primer fenomen és la **reflexió**, el segon, la **refracció**.

Tots dos fenòmens segueixen lleis molt determinades que es van descobrir experimentalment, però també es poden deduir a partir del principi de Fermat, com ja havíem comentat. Per a descriure-les amb precisió necessitem definir primer uns quants conceptes. Vegem-los, juntament amb la seva representació que podeu anar consultant en la figura 2:

- L'**angle d'incidència** és l'angle que forma un raig que arriba a una superfície de separació entre dos medis amb la direcció normal (és a dir, perpendicular) a aquesta superfície. El simbolitzarem amb θ_1 (la lletra grega theta).
- L'**angle de reflexió** és l'angle que forma un raig reflectit en una superfície de separació entre dos medis amb la direcció normal a aquesta superfície. El simbolitzarem amb θ'_1 ("theta prima sub u").
- L'**angle de refracció** és l'angle que forma un raig refractat en una superfície de separació entre dos medis amb la direcció normal a aquesta superfície. El simbolitzarem amb θ_2 .
- El **pla d'incidència** és el pla que queda definit per la direcció del raig incident i la direcció normal a la superfície de separació. En la figura 2 és, precisament, el pla del paper on esteu llegint.

!
Sobre la reflexió i la refracció d'ones en general, vegeu l'apartat 5 del mòdul "Ones".

2.3.1. La llei de la reflexió

Com es produeix la reflexió?

La **llei de la reflexió** estableix que el raig reflectit es troba en el pla d'incidència i forma un angle de reflexió que és igual a l'angle d'incidència, com podeu veure en la figura 2. És a dir:

$$\theta_1 = \theta'_1 \quad (4)$$

2.3.2. La llei de Snell

Pel que fa a la refracció, experimentalment s'observa que quan la llum passa d'un medi d'índex més petit a un d'índex més gran (per exemple, d'aire a vidre o a aigua) el raig refractat s'apropa a la normal, mentre que quan passa d'un medi d'índex més gran a un de més petit (d'aigua o de vidre a l'aire) el raig refractat s'allunya de la normal (vegeu també la figura 2).

Figura 2. Reflexió i refracció

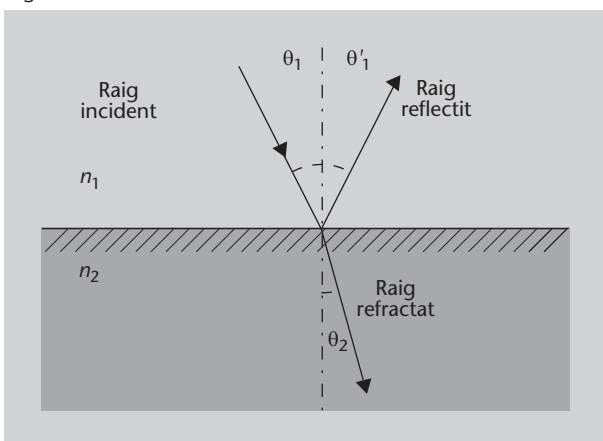


Figura 2

Un raig incident, que es propaga per un medi d'índex de refracció n_1 arriba a una superfície de separació formant un angle d'incidència θ_1 amb la normal (la línia vertical puntejada). En surt un raig reflectit amb un angle de reflexió θ'_1 i un raig refractat amb un angle de refracció θ_2 , que es propaga pel segon medi, d'índex de refracció n_2 . El pla d'incidència coincideix amb el pla del paper.

Aquesta observació encara es pot afinar més i determinar quin és l'angle de refracció.

La llei de Snell

La llei de Snell rep el nom de l'astrònom i matemàtic neerlandès Willebrord Snell van Royen, o Snellius, que la va descobrir l'any 1621. Tot i així, la llei ja havia estat descoberta per Ibn Sahl, a Bagdad, l'any 984, i una altra vegada per Thomas Harriot a Anglaterra el 1602. Posteriorment també va ser redescoberta per René Descartes i per això a vegades, i especialment a França, també es coneix com a llei de Descartes.

La llei que descriu l'angle de refracció és la **llei de Snell** o llei de la refracció, que afirma que:

- El raig refractat es troba en el pla d'incidència.
- La relació entre els angles d'incidència i refractat segueix l'equació següent:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \tag{5}$$

Aquesta equació ens diu que l'índex de refracció del primer medi n_1 , pel sinus de l'angle d'incidència, θ_1 , és igual a l'índex de refracció del segon medi n_2 pel sinus de l'angle de refracció, θ_2 (angles que podeu veure indicats en la figura 2).

Exemple. Aplicació de la llei d'Snell

En la figura 3 podeu veure un raig de llum que es propaga en aire i incideix amb un angle de 60° respecte a la normal sobre un tros de vidre. Calculem en quina direcció sortiran els rajos reflectit i refractat segons les lleis de la reflexió i de la refracció i veiem si coincideix amb el que observem.

Tenim $\theta_1 = 60^\circ$. A partir de la llei de la reflexió sabem que $\theta_1 = \theta'_1$; per tant:

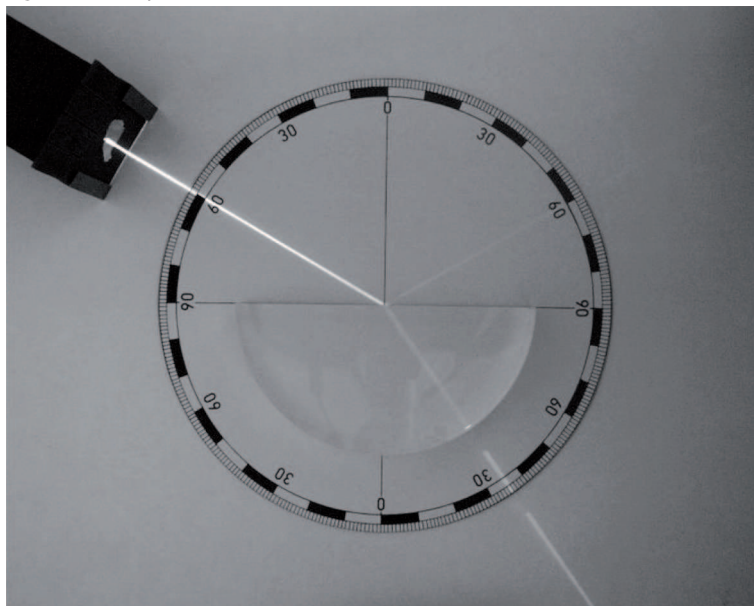
$$\theta'_1 = 60^\circ \tag{6}$$

és a dir, el raig reflectit surt, també, amb un angle de 60° respecte a la normal. Com veiem, el resultat coincideix amb l'experiment mostrat en la figura.

Passem ara a la refracció. Si aïllem l'angle de refracció θ_2 de la llei de Snell (equació 5), obtenim:

$$\theta_2 = \arcsin \left[\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \right] \tag{7}$$

Figura 3. Exemple de reflexió i refracció



Font: Wikimedia Commons

Figura 3

Un raig de llum incideix sobre un tros de vidre. En l'exemple podeu veure l'anàlisi matemàtica d'aquesta figura i com, efectivament, es compleixen la llei de la reflexió i la llei de Snell.

Si consultem la taula d'índexs de refracció (taula 1), podem introduir els números següents en l'equació anterior:

$$\theta_2 = \arcsin \left[\frac{1}{1,5} \sin \pi/3 \right] = 0,62 \text{ rad} \quad (8)$$

on hem passat els 60 graus a radians. Si passem el resultat a graus, obtenim $35,3^\circ$, que novament coincideix amb l'experiment.

2.3.3. Reflexió especular i reflexió difusa

Habitualment, però, no observem un únic raig que incideix sobre una superfície, sinó que n'observem molts, procedents d'una o més fonts de llum. En les dues imatges de la figura 4 podeu veure tres superfícies que reflecteixen llum: un mirall, unes rajoles i un paper. En el cas del mirall veiem que la reflexió ens permet veure una imatge, mentre que en els altres dos només veiem llum reflectida però sense formar una imatge nítida. Quina és la diferència entre els dos casos? La reflexió d'un raig de llum sempre es produeix seguint la llei de la reflexió que acabem d'estudiar. La diferència entre els dos casos està en com es reflecteix no solament un raig, sinó tot el conjunt de rajos que arriben a la superfície.

En funció de si el conjunt de rajos es reflecteix en una superfície llisa i uniforme o en una superfície més aviat rugosa, es distingeixen dos tipus de reflexió:

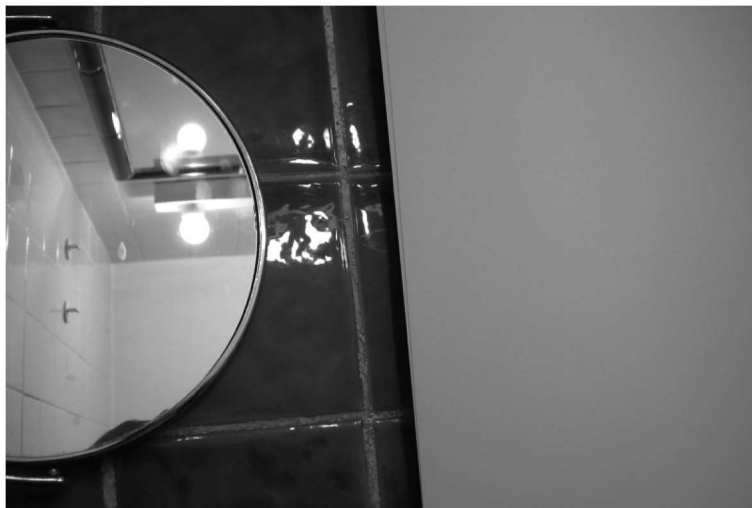
- **Reflexió especular.** Si la superfície és llisa i uniforme tots els rajos reflectits seguiran trajectòries com les que es mostren en la figura 5a i els rajos, després de reflectir-se, mantindran la mateixa relació entre ells que tenien abans de la reflexió. D'aquesta manera tots els rajos reflectits que procedeixen

Graus i radians

Recordeu que per a passar de graus a radians, com que 360° són 2π rad, cal multiplicar per 2π i dividir per 360. Per a passar de radians a graus cal multiplicar per 360 i dividir per 2π .

xen d'un punt determinat semblen procedir, després d'haver-se reflectit, d'un altre punt. En aquest cas les superfícies reflectores poden formar imatges, tal com estudiarem en l'apartat 3 i es diu que es produeix una **reflexió especular**. És també el cas del mirall en la figura 4.

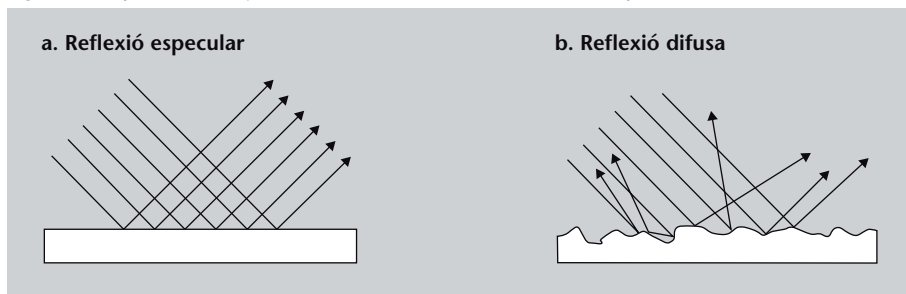
Figura 4. Reflexió especular i difusa



Font: fotografia de l'autor

- **Reflexió difusa.** En l'altre cas tenim una superfície més o menys rugosa en què tots els rajos es reflecteixen en direccions qualssevol (però sempre seguint la llei de la reflexió, no ho oblideu!), com podeu veure en la figura 5b. D'aquesta manera no semblen provenir d'un únic punt i no es produeix cap mena de formació d'imatge. Es diu que es produeix **reflexió difusa**. Per exemple, la reflexió de llum en qualsevol medi poc polit, com un full de paper, una taula de fusta, una paret, és una reflexió molt difusa; la reflexió en una superfície metàl·lica és menys difusa i si el metall és molt polit és gairebé una reflexió especular. És el cas de les rajoles i del paper en la figura 4.

Figura 5. Esquema dels rajos de llum en reflexió difusa i reflexió especular



La reflexió difusa és un inconvenient per a formar imatges però és molt útil en la majoria de situacions. Si un full de paper presentés reflexió especular només podríem llegir el que hi hagués escrit quan el miréssim amb un angle molt determinat! En canvi, la reflexió difusa permet que sobre el paper es reflecteixi llum en qualsevol direcció i, per tant, que nosaltres el puguem mirar també des de qualsevol direcció.

Figura 4

Exemple de reflexió difusa i de reflexió especular. La llum procedent d'unes bombetes es reflecteix en un mirall, unes rajoles i un tros de paper. Podeu veure que en el cas del mirall es veu una imatge nítida de les bombetes: es tracta de reflexió especular. En el cas de les rajoles i del paper no veiem cap imatge clara de les bombetes: es tracta de reflexió difusa. Però fixeu-vos que la reflexió sobre el paper és molt més difusa que sobre les rajoles; en aquestes no veiem una imatge nítida de les bombetes però sí una major concentració de llum al lloc on, aproximadament, veuríem les bombetes; en canvi, en el cas del paper ens és impossible identificar res, només veiem llum.

Figura 5

Esquema de com es produeix la reflexió especular i la reflexió difusa.
a. Reflexió especular: la superfície és llisa i uniforme i tots els rajos, després de reflectir-se, mantenen la mateixa relació entre ells que tenien abans de la reflexió.
b. Reflexió difusa: tenim una superfície més o menys rugosa en què tots els rajos es reflecteixen en direccions qualssevol, però cada un segueix la llei de la reflexió en el punt en què es reflecteix. En aquest cas resulta impossible formar imatges.

2.4. La reflexió interna total

Tal com ja hem comentat quan parlàvem de la refracció (subapartat 2.3.2.), si un raig de llum passa (es refracta) d'un medi a un altre medi de menor índex de refracció que el primer, el raig s'allunya de la normal.

Ara pensem una mica què passarà quan anem augmentant l'angle d'incidència (teniu el procés il·lustrat en la figura 6, on el podeu anar seguint): arribarà un moment en què, per a un cert angle d'incidència, el raig refractat sortirà amb un angle de 90° respecte a la normal, és a dir, sortirà paral·lel a la superfície. I si encara augmentem més l'angle d'incidència? Segons la llei de Snell l'angle de refracció hauria de ser superior a 90° , però un angle de refracció superior a 90° vol dir tornar al medi original, que ja no és pas refracció! Què passa, doncs? El que s'observa és que, efectivament, ja no hi ha refracció i només es produeix reflexió.

Figura 6. Reflexió interna total

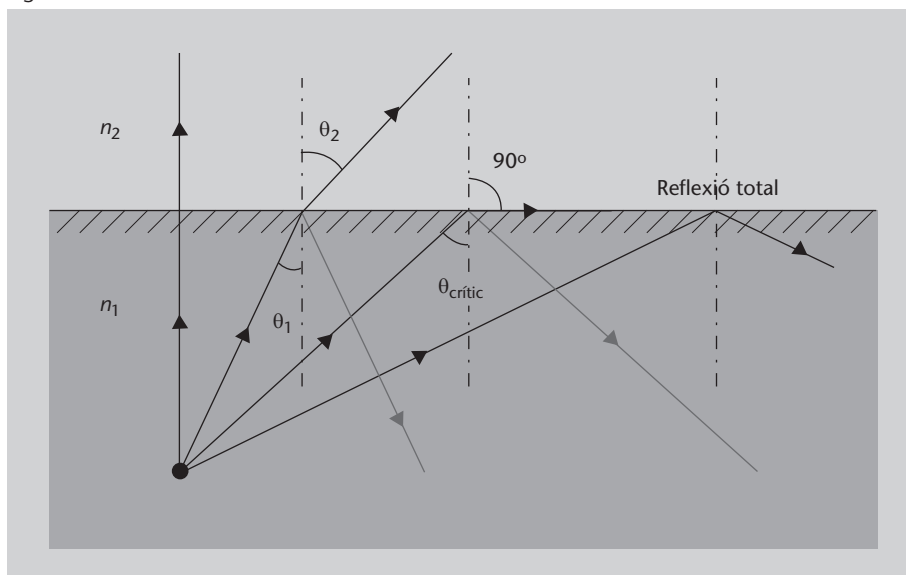


Figura 6

Com que $n_2 < n_1$, l'angle de refracció és sempre més gran que el d'incidència. Quan s'arriba a un cert angle d'incidència, l'angle crític, la refracció és a 90° . A partir d'aquest punt ja no hi ha refracció i tota la llum és reflectida.

Així doncs, a partir d'un cert angle d'incidència, no hi ha mai llum refractada que passi al segon medi i tota la llum es reflecteix. Aquest fenomen és la **reflexió interna total**.

Cal tenir ben present que la reflexió interna total només es produeix quan la llum es troba inicialment en un medi d'índex de refracció més gran. **!**

L'angle d'incidència per al qual el raig refractat surt justament a 90° respecte a la normal, a partir del qual es produeix la reflexió interna total, és l'**angle crític**, que simbolitzarem θ_c i que es pot calcular a partir de la llei de Snell. Recordeu que la llei de Snell (equació 5) era:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (9)$$

Enllaç d'interès

Podeu experimentar amb una simulació de la reflexió interna total a:
<http://demonstrations.wolfram.com/TotalInternalReflection>.

Ara hi imposem que θ_1 sigui precisament l'angle crític θ_c i que $\theta_2 = 90^\circ = \pi/2$ rad:

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

D'aquí aïllem θ_c i trobem:

$$\theta_c = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (11)$$

D'aquesta darrera expressió per a l'angle crític ja podeu veure que n_2 sempre ha de ser més petit que n_1 , ja que en cas contrari es tindria l'arcsinus d'un número més gran que 1, cosa que no existeix. Això vol dir que la reflexió total només es produeix quan el medi d'on prové el raig de llum té un índex de refracció superior al del medi a què arriba.

La reflexió interna total es pot observar fàcilment quan som sota l'aigua. Si quan som a prop de la superfície mirem cap a dalt (i si l'aigua és tranquil·la) podem observar com la superfície de l'aigua vista des de sota es comporta com un mirall. Podeu veure'n un exemple en la figura 7.

Figura 7



El sinus i l'arcsinus

L'arcsinus d'un valor entre -1 i 1 és l'angle el sinus del qual seria precisament aquest valor. És a dir, si $\sin \alpha = x$, llavors $\arcsin x = \alpha$. L'arcsinus ha de ser d'un valor entre -1 i 1 perquè els valors possibles del sinus estan precisament entre aquests dos valors.

Figura 7

La reflexió total és la causa de l'aparença especular de la superfície de l'aigua vista des de sota. Aquí veiem la reflexió total (una mica desdibuixada a causa del moviment de l'aigua) d'una tortuga verda, *Chelonia mydas*.

Una aplicació molt habitual de la reflexió interna total són les **fibres òptiques**, en les quals la llum queda confinada dins la fibra perquè es reflecteix a les vores quan hi incideix amb un angle superior al crític. Precisament dedicarem el subapartat 2.5. a estudiar més detalladament les fibres òptiques.

2.5. Una aplicació de la reflexió total: la fibra òptica

En estudiar la reflexió interna total en el subapartat 2.4., hem comentat que una aplicació interessant i molt habitual de la reflexió interna és la transmissió de llum per materials transparents en forma de fibra, estrets i llargs, com un fil, les **fibres òptiques**.

Recordem ràpidament la idea de la reflexió total: quan la llum arriba a la superfície de separació amb un medi d'índex de refracció més petit que el del medi per on està viatjant, si ho fa amb un angle superior a l'anomenat *angle crític* (equació 11), no es produeix refracció i tota la llum és reflectida.

Les fibres òptiques aprofiten aquest fet per a transmetre llum a grans distàncies. Normalment una fibra òptica senzilla està formada per un nucli transparent envoltat per un revestiment d'índex de refracció inferior al del nucli (en la figura 9 podeu veure l'estructura detallada d'una fibra). Si un feix de llum entra dins de la fibra per un dels seus extrems, com es pot veure en la figura 8, tots els rajos de llum amb un angle superior a l'angle crític respecte a les parets de la fibra patiran reflexió interna total i, com que el seu angle no variarà, aniran rebotant per les parets de la fibra fins al final.

Figura 8. Principi de funcionament d'una fibra òptica

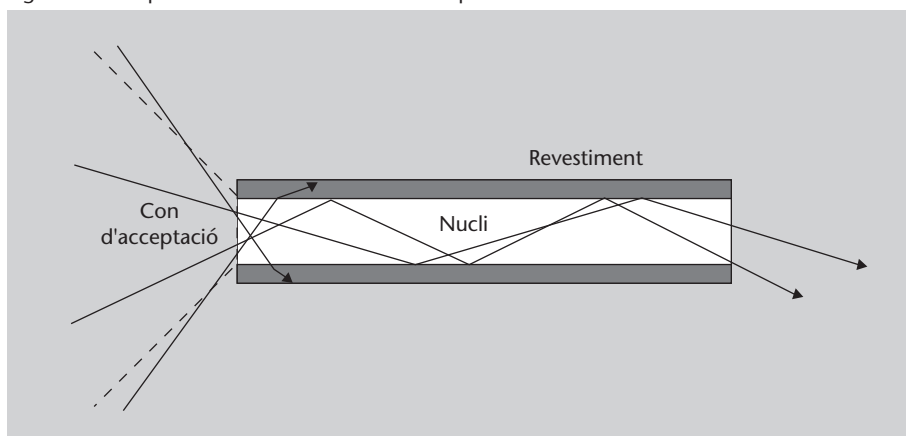


Figura 8

Si un feix de llum entra dins de la fibra per un dels seus extrems, tots els rajos de llum amb un angle superior al crític respecte a les parets de la fibra patiran reflexió interna total i aniran rebotant per les parets fins al final. Els rajos que entrin a la fibra amb un angle inferior al crític es perdran per les parets i no es transmetran. El conjunt de rajos inicials que es poden propagar per la fibra defineix el seu con d'acceptació.

Els rajos que es propaguin per la fibra en un angle inferior a l'angle crític es perdran per les parets de la fibra i no es transmetran més. El conjunt de rajos que sí es poden propagar per la fibra defineix el **con d'acceptació**, que també podeu veure representat en la figura 8.

Les fibres òptiques permeten transmetre llum i informació grans distàncies amb molt poques pèrdues, i amb una gran llibertat pel que fa al traçat de les fibres: sempre que no es torcin excessivament la llum seguirà propagant-se independentment de si es dobleguen. Un problema que presenten les fibres, però, és que els rajos que entren en angles molt diferents recorreran longituds de camins òptics diferents, fet que dóna lloc a una dispersió del feix inicial.

El concepte de camí òptic s'estudia en el subapartat 2.2.2. d'aquest mòdul.



Figura 9. Estructura d'una fibra òptica

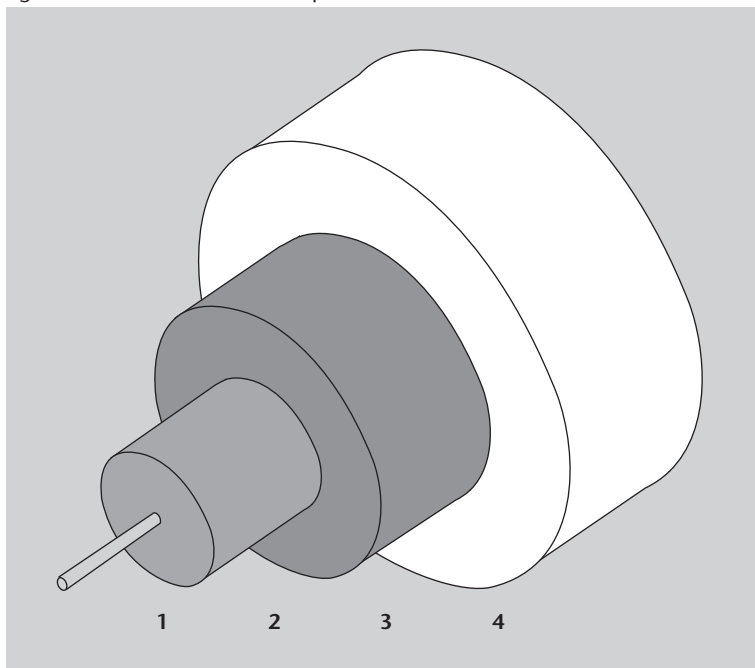


Figura 9

Estructura típica d'una fibra òptica:
 1. nucli,
 2. revestiment,
 3. amortidor,
 4. camisa.

Exemple. Con d'acceptació en una fibra òptica

Com a exemple de càlcul en una fibra òptica podem mirar de determinar el con d'acceptació d'una fibra òptica determinada, com la que mostrem en la figura 10. Aquesta fibra òptica té un nucli d'índex de refracció n_2 i radi b i un revestiment d'índex n_3 . Calcularem el seu con d'acceptació quan li arriba llum des d'un medi d'índex n_1 .

Figura 10. Propagació d'un raig per una fibra amb l'angle crític

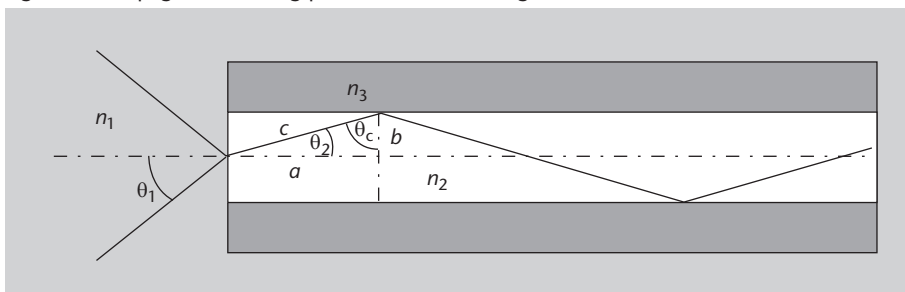


Figura 10

Propagació d'un raig de llum per una fibra, amb un nucli d'índex de refracció n_2 i radi b i un revestiment d'índex n_3 . L'angle θ_1 és la meitat del con d'acceptació i un raig que entri amb aquest angle arribarà al revestiment amb l'angle crític θ_c .

Suposem que l'angle θ_1 és la meitat del con d'acceptació. Això vol dir que un raig que entri amb aquest angle estarà just al límit de ser reflectit totalment, és a dir, arribarà al revestiment amb l'angle crític θ_c . Per tant, mirem com es propaga aquest raig i intentem obtenir l'angle θ_1 en funció de les altres variables.

Fixeu-vos que quan la llum entra en la fibra patirà una refracció inicial segons la llei de Snell (equació 5):

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \tag{12}$$

D'altra banda, com que estem calculant el raig que arriba amb l'angle crític, en el primer rebot es compleix la condició de l'angle crític (equació 11):

$$\theta_c = \arcsin \left(\frac{n_3}{n_2} \right) \tag{13}$$

Observació

De fet, si el raig arriba just amb l'angle crític sortiria paral·lel a la superfície. Ara bé, superant, ni que sigui en una quantitat infinitesimal, l'angle límit ja tenim la reflexió total. Per tant, a tots els efectes podem treballar exactament com si en l'angle crític ja es produís la reflexió total.

Ara bé, fixeu-vos que, en la figura 10, els angles θ_2 i θ_c són dos dels angles d'un triangle rectangle. Per tant, es compleix que:

$$\theta_c + \theta_2 + \frac{\pi}{2} = \pi \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \pi - \frac{\pi}{2} - \theta_c = \frac{\pi}{2} - \theta_c \quad (14)$$

Tenint això establert, l'equació 12 es pot escriure com:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_c \right) \quad (15)$$

Però resulta que $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$, de manera que l'equació 15 queda:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \cos \theta_c \quad (16)$$

I ara substituïm θ_c segons l'equació 13:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \cos \left(\arcsin \frac{n_3}{n_2} \right) \quad (17)$$

Aquesta expressió encara no és gaire còmoda, però ara podem utilitzar una altra relació trigonomètrica, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, d'on traiem que $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Així, l'equació 17 queda:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sqrt{1 - \sin^2 \left(\arcsin \frac{n_3}{n_2} \right)} \quad (18)$$

Però, és clar, l'arcsinus del sinus d'un angle és el mateix angle, de manera que això es redueix a:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_3}{n_2} \right)^2} \quad (19)$$

Ara passem n_1 a l'altra banda i tenim:

$$\sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \sqrt{1 - \left(\frac{n_3}{n_2} \right)^2} \quad (20)$$

i encara podem introduir n_2/n_1 dins de l'arrel quadrada i ens quedarà:

$$\sin \theta_1 = \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 - \left(\frac{n_3}{n_1} \right)^2} \quad (21)$$

D'aquí podem aïllar θ_1 , l'angle que buscàvem, fent simplement l'arcsinus:

$$\theta_1 = \arcsin \left(\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 - \left(\frac{n_3}{n_1} \right)^2} \right) \quad (22)$$

Angles d'un triangle

Recordeu que els angles d'un triangle sumen sempre 180° , és a dir, π radians. Recordeu també que un triangle rectangle és el que té un angle de 90° ($\pi/2$).

Recordeu que: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$

Però de fet és molt més habitual treballar amb la quantitat $\sin \theta_1$, que s'anomena **obertura numèrica** de la fibra. Així, tal com hem trobat a l'equació 21, l'obertura numèrica de la fibra és:

$$\sin \theta_1 = \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2} \quad (23)$$

Fixeu-vos que l'obertura numèrica només depèn dels índexs del medi exterior, del nucli i del revestiment. En el cas concret en què el medi exterior sigui l'aire ($n_1 = 1$), l'obertura numèrica de la fibra és simplement:

$$\sin \theta_1 = \sqrt{n_2^2 - n_3^2} \quad (24)$$

2.5.1. Tipus de fibres òptiques

Fins ara hem parlat de fibres genèricament, però el cert és que hi ha diversos tipus concrets de fibres, que bàsicament es poden agrupar en fibres multimode i fibres monomode. Comentem-les breument.

Fibres multimode

Les fibres amb un nucli de diàmetre superior a $10 \mu\text{m}$ (aquestes fibres poden arribar a centenars de micròmetres, és a dir, unes dècimes de mil·límetre) es poden estudiar perfectament amb les eines de l'òptica geomètrica que ja coneixem, tal com acabem de fer. Només cal tenir en compte la llei de Snell i el fenomen de la reflexió interna total. Aquesta mena de fibres s'anomenen **fibres multimode** i s'utilitzen només en connexions curtes, dins d'un edifici o en un campus universitari, per exemple, ja que a distàncies més llargues la dispersió es fa massa problemàtica. Actualment, aquestes fibres poden transmetre informació a un ritme de fins a 10 Gb/s.



Una fibra multimode d'1,25 Gb/s.

Fibres monomode

Les fibres que tenen un nucli de diàmetre inferior a unes deu vegades la longitud d'ona de la llum que es propaga ja no es poden analitzar mitjançant l'òptica geomètrica, sinó que cal utilitzar la descripció de la llum en termes d'ones electromagnètiques i resoldre les equacions de Maxwell. Aquestes fibres s'anomenen **fibres monomode**. Són fibres que presenten una dispersió molt menor, però tenen la dificultat de la instal·lació, a causa del diàmetre diminut del nucli, que sempre ha de quedar ben alineat en qualsevol connexió.

2.6. Dispersió

Fins ara sempre que parlàvem d'un medi transparent suposàvem que tenia un índex de refracció determinat i que el valor d'aquest índex era únic. Bé, la cosa no és exactament així: resulta que l'índex de refracció d'un medi depèn

El perquè dels noms *multimode* i *monomode* es justifica quan s'estudia els modes de propagació d'ones electromagnètiques en guies d'ones, en el mòdul "Propagació d'ones electromagnètiques".

Observació

És precisament a causa de la dispersió que en la taula d'índexs de refracció (taula 1) hem posat "per a $\lambda = 598,3 \text{ nm}$ ". Encara no havíem explicat la dispersió, però bé calia ser precisos!

lleugerament de la longitud d'ona de la llum que s'hi està propagant; és a dir, que l'índex de refracció d'un medi és lleugerament diferent per a longituds d'ona diferents. Aquest fenomen s'anomena *dispersió*.

La **dispersió** és la dependència de l'índex de refracció d'un medi en funció de la longitud d'ona (i, per tant, de la freqüència) de la llum que s'hi propaga.

Això vol dir que quan un feix de llum que té diverses longituds d'ona, com per exemple la llum del Sol o la llum d'una bombeta, es refracta, cada longitud d'ona es desviarà un angle lleugerament diferent: la longitud d'ona més petita es desviarà més que la de longitud d'ona més llarga. D'aquesta manera se separaran els diversos components de la llum, és a dir, els diferents colors. Podeu veure això esquemàticament en la figura 11, en què un raig de llum que conté diverses freqüències arriba a una superfície i es refracta; aquesta refracció és diferent per a cada freqüència i per això cadascuna surt desviada amb un angle diferent.

Dispersió i difusió

Cal anar amb compte amb el terme *dispersió*, ja que a vegades també s'utilitza per a referir-se al fenomen que més precisament cal dir-ne *difusió* (i que en anglès en diuen *scattering*).

Figura 11. Dispersió d'un raig de llum

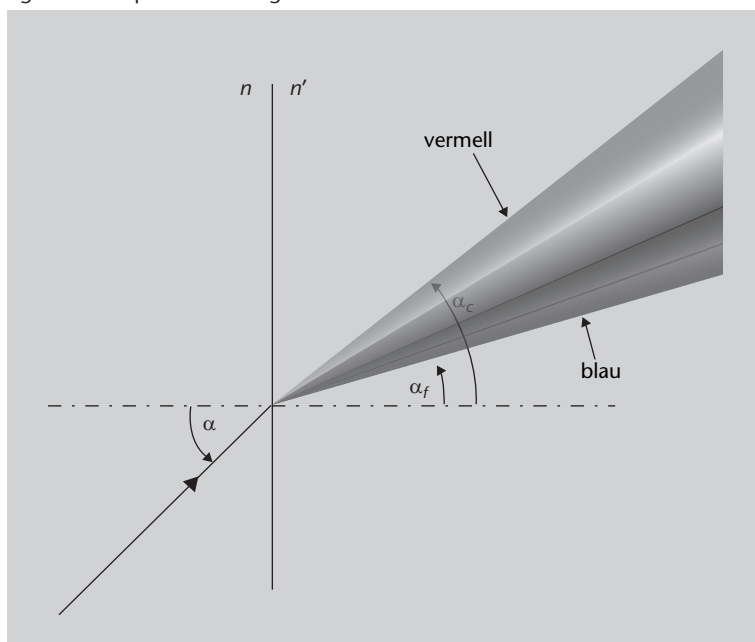
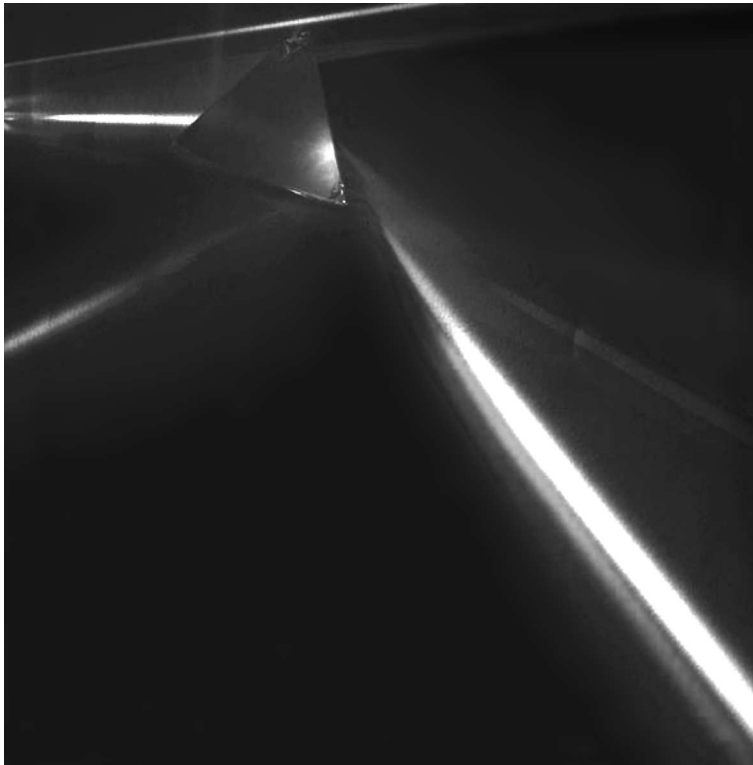


Figura 11

Un raig de llum, que conté diverses longituds d'ona, es refracta en una superfície de separació entre dos medis. Com que l'índex de refracció és diferent per a cada longitud d'ona, les diferents longituds d'ona es refracten en un angle diferent. Totes segueixen la llei de Snell, $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, però ara n_2 és diferent per a cada una.

En la figura 12 podeu veure un exemple real de dispersió en un prisma. Els exemples de dispersió s'acostumen a presentar amb prismes, ja que és un element òptic senzill i fàcil d'obtenir i, com que la llum hi pateix dues refraccions, una a cada cara, l'efecte de la dispersió és més acusat.

Figura 12. Dispersió de la llum d'una làmpada de mercuri en un prisma de vidre flint



D'altra banda, el fenomen de la dispersió és el responsable de la formació dels **arcs de Sant Martí** o arcs iris. En aquest cas, la dispersió es produeix quan la llum es refracta i pateix dispersió en les gotes d'aigua presents a l'atmosfera. Els rajos de llum entren a la gota d'aigua i es refracten, posteriorment es reflecteixen a la seva superfície interna i es tornen a refractar en sortir per l'altra banda.

2.6.1. El nombre d'Abbe

Tot això que hem estat dient fins ara sobre la dispersió es pot caracteritzar de manera precisa i relativament senzilla. Per a això es defineix el **nombre d'Abbe**, també anomenat **nombre V** o **constringència**, que ens quantifica el grau de dispersió d'un material transparent qualsevol.

El nombre d'Abbe, V , es defineix de la manera següent:

$$V = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \quad (25)$$

on n_D , n_F i n_C són els índexs de refracció del material per a les longituds d'ona 589,2 nm, 486,1 nm i 656,3 nm, respectivament. Potser us preguntareu per què precisament aquestes longituds d'ona. La resposta és que són tres longituds d'ona que, quan es va definir inicialment el nombre d'Abbe, al segle XIX, es podien generar molt fàcilment. Cal dir que a vegades també s'utilitzen al-

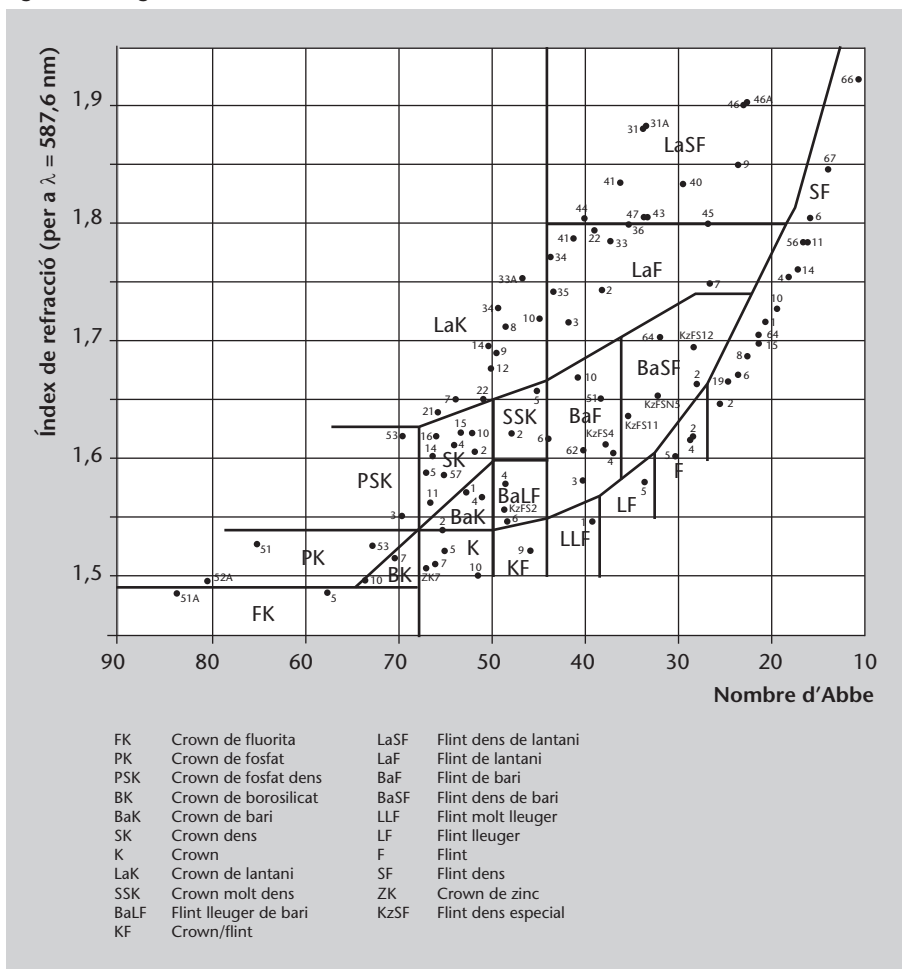
Ernst Abbe

El nombre d'Abbe rep el seu nom del físic alemany Ernst Abbe (1840–1905), que va ser el primer en definir-lo. Abbe va ser un dels creadors de l'òptica moderna i copropietari de la gran empresa alemanya d'instruments òptics Carl Zeiss AG, que continua essent una de les més importants del món.

tres longituds d'ona per a definir el nombre d'Abbe, però les més habituals són les que hem indicat.

Els materials que dispersen poc la llum tenen poca diferència entre els índexs de refracció per a diverses longituds d'ona. Això fa que el denominador de l'equació 25 sigui petit i, per tant, el valor de V , gran. Per a materials que dispersen molt la llum passa exactament el contrari. Així, els materials molt dispersors tenen nombres d'Abbe baixos i els materials poc dispersors tenen nombres d'Abbe alts. En la figura 13 podeu veure un **diagrama d'Abbe**, on cada tipus de vidre es representa com un punt, amb el nombre d'Abbe en l'eix horitzontal i l'índex de refracció en el vertical. D'aquesta manera, els diversos tipus de vidres es classifiquen segons aquestes dues magnituds i se'ls assigna un codi (en la imatge s'ha utilitzat el codi del catàleg Schott Glass).

Figura 13. Diagrama d'Abbe



Font: Wikimedia Commons; autor: Bob Mellish; traduït i adaptat per a aquest mòdul

El catàleg Schott Glass

El catàleg Schott Glass és un catàleg de vidres òptics de l'empresa alemanya Schott AG, una referència habitual per a les propietats dels vidres que fabriquen ells mateixos i altres empreses.

Figura 13

Un diagrama d'Abbe representa el nombre d'Abbe en l'eix horitzontal i l'índex de refracció en el vertical. Cada punt del diagrama és un tipus de vidre disponible comercialment. Les diverses zones agrupen vidres del mateix tipus i amb la mateixa composició química bàsica.

2.7. Què hem après?

En aquest apartat hem establert les bases de l'òptica geomètrica. Hem vist en què consisteix i en quins principis bàsics es fonamenta: la propagació rectilínia de la llum entre dos punts en un medi homogeni i la llei de la reflexió i la llei de Snell.

L'estudi de la llei de reflexió ens ha permès veure com es reflecteixen els rajos de llum en una superfície, mentre que l'estudi de la llei de Snell ens ha permès veure com es desvien en canviar de medi. Un estudi detallat de la llei de Snell també ens ha permès descobrir el fenomen de la reflexió interna, que és la base de funcionament de les fibres òptiques, a les quals hem dedicat un apartat.

D'altra banda, hem vist també com l'índex de refracció no és un valor únic, sinó que depèn de la freqüència de la llum, fenomen que anomenem *dispersió*, i que provoca que colors diferents es refractin en angles diferents.

3. Sistemes òptics i formació d'imatges

En els apartats anteriors hem après els principis fonamentals de l'òptica geomètrica. Ja sabem que es tracta d'una aproximació en què no ens preocupem del caràcter ondulatori de la llum, però que és suficient per a estudiar moltes situacions habituals en què participa la llum.

Ara, doncs, equipats amb els coneixements bàsics de l'òptica geomètrica ja ens podem enfrontar a un dels problemes més habituals: com podem formar imatges d'objectes amb diverses superfícies que reflecteixen i refracten la llum. Però, per què ens pot interessar formar imatges d'objectes? A banda del fet que els nostres ulls fan precisament això, formar una imatge dels objectes sobre la superfície de la retina, formar imatges ens pot permetre registrar-les per a poder-les veure posteriorment, analitzar-les, veure-les més ampliades, amb més detall, etc. Segurament tots hem utilitzat alguna vegada una lupa, una càmera fotogràfica o un projector, i segur que tots ens mirem al mirall cada matí; tot això són dispositius que formen imatges, són el que en diem sistemes òptics formadors d'imatges.

Aquest apartat és el més llarg i dens d'aquest mòdul, però no us espanteu: no hi ha cap càlcul que requereixi un tractament matemàtic complex. Amb les aproximacions que considerarem, tot queda a un nivell matemàtic bàsic. D'altra banda, hi apareixen pocs conceptes nous, ja que la part conceptualment més intensa ja l'hem fet en l'apartat 2. Bàsicament es tracta d'aplicar el que ja sabem a diverses situacions: estudiarem com descriure sistemes òptics simples i quines simplificacions es poden fer per a alleugerir els càlculs necessaris. També estudiarem alguns defectes que poden presentar els sistemes òptics.

3.1. Els sistemes òptics

El nostre punt de partida és un **objecte** del món real, del qual volem obtenir una **imatge**, i un **sistema òptic** amb el qual volem obtenir aquesta imatge. Si bé saber què és un objecte del món real no planteja problemes, potser sí que cal definir amb més precisió què s'entén per imatge i què és un sistema òptic.

Un **sistema òptic** és qualsevol conjunt de dioptrès que separen medis d'índex de refracció diferents.

Recordeu que un dioptrè és una superfície que separa dos medis que tenen índexs de refracció diferents.

Aquesta definició de sistema òptic és molt general, ja que un tros de vidre també es pot considerar un sistema òptic. Però ara no ens interessarà qualse-

vol tipus de sistema òptic, sinó només aquells que siguin capaços de formar imatges d'objectes. En general, els sistemes òptics estan constituïts per dos tipus d'elements:

- Elements reflectors: es tracta principalment de **miralls**.
- Elements refractors: es tracta principalment de **lents**.

En funció dels elements que utilitza, un sistema òptic es pot classificar de la manera següent:

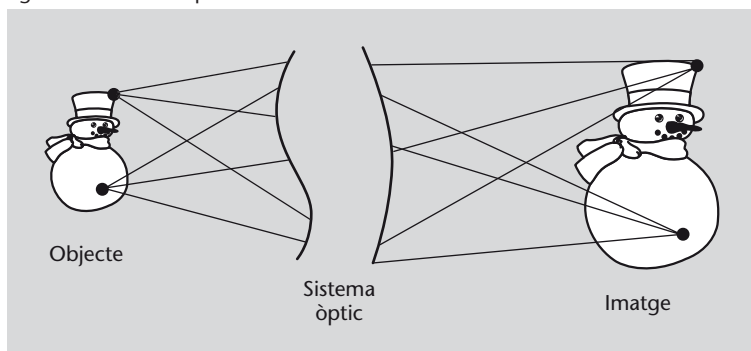
- **Sistema diòptric:** només utilitza lents.
- **Sistema catòptric:** només utilitza miralls.
- **Sistema catadiòptric:** utilitza miralls i lents.

3.1.1. Concepte d'imatge

Passem ara a definir què és una imatge. El concepte d'*imatge* ens pot resultar, *a priori*, evident i familiar, però definir-lo amb precisió (que és el que cal per a poder avançar) és una mica més delicat.

De cada punt d'un objecte surten rajos de llum en totes direccions; alguns d'aquests passaran pel sistema òptic i seran desviats d'alguna forma determinada. Si tots els rajos de llum que surten d'un punt de l'objecte, després de passar pel sistema òptic, convergeixen també en un punt, i això passa per a tots i cada un dels punts de l'objecte, direm que s'ha format una imatge. Això ho podeu veure en la figura 14: hi hem representat molt esquemàticament un sistema òptic qualsevol que, de l'objecte, crea una imatge; fixeu-vos que de cada punt de l'objecte surten rajos de llum que entren al sistema òptic i, després de travessar-lo, tots els rajos procedents d'un punt s'acaben trobant també en un punt.

Figura 14. Sistema òptic



Reflexió i refracció perfectes

No existeix cap element que sigui totalment reflector o totalment refractor. Sempre hi ha una part de l'energia que es reflecteix i una part que es refracta (o s'absorbeix, si el segon medi no permet la propagació de la llum). Tot i així, per simplicitat, en molts casos considerarem que els elements són reflectors al 100% o refractors al 100%.

Figura 14

Un sistema òptic que, d'un objecte, crea una imatge. Fixeu-vos com de cada punt de l'objecte surten rajos de llum que entren al sistema òptic i, després de travessar-lo, tots els rajos procedents d'un punt s'acaben trobant també en un punt.

Però no només es considera imatge això que acabem de dir. En alguns casos, després de passar pel sistema òptic, els rajos no convergeixen cap a un conjunt de punts per a formar una imatge com la que acabem de definir, sinó que divergeixen com si procedissin d'un conjunt de punts determinat. En aquest

cas també direm que s'ha format una imatge, tot i que d'un tipus diferent de l'anterior. En el cas anterior parlem d'imatges reals, mentre que en aquest cas parlem d'imatges virtuals. Aquest segon cas el teniu representat esquemàticament en la figura 15: igual que en la figura 14, dels punts de l'objecte surten rajos de llum que travessen el sistema òptic, però ara aquests rajos no es troben en cap punt (de fet, cada vegada se separen més); en canvi, sí que es troben les prolongacions d'aquests rajos (indicades com a ratlles discontinúes), que formen una imatge virtual.

Figura 15. Sistema òptic

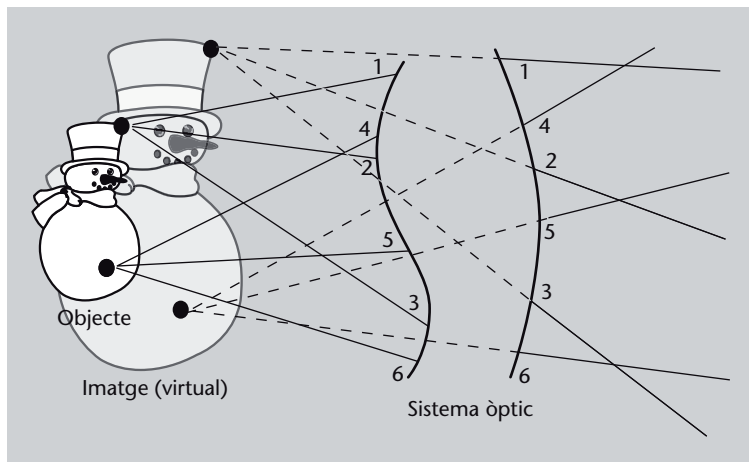


Figura 15

Un sistema òptic que forma imatges virtuals. Dels punts de l'objecte surten rajos de llum que travessen el sistema òptic, però ara aquests rajos no es troben en cap punt (de fet, cada vegada se separen més); en canvi, sí que es troben les prolongacions d'aquests rajos, que formen una imatge virtual. Hem numerat els rajos per a ajudar a seguir quin raig que entra en el sistema correspon al raig que en surt. Les prolongacions dels rajos que surten les hem dibuixat puntejades, ja que no són rajos reals de llum, sinó solament les seves prolongacions.

Una **imatge real** és el conjunt de totes les interseccions dels rajos de llum procedents de cada punt d'un objecte, després de passar per un sistema òptic.

Una **imatge virtual** és el conjunt de totes les interseccions de les prolongacions dels rajos de llum procedents de cada punt d'un objecte, després de passar per un sistema òptic.

Les imatges reals es poden observar fàcilment posant una pantalla en el punt de convergència dels rajos de llum: n'hi ha prou amb posar un full de paper per a veure la imatge real creada per un sistema òptic. Les imatges virtuals, en canvi, no es poden projectar, ja que no hi ha cap lloc on convergeixin rajos de llum. L'única forma de veure una imatge virtual és mitjançant un altre sistema òptic, que consideri aquesta imatge virtual com a objecte i en produeixi una altra, ara ja sí, real.

Vol dir això que si tenim un sistema òptic que ens dona imatges virtuals sempre haurem de disposar d'un segon sistema òptic per a convertir aquestes imatges virtuals en reals? Bé, no necessàriament; heu de pensar que tots nosaltres duem a sobre un sistema òptic incorporat: els nostres ulls! I aquests ulls formen sempre imatges reals que es projecten sobre la retina. De fet, quan



Estudiarem amb detall la lupa, juntament amb altres sistemes òptics, en el subapartat 3.4. També estudiarem una mica com funciona l'ull humà en el subapartat 4.2. d'aquest mòdul.

utilitzem una simple lupa per a mirar ampliat algun detall, la imatge que produeix la lupa és virtual, però els nostres ulls fan el paper de segon sistema òptic i converteixen aquesta imatge virtual en una imatge real sobre la retina.

Així doncs, quin és el nostre objectiu a partir d'ara? El problema que ens plantejem és determinar com és la imatge que forma un sistema òptic d'algun objecte que ens interessa. En altres paraules, voldrem saber on van a parar els rajos de llum que surten de cada punt de l'objecte i travessen el sistema òptic. Ara ja no descriurem només qualitativament com es pot formar una imatge, sinó que en farem un tractament quantitatiu, matemàtic, de manera que puguem determinar tot de característiques de la imatge formada a partir de les característiques de l'objecte i del sistema òptic.

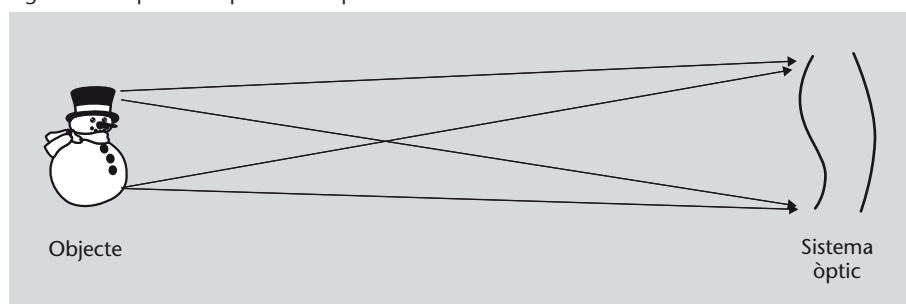
3.2. L'aproximació paraxial

En general, el tractament matemàtic de la formació d'imatges per part d'un sistema òptic pot arribar a ser terriblement complex. Per això, en molts casos s'utilitza una aproximació, que rep el nom d'**aproximació paraxial**, **aproximació gaussiana** o **aproximació de primer ordre** i que permet simplificar el tractament matemàtic dels problemes.

L'**aproximació paraxial** consisteix a suposar que tots els rajos de llum que penetren en un sistema òptic, procedents d'un objecte, ho fan amb angles petits respecte a la línia perpendicular al sistema òptic. D'aquesta manera són vàlides les aproximacions $\sin \theta \approx \theta$ i $\cos \theta \approx 1$. Aquesta condició equival a suposar que objecte i imatge es troben, tots dos, lluny del sistema òptic.

En la figura 16 podeu veure representada esquemàticament la idea de l'aproximació paraxial: fixeu-vos que tots els rajos de llum procedents de l'objecte entren al sistema òptic formant angles petits, prou petits perquè siguin vàlides les aproximacions que acabem d'indicar.

Figura 16. Esquema d'aproximació paraxial



Aproximació paraxial

A vegades també es considera paraxial l'aproximació de segon ordre, en què el cosinus s'aproxima per $1 - \theta^2/2$, però per a nosaltres *paraxial* només serà l'aproximació que acabem d'explicar.

Figura 16

Representació esquemàtica simplificada de l'aproximació paraxial. Tots els rajos de llum procedents de l'objecte entren al sistema òptic formant angles petits respecte al seu eix. En altres paraules, l'objecte és molt lluny del sistema òptic (i la imatge produïda també, tot i que no l'hem representada en aquest esquema).

Un resultat important (que no demostrarem pas aquí) és que en l'aproximació de l'òptica paraxial les imatges són sempre perfectes, condició que en òptica es coneix com a **estigmatisme**. Però què vol dir exactament que una imatge sigui perfecta?

En òptica geomètrica una imatge és perfecta si cada punt de l'objecte correspon a un únic punt en la imatge, és a dir, que un punt de l'objecte no apareix en la imatge com dos punts o com un conjunt de punts (que seria una taca borrosa), etc., sinó que hi apareix també con un punt. Aquesta situació s'anomena **estigmatisme**.

És molt important no confondre l'*estigmatisme* amb l'*astigmatisme*. Aquest darrer és un tipus de defecte dels sistemes òptics (i, en particular, també de l'ull humà) que explicarem quan parlem d'aberracions, en el subapartat 3.5. d'aquest mòdul.

Visió en una situació paraxial

Podeu comprovar vosaltres mateixos que, en una situació paraxial, les imatges es veuen molt millor. Si sou miops o hipermetrops, traieu-vos les ulleres i mireu algun objecte que vegeu borrós (unes lletres aniran molt bé). Ara mireu el mateix objecte a través d'un forat molt petit (el podeu fer amb la mà, simplement). El veieu millor i més nítid, oi? I sense ulleres! El que passa és que heu limitat els rajos de llum procedents de l'objecte que entren al vostre ull a només els que es troben en una zona en què és força vàlida l'aproximació paraxial, de manera que la imatge aconseguida és força millor.

3.3. Els elements cardinals d'un sistema òptic

Quan es treballa en òptica geomètrica és habitual definir un conjunt de punts i plans que resulten molt útils per a l'estudi dels sistemes òptics. Conjuntament s'anomenen **elements cardinals** i els hem representat en la figura 17, on mostrem un sistema òptic qualsevol. Per a no embolicar el dibuix amb massa línies, l'hem separat en dues parts: una per als elements que es troben davant del sistema i l'altra per als que es troben darrere. Els elements cardinals són els següents:

- **L'eix òptic.** És la línia imaginària que passa pels centres de curvatura de cada un dels dioptrics que formen el sistema. Si l'eix òptic coincideix amb l'eix de simetria del sistema, el sistema s'anomena **sistema centrat**. Hi ha molts sistemes òptics que no són centrats, però nosaltres només n'estudiarem de centrats. En la figura 17 l'eix òptic és la línia horitzontal puntejada.
- Els **punts focals**. De punts focals o focus n'hi ha dos, el punt focal objecte i el punt focal imatge.
 - El **punt focal objecte** o **focus objecte** és un punt, situat sobre l'eix òptic, que té la propietat que tots els rajos procedents d'ell que penetren en el sistema òptic, surten paral·lels a l'eix òptic.
 - El **punt focal imatge** o **focus imatge** és un punt, situat sobre l'eix òptic, que té la propietat que tots els rajos de llum que penetren en el sistema

Recordeu que un dioptré és qualsevol superfície que separa medis d'índex de refracció diferents.

òptic paral·lels a l'eix òptic, en surten de manera que convergeixen sobre el punt focal imatge.

En la figura 17 els punts focals són els punts F i F', situats sobre l'eix òptic.

Figura 17. Elements cardinals

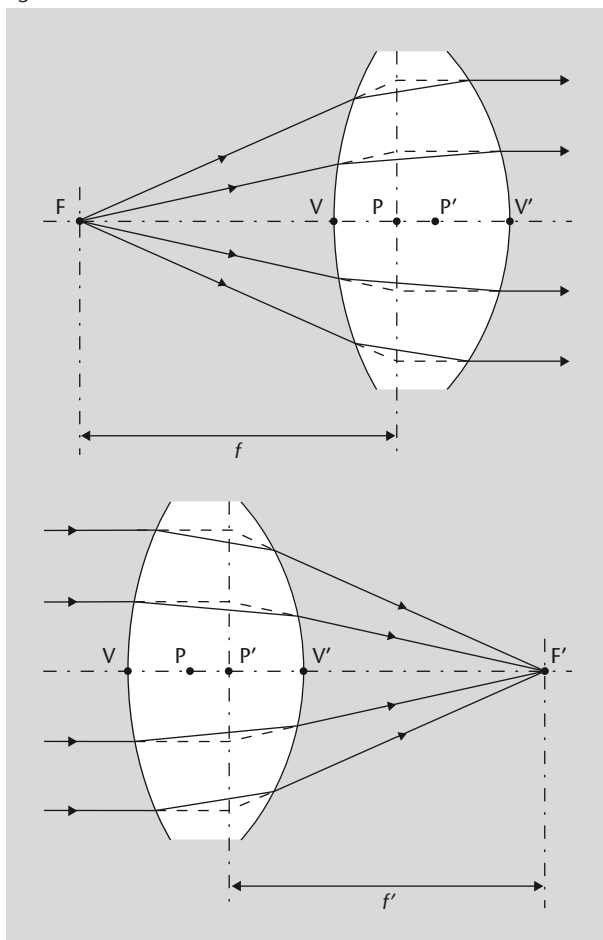


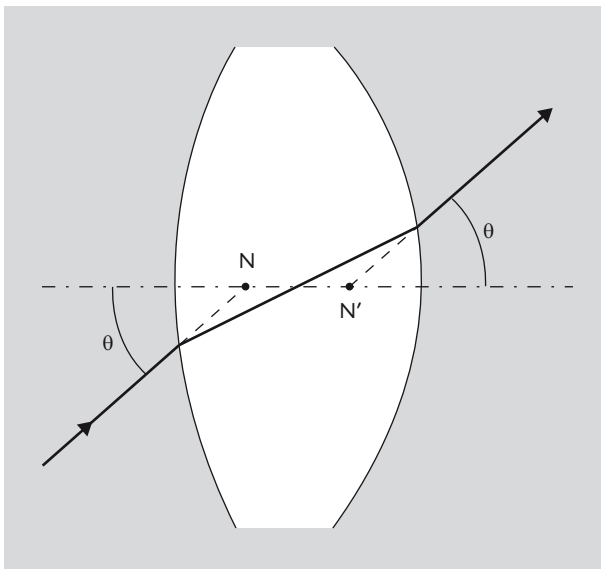
Figura 17

Els elements cardinals d'un sistema òptic (els elements que es troben davant del sistema estan representats a la part de dalt de la figura, els que es troben darrere a la part de baix). L'eix òptic és la línia puntejada horitzontal. Els punts focals són els punts F (punt focal objecte) i F' (punt focal imatge), situats sobre l'eix òptic. Els plans focals són els plans verticals que passen pels punts F i F'. Els plans principals són els plans verticals que passen pels punts P i P'.

- Els **plans focals**. Són els plans perpendiculars a l'eix òptic i que passen pels punts focals. Qualsevol conjunt de rajos paral·lels que arribin al sistema òptic convergiran sobre un punt del pla focal. En la figura 17 són els plans verticals que passen pels punts F i F'.
- Els **plans principals**. De plans principals també n'hi ha dos: el pla principal primari i el secundari. Quan prolonguem els rajos procedents del focus objecte i els rajos paral·lels que surten del sistema òptic, aquestes prolongacions es tallen en un conjunt de punts que formen una superfície. Aquesta superfície, que en aproximació paraxial serà simplement un pla, és el **pla principal primari**. Si fem el mateix amb els rajos paral·lels que entren al sistema òptic i els que convergeixen al focus imatge obtenim el **pla principal secundari**. En la figura 17 són els plans verticals que passen pels punts P i P'.

- Els **punts nodals**. Són dos punts sobre l'eix òptic que tenen la propietat que un raig de llum que es dirigeix cap a un d'ells, després de travessar el sistema òptic, surt com si procedís de l'altre. Aquests punts els hem representat en la figura 18, per a no carregar tant la figura 17; són els punts N i N'.

Figura 18. Punts nodals d'un sistema òptic

**Figura 18**

Els punts nodals d'un sistema òptic són dos punts sobre l'eix òptic que tenen la propietat que un raig de llum que es dirigeix cap a un d'ells, després de travessar el sistema òptic, surt com si procedís de l'altre.

Les definicions de plans principals i punts nodals poden semblar una mica enrevessades, però són molt útils en l'estudi de sistemes òptics complexos, com les lents gruixudes o sistemes formats per moltes lents. De totes maneres, ara no cal que us preocupeu gaire, ja que en els subapartats que segueixen, en què tractarem sistemes òptics simples, només ens interessarà utilitzar els punts focals i els plans focals.

3.3.1. Distància focal i potència òptica

Els dos focus o punts focals són especialment importants, ja que a partir d'ells es defineix una propietat característica molt important de qualsevol sistema òptic: la **distància focal**, que simbolitzem amb f .

La distància focal és la distància entre els plans principals i els punts focals, de manera que la **distància focal objecte** és la distància entre el focus objecte i el pla principal primari. La **distància focal imatge** és la distància entre el focus imatge i el pla principal secundari. En la figura 17 podeu veure les dues distàncies focals, simbolitzades f i f' .

No confongueu la f quan fa referència a la distància focal i la f quan fa referència a la freqüència, com ens havia aparegut en els mòduls anteriors.

En la discussió que farem a continuació no ens preocuparem dels plans principals. En aquest cas, la distància focal es defineix simplement com la distància de cada un dels focus al centre del sistema òptic. A més a més, en el cas de lents primes, les dues distàncies focals, la imatge i l'objecte, són iguals i parlarem simplement de *distància focal* sense especificar quina és.

A partir de la distància focal es defineix la **potència òptica**, P , que és simplement la inversa de la distància focal:

$$P = \frac{1}{f} \quad (26)$$

Atès que la distància focal és una longitud l , per tant, es mesura en metres en el Sistema Internacional d'unitats, la potència òptica es mesura en metres elevat a menys u, m^{-1} , que com a unitat de mesura de potència òptica reben el nom de **diòptries** i se simbolitzen amb la lletra D o també amb les lletres dpt . Cal fer notar que la diòptria no és una unitat de mesura acceptada pel Sistema Internacional, que recomana utilitzar simplement el m^{-1} .

La potència òptica d'un sistema òptic és una mesura de la seva capacitat per a fer convergir els rajos paral·lels de llum que li arriben. Com més gran sigui la potència d'un sistema, més petita serà la seva distància focal l , per tant, més a prop focalitzarà els rajos de llum. Per exemple, un sistema òptic, com ara una lent, de 4 diòptries té una distància focal de $1/4 = 0,25$ m.

3.4. Sistemes òptics simples

Amb tots els elements i definicions que heu vist en el subapartat anterior ja podem passar a estudiar els sistemes òptics més simples per a la formació d'imatges. Començarem pels sistemes que formen imatges per refracció i amb l'element més simple possible: un únic dioptr, una superfície de separació entre dos medis. Una vegada vist això ja passarem a sistemes òptics més habituals i també més útils: dos dioptr que limiten un medi determinat, és a dir, les lents. En concret, estudiarem el tipus més simple de lents, les lents primes, en què considerem que el seu gruix és irrellevant, i comentarem alguna cosa sobre les lents gruixudes i els conjunts de lents. Finalment, passarem a estudiar els sistemes òptics que formen imatges per reflexió: els miralls.

3.4.1. Dioptr

Comencem, doncs, amb el sistema més simple: un dioptr, que serà el nostre sistema òptic. A una banda del dioptr tindrem un medi i , a l'altra banda, un

Diòptries

Quan ens graduen la vista i ens diuen, per exemple, que tenim 3 diòptries en un ull, no és que el nostre ull tingui 3 diòptries; en realitat ens estan dient que cal una lent amb una potència de 3 diòptries per a corregir el nostre defecte de visió. Les ulleres que durem, doncs, tindran una lent de 3 diòptries per a aquell ull.

altre medi (per exemple, aire a una banda i vidre a l'altra). Per a començar l'estudi partim de dos fets que ja heu estudiat:

- 1) Quan un raig de llum arriba a un dioptre es refracta segons la llei de Snell (vegeu el subapartat 2.3.).
- 2) Diem que es forma una imatge quan tots els rajos de llum que surten d'un punt d'un objecte, després de passar per un sistema òptic, convergeixen en un punt. I això per a tots i cada un dels punts de l'objecte (vegeu l'apartat 3).

Figura 19. Diversos dioptres

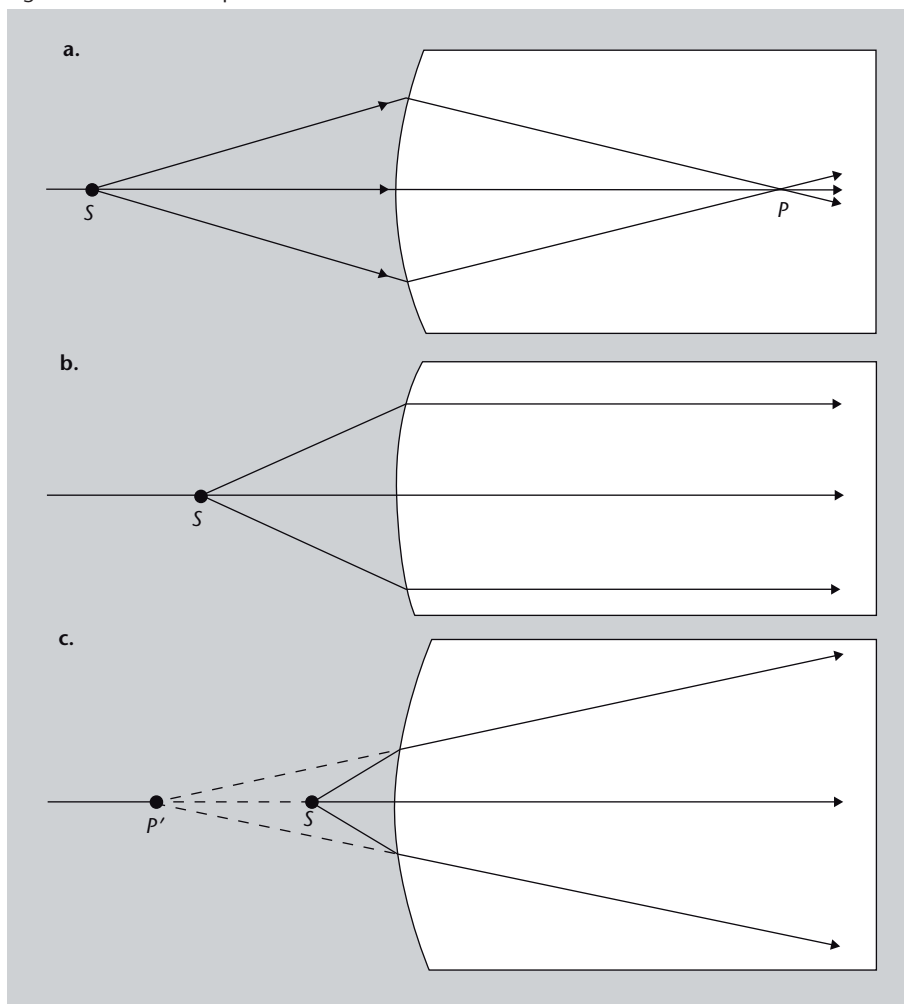


Figura 19

Tres dioptres diferents:

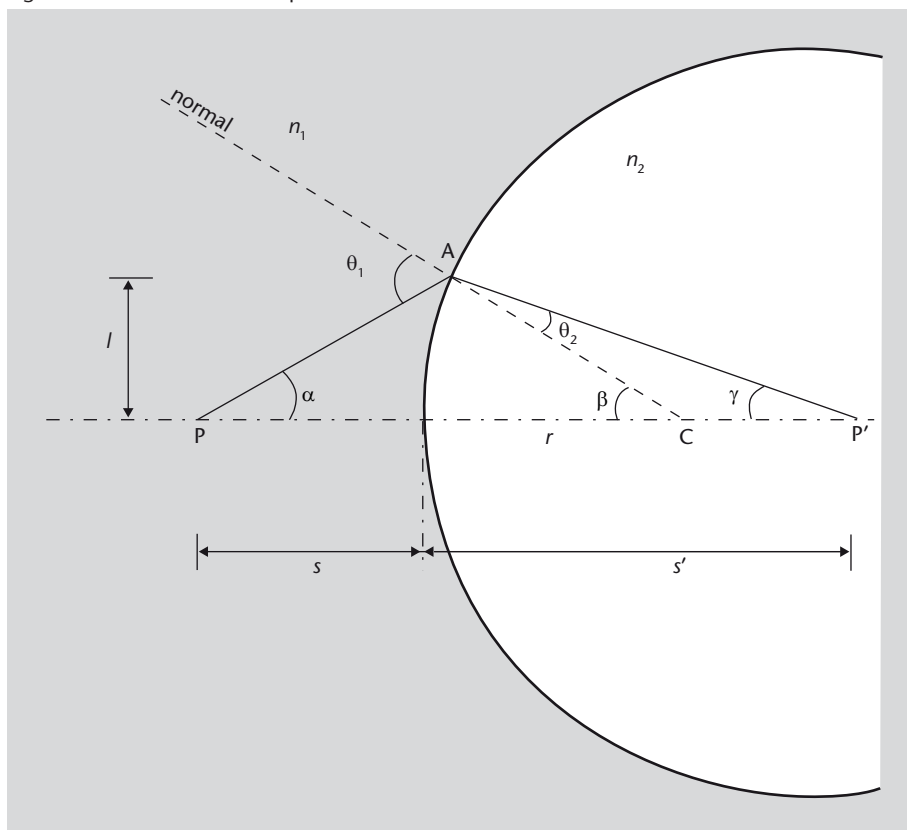
- a. El dioptre fa que els rajos que surten del punt S convergeixin en un altre punt, P . El dioptre ens donarà imatges reals.
- b. El dioptre fa que tots els rajos que surten de S acabin paral·lels. La imatge es forma a l'infinit.
- c. El dioptre fa que els rajos que surten de S divergeixin, però llavors convergeixen les seves prolongacions, que es troben al punt P' . El dioptre ens donarà imatges virtuals.

Segons això podem veure que qualsevol dioptre ens permetrà formar una imatge, però només alguns dioptres de forma determinada ens permetran obtenir imatges reals, a l'altra banda del dioptre. En la figura 19 podeu veure diversos dioptres; de tots aquests dioptres només un (figura 19a) permet que els rajos que surten del punt S convergeixin en un altre punt, P . En els altres dos casos, això no és així: en el cas de la figura 19b tots els rajos que surten de S resulten desviats de manera que queden tots paral·lels, mentre que en el cas de la figura 19c els rajos que surten de S no convergeixen en cap punt, però sí que ho fan les seves prolongacions, que es troben al punt P' ; en aquest darrer cas tenim un dioptre que ens donarà imatges virtuals.

Formació d'imatges per un únic dioptre

Ara, doncs, disposem-nos a determinar la imatge generada per un dioptre. Considerem un dioptre esfèric convex com el que es mostra en la figura 20. Suposem que el material a l'esquerra del dioptre, on és l'objecte, té un índex de refracció n_1 , i el material a la dreta del dioptre té un índex n_2 i que $n_2 > n_1$.

Figura 20. Refracció en un dioptre



Concavitat i convexitat

Quan es tracta de dioptres i de lents es parla de *convexitat* quan el centre del dioptre o de la lent sobresurt respecte a la resta, i de *concavitat* quan són els extrems els que sobresurten respecte al centre.

Figura 20

Refracció en un dioptre esfèric. El medi a l'esquerra del dioptre, on és l'objecte, té un índex de refracció n_1 , i el medi a la dreta del dioptre té un índex n_2 , amb $n_2 > n_1$. S'hi representa un raig que surt del punt P situat sobre l'eix. El raig es refracta al punt A del dioptre i arriba al punt P', on es forma la imatge. C és el centre de curvatura del dioptre, que ens determina la normal a la superfície en el punt A. Els angles d'incidència i de refracció són θ_1 i θ_2 , respectivament.

Aplicuem la llei de Snell (equació 5) per a un raig procedent d'un punt P situat sobre l'eix, tal com es veu en la figura 20. Els angles θ_1 i θ_2 estan relacionats, per tant, segons

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \tag{27}$$

Com ja hem dit, utilitzem l'aproximació paraxial i llavors podem aproximar $\sin \theta \approx \theta$, de manera que l'equació anterior es redueix a

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2 \tag{28}$$

Ara, del triangle ACP' tenim que:

$$\beta = \theta_2 + \gamma = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 + \gamma \tag{29}$$

Recordeu que els angles d'un triangle sumen 180° , és a dir, π radians. Per tant, en la figura 20 es pot veure que $\gamma + \theta_2 + (\pi - \beta) = \pi$.

Però d'altra banda, del triangle ACP tenim també que $\alpha + \beta + (\pi - \theta_1) = \pi$, per tant:

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad (30)$$

Ara substituïm θ_1 a l'equació 29 i ens queda:

$$n_1\alpha + n_1\beta + n_2\gamma = n_2\beta \quad (31)$$

que ho podem simplificar reunint termes. Aleshores obtenim com a resultat:

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta \quad (32)$$

Ara ens interessaria expressar això en funció de les distàncies s i s' , i no pas en funció dels angles α , β i γ com està ara, ja que és molt més fàcil mesurar distàncies que no pas angles. De la gràfica, jugant una mica amb els angles α , β i γ i recordant sempre que estem en aproximació paraxial, podem obtenir:

$$\tan \alpha = \frac{l}{s} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx \frac{l}{s} \quad (33)$$

$$\tan \beta = \frac{l}{r} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx \frac{l}{r} \quad (34)$$

$$\tan \gamma = \frac{l}{s'} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx \frac{l}{s'} \quad (35)$$

Recordeu que en aproximació paraxial aproximem $\sin x \approx x$ i $\tan x \approx x$.


Ara substituïm aquestes expressions en l'equació 32 i arribem finalment a l'expressió:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (36)$$

Fixeu-vos que aquesta equació ens permet trobar la distància s' a què es formarà la imatge d'un objecte situat a una distància s del dioptrè, el radi de curvatura del qual és r .

En aquest punt cal tenir ben clar quan es consideren positives o negatives aquestes distàncies:

- La distància objecte s és positiva si està per davant del dioptrè i negativa si està per darrere.
- La distància imatge s' és positiva si està darrera del dioptrè i negativa si està per davant.
- La distància r és positiva si el centre de curvatura del radi es troba darrera del dioptrè i negativa si es troba al davant.

Tingueu present, però, que aquest és un conveni que utilitzem en aquest mòdul i que també s'utilitza en moltes altres obres, però no és universal i us podeu trobar amb treballs en què s'utilitzen altres convenis de signes. Aneu amb compte! 

Augment

Amb el que acabem de fer ja podem determinar el punt en què un dioptré formarà una imatge d'un objecte. Ara bé, aquesta imatge formada, tindrà la mateixa grandària que l'objecte? o potser serà més petita? o més gran? En altres paraules, la imatge serà igual, augmentada o reduïda? Aquesta és la pregunta que volem respondre a continuació.

L'**augment** d'un sistema òptic és la relació entre les dimensions de la imatge i de l'objecte transversals a l'eix òptic.

Així, l'augment, que simbolitzem m , és la relació:

$$m = \frac{y'}{y} \quad (37)$$

on y és la longitud de l'objecte perpendicularment a l'eix òptic i y' és la longitud de la imatge, també perpendicularment a l'eix òptic. Aquí també cal anar amb compte amb els signes, de manera que establim la convenció que:

- y o y' són positives quan estan per sobre de l'eix òptic.
- y o y' són negatives quan estan per sota de l'eix òptic.

Fixeu-vos que això pot donar lloc a que l'augment, m , sigui positiu o negatiu. Però què significa que un augment sigui negatiu? Doncs simplement que la imatge està invertida respecte a l'objecte, és a dir, es veu "a l'inrevés".

Aquesta expressió que acabem de donar, l'equació 37, és simplement la definició d'augment, però en la majoria de casos ens interessarà trobar una expressió a partir de característiques del dioptré i, així, poder determinar la grandària de la imatge en funció de la grandària de l'objecte.

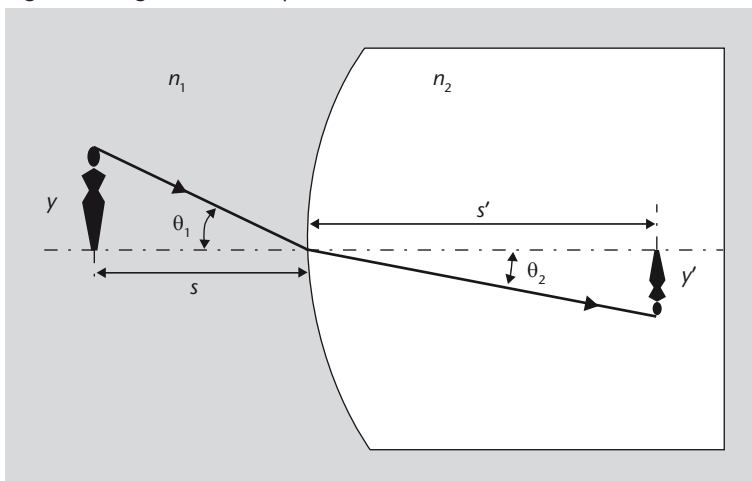
Per a fer-ho, observem la figura 21. Un dioptré forma una imatge de grandària y' de l'objecte de grandària y . La imatge es forma a una distància s' i l'objecte és a una distància s . Es mostra un raig de llum des d'un punt de l'objecte fins al punt corresponent de la seva imatge; aquest angle forma un angle d'incidència θ_1 i un angle de refracció θ_2 amb el dioptré. Tal com acabem de definir, el seu augment és l'equació 37:

$$m = \frac{y'}{y} \quad (38)$$

Augment transversal

Específicament el que hem definit s'anomena *augment transversal*. Es poden definir altres tipus d'augment, però per als propòsits d'aquest mòdul n'hi ha prou amb l'augment transversal que acabem de definir.

Figura 21. Augment d'un dioptrre

**Figura 21**

Esquema per al càlcul de l'augment d'un dioptrre. Un dioptrre forma una imatge de grandària y' de l'objecte de grandària y . La imatge es forma a una distància s' i l'objecte és a una distància s . Es mostra un raig de llum des d'un punt de l'objecte fins al punt corresponent de la seva imatge; aquest angle forma un angle d'incidència θ_1 i un angle de refracció θ_2 amb el dioptrre.

Però les dimensions y i y' es poden expressar en funció de les distàncies s i s' i els angles θ_1 i θ_2 , ja que:

$$\tan \theta_1 = \frac{y}{s} \quad (39)$$

$$\tan \theta_2 = \frac{-y'}{s'} \quad (40)$$

on y' és negativa d'acord amb la convenció de signes que hem establert. Fixeu-vos que en aquest cas posem el signe "fora" de y' . Així, ens quedaria la tangent positiva. Com que estem en aproximació paraxial, podem fer que $\tan \theta \approx \theta$, de manera que les equacions anteriors ens quedarien:

$$\theta_1 = \frac{y}{s} \quad (41)$$

$$\theta_2 = \frac{-y'}{s'} \quad (42)$$

Ara podem trobar una relació entre θ_1 i θ_2 aplicant la llei de Snell (equació 5):

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (43)$$

que, per a angles petits (un cop més l'aproximació paraxial), novament podem reduir a:

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2 \quad (44)$$

En aquesta expressió substituïm els angles θ_1 i θ_2 per les seves expressions que hem trobat en l'equació 41 i obtenim:

$$n_1 \frac{y}{s} = n_2 \frac{-y'}{s'} \quad (45)$$

Reordenant els termes d'aquesta equació podem arribar a:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} \quad (46)$$

i y'/y és precisament la definició d'augment. Així, doncs, en el cas d'un dioptrè esfèric, l'augment es pot expressar com:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} \quad (47)$$

Exemple. Un peix dins una peixera

Sobre una taula hi ha una peixera. Dins de la peixera, que és esfèrica de radi 15 cm i plena d'aigua d'índex de refracció 1,33, hi ha un peix. Sobre la taula, a 10 cm de la peixera, hi ha un gat. Determineu com és la imatge del gat que veurà el peix, és a dir, determineu la posició i la grandària de la imatge del gat que forma el dioptrè esfèric (la peixera), sense tenir en compte el petit efecte que pugui fer la paret de vidre de la peixera.

Per a solucionar el problema, fixeu-vos que tenim un dioptrè esfèric de radi de curvatura 15 cm que ens separa dos medis d'índex de refracció diferents: un és l'aire i l'altre és l'aigua, i que tenim un objecte situat a 10 cm del dioptrè. És a dir, tenim:

- radi de curvatura del dioptrè: $r = 0,15$ m,
- índex de refracció del primer medi: $n_1 = 1$,
- índex de refracció del segon medi: $n_2 = 1,33$,
- distància de l'objecte al dioptrè: $s = 0,10$ m.

Amb això podem aplicar la fórmula de la formació d'imatges per un dioptrè, l'equació 36:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (48)$$

on sabem totes les variables excepte la distància a la imatge, s' , que és precisament el que volem trobar:

$$\frac{1}{0,10} + \frac{1,33}{s'} = \frac{1,33 - 1}{0,15} \quad (49)$$

Aïllem s' i trobem:

$$s' = -0,17 \text{ m} \quad (50)$$

Fixeu-vos que ens surt una distància negativa, que, segons el conveni de signes establert, vol dir que la imatge es troba per davant del dioptrè i, per tant, és una imatge virtual.

Amb el resultat obtingut també podem calcular l'augment produït pel dioptrè, aplicant l'equació 47:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} \quad (51)$$

Substituïm els valors corresponents i:

$$m = -\frac{1 \cdot (-0,17)}{1,33 \cdot 0,10} = 1,29 \quad (52)$$

És a dir, el dioptre produeix un augment d'1,29, el peix veurà el gat lleugerament més gran del que és en realitat.

Com a exercici us deixem fer el mateix càlcul però per a determinar com el gat veu el peix, suposant que aquest és a 7,5 cm de la paret de la peixera. És a dir, calculeu la posició i la grandària de la imatge del peix que forma el dioptre esfèric. (Solució: $s' = -0,064$ m i $m = 1,14$)

Dioptres no esfèrics i aproximació paraxial

Fixeu-vos que hem utilitzat la suposició que el dioptre és esfèric. Això és molt important, perquè si no és el cas, no es formarà cap imatge (o com a mínim, cap imatge perfecta). Però encara més, recordeu que estem en l'aproximació paraxial (que hem utilitzat clarament en fer les aproximacions d'angles petits en la deducció anterior!). Què passarà, doncs, si no podem fer aquesta aproximació (per exemple, perquè l'objecte és molt a prop del dioptre)? Segueix essent vàlid el resultat que un dioptre esfèric formarà una imatge? La resposta és que no, tot i que no ho demostrarem aquí.

És a dir, quan passem a situacions en què no es pot aplicar l'aproximació paraxial resulta que una superfície esfèrica no genera una imatge perfecta. Ara ens podem preguntar si hi ha alguna superfície que generi imatges perfectes en qualsevol situació, no només en aproximació paraxial. Doncs bé, com a mínim resulta que hi ha una superfície que genera imatges perfectes en qualsevol situació per a objectes que es trobin sobre l'eix òptic; aquesta superfície és l'anomenat òval cartesià o **òval de Descartes**, estudiat àmpliament per René Descartes al segle XVII. La forma d'aquesta superfície la podeu veure en la figura 22.

Evolució dels òrgans de la visió

No ens ha de sorprendre que en l'evolució de moltes espècies s'hagin seleccionat òrgans de la visió amb elements refractors que tenen precisament forma esfèrica o forma d'òval de Descartes, com veurem en el subapartat 4.2., dedicat a la fisiologia de l'ull.

Figura 22. Òval de Descartes

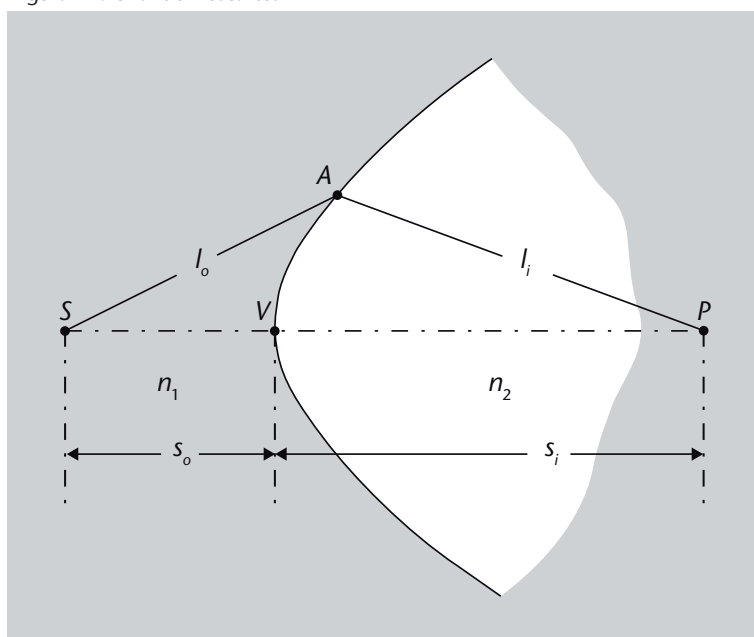


Figura 22

L'òval de Descartes, superfície que genera imatges perfectes d'objectes situats en l'eix òptic en qualsevol situació, no només en aproximació paraxial.

Des d'un punt de vista pràctic, però, els diòptres esfèrics són molt importants. Acabem de dir que en realitat l'òval de Descartes és una superfície millor des del punt de vista òptic, però resulta que polir una superfície de vidre amb aquesta forma és molt difícil i costós. És incomparablement més senzill polir un tros de vidre perquè tingui forma esfèrica. Per això, en general, s'utilitzen habitualment diòptres esfèrics, de fabricació més barata i senzilla, sempre que en les situacions en què s'hagin d'utilitzar sigui vàlida l'aproximació paraxial o no ens preocupi obtenir una qualitat d'imatge que no sigui extraordinàriament bona.

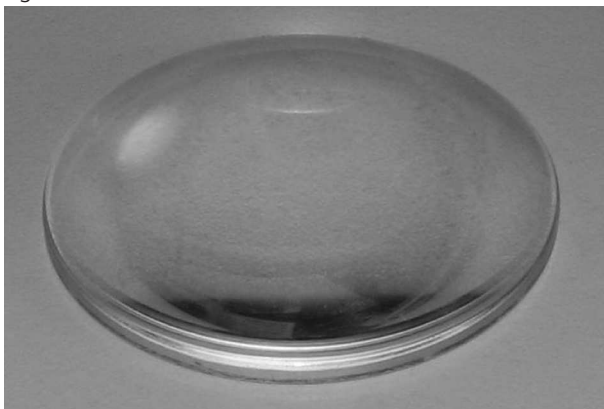
3.4.2. Lents

Acabem de veure que un únic diòptre ja és suficient per a formar una imatge. Ara bé, potser no és gaire pràctic per a les aplicacions quotidianes. Ens seria molt més útil disposar d'un element que generés les imatges, reals o virtuals, al mateix medi on es troba l'objecte, que normalment serà l'aire, i que ens el poguéssim endur fàcilment allà on el volem utilitzar. Per això necessitem dos diòptres que ens delimitin aquest element. Això és precisament el què s'entén per *lent*.

Una **lent** és un sistema òptic format per dos o més diòptres, dels quals com a mínim un és corbat, i que delimiten un medi determinat.

Podeu veure un exemple real d'una lent en la figura 23. En el cas de la figura es tracta d'una lent esfèrica, és a dir, una lent en què els diòptres que la delimiten són esfèrics, tenen una superfície esfèrica. En la figura 24 podeu veure precisament un esquema detallat de com és una lent d'aquest tipus: els dos diòptres que la delimiten tenen radis R_1 i R_2 , amb centres als punts C_1 i C_2 , i la lent té un índex de refracció n_1 .

Figura 23. Lent de vidre

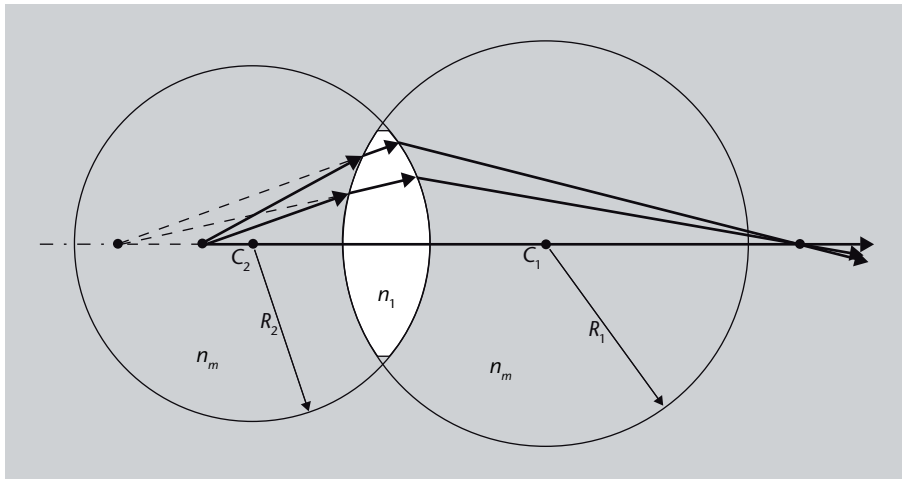


Font: Wikimedia Commons

Figura 23

Lent de vidre delimitada per dues superfícies esfèriques. En la figura 24 en podeu veure un esquema.

Figura 24. Esquema d'una lent esfèrica



Font: Wikimedia Commons

Figura 24

Les superfícies que la delimiten, és a dir, els dos dioptres que la delimiten, són arcs de circumferència de radi R_1 i R_2 . Els dos dioptres que la delimiten tenen radi R_1 i R_2 , amb centres als punts C_1 i C_2 . La lent té un índex de refracció n_1 i es troba dins d'un medi d'índex de refracció n_m .

Tipus de lents

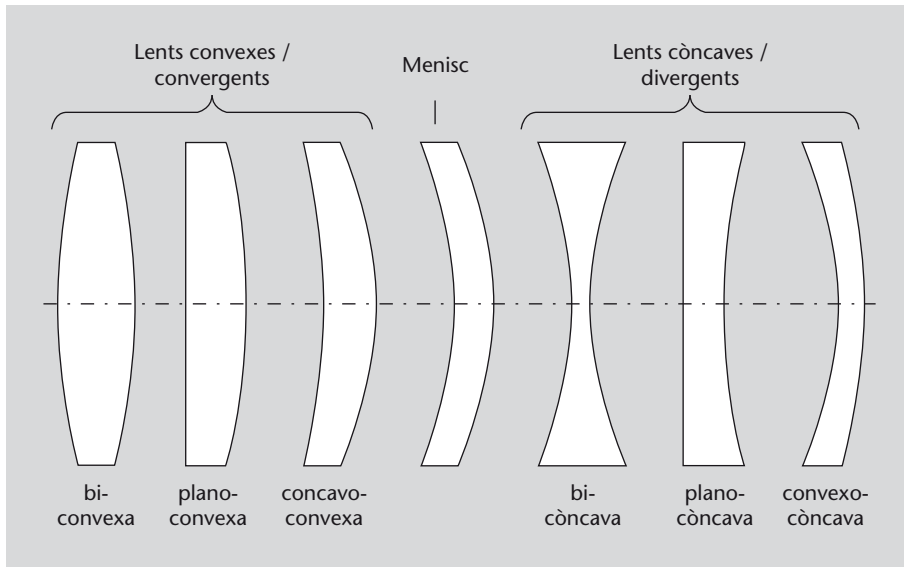
Hi ha molts tipus de lents, i es poden classificar en funció de diversos paràmetres, com ara:

- En funció del nombre de dioptres:
 - **Lents simples:** estan formades per un únic element i, per tant, delimitades per dos dioptres.
 - **Lents compostes:** estan formades per diversos elements, a vegades amb materials d'índexs de refracció diferents, i inclouen diversos dioptres.
- En funció de la forma:
 - **Lents convexes:** són més gruixudes al centre que a les vores i tendeixen a fer convergir els rajos de llum. També s'anomenen **lents positives** o **lents convergents**. En la figura 25 podeu veure'n uns exemples. El cas particular de lent còncavoconvexa o convexocòncava s'anomena **menisc**.
 - **Lents còncaves:** són més gruixudes als extrems que al centre i tendeixen a fer divergir els rajos de llum. També s'anomenen **lents negatives** o **lents divergents**. En la figura 25 podeu veure'n uns exemples. El cas particular de lent còncavoconvexa o convexocòncava també rep el nom de **menisc**.
- En funció del gruix:
 - **Lents primes:** el gruix de la lent és negligible comparat amb les distàncies del problema a tractar. El concepte de *lent prima* és una aproximació útil per als càlculs de sistemes òptics. Quan s'utilitzen lents primes sovint és útil utilitzar els símbols que es mostren en la figura 26 per a indicar lents convergents o divergents.

Magnituds negligibles

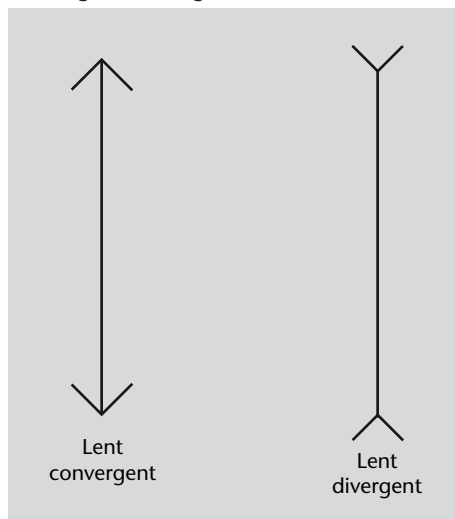
En física, quan diem que una magnitud és negligible respecte a una altra, volem dir que el seu valor és molt més petit. Aquesta comparació només la podem fer si les dues magnituds tenen les mateixes unitats.

Figura 25. Diversos tipus de lents en funció de la seva forma



- **Lents gruixudes:** el gruix de la lent no és menyspreable. Qualsevol lent real és una lent gruixuda, però sovint es poden tractar com si fossin lents primes quan les condicions del problema ho permeten.

Figura 26. Símbols utilitzats per a lents primes convergents i divergents



Una vegada ja hem definit què és una lent cal que fem el mateix que hem fet per a un dioptrè: determinar com és la imatge que forma d'un objecte. En aquest cas ens limitarem a fer l'estudi per al cas de lents primes, que és més senzill però prou il·lustratiu i útil en molts casos. El cas de lents gruixudes només el comentarem breument.

Formació d'imatges per una lent prima

Considerem una lent prima feta d'un material d'índex de refracció n envoltada d'aire (i per tant, d'índex de refracció aproximadament igual a 1), que podeu veure en la figura 27. Suposem que r_1 i r_2 són els radis de curvatura de les dues superfícies de la lent. Intentem trobar ara quina mena d'imatge forma aquesta lent d'un objecte qualsevol.

Figura 27. Esquema per a l'obtenció d'una imatge produïda per una lent prima

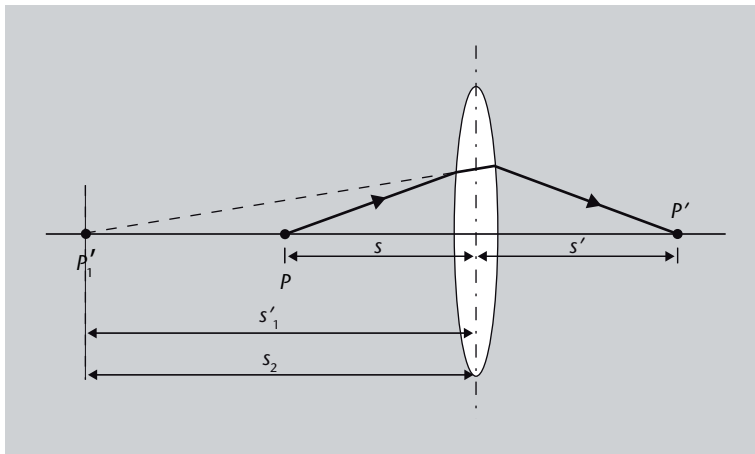


Figura 27

Un objecte P a una distància s de la lent. La primera superfície de la lent produeix una imatge P'_1 que es pot determinar mitjançant l'equació 36. Aquesta imatge no s'arriba a formar perquè la segona superfície refracta novament la llum per a donar una imatge final, P' .

Suposem que hi ha un objecte P a una distància s de la lent (recordeu que com que fem l'aproximació de lents primes, el gruix de la lent és irrellevant i, per tant, la distància a la primera superfície de la lent és igual que la distància al centre de la lent). La primera superfície de la lent produeix una imatge P'_1 que es pot determinar mitjançant l'equació 36:

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s'_1} = \frac{n-1}{r_1} \tag{53}$$

Ara bé, aquesta imatge no s'arriba a formar perquè la segona superfície refracta novament la llum per a donar una imatge final, P' . Com podem determinar la imatge final? Per a fer-ho, considerem que la imatge produïda per la primera refracció es forma (en realitat no s'ha format, però treballem com si ho hagués fet), de manera que serveixi d'objecte per a la segona superfície, del qual la segona superfície en forma una imatge final. Això potser us sembla una mica enrevessat; posem-ho en forma d'esquema perquè quedi més clar el procés:

- 1) Determinem la imatge P'_1 de l'objecte P formada per la primera superfície (aquest pas l'acabem de fer i el resultat és l'equació 53).
- 2) Considerem ara que aquesta imatge P'_1 fa el paper d'objecte per a la segona superfície (aquí caldrà anar amb compte amb les convencions de signes).

3) Determinem la imatge P' d'aquesta imatge P'_1 que fa el paper d'objecte, produïda per la segona superfície (una vegada més utilitzant l'expressió 36).

El punt 1 ja l'hem fet, per tant passem al punt 2. La distància de l'“objecte” a la segona superfície, que simbolitzarem s_2 , és precisament la distància a què es forma la imatge, obtinguda en l'equació 53: s'_1 . En aquest punt, però, cal anar amb compte amb els signes.

Anem a pams: si la imatge formada per la primera superfície es troba davant de la superfície, la distància imatge serà negativa, però un objecte davant d'una superfície té distància objecte positiva, per tant, $s_2 = -s'_1$; de la mateixa manera, si la imatge formada per la primera superfície es troba darrera de la superfície, la distància imatge serà positiva, però un objecte darrere d'una superfície té distància objecte negativa, per tant, novament $s_2 = -s'_1$.

Ara doncs, ja tenim ben caracteritzat el pas 2, i només ens queda determinar la imatge produïda per la segona superfície, el pas 3. Per a això, apliquem altra vegada l'equació 36 ara amb $n_1 = n$, $n_2 = 1$ i $s = -s'_1$:

$$\frac{n}{-s'_1} + \frac{1}{s'} = \frac{1-n}{r_2} \quad (54)$$

El terme $n/-s'_1$ no ens interessa per a res, perquè és la distància a la imatge P'_1 (que recordeu que no es forma) i el podem eliminar aïllant-lo de l'equació 53 i substituint-lo en l'equació 54. D'aquesta manera obtenim l'expressió:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (55)$$

Aquesta equació ens proporciona la distància a què es forma una imatge, s' , a partir de la distància a què està situat l'objecte, s , i de les característiques de la lent prima: el seu índex de refracció, n , i els radis de curvatura de les seves dues superfícies, r_1 i r_2 .

Distància focal d'una lent prima

Recordeu que una característica definitòria d'un sistema òptic és la seva distància focal. La distància focal imatge, f , és la distància a què convergeixen els rajos de llum que arriben a la lent paral·lels a l'eix òptic, és a dir, d'un objecte situat a l'infinit. En l'expressió 55, això equival a trobar la s' per a $s = \infty$:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (56)$$

En aquest cas, doncs, s' serà la distància focal, f .

Infinit matemàtic

Si volem ser rigorosos, dir $s = \infty$ no és gaire correcte matemàticament i, de fet, hauríem de dir $s \rightarrow \infty$, és a dir, que s tendeix a infinit. Però podem obviar aquesta subtilesa per a treballar més còmodament.

Recordeu que per a una lent prima, la distància focal objecte i la distància focal imatge són iguals, és a dir $f = f'$ i, per tant, treballem simplement amb la distància focal genèrica, f .

Així, finalment, tenim:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (57)$$

Aquesta equació és la **fórmula del constructor de lents** per a lents primes, que ens permet saber la distància focal d'una lent prima en funció dels seus radis de curvatura. Amb aquesta expressió, podem substituir el membre de la dreta de l'equació 55 per $1/f$. D'aquesta manera obtindrem:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (58)$$

que és l'equació de la lent prima.



Imatge creada per una lent convergent sobre una paret. Fixeu-vos que la imatge està invertida.

Fixeu-vos que ara podem tractar la lent com un element de distància focal f i oblidar-nos de les dues superfícies refractores; en tindrem prou amb saber aquesta distància focal i la distància a què és un objecte per a determinar on es forma la imatge.

Lents de Fresnel

Fixeu-vos que en l'equació 55 l'única característica de la lent que hi intervé és l'índex de refracció i els radis de curvatura. En l'aproximació de lents primes, que és la que utilitzem, el gruix no hi apareix per a res. Això ens pot fer pensar que tot el gruix intern de la lent és irrellevant. De fet, en el cas de lents molt grosses, la part central pot arribar a ser molt gruixuda i pesant (especialment si és de vidre) i això comporta problemes greus pel que fa a la facilitat d'ús i a la possibilitat que la lent es torci sota el seu propi pes.

La idea de les lents de Fresnel és, precisament, eliminar tot el gruix de la lent que no és estrictament necessari. Per a fer això, es divideix la lent en un conjunt de seccions concèntriques anul·lars, anomenades *zones de Fresnel* que tenen el mateix radi de curvatura que la lent original, però només amb el gruix mínim necessari, com podeu veure en la figura 28. En aquesta imatge podeu veure una lent normal (figura 28a) i una lent de Fresnel equivalent (figura 28b). La lent de Fresnel queda esglaonada cada vegada que eliminem una part del gruix, però com que el radi de curvatura no canvia, les propietats de la lent tampoc no canvien i, en concret, la seva distància focal és exactament la mateixa que en la lent original.

Lents primes i grosses

Que una lent sigui molt grossa no impedeix que es pugui considerar una lent prima. Recordeu que el concepte de lent prima és relatiu a les distàncies del problema a tractar.

Lents de Fresnel

Les lents de Fresnel deuen el seu nom al físic francès Augustin-Jean Fresnel (1788–1827), que les va idear, tot i que idees similars ja foren plantejades anteriorment pel gran naturalista Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon (1707–1788) i pel filòsof Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquès de Condorcet (1743–1794).

Figura 28. Esquema d'una lent de Fresnel

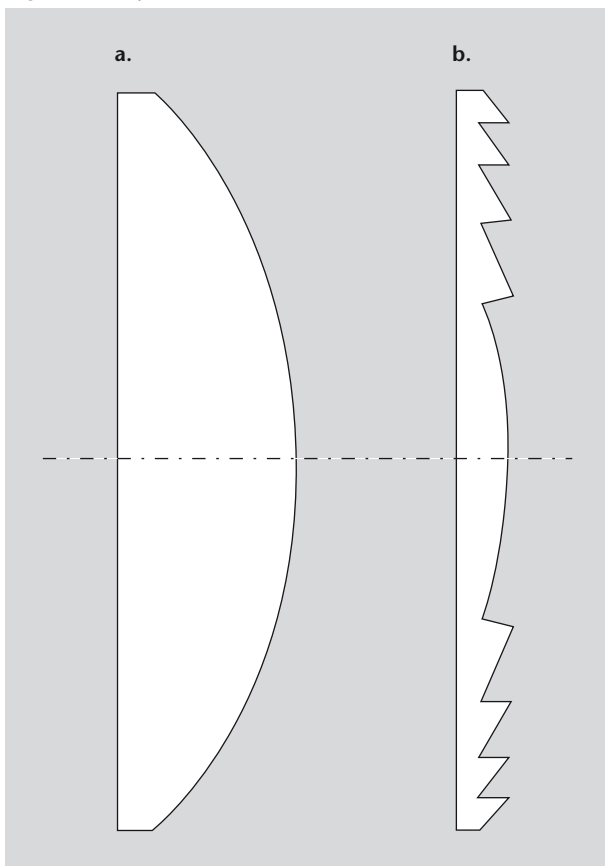


Figura 28

a. Lent normal planoconvexa amb un determinat radi de curvatura.
 b. Lent de Fresnel equivalent, formada per seccions amb el mateix radi de curvatura que la lent original però sense el gruix de lent original. Fixeu-vos que en cada punt de la lent de Fresnel el seu radi de curvatura és exactament igual que en la lent original. Això fa que tingui la mateixa distància focal.

Les lents de Fresnel s'utilitzen molt sovint en aplicacions que necessiten lents molt grosses i en què la qualitat de la imatge no cal que sigui molt bona. Un exemple són els retroprojectors per a transparències. En aquest cas la lent que projecta la imatge ha de ser prou gran com per a abastar tota una pàgina o més. Si aquesta lent tingués un perfil esfèric normal, la seva part central seria molt gruixuda i faria que el retroprojector fos molt pesant i poc manejable. En aquest cas s'utilitzen sempre lents de Fresnel de plàstic. Un altre exemple molt habitual són les lents per als fars, especialment en el cas dels fars més antics.

Potser us preguntareu perquè necessiten lents, els fars. Al capdavant, l'objectiu d'un far és fer llum, no formar imatges ni res semblant. Us convidem a comentar-ho al fòrum de l'assignatura!



Lents de Fresnel d'un far

Augment d'una lent prima

Igual que hem fet amb un sol dioptr, també podem calcular l'augment en el cas d'una lent. No tornarem a fer la derivació, simplement donem el resultat, que és:

$$m = -\frac{s'}{s} \tag{59}$$

Activitat

Si voleu provar a obtenir l'equació 59 vosaltres mateixos, penseu que haureu de fer el mateix que hem fet per a calcular la posició de la imatge: dividir el problema en dos passos, primer calcular l'augment per al primer dioptr, segons l'equació 47, i després tornar-ho a fer per al segon dioptr.

Podem reescriure l'expressió 59 només en funció de la distància de l'objecte s i de la distància focal de la lent f , utilitzant l'equació 58 de la lent prima. Aïllant s' d'aquesta última i posant-la a l'equació 59, obtenim:

$$m = \frac{f}{f-s} \quad (60)$$

A vegades aquesta expressió s'escriu no en funció de la distància de l'objecte a la lent s , sinó en funció de la distància de l'objecte al focus objecte, que anomenarem x , o de la distància de la imatge al focus imatge, que anomenarem x' , i llavors queda:

$$m = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f} \quad (61)$$

Activitat

Tampoc no demostrarem aquest darrer resultat, però si voleu podeu trobar-lo vosaltres mateixos pensant que la distància s de l'objecte a la lent és igual a la distància de l'objecte al focus, x , més la distància focal, f ; és a dir, que $s = x+f$. I en el cas de la imatge, $s' = x'+f$.

Exemple. Distància focal d'una lent biconvexa

Una lent biconvexa de vidre amb $n = 1,6$ té radis de curvatura 10 cm i 15 cm. Quina és la seva distància focal?

Per a trobar la distància focal d'una lent coneixent els seus radis de curvatura, n'hi ha prou d'aplicar la fórmula del constructor de lents, l'equació 57:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (62)$$

Sabem:

- l'índex de refracció: $n = 1,6$,
- el radi de curvatura 1: $r_1 = 0,10$ m,
- el radi de curvatura 2: $r_2 = -0,15$ m.

Fixeu-vos que r_2 és negatiu segons el conveni de signes que hem establert en el subapartat 3.4.1., dedicat als dioptrès. Així:

$$\frac{1}{f} = (1,6-1) \left(\frac{1}{0,10} - \frac{1}{-0,15} \right) \quad (63)$$

d'on $1/f = 10 \text{ m}^{-1}$ i, per tant,

$$f = 0,1 \text{ m} \quad (64)$$

Exemple. Posició de la imatge amb una lent biconvexa

Un objecte que té una altura d'1,2 cm se situa a 4 cm de la lent biconvexa de l'exemple anterior. Determineu on es forma la imatge, si és real o virtual i quina és la seva altura.

Com que sabem la distància focal i la distància de l'objecte a la lent, podem utilitzar la fórmula de les lents primes, equació 58:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (65)$$

on sabem:

- la distància de l'objecte: $s = 0,04$ m,
- la distància focal de la lent: $f = 0,10$ m.

Posant aquests valors tenim:

$$\frac{1}{0,04} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{0,10} \quad (66)$$

d'on

$$s' = -0,067 \text{ m} \quad (67)$$

Es tracta d'una imatge virtual, que es forma a 6 cm per davant de la lent. L'augment el podem trobar a partir de l'equació 59, ja que coneixem s i s' :

$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{-0,067}{0,04} = 1,67 \quad (68)$$

Com que l'altura de l'objecte és 1,2 cm, l'altura de la imatge serà $1,2 \cdot 1,67$, és a dir, 2 cm.

Com a exercici us deixem que calculeu el mateix però amb l'objecte a 15 cm de la lent. (Solució: $s' = 0,3$ m, imatge real, $m = -2$)

Les lents gruixudes

En casos més complexos, de lents gruixudes i sense aproximació paraxial, com ens ho fem per a calcular les imatges obtingudes? Doncs amb tècniques informàtiques de traçat de rajos. Ve a ser el mateix que hem fet, escollir uns quants rajos i veure com es desvien, però a una escala molt més gran.

El sistema de traçat de rajos va avançant els rajos una certa distància, calcula si s'han desviat en la nova posició i determina la nova direcció de propagació; després torna a avançar els rajos i es repeteix tot el procés fins que es genera el recorregut complet del raig. Si en la simulació hi ha objectes opacs, el sistema va comprovant en cada punt si s'han trobat el raig i l'objecte i, en cas afirmatiu, aplica les modificacions pertinents en funció del tipus d'objecte.

Enllaç d'interès

A l'adreça <http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?PHPSESSID=f30ecd69118a14eff48a94de473eff92&topic=121.0> trobareu una miniaplicació de Java* que és força il·lustrativa. Us permet partir d'un bloc de vidre quadrat i anar modificant la curvatura de les seves superfícies per a veure com es desvien els rajos de llum que hi arriben.

* Si no us funciona haureu d'instalar la darrera versió d'execució (*runtime*) de Java.

És interessant limitar l'amplada del feix de rajos i comprovar que llavors serveix l'aplicació paraxial (per exemple, podeu veure que amb una amplada del feix molt gran ja no hi ha una distància focal ben definida). També podeu provar les diferències entre lents primes i lents gruixudes.

3.4.3. Miralls

Ara passarem a dioptrès que reflecteixen llum: els miralls. Igual que en el cas dels dioptrès que formen imatges per refracció, quan un dioptrè reflecteix la llum també pot formar imatges. Això passarà si, com sempre, tots els rajos procedents de cada punt de l'objecte es troben en cada punt de la imatge (i tenim una imatge real) o bé ho fan les seves prolongacions (i tenim una imatge virtual).

Miralls plans

Comencem pel tipus de mirall més simple, que segurament tots tenim al bany o al dormitori de casa: el **mirall pla**. En la figura 29 teniu un mirall pla qual-sevol i en la figura 30 teniu un esquema de com els rajos de llum procedents d'un punt de l'objecte arriben al mirall i hi són reflectits.

Figura 29. Mirall pla

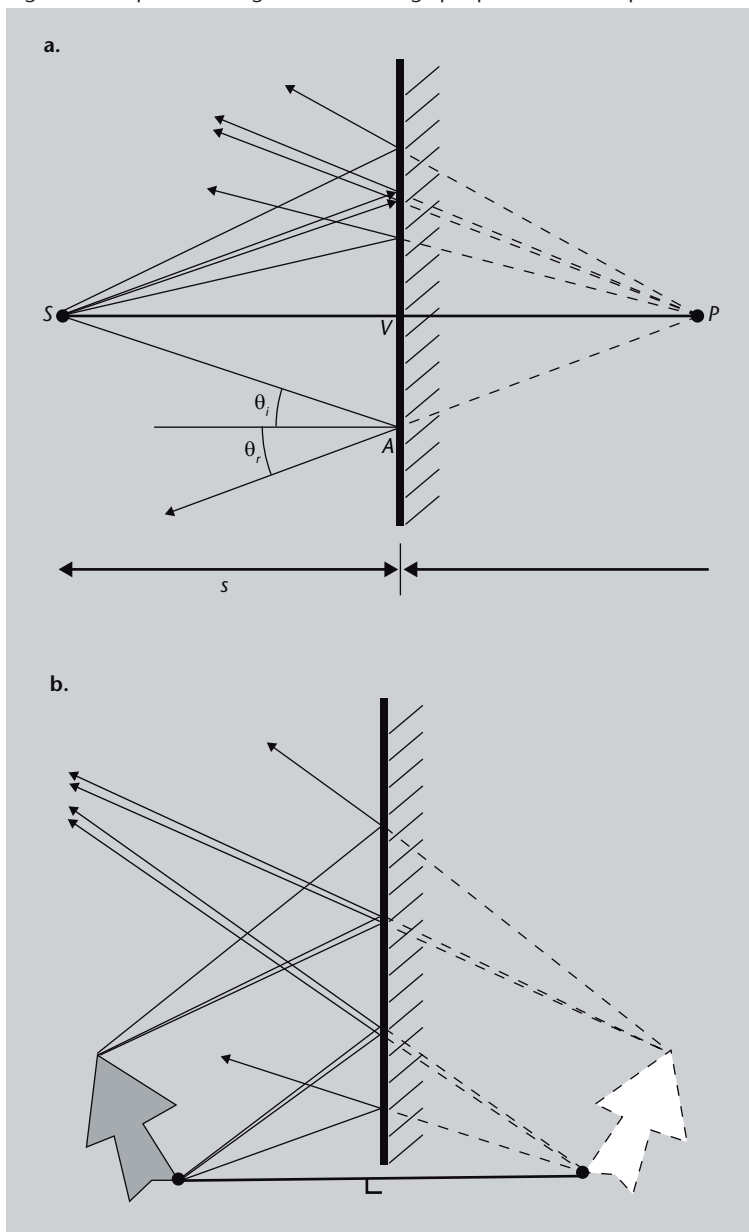


Figura 29

Un mirall pla crea una imatge virtual. Vegeu l'esquema corresponent en la figura 30b.

Fixeu-vos que els rajos reflectits se separen cada vegada més, de manera que aquí tenim una imatge virtual a l'altra banda del mirall (és igual que hi hagi darrere del mirall, recordeu que en les imatges virtuals no hi ha realment rajos de llum que convergeixin). És a dir, que els rajos de llum es reflecteixen en el mirall i sembla que procedeixin del punt on es forma la imatge virtual. Més concretament, després de la reflexió, els rajos divergeixen exactament com si procedissin d'un punt P darrere del mirall. Quan aquests rajos penetren al nostre ull no es poden distingir dels rajos que procedirien d'un objecte real situat a S sense que hi hagués mirall.

Figura 30. Esquema de la generació d'imatge per part d'un mirall pla

**Figura 30**

a. Els rajos reflectits, procedents del punt S , se separen cada vegada més, de manera que tenim una imatge virtual a l'altra banda del mirall. Després de la reflexió els rajos divergeixen exactament com si procedissin d'un punt P darrere del mirall. Quan aquests rajos penetren al nostre ull no es poden distingir dels rajos que procedirien d'un objecte real situat a P sense que hi hagués mirall.

b. El mateix esquema però per a un objecte extens, no només un punt. És la situació equivalent a la que s'observa en la figura 29.

Ara determinem, igual que hem fet abans per a dioptrès refractors i lents, en quin punt forma la imatge un mirall. Per a això escollim un conveni de signes lleugerament diferent:

- La distància objecte s és positiva si està per davant del dioptrè.
- La distància imatge s' és negativa si està darrere del dioptrè i positiva si està per davant.

Novament, fixant-nos en la figura 30 i recordant que ara en el dioptrè només hi ha reflexió, tenim que per a qualsevol raig procedent de l'objecte els angles d'incidència, θ_i , i de reflexió, θ_r , són iguals: $\theta_i = \theta_r$. Ara bé, fixant-nos en el cas del raig que incideix en el punt A en la figura, θ_i és igual a l'angle \widehat{VSA} , i θ_r és igual a l'angle \widehat{VPA} , i com que $\theta_i = \theta_r$, tenim que $\widehat{VSA} = \widehat{VPA}$. En conseqüència, les distàncies objecte, s , i imatge, s' , són iguals:

$$s = s' \quad (69)$$

La definició d'augment és la mateixa que en el cas de les lents (equació 59). Novament, aquí no farem la derivació del resultat, que és:

$$m = \frac{s'}{s} = 1 \tag{70}$$

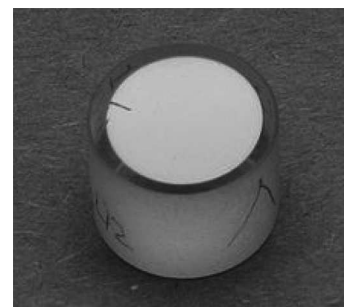
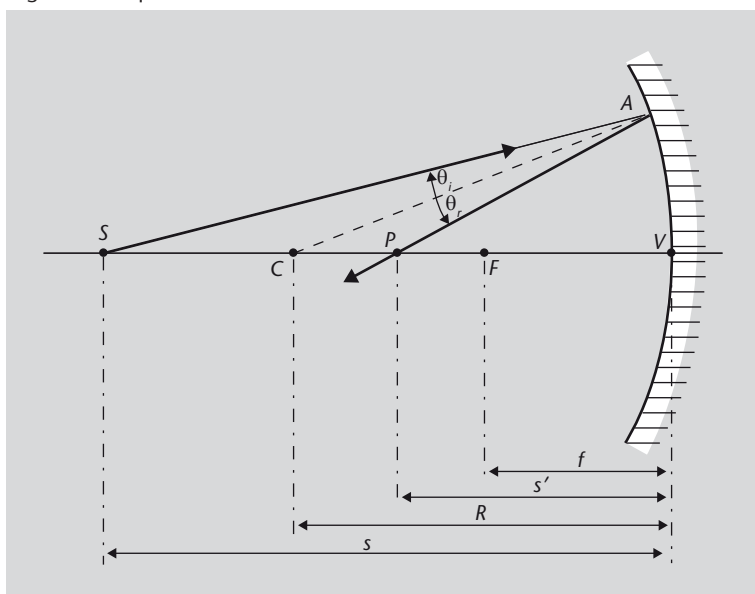
És a dir, un mirall pla sempre dóna imatges dretes i de la mateixa grandària que l'objecte.

Miralls esfèrics i cònics

Ara ja hem estudiat el cas més simple de mirall, el mirall pla, i és hora de passar a miralls que tenen un perfil esfèric o cònic (és a dir, d'el·lipse, paràbola o hipèrbola). Igual que passava amb les lents, però, és molt més fàcil crear un mirall de perfil esfèric que no pas cònic o d'altres tipus, de manera que ens centrarem, sobretot, en miralls esfèrics i ens limitarem a l'aproximació paraxial.

Novament, ens interessarà saber on forma el mirall la imatge d'un objete qual-sevol i determinar-ne l'augment. Per a fer-ho, considerem la figura 31.

Figura 31. Esquema d'un mirall esfèric



Un mirall dielèctric és un tipus de mirall dissenyat de manera que només reflecteixi llum d'una freqüència molt determinada. En aquest cas, la corresponent al groc-verd, i per això el veiem de color groc verdós. Per a la resta de freqüències de l'espectre visible aquest "mirall" és totalment transparent.

Figura 31

El radi de curvatura del mirall esfèric és R , centrat al punt C . El mirall forma la imatge d'un punt S al punt P . Les distàncies de S al mirall i de P al mirall són s i s' , respectivament. F és el focus i f la distància focal.

En la figura podem veure un mirall esfèric de radi de curvatura R i centrat al punt C que forma la imatge d'un punt S a P . Les distàncies de S al mirall i de P al mirall són s i s' , respectivament. En primer lloc, fixeu-vos que com que $\theta_i = \theta_r$ (lleï de la reflexió!), el segment \overline{CA} bisecciona el triangle SAP i, per tant, divideix el costat \overline{SP} en dos segments proporcionals als costats restants. És a dir:

$$\frac{\overline{SC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{PA}} \tag{71}$$

De la imatge també podeu veure que:

$$\overline{SC} = s - R \quad (72)$$

$$\overline{CP} = R - s' \quad (73)$$

Com que treballem en l'aproximació paraxial, d'angles petits, també podem utilitzar les aproximacions següents:

$$\overline{SA} \approx s \quad (74)$$

$$\overline{PA} \approx s' \quad (75)$$

D'aquesta manera, l'equació 71 queda:

$$\frac{s - R}{R - s'} = \frac{s}{s'} \quad (76)$$

Reordenant els termes, aquesta equació es pot expressar d'una forma que ja ens és familiar després d'haver estudiat les lents:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \quad (77)$$

que és coneguda amb el nom de **fórmula dels miralls**. Observeu que amb aquesta fórmula podem determinar el lloc on formarà la imatge un mirall si en coneixem el seu radi de curvatura, R .

Igual que hem fet en el cas de les lents, segurament ens interessarà més disposar d'una equació semblant però en funció de la distància focal, no pas de la curvatura del mirall. Recordeu que una característica definitòria d'un sistema òptic és la seva distància focal. La distància focal imatge, f , és la distància a què convergeixen els rajos de llum que arriben al mirall paral·lels a l'eix òptic, és a dir, d'un objecte situat a l'infinit. En l'expressió anterior, equació 77, això equival a trobar la s' per a $s = \infty$:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R} \quad (78)$$

d'on obtenim que $f = R/2$.

Per tant, l'equació 77 dels miralls es pot reexpressar com:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (79)$$

que és idèntica a la fórmula equivalent per a les lents primes (equació 58).

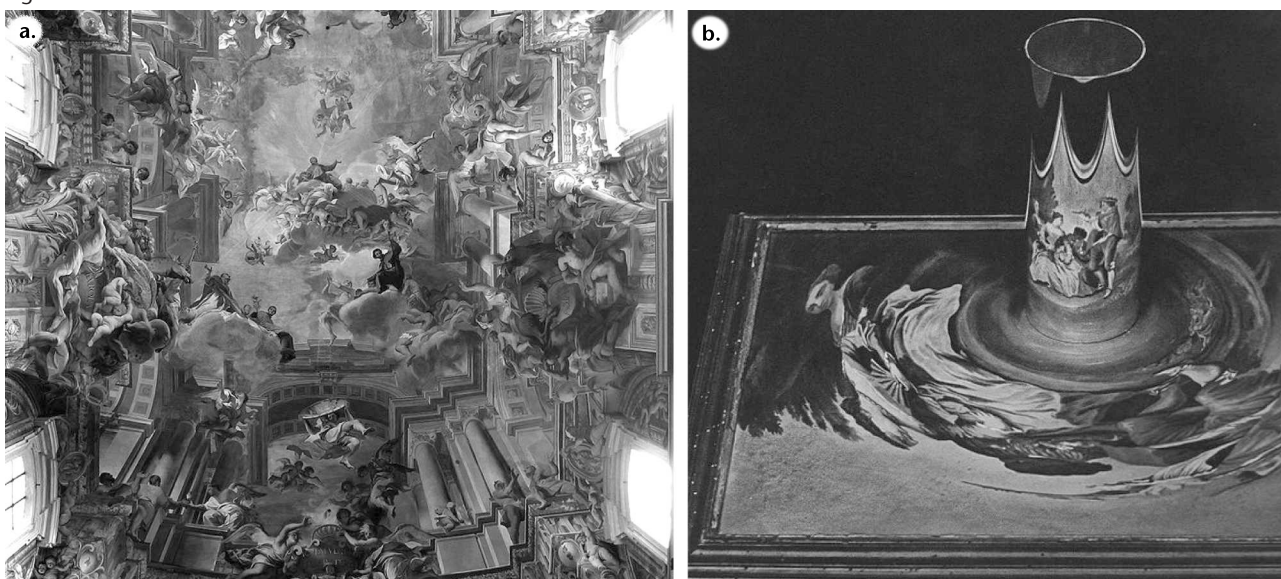
Activitat

Un objecte és a 12 cm d'un mirall esfèric còncau i té una altura de 3 cm. El radi de curvatura del mirall és de 6 cm. Determineu la distància focal del mirall i la distància a què es forma la imatge i la seva grandària.

L'anamorfosi

L'anamorfosi és el procés de fer una representació molt distorsionada d'un objecte, de manera que només es pugui veure correctament utilitzant un mirall concret (anamorfosi especular o catòptrica) o des d'un punt de vista determinat (anamorfosi de perspectiva). Potser us serà familiar l'anamorfosi de perspectiva, que és la que s'utilitza en la publicitat pintada sobre la gespa als camps de futbol: les lletres només es veuen bé quan s'observen des del punt de vista d'alguna càmera de televisió determinada. Podeu veure'n un exemple, més artístic, en la figura 32a. L'anamorfosi catòptrica és la que requereix un mirall per "reconstruir la imatge": si mirem l'objecte, difícilment veurem res reconeixible, només mirant-lo reflectit al mirall veurem una imatge correcta. És menys comuna, però s'ha utilitzat sovint en l'art, com podeu veure en la figura 32b.

Figura 32



Miralls cònics

Els miralls esfèrics, que són els que acabem d'estudiar, només generen imatges correctes quan ens trobem en la regió paraxial i, per tant, podem aplicar les aproximacions que hem utilitzat. Aquesta és la situació il·lustrada en la figura 33a, on podeu veure que ens limitem a angles petits i la imatge d'un punt P és un altre punt P' .

Però què passa quan no podem utilitzar l'aproximació paraxial? Si utilitzem un mirall esfèric ens trobarem en la situació il·lustrada en la figura 33b, on tots els rajos que surten del punt P no es troben en un únic punt P' . Davant d'això us podeu preguntar si hi ha alguna forma de mirall que no presenti aquest inconvenient i doni resultats millors en qualsevol situació, paraxial o no. En concret, el fet que en un mirall esfèric els rajos que li arriben paral·lels a l'eix òptic, després de reflectir-se, convergeixin tots en el seu focus, només és vàlid en l'aproximació paraxial. Hi ha algun tipus de mirall en què això passi sempre?

Figura 32

- a. Volta de l'església de Sant Ignasi (Roma), d'Andrea Pozzo. Es tracta d'una sofisticada anamorfosi de perspectiva en què, des d'un punt concret de l'església la pintura es veu correctament i fa l'efecte d'una gran volta molt elevada, quan en realitat el sostre és completament pla. Aquesta mena d'"enganyos" són típics de l'art barroc, i es coneixen com a *trompe l'oeil* ('enganya l'ull', en francès).
- b. Anamorfosi catòptrica en un quadre. L'escena representada en el quadre només es pot veure correctament si s'observa la seva reflexió en un mirall convex.

La situació de la figura 32b s'anomena, més concretament, *aberració esfèrica*, i l'estudiareu en el subapartat 3.5. d'aquest mòdul.



Figura 33. Comparació entre una situació paraxial i una no paraxial

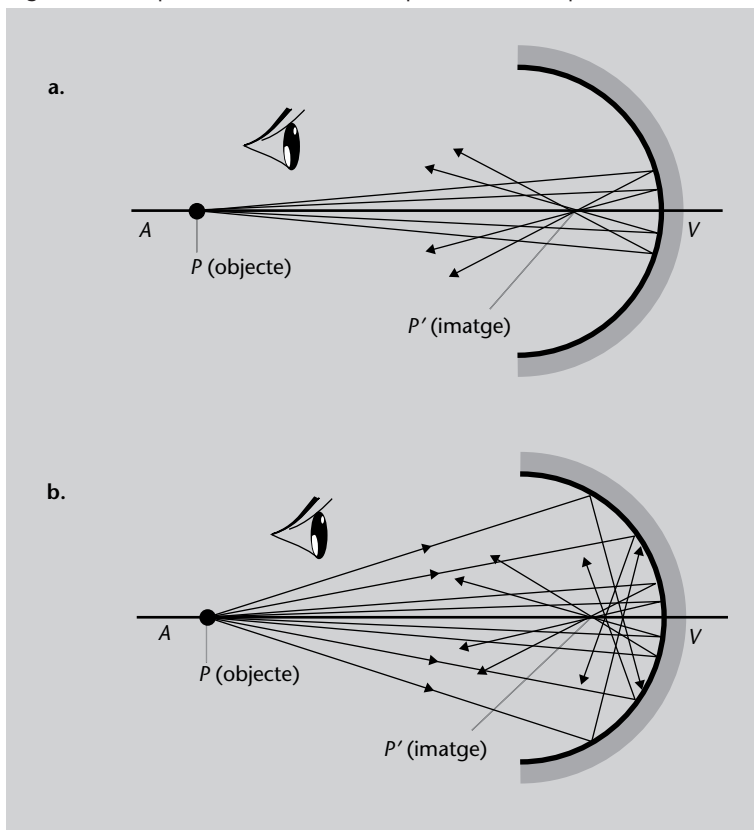


Figura 33

Comparació entre una situació en què és aplicable l'aproximació paraxial (a) i una en què no (b), en un mirall esfèric.

a. En aquesta situació tots els rajos són propers a l'eix i formen angles petits. En aquest cas la imatge d'un punt P és un altre punt, P' .

b. En canvi, en aquest cas hi ha molts rajos allunyats de l'eix òptic i no tots els procedents de P es troben al mateix punt P' .

Doncs la resposta és que sí. No demostrarem el resultat, però el cas és que un mirall **parabòlic** té la propietat de fer convergir en el seu focus tots els rajos que li arriben paral·lels, independentment de si es pot aplicar l'aproximació paraxial o no. Podeu veure aquesta situació en la figura 34.

Figura 34. Mirall parabòlic

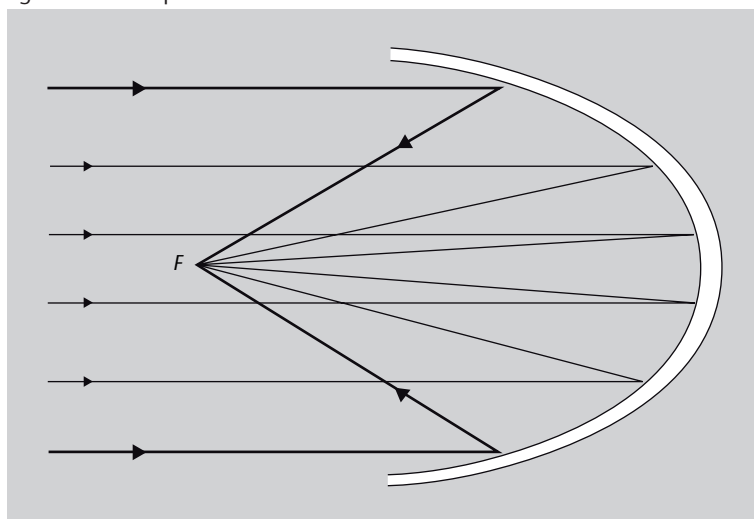


Figura 34

Un mirall parabòlic té la propietat de fer convergir sobre el seu focus, F , tots els rajos paral·lels que li arriben.

Aquesta propietat dels miralls parabòlics és la que els fa tan utilitzats en telescopis o en projectors. A vegades els telescopis, com veurem en el subapartat 3.4.6., utilitzen miralls esfèrics, però si es vol tenir una bona qualitat d'imatge amb grans obertures, cal utilitzar miralls parabòlics.

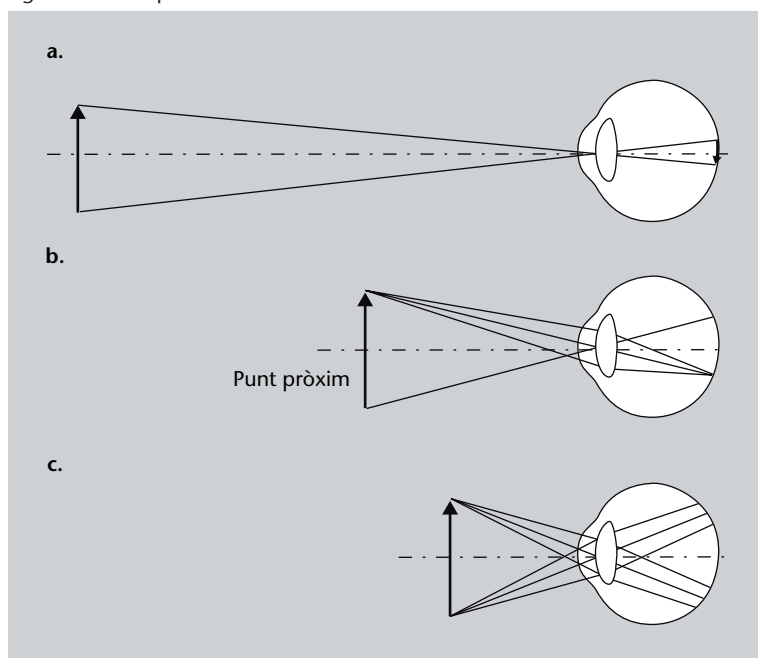
Fins ara hem vist els elements òptics més simples: diòptres, lents i miralls. Amb aquests elements podem construir sistemes òptics més sofisticats, alguns dels quals estudiarem breument a continuació.

3.4.4. La lupa

Quan mirem un objecte, si el volem veure més gran, n'hi ha prou amb apropar-lo més als ulls. Però això té un límit. Potser ja us haureu adonat que arriba un punt en què som incapaços de veure bé objectes que tenim molt a prop dels ulls (i si no, proveu-ho! Agafeu el full que esteu llegint i aneu apropant-lo als ulls: arribarà un moment en què ja no podreu enfocar-lo bé). Com ja veurem en la part sobre fisiologia de l'ull (subapartat 4.2.), nosaltres podem enfocar a diferents distàncies corbant més o menys la lent que duem incorporada als nostres ulls: el cristal·lí. El procés de corbar més o menys el cristal·lí s'anomena **acomodació** i quan mirem a l'infinit (o molt lluny, vaja) es diu que l'ull es troba sense acomodar (en altres paraules, no hem de forçar l'ull per a enfocar correctament).

El problema és que el cristal·lí té un límit màxim de curvatura que és el que determina el punt més proper als ulls en què podem veure bé un objecte. Aquest punt s'anomena *punt pròxim*. La situació la teniu il·lustrada esquemàticament en la figura 35.

Figura 35. Punt pròxim de l'ull humà



El punt pròxim

El punt pròxim en els humans varia amb l'edat. En els nens és d'uns 5 o 6 cm, però en arribar a l'edat adulta no acostuma a ser menor de 10 cm. Amb el pas dels anys, la capacitat de corbar el cristal·lí va disminuint i el punt pròxim es troba cada vegada més lluny: cap als 60 anys pot estar situat ja a 1 metre o fins i tot més, situació en què no es pot llegir normalment i coneguda com a *presbícia*.

L'acomodació

El fet que quan l'ull no acomoda no se l'estigui forçant és la raó per la qual resulta relaxant mirar paisatges amplis o grans extensions de terreny: no estem obligant l'ull a enfocar a prop i, per tant, no es fatiga. Tenir l'ull permanentment en acomodació, com quan treballem davant d'un ordinador molta estona, provoca fatiga ocular.

Figura 35

a. L'ull enfoca correctament un objecte a una certa distància i, per tant, crea una imatge real sobre la retina.
b. El punt pròxim és el punt més proper a l'ull en què aquest encara pot enfocar correctament un objecte.
c. A una distància més petita que el punt pròxim l'ull ja no pot crear una imatge sobre la retina.

Una forma simple de solucionar aquesta limitació és utilitzar una lent convergent, que afegeixi la seva potència òptica a la de l'ull i, d'aquesta manera, permeti apropar encara més l'objecte i veure'l bé. Aquesta lent convergent s'anomena **lupa, lent d'augment o microscopi simple**.

Una **lupa** és una lent convergent que té com a objectiu donar una imatge augmentada d'un objecte proper.

La lupa funciona de la forma representada en la figura 36. Tenim un objecte de dimensions y_o situat a una distància s_o de la lupa, més petita que la seva distància focal, f . La lupa forma una imatge virtual i augmentada, de dimensions y_i , a una distància s_i de la lupa. És aquesta imatge virtual la que l'ull converteix en imatge real sobre la retina.

Figura 36. Lupa

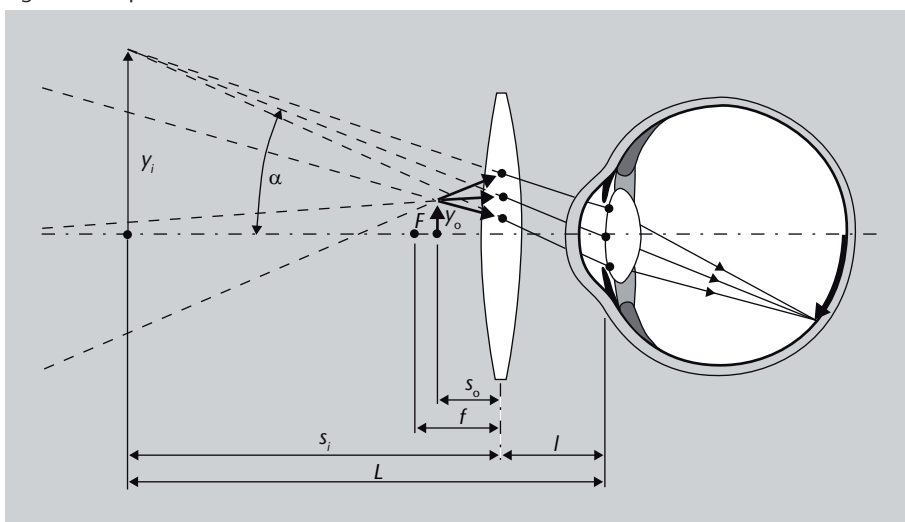


Figura 36

Esquema d'una lupa. Tenim un objecte de dimensions y_o situat a una distància s_o de la lupa, més petita que la seva distància focal, f . La lupa forma una imatge virtual i augmentada, de dimensions y_i , a una distància s_i de la lupa. És aquesta imatge virtual la que l'ull converteix en imatge real sobre la retina.

3.4.5. El microscopi compost

El microscopi compost és un pas més respecte al microscopi simple o lupa. El seu objectiu és el mateix: donar una imatge molt augmentada d'objectes petits i propers.

Habitualment, del microscopi compost en diem simplement *microscopi*.

La invenció del microscopi

Sembla que el primer microscopi fou inventat el 1590 a la ciutat de Middelburg, als Països Baixos. L'autoria està disputada entre Hans Lippershey i Zacharias Jansen, amb ajuda del seu pare, Hans Janssen. Tanmateix, no fou fins a la segona meitat del s. XVII que es començà a utilitzar seriosament a Itàlia, els Països Baixos i Anglaterra, amb els treballs de Marcelo Malpighi, la gran obra de Robert Hooke *Micrographia* i els treballs d'Antonie van Leeuwenhoek, que descobrí els glòbuls vermells de la sang, els espermatozoides i diversos microorganismes.

El funcionament bàsic d'un microscopi compost està esquematitzat en la figura 37. El punt clau és disposar de dues lents, de manera que una generi una imatge que és posteriorment amplificada encara més per la segona lent. Aquestes dues lents són:

- L'**objectiu**, que és la lent que se situa a prop de l'objecte a observar. Normalment forma una imatge real, invertida i augmentada de l'objecte. En els instruments professionals, els objectius de microscopi gairebé mai no són una sola lent, sinó que estan formats per conjunts relativament sofisticats de lents.

Figura 37. Microscopi compost

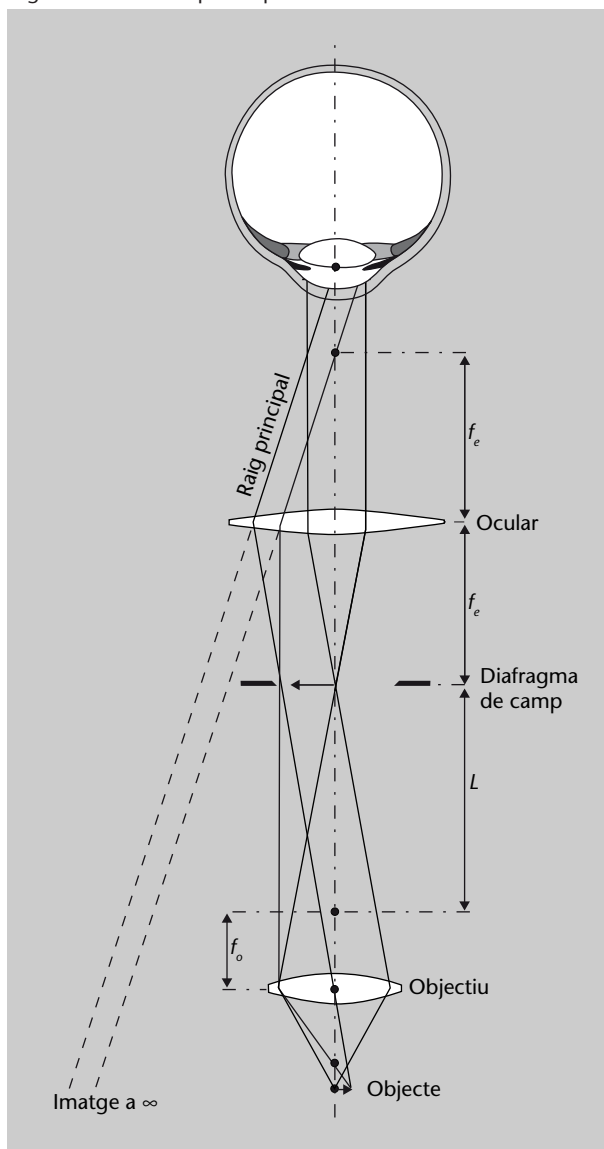
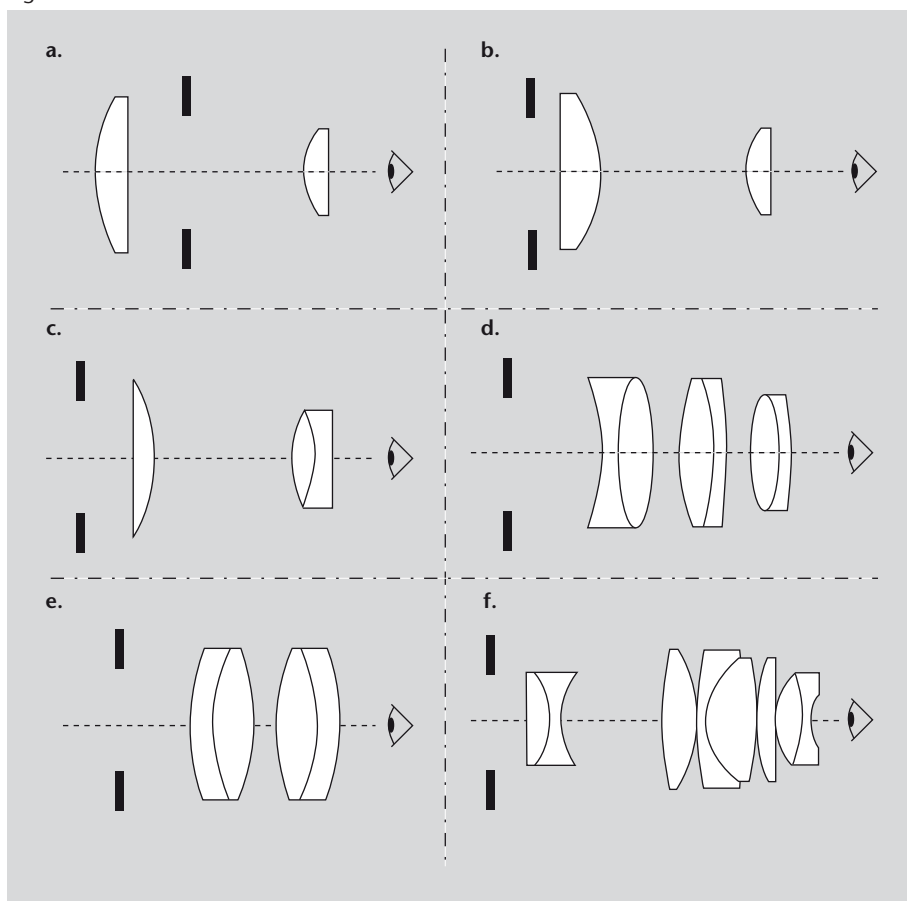


Figura 37

Esquema d'un microscopi compost. L'objectiu, de distància focal f_o crea una imatge real i invertida d'un objecte. La longitud del tub L es calcula de manera que la imatge produïda per l'objectiu es formi precisament a la distància focal de l'ocular, f_e . D'aquesta manera, la imatge virtual produïda per l'ocular es forma a l'infinit.

- L'**ocular**, que és la lent que se situa a prop de l'ull (o de la càmera fotogràfica, si en lloc de mirar l'objecte el volem fotografiar). El seu propòsit és ampliar la imatge produïda per l'objectiu. En els instruments professionals, els oculars gairebé mai no són una sola lent, sinó que estan formats també per conjunts complexos de lents. En la figura 38 podeu veure alguns esquemes d'oculars habituals, a títol il·lustratiu.

Figura 38. Oculars

**Figura 38**

Alguns oculars habituals, utilitzats en microscopis i telescopis. En els casos d'oculars amb dues lents, la primera s'anomena *lent de camp* i la segona *lent de l'ull*.

a. Ocular de Huygens. Inventat per Christiaan Huygens cap a 1660, fou el primer ocular compost (amb dues o més lents). Actualment encara es fabrica per a aplicacions poc exigents gràcies al seu baix preu.

b. Ocular de Ramsden. Igual que el Huygens, és de poca qualitat però barat.

c. Ocular de Kellner. És bàsicament un Ramsden, però corregit d'aberració cromàtica (vegeu el subapartat 3.5.6.).

d. Ocular d'Erfle. Creat a la dècada de 1910, és ideal per a obtenir imatges amb un gran camp de visió.

e. Ocular de Plössl. Un dels oculars més usats en telescopis d'aficionat, però relativament car.

f. Ocular de Nagler. Exemple d'un dels oculars actuals més sofisticats. Dissenyat el 1979, dona un camp de visió molt gran i amb gran qualitat d'imatge, però és car i pesant.

Fixeu-vos que en la figura 37 l'objectiu, de distància focal f_o , crea una imatge real i invertida de l'objecte. La longitud L entre el focus de l'objectiu i la posició de la imatge s'anomena *longitud del tub*. La longitud del tub es dissenya de manera que la imatge produïda per l'objectiu es formi precisament a la distància focal de l'ocular, f_e . D'aquesta manera, la imatge virtual produïda per l'ocular es forma a l'infinit i així, el nostre ull, pot mirar la imatge sense haver d'acomodar, és a dir, com si estigués mirant a l'infinit. Això, entre altres coses, permet evitar la fatiga ocular.

3.4.6. El telescopi

L'altre instrument òptic senzill més habitual és el telescopi. En aquest cas el propòsit és obtenir una imatge ampliada d'un objecte molt llunyà (normalment es considera situat a l'infinit, excepte en els casos de telescopis terrestres o binocles, en què els objectes poden estar més a prop). Els telescopis, igual que els microscopis, també estan formats bàsicament per un objectiu, que genera una imatge de l'objecte llunyà, i un ocular, que amplia considerablement aquesta imatge. Ara bé, en el cas dels telescopis, l'objectiu pot ser una lent o un mirall; en funció d'això els telescopis es classifiquen en:

- **Telescopis refractors.** L'objectiu és una lent.
- **Telescopis reflectors.** L'objectiu és un mirall.

- **Telescopis catadiòptrics.** L'objectiu és un mirall combinat amb una lent correctora.

Telescopis refractors

En els telescopis refractors, normalment s'utilitza una configuració com la que podeu veure en la figura 39. L'ocular se situa de manera que el seu focus objecte, situat a f_e , coincideixi amb el focus imatge de l'objectiu, f_o . Així, l'ocular també forma una imatge a l'infinit i l'ull pot observar sense haver d'acomodar.

Figura 39. Telescopi refractor

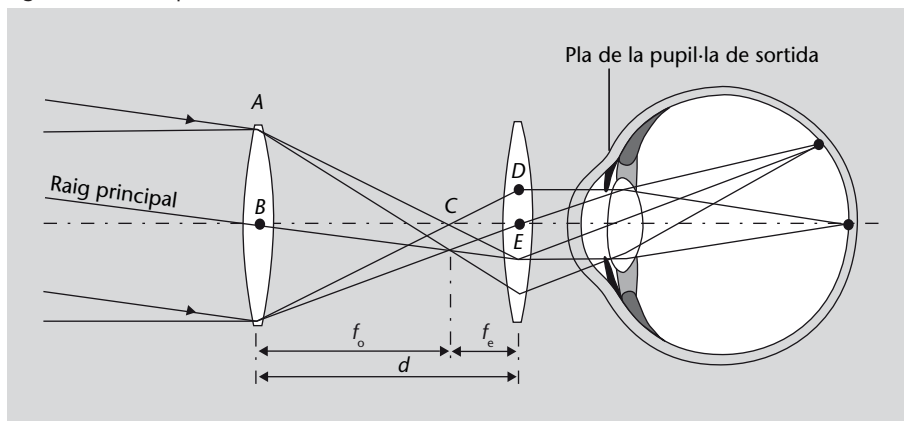


Figura 39

Telescopi refractor en configuració de Kepler per a un objecte situat a l'infinit. L'ocular se situa de manera que el seu focus objecte, situat a f_e , coincideixi amb el focus imatge de l'objectiu, f_o .

En els casos més simples, en funció del tipus de lent d'objectiu i ocular, els telescopis refractors es poden classificar en:

- **Telescopi de Galileu o ullera de Galileu.** L'objectiu és una lent convexa i l'ocular una lent còncava. Fou un dels primers dissenys d'objectiu, però dóna imatges de baixa qualitat. Actualment només s'utilitza en petits binoculars (no prismàtics) de pocs augments, com els típics binoculars de teatre.
- **Telescopi keplerianà.** L'objectiu i l'ocular són lents convexes. És el disseny habitual de tots els telescopis astronòmics, però cal tenir en compte que actualment, igual que passava amb els microscopis, els oculars ja no són simplement una lent, sinó combinacions relativament sofisticades de moltes lents.

Tots els telescopis refractors que s'utilitzen en astronomia són del tipus keplerianà i donen una imatge final invertida. Aquesta situació no és gaire ideal si el telescopi s'utilitza per a observació terrestre. En aquest darrer cas, o bé s'utilitza una configuració de Galileu, que és poc recomanable, o bé es col·loca entre l'ocular i l'objectiu un sistema de lents, anomenat *sistema erector*, que inverteix novament la imatge, de manera que la imatge final no estigui invertida.

El gran problema dels telescopis refractors és que, a mesura que volem fer un telescopi més gran, la lent de l'objectiu també ha de ser més gran. I les difi-

cultats per a fabricar lents grans de bona qualitat són enormes: la qualitat del vidre ha de ser uniforme, no hi pot haver cap mena de bombolla ni defecte i el pes de la lent esdevé un problema considerable, que li provoca deformacions amb el pas del temps. Per això, ja des del segle XVII es van començar a fabricar telescopis que utilitzaven com a objectiu un mirall, i no una lent: són els telescopis reflectors, que veurem tot seguit.

Telescopis reflectors

Com hem dit, doncs, els telescopis reflectors utilitzen com a objectiu un mirall, normalment esfèric o parabòlic. Això, dit així de cop, us pot estranyar. Al capdavant un mirall reflecteix la llum i la torna “cap enrere”, per tant, per a veure la imatge ens haurem de posar davant del telescopi i llavors taparem precisament el que volem veure. És així? com ens ho podem fer, llavors?

Doncs sí, teniu raó, el mirall ens torna la llum cap enrere. Per tant hem de buscar una manera de desviar la llum reflectida per l'objectiu cap a una altra banda. Això ho aconseguim, generalment, amb un segon mirall que posem davant de l'objectiu. Aquest segon mirall, anomenat *mirall secundari*, desvia la llum procedent de l'objectiu cap a un costat o cap enrere. Teniu un exemple d'això en la figura 40, on podeu veure un esquema d'un telescopi de tipus newtonià. Igual que en un refractor, l'objectiu forma una imatge situada a la distància focal de l'ocular, de manera que l'observador pot mirar la imatge sense haver d'acomodar l'ull.

Figura 40. Telescopi reflector newtonià

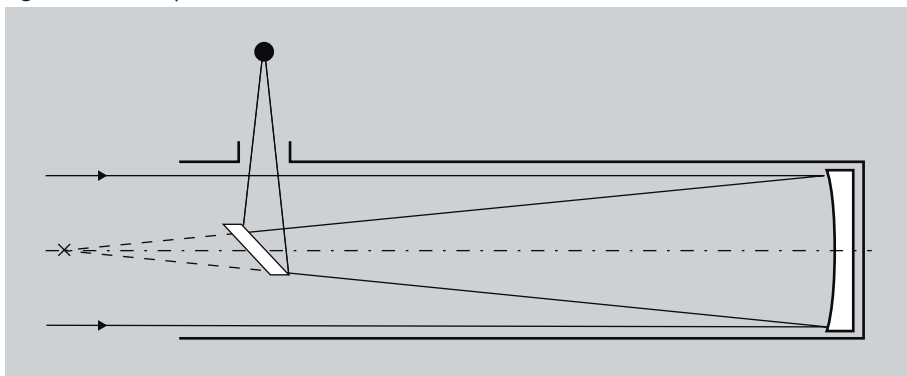


Figura 40

L'objectiu és un mirall de perfil parabòlic o esfèric còncau i el mirall secundari és un mirall pla a 45° respecte a l'eix del telescopi.

De totes maneres, és possible que se us hagi plantejat un dubte sobre aquesta mena de telescopis. Si posem un mirall davant de l'objectiu, quan mirem la imatge no veurem una taca? No veurem una part tapada per aquest mirall secundari? La resposta és que no. Penseu que el telescopi està pensat per a estar ben enfocat amb objectes situats a l'infinit, mentre que el mirall secundari és molt a prop. Això vol dir que, en realitat en la imatge final el mirall secundari està tan desenfocat que no es veu en absolut. A efectes pràctics, l'únic efecte negatiu del mirall secundari és fer disminuir una mica la quantitat de llum que arriba a l'objectiu.

Tipus de telescopis reflectors

Hi ha moltes configuracions possibles entre l'objectiu i el mirall secundari i també diversos tipus de miralls que es poden utilitzar: parabòlics, hiperbòlics, etc. En funció d'això els tipus principals de telescopis reflectors són els que presentem a la llista següent:

- **Telescopi de Newton.** L'objectiu és un mirall parabòlic còncav (o a vegades esfèric còncav) i el mirall secundari és un mirall pla col·locat a 45° respecte a l'eix del telescopi, de manera que desvia la llum cap a un costat. És en aquest costat on es col·loquen els oculars i se situa l'observador. És un telescopi de construcció senzilla i barata, molt usat entre els aficionats. Teniu el seu esquema a la figura 40.
- **Telescopi de Cassegrain.** L'objectiu és un mirall parabòlic còncav i el mirall secundari és un mirall de perfil hiperbòlic convex que desvia la llum altre cop cap enrere. Així, l'objectiu ha d'estar foradat pel centre per permetre el pas de la llum i la col·locació d'oculars i observador. Actualment s'usa poc excepte en la versió catadiòptrica de Schmidt-Cassegrain. Teniu el seu esquema a la figura 41.

Figura 41. Telescopi reflector Cassegrain

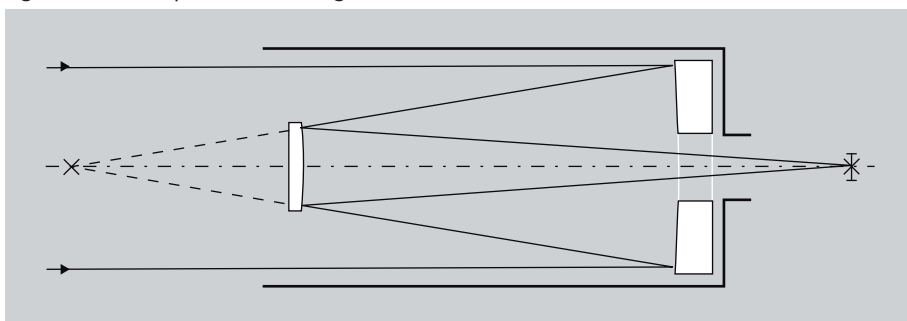


Figura 41

Telescopi reflector de tipus Cassegrain. L'objectiu és un mirall parabòlic còncav i el mirall secundari és un mirall de perfil hiperbòlic convex que desvia la llum altre cop cap enrere.

- **Telescopi Ritchey-Chrétien.** L'objectiu i el mirall secundari són tots dos miralls hiperbòlics, el primer còncav, el segon convex. Actualment gairebé tots els grans telescopis astronòmics professionals utilitzen aquesta configuració.
- **Telescopi de Gregory.** L'objectiu és parabòlic còncav i el mirall secundari parabòlic o esfèric també còncav. La principal diferència amb tots els anteriors telescopis és que aquest dóna imatges no invertides, fet que el fa útil en observació terrestre.
- **Telescopis fora d'eix.** Alguns dissenys intenten evitar l'obstrucció de llum causada pel mirall secundari fent que l'objectiu reflecteixi la llum cap a un costat, fora de l'eix principal. Hi ha dos tipus principals:
 - **Telescopi de Herschel.** L'objectiu, parabòlic com en el de Newton, està inclinat de manera que la llum va cap a un costat del telescopi, sense necessitat de cap mirall secundari.
 - **Telescopi Schiefspiegler.** Igual que amb el de Herschel, l'objectiu està inclinat, però ara s'utilitza un mirall secundari situat fora del telescopi. Hi ha molts subtipus diferents segons el nombre i tipus de miralls utilitzats.

Telescopis catadiòptrics

Els telescopis catadiòptrics, que tenen com a objectiu un mirall amb una lent correctora, van sorgir per a intentar eliminar al màxim els defectes, anomenats *aberracions*, que es poden produir en les imatges dels telescopis reflectors. En els casos més habituals es tracta d'un telescopi de tipus Cassegrain en què, a l'entrada del telescopi, es col·loca una lent correctora. Els més comuns són:

- Amb placa correctora de Schmidt: **telescopi Schmidt-Cassegrain.** És un dels dissenys més populars entre els aficionats i consisteix en una lent, anomenada *placa correctora*

Estudiareu les aberracions en el subapartat 3.5. d'aquest mòdul.



de Schmidt, situada a l'entrada del telescopi i que també inclou el mirall secundari típic dels telescopis Cassegrain. En teniu un esquema en la figura 42.

Figura 42. Telescopi catadiòptic de tipus Schmidt-Cassegrain

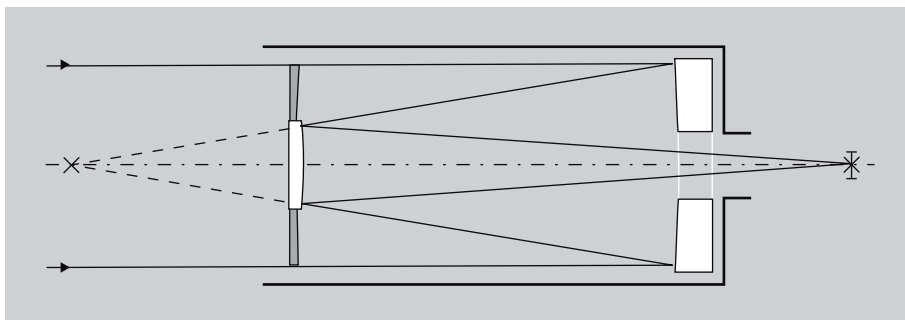


Figura 42

Es tracta d'un telescopi de Cassegrain al qual se li afegeix una placa correctora a l'entrada. La placa també conté el mirall secundari.

- Amb menisc corrector: **telescopi Maksutov-Cassegrain**. La placa correctora de Schmidt és relativament complexa de fabricar. Per això es van crear telescopis catadiòptics que, en lloc de la placa correctora, utilitzen un menisc. Aquest menisc es col·loca a l'entrada del telescopi i, a més, té un cercle platejat en la part posterior que actua com a mirall secundari en la configuració de Cassegrain.

3.5. Aberracions

En tot el que hem anat fent en aquests darrers subapartats, hem repetit moltes vegades que estàvem treballant amb l'aproximació paraxial, en la qual les imatges són sempre perfectes i podem definir sense problemes coses com la distància focal.

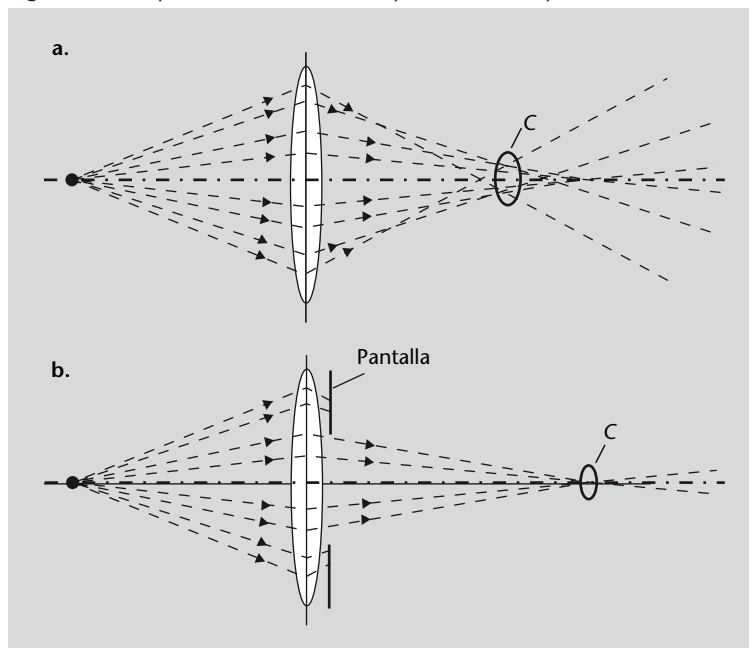
Ara bé, l'aproximació paraxial és precisament això, una aproximació. Ja vam dir que en alguns casos els sistemes òptics reals es poden tractar com si fossin paraxials, però que en molts casos això no és així. De fet, a la realitat ens trobem sovint amb sistemes òptics que són molt lluny de donar imatges perfectes: una lupa que ens dona imatges borroses, una càmera fotogràfica que ens dona imatges distorsionades o amb els colors alterats, un retroprojector que ens proporciona una qualitat d'imatge molt pobre, etc. Ja hem vist un esquema de què passa quan no es pot aplicar l'aproximació paraxial en la figura 33 i en podeu veure un altre, ara amb una lent, en la figura 43.

Què passa, doncs, quan no podem utilitzar l'aproximació paraxial? El tractament matemàtic sense aproximació paraxial esdevé molt complex i per això, per a sistemes òptics complicats, s'utilitzen tècniques informàtiques de traçat de rajos. Ve a ser el mateix que hem fet, escollir uns quants rajos i veure com es desvien, però a una escala molt més gran. El sistema de traçat de rajos va avançant els rajos una certa distància, calcula si s'han desviat en la nova posició i determina la nova direcció de propagació; després torna a avançar els rajos i es repeteix tot el procés fins que es genera el recorregut complet del raig.

Enllaç d'interès

Podeu experimentar vosaltres mateixos amb algun programa simple i gratuït de traçat de rajos, com per exemple l'OpticalRayTracer, que podeu trobar a: <http://www.arachnoid.com/OpticalRayTracer/index.html>. Es tracta d'una aplicació en Java i, per tant, independent del sistema operatiu que utilitzeu. Podeu estudiar el comportament de qualsevol tipus de lent o combinació de lents, tenint en compte també aspectes com la dispersió.

Figura 43. Comparació entre un sistema paraxial i un no paraxial

**Figura 43**

Comparació entre un sistema al qual se li pot aplicar l'aproximació paraxial i un que no.

a. En el cas més general, els rajos no es limiten a ser propers a l'eix i arriben a la lent amb angles força grans. En aquest cas no tots els rajos procedents d'un punt convergeixen en un punt, sinó que queden dispersats per una zona més o menys àmplia (indicada C en la figura), que es veuria com una taca borrosa. Només si limitem els rajos que arriben a la lent o que en surten, com fem a la part **b.**

b. Amb una pantalla (tècnicament, un **diafragma**), estarem en una situació paraxial, amb tots els rajos procedents d'un punt que convergeixen en un altre punt.

En qualsevol cas, la desviació entre la realitat i l'aproximació paraxial es pot quantificar de manera precisa i classificar segons la causa que provoca aquesta desviació.

Les **aberracions** són els diferents tipus de desviació del comportament real d'un sistema òptic respecte al comportament predit per l'aproximació paraxial.

Hi ha molts tipus d'aberració, però els més habituals i més senzills de tractar i estudiar són els següents:

- Aberracions monocromàtiques, o aberracions de Seidel:
 - Astigmatisme
 - Aberració esfèrica
 - Coma o aberració comàtica
 - Curvatura de camp o de Petzval
 - Distorsió
- Aberració cromàtica

Les aberracions monocromàtiques s'anomenen així perquè és irrellevant si la llum és d'una sola longitud d'ona o conté tots els colors que vulguem. En

canvi, l'aberració cromàtica només es produeix quan la llum té més d'una longitud d'ona. A continuació veurem cada una d'aquestes aberracions amb una mica de detall.

3.5.1. Astigmatisme

L'aberració de l'astigmatisme consisteix en el fet que dos conjunts de rajos de llum que penetren en un sistema òptic en dos plans mútuament perpendiculars resulten focalitzats en dos punts diferents. Què vol dir això? A efectes pràctics vol dir que quan aconseguim que una línia horitzontal estigui enfocada, les línies verticals no ho estaran, i a l'inrevés.

En la figura 44 podeu veure una representació esquemàtica de l'astigmatisme. Observeu que els rajos horitzontals queden focalitzats al punt F_S , mentre que els rajos verticals ho fan al punt F_T .

Figura 44. Astigmatisme

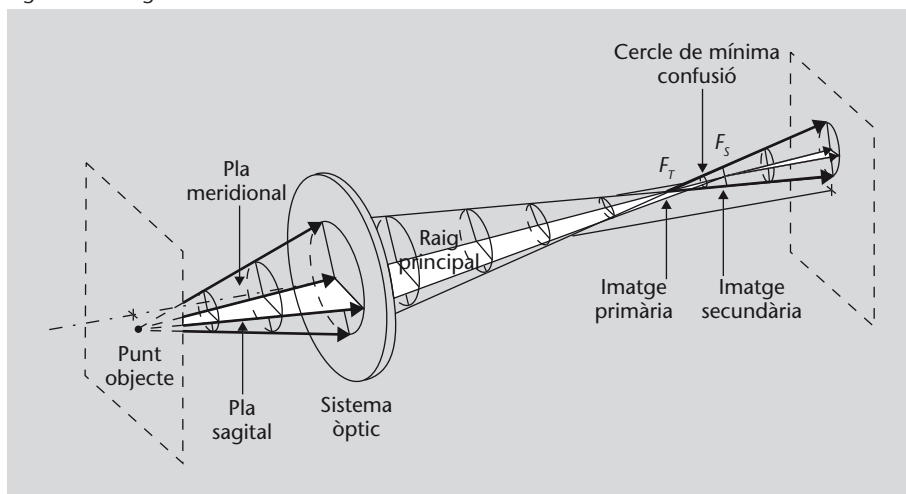


Figura 44

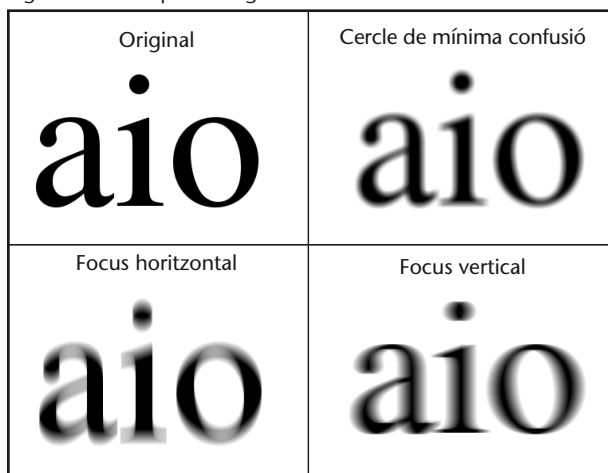
Els rajos horitzontals procedents del punt objecte queden focalitzats al punt F_S , mentre que els rajos verticals ho fan al punt F_T . No es pot obtenir una imatge perfecta: la millor imatge que es pot obtenir és la que s'aconsegueix al cercle de mínima confusió, en què els rajos de llum estan més concentrats.

Normalment entre els dos focus hi ha un altre punt en què els rajos de llum es concentren en una àrea més petita; ni uns ni altres estan enfocats però cap dels dos tampoc no està gaire desenfocat. Aquest punt és el **cercle de mínima confusió**, que representa una mena de compromís entre tenir uns rajos enfocats i els altres molt desenfocats i el cas invers.

En la figura 45 podeu veure un exemple d'imatges generades per un sistema òptic amb astigmatisme: la primera imatge és l'original, les dues d'abaix són les imatges obtingudes al pla focal vertical (que es diu *pla focal tangencial*) i al pla focal horitzontal (que es diu *pla focal sagital*), mentre que la imatge de dalt a la dreta és l'obtinguda al cercle de mínima confusió. Les dues imatges obtingudes als dos plans focals s'anomenen *imatges astigmàtiques*.

Ja vam dir en el subapartat 3.2. que és molt important no confondre els termes *estigmatisme*, que és la condició per la qual un sistema òptic dona imatges perfectes, i *astigmatisme*, que és l'aberració que estem ara explicant.

Figura 45. Exemple d'astigmatisme



Font: Wikimedia Commons

Figura 45

Imatges generades per un sistema òptic amb astigmatisme: la primera imatge és l'original, les dues d'abaix són les imatges obtingudes al pla focal tangencial i al pla focal sagital, mentre que la imatge de dalt a la dreta és l'obtinguda al cercle de mínima confusió.

3.5.2. Aberració esfèrica

L'aberració esfèrica es produeix quan els rajos de llum que penetren en el sistema lluny de l'eix òptic es focalitzen en un punt lleugerament diferent que els rajos que hi penetren a la vora de l'eix òptic. Aquesta aberració és especialment significativa en superfícies esfèriques, que ja havíem comentat que només són perfectes en l'aproximació paraxial. Les lents en què s'utilitzen superfícies no esfèriques s'anomenen lents asfèriques i presenten una aberració esfèrica molt menor, però com ja havíem dit, són més difícils i cares de fer. L'aberració esfèrica es pot minimitzar escollint acuradament el grau de curvatura de les superfícies esfèriques en cada cas particular.

En la figura 46 podeu veure una representació esquemàtica d'aquest fet: els rajos que travessen la lent lluny de l'eix òptic queden enfocats més a prop de la lent que els que la travessen propers a l'eix. En aquest cas també es pot definir un **cercle de mínima confusió**, on els rajos de llum es concentren en una zona més petita.

Figura 46. Aberració esfèrica

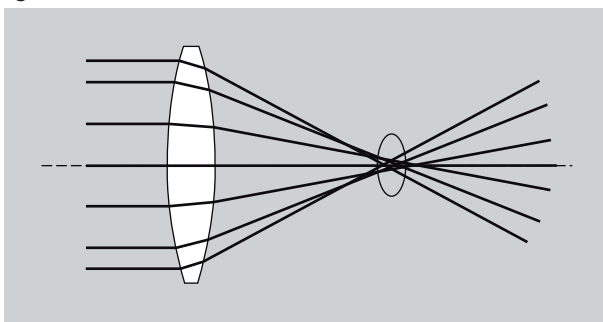


Figura 46

En l'aberració esfèrica, els rajos que travessen la lent lluny de l'eix òptic queden enfocats més a prop de la lent que els que la travessen propers a l'eix. No es pot obtenir una imatge perfecta, la millor imatge que es pot obtenir és la que s'aconsegueix al cercle de mínima confusió, en què els rajos de llum estan més concentrats.

En la figura 47 teniu un exemple de l'aberració esfèrica. En aquest cas es tracta simplement de la imatge d'un punt. D'esquerra a dreta podeu veure les imatges del punt a mesura que ens allunyem de la lent. La fotografia del mig és la imatge que s'obté just quan ens trobem al cercle de mínima confusió.

Figura 47. Exemple d'aberració esfèrica



Font: Wikimedia Commons

3.5.3. Coma

El coma, o aberració comàtica, rep el seu nom per l'aspecte de cometa o de cabellera (*coma*, en llatí) que té la imatge d'un punt. El coma es produeix només per a objectes que no estan situats a l'eix òptic i deriva del fet que, en realitat, els plans principals no són realment plans, com considerem a l'aproximació paraxial, sinó superfícies corbades.

En la figura 48 podeu veure una representació d'aquest fet. La lent produeix una imatge, P , del punt S . El raig de llum que surt de S i passa pel centre de la lent arriba al lloc correcte de la imatge, però els rajos que passen lluny de l'eix es van desviant cada vegada més i no estan enfocats correctament: els que passen a un radi r_1 formen un cercle en la imatge de radi r'_1 , els que passen a un radi r_2 formen un cercle encara més gran i més lluny del punt original, de radi r'_2 . El conjunt de tots aquests cercles dóna lloc a una taca en forma de cometa.

Figura 48. Coma

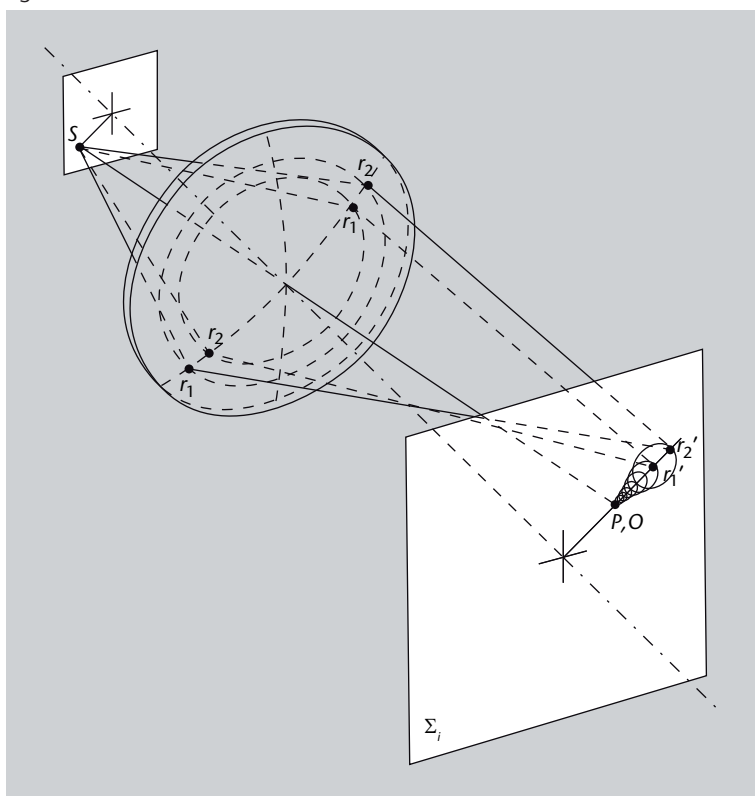


Figura 47

Imatge d'un punt generada per un sistema òptic, observada a diverses distàncies. D'esquerra a dreta podeu veure les imatges del punt a mesura que ens allunyem de la lent. La fotografia del mig és la imatge que s'obté just quan ens trobem al cercle de mínima confusió.

Figura 48

Una lent produeix una imatge, P , del punt S . El raig de llum que surt de S i passa pel centre de la lent arriba al lloc correcte de la imatge, però els rajos que passen lluny de l'eix es van desviant cada vegada més i no estan enfocats correctament: els que passen a un radi r_1 formen un cercle en la imatge de radi r'_1 , els que passen a un radi r_2 formen un cercle encara més gran i més lluny del punt original, de radi r'_2 . El conjunt de tots aquests cercles dóna lloc a una taca en forma de cometa.

En la figura 49 podeu veure un exemple il·lustratiu d'aquesta aberració. És la imatge d'un conjunt de punts repartits per una superfície, a diferents distàncies de l'eix del sistema òptic. Fixeu-vos en la deformació característica en forma de cometa i com, a mesura que els punts estan més allunyats de l'eix, la deformació de la imatge és cada vegada més evident.

Figura 49. Exemple de coma

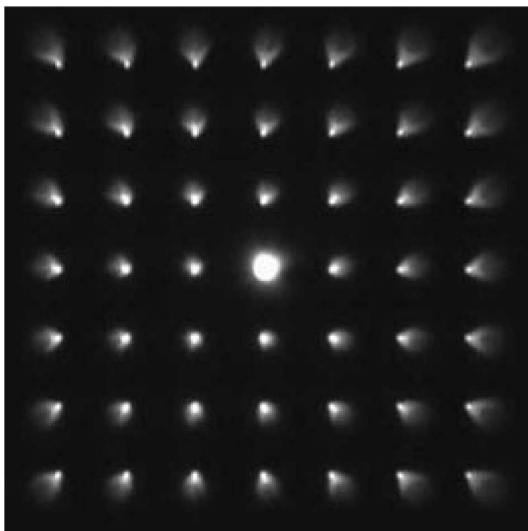


Figura 49

Conjunt d'imatges de punts situats a diferents distàncies de l'eix del sistema òptic. Fixeu-vos que a mesura que els punts estan més allunyats de l'eix la deformació de la imatge en forma de cometa és cada vegada més acusada.

3.5.4. Curvatura de camp

La curvatura de camp es produeix pel fet que la imatge d'un pla perpendicular a l'eix és també un pla en l'aproximació paraxial. En realitat, la imatge és una corba, anomenada *corba de Petzval*. En la figura 50 podeu veure una lent que genera una imatge d'un pla perpendicular a l'eix òptic (σ'_0) i d'una corba esfèrica (σ_0). El que ens interessa de cara a l'aberració de curvatura de camp és que la imatge del pla perpendicular a l'eix és la superfície Σ_p , que clarament no és un pla.

A efectes pràctics, la curvatura de camp és especialment molesta en fotografia, perquè normalment la pel·lícula o fotodetector d'una càmera estan situats en un pla, de manera que la part de les imatges més allunyada de l'eix quedarà desenfocada. La curvatura de camp es pot eliminar parcialment combinant dues o més lents.

3.5.5. Distorsió

La darrera de les aberracions monocromàtiques que considerem és la distorsió. Apareix pel fet que, a vegades, l'augment que produeix un sistema òptic depèn de la distància respecte a l'eix òptic. Així, en absència d'altres aberracions, la imatge es veu ben enfocada però deformada. En funció de si l'augment del sistema creix o disminueix a mesura que ens allunyem de l'eix òptic tenim, respectivament:

Σ la lletra grega sigma majúscula.
 σ és la lletra grega sigma minúscula.

- **distorsió de coixinet**, o distorsió positiva, en què l'augment augmenta a mesura que ens allunyem de l'eix òptic. Les imatges es distorsionen de manera que semblen "estirades" pels quatre vèrtexs de l'enquadrament de la imatge;
- **distorsió de barril** o distorsió negativa, en què l'augment disminueix a mesura que ens allunyem de l'eix òptic. Les imatges es distorsionen de forma que semblen bombades.

Figura 50. Curvatura de camp

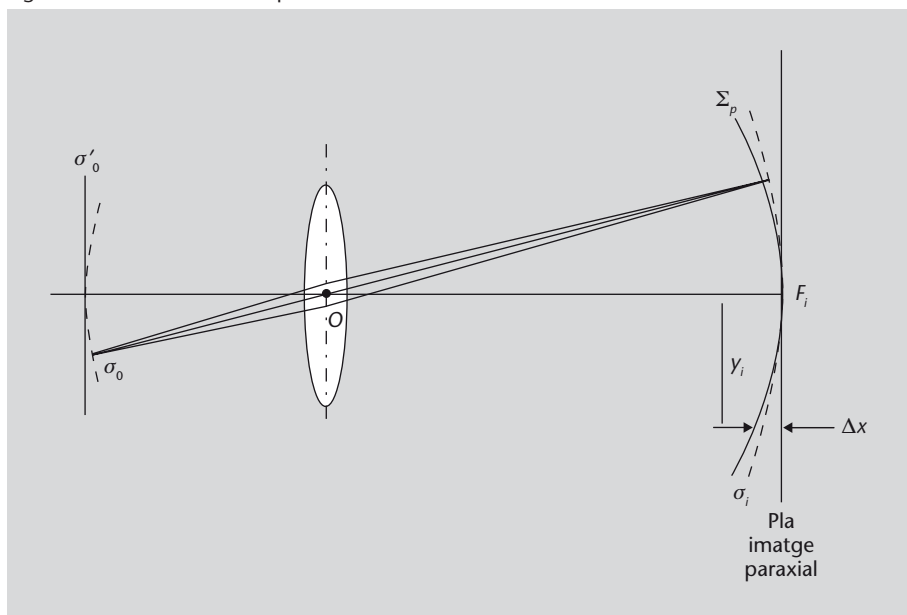


Figura 50

Una lent genera una imatge d'un pla perpendicular a l'eix òptic (σ'_0) i d'una corba esfèrica (σ_0). La imatge del pla perpendicular a l'eix és la superfície Σ_p , que no és un pla.

En la figura 51 podeu observar una imatge perfecta, sense aberracions (figura 51a), una produïda per un sistema amb distorsió de coixinet (figura 51b) i una produïda per un sistema amb distorsió de barril (figura 51c).

Figura 51. Distorsió

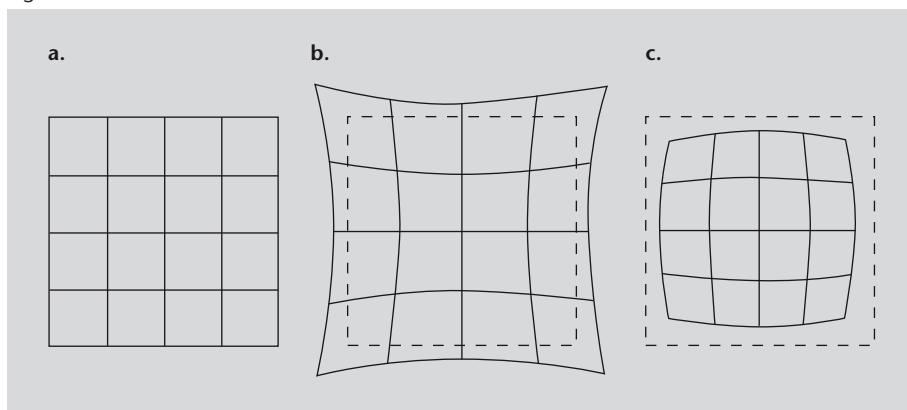


Figura 51

a. Imatge perfecta, sense aberracions, d'una retícula;
 b. imatge de la mateixa retícula produïda per un sistema amb distorsió de coixinet;
 c. imatge de la retícula produïda per un sistema amb distorsió de barril.

3.5.6. Aberració cromàtica

Fins ara, les aberracions que hem vist es produeixen amb qualsevol mena de llum, sigui d'un sol color o sigui llum blanca (de tots els colors). Ara consi-

derarem una aberració especialment important que es produeix només quan s'utilitza llum que conté diverses freqüències (és a dir, diversos colors). En la figura 52 podeu veure un exemple d'aquesta aberració: a la part de dalt podeu veure la imatge sense aberració i a baix la mateixa imatge però afectada d'aberració cromàtica. Si us hi fixeu podreu observar com els colors vermell i blau estan desplaçats, d'una manera que es fa especialment evident a les cornises de l'edifici: la cornisa de l'esquerra té una vora vermella, mentre que la cornisa de la dreta té una vora blava molt visible.*

Figura 52. Exemple d'aberració cromàtica



Font: Wikimedia Commons; autor: Stan Zurek

Què està passant? Recordeu que en el subapartat 2.6. vam parlar de la dispersió: el fet que l'índex de refracció depèn de la longitud d'ona de la llum. Vam veure com, quan un raig de llum es refracta, les diferents longituds d'ona es desvien en angles lleugerament diferents. En les lents, que són sistemes òptics que treballen per refracció, això, lògicament, també passarà. És més, suposarà un problema important.

Fixeu-vos en la figura 53. Els rajos que arriben a la lent es focalitzen en punts diferents en funció de la longitud d'ona: les longituds d'ona curtes, com el blau, es desvien més i, per tant, queden focalitzades més a prop de la lent, mentre que les longituds d'ona més llargues, com el vermell, es desvien menys i es focalitzen més lluny de la lent. En la figura està indicat el focus per al color blau (F_B) i el focus per al vermell (F_V). A F_B la imatge quedarà enfocada clarament en el color blau, però cada punt estarà envoltat d'una taca vermella; en canvi, a F_V els punts es veuran nítidament en el vermell, però els seus contorns tindran una taca borrosa blavosa al seu voltant. Igual que en altres aberracions, també es pot definir un cercle de mínima confusió (Σ_{LC} en la imatge), on la imatge és millor, i també es defineix la quantitat anomenada *aberració cromàtica axial* (ACA en la figura) com la distància entre el focus vermell i el focus blau.

* Podeu veure els colors en la versió pdf.

Figura 52

Exemple d'aberració cromàtica en una fotografia presa per una càmera. A dalt podeu veure la imatge sense aberració i a baix la mateixa imatge però afectada d'aberració cromàtica. L'efecte és especialment visible a les vores de la zona dreta de la imatge, on s'observa una gradació del vermell al blau (fixeu-vos, per exemple, en les cornises de l'edifici).

Els miralls i l'aberració cromàtica

En els miralls, que treballen només per reflexió, no es produeix el problema provocat per la dispersió i, per tant, no tenen aberració cromàtica.

La lletra Σ correspon a la lletra grega sigma majúscula i es llegeix "sigma".

Figura 53. Aberració cromàtica

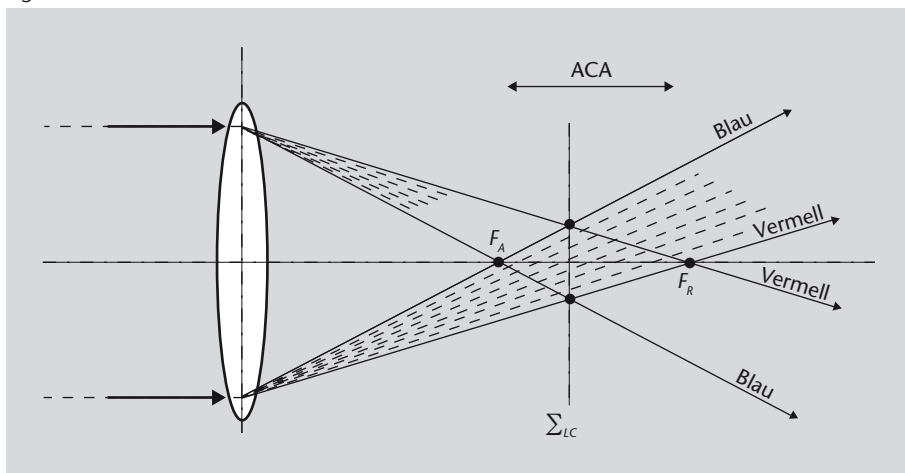


Figura 53

Els rajos que arriben a la lent es focalitzen en punts diferents en funció de la longitud d'ona: les longituds d'ona curtes, com el blau, es desvien més i, per tant, queden focalitzades més a prop de la lent. Indiquem el focus per al color blau (F_B) i el focus per al vermell (F_V), el cercle de mínima confusió (Σ_{LC}) i l'aberració cromàtica axial (ACA).

L'aberració cromàtica es pot compensar amb unes combinacions de lents anomenades *doblets acromàtics*.

Doblets acromàtics

Com que les lents convergents i les divergents desvien els rajos en sentits contraris, semblaria que combinant dues d'aquestes lents podríem compensar, ni que fos una mica, la desviació provocada per l'aberració cromàtica. Aquestes parelles de lents que corregeixen parcialment l'aberració cromàtica són els **doblets acromàtics**. Els doblats aconseguen fer que com a mínim dos colors (normalment s'escull el blau i el vermell, ja que són els més allunyats) tinguin el mateix focus, tot i que altres colors segueixen quedant focalitzats en altres punts, com podeu veure en l'esquema de la figura 54.

Figura 54. Doblet acromàtic

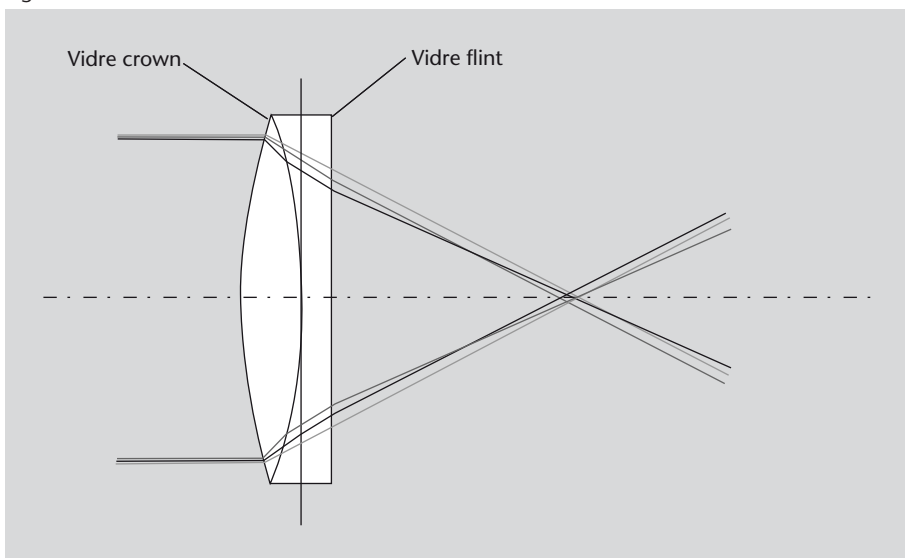


Figura 54

Un doblat acromàtic, format per una lent convergent de vidre crown i una lent divergent de vidre flint.

Normalment les dues lents d'un doblat es fabriquen amb vidre de tipus diferents: els més habituals són el **vidre flint**, que és un vidre de nombre d'Abbe baix (i, per tant, molt dispersiu) i el **vidre crown**, que és un vidre de nombre d'Abbe alt (i, per tant, poc dispersiu).

Vam definir el nombre d'Abbe en el subapartat 2.6.1. d'aquest mòdul. Recordeu que ens permetia mesurar i caracteritzar el grau de dispersió d'un material.

3.6. Índex de refracció no uniforme

Al començament del mòdul, quan vam introduir l'índex de refracció i la longitud de camí òptic (subapartat 2.2.2.) vam considerar la possibilitat de materials en què l'índex de refracció no fos uniforme, és a dir, no fos igual a tot arreu, sinó que pogués anar canviant gradualment. El cert és que després no hem considerat en cap moment materials d'aquesta mena, en part per la major dificultat de tractar-los matemàticament i en part perquè fins fa pocs anys eren de fabricació complexa i no eren gaire habituals.

Tot i així, a la naturalesa hi ha un medi ben abundant en què l'índex de refracció varia de forma gradual: l'aire. I en aquest medi es produeixen una sèrie d'efectes causats per la variació gradual del seu índex: els miratges. Estudiem-los breument.

3.6.1. Miratges

En l'aire que ens envolta, una variació de temperatura qualsevol (i, per tant, de densitat) crea una variació de l'índex de refracció de l'aire en funció de l'altura. En aquesta situació, en dies molt càlids es pot produir el fenomen dels **miratges**. Si fa molta calor en un dia clar, algunes superfícies com les roques, la sorra o l'asfalt d'una carretera poden arribar a escalfar-se molt i es pot formar una capa d'aire molt calent a prop de la superfície. En aquest cas el gradient en l'índex de refracció és tan fort que els rajos de llum que passen a la vora de la superfície, o que es dirigeixen cap al terra, es desvien tal com mostrem en la figura 55. El resultat és que un observador veu rajos de llum procedents d'un objecte situat sobre el terra com si procedissin de sota el terra.

Figura 55. Miratge inferior

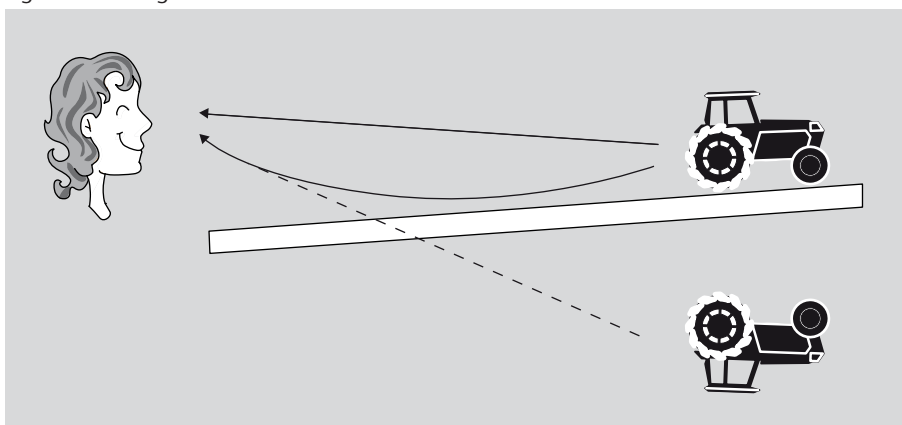


Figura 55

Esquema de la formació d'un miratge inferior. Els rajos de llum procedents d'un objecte i que passen a la vora de la superfície, o que es dirigeixen cap al terra, es desvien cap amunt i arriben a l'observador.

Aquesta mena de miratges, anomenats més específicament **miratges inferiors**, és la més habitual i és el tipus que segurament tots heu pogut observar en alguna carretera un dia d'estiu, en forma d'aparents tolls d'aigua sobre el

terra, com els que es veuen en la figura 56. Els tolls d'aigua no són tals, sinó miratges que ens fan veure una imatge virtual del cel, dels arbres i dels cotxes.

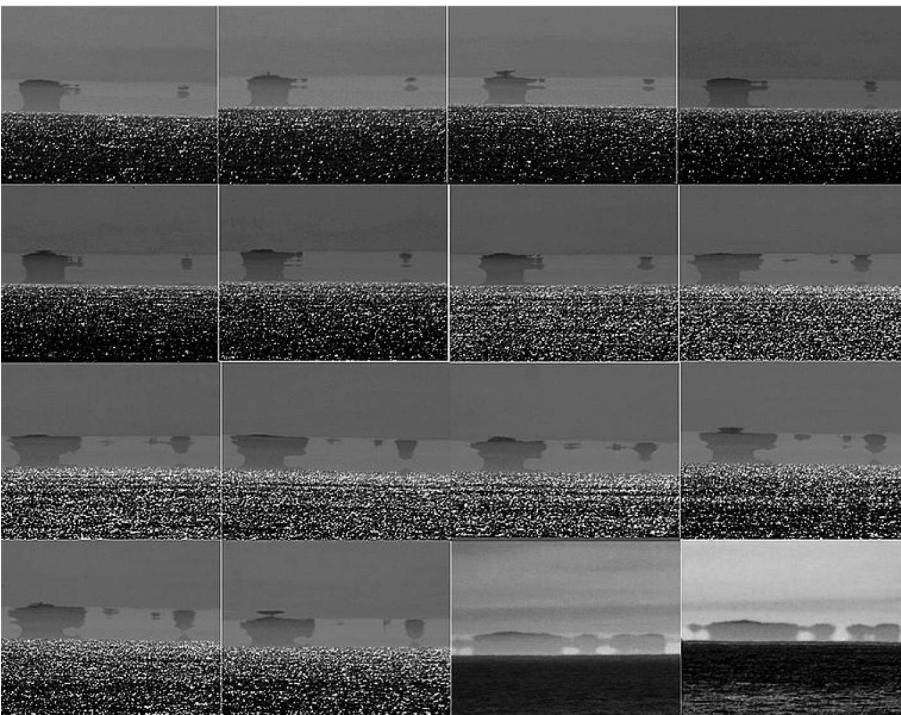
Figura 56. Miratge inferior en una carretera



Font: Wikimedia Commons; autor: Tom Ruen

Però també hi ha els **miratges superiors**, que es produeixen precisament quan es dóna la situació contrària: l'aire situat per sota de la línia de visió és més fred que el que es troba al damunt; en aquest cas els rajos es corben cap a baix i veiem una imatge virtual sobre l'objecte real. A vegades es poden veure objectes que resulten invisibles des d'on som (perquè a causa de la curvatura de la Terra estan sota l'horitzó) surant sobre l'horitzó. Aquesta mena de miratge és més habitual a les regions polars i són més estables que els inferiors, ja que l'aire fred no té tendència a pujar i roman a baixa altura durant més temps.

Figura 57. Fata morgana



Font: Wikimedia Commons; autor: Mila Zinkova

Figura 57

Seqüència d'imatges de les illes Farallon, vistes des de San Francisco. En condicions normals les illes no es poden veure des de San Francisco, ja que queden sota l'horitzó. En aquesta seqüència de 16 imatges, les illes es veuen sempre just sobre l'horitzó o surant-hi al damunt. Les 14 primeres són una successió ràpida de fenòmens de fata morgana, amb imatges canviants i deformacions diverses; les dues últimes són un miratge superior normal.

Un cas especialment sorprenent de miratge és el fenomen anomenat **fata morgana** o *halgerndingar* (figura 57). Es tracta d'un cas especialment complex de miratge superior, que s'alterna amb miratges inferiors i imatges, a vegades múltiples, que contenen zones comprimides i ampliades i que canvien de dretes a invertides en qüestió de segons.

Halgerndingar és la denominació islandesa del fenomen de la fata morgana, i també s'utilitza sovint.

3.6.2. Els medis de gradient d'índex

La desviació gradual dels rajos de llum en un medi d'índex de refracció no uniforme és la base dels anomenats **medis de gradient d'índex**, o **medis GRIN**.

Escollint adequadament la variació de l'índex de refracció quan es fabrica un material, es poden aconseguir materials que desviïn la llum de la forma que nosaltres vulguem. Per exemple, s'utilitzen sovint per a fabricar lents, anomenades *lents GRIN*, que permeten tenir una lent que funciona com una lent estàndard però que no cal que tingui la forma habitual, ja que la convergència o divergència dels rajos no s'aconsegueix per la forma de la lent, sinó per la variació del seu índex de refracció.

Per a entendre-ho millor, fixeu-vos en la figura 58. Tenim un tros de vidre en què l'índex de refracció varia amb un perfil parabòlic (és a dir, $n(x) \propto x^2$). En aquesta situació el tros de vidre aconseguix focalitzar rajos de llum paral·lels en un punt, de la mateixa manera que ho faria una lent convergent normal. Penseu que els rajos propers al centre del tros de vidre van més lents (l'índex de refracció és més alt i, per tant, la velocitat de propagació de la llum és més baixa) que els rajos que passen lluny del centre. D'aquesta manera el front d'ona es corba adoptant un perfil còncau i, en conseqüència, els rajos de llum es corben cap a la zona central.

Figura 58. Medi de gradient d'índex

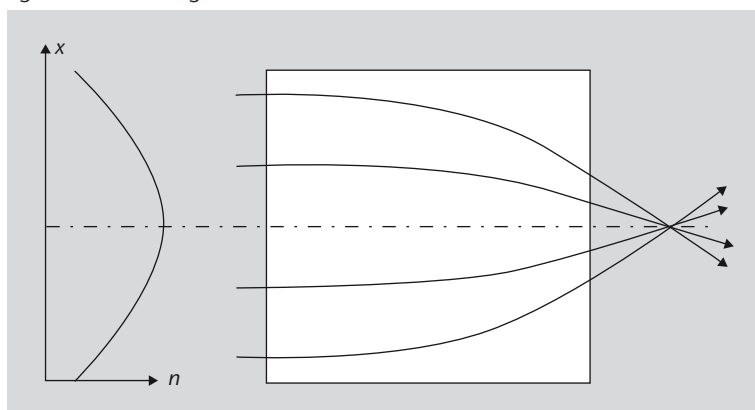


Figura 58

Tros de vidre en què l'índex de refracció varia de forma contínua amb un perfil parabòlic $n(x) \propto x^2$. El tros de vidre focalitza els rajos de llum paral·lels en un punt, igual que una lent convergent normal.

Les lents GRIN són molt més fàcils de manipular que les lents estàndard. Un avantatge molt important és que la seva superfície és plana i no corbada. Això fa que sigui molt fàcil crear unions de qualitat amb altres lents o amb fibres òptiques, per exemple.

Precisament, els medis GRIN també s'utilitzen en la fabricació de fibres òptiques, que ja hem estudiat en el subapartat 2.5. En aquestes fibres l'índex de refracció del nucli decreix gradualment des de l'eix fins al revestiment. Així, els rajos de llum es van desviant suaument a mesura que s'apropen al revestiment, en lloc de reflectir-se de cop per reflexió total interna quan hi arriben. A més, aquestes trajectòries redueixen la dispersió causada pels diferents camins òptics dels rajos que entren a la fibra en angles diferents.

Cal destacar que l'ull humà també utilitza una variació gradual de l'índex de refracció per a enfocar les imatges, a més de la seva forma. I precisament és l'ull humà, i més generalment els òrgans de visió, el protagonista del següent apartat d'aquest mòdul. A continuació ens ocuparem de com els éssers vius perceben els estímuls visuals i com funcionen els seus òrgans de visió.

3.7. Què hem après?

Després d'haver vist en l'apartat anterior les bases de l'òptica geomètrica, en aquest hem aplicat tot això a diversos sistemes òptics simples. Hem introduït el concepte de sistema òptic i, especialment, d'imatge, concepte que intuïtivament sembla fàcil però que no ho és tant si volem definir-lo de forma precisa.

Com que l'aplicació de les lleis de l'òptica geomètrica a un sistema concret pot arribar a ser molt laboriosa, hem introduït l'aproximació paraxial, que simplifica enormement els càlculs i és prou bona en molts casos. Fent ús d'aquesta aproximació, doncs, hem atacat el problema principal que es planteja en òptica geomètrica: determinar com és la imatge d'un objecte creada per un sistema òptic. I això ho hem fet per a diòptres, per a lents i per a miralls.

Però, és clar, l'aproximació paraxial és precisament això, una aproximació, de manera que la realitat sempre serà una mica més complexa. En aquest sentit hem fet un repàs a les diferències més importants entre el que prediuen els càlculs fets amb l'aproximació paraxial i el que es pot observar a la realitat. És a dir, hem fet un repàs de les aberracions més importants.

Finalment, com a aspecte complementari, hem donat una breu pinzellada sobre els materials que tenen un índex de refracció no uniforme, cada vegada més utilitzats.

Dispersió mínima

Es pot demostrar que la dispersió és mínima quan l'índex varia de la forma parabòlica $n(r) = n_0(1 - ar^2)$, on a és una constant i n_0 , l'índex de refracció a l'eix de la fibra.

4. Percepció de la llum

De la mateixa manera que hem fet quan parlàvem d'acústica, ara ens preguntarem com percebem els éssers humans els estímuls visuals, és a dir, com captem les ones electromagnètiques de la banda visible.

4.1. Els ulls com a instruments òptics

En els organismes vius, la forma més senzilla de detectar llum és una simple capa de cèl·lules fotosensibles, és a dir, cèl·lules que quan reben llum reaccionen d'alguna manera (generen un impuls nerviós, un senyal químic, etc.) i d'aquesta manera provoquen una determinada acció de l'organisme. Un exemple d'això el teniu en la figura 59.

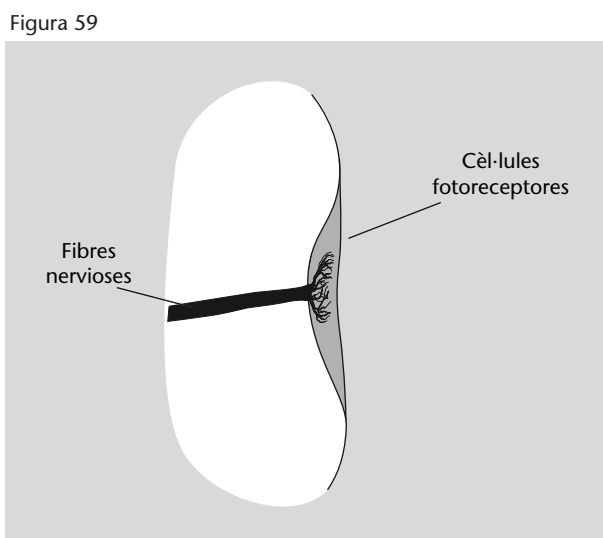


Figura 59

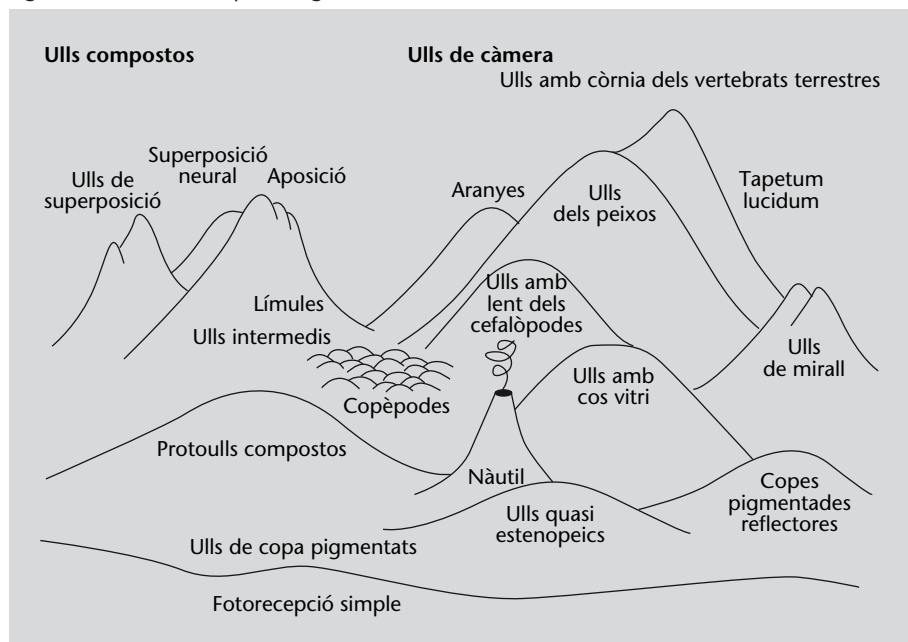
Esquema del mecanisme fisiològic més simple de detecció de llum. Una capa de cèl·lules fotoreceptores, que generen alguna mena de senyal (elèctric o químic) quan hi incideix llum.

Una capa de cèl·lules fotosensibles permet determinar la presència o absència de llum. Això pot ser un avantatge evolutiu important, posem per cas, per a animals aquàtics que suren a una determinada profunditat: el seu òrgan de visió els permet diferenciar entre "amunt" i "avall", per exemple. Ara bé, aquesta mena d'òrgan de visió no permet determinar gaire la direcció de la llum que arriba i, encara menys, formar imatges.

A partir d'aquí, en molts organismes s'han anat seleccionant òrgans de visió més sofisticats. De fet, en algun moment o altre en la natura han aparegut totes les possibles maneres de capturar llum, excepte els mecanismes de zoom i les lents de Fresnel (vegeu el subapartat 3.4.2.), que mai no han evolucionat de manera natural. En la figura 60, es mostra un esquema "metafòric" dels

diversos tipus d'òrgans de visió existents. Més enllà de la simple fotorecepció, els òrgans de visió que podem trobar en el món animal són bàsicament de dos tipus, ulls de càmera i ulls compostos (que formen els dos grans grups de “muntanyes” de la figura 60), i en tots dos casos podem trobar ulls que funcionen per simple projecció d'ombra, per refracció i per reflexió. Els sistemes visuals més complexos poden distingir formes i colors i avaluar distàncies i necessiten àrees relativament grans del cervell per a processar la informació.

Figura 60. Els diversos tipus d'òrgans de la visió



Font: adaptat de Dawkins (1996)

Figura 60

Esquema dels diversos tipus d'òrgans de la visió existents al món animal. L'altura de la muntanya representa aproximadament la complexitat de cada sistema de visió. Podeu veure dos grans grups: els ulls de càmera i els ulls compostos.

Evolució i sofisticació

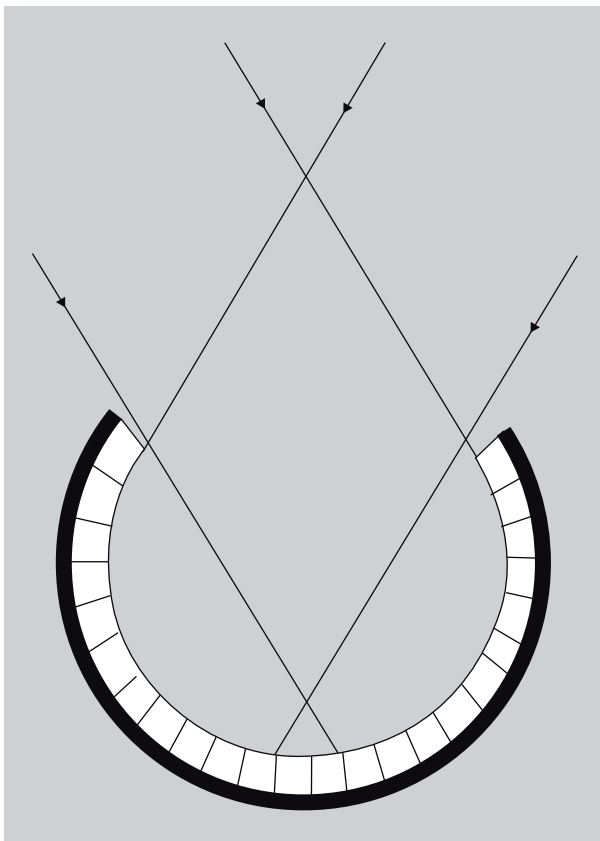
Cal tenir ben present que uns organismes han desenvolupat sistemes visuals molt sofisticats, mentre que altres s'han mantingut molt simples. Això no implica que uns siguin millors que altres. Cada organisme ha anat evolucionant a través de la selecció de les característiques que els permetien reproduir-se amb avantatge sobre els seus competidors. Un sistema visual extremadament simple no permet “observar” el món del voltant, però per contra implica un consum de recursos molt baix i si això ha donat un avantatge evolutiu a un organisme, és que és una solució tan bona com el nostre ull tan sofisticat. Penseu que un ull molt sofisticat no serveix de res si no disposa d'una unitat de processament (un cervell) capaç d'interpretar una informació tan complexa, i un cervell complex exigeix una despesa enorme de recursos per part de l'organisme.

Val la pena aturar-se mínimament a veure com funcionen els diversos tipus d'ulls, ja que cada un és un sistema òptic i els podem entendre a partir del que heu vist en aquest mòdul:

- **Ulls de càmera.** Són tots els ulls que es basen en una superfície còncava recoberta d'una capa de cèl·lules fotosensibles. Entre aquests podem trobar:
 - **Ulls de copa.** Partint de la simple capa de cèl·lules fotosensibles, es limiten a posar aquesta capa en una superfície còncava. A més de protegir la zona

fotosensible, això permet, com a mínim, tenir una certa idea de la direcció de la llum incident (vegeu la figura 61). No hi ha refracció ni reflexió, és un ull que treballa per projecció d'ombra. És el tipus d'ull més abundant, i es troba en un 85% dels fílums animals. Acostumen a ser petits, amb un diàmetre d'uns 100 μm i unes 100 cèl·lules.

Figura 61. Ull de copa



Fílum

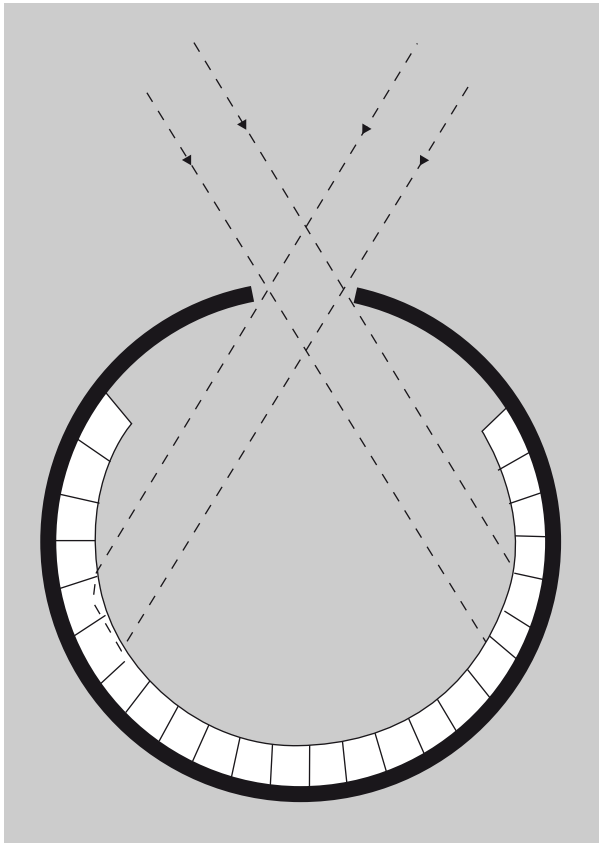
Un fílum (en llatí *phylum*) és la divisió taxonòmica que està per sota del regne. Per exemple en el regne animal (Animalia) actualment es consideren 36 fílums, dels quals els més familiars potser són els mol·luscs (Mollusca), els anèl·lids (Annelida), els artròpodes (Arthropoda) i els cordats (Chordata) el fílum al qual pertanyem els humans.

Figura 61

La capa de cèl·lules fotosensibles col·locada en una superfície còncava, amb propòsits de protecció, permet identificar la direcció de la llum.

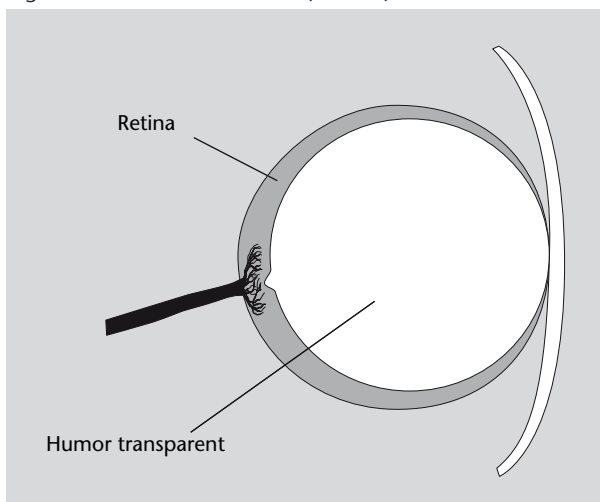
- **Ulls estenopecs.** Els ulls estenopecs són ulls de copa amb una obertura molt petita (vegeu la figura 62). Un ull de copa no permet formar imatges, però reduint al màxim l'obertura de la superfície còncava es pot: a) discriminar molt millor la direcció de la llum; b) si l'obertura és prou petita, formar una imatge poc nítida del que es té al davant. En aquesta mena d'ull tampoc no hi ha refracció ni reflexió. Actualment només es troba en els nautiloïdeus, una subclasse dels cefalòpodes que inclou els nautilus.
- **Ulls amb massa vítria.** Els ulls estenopecs només poden produir bones imatges si l'obertura es fa molt i molt petita, però això té l'inconvenient de reduir la quantitat de llum disponible. Una solució és omplir tot l'espai de la superfície còncava amb un material transparent però d'un índex de refracció diferent al del aire (vegeu la figura 63). Això, en primer lloc, augmenta la protecció de les cèl·lules fotosensibles i, en segon lloc, permet formar imatges. Al capdavant, els ulls amb una massa vítria (més correctament anomenada *cos vitri*) funcionen igual que un dioptr: formen la imatge de la mateixa manera que la formen els dioptrés que heu estudiat en el subapartat 3.4.1. Aquí ens trobem, doncs, amb el primer ull que treballa per refracció.

Figura 62. Ull estenopec

**Figura 62**

La cavitat on es troben les cèl·lules fotorreptores es tanca cada vegada més fins a quedar oberta només per un orifici relativament petit, anomenat *estenop*.

Figura 63. Ull amb massa vítria (cos vitri)

**Figura 63**

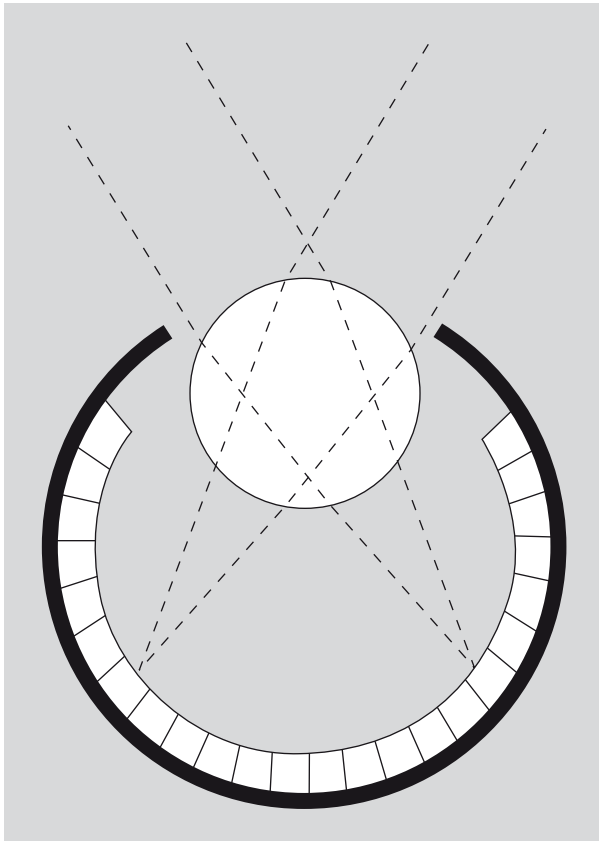
La cavitat còncava on es troben les cèl·lules fotorreptores s'omple d'un teixit transparent a mode de protecció. El teixit transparent (el cos vitri) actua com a dioptr i permet formar imatges amb prou intensitat de llum.

- **Ulls amb lents.** En diversos organismes, dels ulls amb cos vitri es va passar a ulls amb lents, per un procés de diferenciació progressiva de la capa de cèl·lules del cos vitri més propera a l'exterior. Aquesta capa, finalment, es va diferenciar tant que va constituir un teixit independent, una lent (vegeu la figura 64). La lent permet focalitzar molt millor i, en molts casos, enfocar a moltes distàncies diferents variant la seva curvatura (mitjançant mecanismes diversos). Aquests ulls es poden sofisticar encara més incorporant-hi, per exemple, mecanismes de control de la quantitat de llum que pot penetrar a l'ull.

Lents del trilobits

En tots els animals actuals la lent que podem observar en els ulls és un teixit tou, però se sap que en els trilobits, actualment extingits, les lents estaven formades per cristalls de calcita.

Figura 64. Ull de lent

**Figura 64**

La diferenciació d'una part del teixit del cos vitri permet crear una lent que pot focalitzar més fàcilment els objectes sobre la superfície interna, on es troben les cèl·lules fotorreptores.

- **Ulls reflectors.** No utilitzen cap mena de lent per focalitzar la llum, sinó un mirall. Disposen d'una capa de teixit molt reflector que focalitza la llum cap a una capa de cèl·lules fotosensibles situades abans del teixit reflector (vegeu la figura 65). Aquí tenim, doncs, un tipus d'ull que treballa per reflexió. Cal dir que molts vertebrats, malgrat disposar d'ulls de lents, també utilitzen la reflexió, però no per a focalitzar, sinó per a augmentar la quantitat de llum que arriba a les cèl·lules fotorreptores. Això ho fan amb una capa de teixit reflector, que s'anomena *tapetum lucidum*, situada just darrere de la capa de teixit on es troben les cèl·lules fotorreptores (la retina), i és la responsable dels ulls brillants que podem observar en molts animals (com els gats, per exemple) quan és de nit.

Figura 65. Ull reflector

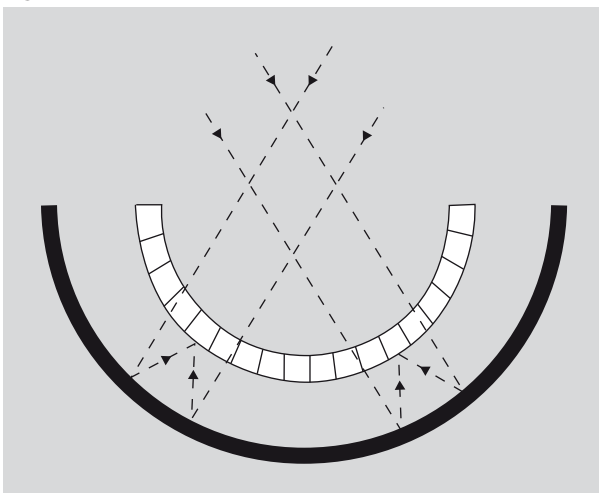


Foto del lepilemúrid *Lepilemur randrianasoli*. Els ulls brillants són provocats pel *tapetum lucidum*. Font: Wikimedia Commons

Figura 65

En lloc d'utilitzar la refracció, un ull estrictament reflector focalitza la llum sobre les cèl·lules fotorreptores, situades davant.

- **Ulls compostos.** Estan formats per un conjunt de petites càmeres, cadascuna corresponent a un grup reduït de cèl·lules fotosensibles, situades sobre una superfície convexa i anomenades *omatidis*, com podeu veure en la figura 66. La imatge s'obté superposant el que s'obté a cadascun dels omatidis. En comparació amb els ulls de càmera, els ulls compostos tenen un gran camp de visió però tenen problemes de resolució. Els ulls compostos els trobem en molts artròpodes, però també en alguns annèlids, alguns bivalves i alguns crustacis. En el cas dels ulls compostos cada omatidi individual pot treballar per refracció o per reflexió, però la classificació més gran es fa en funció de com combinen la llum els diferents omatidis, de la manera següent:
 - **Ulls d'aposició.** Són els més habituals i en ells cada omatidi forma una imatge que després se suma amb les altres en el cervell de l'animal.
 - **Ulls de superposició.** En aquest sistema, menys comú, cada omatidi projecta una part de la imatge sobre les cèl·lules fotoreceptores, de manera que, en conjunt, formen la imatge completa.



Fotografia d'una mosca comuna (*Musca domestica*), on es poden apreciar els seus ulls compostos (font: Wikimedia Commons).

Figura 66

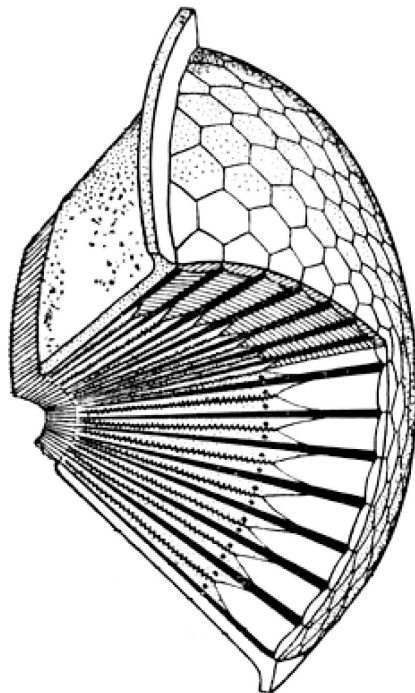


Figura 66. Ull compost

L'ull compost està format per una gran quantitat de petites cavitats allargassades, anomenades *omatidis*, situades sobre una superfície convexa. Cada omatidi correspon a un grup reduït de cèl·lules fotosensibles situades a la seva base, anomenades conjuntament *rabdòmer*.

Els ulls de les galeres

Els crustacis comestibles anomenats *galeres* (que formen l'ordre Stomatopoda) tenen uns ulls especialment sofisticats. Són ulls compostos amb 16 tipus diferents de cèl·lules fotosensibles. Poden detectar la polarització de la llum (una espècie, *Gonodactylus smithii* és l'únic organisme conegut que pot detectar els dos components de polarització lineal i els dos de circular) i tenen visió hiperspectral, és a dir, poden detectar no solament la llum visible sinó també parts de l'ultraviolat i l'infraroig. Cada ull està situat sobre un apèndix i es pot moure independentment de l'altre per a cobrir un gran camp de visió.

Com veieu, doncs, hi ha una gran varietat de sistemes per a captar els estímuls lumínics. Tot i així, tingueu en compte que l'esquema que acabem de presentar és molt simplificat i hi ha moltes variacions i casos particulars més complexos. Ara només ens queda analitzar amb una mica més de detall el nostre ull, l'ull humà.

4.2. L'ull humà

L'ull dels éssers humans, com el de tots els mamífers, és un ull de lent relativament sofisticat. Podeu veure la seva estructura general (la seva anatomia) en la figura 67. La llum entra a l'ull a través d'una obertura variable, la **pupilla**, controlada per l'**iris**, i s'enfoca mitjançant la lent, que s'anomena **cristal·lí**, i la capa transparent més externa, la **còrnia**.

Figura 67. Anatomia de l'ull humà

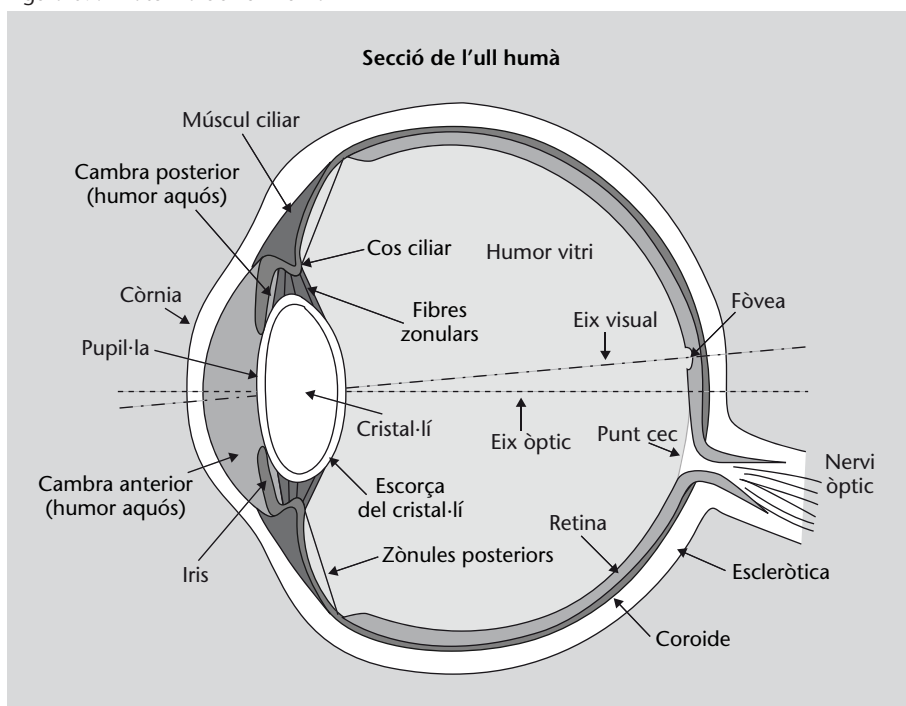


Figura 67

Esquema de l'ull humà. La llum entra a l'ull a través d'una obertura variable, la **pupilla**, controlada per l'**iris**, i s'enfoca mitjançant la lent, que s'anomena **cristal·lí**, i la capa transparent més externa, la **còrnia**. El sistema còrnia-cristal·lí enfoca les imatges sobre una capa de teixit que recobreix tota la part interna del globus ocular, la **retina**. Aquesta capa està formada per un conjunt de fibres nervioses que contenen unes estructures, els **cons** i els **bastonets**, que són les cèl·lules fotosensibles. Aquestes fibres nervioses transmeten la informació recollida cap al nervi òptic, que s'encarrega de fer-la arribar al cervell.

El paper del cristal·lí és modificar la distància focal del sistema i permetre enfocar a diferents distàncies, ja que la còrnia, malgrat que té un poder refractor més gran, no pot variar la seva distància focal. Quan l'ull enfoca objectes llunyans, el cristal·lí està relaxat i es diu que el sistema còrnia-lent treballa sense acomodació.

A mesura que l'objecte s'apropa a l'ull es van tensant un conjunt de músculs anomenats músculs ciliars, que augmenten la curvatura del cristal·lí. Aquest procés, anomenat **acomodació**, té un límit. El punt més proper a l'ull que podem enfocar correctament, amb acomodació màxima, s'anomena **punt pròxim**, que ja ens havia aparegut quan hem explicat la lupa en el subapar-

tat 3.4.4. El punt pròxim en els humans varia amb l'edat: en els nens se situa a uns 5 cm, però en arribar a l'edat adulta no acostuma a estar a menys de 10 cm; amb el pas dels anys, la capacitat de corbar el cristallí va disminuint i el punt pròxim és cada vegada més lluny, i cap als 60 anys pot estar situat ja a 1 metre o fins i tot més, situació en què no es pot llegir normalment, coneguda com a *presbícia*. La situació la teniu il·lustrada esquemàticament en la figura 68.

Figura 68. Punt pròxim de l'ull humà

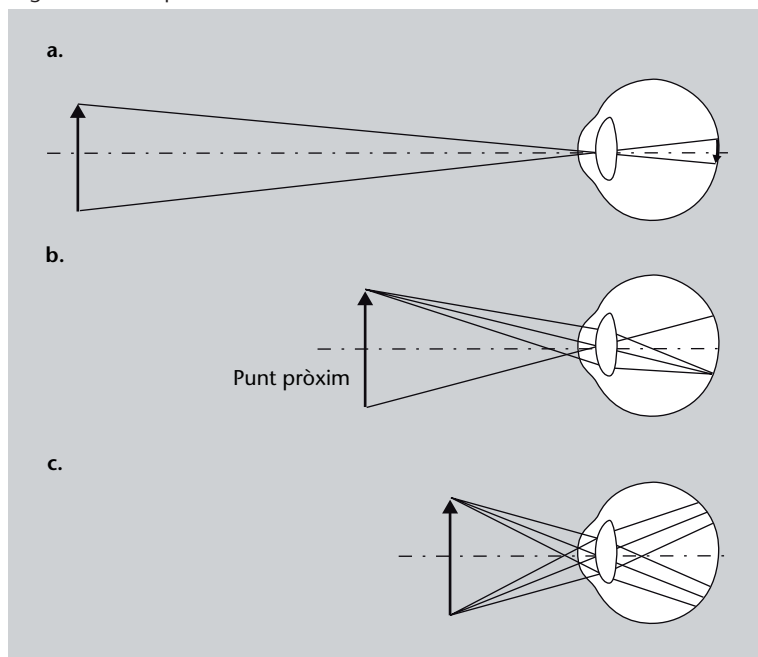


Figura 68

- a. L'ull enfoca correctament un objecte a una certa distància i , per tant, crea una imatge real sobre la retina.
- b. El punt pròxim és el punt més proper a l'ull en què aquest encara pot enfocar correctament un objecte.
- c. A una distància més petita que el punt pròxim l'ull ja no pot crear una imatge sobre la retina.

La còrnia té un índex de refracció aproximat d'1,37 i per això no podem veure molt bé dins de l'aigua, ja que l'aigua té un índex molt semblant (1,33) i, per tant, la refracció que pot aconseguir la còrnia és molt petita. El cristallí, per la seva banda, té un índex de refracció variable: des d'1,41 al centre fins a 1,38 a les vores.

Com acabeu de veure, doncs, l'ull humà es pot assimilar a una lent d'una certa potència que permet formar imatges. Ara bé, on les forma aquestes imatges? El sistema còrnia-cristallí enfoca les imatges sobre una capa de teixit que recobreix tota la part interna del globus ocular, anomenada **retina**. Aquesta capa està formada per un conjunt de fibres nervioses que contenen unes estructures, els **cons** i els **bastonets**, que són les veritables cèl·lules fotosensibles. Aquestes fibres nervioses transmeten la informació recollida cap al nervi òptic, que s'encarrega de fer-la arribar al cervell. Els bastonets són els més abundants (uns 125 milions) i són molt sensibles i permeten veure amb molt poca llum, però no diferencien els colors i donen imatges no gaire nítides (per això en la foscor ens costa distingir colors).

Per la seva banda, els cons (n'hi ha uns 7 milions) només funcionen amb una bona il·luminació, però permeten apreciar els colors i donen imatges molt

L'efecte Purkinje

En bones condicions d'il·luminació (visió fotòpica) la màxima sensibilitat de l'ull humà és per a una longitud d'ona de 555 nm, que correspon a un verd-groc. A mesura que la quantitat de llum disminueix (visió escotòpica), la màxima sensibilitat es va desplaçant cap al blau. Això s'anomena efecte Purkinje (de l'anatomista txec Jan Purkyně) i és la raó per què, amb poca il·luminació, els colors vermellors es veuen molt foscos en comparació amb els blaus, que es veuen molt més clars.

nítides. Hi ha tres tipus de cons, cada un dels quals conté un pigment diferent, que fa que cada tipus tingui sensibilitat màxima a longituds d'ona diferents. Així, un tipus és molt sensible a longituds d'ona llargues (groc), un altre a longituds d'ona mitjanes (verd) i el tercer tipus ho és a longituds d'ona curtes (blau). D'aquesta manera podem reconèixer un color en funció del grau de resposta de cada un dels tres tipus de cons a aquell color.

El daltonisme

Qualsevol trastorn de l'ull que impedeixi percebre correctament els colors s'anomena *discromatòpsia*. El tipus més conegut és el *daltonisme*, que normalment fa referència al *dicromatisme* o *dicromatòpsia*, consistent en la manca d'un dels tres pigments dels cons. Segons quin manqui, el groc, el verd o el blau, es parla de *protanopia*, *deuteranopia* i *tritanopia*, respectivament. El daltonisme afecta aproximadament un 8% dels homes i un 0,5% de les dones. La causa de la diferència entre homes i dones és que la majoria de daltonisme és hereditari i està lligat a mutacions del cromosoma X. Els homes només tenen un cromosoma X, però com que les dones en tenen dos, si un d'ells conté la mutació i l'altre no, el defecte no es manifestarà.

El punt de sortida del nervi òptic no conté receptors i, per tant, no és sensible a la llum i es coneix com a *punt cec*. A prop d'aquest punt, però, hi ha una zona d'uns 3 mm de diàmetre que es coneix amb el nom de **màcula** i, al seu interior, una petita zona de 0,3 mm de diàmetre coneguda com a **fòvea**. Aquestes regions no contenen bastonets i els cons estan molt densament repartits, de manera que és la zona de l'ull que proporciona la informació més detallada en condicions de bona il·luminació.

4.3. Què hem après?

En aquests paràgrafs hem donat una visió general dels diferents sistemes de visió dels éssers vius, en tant que sistemes òptics simples assimilables a dioptrès, lents i miralls. Dins d'una gran varietat de tipus d'ulls podem diferenciar-ne dos: ulls de càmera i ulls compostos. És important adonar-se que, en tots dos casos, podem trobar ulls que treballen per projecció d'ombra, per refracció (com un dioptrè o com una lent) i per reflexió (com un mirall).

Finalment hem donat unes breus pinzellades sobre l'ull dels éssers humans, un ull de lent relativament sofisticat. L'anatomia i la fisiologia del sistema visual humà és molt més complexa del que hem explicat aquí, però val la pena conèixer aproximadament com funciona el nostre ull.

5. Problemes resolts

5.1. Enunciats

1. L'índex de refracció del vidre flint de silicat és 1,66 per a una longitud d'ona de 400 nm i 1,61 per a una longitud d'ona de 700 nm. Determineu els angles de refracció per a aquestes longituds d'ona en el cas d'un raig de llum que incideix sobre el vidre amb un angle de 45° procedent de l'aire.

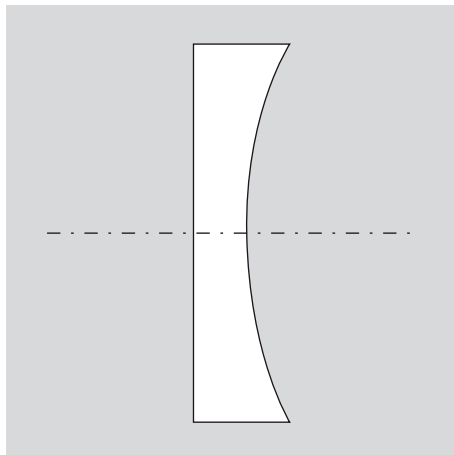
2. Un raig de llum procedent de l'aire entra en un material transparent amb un angle d'incidència de 48° i s'observa que es refracta formant un angle de 32° .

a) Quin és l'índex de refracció del material?

b) Quina és la velocitat de la llum en el material?

3. Determineu la distància focal d'una lent planocòncava, com la de la figura 69, el costat còncav de la qual té un radi de curvatura de 0,1 metres. La lent està feta d'un material de vidre d'índex de refracció 1,5. Quina potència té aquesta lent?

Figura 69. Una lent planocòncava



4. Un objecte que té una altura de 1,5 cm es col·loca davant d'una lent convergent de distància focal 3,0 cm. Trobeu la posició i la grandària de la imatge que la lent crea de l'objecte si:

a) la distància entre la lent i l'objecte és de 10,0 cm.

b) la distància entre la lent i l'objecte és de 2,0 cm.

5. Una làmpada i una pantalla estan separades 4,0 m. Es col·loca una lent convergent entre les dues i la lent projecta una imatge de la làmpada sobre la pantalla que és el doble de gran que la làmpada i invertida, tal com mostrem en la figura 70. Quina és la distància focal de la lent?

Figura 70. Situació estudiada en el problema 5

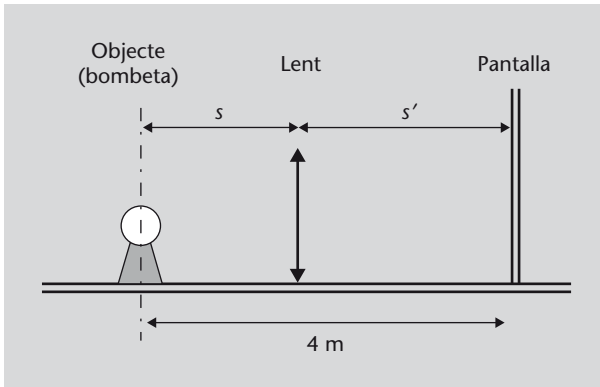


Figura 70

Una làmpada i una pantalla estan separades 4,0 m. Es col·loca una lent convergent entre les dues i la lent projecta una imatge de la làmpada sobre la pantalla. La distància entre la làmpada i la lent és s ; la distància entre la lent i la pantalla és s' .

6. Un raig de llum incideix amb un angle θ_1 sobre una làmina plana de vidre d'espessor d . El raig es refracta a la primera superfície, travessa el vidre, es torna a refractar a la segona superfície i surt de la làmina de vidre. Demostreu que, després de travessar la làmina, el raig de llum té la mateixa direcció que tenia abans de travessar-la (és a dir, surt amb el mateix angle θ_1 que tenia abans d'entrar), tot i que desplaçat, com podeu veure en la figura 71.

Figura 71. Situació estudiada en el problema 6

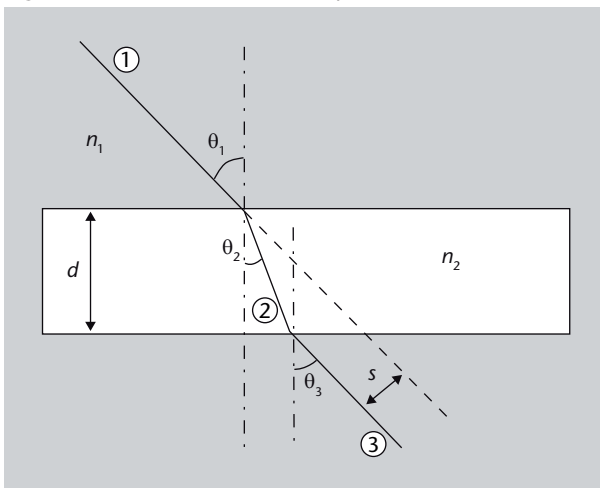


Figura 71

Una làmina de vidre d'espessor d refracta un raig de llum procedent de l'aire dues vegades: en entrar-hi i en sortir-ne. El raig de llum incideix amb un angle θ_1 .

7. Observeu la pintura de Velázquez *Venus del mirall* en la figura 72. La noia s'està mirant al mirall? què o a qui veu la noia? Dibuixeu un petit esquema amb el mirall i els rajos de llum que arriben als ulls de la noia i als ulls de l'espectador (nosaltres). [Adaptat de Hecht (1986)]

Figura 72. *Venus del mirall*, de Diego Velázquez

8. Quin és l'angle del con d'acceptació en l'aire d'una fibra que té un nucli amb índex de refracció 1,492 i un revestiment amb índex de refracció 1,489? Consulteu la figura 10 per tenir a mà un esquema amb els diversos angles implicats.

9. Calculeu la diferència de temps que hi ha entre el temps que triga a recórrer una fibra òptica de 15 km un raig que hi penetra normalment (és a dir, que forma un angle de 0° amb la vertical) i un raig que hi penetra amb l'angle màxim del con d'acceptació. Utilitzeu la figura 10 i suposeu que $n_1 = 1$, $n_2 = 1,492$ i $n_3 = 1,489$ (són les mateixes dades del problema anterior).

5.2. Solucions

1. Aquest problema és una aplicació directa de la llei de Snell, que s'expressa amb l'equació 5:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (80)$$

El problema l'hem de solucionar per a dues longituds d'ona diferents i en ambdós casos sabem:

- l'índex de refracció del primer medi, l'aire: $n_1 = 1$,
- l'angle d'incidència: $\theta_1 = 45^\circ$,
- l'índex de refracció del segon medi, el vidre: $n_2 = 1,66$ (per a $\lambda = 400$ nm) i $n_2 = 1,61$ (per a $\lambda = 700$ nm).

Així:

a) Per a $\lambda = 400$ nm, la llei de Snell resulta:

$$1 \cdot \sin 45^\circ = 1,66 \cdot \sin \theta_2 \quad (81)$$

Aillem θ_2 :

$$\theta_2 = \arcsin \frac{1 \cdot \sin 45^\circ}{1,66} \quad (82)$$

que ens dóna:

$$\theta_2 = 25,2^\circ \quad (83)$$

b) Per a $\lambda = 700 \text{ nm}$, la llei de Snell resulta:

$$1 \cdot \sin 45^\circ = 1,61 \cdot \sin \theta_2 \quad (84)$$

Aillem θ_2 :

$$\theta_2 = \arcsin \frac{1 \cdot \sin 45^\circ}{1,61} \quad (85)$$

que ens dóna:

$$\theta_2 = 26,1^\circ \quad (86)$$

2.

a) Aquest problema també és una aplicació directa de la llei de Snell, l'equació 5:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (87)$$

En aquest cas sabem:

- l'índex de refracció del primer medi, l'aire: $n_1 = 1$,
- l'angle d'incidència: $\theta_1 = 48^\circ$,
- l'angle de refracció: $\theta_2 = 32^\circ$.

Per tant,

$$1 \cdot \sin 48^\circ = n_2 \sin 32^\circ \quad (88)$$

Per tant:

$$n_2 = \frac{1 \cdot \sin 48^\circ}{\sin 32^\circ} = 1,40 \quad (89)$$

b) Ara recordeu, tal com hem dit en el subapartat 2.2.2., que l'índex de refracció d'un medi és igual al quocient entre la velocitat de propagació de la llum en el buit, c_0 , i la velocitat de propagació de la llum en aquell medi, c (equació 1):

$$n = \frac{c_0}{c} \quad (90)$$

En el nostre cas acabem de determinar que n és 1,40, per tant:

$$c = \frac{c_0}{n} = \frac{c_0}{1,40} \quad (91)$$

Com que el valor de c_0 és $3 \cdot 10^8$ m/s, tenim que la velocitat de la llum en el medi considerat és:

$$c = \frac{3 \cdot 10^8}{1,40} = 2,14 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (92)$$

és a dir, 214.000 quilòmetres per segon.

3. En aquest problema ens demanen la distància focal d'una lent, f , sabent-ne els radis de curvatura. Això es pot trobar aplicant directament la fórmula del constructor de lents (equació 57):

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (93)$$

on coneixem:

- l'índex de refracció de la lent: $n = 1,5$,
- els dos radis de curvatura:
 - el cantó pla de la lent té un radi de curvatura infinit, ja que una línia recta es pot considerar sempre una circumferència de radi infinit: $r_1 \rightarrow \infty$,
 - el cantó còncav de la lent té un radi positiu, segons el conveni de signes que hem establert en el subapartat 3.4.1.: $r_2 = 0,1$ m.

Si introduïm tot això en la fórmula del constructor de lents, obtenim:

$$\frac{1}{f} = (1,5 - 1) \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{0,1} \right) \quad (94)$$

Fent els càlculs trobem que

$$f = 0,2 \text{ m} \quad (95)$$

També ens demanen la potència òptica d'aquesta lent. Recordeu que, tal com hem vist en el subapartat 3.3.1., la potència d'una lent és simplement:

$$P = \frac{1}{f} \quad (96)$$

de manera que en el nostre cas,

$$P = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ diòptries} \quad (97)$$

4.

a) Com que sabem la distància focal i la distància de l'objecte a la lent, podem utilitzar la fórmula de les lents primes, equació 58:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (98)$$

on sabem:

- la distància de l'objecte: $s = 0,1 \text{ m}$,
- la distància focal de la lent: $f = 0,03 \text{ m}$.

Posant aquests valors tenim:

$$\frac{1}{0,1} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{0,03} \quad (99)$$

d'on

$$s' = 0,043 \text{ m} \quad (100)$$

Es tracta d'una imatge real, que es forma a 4,3 cm per darrere de la lent. L'augment el podem trobar a partir de l'equació 59, ja que coneixem s i s' :

$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{0,043}{0,10} = -0,43 \quad (101)$$

Com que l'altura de l'objecte és 1,5 cm, l'altura de la imatge serà $-0,43 \cdot 1,5$, és a dir, 0,64 cm i invertida.

b) Estem en la mateixa situació que en el cas a), només canvia la distància de l'objecte, és a dir, sabem:

- la distància de l'objecte: $s = 0,02 \text{ m}$,
- la distància focal de la lent: $f = 0,03 \text{ m}$.

Posant aquests valors tenim:

$$\frac{1}{0,02} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{0,03} \quad (102)$$

d'on

$$s' = -0,06 \text{ m} \quad (103)$$

Es tracta d'una imatge virtual, que es forma a 6 cm per davant de la lent. L'augment el podem trobar a partir de l'equació 59, ja que coneixem s i s' :

$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{-0,06}{0,02} = 3 \quad (104)$$

Com que l'altura de l'objecte és 1,5 cm, l'altura de la imatge serà $3 \cdot 1,5$, és a dir, 4,5 cm i dreta.

5. En aquest problema l'única dada que sabem és que l'augment m és igual a -2 , ja que ens diuen que la imatge és el doble de gran i invertida. Com que l'augment està determinat per l'equació 59:

$$m = -\frac{s'}{s} \quad (105)$$

tenim que

$$-\frac{s'}{s} = -2 \quad (106)$$

Per tant, d'aquesta equació, $s' = 2s$. També sabem que la distància de l'objecte (la làmpada) a la imatge (la pantalla) és de 4 metres. Ara penseu un moment que la distància de l'objecte a la imatge és igual a la distància de l'objecte a la lent més la distància de la lent a la imatge, de manera que:

$$s + s' = 4 \text{ m} \quad (107)$$

però ja hem vist que $s' = 2s$, d'on

$$s + 2s = 4 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{4}{3} \text{ m} \quad (108)$$

i en conseqüència $s' = 8/3$. Ara doncs ja sabem:

- la distància de l'objecte a la lent: $s = 4/3$ m,
- la distància de la lent a la imatge: $s' = 8/3$ m.

Amb aquestes dades ja podem utilitzar la fórmula de les lents primes, equació 58,

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (109)$$

per a trobar f . Substituïm-hi els valors:

$$\frac{1}{4/3} + \frac{1}{8/3} = \frac{1}{f} \quad (110)$$

Fem els càlculs i arribem, finalment, a:

$$f = 0,89 \text{ m} \quad (111)$$

6. En aquest problema ens demanen que demostrem que l'angle θ_3 de la figura és, en realitat, igual a θ_1 . Plantegem les equacions de la refracció (Llei de Snell, equació 5) per a la primera i la segona refraccions, a l'entrada i a la sortida del tros de vidre:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (112)$$

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_3 \quad (113)$$

Fixeu-vos que tenim un tros de vidre dins d'un medi qualsevol, és a dir, el tros de vidre està envoltat d'aquest medi, per això el medi d'entrada a la primera refracció és el mateix que el medi de sortida a la segona refracció i utilitzem el mateix índex de refracció n_1 . Fixeu-vos també com, atès que la làmina de vidre és plana i, per tant, els seus costats són paral·lels, l'angle de refracció en la primera refracció és igual a l'angle d'incidència en la segona refracció, θ_2 .

Ara aïllem $\sin \theta_3$ en l'equació 113 de la segona refracció:

$$\sin \theta_3 = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_2 \quad (114)$$

Però $\sin \theta_2$ el podem trobar a partir de l'equació 112 de la primera refracció:

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \quad (115)$$

Substituïm això en l'equació 114 i tenim:

$$\sin \theta_3 = \frac{n_2}{n_1} \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \quad (116)$$

d'on ens queda:

$$\sin \theta_3 = \sin \theta_1 \quad (117)$$

Això només es pot complir si $\theta_3 = \theta_1$ o bé $\theta_3 = \theta_1 + \pi$. Ara bé, el segon cas és impossible, perquè no pot sortir cap raig refractat amb angles superiors a $\pi/2$. Per tant, només ens queda la possibilitat que:

$$\theta_3 = \theta_1 \quad (118)$$

que és el que volíem demostrar!

Si voleu, com a exercici complementari us deixem la tasca de determinar el desplaçament que ha sofert el raig, s , en funció de l'angle d'incidència θ_1 i l'espessor d .

7. El primer que cal observar és el fet que nosaltres, l'espectador, veiem al mirall la cara de la noia. Això vol dir que els rajos de llum que surten de la cara de la noia, després de reflectir-se al mirall arriben a on som nosaltres. Per tant, la noia no s'està mirant al mirall, no hi ha cap raig de llum procedent de la seva cara que, després de reflectir-se torni als seus ulls. Podeu veure això a l'esquema de la figura 73.

Figura 73. Esquema per al quadre *Venus del mirall*, de Diego Velázquez

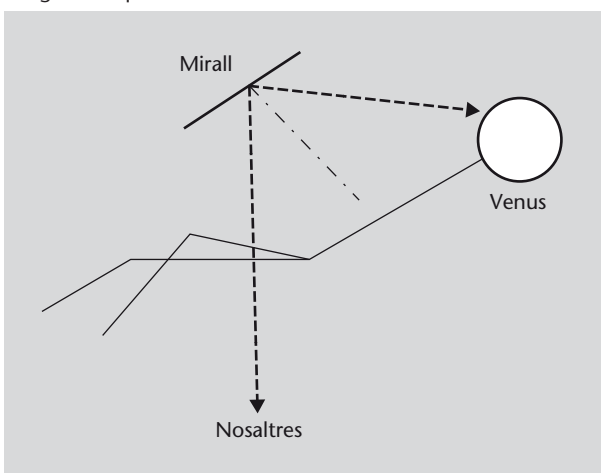


Figura 73

Si nosaltres estem veient la cara de la noia, és que aquesta ens està veient a nosaltres, com podeu comprovar en l'esquema, seguint el raig de llum que hem traçat entre els seus ulls i nosaltres.

Hem vist que la noia no es pot veure al mirall. Què veu, doncs? Hem establert que els rajos que surten de la seva cara arriben als nostres ulls. Així, els rajos que surten de la nostra cara, després de reflectir-se, aniran a parar, precisament, a la seva cara. És a dir, la noia ens està mirant a nosaltres!

8. Sabem que la meitat de l'angle del con d'acceptació correspon a l'angle crític en la separació entre el nucli i el revestiment. Un raig que arribi a la fibra amb

l'angle del con d'acceptació estarà just al límit de ser reflectit totalment, és a dir, arribarà al revestiment amb l'angle crític θ_c .

Si observeu la figura 10 podeu veure que si podem determinar l'angle crític (equació 11), podem saber immediatament l'angle θ_2 , ja que a partir del triangle rectangle format pels costats a , b i c tenim que $\theta_2 = \pi/2 - \theta_c$. I una vegada sapiguem θ_2 podem trobar θ_1 aplicant la llei de Snell (equació 5).

Les dades que sabem són:

- Els índexs de refracció de l'aire: $n_1 = 1$,
- Els índexs de refracció del nucli: $n_2 = 1,492$,
- Els índexs de refracció del revestiment: $n_3 = 1,489$.

Comencem, doncs, calculant l'angle crític en la frontera nucli-revestiment. Segons l'equació 11,

$$\theta_c = \arcsin \frac{n_3}{n_2} = \arcsin \frac{1,489}{1,492} = 1,5073 \text{ rad } (86,36^\circ) \quad (119)$$

Com hem dit abans, a partir de θ_c podem trobar θ_2 , ja que

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_c \quad (120)$$

per tant,

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - 1,5073 = 0,0634 \text{ rad } (3,64^\circ) \quad (121)$$

Ara, aplicant la llei de Snell (equació 5):

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (122)$$

tenim que

$$\theta_1 = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_2 = \arcsin \frac{1,492}{1} \sin 0,0634 = 0,0947 \text{ rad } (5,43^\circ) \quad (123)$$

Per tant, la meitat del con d'acceptació és $5,43^\circ$ i tot el con d'acceptació abasta un angle de $10,86^\circ$.

9. A partir de la figura 10 podeu veure que mentre un raig que penetri horitzontalment en la fibra recorrerà una distància a , un raig que penetri amb l'angle del con d'acceptació recorrerà una distància c .

Fixeu-vos que la relació entre les distàncies a i c és el cosinus de l'angle θ_2 :

$$\cos \theta_2 = \frac{a}{c} \quad (124)$$

Aquest valor ja l'hem calculat en el problema anterior, i era

$$\theta_2 = 0,0634 \text{ rad } (3,64^\circ) \quad (125)$$

Per tant,

$$\frac{a}{c} = \cos \theta_2 = 0,9979 \quad (126)$$

Aquesta és la relació entre qualsevol distància recorreguda horitzontalment, x_a , i la recorreguda formant l'angle màxim permès en la fibra, x_c . Així:

$$x_c = \frac{x_a}{0,9979} = 1,0020x_a \quad (127)$$

És a dir, la distància recorreguda formant l'angle màxim permès és 1,002 vegades superior a la distància recorreguda horitzontalment. Ara bé, ens diuen que la fibra té una longitud de 15 km. Per tant, el raig que entra amb l'angle màxim del con d'acceptació haurà recorregut:

$$1,0020 \cdot 15.000 = 15.030 \text{ m} \quad (128)$$

Resumint:

- El raig que viatja horitzontalment recorre 15.000 metres: $x_a = 15.000 \text{ m}$.
- El raig que viatja formant l'angle màxim permès en la fibra recorre 15.030 metres: $x_c = 15.030 \text{ m}$.

De fet, ens demanen quina és la diferència de temps esmerçats per cada un dels rajos. Bé, de la cinemàtica bàsica recordeu que l'espai recorregut és igual a la velocitat pel temps:

$$x = v \cdot t \quad (129)$$

i, per tant,

$$t = \frac{x}{v} \quad (130)$$

L'espai que han recorregut els dos rajos ja el sabem (l'acabem de calcular) i la velocitat és la velocitat de la llum en aquest medi, que ens diuen que té un

índex de refracció d'1,492. Recordeu que l'índex de refracció és el quocient entre la velocitat de la llum en el buit, c_0 i la velocitat de la llum en un medi, c . Per tant, com que (equació 1):

$$n = \frac{c_0}{c} \quad (131)$$

en aquest medi la velocitat de la llum és

$$c = \frac{c_0}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,492} = 2,01 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (132)$$

Ja sabem la velocitat, podem calcular el temps a partir de l'equació 130. Per al raig horitzontal:

$$t_a = \frac{x_a}{c} = \frac{15.000}{2,01 \cdot 10^8} = 7,463 \cdot 10^{-5} \text{ s} \quad (133)$$

És a dir, 74,63 microsegons. Per al raig inclinat:

$$t_c = \frac{x_c}{c} = \frac{15.030}{2,01 \cdot 10^8} = 7,478 \cdot 10^{-5} \text{ s} \quad (134)$$

Recordeu que $1 \mu\text{s} = 10^{-6} \text{ s}$.

que són 74,78 microsegons. Així, la diferència de temps, Δt , és:

$$\Delta t = t_c - t_a = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ s} \quad (135)$$

El problema l'hem resolt de forma particular. Si voleu, podeu intentar demostrar que, en general, per a una fibra en aire, la diferència de temps estarà determinada per:

$$\Delta t = \frac{x_a c_0}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta_1}} \quad (136)$$

on, recordem, x_a és la longitud de la fibra, c_0 és la velocitat de la llum en el buit, n_2 és l'índex de refracció del nucli de la fibra i θ_1 és l'angle d'incidència del raig de llum. Us ho deixem com a exercici complementari.

Resum

En la introducció d'aquest mòdul vam dir que al llarg d'aquestes pàgines intentaríem respondre a algunes preguntes sobre la llum. Quines hem respost i quines hem deixat per a mòduls posteriors?

Hem vist que la llum és una ona electromagnètica d'unes freqüències determinades, però no hem insistit gaire sobre el tema, ho hem comentat per saber de què estàvem parlant. Per a entendre bé com són les ones electromagnètiques i quines característiques tenen haureu de passar al mòdul "Propagació d'ones electromagnètiques".

Deixant de banda això, sí que hem pogut respondre a la pregunta de com es comporta la llum en les situacions més simples i, en concret, què li passa quan es troba amb un material opac (rebota, es reflecteix, totalment o en part, i de forma especular o difusa) i què li passa quan es troba amb un material transparent diferent del que estava viatjant (es refracta, és a dir, es desvia). Amb això hem establert les lleis bàsiques de l'òptica geomètrica.

Després hem aprofitat aquest fet no solament per a veure què li passa a la llum, sinó per fer-li fer el que nosaltres volem, és a dir, per reflectir-la o refractar-la de la manera que ens interessi a nosaltres. I una cosa que ens interessa és formar imatges d'objectes. Hem vist que això ho podem aconseguir amb elements com ara dioptres, lents o miralls. És més, amb combinacions d'aquests elements podem formar instruments encara més sofisticats i potents, com són els microscopis i els telescopis.

Ara bé, cal tenir en compte que fer tot això amb les lleis de l'òptica geomètrica que havíem obtingut pot arribar a ser força laboriós, de manera que hem utilitzat una simplificació, l'aproximació paraxial, que és prou vàlida en molts casos. Sabent que hem utilitzat una aproximació, el que també hem fet és veure en quin grau aquesta aproximació falla en els casos en què ja no es pot utilitzar. Ho hem fet en estudiar les aberracions, les diferències entre el comportament real d'un sistema òptic i el que diu l'aproximació paraxial.

En tot aquest recorregut també hem tingut oportunitat de comprendre el funcionament de les fibres òptiques, dels medis amb un índex de refracció no uniforme i hem analitzat breument els diversos sistemes de visió dels éssers vius.

Ara, equipats amb aquests coneixements, ja us podeu enfrontar a una descripció molt més detallada i sofisticada de la llum en particular, i de les ones electromagnètiques, en general.

Exercicis d'autoavaluació

- L'angle de refracció de la llum...
 - és sempre més petit que l'angle d'incidència.
 - és sempre més gran que l'angle d'incidència.
 - a vegades és més petit i a vegades més gran que l'angle d'incidència.
 - sempre és igual a l'angle d'incidència.
- Quan l'augment d'un sistema òptic és negatiu, la imatge que produeix és...
 - més gran que l'objecte.
 - igual que l'objecte.
 - invertida respecte a l'objecte.
 - més petita que l'objecte.
- La imatge d'un objecte formada per una lent convergent...
 - sempre és real i invertida.
 - sempre és virtual i més gran.
 - pot ser real.
 - sempre és virtual i més petita.
- El vidre d'una lent convergent té un índex de refracció d'1,6. Quan la lent és a l'aire la seva distància focal és de 30 cm. Quan la submergim en aigua (índex de refracció d'1,33) la seva distància focal és...
 - superior a 30 cm.
 - la mateixa, 30 cm.
 - inferior a 30 cm.
 - 30 cm.
- Un objecte està situat a 40 cm d'una lent de distància focal -10 cm. La imatge que la lent dona d'aquest objecte és...
 - real, invertida i més petita.
 - virtual, no invertida i més petita.
 - virtual, no invertida i més gran.
 - real, invertida i més gran.
- Un helicòpter està volant sobre un llac gelat a una altura de 324 m. El pilot veu la seva imatge reflectida en el gel a una distància...
 - de 648 m.
 - de 324 m.
 - que depèn de l'angle en què miri el pilot.
 - que no podem calcular perquè no sabem l'índex de refracció del gel.
- En la superfície de separació entre dos medis transparents, un raig de llum es troba a 45° amb la normal en el medi que té un índex de refracció d'1,14. A l'altra banda, el raig forma un angle de $31,79^\circ$. Per tant, l'índex de refracció d'aquest segon medi és...
 - 1,53.
 - 1,02.
 - impossible de calcular, perquè falten dades.
 - 1,14.
- En l'ull humà, els elements que més contribueixen a formar la imatge (és a dir, els elements més refractors) són...
 - l'iris i el cristal·lí.
 - el cristal·lí i la còrnia.
 - l'iris i la retina.
 - el cristal·lí i cap més.
- L'aberració cromàtica...
 - es produeix en sistemes diòptrics.
 - es produeix en sistemes catòptrics.
 - es produeix en tot tipus de sistemes òptics.
 - no es produeix amb llum blanca.
- Un doblet acromàtic...
 - elimina l'aberració cromàtica.
 - corregeix l'aberració cromàtica només per a dos colors.
 - augmenta la dispersió del sistema òptic.
 - duplica la potència d'un sistema òptic.
- Un material que dispersi molt la llum...
 - tindrà un nombre d'Abbe petit.

- b) tindrà un gran poder refractor.
- c) provocarà poca aberració cromàtica.
- d) provocarà molta aberració esfèrica.

12. Un home invisible, podria veure-hi?

- a) Sí.
- b) No.
- c) És impossible de saber.
- d) Només si es posés ulleres.

Solucionari

1. c; 2. c; 3. c; 4. a; 5. b; 6. a; 7. a; 8. b; 9. a; 10. b; 11. a; 12. b

Glossari

aberració *f* Diferència entre la imatge real produïda per un sistema òptic i la imatge calculada segons l'aproximació paraxial.

acomodació *f* Capacitat de l'ull humà de variar el poder refractor del cristal·lí mitjançant un canvi del seu radi de curvatura.

ametropia *f* Trastorn en el qual l'ull humà no pot enfocar correctament objectes sobre la retina.

anamorfosi *f* Distorsió d'una imatge de manera que només es pot observar correctament amb ajuda d'algun instrument òptic o des d'un punt concret de l'espai.

aproximació de Gauss *f* Vegeu **aproximació paraxial**.

aproximació paraxial *f* Aproximació utilitzada en òptica geomètrica que es pot aplicar quan tots els angles implicats són prou petits per substituir els seus sinus i tangents pels angles corresponents. L'aproximació és vàlida quan totes les distàncies perpendiculars a l'eix òptic són petites en comparació amb les distàncies longitudinals.

sin. **aproximació de Gauss**

augment *m* Relació entre les dimensions de la imatge d'un objecte creada per un sistema òptic i les dimensions de l'objecte.

camí òptic *m* Distància que recorreria la llum en el buit en un temps igual al que triga en recórrer una distància especificada en un medi material. Matemàticament equival a la integral de l'índex de refracció d'un medi sobre la línia entre dos punts d'aquest medi.

catadiòptric -a *adj* Dit del sistema òptic que treballa per refracció i reflexió alhora.

catòptric -a *adj* Dit del sistema òptic que només treballa per reflexió.

constringència *f* Vegeu **nombre d'Abbe**.

dioptre *m* Superfície de separació entre dos medis d'índexs de refracció diferents.

diòptria *f* Unitat de mesura de potència d'un sistema òptic igual a l'invers d'un metre.

diòptric -a *adj* Dit del sistema òptic que només treballa per refracció.

dispersió *f* Variació de l'índex de refracció d'un medi en funció de la freqüència de la llum que el travessa.

distància focal *f* Distància del pla principal al focus d'un sistema òptic en l'aproximació paraxial.

efecte Purkinje *m* Desplaçament de la longitud d'ona per a la qual l'ull humà és més sensible cap al blau en condicions de poca il·luminació.

elements cardinals *m pl* Conjunt de paràmetres que defineixen un sistema òptic.

estenop *m* Obertura molt petita en una cavitat.

fibra òptica *f* Fibra de material transparent que s'utilitza per a conduir llum de forma confinada mitjançant la reflexió interna total de la llum a les seves parets.

focus *m* Punt on convergeixen els rajos de llum que arriben al sistema paral·lels a l'eix òptic després de travessar el sistema òptic, o bé punt els rajos de llum que procedeixen del qual surten paral·lels a l'eix òptic després de travessar un sistema òptic.

fotosensible *adj* Dit d'un element, natural o artificial, que en rebre llum provoca algun tipus de resposta.

hipermetropia *f* Trastorn de l'ull humà en què aquest no pot enfocar correctament objectes propers.

imatge *f* Figura formada pel conjunt d'interseccions dels rajos lluminosos procedents de cadascun dels punts d'un objecte, en el cas d'una imatge real, o bé pel conjunt d'interseccions de les prolongacions dels rajos lluminosos, en el cas d'una imatge virtual, després d'ésser modificada la seva trajectòria en travessar un sistema òptic.

índex de refracció *m* Relació entre la velocitat de propagació de la llum en el buit i la velocitat de propagació de la llum en un medi determinat.

lent *f* Sistema òptic format per dos diòptres.

lent de Fresnel *f* Lent constituïda per segments anul·lars que equival a una lent completa sense la seva part interna.

llum *f* Radiació electromagnètica que pot impressionar les cèl·lules de la retina de l'ull humà. L'interval de longituds d'ona de la llum es troba entre uns 400 nm, corresponent a llum violada, i uns 700 nm, corresponent a llum vermella.

medi de gradient d'índex *m* Medi en què l'índex de refracció varia gradualment en l'espai.

sin. **medi GRIN**

medi GRIN *m* Vegeu **medi de gradient d'índex**.

miopia *f* Trastorn de l'ull humà en què aquest no és capaç d'enfocar correctament objectes llunyans.

mirall *m* Sistema òptic format per una superfície que reflecteix la llum.

nombre d'Abbe *m* Magnitud adimensional que caracteritza la dispersió dels materials transparents.

sin. **constringència**

òptica *f* Part de la física que estudia les propietats de la llum i la manera de generar-la, transmetre-la, manipular-la i detectar-la.

paraxial *adj* Dit d'una disposició, sistema òptic o element per al qual és vàlida l'aproximació paraxial.

plans principals *m pl* Conjunt de dos plans d'un sistema òptic en aproximació paraxial, perpendiculars a l'eix òptic, per als quals l'augment entre ells és igual a +1.

potència *f* Inversa de la distància focal d'un sistema òptic.

presbícia *f* Degeneració de l'ull humà en què aquest no pot enfocar correctament objectes propers, produïda per una manca d'elasticitat del cristallí i que augmenta amb l'edat.

punt pròxim *m* Punt més proper a l'ull en què aquest pot enfocar correctament un objecte sobre la retina.

refractiu -iva *adj* Dit del medi que té un índex de refracció diferent al dels medis que l'envolten.

sin. **refringent**

refractivitat *f* Mesura de la quantitat en què un medi desvia un raig de llum que hi penetra. A vegades es quantifica com a $n - 1$, on n és l'índex de refracció del medi.

sin. **refringència**

refractòmetre *m* Aparell per a mesurar l'índex de refracció d'un medi.

refringència *f* Vegeu **refractivitat**.

refringent *adj* Vegeu **refractiu**

sistema òptic *m* Conjunt de diòptres.

visió diürna *f* Vegeu **visió fotòpica**.

visió escotòpica *f* Visió humana que es realitza amb poca o nul·la il·luminació.

sin. **visió nocturna**

visió fotòpica *f* Visió humana que es realitza en bones condicions d'il·luminació.

sin. **visió diürna**

visió nocturna *f* Vegeu **visió escotòpica**.

zona de Gauss *f* Regió de l'espai pròxima a l'eix òptic d'un sistema òptic en què és aplicable l'aproximació paraxial.
sin. **zona paraxial**

zona paraxial *f* Vegeu **zona de Gauss**.

Bibliografia

Casas, J. (1980). *Óptica*. Saragossa: Universidad de Zaragoza.

Dawkins, R. (1996). *Climbing Mount Improbable* (capítol 5 "The Forty-fold Path to Enlightenment"). Londres: Penguin Books.

Hecht, E.; Zajac, A. (1986). *Óptica*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Iberoamericana.

Isalgué Buxeda, A. (1995). *Física de la llum i el so*. Barcelona: Edicions UPC ("Politext", 41).

José Pont, J.; Moreno Lupiáñez, M. (1994). *Física i ciència-ficció* (capítol 7). Barcelona: Edicions UPC ("Politext", 33).

Luckiesh, M. (1970). *Visual Illusions*. Nova York: Dover.

Sears, F. W. (1967). *Óptica*. Madrid: Aguilar.

Tipler, P. A.; Mosca, G. (2005). *Física para la ciencia y la tecnología* (5a edició, volum 2). Barcelona: Editorial Reverté.

