Lleis de Maxwell

Jordi Bonastre Muñoz

PID_00159124

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

Aquest mòdul està dedicat a les ones electromagnètiques. Els fenòmens associats a les ones electromagnètiques els podeu trobar manifestats de moltes maneres, i la llum n'és l'exemple més característic. Altres exemples d'aplicacions de les ones electromagnètiques són l'emissió i sintonització de senyals de ràdio o televisió, les xarxes sense fils, els raigs X que ens permeten realitzar radiografies o la radiació solar que ens arriba a la Terra. Tots ells es basen en l'ús de diferents tipus d'ones electromagnètiques.

Als apartats 1 i 2 d'aquest mòdul farem un repàs dels conceptes clau de l'electrostàtica i el magnetisme que ja us vàrem introduir en altres assignatures. Tanmateix, no ens limitarem a fer un resum i prou, sinó que aprofitarem per a introduir-vos alguns conceptes i punts de vista nous i algunes eines matemàtiques que farem servir més endavant.

A l'apartat 3 deduirem i analitzarem les lleis de Maxwell com una generalització de totes les propietats i característiques dels camps elèctric i magnètic que us introduïm a les dues primeres seccions. A partir d'aquestes lleis discutirem l'electromagnetisme com una sola interacció.

Per acabar, a l'apartat 4 entrarem en la definició del concepte clau del mòdul: les ones electromagnètiques. En efecte, comprovarem que la seva existència i les seves característiques es dedueixen de forma directa a partir de les lleis de Maxwell.

Objectius

Els materials didàctics continguts en aquest mòdul proporcionen els coneixements necessaris perquè l'estudiant assoleixi els objectius següents:

1. Completar el coneixement dels conceptes clau d'electrostàtica que ja s'han introduït en altres assignatures.

2. Completar el coneixement dels conceptes clau de magnetostàtica i inducció magnètica que ja s'han introduït en altres assignatures.

3. Entendre el comportament dels camps elèctric i magnètic en presència de medis materials i el seu tractament.

4. Conèixer l'operador nabla i les eines matemàtiques que el fan servir: gradient, divergència i rotacional. Entendre el seu significat matemàtic i físic.

5. Conèixer les lleis de Maxwell i la seva relació amb les lleis que s'han tractat durant l'estudi dels camps elèctric i magnètic. Saber interpretar el seu significat físic com a explicació dels camps elèctric i magnètic i de la interrelació entre tots dos.

6. Entendre el concepte d'ona electromagnètica com un flux d'energia que s'intercanvia entre el camp elèctric i el camp magnètic i que es propaga per l'espai.

7. Identificar les analogies i diferències respecte a les ones mecàniques que s'han estudiat en altres mòduls.

1. Repàs d'electromagnetisme: electrostàtica

La càrrega elèctrica és una propietat d'algunes partícules elementals que formen la matèria. Tota partícula que presenta càrrega elèctrica exerceix una influència sobre altres partícules amb càrrega que es trobin al seu voltant.

Càrrega elèctrica

Les unitats de quantificació de la càrrega elèctrica indivisibles són la càrrega del protó i de l'electró:

$$q = \pm 1{,}602 \cdot 10^{-19}$$

Tota càrrega elèctrica ha de ser un múltiple enter d'aquest valor.

Podeu fer una analogia amb el que passa si us imagineu un matalàs amb una sèrie de petits objectes a sobre prou lleugers per tal de no deformar-lo. De sobte, hi col·loquem un objecte massiu, com ara una bola de ferro, per exemple. La bola deformarà el matalàs de tal manera que els petits objectes que abans es mantenien en repòs començaran a "caure" cap a ella. És com si la bola hagués modificat les propietats de la regió que l'envolta i els objectes que s'hi troben es veuen afectats per aquesta modificació.

De la mateixa manera que la bola ha modificat les propietats del matalàs on es trobava, una càrrega elèctrica també "modifica" l'espai que l'envolta. En aquest cas, qui es veu afectat són les càrregues elèctriques que es troben sota la seva regió d'influència.

A la figura 1 podeu visualitzar un exemple de com el fet de col·locar una càrrega *q'* en un cert punt provoca un efecte sobre altres càrregues que ja es trobaven a la regió del voltant. És com si la càrrega "intrusa" hagués alterat les propietats de l'espai que l'envolta. El que succeeix és que la càrrega genera un **camp elèctric** i que les càrregues que l'envolten es veuen afectades per ell. En concret, les càrregues experimenten una força amb la mateixa direcció que el camp i proporcional al seu mòdul.

Figura 1

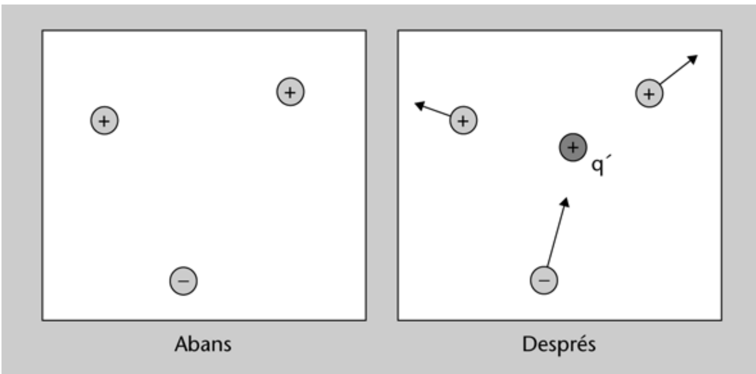


Figura 1

Explicació del concepte de camp elèctric com una alteració de les propietats de l'espai.

L'efecte que us hem mostrat en els dibuixos es produeix, en més o menys mesura, per a qualsevol càrrega i en qualsevol punt de l'espai.

Observació

De fet, les càrregues que ja existien abans de la "intrusió" també generen el seu respectiu camp elèctric i, per tant, afecten la resta, inclosa la càrrega "intrusa". A la figura hem obviat aquest últim aspecte per motius pedagògics.

Així doncs, en aquest apartat detallarem el concepte de camp elèctric i els seus efectes sobre les regions de l'espai que afecta i sobre la matèria que es troba sota la seva influència. Per ara ens centrarem només en el cas concret de camps elèctrics generats per càrregues en repòs, que s'anomenen **camps electrostà-**

tics, i deixarem per a més endavant l'estudi dels camps generats per càrregues en moviment, que presenta més dificultat.

En el primer subapartat estudiarem les característiques dels camps electrostàtics sense la presència de cap medi material. Centrarem el text sobretot en el concepte de línies de camp i de flux de camp.

En el segon subapartat estudiarem l'energia associada als camps electrostàtics mitjançant el concepte de potencial electrostàtic. Ho farem introduint-vos una nova eina matemàtica, el gradient, que ens permetrà expressar directament la relació entre els conceptes de camp i de potencial.

1.1. Camp electrostàtic en el buit

Com ja hem dit, un camp electrostàtic és aquell que és generat per càrregues en repòs. La característica més important dels camps d'aquest tipus es que mantenen les mateixes característiques al llarg del temps.

Recordeu

La força i el camp electrostàtics tenen la mateixa direcció i, a més, els seus mòduls són proporcionals. Per tant, si es coneixen les característiques del camp electrostàtic en un punt, podem conèixer com serà la força experimentada per una càrrega que s'hi trobi.

En aquest apartat estudiarem el camp elèctric, on les càrregues elèctriques poden ser de dos tipus: positives i negatives. Això vol dir que hi haurà dos tipus de comportament en presència d'un camp elèctric.

La unitat de mesura de les càrregues elèctriques és el **coulomb**, que es representa amb la lletra **C**; i la unitat del camp elèctric és el **newton per coulomb**, que es representa amb **N/C**, tot i que sovint també es fa servir el V/m.

Tot i així, a la vida quotidiana la majoria de fonts de generació de camp elèctric no són puntuals, sinó que les solem trobar agrupades en un cert nombre.

El **principi de superposició** estableix que l'efecte combinat de diverses fonts de creació de camp elèctric, $\vec{E}(\vec{r})$,és la suma dels efectes produïts per cadascuna d'elles per separat $\vec{E}_i(\vec{r})$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(\vec{r}) \quad (1)$$

I si el que volem determinar és el camp generat per una distribució contínua Γ *, cal convertir la distribució discreta en una distribució contínua i, en conseqüència, substituir les sumes per integrals:

* Γ es llegueix "gamma".

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{\Gamma} d\vec{E} \quad (2)$$

on $d\vec{E}$ és el camp creat per un diferencial de càrrega.

El coneixement de la magnitud del camp elèctric en un punt és molt important, ja que permet determinar en qualsevol moment la força que experimentaria una càrrega ubicada en ell sense necessitat de conèixer qui genera aquesta força ni haver-la de calcular cada vegada. En altres paraules, l'expressió del camp electrostàtic per a una regió conté tota la informació necessària (mòdul o intensitat, direcció i sentit) per tal de deduir de forma immediata la força electrostàtica i, per tant, el comportament d'una futura càrrega que s'ubiqués en un punt de la regió.

Cal buscar, doncs, una manera de representar de forma ràpida, simple i eficaç com és el camp elèctric en una regió. Una manera molt entenedora és mitjançant les línies de camp, que veurem a continuació.

1.1.1. Línies de camp

Les línies de camp són una representació gràfica de la magnitud del camp elèctric en una regió de l'espai. Les gràfiques permeten, amb una simple observació, deduir de forma directa la direcció, el sentit i la intensitat (de manera qualitativa) del camp elèctric en qualsevol punt dins de la regió representada. Per la seva banda, el seu coneixement ens permet saber com és el comportament electrostàtic, és a dir, com serà la força experimentada per una càrrega situada en un punt d'aquesta regió.

Figura 2

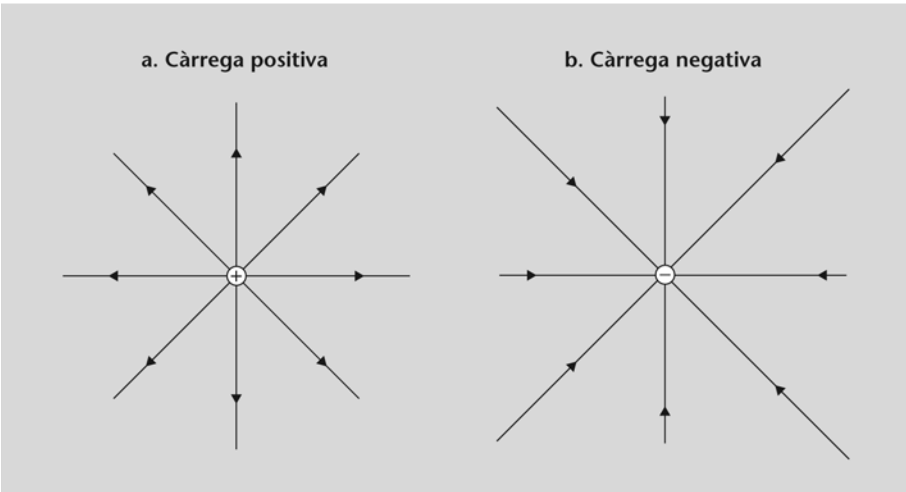


Figura 2

La figura mostra les línies de camp generades per una càrrega puntual de signe positiu (**a**) i de signe negatiu (**b**).

La figura 2 mostra, a tall d'exemple, les línies de camp generades, de forma separada, per una càrrega puntual positiva (a) i per una de negativa (b). Com podeu veure, totes dues presenten una distribució de línies de camp idèntiques, a excepció del sentit de les forces. Les línies de camp comencen sobre la càrrega positiva i s'estenen fins a l'infinit o fins a una altra càrrega situada fora de la regió representada. Per al cas de la càrrega negativa, l'efecte és a l'inrevés: les línies "vénen" de l'infinit, o d'hipotètiques càrregues positives situades fora del dibuix, i acaben a la posició de la càrrega negativa.

D'altra banda, la figura 3 mostra les línies de camp generades per dues càrregues puntuals situades força a prop l'una de l'altra per a quatre casos diferents:

Figura 3

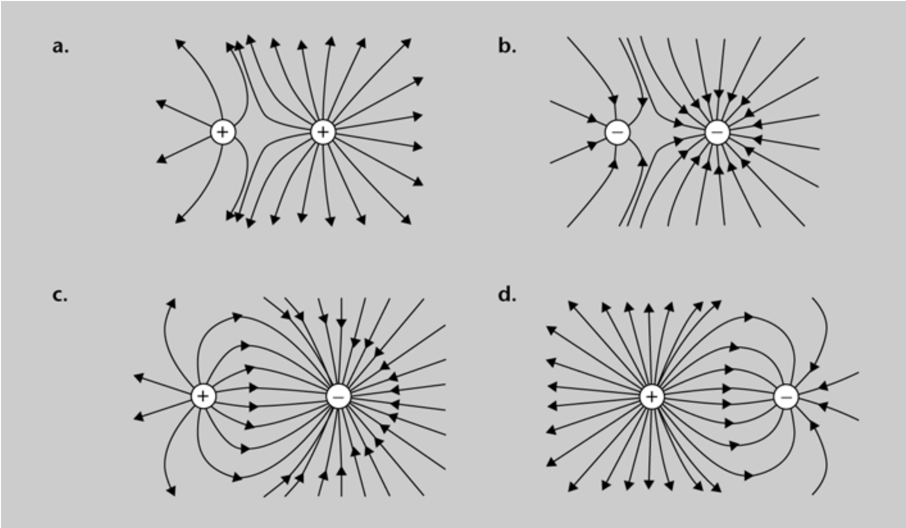


Figura 3

La figura mostra la distribució de les línies de camp per al cas de dues càrregues puntuals en els casos en què:

a. totes dues són positives,

b. totes dues són negatives,

c. les dues càrregues són de signe diferent i la positiva és de valor més petit,

d. les dues càrregues són de signe diferent i la positiva és de valor més gran.

- **Les dues càrregues són positives** (figura 3a). És interessant destacar que existeix una regió entre les dues càrregues on les línies de camp estan molt separades. Això és perquè en aquests punts les forces causades per totes dues càrregues es compensen mútuament (una "tira" cap a la dreta i l'altra, cap a l'esquerra) i, per tant, el camp electrostàtic resultant és mínim. De fet, existeix un punt (ubicat en la recta que uneix les dues càrregues) on la compensació és total i el camp és zero. També cal destacar que de la càrrega de la dreta surten moltes més línies, fet que denota que el seu valor és més gran.

- **Les dues càrregues són negatives** (figura 3b). A l'exemple de la figura, les dues càrregues són del mateix valor que en el cas anterior (figura 3a) però de signe oposat. Podeu comprovar que les línies de camp són idèntiques en tots dos casos, a excepció del seu sentit.

- **Les dues càrregues són de signe diferent** (figura 3c i figura 3d). La diferència entre els dos casos és que en el primer (figura 3c) la càrrega de la dreta és més gran que la de l'esquerra, mentre que en el segon (figura 3d) és a l'inrevés. Podeu comprovar que ja no apareix la regió amb poca densitat de línies de camp que hem vist en els dos casos anteriors, ja que ara les càrregues són de signe diferent i, per tant, totes dues "estiren" cap al mateix sentit.

Les **línies de camp** són línies rectes o corbes que permeten visualitzar a primer cop d'ull el camp electrostàtic en una regió i que tenen les propietats següents (les podeu comprovar a la figura 2 i a la figura 3):

- Sempre comencen en una càrrega positiva o a l'infinit.

- Sempre acaben en una càrrega negativa o a l'infinit.
- Les línies de camp mai no es poden creuar, excepte en les posicions on es troben les càrregues elèctriques.
- El seu recorregut sempre és tangent al vector camp elèctric en tots els punts per on passa. En altres paraules, sempre marquen la direcció del camp elèctric en aquell punt.
- La seva densitat és proporcional al mòdul del vector camp elèctric. És a dir, com més juntes es troben les línies, més alta és la intensitat del camp elèctric en aquella regió. De la mateixa manera, com més separades es troben les línies, més petit és el mòdul del camp.
- En una regió on el camp elèctric és uniforme (és a dir, igual en tots els punts de la regió), les línies de camp són paral·leles.

Hem vist, a partir de les figures i de les propietats esmentades, que les línies de camp permeten una anàlisi qualitativa del camp elèctric en una regió però no permeten quantificar-ne el valor exacte, ja que el nombre de línies de camp que es fan servir és totalment arbitrari. Per poder fer-ne una anàlisi quantitativa cal utilitzar alguna eina matemàtica que ho permeti; aquí és on entra el concepte de flux a través d'una superfície.

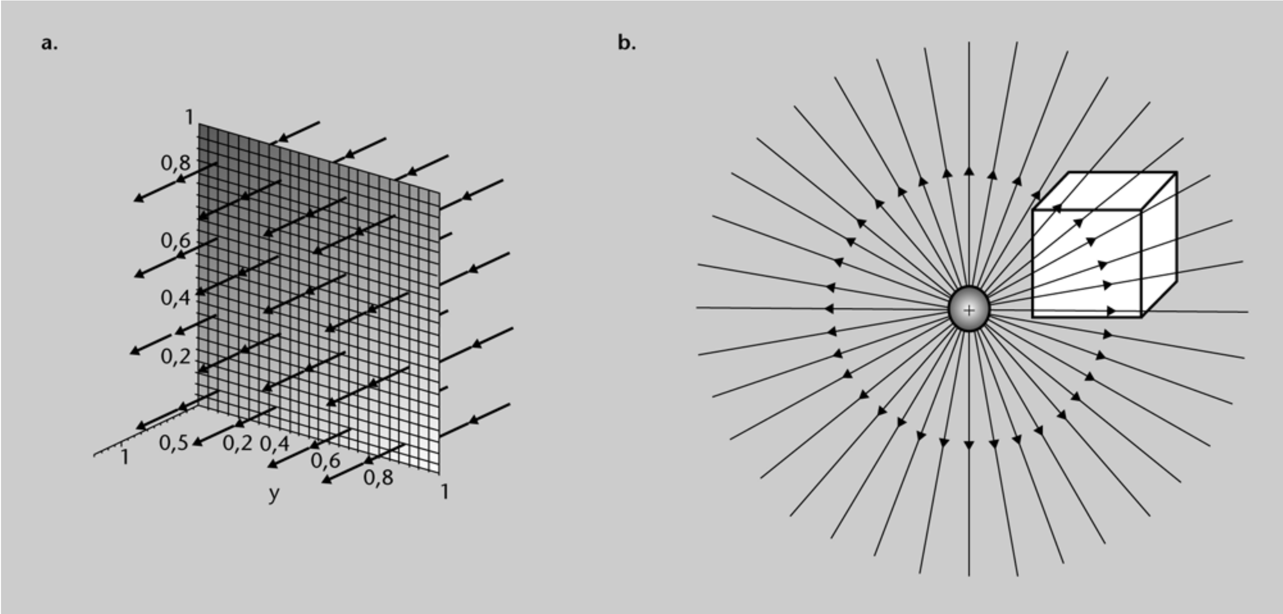
1.1.2. Flux d'un camp electrostàtic

El flux d'un camp que travessa una certa superfície és una magnitud escalar que és proporcional al nombre total de línies de camp que la travessen. A la figura 4a podeu visualitzar aquest concepte per a un cas simple d'una superfície plana i quadrada i un camp uniforme (línies paral·leles i equidistants).

El concepte de flux també té en compte el sentit de les línies, de tal manera que quan les línies travessen la superfície en un sentit el flux és positiu i quan ho fan en l'altre, és negatiu. El flux total correspon al balanç entre les línies que travessen la superfície en un sentit i les que ho fan en l'altre. Per tant, podria ser que el flux per una superfície fos zero tot i haver-hi línies de camp que la travessen. Això succeiria en el cas que hi hagués el mateix nombre de línies que ho fan en un sentit i en l'altre.

A la figura 4b podeu visualitzar un exemple d'aquest últim cas. Podeu comprovar que el nombre de línies que entren en el cub és el mateix que les que en surten.

Figura 4



La definició del flux de camp per una superfície com el nombre línies de camp que la travessen és interessant des del punt de vista conceptual, intuïtiu i qualitatiu, però cal buscar una expressió matemàtica que permeti quantificar aquesta magnitud (és a dir, donar-li una mesura).

Atès que, tal com us hem dit abans, la densitat de línies de camp elèctric és proporcional al seu mòdul, podeu fer-lo servir per a calcular el flux a través d'una superfície.

Es defineix el **flux de camp elèctric** Φ_E per una superfície S com la integral de la component perpendicular del camp elèctric avaluada sobre tota la superfície:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{3}$$

on $\vec{E}$ és el camp elèctric i $d\vec{S}$ és el diferencial de superfície (que és un vector perpendicular a la superfície).

La unitat de mesura del flux de camp elèctric en el Sistema Internacional d'Unitats és el **volt-metre** (V·m), encara que sovint també es fa servir el N/C·m^2.

La figura 5 mostra de forma gràfica el significat de la component perpendicular a la superfície i la seva relació amb el producte escalar. A la figura, el vector $\vec{E}$ es descompon en dues components: una component perpendicular a la superfície ($\vec{E}_{perp}$) i una component paral·lela ($\vec{E}_{paral}$).

Figura 4

La figura mostra:

a. el concepte de flux com el nombre de línies de camp que travessen una superfície.

b. el flux a través d'una superfície tancada pot ser zero tot i haver-hi línies de camp si el nombre de línies que entren és el mateix que les que surten.

Vectors de superfície $\vec{S}$ i $d\vec{S}$

El vector $\vec{S}$ és un vector perpendicular a la superfície el mòdul del qual és la seva àrea. El vector $d\vec{S}$ és el vector de superfície corresponent a cadascun dels infinitèsims en què s'ha dividit la superfície.

Φ_E es llegeix "fi sub e".

Producte escalar

El producte escalar de dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és una magnitud escalar que depèn de l'angle (α) que formen tots dos vectors:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

Quan els dos vectors són paral·lels el producte escalar és màxim, mentre que si són perpendiculars el producte escalar és zero.

L'ús de la component perpendicular per al càlcul del flux per una superfície ve implícit dins de la definició de producte escalar quan aquest s'aplica a un vector de superfície, com ara el vector $d\vec{S}$, ja que aquest últim està definit com a perpendicular a ella.

Figura 5

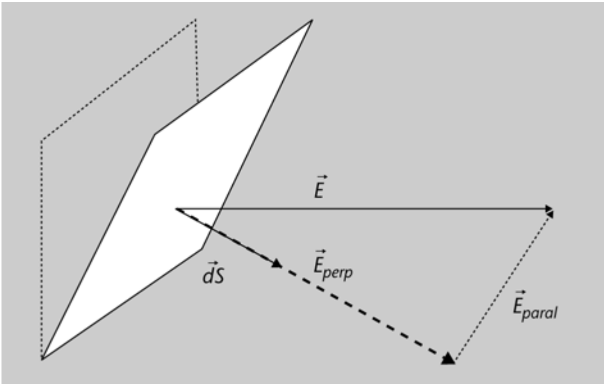


Figura 5

La figura mostra gràficament el significat de la component perpendicular a la superfície i la seva relació amb el producte escalar. Noteu que el vector de superfície està definit perpendicular a ella.

El fet de fer servir només aquesta component en comptes de tot el vector fa que el resultat sigui realment proporcional al nombre de línies que travessen la superfície. Podeu entendre millor aquest concepte si observeu la figura 6:

Figura 6

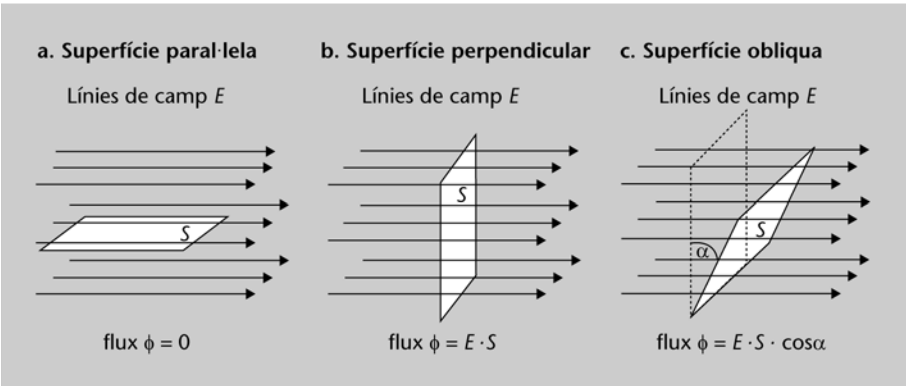


Figura 6

La figura mostra tres exemples de possibles orientacions de la superfície respecte a les línies de camp:

a. *S* paral·lela al camp *E*: el flux és zero perquè no hi ha cap línia de camp que travessi la superfície.

b. *S* perpendicular al camp *E*: el flux és el màxim possible.

c. *S* obliqua: el flux depèn de l'angle d'inclinació de la superfície respecte a la perpendicular al camp.

Observeu que el vector superfície està definit com a perpendicular a la superfície.

- El primer exemple (figura 6a) mostra una superfície col·locada "de costat" respecte al camp elèctric, de tal manera que no la travessa cap línia de camp. En aquest cas, el càlcul segons l'expressió anterior, és a dir, fent servir només la component perpendicular, dóna com a resultat zero, que és el resultat correcte. En canvi, si no féssim servir aquesta component, el resultat no seria zero, ja que el valor del camp tampoc no ho és.

- El segon exemple (figura 6b) mostra una superfície situada de forma totalment perpendicular al camp elèctric. El flux a través de la superfície és el màxim possible. La component perpendicular és exactament el mateix valor del camp, ja que no hi ha component paral·lela.

- El tercer exemple (figura 6c) mostra una superfície situada formant un angle α amb la direcció perpendicular al camp elèctric. El flux depèn del valor de l'angle.

Exemple de flux de camp elèctric

El camp elèctric en una regió de l'espai és $\vec{E}(\vec{r}) = 2\vec{i}$ [N/C]. Determineu el flux de camp elèctric que travessa les superfícies següents, que corresponen als casos representats a la figura 6:

a) Superfície de 0,5 m^2 paral·lela al pla $x = 0$.
b) Superfície de 0,5 m^2 perpendicular al pla $x = 0$.
c) Superfície de 0,5 m^2 que forma un angle de $\alpha = 60°$ amb el pla $x = 0$.

Solució

Recordem la definició de flux de camp elèctric a través d'una superfície S (3):

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{3b}$$

Com que el camp elèctric $\vec{E}$ és uniforme i la superfície S és plana, és a dir, el vector superfície tindrà sempre la mateixa direcció, l'expressió del flux se simplifica a:

$$\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos\alpha \tag{4}$$

- E és el mòdul del camp elèctric $\vec{E}$: $E = 2$ N/C.
- S és l'àrea de la superfície: $S = 0{,}5$ m^2.
- α és l'angle que forma el camp elèctric $\vec{E}$ amb els vectors de superfície $d\vec{S}$, que recordem que es tracta de vectors perpendiculars a la superfície.

a) En una superfície paral·lela al pla $x = 0$, és a dir, al pla yz, el vector de superfície $\vec{S}$ sempre apunta cap a la direcció del vector $\vec{i}$ (com a la figura 6b). Com que el camp elèctric també apunta en aquesta direcció, tindrem que l'angle és $\alpha = 0°$. Per tant, el flux és:

$$\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos 0° = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 1 = 1 \ \frac{\text{N}}{\text{C}}\ \text{m}^2 \tag{5}$$

b) En una superfície perpendicular al pla $x = 0$, és a dir, al pla yz, el vector de superfície $\vec{S}$ sempre apunta en una direcció perpendicular a la del vector $\vec{i}$ (com a la figura 6a). L'angle en aquest cas és $\alpha = 90°$ i, per tant, el flux és:

$$\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos 90° = 0 \tag{6}$$

c) En una superfície que forma un angle de $\alpha = 60°$ amb el pla $x = 0$, el vector superfície $\vec{S}$ forma aquest mateix angle de $\alpha = 60°$ amb el vector $\vec{i}$ (com a la figura 6c). Per tant,

$$\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos 60° = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 \ \frac{\text{N}}{\text{C}}\ \text{m}^2 \tag{7}$$

1.1.3. Llei de Gauss per al camp electrostàtic

El teorema de Gauss, anomenat així en honor al matemàtic i científic alemany Carl Friedrich Gauss, és un teorema matemàtic que, en el cas de l'electrostàtica, relaciona el flux de camp elèctric que travessa una superfície tancada amb la càrrega que hi ha dins d'aquesta superfície.

La **llei de Gauss per a l'electrostàtica** enuncia que el flux total de camp electrostàtic que travessa una **superfície tancada** S qualsevol és proporcional al valor de la càrrega neta que hi ha a l'interior de la superfície (Q_{int}):

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \tag{8}$$

on $\vec{E}$ és el camp elèctric i ε_0 és la permitivitat del buit. El signe $\oint_S$ indica integral per a una superfície tancada S.

Johann Carl Friedrich Gauss

Matemàtic i científic alemany (30 d'abril de 1777-23 de febrer de 1855) que va contribuir de forma molt significativa al desenvolupament de molts camps de la matemàtica i la física, entre ells l'estudi de les funcions vectorials. Està considerat un dels matemàtics més influents i rellevants de la història.

En altres paraules, com que les línies de camp només poden començar o acabar en una càrrega elèctrica (o a l'infinit), el balanç net entre les línies que "surten" i les que "entren" dins de la superfície tancada només pot ser a causa de la presència de càrrega neta en el seu interior.

A la figura 7 podeu veure un exemple gràfic de l'aplicació de la llei de Gauss:

Figura 7

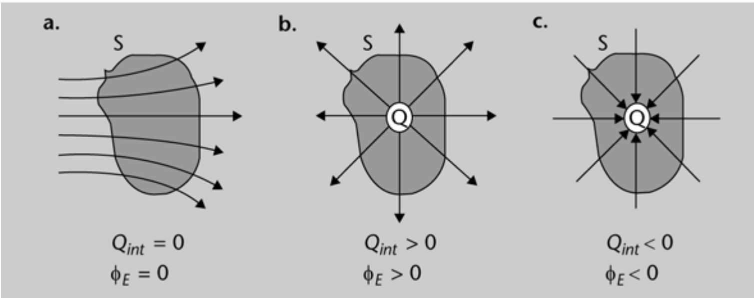


Figura 7

La figura mostra l'aplicació de la llei de Gauss a una mateixa superfície *S* en tres casos concrets:

a. la càrrega interior és zero,

b. la càrrega interior és positiva,

c. la càrrega interior és negativa.

- A la figura 7a, la càrrega neta a l'interior de la superfície *S* és zero. Com que les línies de camp només poden començar o acabar en una càrrega elèctrica, la conseqüència és que totes les línies que entren a la superfície per algun punt han d'acabar sortint-ne per un altre. De forma anàloga, totes les que surten han d'haver-hi entrat per un altre punt. Per tant, el flux net de camp elèctric ha de ser per força zero.

- A la figura 7b, la càrrega interior és positiva, fet que implica que existeixen línies de camp que "neixen" a l'interior de la superfície. El flux és, doncs, positiu.

- A la figura 7c, succeeix el mateix però amb la càrrega negativa i, per tant, amb l'existència de línies de camp que entren a *S* però no en surten. El flux és ara negatiu.

El teorema de Gauss també afirma que el flux total a través d'una superfície tancada **només** depèn de la càrrega interior. Per tant, és independent tant de la seva forma com del volum que envolta. L'únic que "interessa" és la càrrega neta interior. A la figura 8, per exemple, el flux de camp elèctric a través de la superfície *S* és el mateix per a tots 3 casos, ja que la càrrega interior és la mateixa. Per tal de comprovar-ho, podeu fer un recompte de les línies de camp que surten menys les que entren i veureu que sempre us donarà el mateix nombre.

Figura 8

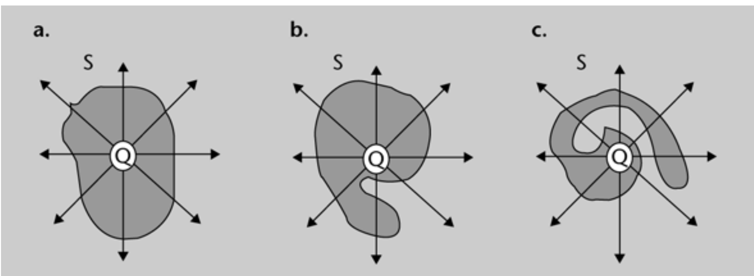


Figura 8

El flux total a través d'una superfície tancada només depèn de la càrrega neta al seu interior i és independent tant de la seva forma com del volum que determina.

Exemple de llei de Gauss per al camp electrostàtic

Mitjançant el teorema de Gauss, demostreu que el mòdul del camp elèctric creat a una distancia $\|\vec{r}\|$ per una **distribució esfèrica** de càrrega centrada en el punt (0,0) sobre un punt del seu exterior és:

$$\|\vec{E}(\vec{r})\| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r}\|^2} \tag{9}$$

On Q és el valor total de càrrega de l'esfera.

Solució

Recordem el teorema de Gauss (8):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{10}$$

La llei de Gauss s'ha de satisfer per a qualsevol superfície S. Per tal de simplificar els càlculs, escollirem la superfície d'una esfera centrada també en el punt (0,0) però amb un radi $R = \|\vec{r}\|$, on $\vec{r}$ és el punt on volem calcular el mòdul del camp elèctric.

Atès que tant la superfície S com la distribució de càrrega són esferes, el camp elèctric $\vec{E}$ sempre serà perpendicular a S (vegeu figura 9). En cas contrari, voldria dir que no hi ha simetria esfèrica. Per tant,

$$\|\vec{E}\| \oint_S d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{11}$$

$$\|\vec{E}\| S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{12}$$

Podem aïllar el valor del camp elèctric:

$$\|\vec{E}\| = \frac{Q}{S\varepsilon_0} \tag{13}$$

Finalment, substituïm S pel valor de la superfície d'una esfera de radi R:

$$\|\vec{E}\| = \frac{Q}{4\pi R^2 \varepsilon_0} \tag{14}$$

En un punt $\vec{r}$ qualsevol, el radi és $R = \|\vec{r}\|$. Per tant, tindrem:

$$\|\vec{E}(\vec{r})\| = \frac{Q}{4\pi \|\vec{r}\|^2 \varepsilon_0} \tag{15}$$

Com volíem demostrar.

Figura 9

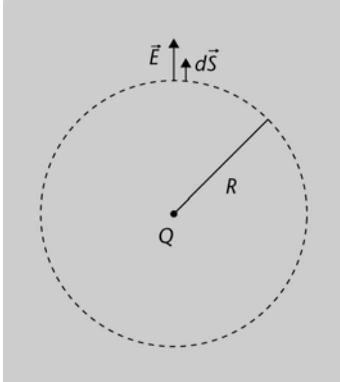


Figura 9

La imatge mostra la superfície de Gauss de radi R. S'hi mostren el camp creat per una càrrega Q situada al centre de l'esfera i el $d\vec{S}$ de l'esfera.

El concepte de flux electrostàtic i el teorema de Gauss són dos aspectes molt importants i els farem servir més endavant. Abans, però, estudiarem els efectes dels camps electrostàtics sobre altres càrregues: les forces electrostàtiques.

1.1.4. Efectes del camp electrostàtic: força electrostàtica

Fins ara hem introduït el concepte de camp electrostàtic generat per una càrrega o distribució de càrregues elèctriques i l'hem tractat com una "alteració" de l'espai que les envolta. Però ara toca preguntar-se com es veuen afectades les càrregues que es troben en aquest espai "modificat". És a dir, cal determinar com és la força que reben aquestes càrregues pel simple fet de trobar-se en una regió on existeix un camp electrostàtic.

Anteriorment hem esmentat que el coneixement de les característiques del camp electrostàtic en un punt ens dóna tota la informació necessària sobre el comportament que tindrà una càrrega elèctrica en aquest punt. Aquest fet és inherent a la definició de camp electrostàtic, ja que heu de recordar que aquest correspon a la força experimentada per una càrrega de valor unitari. Per tant, donant-li la volta a la definició, podem deduir que la força experimentada per una càrrega ubicada en un punt de l'espai on existeix un camp electrostàtic serà un vector igual al vector de camp multiplicat pel valor de la càrrega.

Recordeu

El camp elèctric en un punt correspon a la força que experimentaria una càrrega positiva de valor unitari:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$$

Vegeu el comportament d'una càrrega elèctrica en un camp al subapartat 1.1.1 d'aquest mòdul.

La força electrostàtica experimentada per una càrrega situada en un punt $\vec{r}$ on hi ha present un camp electrostàtic $\vec{E}$ és:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) \tag{16}$$

on q és el valor, incloent-hi el signe, de la càrrega que experimenta la força.

La unitat de mesura de la força electrostàtica en el Sistema Internacional és, com per a totes les forces, el **newton** (**N**).

q* i *q′

Per tal de distingir-les, a partir d'ara utilitzarem q per a indicar la càrrega que experimenta els efectes del camp i q' per a la càrrega que el genera.

De l'expressió anterior podem deduir les propietats següents:

- La força sempre tindrà la mateixa direcció que el camp.

- El sentit dependrà del signe de la càrrega que experimenta la força, de tal manera que si la càrrega és positiva, la força i el camp tindran el mateix sentit, mentre que si és negativa tindran sentits oposats.

- El mòdul o intensitat de la força serà proporcional a la intensitat del camp, però també al valor de la càrrega. És a dir, com més gran sigui el valor de la càrrega més gran serà la força experimentada.

Fixeu-vos que, en aquesta expressió, el camp electrostàtic apareix com un simple vector amb un valor determinat i en cap moment no s'entra en el perquè de les seves característiques. Això és un gran avantatge, ja que ens permet tractar de forma independent la generació del camp, d'una banda, i els seus efectes (la força) de l'altra.

De la mateixa manera que hem procedit a l'inici de l'apartat amb el camp electrostàtic, podem aplicar el principi de superposició per tal de calcular la força experimentada per una distribució de càrregues. Per al cas de distribucions discretes, la força electrostàtica és:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{E}_i(\vec{r}) \quad (17)$$

És a dir, la força electrostàtica experimentada per un conjunt de càrregues serà igual a la suma vectorial de totes i cadascuna de les forces que experimenten les càrregues per separat.

Si el que volem determinar és la força sobre una distribució contínua de càrregues, caldrà convertir la distribució discreta en una distribució contínua i, en conseqüència, substituir les sumes per integrals.

La força $\vec{F}$ experimentada per una distribució de càrregues contínua Γ ubicada en una regió on existeix un camp electrostàtic és:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int_{\Gamma} \vec{E}(\vec{r})\, dq \quad (18)$$

on dq és cadascun dels diferencials de càrrega en què hem dividit la distribució i $\vec{E}(\vec{r})$ és el camp electrostàtic present en la posicions d'aquests diferencials.

Ja coneixeu el concepte de camp electrostàtic, les seves característiques i els seus efectes sobre altres càrregues (la força electrostàtica). A continuació ens endinsarem en un altre aspecte que fins ara no hem tocat: la seva energia.

1.2. Potencial electrostàtic i energia potencial electrostàtica

Imagineu-vos dos cossos de massa qualsevol ubicats a diferents altures. Si algú us pregunta quin dels dos cossos arribaria amb més velocitat a terra tindríeu clara la resposta: el que es trobi a més altura. El que esteu dient no és més que indicar que aquest cos té més potencial gravitatori, és a dir, més energia "emmagatzemada" susceptible de ser transformada en energia cinètica.

El concepte de potencial electrostàtic és similar al de potencial gravitatori. De la mateixa manera que una massa pot "acumular" energia simplement pel fet d'estar situada en un punt a més altura dins d'un camp gravitatori, una càrrega elèctrica podrà fer el mateix situant-se en una certa posició dins d'un camp electrostàtic.

Tots els camps electrostàtics tenen un potencial electrostàtic associat. El potencial electrostàtic en un punt correspon al treball necessari per a traslladar-hi una càrrega de valor unitari des d'un altre punt de referència seleccionat com a origen de potencials.

El camp electrostàtic és un camp conservatiu, que vol dir que el treball realitzat només depèn de les posicions inicial i final i no del camí recorregut. Per tant, podrem parlar de potencial electrostàtic en un punt i de diferència de potencial entre dos punts, ja que en tots dos casos es tractarà sempre de valors únics.

El **potencial electrostàtic** V en un punt $\vec{r}$ és el treball necessari per tal de desplaçar una càrrega positiva de valor unitat des d'un origen de potencials $\vec{r}_0$ fins a aquest punt:

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{19}$$

on $\vec{E}$ és el camp electrostàtic en els punts per on passa el recorregut.

La unitat de mesura del potencial electrostàtic en el Sistema Internacional d'Unitats és el **volt** (**V**).

Integral de línia

Una integral de línia és una integral del tipus

$$W(\vec{r}) = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

Com que el terme a integrar és un producte escalar, el que es fa és considerar únicament les components tangencials a un recorregut determinat.

El signe negatiu indica que el potencial és positiu quan el recorregut es fa en sentit contrari al camp electrostàtic i, per tant, s'ha de realitzar un treball per a desplaçar la càrrega, mentre que és negatiu en el cas contrari.

De la mateixa manera que hem definit el potencial electrostàtic en un punt, podem definir la diferència de potencial entre dos punts com el treball necessari per a traslladar una càrrega positiva de valor unitari entre aquests dos punts. Com que el camp electrostàtic és conservatiu, la diferència de potencial entre dos punts serà un valor únic i **no dependrà del camí recorregut**.

La **diferència de potencial** entre dos punts A i B és el treball necessari per tal de desplaçar una càrrega positiva de valor unitari des d'un origen de potencials $\vec{r}_0$ fins a aquest punt:

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{20}$$

on $\vec{E}$ és el camp electrostàtic en els punts al llarg del camí recorregut ($d\vec{l}$).

Fixeu-vos que en l'expressió del potencial electrostàtic apareix una integral de línia. Això vol dir que, per al càlcul del potencial, cal integrar (sumar) únicament la component del camp elèctric **tangencial** al camí recorregut.

Com hem vist, la diferència de potencial entre dos punts correspon al treball realitzat per tal de desplaçar una càrrega d'1 C d'un punt a l'altre. De forma matemàtica, això es tradueix en el fet que el potencial és la integral de línia del camp elèctric. Aleshores ens podem fer una pregunta: es pot determinar la relació inversa? és a dir, existeix una expressió matemàtica per a calcular el camp en funció del potencial?

La resposta és que sí, però per a explicar-vos com, primer haurem d'introduir un concepte nou: el gradient d'una funció vectorial. I per a introduir-vos aquest concepte, cal que us presentem abans una eina matemàtica nova: l'operador nabla, que ja heu vist, molt de passada, al mòdul d'ones

1.2.1. L'operador nabla i el gradient d'una funció

L'operador nabla, que es representa amb el símbol $\vec{\nabla}$, és un vector definit en l'espai, les coordenades del qual són les derivades parcials respecte a cadascuna de les direccions dels eixos de coordenades.

Si recordeu, la derivada d'una funció és una mesura del seu ritme de canvi. Així, per exemple, si tenim que una funció creix molt ràpidament en un cert interval, el valor de la seva derivada serà alt en tots els punts de l'interval, mentre que si ho fa de forma lenta, el valor serà petit. Per a una funció decreixent, succeeix el mateix però amb valors negatius. Quan s'avalua en un punt determinat, la derivada d'una funció és igual al pendent d'una hipotètica recta tangent a la funció en aquell punt.

Recordeu

La derivada d'una funció $f(x)$ és una mesura del seu ritme de variació respecte a la variable independent x. La notació que es fa servir és:

$$f'(x)$$

o bé

$$\frac{df}{dx}$$

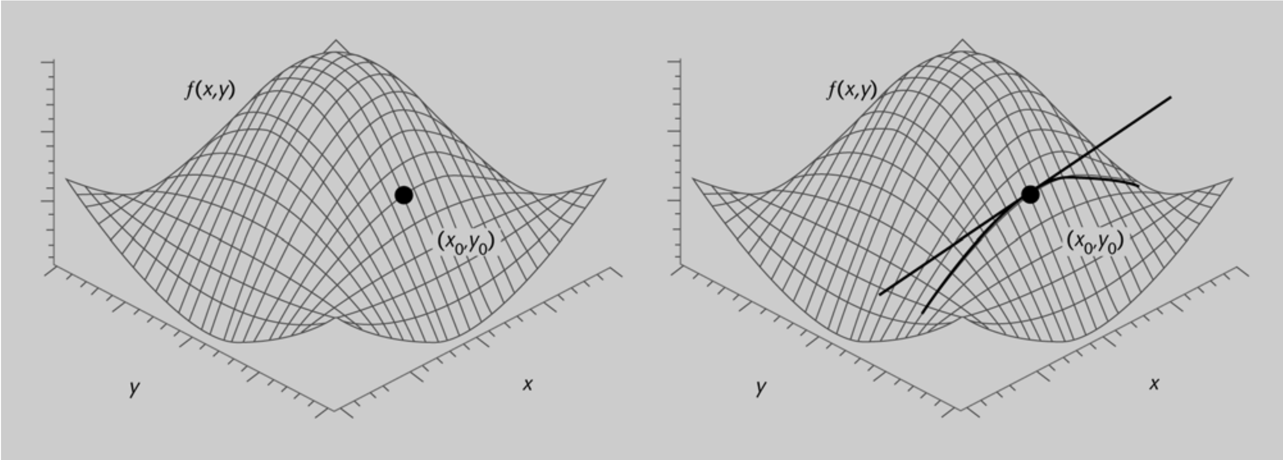
Si la derivada s'avalua en un punt determinat, el seu valor indica el pendent d'una hipotètica recta tangent a la funció en aquell punt.

Ja hem recordat què és una derivada, però, i una derivada parcial? Per tal de recordar el concepte, observeu la figura 10. S'hi mostra una representació gràfica d'una funció de dues variables, $f(x,y)$, que és una superfície corba l'"altura" de la qual correspon al valor de la funció en aquella coordenada. Per exemple, si s'avalua la funció en un punt qualsevol $P = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ obtindrem el valor de la funció en aquell punt, $f(x_0,y_0)$, i aquesta serà l'altura de la corba en aquella coordenada. La derivada parcial de la funció respecte a la variable x és el ritme de creixement o decreixement de la funció quan es manté constant el valor de la resta de variables (en l'exemple, només hi ha una altra variable, y). En altres paraules, quan ens "desplacem" en la direcció de l'eix x.

Recordeu

$f(x,y)$ representa una funció de dues variables, és a dir, una funció on les variables independents són dues (x i y). Si una funció d'una sola variable es representa amb una línia (ja sigui corba o recta), una funció de dues variables es representa mitjançant una superfície (ja sigui plana o corba).

Figura 10



Quan s'avalua la derivada parcial d'una funció respecte a una direcció en un punt determinat, obtindreu, com en el cas de la derivada per a una funció d'una sola variable, el pendent de la recta tangent a la funció en aquest punt i en aquella direcció. A la figura 10, la derivada parcial de la funció $f(x,y)$ respecte a la direcció x i avaluada sobre el punt $P = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ ens donarà el pendent de la recta tangent dibuixada.

Figura 10

Derivada parcial d'una funció $f(x,y)$ respecte a la variable x i recta tangent en el punt:

$$P = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$$

Ara que ja coneixeu el concepte de derivada parcial, tornem a l'operador nabla. Dèiem que l'operador nabla ($\vec{\nabla}$) és un vector les coordenades del qual són les derivades parcials respecte a cadascuna de les direccions dels eixos de coordenades. En forma matemàtica, això s'expressa així:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \tag{21}$$

Recordeu

Per a distingir una derivada parcial d'una derivada en una variable, la notació que es fa servir per expressar les derivades parcials és:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(\text{o } \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \ldots\right)$$

on hem fet servir les dues notacions vectorials, amb comes i amb $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. No oblideu que és només notació.

Fixeu-vos que a les coordenades de l'operador nabla ($\vec{\nabla}$) falta indicar la funció f. Això és perquè es tracta d'un operador, no un valor, i pot aplicar-se a qualsevol magnitud o funció, ja sigui escalar o vectorial.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ es llegeix "derivada parcial d'f respecte d'x".

Com qualsevol vector, amb l'operador nabla ($\vec{\nabla}$) podem realitzar tres operacions:

- **Producte per un escalar**
  En el cas de $\vec{\nabla}$, aquesta operació rep el nom de **gradient.**

- **Producte escalar**
  En el cas de $\vec{\nabla}$, aquesta operació rep el nom de **divergència.**

- **Producte vectorial**
  En el cas de $\vec{\nabla}$, aquesta operació rep el nom de **rotacional**.

Deixarem les dues últimes per a més endavant i ens centrarem en la primera: el gradient. Com ja hem dit, el gradient d'una funció escalar és el producte de l'operador nabla ($\vec{\nabla}$) per un escalar. Això s'expressa de la forma següent:

$$\text{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \tag{22}$$

Com podeu veure, el resultat és un vector les coordenades del qual són les derivades parcials de la funció respecte a cadascun dels eixos.

En cada punt, les coordenades del vector gradient tindran uns valors que correspondran als pendents de les respectives rectes tangents a la funció en cadascuna de les direccions dels eixos.

Gradient d'una funció

El gradient d'una funció

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

està definit en tots els punts (x, y, z) on la funció és contínua i derivable.

Hem vist que les coordenades del gradient, per separat, corresponen als pendents de les rectes tangents. Però, quin significat té el gradient en conjunt? En altres paraules, què expressa el vector gradient? Observeu l'exemple de la figura 11. La corba representa una funció $f(x,y)$ i les fletxes de la part inferior indiquen la direcció i magnitud dels vectors gradient en alguns dels punts de la regió.

Figura 11

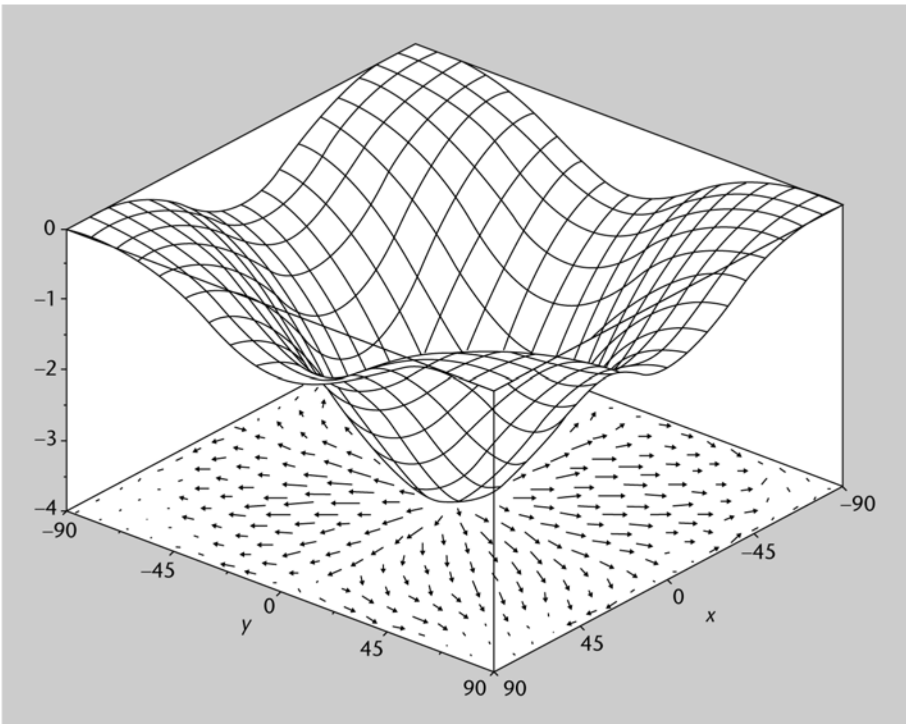


Figura 11

Representació d'una funció $f(x,y)$ (corba) i dels seus vectors gradient (fletxes).

De la figura podeu extreure'n dues conclusions:

- La direcció del vector gradient en un punt indica la **direcció de màxim creixement** de la funció. Podeu comprovar-ho si observeu, per exemple, que les fletxes que es troben sobre els punts $x = 0$ assenyalen la direcció y, ja que aquesta és la direcció de màxim creixement.

- El mòdul del vector gradient indica el **ritme de creixement** respecte a aquesta direcció de màxim creixement. Podeu comprovar-ho si observeu, per exemple, que les fletxes són molt curtes al voltant del punt (0, 0) i també a les cantonades, ja que en aquests punts la funció és gairebé plana i, per tant, el creixement és mínim

Ara ja coneixeu el concepte de gradient. La pregunta que us estareu fent és: què té a veure el gradient amb el potencial? De seguida ho veureu.

1.2.2. El camp com a gradient del potencial

Hem vist que la diferència de potencial electrostàtic entre dos punts és la integral de línia del camp electrostàtic al llarg d'un recorregut qualsevol entre aquests dos punts. També heu vist que el potencial és una funció escalar, una quantitat que assignem a cada punt de l'espai per a indicar-ne el treball necessari que faria falta per tal de col·locar-hi una càrrega unitària. D'altra banda, podeu considerar el camp electrostàtic com el que costa desplaçar una càrrega entre dos punts amb potencial diferent. Com més gran és el camp que hem de superar, més treball necessitem per desplaçar la càrrega.

Ara agafem dos conceptes i intentem relacionar-los amb l'exemple de la figura 11, on apareixia una funció escalar i el seu gradient. Podeu considerar el potencial electrostàtic en un punt com el valor de la funció, és a dir, l'altura de la corba. D'altra banda, com que el camp electrostàtic és el que "costa" desplaçar una càrrega, el podeu relacionar amb el pendent de la recta de màxim creixement, és a dir, el seu gradient.

Per tant, la conclusió és que el camp electrostàtic correspon al gradient del potencial electrostàtic.

El camp electrostàtic $\vec{E}$ en un punt $\vec{r}$ correspon al **gradient** del potencial electrostàtic $V(\vec{r})$, canviat de signe:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \tag{23}$$

on l'operador $\vec{\nabla}$ ve donat per l'equació (21).

La inclusió del signe negatiu és causada pel mateix motiu que apareixia en les expressions (19) i (20), i l'explicació és la següent: la diferència de potencial electrostàtic entre dos punts correspon al treball necessari per tal de desplaçar-hi una càrrega unitària; aquest treball s'ha de realitzar quan ens movem en sentit **contrari** al camp electrostàtic, i d'aquí ve el signe negatiu.

Exemple de camp com a gradient del potencial

El potencial elèctric en una regió està regit per l'expressió $V(\vec{r}) = 10x$. Determineu el camp elèctric en la regió i comproveu que es tracta d'un camp uniforme.

Solució

Segons l'equació (23), el camp elèctric correspon al gradient del potencial, canviat de signe:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \quad (24)$$

El potencial és $V(\vec{r}) = 10x$. Per tant,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -(10,0,0) = -10\vec{i}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \;\;\text{o}\;\; -10\vec{i}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \quad (25)$$

Com podeu comprovar, el camp elèctric és uniforme ja que sempre presenta el mateix mòdul (10 V/m) i la mateixa direcció i sentit (al llarg de l'eix x en el sentit dels nombres negatius)

1.2.3. Energia potencial electrostàtica

El concepte d'energia potencial electrostàtica és similar al d'energia potencial gravitatòria, però tenint en compte les càrregues elèctriques en comptes de les masses.

De la mateixa manera que el coneixement del camp electrostàtic en un punt ens permet determinar els seus efectes sobre una càrrega qualsevol ubicada dins del seu radi d'acció, el coneixement del potencial electrostàtic permet determinar-ne la seva energia potencial electrostàtica.

L'energia electrostàtica U d'una càrrega situada en un punt $\vec{r}$ en el qual existeix un potencial electrostàtic $V(\vec{r})$ és:

$$U(\vec{r}) = qV(\vec{r}) \quad (26)$$

on q és el valor de la càrrega.

La unitat de mesura de l'energia electrostàtica en el Sistema Internacional és, com en tots els tipus d'energia, el **joule** (**J**).

Com en el cas de la força, podem aplicar també el principi de superposició per a calcular l'energia total corresponent a una distribució de càrrega ubicada en una regió on existeix un potencial electrostàtic.

Vegeu l'aplicació a la força del principi de superposició al subapartat 1.1.4 d'aquest mòdul.

Per al cas de distribucions discretes, l'energia total és:

$$U(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}) \quad (27)$$

I per al cas d'una distribució contínua, Γ:

$$U(\vec{r}) = \int_{\Gamma} V(\vec{r}) \cdot dq \quad (28)$$

De la mateixa manera que hem vist que el camp elèctric corresponia al gradient del potencial, podeu veure a què correspon el gradient de l'energia potencial, partint de l'expressió (26) i considerant que la càrrega q és constant:

$$\vec{\nabla} U(\vec{r}) = \vec{\nabla} q V(\vec{r}) = q \vec{\nabla} V(\vec{r}) \quad (29)$$

Nota

Fem els desenvolupaments en el cas de distribucions discretes per simplicitat, tot i que són generalitzades a distribucions contínues.

Si feu servir la igualtat (23), tindreu que

$$\vec{\nabla} U(\vec{r}) = -q\vec{E}(\vec{r}) \quad (30)$$

Si us hi fixeu, el segon terme de l'equació correspon a l'expressió per a la força electrostàtica (16). Per tant, finalment obtindreu:

$$\vec{\nabla} U(\vec{r}) = -\vec{F}(\vec{r}) \quad (31)$$

Recordeu

La relació entre la força electrostàtica i el camp electrostàtic és:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

És a dir, el gradient de l'energia potencial electrostàtica correspon a la força electrostàtica.

La força electrostàtica $\vec{F}$ en un punt $\vec{r}$ correspon al **gradient** de l'energia potencial electrostàtica $U(\vec{r})$, canviat de signe:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \quad (32)$$

Fins aquí hem vist els conceptes de camp electrostàtic, força electrostàtica, potencial electrostàtic i energia potencial electrostàtica i hem vist les relacions entre ells. A la figura 12 podeu veure un esquema on es pretén mostrar aquests conceptes de forma global per tal d'entendre'n millor les relacions. En l'esquema hem suposat que tenim una càrrega de prova de valor q.

Figura 12

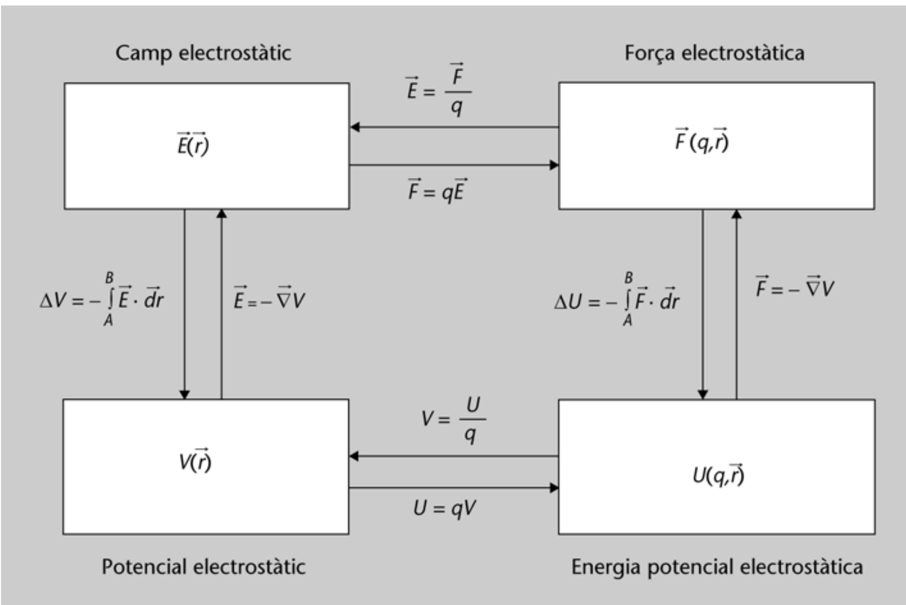


Figura 12

La figura mostra els conceptes que hem introduït fins aquí (camp electrostàtic, força electrostàtica, potencial electrostàtic i energia potencial electrostàtica) i les seves relacions.

Ho expressem per a una única q per simplificar el diagrama encara que l'esquema és generalitzable per a distribucions discretes i contínues.

Fixeu-vos que per a relacionar conceptes en la mateixa fila només cal multiplicar o dividir per q. En canvi, per a relacionar conceptes en la mateixa columna només cal calcular-ne el gradient o integrar al llarg del camí recorregut.

1.3. Electrostàtica en presència de medis materials

A l'apartat anterior hem mostrat que un camp electrostàtic afecta la regió del seu voltant i també hem vist els conceptes i les expressions de flux de camp, força electrostàtica, potencial electrostàtic i energia potencial electrostàtica. Tot el tractament s'ha fet considerant el cas "ideal" en què a la regió afectada hi ha el buit.

Tanmateix, en el món real la majoria dels camps electrostàtics es troben en medis materials amb característiques molt diverses. La presència de matèria allà on fins ara havíem considerat que no hi havia "res" pot "distorsionar" els efectes que un esperaria si només tingués en compte les propietats estudiades fins ara.

Des del punt de vista que ens interessa, podem dividir la matèria en dos tipus: materials dielèctrics (o aïllants) i materials conductors. Aquesta és la divisió que farem en aquesta assignatura i és la divisió més simple que podem fer. Heu de tenir present però, que hi ha altres tipus de materials com els semiconductors, els superconductors o, més recentment, els metamaterials. Ara bé, si enteneu els fonaments dels conductors i els dielèctrics, podreu arribar a entendre també els d'aquests altres materials.

Semiconductors

Els materials anomenats semiconductors presenten unes característiques elèctriques a mig camí entre els dielèctrics i els conductors. Aquestes característiques "especials" dels semiconductors els fan ser el fonament de l'electrònica. Alguns exemples molt comuns de materials semiconductors són el silici (Si), el germani (Ge) o l'arseniur de gal·li (GaAs).

1.3.1. Materials dielèctrics

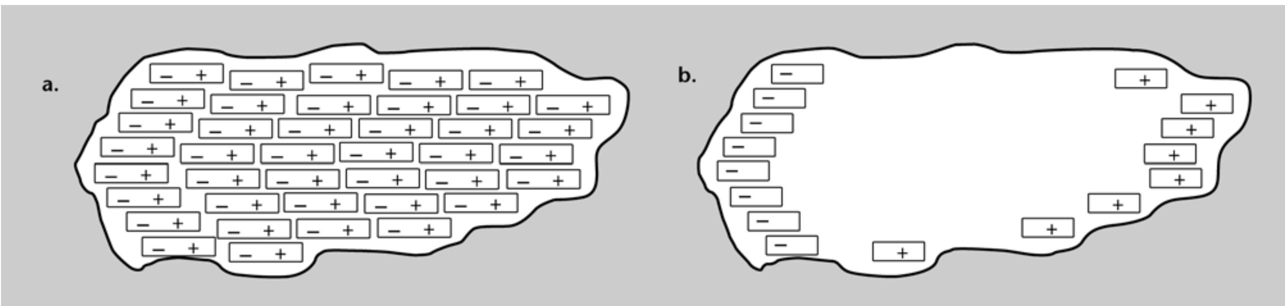
Un material dielèctric és aquell en el qual totes les partícules carregades estan fortament unides a les seves respectives molècules. Per tant, *a priori* podríem dir que aquestes no s'haurien de veure afectades per la presència d'un camp electrostàtic de forma significativa. Malgrat tot, això no és cert, ja que les diverses partícules que conformen les molècules es redistribueixen internament en funció de la direcció del camp. En concret, les partícules amb càrrega positiva tendiran a desplaçar-se en el mateix sentit del camp elèctric i les partícules amb càrrega negativa ho faran en sentit contrari. Observeu la figura 13a.

Figura 13

La part **a** mostra la representació esquemàtica dels dipols que apareixen en un material dielèctric quan és sotmès a un camp elèctric.

A la part **b** podeu observar que les càrregues positives d'un dipol es compensen amb les negatives del dipol veí, excepte en els extrems. Es produeix la **polarització** del material.

Figura 13



El resultat serà una petita redistribució de les càrregues en forma de petits dipols electrostàtics. Tot i que la càrrega total de cada molècula seguirà sent neutra, les càrregues individuals que la formen s'hauran desplaçat de la seva posició natural. A la figura 13b podeu observar que les càrregues positives d'un dipol es compensen amb les negatives del dipol veí, excepte en els extrems. Es produeix la **polarització** del material.

Però, com afecta aquesta polarització al camp electrostàtic total en un punt? La resposta pot ser molt complicada si s'han de tenir en compte tots els efectes microscòpics (és a dir, si mirem què passa a nivell molecular o en petites regions) de la polarització. El problema és que quan la polarització està present, el camp electrostàtic que tenim inclou tant la part deguda a la polarització com la part deguda a les càrregues lliures (les que hem fet servir sempre, vaja!).

Atès que el camp causat per la polarització és difícil de determinar, el que fem és treballar amb un camp que depèn només de les càrregues lliures. Com que la polarització s'oposa al camp, per a obtenir el camp que depèn només de les càrregues lliures el que fem és tornar-li a sumar, al camp total, la part deguda a la polarització, que és la que no coneixem. Aquest camp s'anomena *camp de desplaçament elèctric* $\vec{D}$.

El **camp de desplaçament** ($\vec{D}$) és una mesura dels efectes del camp electrostàtic deguts només a les càrregues lliures i es defineix com:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{33}$$

on $\vec{E}$ és el camp electrostàtic que tindríem en el buit i $\vec{P}$ és la polarització.

ε_0 és una constant anomenada *permitivitat del buit* (ε_0) o també *constant elèctrica*, i és una de les constants físiques universals. El seu valor és:

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \, \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2} \tag{34}$$

ε_0 es llegeix "èpsilon sub zero".

Com podeu veure, el camp de desplaçament consta de dos termes. D'una banda tenim un primer terme que és proporcional al camp elèctric extern ($\vec{E}$); de l'altra tenim el segon terme, que depèn de la polarització ($\vec{P}$). No obstant això, aquest segon terme es pot entendre com una "resposta" al camp electrostàtic aplicat ($\vec{E}$) i, per tant, el seu valor en depèn. Podríem aleshores relacionar tots dos termes i, en conseqüència, trobar una relació directa entre el camp de desplaçament ($\vec{D}$) i el camp electrostàtic ($\vec{E}$)?

La resposta és que a la pràctica trobar aquesta relació és, en general, més complicat del que pot semblar. De totes maneres, es pot simplificar si considerem únicament el cas en què es compleixen les condicions següents:

- El medi és **isòtrop**. Això vol dir que el valor de la polarització ($\vec{P}$) no depèn de la direcció del camp elèctric o, en altres paraules, que no existeix una direcció "privilegiada" respecte a la qual un material es polaritzi millor que en les altres

- El medi és **homogeni**. Això vol dir que la polarització és igual a tot arreu o, en altres paraules, que no existeixen regions on la polarització és més intensa que en d'altres.

- El medi és **lineal**. Això vol dir que la polarització és proporcional a la intensitat del camp electrostàtic.

L'estudi de la polarització en medis que no compleixen aquestes característiques és molt complexa i va més enllà dels objectius d'aquest mòdul.

En un medi material **isòtrop**, **homogeni** i **lineal**, el **camp de desplaçament** és proporcional al camp electrostàtic i es regeix per l'expressió següent:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad (35)$$

on ε és la **permitivitat del material.**

La unitat de mesura del camp de desplaçament és el **coulomb per metre quadrat** (C/m^2).

i. h. l.

Sovint es fan servir les inicials i. h. l. per indicar els medis materials que són isòtrops, homogenis i lineals o que s'hi aproximen.

La permitivitat del material és una constant específica per a cada material. Existeixen taules amb els valors experimentals trobats per a la majoria dels materials coneguts. Per exemple, per al buit trobareu que $\varepsilon = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \dfrac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$, que és precisament el valor ε_0 que us hem introduït a (34).

Per qüestions pràctiques, sovint se sol expressar la permitivitat del material en termes relatius respecte a la permitivitat del buit (34). Per exemple, l'aigua a 20 °C es diu que presenta una permitivitat 80 vegades més gran que el buit. En aquest cas, parlarem de **permitivitat relativa** (ε_r). La relació entre totes dues ve donada per l'expressió següent:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r \quad (36)$$

ε, ε_r, ε_0
es llegeixen "èpsilon", "èpsilon sub erra" i "èpsilon sub zero", respectivament.

La permitivitat relativa (ε_r) també s'anomena sovint **constant dielèctrica** i és la característica que es dóna de forma més habitual.

La permitivitat elèctrica, tant si és absoluta (ε) com relativa (ε_r), és una propietat dels medis materials que mesura com responen davant la presència d'un camp elèctric. Podem fer servir aquest paràmetre en totes les equacions que fins ara estaven definides per al buit per a aplicar-les a un medi qualsevol, simplement substituint el valor de la permitivitat del buit (ε_0) pel valor corresponent al medi en qüestió (ε).

Exemple de camp de desplaçament

El mòdul del camp electrostàtic creat per una distribució esfèrica de càrrega Q ubicada en el punt (0, 0, 0) sobre un punt exterior és:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2} \tag{37}$$

on ε és la permitivitat del medi i r és el mòdul del vector de posició $\vec{r}$, és a dir, la distància respecte al punt (0, 0, 0).

Sabent això, determineu el camp electrostàtic que generaria una esfera carregada amb $Q = 2$ μC sobre el punt (1, 1, 1) en els casos següents:

a) el medi exterior és el buit
b) el medi exterior és l'aire ($\varepsilon_r = 1{,}0006$)
c) el medi exterior és l'aigua ($\varepsilon_r = 80$)

Solució

Primer de tot, calcularem el valor d'r:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}\,\text{m}$$

Ara ja podem calcular el camp per al primer cas, el del buit ($\varepsilon_r = \varepsilon_0$):

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}^2} = 5.992{,}5\ \text{N/C} \tag{38}$$

Per a la resta de casos, podem fer servir l'equació (36), segons la qual la permitivitat ε d'un material és la seva permitivitat relativa ε_r multiplicada per la del buit ε_0. Per tant, per al cas de l'aire, tindrem $\varepsilon = 1{,}0006\varepsilon_0$ i:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \cdot 1{,}0006 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}^2} = 5.988{,}9\ \text{N/C}$$

Podem comprovar que la diferència respecte el buit és ínfima, atès que la permitivitat elèctrica de l'aire és molt propera a 1.

Per al cas de l'aigua, tenim $\varepsilon = 80\varepsilon_0$ i:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \cdot 80 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}^2} = 74{,}9\ \text{N/C}$$

Podeu comprovar que el camp elèctric s'ha reduit un factor 80 respecte al que tindríem en el buit, que és precisament el valor de la permitivitat elèctrica relativa:

$$\frac{5.992{,}5}{74{,}9} = 80$$

Recordeu

El mòdul d'un vector, per exemple, F es pot representar com $\|F\|$ o bé com r.

1.3.2. Materials conductors

Un material conductor és aquell en el qual existeixen algunes partícules carregades que queden "lliures" per moure's a través del material. Els materials conductors més habituals són els metalls, ja que les seves partícules carregades, en aquest cas els seus electrons, poden "escapar-se" més fàcilment. En funció de la facilitat d'aquests electrons a "alliberar-se", trobarem materials més i menys conductors.

Recordeu

En un àtom podem trobar:

- **electrons**, que tenen càrrega negativa,
- **protons**, que tenen càrrega positiva,
- **neutrons**, que són neutres i, per tant, no tenen efecte des del punt de vista electrostàtic.

Quan un material conductor es troba en una regió on hi ha present un camp electrostàtic, aquestes càrregues tindran llibertat per moure's en funció de les característiques del camp. Tanmateix, arribarà un moment en què totes les càrregues s'hauran desplaçat i no en quedarà cap. Quan això succeeix es diu que s'ha arribat a l'estat estacionari i el camp a l'interior del material és zero.

Superconductors

Els materials anomenats *superconductors* són aquells que, per sota d'una certa temperatura, actuen com a conductors perfectes.

Per tant, en l'estat estacionari (les càrregues ja no es mouen), el camp electrostàtic a l'interior d'un conductor és **zero**.

D'altra banda, si recordeu la relació entre el camp i el potencial (23):

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

La conseqüència és que si el camp és zero, el potencial ha de ser constant.

En l'estat estacionari, el potencial electrostàtic a l'interior d'un conductor és **constant**.

Exemple de potencial electrostàtic a l'interior d'un conductor

Demostreu que el potencial electrostàtic a l'interior d'un conductor és constant.

Solució

Com ja hem dit, el camp electrostàtic a l'interior d'un conductor sempre és zero:

$$\vec{E} = 0 \tag{39}$$

D'altra banda, recordem que el camp $\vec{E}$ correspon al gradient del potencial V, tal com hem vist a l'equació (23):

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \tag{40}$$

Si combinem les dues expressions (39) i (40), tindrem que :

$$\vec{\nabla} V(\vec{r}) = 0 \tag{41}$$

Segons la definició de gradient (22), això vol dir que:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

Per tant, per les propietats de les derivades, el potencial haurà de ser constant respecte a totes les variables:

$$V(x,y,z) = constant$$

Recordeu

Si $f(x) = constant$, aleshores:

$$\frac{df}{dx} = 0$$

1.4. Què hem après?

En aquest primer apartat hem fet un repàs dels conceptes clau de l'electrostàtica. Hem incidit en l'estudi de les línies de camp elèctric i en el seu significat, i hem determinat un mètode de quantificació d'aquestes línies mitjançant el concepte de flux de camp elèctric. En relació al flux, hem enunciat el teorema de Gauss aplicat al camp elèctric i hem arribat a la conclusió que les línies de camp només poden començar o acabar allà on es troben les càrregues elèctriques.

També hem parlat de l'energia associada al camp electrostàtic i ho hem fet mitjançant el concepte de potencial electrostàtic. Per tal de relacionar el potencial amb el camp us hem introduït un operador matemàtic, l'operador nabla, i una eina matemàtica, el gradient d'una funció.

Per acabar, hem estudiat què succeeix quan un camp elèctric es troba en una regió on hi ha un medi material i hem vist que la presència del medi modifica el camp elèctric "efectiu" en el seu interior. En el cas d'un medi dielèctric, apareix una polarització que es manifesta com un camp elèctric que s'oposa al camp extern i, per tant, en redueix l'efectivitat. Per a determinar aquesta efectivitat hem introduït el concepte de permitivitat elèctrica dels medis. En el cas d'un medi conductor, el camp elèctric en el seu interior és sempre zero en condicions estacionàries.

2. Repàs d'electromagnetisme: magnetostàtica i inducció

A l'apartat de repàs de l'electrostàtica hem vist les característiques i propietats dels camps electrostàtics, és a dir, els efectes i interaccions de les càrregues elèctriques en condicions estàtiques (quan no es mouen). En aquest apartat explicarem els fenòmens que s'observen quan les càrregues deixen d'estar en repòs i es troben en moviment. Introduirem el concepte de camp magnètic i veurem la seva relació amb els camp elèctrics variables. Més endavant, en els últims apartats, anirem un pas més enllà i estudiarem els fenòmens que es produeixen quan el camp magnètic també és variable.

Abans, però, definirem un concepte clau que ens servirà per a la resta de l'apartat: el concepte de corrent elèctric.

2.1. Corrent elèctric

Quan volem estudiar el moviment d'una sola càrrega, podem tractar-la de forma individual sense gaire dificultat. Conèixer el valor de la seva càrrega, la seva velocitat i la seva trajectòria és suficient per a determinar-ne els efectes. El mateix succeeix per a un nombre petit de càrregues puntuals.

No obstant això, en la majoria de casos del món quotidià les càrregues ni van soles ni es poden tractar com a elements individuals, sinó que formen part d'un "flux" que es pot aproximar a continu. Es diu que s'està produint un **corrent elèctric**.

Podeu fer una analogia amb una aixeta. Si obrim molt poc el pas de l'aixeta, és possible que comencin a caure gotes individuals de forma molt lenta, de tal manera que ens serà possible comptar de forma individual el nombre de gotes que cauen. Si obrim l'aixeta una mica més, les gotes aniran caient més ràpid. Segur que ens serà molt més difícil comptar-les, però així i tot, encara seríem capaços de fer-ho si les observéssim amb la concentració suficient. Si seguim obrint l'aixeta encara més, però, arribarà un moment en què ens serà impossible distingir les gotes individuals. Haurem de passar de comptar el nombre de gotes a comptar el volum de l'aigua. Tot i que en realitat les gotes continuen sent elements individuals, a efectes de càlcul ens hem vist obligats a tractar l'aigua com un flux continu.

Amb el corrent elèctric passa el mateix. Allò que en forma individual era suficient per a determinar els efectes d'una càrrega elèctrica individual o d'un grup reduït, el valor de la càrrega i la velocitat, és inviable (per no dir impossible) de calcular si el flux és continu. Per a aquests casos, es defineix una magnitud molt més interessant: la intensitat de corrent.

2.1.1. Intensitat de corrent

La mesura quantitativa de la quantitat de càrrega que es desplaça i de la seva velocitat es fa mitjançant el concepte d'**intensitat de corrent**. Observeu primer la figura 14.

Figura 14

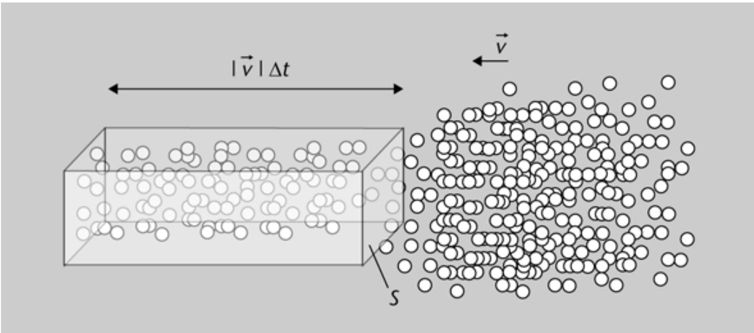


Figura 14

La figura mostra el pas conceptual entre el tractament individual de les càrregues en moviment i el tractament col·lectiu com a flux continu.

A l'exemple, una sèrie de càrregues es desplaça amb una velocitat marcada pel vector $\vec{v}$, i una part d'elles travessarà la superfície *S*. Si suposeu que totes les càrregues són d'igual valor, es mouen amb la mateixa velocitat i, a més, aquesta és constant, podeu deduir que la quantitat de càrrega que hi ha dins del volum indicat correspon a la que ha travessat la superfície *S* durant un temps determinat Δt. A aquest nombre de càrregues se l'anomena *intensitat de corrent*.

La **intensitat de corrent elèctric** (*I*) és la quantitat de càrrega elèctrica que travessa una superfície determinada (ΔQ) durant una unitat de temps (Δt):

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad (42)$$

o en forma diferencial:

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad (43)$$

La unitat de mesura de la intensitat en el SI és l'**ampere**, que es simbolitza amb **A**. Un ampere és igual a un coulomb per segon (1 A = 1 C/s)

q i Q

En general, farem servir q per a indicar el valor de càrregues individuals i Q per al valor total provocat per la suma d'una quantitat indefinida de càrregues.

L'ampere

Tot i que en els inicis es va definir l'ampere (A) com una unitat derivada (1 C/s), en l'actualitat, l'ampere és una unitat fonamental del SI, i la resta d'unitats es defineix a partir d'ell:

$1\ \mathrm{C} = 1\ \mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$ i $1\ \mathrm{V} = 1\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}}$

Però, quina és la relació entre aquesta nova magnitud i les magnituds individuals que defineixen una càrrega en moviment, és a dir, el valor de la càrrega i la seva velocitat?

Podeu trobar aquesta relació si us torneu a fixar en la figura 14. Durant un cert instant de temps Δt, les càrregues que han travessat la superfície indicada hauran recorregut la distància $\Delta l = |\vec{v}|\Delta t$. Si analitzeu detingudament la figura, féu un balanç de la càrrega que hi ha dins del volum indicat i suposeu que aquest és infinitament petit, arribareu a la conclusió següent:

$$Id\vec{l} = I\vec{v}dt = \vec{v}dq \qquad (44)$$

Recordeu

Espai = velocitat × temps.

on hem fet servir l'equació (43).

La intensitat de corrent és una mesura de la magnitud de les càrregues que es desplacen i de la seva velocitat. Tanmateix, el concepte d'intensitat no inclou cap mena d'informació sobre com de juntes o separades es troben les càrregues entre sí. Per exemple, si tornem al símil de l'aigua, no és el mateix que un cert cabal d'aigua circuli per una aixeta que per una col·lector d'aigua que és diverses vegades més ample. Aquest aspecte es pot tractar mitjançant el concepte de densitat de corrent.

2.1.2. Densitat de corrent

La densitat de corrent ($\vec{J}$) és una magnitud vectorial la direcció i sentit de la qual són els del corrent elèctric, i el seu mòdul és la intensitat de corrent dividida per la superfície que travessa:

$$\|\vec{J}\| = \frac{I}{S} \qquad (45)$$

A la figura 15 podeu visualitzar un exemple que us ajudarà a entendre aquest concepte. A l'exemple, un mateix corrent elèctric d'intensitat constant es fa passar per dos trams amb secció diferent. En concret, la secció de (b) és quatre vegades més petita que la de (a). Per tant, tot i ser la intensitat igual en totes dues, no passa el mateix amb la densitat de corrent, que en el segon tram serà quatre vegades més gran que en el primer.

Figura 15

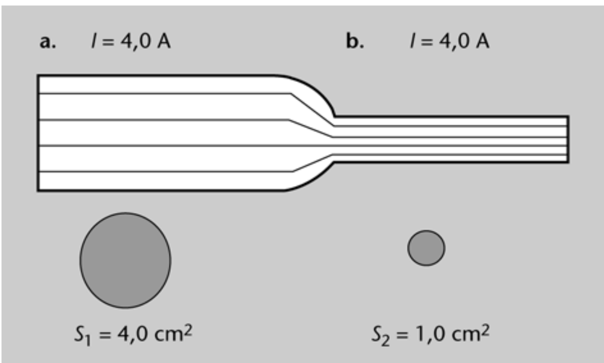


Figura 15

Representació gràfica del concepte de densitat de corrent. La intensitat de corrent I és la mateixa en tot el recorregut, però com que la secció en el tram (b) és quatre vegades més petita que a (a), la densitat de corrent serà quatre vegades més gran.

Ara que ja coneixeu el concepte de densitat de corrent, anem a veure com s'expressa la intensitat de corrent en funció d'aquesta densitat. Si tenim una superfície S qualsevol, a través de la qual passa una certa densitat de corrent $\vec{J}$, la intensitat de corrent total que travessa la superfície serà:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \qquad (46)$$

L'expressió (46) ja té en compte el sentit de tots els corrents que travessen la superfície S, de manera que la intensitat I representa la intensitat total o neta, és a dir, el balanç entre els corrents que travessen la superfície en un sentit i en l'altre.

Per tal d'acabar amb els conceptes d'intensitat i densitat de corrent, i abans d'entrar en matèria en l'estudi dels camps que generen els corrents, cal que entengueu un altre concepte clau: l'equació de continuïtat.

2.1.3. L'equació de continuïtat

Considereu una superfície tancada qualsevol a la qual entren i surten càrregues elèctriques a causa de corrents elèctrics, com ara la figura 14. Suposem que a l'interior d'aquesta superfície hi ha una certa quantitat de càrrega. Durant un interval de temps determinat, el balanç entre la càrrega que hi entra i la que en surt ha de ser per força igual a l'augment de la càrrega que hi ha a l'interior:

$$(I_{entrant} - I_{sortint})\Delta t = \Delta Q_{int} \tag{47}$$

$$I_{neta} = \frac{\Delta Q_{int}}{\Delta t} \tag{48}$$

on I_{neta} correspon a la intensitat total o neta resultant del balanç entre el corrent que entra i el que surt. Aquesta intensitat la podem substituir per l'expressió equivalent en funció de la densitat de corrent (46):

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{\Delta Q_{int}}{\Delta t} \tag{49}$$

I, si considerem intervals de temps molt petits, es converteix en:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial Q_{int}}{\partial t} \tag{50}$$

Recordeu

La densitat de càrrega ρ correspon a la quantitat de càrrega per unitat de volum:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \rightarrow dQ = \rho dV$$

I per tant:

$$Q = \int_V \rho dV$$

On V correspon al volum on hi ha ρ.

D'altra banda, podem agafar el segon terme de l'equació anterior i expressar-lo en funció de la densitat de càrrega (ρ):

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV \tag{51}$$

Aquesta és l'**equació de continuïtat**.

Per tal d'entendre el concepte de l'equació de continuïtat, podeu fer una analogia entre el corrent elèctric i un dipòsit d'aigua. La intensitat correspondria al cabal d'aigua (quantitat d'aigua per unitat de temps) que entra o surt del dipòsit. El balanç entre el cabal de l'aigua que entra i de la que surt serà el ritme de creixement o decreixement del nivell d'aigua en el dipòsit.

Ja hem explicat el concepte de corrent elèctric i n'hem definit la intensitat. Si recordeu, al començament de l'apartat hem dit que estudiaríem els efectes de les càrregues en moviment. Això és el que farem a continuació, i farem servir precisament el concepte d'intensitat.

2.2. Camp magnètic induït

Tal com hem vist a l'apartat de repàs d'electrostàtica, totes les càrregues elèctriques creen un camp elèctric que interacciona amb les càrregues que es troben dins de la seva regió d'influència. Les càrregues en moviment i, per tant, també els corrents elèctrics creen un camp. Tanmateix, i atès que les càrregues que el generen ja no es troben en repòs, aquest camp no tindrà les mateixes característiques que els camps electrostàtics que us hem explicat fins ara. A aquest camp l'anomenarem *camp d'inducció magnètica* i el simbolitzarem amb el símbol $\vec{B}$.

El camp generat per càrregues en moviment s'anomena **camp d'inducció magnètica** o, de forma abreviada, **camp magnètic**, i es simbolitza amb el símbol $\vec{B}$.

Camp magnètic $\vec{B}$

El camp d'inducció magnètica $\vec{B}$ se sol anomenar, per abús del llenguatge, **camp magnètic** a seques.

També és habitual, en àmbits com ara l'electrotècnia, anomenar a aquest camp **densitat de flux magnètic**.

A la figura 16 podeu veure alguns exemples de camps d'inducció magnètica creats per dos tipus de distribucions de corrents elèctrics: un fil de corrent rectilini i infinit (figura 16a) i una espira (circuit tancat) de corrent circular (figura 16b).

Figura 16

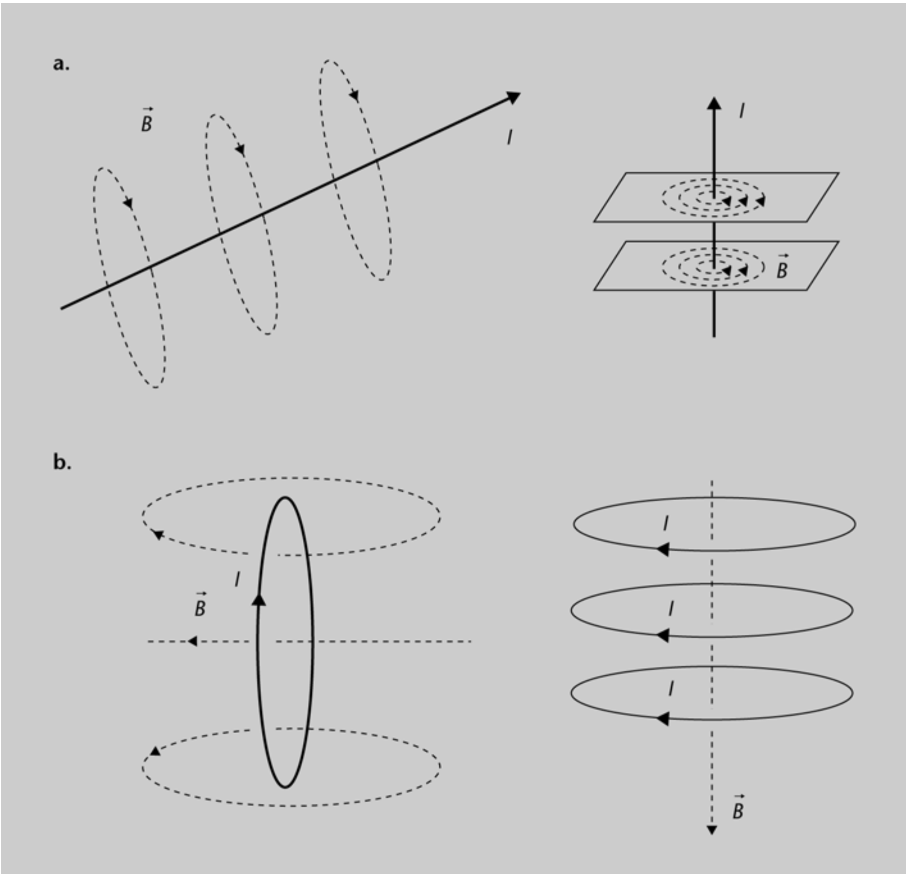


Figura 16

Exemples de camps d'inducció magnètica creats per:

a. un fil de corrent rectilini i infinit,

b. una espira de corrent circular.

Podeu observar que, en tots els exemples de la figura, el vector camp d'inducció magnètica $\vec{B}$ és sempre perpendicular a la direcció del moviment de les càrregues.

Anteriorment us vàrem introduir el concepte de línies de camp com una representació gràfica de les característiques del camp electrostàtic en una regió. Podeu seguir el mateix procediment per al camp d'inducció magnètica si dibuixeu les línies de camp com a representació d'aquest camp $\vec{B}$.

Vegeu el concepte de línies de camp com una representació gràfica de les característiques del camp electrostàtic en una regió al subapartat 1.1.1 d'aquest mòdul.

2.2.1. Línies de camp magnètic

Les línies de camp magnètic són una representació gràfica i qualitativa de les característiques del camp d'inducció magnètica $\vec{B}$ en una regió determinada.

La figura 17 mostra tres exemples de distribucions de línies de camp.

Figura 17

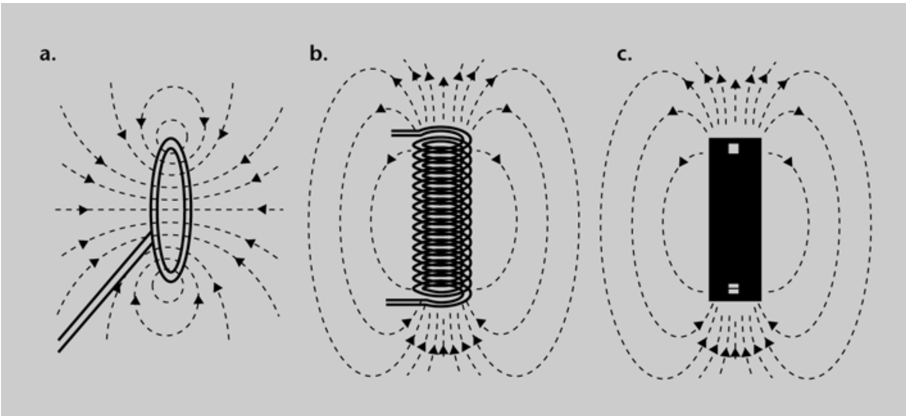


Figura 17

La figura mostra les línies de camp magnètic induït corresponents a:

a. una espira de corrent,

b. un conjunt d'espires de corrent i

c. un imant permanent.

- El primer cas (figura 17a) correspon a una espira circular. Podeu comprovar que les línies de camp no tenen ni principi ni final (les línies que semblen acabar fora del dibuix en realitat també són tancades, simplement no caben en aquest dibuix). L'única excepció aparent és la línia que passa pel centre de l'espira. En aquest cas el que succeeix és que el seu recorregut és tan gran que sembla que sigui recta.

- El segon exemple (figura 17b) mostra les línies de camp en un solenoide recte. Podeu comprovar que les línies de camp a l'interior del solenoide es troben molt juntes i això indica que la intensitat del camp magnètic és gran. També podeu observar que són gairebé paral·leles, fet que indica que el camp és uniforme.

Recordeu

Un solenoide és una sèrie d'espires col·locades una a continuació de l'altra.

- El tercer exemple (figura 17c) l'hem inclòs per a demostrar l'equivalència entre el camp magnètic induït per l'imant i el del solenoide del cas anterior. Aquest exemple és una de les proves més visibles que l'electricitat i el magnetisme són dues manifestacions de la mateixa interacció.

Dels exemples anteriors podeu extreure'n una conclusió molt interessant. Observareu que les línies de camp no tenen ni principi ni final, sinó que són sempre corbes tancades. En altres paraules, no existeixen "càrregues magnètiques" on comencin o acabin les línies.

Com en el cas del camp elèctric, cal quantificar el nombre de línies de camp. Ho farem també amb el concepte de flux, ara aplicat al camp magnètic. A més, ens permetrà veure que, efectivament, no hi ha càrregues magnètiques.

2.2.2. Flux de camp magnètic

La definició de flux magnètic és anàloga a la definició de flux per a qualsevol camp de força, inclòs el camp electrostàtic que hem vist a l'apartat 1. El flux magnètic és, igual que el flux elèctric, una magnitud escalar, no vectorial. Conceptualment es pot entendre com el nombre de línies de camp que travessen una superfície.

Es defineix el **flux (Φ_B) d'un camp magnètic** $\vec{B}$ a través d'una superfície $\vec{S}$ com la integral, estesa a tota la superfície, de la **component perpendicular** del camp magnètic sobre ella:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{52}$$

La unitat de mesura del flux magnètic en el Sistema Internacional d'Unitats és el **weber** (**Wb**)

Φ_B es llegeix "fi sub be".

De la mateixa manera que en el cas del camp electrostàtic, també es pot aplicar el teorema de Gauss per al camp magnetostàtic. Veureu que el resultat és molt interessant.

El weber (Wb)

Algunes equivalències del weber amb altres combinacions d'unitats del SI són:

1 Wb = 1 V · s = 1 T · m^2

2.2.3. Llei de Gauss per al camp magnetostàtic

La llei de Gauss aplicada al camp magnetostàtic presenta un resultat ben curiós. Per a qualsevol superfície tancada, sigui quina sigui la seva forma i mida, el balanç de flux magnètic que la travessa ha de ser sempre zero. La figura 18 us permetrà visualitzar aquest concepte.

Figura 18

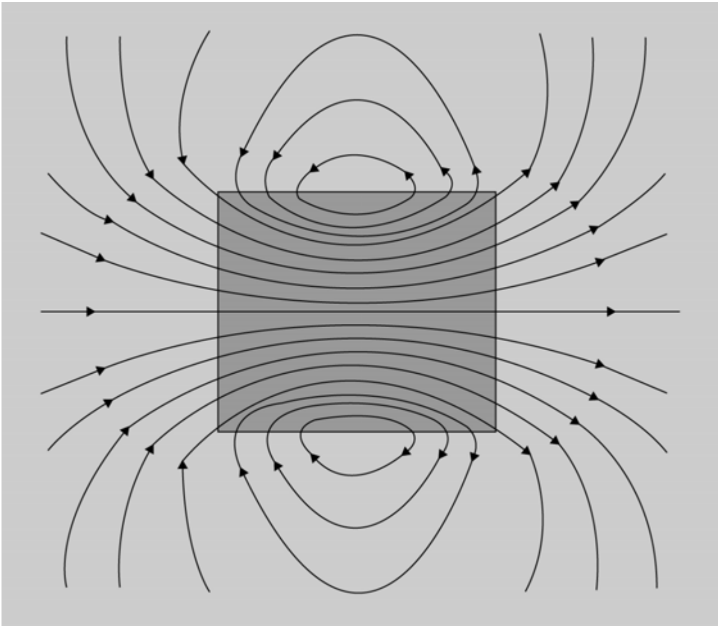


Figura 18

La figura permet visualitzar que el flux de camp magnètic a través d'una superfície tancada és sempre zero.

A l'exemple de la figura es mostren una sèrie de línies de camp magnètic (recordeu que les línies de camp magnètic són sempre tancades). El flux a través de la superfície tancada indicada amb un color més fosc correspon al balanç entre les línies que hi entren i les que en surten. Podeu comprovar que el flux és zero, ja que el nombre de línies que entren és el mateix que les que surten. El mateix succeiria per a qualsevol superfície tancada.

La **llei de Gauss** aplicada al camp magnetostàtic ($\vec{B}$) diu que el balanç de flux de camp magnètic (Φ_B) que travessa una **superfície tancada** qualsevol és sempre igual a zero:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{53}$$

on S és una superfície tancada qualsevol. El símbol $\oint_S$ indica integral estesa a tota la superfície tancada.

Aquest fet s'explica perquè, com hem dit a l'apartat anterior, no existeixen "càrregues magnètiques" on puguin començar o acabar les línies de camp i, per tant, el nombre de línies que "entren" dins de la superfície ha de ser el mateix que les que en "surten".

Un cop introduït el concepte de flux magnètic, passem a estudiar un concepte molt relacionat: la divergència d'un vector o d'un camp vectorial.

2.2.4. Divergència d'un vector

Anteriorment us vàrem introduir l'operador nabla ($\vec{\nabla}$) com un vector les coordenades del qual eren les derivades parcials respecte a cadascuna de les va-

Vegeu l'operador nabla ($\vec{\nabla}$) al subapartat 1.2.1 d'aquest mòdul.

riables i vàreu veure que amb ell es podien realitzar tres operacions: gradient (que ja us vàrem explicar allà mateix), divergència i rotacional. Deixarem l'última per a més endavant i ens centrarem ara en la divergència.

La divergència és el producte escalar de l'operador nabla ($\vec{\nabla}$) per una magnitud vectorial. La seva expressió matemàtica és:

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{54}$$

Recordeu

El producte escalar de dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ es calcula de la manera següent:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

on $\vec{u}$ és un vector genèric qualsevol, de coordenades $u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$.

Atès que el producte escalar entre dos vectors és una magnitud escalar, la divergència també ho serà. Vegem què representa aquesta magnitud.

Imagineu-vos un cub imaginari infinitament petit ubicat en una regió determinada de l'espai on hi ha definit un camp vectorial, com podria ser per exemple un camp elèctric o un camp magnètic. Per tal de simplificar, suposarem que les cares del cub estan encarades en les direccions x, y i z. A la figura 19 podeu visualitzar aquest cub.

Figura 19

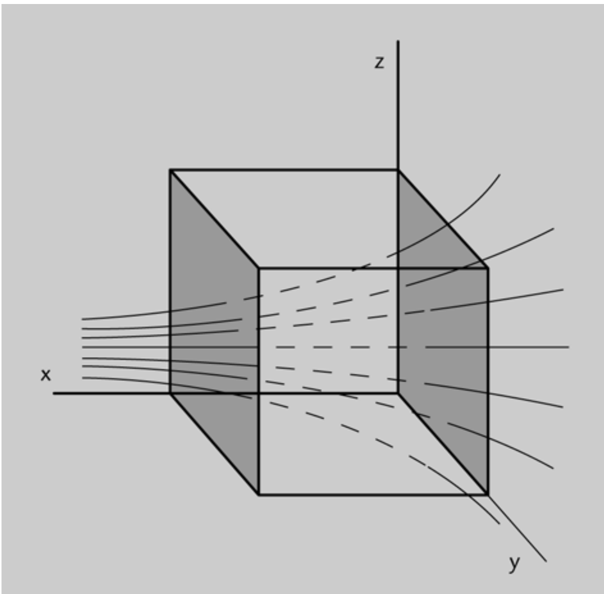


Figura 19

La figura permet visualitzar el concepte de divergència d'un camp vectorial.

Calcular la divergència en un punt de l'interior del cub vol dir avaluar les derivades parcials respecte a cadascuna de les direccions de les cares i sumar-les. Si tenim que en una certa direcció la derivada parcial és positiva, voldrà dir que el camp serà creixent en aquella direcció. I com que la magnitud d'un camp vectorial es representa mitjançant la densitat de línies de camp, això voldrà dir que en un extrem hi haurà d'haver més línies de camp que en l'altre. I aquestes línies de camp de més o de menys, per on entren o surten? Doncs, segons el teorema de Gauss tindrem dues possibilitats:

- Les línies de camp neixen o moren dins el cub, o bé
- les línies de camp entren per alguna de les altres cares del cub.

El primer cas és el que teníem a la llei de Gauss per al camp electrostàtic, on vèiem que hi havia les càrregues, és a dir, les fonts del camp electrostàtic, que eren els punts on naixien o morien les línies de camp. De fet:

Vegeu la llei de Gauss al subapartat 1.1.3 d'aquest mòdul.

Una **divergència** diferent de zero d'un camp indica que hi ha punts on neixen o moren línies de camp.

Suposem que no és possible el primer cas, és a dir, que dins del cub no existeix cap font de línies de camp. Si es tracta d'un camp magnetostàtic, aquesta suposició sempre és certa, segons la llei de Gauss per al camp magnetostàtic (53). Si es tracta d'un camp electrostàtic, això es tradueix en que hem de suposar que no hi ha cap càrrega elèctrica a l'interior, segons la llei de Gauss per al camp electrostàtic (8). Això implica que hem d'optar per la segona possibilitat, és a dir, que les línies de camp que entren per una direcció han de sortir per l'altra. En altres paraules, les derivades parcials en les respectives direccions s'han de cancel·lar entre sí i la divergència ha de ser zero.

Atès que en el camp magnetostàtic aquesta suposició és sempre certa, tindrem que la seva divergència és sempre zero.

La **divergència** d'un camp magnetostàtic és sempre zero:

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{55}$$

Més endavant veurem que la conclusió que es pot extreure de l'equació (55) és una manera alternativa d'enunciar la llei de Gauss per al camp magnetostàtic (53). Aquesta llei és molt interessant des del punt de vista de les conseqüències que comporta: la inexistència de "càrregues magnètiques". Tanmateix, la llei de Gauss per al camp magnetostàtic no té la mateixa utilitat que la seva aplicació al cas del camp electrostàtic, ja que no inclou la relació entre el camp magnètic i les seves causes (recordeu que la llei de Gauss per al camp electrostàtic sí que ho fa: relaciona el camp electrostàtic en una regió amb les càrregues que el generen). Aquesta relació la trobarem amb una nova llei que introduirem tot seguit: la llei d'Ampère-Maxwell.

2.2.5. Llei d'Ampère-Maxwell

Quan us vàrem introduir la llei de Gauss per al camp electrostàtic (8) vàreu veure que el flux de camp que travessa una superfície tancada és determinat únicament per la càrrega en el seu interior. La llei d'Ampère, que rep el nom del seu descobridor, el francès A. M. Ampère, relaciona la circulació del camp magnètic al llarg d'un recorregut tancat amb el corrent elèctric que el travessa. Però què és la circulació d'un camp?

André-Marie Ampère

Físic i matemàtic (20 de gener de 1775 - 10 de juny de 1836) que està considerat com el pare de l'electrodinàmica (l'estudi de camps elèctrics i magnètics variables).

La circulació del camp magnètic $\vec{B}$ al voltant d'un recorregut tancat C qualsevol es defineix com la integral de línia del camp al llarg de tot el recorregut:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \qquad (56)$$

Circulació d'un camp

La circulació d'un camp vectorial $\vec{u}$ al voltant d'un recorregut tancat C qualsevol es defineix com la integral de línia del camp al llarg de tot el recorregut:

$$\oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

Conceptualment, es pot entendre com la suma de les components **tangencials** del camp en tots els trams infinitesimals del recorregut.

Fixeu-vos que el fet que la integral contingui un producte escalar implica que el que s'està realitzant és la suma de les components **tangencials** del camp en tots els trams infinitesimals del recorregut. Recordeu que, per al flux de camp, tot i fer servir també el producte escalar, la component que es tenia en compte era la perpendicular. El motiu d'aquesta diferència és que els vectors de superfície es defineixen sempre perpendiculars a les superfícies, mentre que els vectors de línia es defineixen paral·lels a la línia.

La **llei d'Ampère** estableix que la circulació del camp magnètic $\vec{B}$ al llarg d'un recorregut tancat C depèn del corrent que travessa la superfície imaginària S que dibuixa el circuit. La seva expressió matemàtica és:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \qquad (57)$$

on μ_0 és la permeabilitat del buit i I és la intensitat de corrent elèctric que travessa la superfície. $d\vec{l}$ és el camí recorregut

A la figura 20 podeu visualitzar en un exemple els elements que hem fet servir a l'expressió (57). C és el recorregut tancat i S és la superfície que determina aquest recorregut. La intensitat de corrent elèctric (I) és la intensitat "neta", és a dir, el balanç entre les intensitats dels corrents que travessen la superfície en un sentit i les dels que ho fan en l'altre. Així, per exemple, si tenim dos corrents elèctrics amb la mateixa intensitat però amb sentits oposats, el que tindrem és que la circulació del camp magnètic per un circuit tancat que envolti tots dos corrents serà igual a zero.

Figura 20

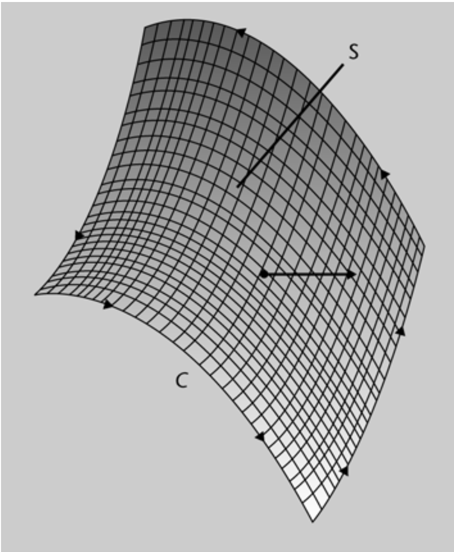


Figura 20

Visualització dels elements que apareixen en l'enunciat de la llei d'Ampère (57).

Podeu veure que la llei d'Ampère expressa la relació entre el camp magnètic i una de les seves causes: els corrents elèctrics. Tanmateix, a diferència de les lleis de Gauss que ja hem vist, i que es compleixen sempre, la llei d'Ampère, tal com està enunciada a (57), presenta algunes limitacions i no sempre es pot aplicar de forma correcta.

Observeu la figura 21, per exemple. En el dibuix apareixen dues superfícies, S_1 i S_2, que estan limitades pel mateix recorregut tancat C. El fil de corrent està "interromput" per un condensador, de tal manera que una de les seves plaques es troba en una banda d'S_2 i l'altra placa es troba a l'altra banda.

Segons la llei d'Ampère "original" (57), les intensitats de corrent que travessen totes dues superfícies haurien de ser idèntiques, ja que el recorregut C és el mateix per a totes dues i, per tant, també ho és la circulació del camp magnètic $\vec{B}$. Tanmateix, en l'exemple de la figura podeu comprovar que això no és així. La superfície S_1 està travessada per una intensitat I, mentre que la superfície S_2 no està travessada per cap corrent. En altres paraules, la llei d'Ampère porta a una contradicció.

Figura 21

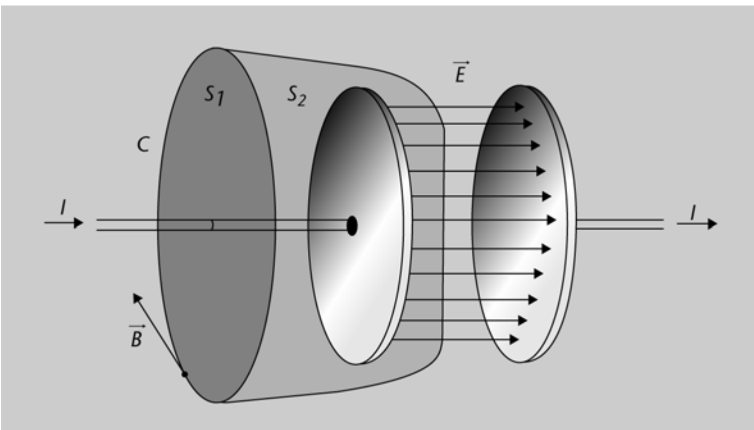


Figura 21

Visualització d'un exemple d'una configuració on la llei d'Ampère (57) no és vàlida.

La primera persona que va proposar una "solució" per a aquest problema va ser l'escocès J. C. Maxwell. Maxwell va afegir a l'expressió (57) un terme que depèn de la variació del flux de camp elèctric. Aquest nou terme s'anomena **corrent de desplaçament**. La nova llei d'Ampère modificada amb la inclusió d'aquest terme s'anomena, en honor a Maxwell, llei d'Ampère-Maxwell.

James Clerk Maxwell

Físic teòric i matemàtic escocès (13 de juny de 1831 - 5 de novembre de 1879) que està considerat com el desenvolupador més important de la teoria conjunta de l'electromagnetisme.

La **llei d'Ampère-Maxwell** enuncia que la circulació del camp magnètic $\vec{B}$ al llarg d'un recorregut tancat C depèn de la intensitat de corrent elèctric i de la variació del flux elèctric que travessen la superfície imaginària S que dibuixa el recorregut. La seva expressió matemàtica és:

Φ_E es llegeix "fi sub e".

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \tag{58}$$

Nota

Fixeu-vos que $\vec{S}$ no és una superfície tancada en el cas de la llei d'Ampère-Maxwell.

on μ_0 i ε_0 són la permeabilitat i la permitivitat del buit, I és la intensitat de corrent elèctric que travessa la superfície, Φ_E és el flux de camp elèctric i $d\vec{l}$ és el camí recorregut.

D'altra banda, es defineix el corrent de desplaçament, I_D, com:

$$I_D = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} d\vec{S} \tag{59}$$

on fixeu-vos que és el flux de $\vec{E}$ a través d'una superfície $\vec{S}$

Per tant, també podem escriure la llei d'Ampère-Maxwell com:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I + I_D \right)$$

La permeabilitat del buit (μ_0), també anomenada *constant magnètica*, és una de les constants físiques universals. El seu valor és:

μ_0 es llegeix "mu sub-zero".

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \tag{60}$$

Fixeu-vos que la llei d'Ampère-Maxwell ens està dient que, a partir d'un flux de camp elèctric que variï amb el temps, s'obté un camp magnètic.

Un cop ja coneixem les propietats i característiques del camp magnètic, i de forma anàloga a com hem procedit per al camp elèctric, passem a estudiar els efectes que tindrà un camp magnètic sobre una càrrega situada dins del seu radi d'acció. És a dir, com és la força magnètica.

2.2.6. Efectes del camp magnètic: força magnètica

Ja hem estudiat la força electrostàtica, és a dir, la força que experimenten les càrregues elèctriques quan es troben en un regió on existeix un camp

Vegeu la força electrostàtica a l'apartat 1 d'aquest mòdul.

elèctric. Vàrem veure que la magnitud d'aquesta força corresponia a la magnitud del camp electrostàtic multiplicada per la càrrega, de tal manera que el coneixement del camp electrostàtic en una regió ens permetia determinar, en tot moment i de forma immediata, la força electrostàtica experimentada per qualsevol càrrega.

Amb el camp magnetostàtic succeeix un fet similar, però amb una diferència notable. De la mateixa manera que l'origen dels camps magnetostàtics és el moviment de les càrregues elèctriques, la força magnètica només afecta a càrregues que es trobin en moviment. En altres paraules, una càrrega en repòs no experimenta cap força magnètica.

Una altra peculiaritat de la força magnètica és que la seva direcció no és la mateixa que la del camp magnètic. La força electrostàtica es calculava de forma directa multiplicant el camp electrostàtic ($\vec{E}$) pel valor de la càrrega (q). Com que el valor de la càrrega és una magnitud escalar, la direcció de la força era la mateixa que la del camp. En el cas del camp magnètic, això no és així. La direcció de la força magnètica és perpendicular a la del camp.

Recordeu

La força electrostàtica experimentada per un càrrega és el producte del camp electrostàtic pel valor de la càrrega:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Vegeu el càlcul de la força electrostàtica al subapartat 1.1.4 d'aquest mòdul.

La **força magnètica** experimentada per una càrrega puntual q que es mou per una regió on existeix un camp magnètic amb velocitat $\vec{v}$ és:

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \quad (61)$$

on $\vec{B}$ és el valor del camp en el punt on es troba la càrrega.

Producte vectorial

El producte vectorial de dos vectors és un tercer vector amb direcció perpendicular als dos primers. Es calcula de la manera següent:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}$$

La força magnètica és una magnitud vectorial i, com a tal, tindrà un mòdul, una direcció i un sentit:

1) Mòdul

El mòdul o intensitat de la força magnètica és:

$$F = qvB \sin \alpha \quad (62)$$

on α és l'angle que formen la velocitat de la càrrega i el camp magnètic.

Mòdul del producte vectorial

El mòdul del producte vectorial de dos vectors es pot calcular de forma independent si coneixem l'angle que formen els dos vectors:

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\| \sin\alpha$$

De l'expressió anterior podem deduir algunes propietats:

- Una càrrega en repòs ($v = 0$) no es veurà afectada pel camp magnètic.
- Una càrrega que es desplaci de forma **paral·lela** a la direcció del camp magnètic ($\alpha = 0$) no es veurà afectada, ja que $\sin 0 = 0$.

- El mòdul de la força serà més gran com més gran sigui l'angle entre les direccions del camp magnètic i del moviment de la càrrega. El valor màxim el trobarem quan la càrrega es desplaci de forma **perpendicular** ($\alpha = 90°$) al camp magnètic.

- El mòdul de la força serà proporcional a la seva càrrega, a la seva velocitat i a la intensitat del camp magnètic.

2) Direcció

Atès que a l'expressió (61) apareix el producte vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$, la direcció de la força ($\vec{F}$) sempre és perpendicular tant a la velocitat ($\vec{v}$) de la càrrega com a la direcció del camp magnètic ($\vec{B}$).

3) Sentit

Com en el cas de la força electrostàtica, el sentit del vector de la força magnètica ve marcat pel signe de la càrrega. La determinació del sentit, però, no és tan immediata com en el cas del camp elèctric, a causa de la presència del producte vectorial.

A la figura 22 podeu veure una regla mnemotècnica molt habitual per a aquest propòsit. Si es col·loca la mà dreta en la posició de la figura, amb el dit índex assenyalant la direcció i el sentit del primer vector i el dit mitjà la del segon vector, el polze assenyalarà la direcció i el sentit del vector resultant del producte vectorial.

Figura 22

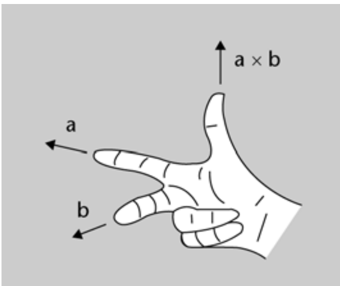


Figura 22

Aplicació de la regla mnemotècnica de la mà dreta per a la determinació del sentit d'un vector resultant d'un producte vectorial.

Podeu trobar un vídeo explicatiu d'aquesta regla a:

http://www.youtube.com/watch?v=4AaSbM0okqM

La regla de la mà dreta indica el sentit del producte vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$, però cal tenir en compte també el signe de la càrrega:

- Si la càrrega és **positiva**, el sentit de la força magnètica serà el que indiqui el resultat del producte vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$.

- Si la càrrega és **negativa**, el sentit serà l'oposat.

Vegeu el càlcul de la força electrostàtica al subapartat 1.1.4 d'aquest mòdul.

Vegeu la relació entre intensitat i velocitat al subapartat 2.1.1 d'aquest mòdul.

Per a determinar la força magnètica experimentada per un corrent elèctric, haurem de procedir de forma anàloga a com ho hem fet per a calcular la força electrostàtica, és a dir, integrar per a totes les càrregues que circulen. Per a aconseguir-ho, farem servir la relació (44) :

$$I d\vec{l} = \vec{v} dq \tag{63}$$

La força magnètica $\vec{F}$ experimentada per un corrent elèctric circulant per un circuit tancat C amb una intensitat de corrent I és:

$$\vec{F} = \oint_C I\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right) \tag{64}$$

on $\vec{B}$ és el valor del camp en el punt on es troba cadascun dels diferencials de circuit $d\vec{l}$.

Ara que ja coneixeu el concepte de camp magnetostàtic, les seves propietats i els seus efectes sobre altres càrregues (la força magnètica), procedirem de forma anàloga a com hem fet anteriorment i estudiarem el potencial magnètic i l'energia magnètica.

2.3. Potencial vectorial magnètic

Anteriorment, en parlar del camp electrostàtic, vam introduir el concepte de potencial electrostàtic com una mesura de l'energia "emmagatzemada" per les càrregues elèctriques pel simple fet de trobar-se en una posició determinada (recordeu que vam fer l'analogia amb el potencial gravitatori i l'altura a què es troben els cossos). En el camp magnetostàtic podem introduir un concepte similar, però amb algunes petites diferències.

Vegeu el potencial electrostàtic al subapartat 1.2 d'aquest mòdul.

Per començar, recordeu que la força magnètica sempre és perpendicular al camp magnètic i les línies de camp magnètic no indiquen la direcció del gradient de potencial, sinó la seva perpendicular. A més, recordeu que les línies de camp són corbes tancades sense principi ni final. Per tant, el camp magnètic no es pot expressar com el gradient d'un potencial escalar.

Vegeu la direcció de la força magnètica en relació al camp magnètic al subapartat 2.2.6 d'aquest mòdul.

Tanmateix, existeix un concepte similar que sí que podreu fer servir per a aquest propòsit. Es tracta del **potencial vectorial magnètic**, que simbolitzem amb $\vec{A}$.

Abans, però, haurem d'introduir una última eina matemàtica relacionada amb l'operador nabla ($\vec{\nabla}$) i que ja us vàrem mencionar anteriorment: el rotacional.

Vegeu l'operador nabla ($\vec{\nabla}$) al subapartat 1.2.1 d'aquest mòdul.

2.3.1. Rotacional d'un vector

El rotacional d'un vector es defineix com el producte vectorial de l'operador nabla ($\vec{\nabla}$) per una magnitud vectorial. La seva expressió matemàtica és:

$$\mathrm{rot}\,\vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)\vec{k} \quad (65)$$

Producte vectorial

El producte vectorial de dos vectors és un tercer vector amb direcció perpendicular als dos primers. Es calcula de la manera següent:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}$$

Atès que el producte vectorial entre dos vectors és una magnitud vectorial, el rotacional també ho serà. Vegem què representa aquesta magnitud.

El rotacional d'un camp vectorial expressa la seva tendència a la rotació respecte a un eix determinat. Si un camp presenta, en una regió determinada, un rotacional amb una magnitud gran, això implica que en aquella regió predominen les components tangencials respecte a un cert punt o eix. Per contra, si un camp presenta un rotacional igual a zero, vol dir que aquell camp només presenta components radials.

Per exemple, si us imagineu una banyera plena d'aigua després de treure-li el tap, veureu que la tendència de l'aigua és a girar o rotar al voltant d'un eix que passa per la vertical del tap, és a dir, es crea un vòrtex. Si podeu considerar la velocitat de l'aigua com un camp vectorial (la velocitat és una magnitud vectorial, ja que té mòdul i direcció!), veureu que hi predominaran les components tangencials. Per tant, es tractarà d'un camp amb un rotacional alt.

En canvi, si us imagineu la mateixa aigua però fluint pel canal de desguàs, veureu que el moviment de l'aigua és pràcticament rectilini. Es tractarà, doncs, d'un camp amb rotacional zero.

Tornant als camps elèctric i magnètic, podeu comprovar que:

- el **camp electrostàtic** presenta sempre, suposant que no hi ha cap altra interacció que el modifica, un rotacional igual a zero. Això és perquè es tracta d'un camp vectorial amb direcció radial i no tangencial respecte a la càrrega que el crea.

- per contra, el **camp magnètic** presenta en general un rotacional diferent de zero, ja que la seva tendència és a tenir components tangencials (repasseu els exemples de la figura 16).

Rotacional zero

En realitat el camp electrostàtic no presenta sempre rotacional zero, ja que els camps magnètics externs poden induir un camp elèctric si no són estacionaris. Però això ho veurem més endavant...

Vegeu la direcció del camp electrostàtic al subapartat 1.1.1 i la direcció del camp magnètic al subapartat 2.2 d'aquest mòdul.

Ja us hem introduït el concepte de rotacional. Tot seguit l'aplicarem al cas que ens interessa: el potencial vectorial magnètic.

2.3.2. El camp magnètic com a rotacional del potencial vectorial magnètic

Si recordeu, us vàrem introduir el concepte de potencial escalar com una funció el gradient de la qual era el camp electrostàtic i vam veure que aquesta funció expressava l'energia per unitat de càrrega del camp.

Vegeu el potencial escalar al subapartat 1.2.1 d'aquest mòdul.

Per al camp magnètic podem fer quelcom similar però hem de fer servir un potencial vectorial i hem d'operar amb el rotacional en comptes del gradient (recordeu que, degut a la seva naturalesa, no és possible expressar el camp magnetostàtic com a gradient de cap funció escalar).

Definim el **potencial vectorial magnètic** com un vector $\vec{A}$ el rotacional del qual és el camp magnètic $\vec{B}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{66}$$

La unitat de mesura del potencial vectorial magnètic $\vec{A}$ en el Sistema Internacional és el **volt-segon per metre** (Vs/m)

El potencial vectorial magnètic és una magnitud vectorial i la seva direcció sempre és perpendicular al camp magnètic.

Així doncs, ja hem vist, d'una banda, els efectes de les càrregues elèctriques en repòs i, de l'altra, els dels corrents elèctrics en estat estacionari (intensitat constant). Ens queda fer un pas més enllà. Hem d'estudiar què succeeix quan treballem amb corrents elèctrics variables. La primera conclusió que podem extreure és que el camp magnètic que generen, segons les expressions vistes fins ara, també haurà de ser variable. Però, què passa quan un camp magnètic no és estacionari? Aquí és on entra en joc la llei d'inducció de Faraday.

2.4. Llei d'inducció de Faraday

Segurament haureu observat alguna vegada que quan enceneu o apagueu un aparell elèctric o electrònic es produeixen petites "interferències" sobre altres dispositius del voltant. En una primera deliberació podríeu concloure que el procés d'encesa o apagada implica un canvi brusc en el valor del flux de camp elèctric i, segons la llei d'Ampère-Maxwell (58), es genera un camp magnètic ($\vec{B}$). Tanmateix, aquest camp magnètic creat continua sense explicar, segons el que us hem explicat fins ara, els fenòmens produïts sobre els altres aparells elèctrics o electrònics. Això és perquè fins ara no hem tractat els fenòmens que es produeixen en presència de camps magnètics variables.

La **llei d'inducció de Faraday-Lenz** diu que en un circuit tancat qualsevol es genera una **força electromotriu induïda** o **fem induïda** (fem_{ind}) proporcional al ritme de variació (és a dir, a la derivada respecte al temps) del **flux magnètic** (Φ_B) que travessa la superfície imaginària delimitada pel circuit

$$fem_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{67}$$

Φ_B es llegeix "fi sub be".

$\frac{d\Phi_B}{dt}$ es llegeix "derivada de fi sub be respecte a te".

Ja sabem què és el flux de camp magnètic, però què és la força electromotriu (fem_{ind}) induïda? Ho veurem a continuació.

Michael Faraday

Físic i químic anglès (22 de setembre de 1791 – 25 d'agost de 1867) que contribuí de forma significativa en camps com ara l'electromagnetisme i l'electroquímica. Faraday va descobrir, entre d'altres, la inducció magnètica, el diamagnetisme i les lleis de l'electròlisi.

Quan s'ubica un cable en una regió on hi ha un camp magnètic variable, els electrons noten una força que els obliga a desplaçar-se al llarg del cable. Ja vàreu veure que el fet que aparegui una força electrostàtica que faci desplaçar una càrrega entre dos punts implica que existeix una diferència de potencial entre aquests punts.

Vegeu el flux de camp magnètic al subapartat 2.2.2 i la diferència de potencial al subapartat 1.2.1 d'aquest mòdul.

La **força electromotriu induïda** o **fem induïda** (fem_{ind} o ΔV) és la diferència de potencial elèctric o voltatge que s'indueix en un circuit, com a conseqüència d'una variació del flux magnètic que el travessa.

Ja sabem què és la fem induïda i quina quantitat se'n genera però no sabem en quin sentit ho fa i, per tant, no podem saber en quin sentit circularà el corrent elèctric resultant al llarg del circuit. Aquest sentit depèn de dos factors:

- El sentit en què el flux travessa la superfície.
- Si el flux augmenta o disminueix.

La resposta a aquesta qüestió la trobem mitjançant la llei de Lenz.

Heinrich Lenz

Físic rus d'origen alemany i estonià (12 de febrer de 1804 -10 de febrer de 1865) fou un que va treballar en diversos àmbits de la física.

Entre d'altres coses va postular la llei de Lenz (1834), que estem estudiant aquí, però també està considerat el codescobridor, juntament amb el mateix Joule, de l'efecte Joule (potència calorífica despresa en una resistència elèctrica).

La **llei de Lenz** postula que el sentit del corrent que circula per un circuit tancat a causa d'una fem induïda és tal que el camp magnètic que es produeix genera un flux que intenta compensar la variació de flux que ha generat la fem induïda. Aquest és el motiu pel qual apareix un signe negatiu (–) a l'equació (67) .

Així, doncs, si el flux augmenta, el corrent induït generarà un camp oposat a l'original per compensar l'augment. Per contra, si el flux disminueix, el corrent induït generarà un camp en la direcció de l'original per compensar la disminució.

Exemple de la llei d'inducció de Faraday

El camp magnètic en una certa regió de l'espai és:

$$\vec{B} = 0{,}8 \cdot \cos 2t\,\vec{k}\ (\mathrm{T}) \tag{68}$$

Figura 23

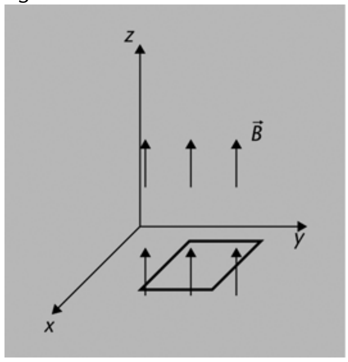


Figura 23

La imatge mostra l'espira que es detalla a l'exemple en l'apartat (a).

En aquesta mateixa regió hi ha una espira de corrent quadrada de 2 cm de costat. Determineu la diferència de potencial que apareix a l'espira en els casos següents:

a) l'espira és paral·lela al pla *xy*
b) l'espira és paral·lela al pla *xz*

Solució

La llei d'inducció de Faraday enuncia que en un circuit tancat qualsevol es genera una força electromotriu induïda o fem (ΔV) proporcional al ritme de variació (és a dir, a la derivada respecte el temps) del flux magnètic (Φ_B) que travessa la superfície imaginària delimitada pel circuit:

$$\Delta V = fem_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{69}$$

a) Atès que l'espira és paral·lela al pla *xy* (vegeu la figura 23), el camp magnètic B sempre travessarà l'espira de forma perpendicular. Per tant, el flux de camp magnètic a través de l'espira és:

$$\Phi_B = B \cdot S \cdot \cos 0 = 0{,}8\cos 2t \cdot 0{,}02^2 \cdot 1 = 3{,}2 \cdot 10^{-4}\cos 2t \tag{70}$$

Figura 24

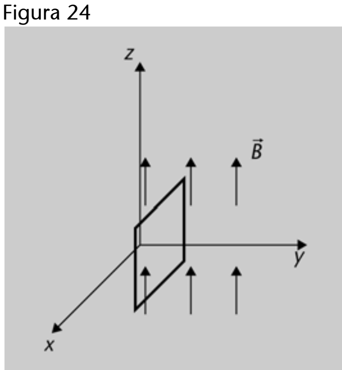


Figura 24

La imatge mostra l'espira que es detalla a l'exemple en l'apartat (b).

Per tal de determinar la diferència de potencial, hem de derivar respecte al temps el flux que acabem de calcular:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -2 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-4} \sin 2t \tag{71}$$

$$fem_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = 6{,}4 \cdot 10^{-4}\sin 2t\ \mathrm{V} \tag{71b}$$

b) Atès que ara l'espira és paral·lela al pla *xz* (vegeu la figura 24), el camp magnètic B no la travessarà mai, és a dir, el flux a través de la superfície serà sempre zero. Per tant, la diferència de potencial és:

$$\Delta V = fem_{ind} = 0 \tag{72}$$

El descobriment de la llei de Faraday va suposar una nova fita dins de la unificació de l'electricitat i el magnetisme com una única interacció. La seva importància rau en que converteix en bidireccional una relació que fins ara s'havia vist com de sentit únic. Si la llei d'Ampère-Maxwell (58) estudiava la generació de camps magnètics a partir d'uns camps elèctrics variables, ara ens trobem amb el camí invers: la demostració que un camp magnètic variable també crea un camp elèctric.

Vegeu la llei d'Ampère-Maxwell al subapartat 2.2.5 d'aquest mòdul.

Així doncs, ja tenim el cercle tancat. Els camps elèctrics variables generen camps magnètics, i els camps magnètics variables generen camps elèctrics. Fins aquí us hem introduït tots els conceptes necessaris relacionats amb aquests fenòmens aplicats al cas en què a la regió afectada hi ha el buit.

Vegeu el cas dels camps elèctrics a l'apartat 1 d'aquest mòdul.

Però, tal com ja us hem explicat també per al cas dels camps elèctrics, en el món real la majoria dels camps magnètics es troben en medis materials amb característiques molt diverses. Fins i tot l'aire presenta una certa desviació, tot i que lleugera, respecte a aquest comportament magnètic "ideal" corresponent al buit. En el punt següent estudiarem com és aquest comportament.

2.5. Magnetisme en presència de medis materials

Per tal de determinar com es comporten els materials en presència d'un camp magnètic, en primer lloc heu de recordar que, tal com ja heu vist, els camps magnètics només afecten a les càrregues que estan en moviment, no en repòs. Un exemple d'aquestes càrregues són els electrons que es troben en tots els àtoms de tots els materials.

Electrons en un àtom = càrregues en moviment

Els electrons en un àtom són càrregues en moviment i, per tant, es veuen afectats pels camps magnètics.

Vegeu els efectes de la força magnètica al subapartat 2.2.6 d'aquest mòdul.

Els electrons són càrregues elèctriques i, a més, es troben contínuament girant al voltant dels nuclis dels àtoms. Per tant, es poden considerar càrregues en moviment i es veuran afectats pels camps magnètics. Tot seguit estudiarem com són els efectes dels camps magnètics sobre els electrons dels àtoms i, en conseqüència, com serà el comportament magnètic dels materials.

Moviment dels electrons

En realitat els electrons no giren físicament al voltant dels nuclis sinó que el seu comportament és força més complex i respon a les lleis de la mecànica quàntica. Tanmateix, per als objectius d'aquest mòdul, podem considerar com si ho fessin.

2.5.1. Magnetització

Podeu imaginar-vos cada electró que gira al voltant del nucli de l'àtom com una miniespira de corrent i que, per tant, generarà un petit camp magnètic en una certa direcció, que anomenem **moment dipolar magnètic** electrònic (figura 25a). Si sumem els petits camps magnètics generats per cada electró d'un àtom, el que tindrem és que cada àtom presentarà un petit camp magnètic permanent, que anomenem *moment dipolar magnètic atòmic*. A la figura 25b podeu veure una representació dels àtoms d'un material com a imants diminuts amb moments magnètics permanents.

Figura 25

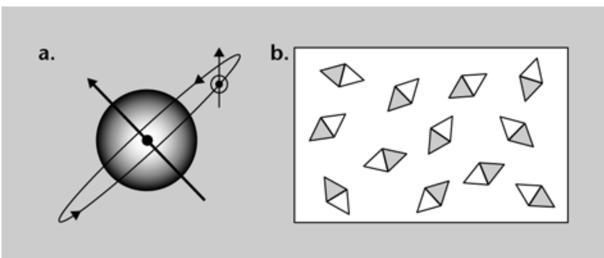


Figura 25

Representació esquemàtica de:

a. moment dipolar magnètic generat per un electró.

b. moments dipolars atòmics que es cancel·len entre sí.

Ara bé, en la majoria de materials trobem que:

- Els electrons d'un àtom estan distribuïts per parelles, de tal manera que el moment dipolar magnètic creat per un electró en general es cancel·la amb el d'un altre que crea un moment en direcció oposada. Si tots els electrons estan aparellats, els àtoms no tindran moment magnètic permanent.

- Tot i que hi hagués algun electró desaparellat, el nombre d'àtoms en un material és molt gran i, a més, aquests es troben distribuïts de manera totalment aleatòria. Això vol dir que per a cada àtom que generi un moment dipolar magnètic en una direcció i sentit, sempre n'hi haurà algun altre que en generi un d'igual però en sentit contrari. A la figura 25b podeu comprovar, de forma molt bàsica i esquemàtica, que els moments dipolars magnètics dels àtoms es cancel·len entre sí de forma gairebé total.

Com a conclusió, els dos punts anteriors impliquen que, en absència de camps magnètics externs, la major part dels materials presenten un moment dipolar magnètic **zero**.

Però de la mateixa manera que quan un material és sotmès a un camp elèctric les càrregues dels seus àtoms es redistribueixen i donen lloc a una polarització, quan el material és sotmès a un camp magnètic succeeix un fenomen similar però amb les seves càrregues en moviment: els electrons dels àtoms.

Vegeu la polarització al subapartat 1.3 d'aquest mòdul.

Imagineu-vos que un cert medi material es troba en una regió on existeix un camp magnètic extern, que anomenarem $\vec{B}_0$. Aquest camp afecta els electrons de tal manera que en modifica el moviment inicial. I aquesta variació en el moviment dels electrons afectats fa que el moment dipolar magnètic total del material ja no sigui zero. Quan succeeix això, diem que el material s'ha magnetitzat, i la quantificació d'aquest efecte s'anomena **magnetització** ($\vec{M}$).

La **magnetització** ($\vec{M}$) en un material és una mesura de la direcció i la intensitat, per unitat de volum, dels moments dipolars magnètics de les partícules carregades dels seus àtoms. Aquesta magnetització pot ser natural (com en els imants permanents) o bé aparèixer com a resposta a un camp magnètic extern.

La unitat de mesura de la magnetització ($\vec{M}$) en el Sistema Internacional és l'**ampere per metre** (A/m).

La magnetització ($\vec{M}$) té el mateix paper per al camp magnètic que la polarització elèctrica ($\vec{P}$) per al camp elèctric. En altres paraules, genera un camp magnètic addicional que s'ha de sumar o restar, segons el cas, al camp magnètic extern, és a dir, al camp magnètic que ha causat la magnetització. Podem realitzar, per tant, un procés semblant al que havíem fet per a obtenir el desplaçament elèctric.

Vegeu l'obtenció del desplaçament elèctric al subapartat 1.3.1 d'aquest mòdul.

Això vol dir que el camp magnètic "real" o "efectiu" és el resultat de dues contribucions: el camp magnètic extern ($\vec{B}_0$) i el camp causat per la magnetització ($\mu_0\vec{M}$):

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M} \qquad (73)$$

Podem reescriure l'equació (73) de la forma següent:

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} \quad (74)$$

El nou terme que hem introduït ($\vec{H}$) s'anomena **intensitat de camp magnètic**.

Noms alternatius per a $\vec{H}$

El camp $\vec{H}$ es coneix amb noms molt diversos: *intensitat de camp magnètic* o *camp magnètic auxiliar.*

En alguns àmbits, al camp $\vec{H}$ també se l'anomena *camp magnètic* a seques, però quan es fa servir aquesta denominació cal anar amb compte i diferenciar-lo del camp $\vec{B}$, que en aquest text l'anomenem també d'aquesta manera. Aquest últim en realitat és el *camp magnètic induït* o *camp d'inducció magnètica.*

En un medi material, es defineix la **intensitat de camp magnètic ($\vec{H}$)** com:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \quad (75)$$

on $\vec{B}_0$ és el camp magnètic extern i μ_0 és la permeabilitat del buit.

La unitat de mesura de la intensitat de camp magnètic ($\vec{H}$) en el Sistema Internacional és l'**ampere per metre** (A/m).

La magnetització $\vec{M}$ i la intensitat de camp magnètic $\vec{H}$ no són magnituds independents sinó tot el contrari. Si recordeu, ens vam trobar amb el mateix cas quan estudiàvem la relació entre la polarització i el camp electrostàtic i aleshores vàrem definir la permitivitat elèctrica dels materials com una mesura de la seva polarització. Tot seguit aplicarem un raonament similar però aplicat a la magnetització.

Vegeu la relació entre la polarització i el camp electrostàtic al subapartat 1.3 d'aquest mòdul.

2.5.2. Susceptibilitat i permeabilitat magnètiques

La magnetització $\vec{M}$ d'un material és una mesura de la "resposta magnètica" a la presència d'un camp extern i, per tant, la seva magnitud dependrà de la intensitat de camp magnètic $\vec{H}$. Podem procedir de manera anàloga al cas de la polarització elèctrica i reescriure l'equació (75) com una relació directa entre la magnetització i la intensitat del camp magnètic:

$$\vec{M} = \chi\vec{H} \quad (76)$$

χ és la lletra grega khi, que es pronuncia "ji", amb el so de la jota castellana.

La constant χ s'anomena **susceptibilitat magnètica** i és característica de cada material. Segons el valor de la susceptibilitat podem tenir els casos següents:

- Un valor de susceptibilitat magnètica (χ) positiu indica que el material es magnetitza en el mateix sentit que el camp magnètic extern ($\vec{B}_0$) i, per tant, el camp magnètic "real" o "efectiu" ($\vec{B}$) és superior al que tindríem sense la presència del material.

- Un valor de χ negatiu indica que el material es magnetitza en sentit contrari al camp magnètic extern ($\vec{B}_0$). En altres paraules, la magnetització s'oposa al camp magnètic que l'ha creada i, per tant, el camp magnètic "efectiu" és inferior al que tindríem sense la presència del material.

- Un valor de χ proper a 0 significa que gairebé no hi ha magnetització i, per tant, que el material tindrà un comportament molt proper al cas ideal del buit.

En un medi material isòtrop, homogeni i lineal, es defineix la **susceptibilitat magnètica** (χ) del material com la relació entre la magnetització ($\vec{M}$) i la intensitat de camp magnètic ($\vec{H}$):

$$\vec{M} = \chi\vec{H} \tag{77}$$

La susceptibilitat magnètica (χ) és una magnitud adimensional, és a dir, no té unitats de mesura.

Medi isòtrop, homogeni i lineal

Un medi homogeni és aquell en el qual les seves propietats són les mateixes a tot arreu.

Un medi isòtrop és aquell en el qual les seves propietats no depenen de la direcció.

Un medi lineal és aquell en el qual la dependència de la magnetització amb el camp magnètic és lineal.

D'altra banda, podeu reordenar l'expressió (74) per tal de trobar una relació també directa entre les magnituds $\vec{B}$ i $\vec{H}$:

– Traiem μ_0 factor comú:

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) \tag{78}$$

– Fem servir l'equació (77):

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \chi\vec{H}\right) \tag{79}$$

– Traiem $\vec{H}$ factor comú:

$$\vec{B} = \mu_0\left(1 + \chi\right)\vec{H} \tag{80}$$

El producte $\mu_0(1 + \chi)$ es pot substituir per una única constant, que anomenarem μ, i que correspon a la **permeabilitat magnètica** del material:

μ **es la lletra grega mu.**

$$\mu = \mu_0(1 + \chi) \tag{81}$$

I, per tant, tindrem:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{82}$$

La **permeabilitat magnètica** (μ) d'un material és la relació entre el camp magnètic "real" o "efectiu" ($\vec{B}$) i la intensitat de camp magnètic ($\vec{H}$):

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{83}$$

La unitat de mesura de la permeabilitat magnètica (μ) en el Sistema Internacional és el **newton per ampere al quadrat** (N/A^2)

La permeabilitat magnètica μ és una característica dels medis materials que mesura com responen a la presència d'un camp magnètic. Si us hi fixeu, a les expressions que hem vist fins ara per a camps magnètics induïts, que estaven estudiades per al buit, apareix la constant μ_0, que és la permeabilitat magnètica del buit. Per tal d'aplicar aquestes expressions a un medi qualsevol, només caldria substituir la permeabilitat pel valor corresponent al medi en qüestió (μ). Podeu veure que aquest concepte és anàleg al de la permitivitat elèctrica (ε) en el camp elèctric.

L'oersted (Oe)

Tot i que la unitat del SI per a la mesura de $\vec{H}$ és l'A/m, encara avui dia és habitual trobar aquesta magnitud mesurada en una unitat de l'antic sistema CGS: l'oersted (Oe). L'equivalència és:

$$1\ \mathrm{Oe} = \frac{10^3}{4\pi}\ \mathrm{A/m}$$

Igual que passa amb la permitivitat elèctrica, el més habitual és trobar la permeabilitat magnètica expressada en termes relatius, és a dir, comparada amb la permeabilitat del buit, que és la que s'agafa sempre com a referència. Per exemple, podreu trobar que us diuen que la permeabilitat de l'aigua és 0,999992 vegades la del buit, o que la de l'acer ho és 700 vegades. En aquest cas parlarem de **permeabilitat relativa**.

Vegeu la permitivitat elèctrica (ε) al subapartat 1.3.1 d'aquest mòdul.

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \tag{84}$$

μ_r es llegeix "mu sub erra".

El valor de la permeabilitat magnètica relativa és potser més intuïtiu que el de la permeabilitat absoluta, ja que relaciona de forma directa el camp magnètic extern ($\vec{B}_0$) amb el camp "total" o "efectiu" ($\vec{B}$):

$$\vec{B} = \mu_r\vec{B}_0 \tag{85}$$

Així doncs, segons el valor de μ_r tenim:

- Un valor proper a 1 ($\mu_r \approx 1$) indica un comportament proper al del buit ($\vec{B} \approx \vec{B}_0$).
- Un valor més gran que 1 ($\mu_r > 1$) indica que el material fa augmentar el camp magnètic "efectiu" ($\vec{B} > \vec{B}_0$).
- Un valor més petit que 1 ($\mu_r < 1$) indica que el material tendeix a magnetitzar-se en contra del camp magnètic i, per tant, el camp magnètic "efectiu" és inferior al camp magnètic extern ($\vec{B} < \vec{B}_0$).

Actualment hi ha publicada una infinitat de llistes, taules i gràfiques amb les característiques magnètiques observades de forma experimental per a bona part dels materials coneguts i sota multitud de condicions diferents (temperatura, pressió, magnitud del camp magnètic extern, etc). En la majoria de casos, els valors de μ_r són molt propers a 1 i això fa que, per un tema pràctic, sigui molt més habitual trobar indicats els valors de la susceptibilitat (χ) en comptes de la permeabilitat (μ o μ_r). Podeu trobar una relació directa entre aquests paràmetres a partir de les expressions (81) i (84).

Les relacions directes entre la permeabilitat relativa (μ_r) i la susceptibilitat (χ) magnètiques d'un material són:

$$\begin{aligned} \mu_r &= \chi + 1 \\ \chi &= \mu_r - 1 \end{aligned} \tag{86}$$

Els valors de la susceptibilitat i de la permeabilitat magnètiques varien molt entre un medi i un altre. Fins i tot dins d'un mateix medi poden variar molt en funció de la intensitat del camp magnètic extern. És per això que l'estudi del comportament magnètic dels materials és força més complex i variat que el del comportament elèctric.

A continuació introduirem alguns dels tipus de materials que podeu trobar en funció del seu comportament en presència de camps magnètics. En particular, ens centrarem en tres tipus de materials: materials **diamagnètics**, **paramagnètics** i **ferromagnètics**. Aquests tres comportaments no són els únics però sí els més habituals.

2.5.3. Materials diamagnètics

Com ja hem dit, els electrons dels àtoms d'un material en general es distribueixen per parelles, de manera que per a cada electró que gira en un sentit gairebé sempre n'existeix un altre que gira en sentit contrari. Això voldrà dir que els camps magnètics de cada parell d'electrons es compensen entre sí i si, a més, tots els electrons dels àtoms estan aparellats, tindrem que la magnetització resultant és zero.

Vegeu la distribució en parelles dels electrons al subapartat 2.5.1 d'aquest mòdul.

Nota

L'explicació que teniu aquí és una aproximació per ajudar a entendre què passa.

Quan un material es troba en una regió on existeix un camp magnètic $\vec{B}_0$, els parells d'electrons dels seus àtoms (com a càrregues elèctriques en moviment que són) es veuen afectats i el seu moviment s'altera. Aquesta variació es produeix de tal manera que provoca l'aparició d'un lleuger moment dipolar magnètic amb **sentit oposat** al camp magnètic extern (figura 26a).

Figura 26

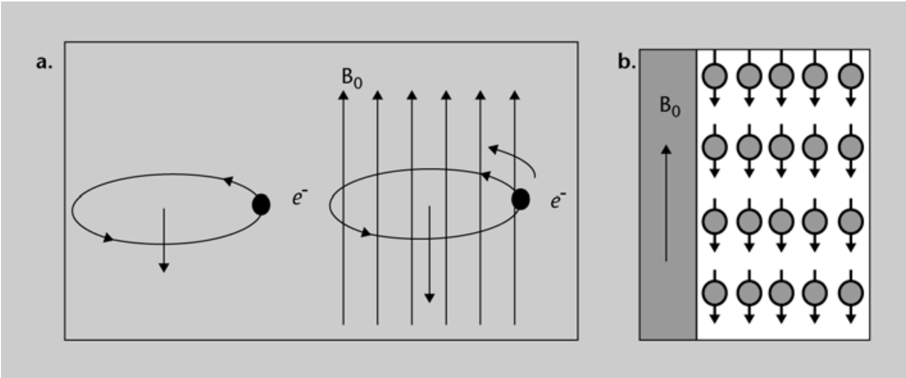


Figura 26

Representació esquemàtica del **diamagnetisme**:
a. un camp magnètic extern ($\vec{B}_0$) modifica el moment dipolar d'un electró. L'augment es produeix en sentit oposat a $\vec{B}_0$.
b. els moments dipolars magnètics dels àtoms s'alineen en contra del camp magnètic extern. La magnetització és negativa.

Aquesta modificació succeeix, en més o menys mesura, en tots els electrons d'un àtom i en tots els àtoms d'un material. El resultat és que apareix una magnetització amb sentit contrari al del camp magnètic (figura 26b). Aquest comportament s'anomena **diamagnetisme**.

El diamagnetisme és el comportament magnètic més bàsic i es produeix, en més o menys mesura, en **tots els materials**. Tanmateix, les magnituds d'aquests camps que es creen són molt petites (de l'ordre del 0,001%) respecte al camp magnètic extern al qual s'oposen i, com veurem més endavant, existeixen altres comportaments magnètics que són molt més intensos i que, quan es produeixen, "eclipsen" el diamagnetisme. Per tant, anomenem materials diamagnètics a aquells que presenten **principalment** comportament diamagnètic.

Els materials diamagnètics presenten sempre valors de la susceptibilitat magnètica negatius ($\chi < 0$), perquè ofereixen resistència al camp magnètic. Els valors típics són de l'ordre de $\chi \sim -10^{-5}$. Per tant, la permeabilitat magnètica dels materials diamagnètics sempre serà $\mu_r < 1$, segons la relació (86).

Presenten diamagnetisme tots els gasos inerts, pràcticament tots els elements no metàl·lics en el seu estat natural (l'excepció més notable és l'oxigen, que no és diamagnètic!) i alguns metalls, com el coure, la plata o l'or. Altres exemples són l'aigua, l'amoníac, la sal, el grafit i la majoria de compostos orgànics.

Superdiamagnetisme

El mecanisme que explica el superdiamagnetisme en realitat té un origen ben diferent del diamagnetisme que us hem explicat. Es basa en un efecte anomenat *efecte Meissner* i que està relacionat amb la superconductivitat.

Els materials superconductors es poden considerar diamagnètics perfectes, ja que presenten una susceptibilitat $\chi \sim -1$. Això vol dir que "expulsen" tot el camp magnètic del seu interior i això els permet, entre d'altres coses, levitar. Aquest comportament s'anomena *superdiamagnetisme*.

2.5.4. Materials paramagnètics

Quan hem introduït la magnetització hem explicat que, en general, els electrons es distribueixen per parells. Tanmateix, sovint ens trobem en que existeixen electrons desaparellats, ja sigui perquè el nombre d'electrons és imparell, o bé perquè, tot i ser nombre parell, no s'han distribuït de forma uniforme. Quan això succeeix, el resultat és que els moments dipolars magnètics dels electrons d'un àtom no es compensen del tot. I la conseqüència d'aquesta situació és que els àtoms presenten un moment magnètic permanent, com si fossin imants diminuts. A la figura 27 es mostren de forma esquemàtica els àtoms d'un material com a petits imants i com responen a la presència d'un camp magnètic extern.

Figura 27

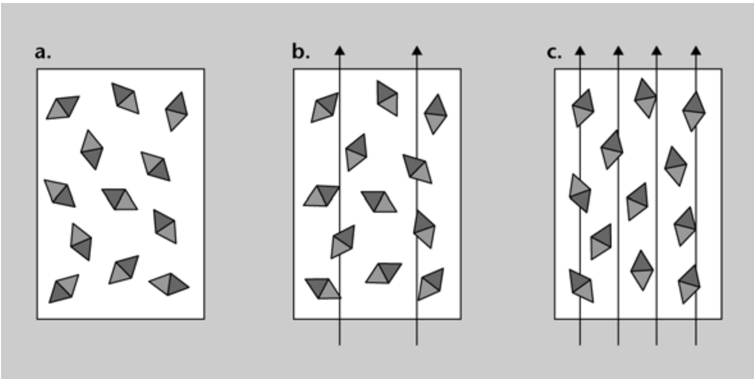


Figura 27

Representació esquemàtica dels efectes del **paramagnetisme**:

a. sense camp magnètic extern.

b. amb un camp magnètic extern de poca intensitat.

c. amb un camp magnètic extern de molta intensitat.

- A la figura 27a es mostra com, de forma general i en absència d'un camp magnètic extern, els àtoms dels materials estan orientats de manera aleatòria. Com que el nombre d'àtoms és molt gran, per cada àtom que està orientat en una direcció i sentit concrets, segur que trobarem un altre que està orientat en sentit contrari. El resultat és que la magnetització global és zero ($M = 0$).

- A la figura 27b es pot observar que, quan el material es troba en una regió on sí que existeix un camp magnètic, els àtoms s'alineen en la seva direcció (com l'agulla d'una brúixola que s'alinea amb el camp magnètic de la Terra). El resultat és una magnetització global en la mateixa direcció i sentit que el camp magnètic extern.

- A la figura 27c es veu el mateix efecte però amb un camp magnètic més intens. Com més gran és aquest, més àtoms s'afegeixen a l'alineació i més creix la magnetització.

- Finalment, si desapareix el camp magnètic extern que havia provocat aquest alineament, la tendència dels àtoms és tornar-se a desordenar, i la magnetització global torna a ser zero. Això és a causa de l'agitació tèrmica: a mesura que augmenta la temperatura d'un cos, augmenta també la velocitat de les seves partícules.

Paramagnetisme i diamagnetisme

Recordeu que tots els materials presenten diamagnetisme. Per tant, podríem dir que els materials paramagnètics són a la vegada diamagnètics i paramagnètics. El que passa és que el segon comportament és, en general, molt més intens que el primer i per això els efectes diamagnètics es poden negligir.

En resum, la magnetització és directament proporcional al camp magnètic extern, i **en el mateix sentit**. Aquest fenomen s'anomena **paramagnetisme**, i els materials que segueixen principalment aquest comportament s'anomenen **materials paramagnètics**.

Atès que, en els materials paramagnètics, els àtoms tendeixen a orientar-se en el mateix sentit que el camp magnètic extern, presentaran sempre valors de la susceptibilitat magnètica positius ($\chi > 0$) i, segons la relació (86) , permeabilitats magnètiques més grans que 1 ($\mu_r > 1$). Els valors típics són de l'ordre de $\chi \sim 10^{-4}$.

Alguns exemples de materials paramagnètics són l'oxigen diatòmic (O_2), la majoria d'elements metàl·lics, com ara l'alumini, el tungstè, el platí, el calci o el sodi, i bona part dels seus òxids.

Vegeu el diamagnetisme al subapartat 2.5.3 d'aquest mòdul.

2.5.5. Materials ferromagnètics

El tercer grup de materials que tractarem són els materials ferromagnètics. Aquest grup inclou els materials que anomenem de forma comuna *materials magnètics* (tot i que en el fons tots ho són, de magnètics!). Segur que tots heu fet servir alguna vegada imants per a subjectar objectes, o heu observat que alguns tornavisos atrauen els cargols. Alguns fins i tot us haureu preguntat com funcionen les cintes magnètiques d'enregistrament de música o de dades, els altaveus de so o els transformadors de corrent, per exemple. Tots aquests exemples tenen un fet en comú: fan servir **materials ferromagnètics**. Però a què ens referim i, sobretot, com es comporten aquests materials?

Alguns materials presenten, davant d'un camp magnètic de poca intensitat, un comportament similar al paramagnetisme que hem introduït a l'apartat anterior. És a dir, els seus àtoms tendeixen a orientar-se en el mateix sentit que el camp magnètic. Tanmateix, quan s'augmenta la intensitat del camp, en comptes de créixer la magnetització de forma lineal o proporcional, ho fa de forma molt abrupta, fins i tot sense grans magnituds en el camp magnètic extern.

Una altra característica d'aquest tipus de materials és que el seu comportament magnètic no és lineal i els seus paràmetres (susceptibilitat i permeabilitat magnètiques) no són constants. Ben al contrari, la seva resposta a un camp magnètic extern variable depèn de la velocitat en què aquest es modifica i, fins i tot, depèn del sentit en què ho fa. En altres paraules, si apliquem un camp magnètic la intensitat del qual sigui primer creixent i després decreixent, observarem que la magnetització en els camins "d'anada" i "de tornada" és diferent. Es diu que el material presenta una **histèresi magnètica**, i el cicle que descriu s'anomena **cicle d'histèresi**.

A la figura 28 podeu visualitzar un exemple d'un cicle d'histèresi. A les gràfiques podeu veure la variació de la magnetització $\vec{M}$ en funció de la intensitat de camp magnètic $\vec{H}$ (recordeu que, segons l'equació (75), $\vec{H}$ és proporcional al camp magnètic extern $\vec{B}_0$).

Recordeu

La intensitat de camp magnètic ($\vec{H}$) és proporcional al camp magnètic extern ($\vec{B}_0$):

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$$

1) La primera etapa (figura 28a) correspon a la resposta a un camp magnètic extern la intensitat del qual creix de forma gradual. Podeu observar que, després d'una primera etapa de resposta lineal, la magnetització comença a créixer de forma espectacular. L'explicació es troba en el fet que en els materials ferromagnètics els camps magnètics dels àtoms contigus estan fortament lligats entre sí. Quan un dels àtoms gira per a reorientar el seu dipol magnètic cap a la direcció del camp, "arrossega" els àtoms del seu voltant, aquests els seus veïns i així successivament. Es produeix una espècie d'efecte de "cascada".

Figura 28

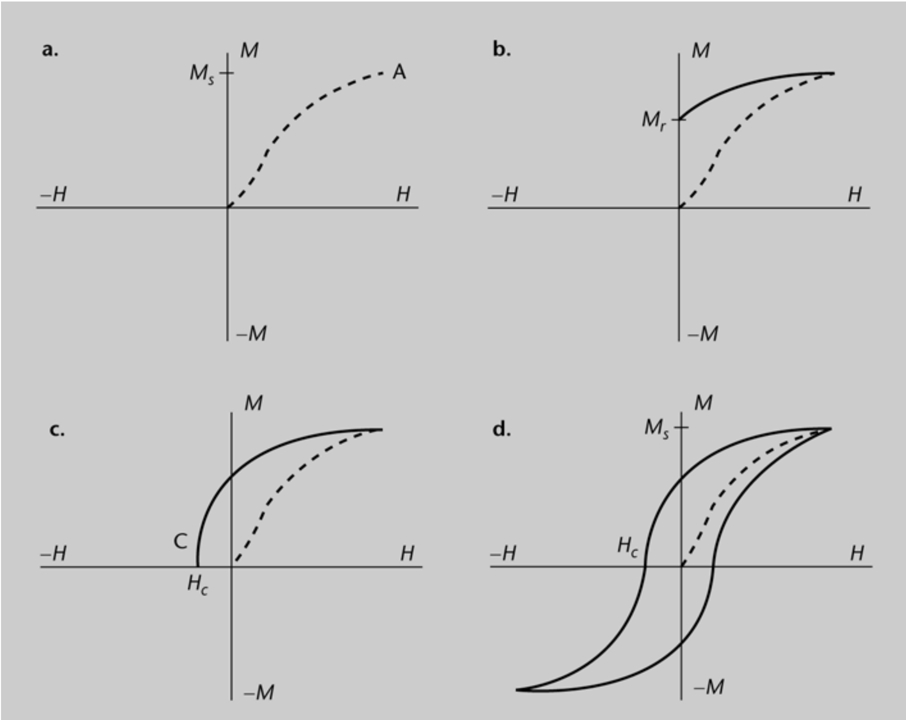


Figura 28

Representació esquemàtica dels efectes del **ferromagnetisme:**

a. magnetització inicial i saturació (A),

b. magnetització romanent (B),

c. desmagnetització i camp coercitiu (C),

d. cicle complet.

Podeu fer una analogia si us imagineu una esquerda en un embassament. Al principi hi passarà poca aigua, però a mesura que augmenti la seva força, la paret s'anirà esquerdant més fins que arribarà un moment en què farà un forat i baixarà molta més quantitat de cop.

Els valors de la permeabilitat magnètica en aquesta etapa poden arribar a valors de l'ordre de milers de vegades la del buit. Alguns materials magnètics desenvolupats per la indústria, com ara el Permalloy, poden arribar a tenir valors màxims de permeabilitat de l'ordre de 100.000 o fins i tot alguns milions de vegades la del buit.

Aquest creixement gairebé "espontani" de la magnetització no dura de forma indefinida. Arribarà un moment en què tots els àtoms ja s'hauran orientat i, per tant, la magnetització ja no podrà créixer més. Direm que s'ha arribat a la **magnetització de saturació,** $\vec{M}_S$, del material (el punt A de la figura 28a). Tornant a l'analogia de l'embassament, podríem dir que "ja no queda més aigua per passar per l'esquerda".

2) Però és quan s'entra a la segona etapa (figura 28b) que es produeix un fenomen curiós, que és el que fa que els materials ferromagnètics siguin tan interessants. Què passa si tornem a disminuir el camp magnètic que havíem augmentat i que havia provocat la magnetització del material?

Si recordeu, en un material paramagnètic, el comportament era proporcional i la magnetització tornava al seu valor zero inicial pel mateix camí que havia recorregut en augmentar, ja que en eliminar la causa de la reordenació la seva tendència és tornar a desordenar-se.

En un material ferromagnètic això no passa, i la magnetització disminueix de manera molt més lenta de com havia augmentat. El resultat és que, un cop desapareguda la seva causa, continua havent-hi una **magnetització romanent,** $\vec{M}_r$, (el punt B de la Figura 28b). El motiu és el mateix que provoca l'efecte "cascada" inicial: els àtoms estan fortament lligats entre sí i, per tant, és molt més difícil que tornin al seu estat inicial. Tornant a l'analogia de l'aigua, és relativament fàcil redreçar el rumb d'una gota però molt més difícil ferho per a un corrent gran.

La magnetització romanent és la propietat clau en els materials ferromagnètics. El fet de mantenir una magnetització un cop desapareix el camp magnètic que l'ha creada fa que aquests materials siguin tan útils per a les aplicacions que us hem citat al començament de l'apartat (imants, transformadors, cintes magnètiques, etc.).

3) Per tal d'eliminar completament la magnetització d'un material ferromagnètic (figura 28c), cal aplicar-hi un altre camp magnètic extern ($\vec{H}_C$) en sentit contrari a l'inicial fins arribar a un valor anomenat **coercitivitat** o **camp coercitiu** (a la figura, el punt C).

4) El cicle es completa amb el mateix comportament que hem vist en les dues primeres etapes però ara en sentit oposat (figura 28d).

Només hi ha tres elements purs, que es puguin trobar de forma natural, que presentin comportament ferromagnètic. Són el ferro (Fe), el cobalt (Co) i el níquel (Ni). Tanmateix, aquests no són els únics materials ferromagnètics, ja que la majoria d'aliatges que contenen una proporció considerable d'aquests elements també ho són (per exemple, la majoria dels acers). De fet, en l'actualitat, el desenvolupament de nous materials ferromagnètics sintetitzats està molt avançat i existeixen materials com el permalloy o el supermalloy que superen amb escreix les propietats ferromagnètiques dels materials "naturals". Fins i tot s'han arribat a desenvolupar aliatges de caràcter ferromagnètic on cap dels elements que els formen ho són de forma individual.

Elements ferromagnètics

El **ferro** (Fe), el **cobalt** (Co) i el **níquel** (Ni) són la base dels materials ferromagnètics, ja que són els únics elements de la taula periòdica que es poden trobar en estat natural que presentin ferromagnetisme. Hi ha altres elements de la taula que també presenten aquest comportament, però són elements de les terres rares que no es poden trobar de forma natural.

2.5.6. Comportament magnètic dels materials en general

A continuació us mostrem en una taula resum, de forma esquemàtica, les característiques magnètiques dels tres tipus de materials que hem introduït (diamagnetisme, paramagnetisme i ferromagnetisme).

Taula 1

	Susceptibilitat magnètica (χ)	Permeabilitat magnètica (μ)	Permeabilitat relativa (μ_r)
Materials diamagnètics (s'oposen al camp magnètic de forma lleugera)	$\chi < 0$	$\mu < \mu_0$	μ_r
Materials paramagnètics (s'alineen amb el camp magnètic de forma lleugera)	$\chi > 0$	$\mu > \mu_0$	$\mu_r > 1$
Materials ferromagnètics (s'alineen amb el camp magnètic de forma ràpida i espontània)	$\chi >> 0$ (no constant)	$\mu >> \mu_0$ (no constant)	$\mu_r >> 1$ (no constant)

Com podeu veure, els materials diamagnètics presenten una susceptibilitat magnètica negativa (o, el que és el mateix, una permeabilitat magnètica més petita que la del buit), ja que la seva resposta respecte un camp magnètic extern és crear una magnetització en direcció oposada. El resultat és que el camp magnètic total és lleugerament inferior al que tindríem sense la presència del material. Els superconductors es poden considerar diamagnètics perfectes, ja que presenten una susceptibilitat pràcticament igual a menys 1 ($\chi \approx -1$).

Per contra, els materials paramagnètics presenten una susceptibilitat magnètica positiva (i, per tant, una permeabilitat més gran que la del buit), ja que quan es troben en una regió on existeix un camp magnètic s'hi alineen i el resultat és que el camp magnètic total és lleugerament superior.

Els materials ferromagnètics presenten susceptibilitats magnètiques positives i força altes, ja que la seva magnetització és ràpida i gairebé espontània. A més, tal com hem vist, la resposta magnètica d'aquests materials no és lineal, sinó que segueix un cicle d'histèresi.

Els imants permanents que podeu trobar de forma habitual en moltes aplicacions de la vida quotidiana estan fets amb materials ferromagnètics. L'ús d'aquests dispositius es basa en la seva capacitat d'emmagatzematge d'energia magnètica sense necessitat d'un camp magnètic extern, i això es pot aconseguir gràcies a les propietats magnètiques dels materials ferromagnètics.

Els tres tipus de comportament magnètic que hem vist, diamagnetisme, paramagnetisme i ferromagnetisme, són els més habituals però no són els únics. Existeixen altres tipus de comportaments magnètics que, o bé no els podem incloure en els grups anteriors o bé simplement mereixen una consideració especial. És el cas del **ferrimagnetisme**, l'**antiferromagnetisme**, el **superdiamagnetisme** (que ja hem comentat), el **superparamagnetisme**, el **superferromagnetisme**, el **metamagnetisme** o el que trobem en els anomenats *vidres de spin*. Atesa la seva la seva complexitat i exclusivitat per a certes aplicacions, el seu estudi no entra dins de l'objectiu d'aquest mòdul i no els explicarem.

2.6. Què hem après?

En aquest apartat hem fet un repàs dels conceptes clau de la magnetostàtica i la inducció magnètica. Hem intentat seguir un cert paral·lelisme amb l'apartat anterior.

En primer lloc hem introduït els corrents elèctrics com a generadors de camp magnètic. Després hem tornat a estudiar les línies de camp i el flux de camp, però ara referits al camp magnètic, i hi hem aplicat la llei de Gauss amb un resultat interessant: les línies de camp no tenen ni origen ni final, és a dir, no hi ha "càrregues magnètiques".

Amb el concepte de flux de camp magnètic hem introduït també una nova eina matemàtica relacionada amb l'operador nabla: la divergència. Hem vist que una divergència diferent de zero, com en el cas del camp elèctric, indica que existeixen punts on comencen o acaben les línies el camp, mentre que una divergència igual a zero, com en el cas del camp magnètic, indica que no existeixen aquests punts.

Més endavant hem enunciat la primera de les lleis que relacionen els camps elèctric i magnètic: la llei d'Ampère-Maxwell. Aquesta llei explica l'origen dels camps magnètics i és la primera prova que els camps elèctric i magnètic corresponen a una mateixa interacció: la força electromagnètica.

Seguint amb el paral·lelisme respecte als apartats anteriors, hem introduït el potencial vectorial magnètic. Tanmateix, la diferència és que aquest potencial és una magnitud vectorial i la seva relació amb el camp magnètic no es fa mitjançant el gradient sinó amb una tercera eina matemàtica també relacionada amb l'operador nabla: el rotacional. El rotacional d'un camp expressa la seva tendència a presentar components tangencials.

Més endavant hem introduït la segona llei que relaciona els camps elèctric i magnètic: la llei d'inducció de Faraday, tot i que ara es mostra la relació inversa a la llei d'Ampère-Maxwell, és a dir, la creació de camps elèctrics a partir de camps magnètics variables.

Per acabar, hem conclòs l'apartat detallant el comportament dels camps magnètics en presència de medis materials i hem introduït el concepte de permeabilitat magnètica del material com una mesura del comportament magnètic dels materials.

3. Lleis de Maxwell

Fins ara hem vist les propietats de l'electrostàtica i la magnetostàtica i hem presentat algunes lleis que les regeixen. Val la pena fer un repàs d'aquestes lleis.

1) Llei de Gauss per a l'electricitat:

Vegeu la llei de Gauss per a l'electricitat al subapartat 1.1.3 d'aquest mòdul.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (87)$$

Explica que el balanç de flux elèctric total que travessa una superfície tancada només pot ser degut a la càrrega continguda en el seu interior, i també relaciona aquesta càrrega amb el camp elèctric al seu voltant.

2) Llei de Gauss per al magnetisme:

Vegeu la llei de Gauss per al magnetisme al subapartat 2.2.3 d'aquest mòdul.

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (88)$$

Explica que el balanç de flux magnètic total que travessa una superfície tancada ha de ser zero.

3) Llei d'inducció de Faraday-Lenz:

Vegeu la llei d'inducció de Faraday-Lenz al subapartat 2.4 d'aquest mòdul.

$$fem_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (89)$$

Explica com un camp magnètic variable pot generar un potencial elèctric i, per tant, un camp elèctric.

4) Llei d'Ampère-Maxwell:

Vegeu la llei d'Ampère-Maxwell al subapartat 2.2.5 d'aquest mòdul.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \quad (90)$$

Relaciona el camp magnètic amb les causes que el generen.

Aquestes lleis expliquen fenòmens específics observats en l'àmbit de l'electromagnetisme i els seus descobriments poden ésser considerats com a fites importants en l'evolució del seu coneixement.

Probablement el pas més important i potser definitiu en aquest sentit es produí l'any 1864 quan Maxwell (el mateix que hem citat quan hem presentat la llei d'Ampère-Maxwell) va presentar una teoria conjunta de l'electromagnetisme on, entre altres coses, va resumir (i en algun cas ampliar) el coneixement adquirit fins aquell moment amb una sèrie d'equacions. L'aportació de Maxwell es pot considerar una fita històrica de la mateixa rellevància que les lleis de la mecànica de Newton, els principis de la mecànica quàntica o les teories de la relativitat d'Einstein. Perquè us feu una idea de la seva importància, podeu considerar que sense elles la titulació per a la qual esteu estudiant senzillament no existiria, ja que la tecnologia a què s'aplica no s'hauria ni desenvolupat.

En els apartats següents presentarem una a una aquestes equacions i quina relació tenen amb les lleis presentades anteriorment.

3.1. La primera llei de Maxwell i la llei de Gauss per al camp elèctric

La primera equació o llei de Maxwell no és més que una reformulació de la llei de Gauss aplicada al camp elèctric, que ja vàreu veure. Recordem-ne la formulació:

Vegeu la llei de Gauss per a l'electricitat al subapartat 1.1.3 d'aquest mòdul.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (91)$$

L'expressió anterior explicava que el flux de camp elèctric que travessa qualsevol superfície tancada és igual al valor de la càrrega neta que hi ha a l'interior de la superfície (Q_{int}) dividida per la permitivitat del buit (ε_0). En altres paraules, com que les línies de camp només poden començar o acabar en una càrrega elèctrica, el balanç net entre les línies que "surten" i les que "entren" a la superfície tancada només pot ser degut a la presència de càrrega neta en el seu interior. Si aquesta càrrega és zero, el nombre de línies de camp que travessen l'àrea en un sentit ha de ser el mateix que en l'altre.

Recordeu que vam introduir-vos el concepte de divergència d'un camp vectorial com una expressió matemàtica del nombre de línies de camp que neixen o moren en una regió determinada. Per tant, vàrem ser capaços de deduir que existeix una relació entre aquesta eina matemàtica i el flux d'un camp. Aquesta relació està explicada mitjançant un teorema matemàtic que va desenvolupar el mateix Gauss: el teorema de la divergència, també anomenat *teorema de Gauss* en el seu honor.

Divergència d'un vector

Podeu consultar al subapartat 2.2.4 d'aquest mòdul que la divergència d'un vector $\vec{A}$ és el producte escalar de l'operador nabla $\vec{\nabla}$ i $\vec{A}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

El resultat és un nombre real, no un vector.

El teorema de la divergència o de Gauss enuncia que el flux a través d'una superfície tancada és igual a la integral de la divergència en tot el volum determinat per la superfície. S'expressa així:

$$\int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (92)$$

Si apliquem la llei de Gauss per al camp electrostàtic (91) a la part dreta de l'equació (92), obtenim l'expressió següent:

$$\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)dV = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV \tag{93}$$

on hem tingut en compte que $Q = \int_V \rho dV$, on ρ és la densitat de càrrega volúmica. Podem eliminar la integral si derivem respecte al volum a totes dues bandes:

Recordeu

La derivada de la integral d'una funció escalar és la funció mateixa, encara que es tracti de derivades parcials:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int f(x,y)dx\right) = f(x,y)$$

$$\frac{d}{dV}\left(\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)dV\right) = \frac{d}{dV}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV\right) \tag{94}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{94b}$$

Com podeu comprovar, l'expressió (94b) relaciona la divergència del camp elèctric en un punt amb la densitat de càrrega (ρ) en aquell punt i la permitivitat del medi, que en aquest cas seria la del buit (ε_0).

La **primera llei de Maxwell** estableix que la divergència d'un camp elèctric $\vec{E}$ en un punt qualsevol ha de ser igual a la densitat de càrrega en aquell punt dividida per la permitivitat del medi material. En el cas del buit és:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{95}$$

on ρ és la densitat de càrrega i ε_0 és la permitivitat del buit.

El sentit físic de la primera llei de Maxwell és que situa l'origen de les línies de camp i també les quantifica. Si recordeu, quan us vàrem introduir la divergència d'un vector o d'un camp vectorial, vàrem veure que aquesta era una mesura de les línies de camp que naixien o morien en un punt. Per tant, amb aquesta llei es relaciona l'origen de les línies de camp amb la seva causa (la densitat de càrrega).

Vegeu la divergència d'un vector al subapartat 2.2.4 d'aquest mòdul.

En aquest apartat hem partit de la llei de Gauss per al camp elèctric i l'hem convertida en la primera llei de Maxwell. Podem procedir de la mateixa manera amb la llei de Gauss per al camp magnètic i obtenir així la segona llei de Maxwell.

3.2. La segona llei de Maxwell i la llei de Gauss per al magnetisme

Podem obtenir la segona llei o equació de Maxwell a partir de la llei de Gauss per al camp magnètic. Recordem-ne la formulació:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \tag{96}$$

La llei de Gauss per al magnetisme enuncia que el balanç de flux de camp magnètic que travessa qualsevol superfície tancada ha de ser sempre zero. En altres paraules, que no existeixen "càrregues magnètiques" on puguin començar o acabar les línies de camp i, per tant, que el nombre de línies que "entren" dins la superfície ha de ser el mateix que les que "surten".

Procedirem de manera anàloga a com hem fet la primera llei i aplicarem el teorema de la divergència (equació 92) al camp magnètic:

Vegeu la divergència d'un vector al subapartat 2.2.4 d'aquest mòdul.
Vegeu la seva aplicació al camp elèctric al subapartat 3.1 d'aquest mòdul.

$$\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)dV = \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \tag{97}$$

Divergència d'un vector

La divergència d'un vector $\vec{A}$ és el producte escalar de l'operador nabla $\vec{\nabla}$ i $\vec{A}$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

El resultat és un nombre real, no un vector.

Segons la llei de Gauss per al camp magnètic, equació (96), el flux de camp magnètic total per una superfície tancada ha de ser zero. Per tant, el segon terme de l'equació ha de ser zero.

$$\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)dV = 0 \tag{98}$$

I, com abans, podem eliminar la integral si derivem respecte al volum a totes dues bandes:

Recordeu

La derivada de la integral d'una funció escalar és la funció mateixa, encara que es tracti de derivades parcials:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int f(x,y)dx\right) = f(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)dV\right) = \frac{\partial}{\partial V}(0)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{99}$$

Com podeu comprovar, l'expressió (99) diu que la divergència d'un camp magnètic és sempre zero. Si recordeu, ja us vam introduir la divergència d'un camp vectorial com una mesura de les línies de camp que neixen o moren en un punt. Aplicat al camp magnètic, tindrem que, com que no existeixen les "càrregues magnètiques", les línies de camp magnètic no poden començar ni acabar en cap punt determinat i, per tant, la divergència d'un camp magnètic ha de ser zero.

Vegeu la divergència d'un camp vectorial al subapartat 2.2.4 d'aquest mòdul.

La **segona llei de Maxwell** diu que la divergència d'un camp magnètic $\vec{B}$ ha de ser zero en qualsevol punt:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{100}$$

Com ja heu vist, les dues primeres lleis de Maxwell són paral·leles i expressen com són la divergència dels camps elèctric i magnètic, respectivament. El seu significat físic és el següent: les línies de camp només poden néixer o morir allà on hi ha càrregues i el seu nombre és proporcional al valor d'aquestes càrregues. Per al cas del camp magnètic, atès que no existeixen "càrregues magnètiques", això implica que les línies de camp no poden començar ni acabar enlloc i, per tant, es tractarà de línies tancades.

Aquestes dues lleis expliquen les característiques dels camps elèctric i magnètic de forma individual però no són suficients per a explicar tot l'electromagnetisme com una única interacció, ja que no expliquen la relació entre els dos camps. Per a fer-ho, cal tornar a analitzar a fons dues lleis més que ja hem vist i que introdueixen aquesta relació: la llei d'inducció de Faraday, que explica la generació de camps elèctrics a partir de camps magnètics variables, i la llei d'Ampère-Maxwell, que explica el cas contrari: la generació de camps magnètics a partir de camps elèctrics variables.

3.3. La tercera llei de Maxwell i la llei d'inducció de Faraday

La tercera llei, que veurem a continuació, és la primera que mostra la interrelació entre els camps elèctric i magnètic, ja que no és més que la llei d'inducció de Faraday que ja hem vist. Recordeu la seva formulació:

Vegeu la llei d'inducció de Faraday al subapartat 2.4 d'aquest mòdul.

$$fem_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{101}$$

Aquesta expressió indica que la força electromotriu induïda (fem_{ind}) generada en un circuit tancat és igual al ritme de variació amb el temps del flux de camp magnètic (Φ_B) que travessa la superfície dibuixada pel circuit.

La fem_{ind} generada en un circuit tancat C qualsevol correspon a la diferència de potencial (ΔV) que apareix en desplaçar-se al llarg de tot el recorregut del circuit. També us vam explicar que la diferència de potencial entre dos punts és la integral de línia del camp elèctric al llarg d'un recorregut que uneix els dos punts (equació (20)). Si el circuit és tancat, la integral de línia es converteix en una circulació del camp. Per tant, tindrem que:

Vegeu la diferència de potencial entre dos punts al subapartat 1.2 d'aquest mòdul.

$$\Delta V = -\int_A^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{102}$$

Circulació d'un camp

La circulació d'un camp vectorial $\vec{u}$ al voltant d'un recorregut tancat C qualsevol es defineix com la integral de línia del camp al llarg de tot el recorregut:

$$\oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

Conceptualment, es pot entendre com la suma de les components tangencials del camp en tots els trams infinitesimals per on passa.

I si combineu les expressions (101) i (102) tenim:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{103}$$

De la mateixa manera que amb les lleis primera i segona, Maxwell va reformular també aquesta tercera llei de manera similar, però aquest cop va fer servir un altre teorema matemàtic: el teorema de Kelvin-Stokes. Per entendre'l millor, observeu abans la figura 29. Hi podeu distingir una zona acolorida que correspon a una superfície $\vec{S}$ tancada per la part superior i oberta per la part inferior (us la podeu imaginar com un bol de cuina cap per avall). Els límits de l'obertura de la part inferior estan marcats per un recorregut tancat C, indicat per les fletxes.

Figura 29

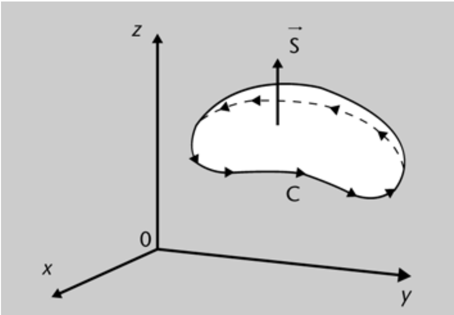


Figura 29

Representació gràfica del teorema de Kelvin-Stokes.

El teorema de Kelvin-Stokes enuncia que la integral de superfície del rotacional d'un camp vectorial al llarg d'una superfície S no tancada és igual a la circulació del mateix camp al llarg del recorregut tancat C que delimita aquesta superfície. Aquest enunciat es formula, en termes matemàtics, així:

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (104)$$

Si combineu les expressions (103) i (104), obtindreu que la integral de superfície del rotacional del camp elèctric al llarg del circuit tancat C correspon a la variació del flux magnètic a través de la superfície que delimita:

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) d\vec{S} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (105)$$

Si deriveu totes dues bandes respecte a la superfície S obtenim:

$$\frac{\partial}{\partial S}\left(\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) d\vec{S}\right) = -\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right) \qquad (106)$$

Si substituïu el flux magnètic Φ_B per la seva definició (52), és a dir, per la integral de superfície del camp magnètic, obtindreu finalment:

$$\frac{\partial}{\partial S}\left(\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) d\vec{S}\right) = -\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}\right) \qquad (107)$$

Recordeu

En una derivada segona respecte a dues variables diferents, l'ordre de derivació no altera el resultat:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)$$

En el segon terme de l'equació, podem canviar l'ordre de les derivades parcials:

$$\frac{\partial}{\partial S}\left(\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) d\vec{S}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial S}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}\right) \qquad (108)$$

Podeu eliminar les integrals, ja que les derivades es realitzen respecte a la mateixa variable (*S*). Per tant, tindrem:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (109)$$

on fixeu-vos que la derivada total respecte al temps s'ha transformat en derivada parcial. No us preocupeu de com ni perquè s'ha produït aquest canvi. Quedeu-vos només amb el fet que en la forma integral teniu una derivada total respecte al temps i aquí, en la forma diferencial (109), una derivada parcial.

Recordeu que...

La derivada parcial de la integral d'una funció vectorial és la funció mateixa, sempre i quan les dues operacions es facin respecte a la mateixa variable:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\vec{u}(x,y)dx\right)=\vec{u}(x,y)$$

La **tercera llei de Maxwell** diu que el rotacional del camp elèctric $\vec{E}$ en un punt qualsevol és igual al ritme de variació (la derivada respecte al temps) del camp magnètic $\vec{B}$ en aquell mateix punt, canviat de signe:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (110)$$

Rotacional

El rotacional d'un camp vectorial $\vec{u}$ es defineix com el producte vectorial de l'operador nabla $\vec{\nabla}$ per $\vec{u}$. Per les propietats del producte vectorial, el rotacional serà sempre un nou vector **perpendicular** a $\vec{u}$.

Es pot calcular de la manera següent:

$$\text{rot }\vec{u}=\vec{\nabla}\times\vec{u}=$$

$$=\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Així doncs, la tercera llei de Maxwell mostra, a diferència de les dues primeres, una primera relació entre el camp elèctric i el camp magnètic. En aquest cas, s'explica com un camp magnètic variable crea o modifica el camp elèctric.

A continuació deduirem la quarta i última llei de Maxwell, que tracta de l'últim cas que ens queda per estudiar: la generació o modificació de camps magnètics a partir de camps elèctrics variables. Ho farem a partir de la llei d'Ampère.

3.4. La quarta llei de Maxwell i la llei d'Ampère-Maxwell

Si torneu enrere, recordareu que us vam introduir el magnetisme explicant el camp magnètic induït primer per una càrrega en moviment i després per un corrent elèctric. Més tard vam introduir la llei d'Ampère-Maxwell, que generalitzava els casos anteriors:

Vegeu el magnetisme a l'apartat 2 d'aquest mòdul.

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(I+\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}\right) \qquad (111)$$

La llei d'Ampère-Maxwell estableix que la integral de línia d'un camp magnètic al voltant d'un circuit tancat és proporcional al corrent que travessa la superfície imaginària dibuixada per aquest circuit. És a dir, relaciona el camp magnètic en una regió amb la seva causa, els corrents elèctrics (càrregues en moviment).

De la mateixa manera que amb la tercera equació, Maxwell va fer servir també el teorema de Kelvin-Stokes (equació (104)) però ara aplicat al camp magnètic:

$$\int_S\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)d\vec{S} = \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} \qquad (112)$$

Podeu procedir de forma anàloga al cas de la tercera llei de Maxwell i combinar les expressions (111) i (112):

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) d\vec{S} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \tag{113}$$

Amb l'equació (46) podem posar la intensitat *I*, en funció de $\vec{J}$; i amb l'equació (59), en funció del camp. Així queda:

$$\int_V \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) d\vec{S} = \mu_0 \left(\int_S \vec{J} d\vec{S} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} d\vec{S} \right) \tag{114}$$

I si derivem respecte *S* tenim:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \tag{115}$$

on podeu notar també que la derivada total respecte al temps s'ha convertit en derivada parcial.

Fixeu-vos que el càlcul l'hem fet per al buit (ε_0 i μ_0).

La **quarta equació de Maxwell** relaciona el **rotacional** del **camp magnètic** $\vec{B}$ amb la densitat de corrent elèctric $\vec{J}$ i amb la variació del camp elèctric $\vec{E}$ per mitjà de la condició següent:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \tag{116}$$

on μ_0 i ε_0 són, respectivament, la permitivitat elèctrica i la permeabilitat magnètica del medi material.

Rotacional

El rotacional d'un camp vectorial $\vec{A}$ es defineix com el producte vectorial de l'operador nabla $\vec{\nabla}$ per $\vec{A}$. Per les propietats del producte vectorial, el rotacional serà sempre un nou vector perpendicular a $\vec{A}$.

Es pot calcular de la manera següent:

$$\text{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} =$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

La quarta llei de Maxwell explica l'última peça que ens quedava per a acabar de quadrar-ho tot: l'origen dels camps magnètics. Recordeu que l'altra llei relacionada amb el camp magnètic, la segona llei de Maxwell, no explicava la generació de camps magnètics, sinó que només indicava la inexistència de "càrregues magnètiques". En aquesta quarta llei s'expliquen d'un sol cop les dues fonts possibles de creació de camp magnètic: els corrents elèctrics (indicats per $\vec{J}$) i els camps elèctrics variables (indicats per $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$).

Així doncs, ja hem introduït una a una les equacions de Maxwell i hem explicat d'on provenien. A continuació les analitzarem de forma global i després n'estudiarem alguns casos específics interessants.

3.5. Visió global i estudi de casos específics

A la taula següent es mostren les quatre lleis de Maxwell en la seva forma diferencial i les seves equivalències en forma integral, que corresponen a quatre lleis que ja heu vist en tractar l'electrostàtica i la magnetostàtica.

Vegeu l'electrostàtica i la magnetostàtica als apartat 1 i 2 d'aquest mòdul.

Taula 2. Lleis de Maxwell per a l'electromagnetisme

Forma diferencial		Forma integral	
1a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (117)	**Llei de Gauss per al camp elèctric**	$\oint_S \vec{E}d\vec{S}=\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (121)
2a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ (118)	**Llei de Gauss per al camp magnètic**	$\oint_S \vec{B}d\vec{S}=0$ (122)
3a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (119)	**Llei d'inducció de Faraday**	$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi_B}{dt}$ (123)
4a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (120)	**Llei d'Ampère-Maxwell**	$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I+\mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$ (124)

Les lleis de Maxwell que us acabem d'introduir i que podeu veure a la taula representen la base de l'electromagnetisme, ja que expliquen la naturalesa dels camps elèctric i magnètic i de la seva interrelació. Per a completar el coneixement de l'electrodinàmica, només cal afegir-hi:

- **l'equació de continuïtat**, ja l'heu vist en l'equació 51. Aquesta equació seguint el passos que hem seguit per a les lleis de Maxwell, es pot escriure de forma diferencial com:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{125}$$

Vegeu l'equació de continuïtat al subapartat 2.1.3 d'aquest mòdul.

- l'expressió de la força electromagnètica, és a dir, la força que experimentaria una càrrega que es trobés en una regió en què hi ha un camp elèctric i un camp magnètic de forma simultània. Aquesta força s'anomena **força de Lorentz** i correspon a la suma algebraica de les forces elèctrica (16) i magnètica (61):

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{126}$$

Força de Lorentz

La força de Lorentz és la combinació de les forces elèctrica i magnètica:

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Tanmateix, també és habitual referir-se amb aquest nom a la força magnètica per separat:

$$\vec{F}=q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Per a una distribució de càrregues i de corrent qualsevol força electromagnètica es pot escriure com:

$$\vec{F}=\int_V\left(\rho\vec{E}+\vec{J}\wedge\vec{B}\right)dV \tag{127}$$

Un cop ja coneixeu totes les equacions que determinen l'electromagnetisme, val la pena que us fixeu en un detall: les equacions que us hem mostrat fins ara estan deduïdes per al buit. Aquest fet és rellevant, ja que implica que els camps elèctric i magnètic existeixen en el buit, no necessiten de matèria. Però, com es modificarien les lleis en presència d'un medi material? Ho veurem a continuació.

3.5.1. Estudi de les lleis de Maxwell en presència de medis materials

Com ja vàrem veure, l'estudi dels camps elèctric i magnètic en presència de medis materials pot ser bastant complex. Tanmateix, podem limitar l'estudi als casos "ideals" en què els medis són isòtrops, homogenis i lineals (i. h. l.), ja que l'estudi per a medis que no són i. h. l. és força més complex i queda fora dels objectius d'aquest mòdul.

Vegeu l'electrostàtica i el magnetisme en presència de medis materials i la definició dels materials i. h. l. als subapartats 1.3 i 2.5 d'aquest mòdul.

La definició dels materials i. h. l. i la simplificació que impliquen ja els vàrem veure. Es pot resumir en que la presència d'un medi d'aquest tipus es tradueix en la substitució de la permitivitat elèctrica i de la permeabilitat magnètica del buit pels valors corresponents al medi en qüestió:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &\rightarrow \varepsilon \\ \mu_0 &\rightarrow \mu \end{aligned} \tag{128}$$

Si feu aquestes substitucions, les lleis de Maxwell queden com a la taula 3.

Taula 3

Forma diferencial		Forma integral	
1a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ (129)	Llei de Gauss per al camp elèctric	$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon}$ (133)
2a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (130)	Llei de Gauss per al camp magnètic	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ (134)
3a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (131)	Llei d'inducció de Faraday	$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ (135)
4a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\left(\vec{J} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$ (132)	Llei d'Ampère modificada	$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu\left(I + \varepsilon\frac{d\Phi_E}{dt}\right)$ (136)

És força habitual trobar-vos les equacions de la taula 3 reescrites amb la inclusió dels conceptes de desplaçament elèctric ($\vec{D}$) (vegeu l'equació (35)) i d'intensitat de camp magnètic ($\vec{H}$) (vegeu l'equació (83)) que us vàrem introduir en tractar l'electrostàtica i la magnetostàtica en presència de medis materials. Per aquest motiu, a la taula 4 us mostrem, a mode informatiu, com queden les equacions amb aquest canvi, tot i que en aquest mòdul preferim fer servir les expressions de la taula 3.

Vegeu l'electrostàtica, el magnetisme en presència de medis materials als subapartats 1.3 i 2.5 d'aquest mòdul.

Taula 4

Forma diferencial		Forma integral	
1a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho$ (137)	**Llei de Gauss per al camp elèctric**	$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=Q_{int}$ (141)
2a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ (138)	**Llei de Gauss per al camp magnètic**	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ (142)
3a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (139)	**Llei d'inducció de Faraday**	$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi_B}{dt}$ (143)
4a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ (140)	**Llei d'Ampère modificada**	$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S J d\vec{S}+\varepsilon\frac{d\Phi_E}{dt}$ (144)

Un cop ja tenim les expressions generals de les quatre lleis de Maxwell tant en el buit com en medis materials, estudiarem dos casos específics que són d'especial interès:

- Situacions en què tant el camp elèctric com el camp magnètic són estacionaris, és a dir, no varien en el temps

- Situacions en què els camps són variables però no hi ha presència de cap càrrega elèctrica ni corrent elèctric

3.5.2. Estudi del cas específic en què els camps són estacionaris

En aquest punt analitzarem les lleis de Maxwell en situacions en què tant el camp elèctric com el camp magnètic no varien amb el temps (electrostàtica i magnetostàtica, respectivament). Veure aquesta situació us serà útil i interessant per tres motius:

- les equacions se simplifiquen de forma considerable,
- us permeten veure el paral·lelisme entre els camps elèctric i magnètic,
- es tracta d'un cas que podeu trobar sovint en el món real.

Per a determinar com són les lleis de Maxwell en aquestes condicions, cal modificar-les i fer-ne desaparèixer tots els termes dependents del temps. És a dir, heu de fer:

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0;\qquad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$$

i

$$\frac{d\vec{E}}{dt}=0;\qquad \frac{d\vec{B}}{dt}=0 \tag{145}$$

Així doncs, les equacions de Maxwell per a situacions en què tant el camp elèctric com el camp magnètic no varien en el temps queden com a la taula 5.

Taula 5. Lleis de Maxwell en condicions estacionàries

Forma diferencial			Forma integral		
1a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$	(146)	**Llei de Gauss per al camp elèctric**	$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{Q_{int}}{\varepsilon}$	(150)
2a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$	(147)	**Llei de Gauss per al camp magnètic**	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$	(151)
3a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$	(148)	**Llei d'inducció de Faraday**	$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$	(152)
4a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu\vec{J}$	(149)	**Llei d'Ampère modificada**	$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu I$	(153)

La primera conclusió que podem extreure és la complementarietat de tots dos camps. És com si fossin dues cares d'una moneda.

En primer lloc, observeu el camp elèctric. El seu rotacional ($\vec{\nabla}\times\vec{E}$) és, en absència de camps magnètics variables i segons la 3a equació de Maxwell, sempre zero. Aquest fet indica que el treball realitzat per una càrrega en un circuit tancat és zero (ja que en el cas que estem considerant no hi ha cap camp magnètic variable que faci aparèixer una fem induïda). En altres paraules, es tracta d'un camp conservatiu.

D'altra banda, la seva divergència ($\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$) és proporcional a la densitat de càrrega elèctrica i també presenta una dependència amb la permitivitat del medi (ε). Si observeu l'equivalent en forma integral (la llei de Gauss per al camp elèctric), veureu que aquest fet indica que el flux que travessa qualsevol superfície tancada només pot ser provocat per les càrregues que es trobin en el seu interior.

En canvi, en el camp magnètic la situació és just a l'inrevés. És la divergència ($\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$) la que és, en absència de camps elèctrics variables, sempre zero. Aquest fet indica que no existeixen "càrregues magnètiques". En canvi, el rotacional del camp magnètic ($\vec{\nabla}\times\vec{B}$) no és zero, i aquest fet indica que es tracta d'un camp no conservatiu, al contrari que el camp electrostàtic.

Si fem una comparativa entre els camps elèctric i magnètic, comprovareu que el mòdul del rotacional del camp magnètic presenta més analogies amb el de la divergència del camp elèctric que no pas amb el del seu rotacional. D'una banda, el seu mòdul és proporcional a la densitat de corrent elèctric (recordeu que el corrent té en el camp magnètic el mateix paper, conceptualment, que la càrrega en el camp elèctric). D'altra banda, el rotacional també inclou una dependència respecte a la permeabilitat del medi (recordeu que la permeabilitat és l'anàleg de la permitivitat elèctrica però per al camp magnètic).

Un cop vistes com queden les equacions en condicions estacionàries, passarem a estudiar precisament el cas contrari: les lleis de Maxwell en condicions no estacionàries. Això ens permetrà veure que un camp elèctric genera un camp magnètic i aquest últim torna a crear un camp elèctric.

3.5.3. Estudi de les equacions de Maxwell en condicions no estacionàries i en absència de càrregues i corrents elèctrics

En aquest punt estudiarem el cas següent:

- tant el camp elèctric com el camp magnètic són variables,
- no hi ha presència de càrregues ni corrents elèctrics:

$$\rho = 0$$
$$\vec{J} = 0 \qquad (154)$$

Aquesta situació és interessant perquè tractem la interacció entre els camps elèctric i magnètic sense preocupar-nos de què els ha creat (les càrregues i els corrents). Aquest cas és el que farem servir més endavant per a deduir l'existència de les ones electromagnètiques.

En aquestes condicions, les lleis de Maxwell passen a ser com s'indica a la taula 6.

Taula 6. Lleis de Maxwell en absència de càrregues i corrents elèctrics

Forma diferencial		**Forma integral**	
1a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ (155)	**Llei de Gauss per al camp elèctric**	$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$ (159)
2a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (156)	**Llei de Gauss per al camp magnètic**	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ (160)
3a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (157)	**Llei d'inducció de Faraday**	$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ (161)
4a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (158)	**Llei d'Ampère modificada**	$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu\varepsilon\frac{d\Phi_E}{dt}$ (162)

Com podeu veure, aquest cas és molt interessant ja que ens permet observar un altre paral·lelisme entre els camps elèctric i magnètic. Si en el cas estacionari havíem observat que tots dos camps es comportaven de forma complementària, ara succeeix el contrari: tots dos semblen respondre de la mateixa manera.

I és que, en efecte, en absència de les "causes" dels camps (les càrregues per al camp elèctric i els corrents per al camp magnètic) desapareix la diferència més notable entre tots dos: l'existència de càrregues elèctriques i la inexistència de "càrregues magnètiques".

A més a més, si observeu les noves expressions, també podeu detectar que les úniques fonts o orígens d'un dels camps són precisament les variacions que es produeixen en l'altre camp. És a dir, és com si els dos camps s'estiguessin "realimentant" l'un a l'altre.

Aquest concepte de "realimentació" mútua entre els camps elèctric i magnètic és molt important i serà clau per a entendre les ones electromagnètiques que estudiarem més endavant.

3.6. Què hem après?

En aquest apartat hem introduït i analitzat les lleis de Maxwell. Hem vist que aquestes quatre lleis són en realitat derivacions de les diverses lleis que hem vist a les seccions anteriors.

Així doncs, hem vist que la primera i la segona lleis de Maxwell corresponen, respectivament, a les lleis de Gauss per a l'electrostàtica i la magnetostàtica, i expliquen les característiques dels camps elèctric i magnètic per separat.

També hem vist que la tercera i la quarta lleis indiquen la relació entre els camps elèctric i magnètic. La tercera llei de Maxwell correspon a la llei d'inducció de Faraday i, per tant, relaciona la creació de camps elèctrics a partir de camps magnètics variables. La quarta llei de Maxwell indica el procés contrari a la tercera: la creació de camps magnètics a partir de camps elèctrics variables.

A continuació hem analitzat totes quatre lleis en alguns casos particulars. En primer lloc hem vist quina forma prenen les lleis quan els camps són estacionaris i, per tant, les úniques fonts de generació són les càrregues i els corrents elèctrics.

L'altre cas que hem estudiat és el complementari de l'anterior, és a dir, quan no hi ha ni càrregues ni corrents i, per tant, l'única font de generació dels camps són ells mateixos. Hem vist que aquest cas és molt interessant, ja que ens indica que els camps elèctric i magnètic s'alimenten mútuament de forma indefinida, fet que donarà peu al contingut del proper apartat.

4. Ones electromagnètiques

Ja hem introduït i detallat les lleis de Maxwell i hem vist que resumeixen tot el comportament dels camps elèctric i magnètic tant de manera individual com en conjunt. Precisament, pel que fa a aquest darrer punt (la interrelació entre els dos camps) hem vist un exemple clar en l'últim cas particular que hem estudiat: l'estudi de les lleis de Maxwell per a camps no estacionaris i en absència de càrregues i corrents. En aquest últim cas, en què mancaven les "fonts" pròpies dels camps elèctric i magnètic (càrregues i corrents, respectivament), hem pogut observar que tots dos camps es "realimenten" entre sí.

Vegeu les lleis de Maxwell a l'apartat 3 d'aquest mòdul.
Vegeu un exemple de la interrelació entre els dos camps al subapartat 3.5.3 d'aquest mòdul.

Però, en què consisteix aquesta realimentació? I, sobretot, com es produeix? En aquest apartat veurem totes dues coses. Abans però, ens introduirem en els conceptes d'energia electromagnètica i el vector de Poynting.

4.1. Energia electromagnètica. Vector de Poynting

Fins ara us hem introduït els camps elèctric i magnètic i hem vist que, les forces elèctrica i magnètica, com qualsevol força, presenten una energia associada. Més endavant hem vist, en les lleis de Maxwell, que existeix una estreta interrelació entre les dues interaccions de manera que en realitat el que tenim és un camp electromagnètic. Podríem parlar aleshores d'energia electromagnètica? Doncs la resposta és que sí.

Precisament la interrelació entre els camps elèctric i magnètic, i en concret aquesta "realimentació" que ja hem introduït, es tradueix en el fet que hi ha una transferència d'energia entre els dos camps. I és aleshores quan parlem de flux d'energia electromagnètica.

Vegeu la interrelació entre els dos camps al subapartat 3.5.3 d'aquest mòdul.

El flux d'energia electromagnètica es pot quantificar mitjançant un nou concepte: el vector de Poynting (en honor del físic anglès John Henry Poynting, que fou el primer que el va definir).

John Henry Poynting

Físic anglès (9/9/1852 - 30/3/1914) que contribuí en la recerca en diversos àmbits de la física en general i de l'electromagnetisme en concret, com ara l'estudi de l'energia electromagnètica. Entre les seves fites més importants destaquen el teorema de Poynting i l'efecte Poynting-Robertson.

El **vector de Poynting** $\vec{S}$ és una magnitud que mesura el flux d'energia electromagnètica i en el buit es defineix com:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \tag{163}$$

on $\vec{E}$ i $\vec{B}$ són el camp elèctric i magnètic, respectivament, i μ_0 és la permeabilitat del buit.

Com podeu observar, la definició del vector de Poynting inclou el producte vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$. Per tant, el vector de Poynting ($\vec{S}$) sempre serà un vector perpendicular tant al camp magnètic com al camp elèctric (vegeu figura 30).

Figura 30

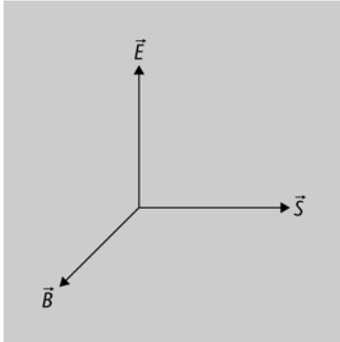


Figura 30

La imatge és la representació de $\vec{E}, \vec{B}$ i $\vec{S}$.

Aquí s'introdueix un nou interrogant. Com es propaga aquesta energia? Ho fa de forma instantània?

Precisament una de les conseqüències més importants de les equacions de Maxwell és la deducció que es pot fer a partir d'elles d'un fet interessant: la seva propagació es produeix mitjançant ones electromagnètiques. I encara més, les mateixes equacions permeten deduir les equacions de propagació d'aquestes ones. Ho veurem tot seguit.

4.2. Deducció de l'equació d'ones a partir de les equacions de Maxwell

Podeu deduir l'equació d'ones a partir de les lleis de Maxwell que ja hem vist. Les reescriurem per a l'últim cas particular que hem estudiat: absència de qualsevol medi material, càrrega elèctrica ($\rho = 0$) o corrent elèctric ($\vec{J} = 0$). A més les escriurem per al cas de propagació pel buit, és a dir, prendriem μ_0 i ε_0. En aquesta situació, les equacions se simplifiquen de forma notable. Us recordem el canvi a la taula 7, en forma diferencial on tenim les equacions genèriques, provinents de la taula 3, i les equacions sense càrregues ni corrents, provinents de la taula 6.

Vegeu les lleis de Maxwell a l'apartat 3 d'aquest mòdul.
Vegeu un cas particular de la interrelació entre els dos camps al subapartat 3.5.3 d'aquest mòdul.

Taula 7

	Expressió "normal"	Expressió sense càrregues ni corrents elèctrics
1a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (164)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ (168)
2a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (165)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (169)
3a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (166)	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (170)
4a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (167)	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (171)

A partir d'aquesta nova situació, podem començar a operar amb les noves equacions. Començarem a treballar amb les equacions tercera (170) i quarta (171), que tracten amb els rotacionals dels camps elèctric i magnètic. Escollim aquestes dues equacions perquè inclouen la dependència creuada d'ambdòs camps, és a dir, mostren que la variació en el temps d'un camp crea l'altre.

A totes dues equacions apareix un rotacional en el primer terme però no en el segon. Anem a veure què passa si calculem el rotacional a totes dues bandes:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \qquad (172)$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\times\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\qquad(173)$$

Els últims termes de les equacions anteriors es poden substituir pels equivalents respectius que podeu obtenir a partir de les mateixes equacions de Maxwell. Fixeu-vos, però, que ara cal procedir a l'inrevés. És a dir, a l'equació (172), que hem deduït de la tercera llei de Maxwell, cal fer servir la quarta llei, (171), i a l'equació (173), que hem deduït de la quarta llei, ara cal fer servir la tercera (170). Fent aquestes substitucions, us quedarà:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\qquad(174)$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\qquad(175)$$

Com podeu veure, en les expressions anteriors s'està aplicant l'operador nabla dos cops (es fa el "rotacional del rotacional"). Es tracta, per tant, d'expressions complicades de tractar. No obstant això, podem simplificar-les fent servir la identitat vectorial següent:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{v}\qquad(176)$$

Propietat de l'operador nabla $\vec{\nabla}$

La identitat

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{v}$$

és una propietat matemàtica de l'operador nabla i és vàlida per a qualsevol vector $\vec{v}$.

Aquesta identitat és vàlida per a qualsevol vector i, per tant, es podrà aplicar tant a $\vec{E}$ com a $\vec{B}$. L'avantatge de fer servir aquesta identitat és que ens apareixeran els termes $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ i $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ que, d'acord amb les modificacions de la primera llei (168) i de la segona (169), seran igual a zero.

Així doncs, les expressions simplificades queden de la manera següent:

$$0-\vec{\nabla}^2\vec{E}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\qquad(177)$$

$$0-\vec{\nabla}^2\vec{B}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\qquad(178)$$

I aquestes equacions tenen nom propi: són les equacions d'ona.

Les equacions d'ona dels camps elèctric ($\vec{E}$) i magnètic ($\vec{B}$) són:

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\vec{\nabla}^2\vec{E}=0\qquad(179)$$

$$\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\vec{\nabla}^2\vec{B}=0\qquad(180)$$

Si recordeu, ja us vàrem introduir l'equació general d'una ona que es propaga amb una velocitat c, que tenia la forma següent:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - c^2 \vec{\nabla}^2 \vec{u} = 0 \quad (181)$$

Equació d'ones

L'equació diferencial que explica el comportament d'una ona qualsevol que es propaga amb una velocitat c és:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - c^2 \vec{\nabla}^2 \vec{u} = 0$$

Si us fixeu bé en les dues equacions que heu acabat deduint, (179) i (180) , podeu observar que segueixen el model d'una equació d'ona (181) i que la seva velocitat de propagació és:

Vegeu l'equació general d'una ona que es propaga amb una velocitat c al mòdul "Ones".

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (182)$$

Aquí ens trobem un altre dels descobriments més rellevants dins del desenvolupament de l'electromagnetisme. Si calculeu la velocitat fent servir els valors coneguts de la permitivitat elèctrica (ε_0) i de la permeabilitat magnètica (μ_0) del buit:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/Nm^2} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2} \end{aligned} \quad (183)$$

obtindreu el valor següent:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2{,}998 \cdot 10^9\ \mathrm{m/s} \quad (184)$$

que correspon a la velocitat de la llum en el buit!

Les lleis de Maxwell permeten deduir que:

- Els camps elèctric i magnètic es propaguen en forma d'ones electromagnètiques i amb una velocitat de propagació en el buit igual a la **velocitat de la llum:**

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2{,}998 \cdot 10^9\ \mathrm{m/s} \quad (185)$$

- Aquesta coincidència entre la velocitat de propagació de les ones electromagnètiques i la velocitat de la llum, va fer suposar a en Maxwell que aquesta última és, en el fons, un tipus d'ona electromagnètica.

Vegeu la llum com a ona electromagnètica al mòdul "Ones".

4.3. Relació entre els camps elèctric i magnètic en una ona electromagnètica

Ja hem deduït i estudiat de forma extensiva les lleis de Maxwell i n'hem analitzat les conseqüències. Tanmateix, hem deixat per a aquest subapartat una d'elles: la relació entre els camps elèctric i magnètic.

Vegeu les lleis de Maxwell a l'apartat 3 d'aquest mòdul.

En efecte, podem analitzar la tercera i quarta lleis de Maxwell en absència de les “fonts” dels camps, és a dir, en absència de càrregues i corrents elèctrics. D’aquesta manera es considera que els camps elèctric i magnètic estan generats únicament per ells mateixos:

Vegeu les lleis de Maxwell a l’apartat 3.5 i les taules 6 i 7 d’aquest mòdul.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{186}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{187}$$

La primera conclusió que podem extreure fa referència a les direccions dels camps. Fixeu-vos que en tots dos casos la direcció d’un dels camps és la mateixa que la del rotacional de l’altre. I, si recordeu, el rotacional d’un vector sempre és un segon vector perpendicular al primer.

Vegeu el rotacional d’un vector a l’apartat 2.3.1 d’aquest mòdul.

En conseqüència, el que tenim és que aquests dos camps són perpendiculars entre sí.

Els camps elèctric $\vec{E}$ i magnètic $\vec{B}$ sempre són **perpendiculars** entre sí

Per tant, la direcció d’un dels camps ens determina de forma unívoca la direcció de l’altre. Ara bé, què passa amb les seves magnituds? També estan relacionades? Anem a comprovar-ho.

Suposem, per exemple, que el mòdul del camp elèctric és proporcional al del camp magnètic:

$$\|\vec{E}\| = \alpha \|\vec{B}\| \tag{188}$$

El valor de la constant de proporcionalitat α hauria de ser tal que se satisfacin la tercera (186) i quarta(187) lleis de Maxwell. L’únic valor per a aquesta constant que satisfà les dues lleis és:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \tag{189}$$

Podeu comprovar que aquest valor és precisament la velocitat de la llum o de propagació de les ones electromagnètiques en el buit (185):

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2{,}998 \cdot 10^9 \ \mathrm{m/s} \tag{190}$$

La relació entre els mòduls del camp elèctric ($\vec{E}$) i magnètic ($\vec{B}$) en una ona electromagnètica és, per tant:

$$\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\| \tag{191}$$

Activitat

Verifiqueu que si $\|\vec{E}\|$ i $\|\vec{B}\|$ tenen la relació de l'equació (191), es verifiquen les equacions (186) i (187).

4.4. Resolució de l'equació d'ones per al cas d'ones planes

Les equacions d'ones que acabem d'introduir tindran una solució general que comprèn infinites solucions particulars. Tanmateix, estudiarem només un cas concret: el d'una ona plana harmònica que es propaga en una sola direcció. A la figura 31 es mostra un esquema representatiu d'una ona plana harmònica.

Figura 31

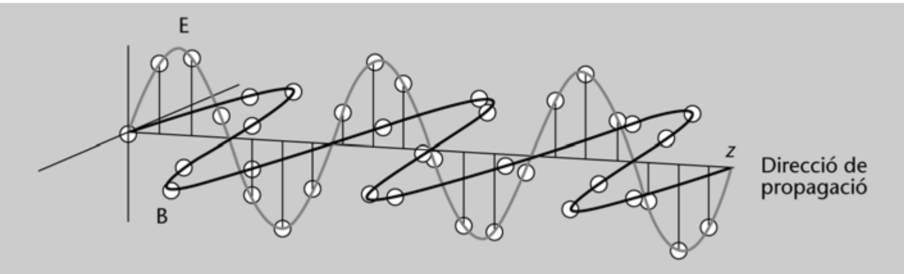


Figura 31

La imatge mostra un esquema representatiu d'una ona plana que es propaga en l'eix z. En una ona plana, els camps elèctric i magnètic són constants al llarg de qualsevol pla que sigui perpendicular a la direcció de propagació. Per tant, només hi haurà gradient de camp en la direcció z.

A l'exemple de la figura, una ona plana es propaga al llarg de la direcció de l'eix z. En una ona d'aquest tipus, trobem dues característiques significatives:

- Els camps elèctric ($\vec{E}$) i magnètic ($\vec{B}$) oscil·len o "vibren" en direccions perpendiculars a la direcció de propagació. Per tant, es tractarà d'ones transversals.

Les ones electromagnètiques planes són **ones transversals**.

Recordeu

Una ona transversal és aquella en la qual les seves oscil·lacions es produeixen en una direcció perpendicular a la direcció de propagació.

Vegeu les ones transversals al mòdul "Ones".

Això vol dir que tindrem:

$$\begin{aligned} E_Z &= 0 \\ B_Z &= 0 \end{aligned} \tag{192}$$

- En un instant determinat, els camps elèctric ($\vec{E}$) i magnètic ($\vec{B}$) són constants respecte a qualsevol direcció que sigui perpendicular a la direcció de propagació. Per tant,

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = 0 \tag{193}$$

I en conseqüència:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = 0; \ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = 0; \ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} = 0 \tag{194}$$

Amb aquesta consideració, les equacions d'ones (179) i (180) se simplifiquen i queden:

Recordeu

$$\vec{\nabla}^2 \vec{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = 0 \tag{195}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = 0 \tag{196}$$

Les solucions particulars d'aquestes equacions són:

Vegeu les solucions particulars de les equacions d'ones al mòdul "Ones".

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t + \Phi_0)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(kz - \omega t + \Phi_0) \tag{197}$$

Recordeu

Una equació diferencial té una **solució general** que comprèn infinites **solucions particulars** possibles.

on els primers factors ($\vec{E}_0$ i $\vec{B}_0$) són constants, i indiquen les **amplituds** tant del camp elèctric $\vec{E}$ com del magnètic $\vec{B}$.

L'argument del cosinus, $kz - \omega t + \Phi_0$, correspon a la fase de l'ona: k és la constant de propagació; ω la freqüència angular i Φ_0 és la fase inicial. En el buit:

Vegeu la fase de l'ona al mòdul "Ones".

$$\frac{\omega}{k} = c \tag{198}$$

Fixeu-vos en les unitats: $[\omega] = 1/\mathrm{s}$ i $[k] = 1/\mathrm{m}$. Per tant $[c] = \mathrm{m/s}$, que són unitats de velocitat.

A partir d'ara prendrem $\Phi_0 = 0$.

En l'àmbit de l'electromagnetisme es prefereix substituir el segon terme per un altre tipus d'expressions anomenades **fasors**, tal com us mostrem tot seguit:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(kz-\omega t)} \quad (199)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(kz-\omega t)} \quad (200)$$

Els termes $e^{j(kz-\omega t)}$ són variables en el temps i en l'espai i s'anomenen **fasors**. Un fasor és un nombre complex que equival a:

$$e^{j(kz-\omega t)} = \cos(kz - \omega t) + j \sin(kz - \omega t) \quad (201)$$

Podeu comprovar que el mòdul del fasor sempre val 1 i, per tant, es tracta d'un factor que no modifica l'amplitud de l'ona sinó només la seva fase. També podeu comprovar que, a part del temps, aquest terme només depèn de la direcció de propagació z (lògic, atès que es tracta d'una ona plana).

Així doncs, ja hem vist com són les expressions d'una ona electromagnètica harmònica plana que es propaga al llarg de la direcció z. Per a trobar l'expressió per a una ona que es propaga en una direcció qualsevol farem la substitució següent:

$$kz \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} \quad (202)$$

Analitzem aquesta nova expressió ($\vec{k} \cdot \vec{r}$):

- $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ és un vector que indica la direcció de propagació i el seu mòdul és el nombre d'ona (també anomenat constant de propagació) que ja heu vist.

- $\vec{r} = (x, y, z)$ és el vector de posició que substitueix la z. En el cas particular que hem tractat; $\vec{r} = (0, 0, z)$.

Per tant, tindrem que:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z \quad (203)$$

Així doncs, resumint:

Les expressions per als camps elèctric $\vec{E}$ i magnètic $\vec{B}$ en una ona harmònica plana són:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)} \quad (204)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{j\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)} \quad (205)$$

on $\vec{E}_0$ i $\vec{B}_0$ són l'amplitud dels camps elèctric i magnètic (és a dir, el seu valor màxim), ω és la freqüència angular d'oscil·lació i $\vec{k}$ és la constant d'ona de propagació.

_j_ en comptes de _i_ com a unitat dels nombres imaginaris

Quan es treballa en l'àmbit de l'electromagnetisme es fa servir j per a indicar la unitat imaginària i. El motiu d'aquest conveni és perquè no es produeixi confusió amb el corrent elèctric, que s'indica també amb i o I.

Recordeu

Un nombre complex és un nombre del tipus $z = a + jb$, on a i b són nombre reals i j és la unitat imaginària ($j = \sqrt{-1}$)

Vegeu el nombre d'ona al mòdul "Ones".

Recordeu

La **freqüència angular** ω i el **nombre d'ona** o **constant de propagació** $\vec{k}$ són els dos paràmetres que, juntament amb l'amplitud, determinen com és i com es propaga una ona.

ω correspon a la "freqüència temporal" o velocitat amb què oscil·la la magnitud en un punt fix determinat.

El mòdul de $\vec{k}$ correspon a la "freqüència espacial" o quantitat de màxims o mínims que es produeixen en una distància determinada al llarg de la direcció de propagació.

Així doncs, a partir d'ara farem servir el vector $\vec{k}$ per a expressar la direcció de propagació. El seu mòdul correspon al nombre d'ona. Pel que fa a la seva direcció, correspon a la direcció de propagació de l'ona. I atès que estem estudiant el cas d'una ona plana, tindrem que tant el camp elèctric $\vec{E}$ com el camp magnètic $\vec{B}$ no presenten component en aquesta direcció. Per tant, la direcció del vector $\vec{k}$, és a dir, la direcció de propagació, és perpendicular a les direccions de $\vec{E}$ i $\vec{B}$.

Vegeu que el mòdul correspon al número d'ona al mòdul "Ones".

En una ona plana, les direccions de $\vec{E}$, $\vec{B}$ i $\vec{k}$ són **perpendiculars** entre sí.

Podem obtenir l'expressió matemàtica que relaciona tots tres, ja que:

- de l'equació $\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|$ (equació 183) sabem la relació entre els mòduls,
- de la figura 31 sabem que si fem el producte vectorial de $\vec{k}$ i $\vec{E}$ (però no a la inversa), obtenim $\vec{B}$.

Recordeu

En el buit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

Amb tota aquesta informació podem escriure la relació matemàtica entre $\vec{E}$, $\vec{B}$ i $\vec{k}$:

Recordeu

Un vector $\vec{k}$ es pot escriure com el producte del seu mòdul, k, pel vector unitari en la seva direcció i $\hat{k}$:

$$\vec{k} = k\hat{k}$$

Els vectors $\vec{E}$, $\vec{B}$ i $\vec{k}$ es relacionen de la següent manera en el buit:

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \times \vec{E}\right) = \frac{k}{\omega}\left(\hat{k} \times \vec{E}\right) = \frac{1}{c}\left(\hat{k} \times \vec{E}\right) \qquad (206)$$

on ε_0 i μ_0 són, respectivament, la permitivitat i la permeabilitat del buit.

Fixeu-vos que als dos últims termes hem escrit $\hat{k}$ per indicar que és un vector unitari en la direcció de $\vec{k}$.

Figura 32

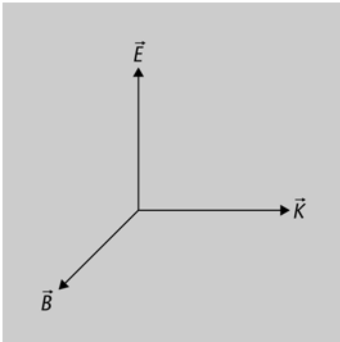


Figura 32

La imatge és la representació de $\vec{k}$, $\vec{B}$ i $\vec{E}$.

A la figura 32 tenim representats els tres vectors.

4.5. Què hem après?

En aquest apartat hem vist que a partir de les lleis de Maxwell es dedueix que l'energia electromagnètica es propaga mitjançant ones electromagnètiques i n'hem determinat l'expressió i la velocitat de propagació, que en el buit correspon a la velocitat de la llum en el buit (la qual cosa no sorprèn perquè, de fet, la llum, és una ona electromagnètica).

També hem introduït alguns conceptes relacionats amb la propagació de l'energia electromagnètica, com ara el vector de Poynting, que ens serviran per a altres mòduls.

A partir de les lleis de Maxwell es dedueixen les equacions que expliquen el comportament dels camps elèctric i magnètic:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{E} = 0 \tag{207}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{B} = 0 \tag{208}$$

Aquestes equacions corresponen a les equacions d'una ona, que anomenem **ona electromagnètica**, la velocitat de propagació de la qual és:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} \tag{209}$$

Podem comprovar que $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s, que és el valor ja conegut de la velocitat de la llum en el buit.

5. Problemes resolts

5.1. Enunciats

1. Sabent que el mòdul del camp elèctric creat per una càrrega puntual q ubicada en el punt (0, 0) sobre un punt que es troba a una distància d és:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2} \tag{210}$$

determineu el flux de camp elèctric degut a la càrrega q per a les superfícies tancades següents:

a) una esfera de radi R centrada a (0, 0),
b) una esfera de radi $2R$ centrada a (0, 0).

Feu el càlcul dels fluxos primer mitjançant la definició de flux i després mitjançant el **teorema de Gauss**, i comproveu que els resultats són idèntics en tots dos casos.

2. En una certa regió de l'espai hi ha present un camp electrostàtic uniforme regit per l'expressió següent:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -10\ \vec{i}\,[\text{N}/\text{C}] \tag{211}$$

Determineu la força electrostàtica experimentada per:

a) una càrrega puntual de valor $Q = -5$ μC ubicada en el punt (1, 1),
b) un segment de fil amb càrrega $Q = -5$ μC que s'estén entre els punts (0, 0) i (1, 1),
c) una esfera de radi $R = 1$ amb càrrega $Q = -5$ μC i centrada a (0, 0).

3. El camp electrostàtic en un punt és:

$$\vec{E} = 100\vec{i} + 300\,\vec{j}\ N/C$$

Calculeu i compareu el camp de desplaçament $\vec{D}$ en el mateix punt quan el medi material és el buit i quan és aigua a 20 °C de temperatura ($\varepsilon_r = 80$).

4. El potencial electrostàtic en una certa regió de l'espai és:

$$V(\vec{r}) = x^2 + 3yz^2\ \text{(V)}$$

Determineu l'expressió general del camp elèctric en aquesta mateixa regió i calculeu-ne la magnitud en el punt $\vec r = \vec i + 3\,\vec j - 2\,\vec k$.

5. El potencial vectorial magnètic en una certa regió de l'espai és

$$\vec A(\vec r) = x\vec i + yz\,\vec j \qquad (212)$$

Determineu l'expressió general del camp magnètic en aquesta mateixa regió i calculeu-ne la magnitud en el punt $\vec r = \vec i - 2\,\vec j + 3\,\vec k$.

6. En una certa regió de l'espai existeix un camp elèctric $\vec E$ determinat per l'expressió:

$$\vec E(\vec r) = 4x\sin\left(4\pi\cdot 10^6 t + \pi\right)\vec j\ \left(\mathrm{N/C}\right) \qquad (213)$$

Si suposem que la regió està lliure de càrregues i corrents elèctrics, determineu l'expressió general del camp magnètic $\vec B(\vec r)$ associat a aquest camp.

7. En una ona harmònica plana, el camp elèctric $\vec E$ oscil·la amb l'amplitud $\vec E_0 = 3\vec i - 2\vec j + \vec k$ i es propaga en la direcció $\vec k = \left(2\vec i + 2\vec j - 2\vec k\right)$. Determineu el camp magnètic $\vec B$ de l'ona.

5.2. Solucions

1. Recordem la definició de flux de camp elèctric a través d'una superfície S (3):

$$\Phi_E = \oint_S \vec E\cdot d\vec S \qquad (214)$$

on el signe $\oint$ indica que la superfície S és tancada.

Figura 33

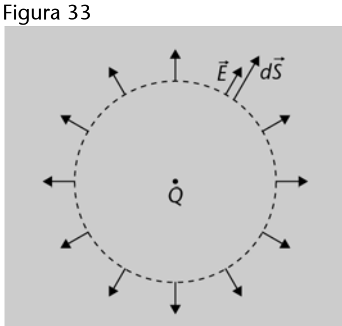


Figura 33

La imatge mostra la càrrega tancada dins una esfera. També s'hi representen el camp elèctric $\vec E$ i el vector de superfície.

Abans de procedir amb el càlcul, analitzem la geometria del problema. Les dues superfícies respecte a les quals s'ha de calcular el flux són esfèriques. Això vol dir que (vegeu la figura 33):

- El camp elèctric ($\vec E$) sempre serà perpendicular a la superfície en tots dos casos, ja que el camp creat per una càrrega puntual només té component radial (consulteu la figura 2).

- El mòdul del camp elèctric (E) és constant, ja que la distància d és la mateixa per a tota la superfície (la càrrega està ubicada en el centre de l'esfera).

Aquestes dues característiques simplifiquen el càlcul del flux, ja que tant $\vec{E}$ com $d\vec{S}$ són paral·lels i per tant, $\vec{E}d\vec{S} = E \cdot dS$, i com que E és constant en tota la superfície, surt de la integral:

$$\Phi_E = E\oint_S dS \tag{215}$$

I, per tant:

$$\Phi_E = E \cdot S \tag{216}$$

És a dir, n'hi ha prou amb multiplicar el mòdul del camp elèctric pel valor de la superfície de l'esfera.

a) Per al cas de l'esfera de radi R, la distància és $d = R$ i, per tant, el camp elèctric és:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} \tag{217}$$

I la superfície de l'esfera és:

$$S = 4\pi R^2 \tag{218}$$

Per a calcular el flux, multipliquem (217) i (218):

$$\Phi_E = E \cdot S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 \tag{219}$$

Els termes 4π i R^2 es cancel·len perquè es troben multiplicant i dividint a la vegada i, per tant, obtenim:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{220}$$

Podeu comprovar que aquesta expressió és idèntica a la que trobaríem a la llei de Gauss (8), ja que la càrrega q és l'única que es troba a l'interior de la superfície.

b) Per al cas de l'esfera de radi $2R$, la distància és $d = 2R$ i, per tant, tenim:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(2R)^2} \tag{221}$$

$$S = 4\pi(2R)^2 \quad (222)$$

I el flux serà:

$$\Phi_E = E \cdot S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(2R)^2} \cdot 4\pi(2R)^2 \quad (223)$$

Com a l'apartat (a), els termes 4π i $(2R)^2$ es cancel·len perquè es troben multiplicant i dividint a la vegada i, per tant, obtenim el mateix resultat:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (224)$$

També com a l'apartat (a), podeu comprovar que se satisfà la llei de Gauss (8), ja que la càrrega q és l'única que es troba a l'interior de la superfície.

2. Segons l'equació (18), la força electrostàtica experimentada per una distribució contínua de càrrega és:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int_\Gamma \vec{E}(\vec{r})\,dq \quad (225)$$

Atès que el camp elèctric és uniforme (constant), podem treure'l fora de la integral:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})\int_\Gamma dq \quad (226)$$

El resultat de la integral és precisament el valor total de la càrrega de les distribucions. En tots tres casos és $Q = -5 \cdot 10^{-6}$ C. Per tant,

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(-5 \cdot 10^{-6}\right) \cdot \left(-10\,\vec{i}\right) = +5 \cdot 10^{-5}\,\vec{i}\ \left(\mathrm{N}/\mathrm{C}\right) \quad (227)$$

3. Segons l'equació (35), el camp de desplaçament elèctric és:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad (228)$$

Per al cas del buit ($\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ C^2/Nm^2):

$$\vec{D} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \left(100\vec{i} + 300\vec{j}\right)\ \mathrm{C/m^2} = \left(0{,}885\vec{i} + 2{,}566\vec{j}\right)\ \mathrm{nC/m^2}$$

Per al cas de l'aigua ($\varepsilon_r = 80$):

$$\varepsilon = 80\varepsilon_0 = 7{,}08 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{C^2/Nm^2}$$

$$\vec{D} = 7{,}08 \cdot 10^{-10} \cdot \left(100\,\vec{i} + 300\,\vec{j}\right)\ \mathrm{C/m^2} = 70{,}8\vec{i} + 212{,}4\vec{j}\ \mathrm{nC/m^2}$$

Podeu comprovar que el quocient entre els valors dels dos camps és precisament 80, que correspon a la permitivitat relativa (ε_r) de l'aigua.

4. Recordem la relació entre el potencial i el camp elèctrics (23):

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \tag{229}$$

Per tant, haurem de calcular el gradient del potencial que, si recordeu, és un vector les coordenades del qual són les derivades parcials respecte a x, y i z, respectivament. Així doncs, el primer que hem de fer és calcular aquestes derivades. Comencem per la derivada respecte a x:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 3yz^2\right) = 2x + 0 = 2x \tag{230}$$

Fixeu-vos que el terme $3yz^2$ és com si no hi fos perquè no depèn d'x i, per tant, la seva derivada és 0.

Pel que fa a la derivada respecte a y:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 3yz^2\right) = 0 + 3z^2 = 3z^2 \tag{231}$$

Podeu observar que els termes x^2, 3 i z^2 no depenen d'y i, per tant, han de ser tractats com a constants.

Finalment, la derivada respecte a z:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 3yz^2\right) = 6yz \tag{232}$$

De forma similar a com succeïa amb la derivada respecte a y, els termes x^2, 3 i z^2 no depenen de z i, per tant, han de ser tractats com a constants.

El gradient del potencial serà un vector les components del qual són les expressions que acabem de trobar, equacions (230), (231) i (232):

$$\vec{\nabla} V(\vec{r}) = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} V(\vec{r}) = 2x\vec{i} + 3z^2\vec{j} + 6yz\vec{k} \tag{233}$$

I, per tant, el camp elèctric serà:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -2x\vec{i} - 3z^2\vec{j} - 6yz\vec{k}$$

Per a trobar la magnitud del camp en el punt $\vec{r} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ només cal substituir els valors corresponents:

$$\vec{E}(1,3,-2) = -2\cdot 1\vec{i} - 3\cdot(-2)^2\vec{j} - 6\cdot 3\cdot(-2)\vec{k}$$

$$\vec{E}(1,3,-2) = -2\vec{i} - 12\vec{j} + 36\vec{k} \text{ N/C}$$

5. Recordem la relació entre el potencial vectorial i el camp magnètic (66):

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{234}$$

Per tant, per a trobar el camp magnètic $\vec{B}$ haurem de calcular el rotacional del potencial vectorial magnètic $\vec{A}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{235}$$

Agafem el potencial vectorial magnètic i en calculem les derivades parcials que necessitem:

$$\begin{aligned}
&\vec{A}(\vec{r}) = x\vec{i} + yz\vec{j} \\
&\frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial A_y}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial A_y}{\partial z} = y \\
&\frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial A_z}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{236}$$

Per tant, el camp magnètic $\vec{B}$ serà:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = y\vec{i} \tag{237}$$

Per a trobar el camp en el punt $\vec{r} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ hem de substituir aquestes components a l'equació anterior:

$$\vec{B} = -2\vec{i} \text{ T} \tag{238}$$

6. En absència de càrregues i de corrents elèctrics, l'única "font" de creació de camp elèctric $\vec{E}$ és l'existència de camps magnètics variables $\vec{B}$. La magnitud del camp elèctric generat per un camp magnètic variable es pot determinar a partir de la tercera llei de Maxwell (que és la forma diferencial de la llei d'inducció de Faraday), equació (110):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{239}$$

Per a resoldre l'equació, cal multiplicar totes dues bandes per *dt* i després integrar-les:

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\cdot dt = -d\vec{B}$$
$$\int\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\cdot dt = -\int d\vec{B} \qquad (240)$$

Per tant, el camp magnètic $\vec{B}$ serà:

$$\vec{B} = -\int\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\cdot dt \qquad (241)$$

Determinem en primer lloc quant val $\vec{\nabla}\times\vec{E}$:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (242)$$

Podem comprovar que totes les derivades parcials són zero a excepció del terme $\frac{\partial E_y}{\partial x}$. Per tant, tindrem:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + \left(\frac{\partial\left[4x\sin\left(4\pi\cdot 10^6 t + \pi\right)\right]}{\partial x} - 0\right)\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 4\sin\left(4\pi\cdot 10^6 t + \pi\right)\vec{k} \qquad (243)$$

Segons l'equació (241), per a trobar el camp magnètic $\vec{B}$ cal integrar l'expressió (243) respecte al temps. Per tant:

$$\vec{B} = -\int\left(4\sin\left(4\pi\cdot 10^6 t + \pi\right)\vec{k}\right)\cdot dt$$
$$\vec{B} = \frac{4}{4\pi\cdot 10^6}\cos\left(4\pi\cdot 10^6 t + \pi\right)\vec{k}$$
$$\vec{B} = \frac{1}{\pi}10^{-6}\cos\left(4\pi\cdot 10^6 t + \pi\right)\vec{k}\ [\mathrm{T}] \qquad (244)$$

7. Hem vist que, en una ona plana, les direccions de $\vec{E}$, $\vec{B}$ i $\vec{k}$ són perpendiculars entre sí. Per tant, podem determinar $\vec{E}$ a partir de $\vec{B}$ i viceversa, si coneixem la direcció de propagació $\vec{k}$.

Vegeu les ones planes al subapartat 4.4 d'aquest mòdul.

$$\vec{k} = \left(2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}\right)m^{-1} \qquad (245)$$

$$\vec{E}_0 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\ \mathrm{N/C} \qquad (246)$$

Podem escriure l'ona plana com, equació (204):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)} \tag{247}$$

On:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \left(2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}\right) \cdot \left(x\vec{i} + y\vec{j} + 2\vec{k}\right) = 2x + 2y - 2z \tag{248}$$

i per obtenir ω podem aplicar l'equació (198).

$$\omega = c \cdot k = c\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2c\sqrt{3} \tag{249}$$

Per tant:

$$\vec{E} = \left(3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right) e^{\vec{j}\left((2x+2y-2z) - 2c\sqrt{3}\,t\right)} \ \mathrm{N}/C \tag{250}$$

Un cop tenim el camp $\vec{E}$, podem obtenir $\vec{B}$ amb l'equació (206).

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{1}{c}\left(\hat{k} \times \vec{E}\right) = \frac{1}{c}\left[\left(\frac{2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{2\sqrt{3}}\right) \times \left(3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right) e^{\vec{j}\left(2x+2y-2z-2c\sqrt{3}\,t\right)}\right] = \\ &= \frac{1}{2c\sqrt{3}}\left\{\left[2 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2)\right]\vec{i} - \left[2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2)\right]\vec{j} + \left[2 \cdot (-2) - 2 \cdot 3\right]\vec{k}\right\} e^{j\left(2x+2y-2z-2c\sqrt{3}\,t\right)}\end{aligned} \tag{251}$$

D'on:

$$\vec{B} = \frac{1}{2c\sqrt{3}} = \frac{1}{2c\sqrt{3}}\left(-2\vec{i} - 8\vec{j} - 10\vec{k}\right) e^{j\left(2x+2y-2z-2c\sqrt{3}\,t\right)} \ [\mathrm{T}] \tag{252}$$

Producte vectorial

El producte vectorial de dos vectors és un tercer vector amb direcció perpendicular als dos primers.

Es calcula de la manera següent:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} - \left(a_x b_z - a_z b_x\right)\vec{j} + \\ + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}$$

Resum

Les càrregues elèctriques en repòs generen un **camp electrostàtic** $\vec{E}(\vec{r})$ a l'espai del seu voltant. Podem representar de forma qualitativa aquest camp mitjançant les **línies de camp**, que expressen la direcció, sentit i magnitud del camp elèctric en una regió. Les línies de camp sempre comencen i acaben allà on hi ha càrregues elèctriques i no es poden creuar mai en cap altre lloc.

El **flux de camp elèctric** Φ_E és una mesura del nombre de línies de camp $\vec{E}$ que travessen una superfície S determinada. La **llei de Gauss per al camp electrostàtic** enuncia que el balanç de flux de camp elèctric que travessa qualsevol superfície tancada, és a dir, el balanç entre les línies de camp que surten de la superfície menys les que hi entren només depèn de la càrrega elèctrica neta en el seu interior. Per al buit és:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{253}$$

Tot camp electrostàtic presenta un **potencial electrostàtic** $V(\vec{r})$ associat en tots els punts de la seva regió d'influència. El coneixement del potencial electrostàtic $V(\vec{r})$ en tota una regió permet determinar de forma unívoca el camp electrostàtic $\vec{E}(\vec{r})$ a tota la regió, ja que ambdós es relacionen mitjançant l'operació **gradient**:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \tag{254}$$

Quan un camp electrostàtic $\vec{E}(\vec{r})$ extern afecta una regió on hi ha un **material dielèctric** (no conductor) es produeix la **polarització** $\vec{P}$ del material, és a dir, una redistribució de les càrregues elèctriques internes del material de manera que el camp elèctric "efectiu" en el seu interior es redueix. Els efectes d'aquesta polarització sobre el camp elèctric s'engloben dins del concepte de **permitivitat elèctrica** del material (ε).

Si el material és **conductor**, atès que les càrregues elèctriques s'hi poden moure amb llibertat, el camp elèctric en el seu interior és $\vec{\boldsymbol{E}} = 0$. Això implica, per tant, que el potencial electrostàtic és constant ($V = constant$).

Les càrregues en moviment i, per extensió, els corrents elèctrics generen un **camp magnètic induït**. De forma anàloga al camp electrostàtic, podem representar aquest camp magnètic mitjançant línies de camp i definir el **flux de camp magnètic** Φ_B com una mesura del nombre de línies de camp que travessen una superfície S determinada.

La **llei de Gauss per al camp magnètic** enuncia que el balanç de flux sobre qualsevol superfície tancada és sempre zero. Aquest fet implica que, a diferència del camp electrostàtic, no existeixen "càrregues magnètiques" on puguin començar o acabar les línies de camp:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{255}$$

El teorema de Gauss, tant per al camp elèctric com magnètic, es pot expressar en forma diferencial mitjançant el concepte matemàtic de la **divergència**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{256}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{257}$$

La **llei d'Ampère-Maxwell** relaciona el camp magnètic amb les seves causes: els corrents elèctrics i els corrents de desplaçament. Per al buit és:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \right) \tag{258}$$

La **llei d'inducció de Faraday** explica la generació de camps elèctrics a partir de camps magnètics variables:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{259}$$

La llei d'Ampère-Maxwell i la llei d'inducció de Faraday també es poden escriure en forma diferencial mitjançant el concepte matemàtic del **rotacional**:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{260}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \tag{261}$$

Quan un camp magnètic extern ($\vec{B}_0$) actua sobre una regió on hi ha un cert medi material, es produeix la **magnetització** del material ($\vec{M}$). Aquesta magnetització produeix un camp magnètic addicional que cal considerar a l'hora de determinar el camp magnètic "real" o "efectiu" $\vec{B}$. La relació entre $\vec{B}_0$ i $\vec{B}$ ve determinada per la **permitivitat magnètica relativa** del material (μ_r). Els valors d'aquesta constant varien molt entre els diferents medis materials segons el seu comportament magnètic. Els tipus de materials magnètics més habituals són els diamagnètics, els paramagnètics i els ferromagnètics.

L'observació conjunta de les lleis que determinen les propietats dels camps elèctric i magnètic permeten deduir-ne un cert paral·lelisme i una estreta relació entre tots dos fenòmens. Expressades en la seva forma diferencial, es converteixen en les **lleis de Maxwell per a l'electromagnetisme**:

Lleis de Maxwell per a l'electromagnetisme en el buit

Forma diferencial		**Forma integral**	
1a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (262)	**Llei de Gauss per al camp elèctric**	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (266)
2a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (263)	**Llei de Gauss per al camp magnètic**	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ (267)
3a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (264)	**Llei d'inducció de Faraday**	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ (268)
4a. llei de Maxwell	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (265)	**Llei d'Ampère-Maxwell**	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ (269)

Un cas particular interessant per al qual val la pena analitzar les equacions és aquell en què no hi ha cap càrrega ni corrent elèctric. En aquest cas particular podem observar que l'única "font" de camp elèctric és la variació de camp magnètic i a l'inrevés. Aquesta interrelació entre els camps elèctric i magnètic indica que en realitat es tracta d'una única interacció: l'electromagnetisme. L'energia associada a aquesta interacció conjunta és l'energia electromagnètica. Aquesta energia i la seva propagació es determinen mitjançant el **vector de Poynting**.

A partir de les lleis de Maxwell es dedueix que l'energia electromagnètica es propaga mitjançant ones electromagnètiques. Les expressions per a una ona harmònica plana són:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)} \tag{270}$$

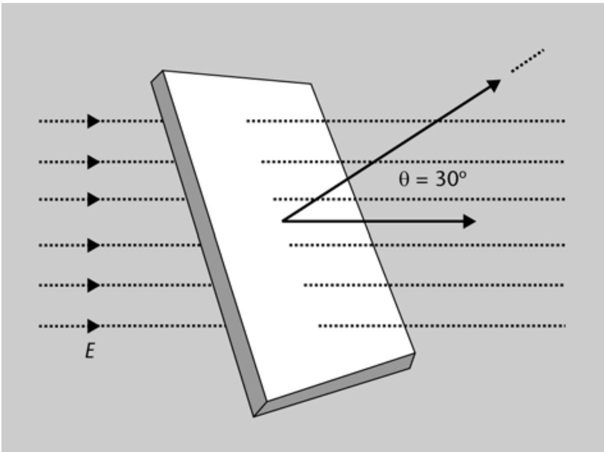
$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{j\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)} \tag{271}$$

El vector $\vec{k}$ és la constant d'ona i indica la direcció de propagació, que és perpendicular tant a $\vec{E}$ com a $\vec{B}$.

Exercicis d'autoavaluació

1. El flux de camp elèctric degut a un camp de mòdul $E = 2 \cdot 10^3$ N/C que travessa una superfície quadrada de 10^{-4} m^2 que es troba orientada amb un angle de $\theta = 30°$ amb la direcció del camp elèctric, tal com es mostra a la figura 34, val...
a) $\Phi_E = 2{,}0$ Nm^2/C
b) $\Phi_E = 0{,}17$ Nm^2/C.
c) $\Phi_E = 0{,}10$ Nm^2/C.
d) Totes les respostes anteriors són falses.

Figura 34



2. Si tenim una càrrega Q situada en el centre d'una esfera imaginària de radi R, el flux de camp elèctric total a través de la superfície de l'esfera...
a) sempre és 0 perquè es tracta d'una superfície tancada.
b) és proporcional a la càrrega Q però no depèn del valor del radi R.
c) és proporcional a Q i també és proporcional a R.
d) és proporcional a Q però també és proporcional al quadrat del radi R, ja que la superfície d'una esfera és $S = 4\pi R^2$.

3. En una regió de l'espai, el camp elèctric és $\vec{E}(\vec{r}) = 0$ en tots els punts. Això vol dir que...
a) el potencial és $V(\vec{r}) = 0$ en tots els punts de la regió.
b) el potencial $V(\vec{r})$ és constant en tots els punts de la regió.
c) les dues respostes anteriors són possibles.
d) el potencial pot ser tant constant com variable, atès que el potencial no depèn del camp elèctric.

4. En una regió de l'espai hi ha un potencial elèctric $V(\vec{r}) = x + 2y + 3z$ (V). El camp elèctric en aquesta regió...

a) és uniforme i igual a $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ N/C .

b) és uniforme i igual a $E(\vec{r}) = 6$ N/C.

c) ha de ser variable perquè el potencial també ho és.

d) Totes les respostes anteriors són falses.

5. Suposem dos medis materials amb permitivitats elèctriques relatives respectives $\varepsilon_{r1} = 2$ i $\varepsilon_{r2} = 4$. El camp elèctric generat per una distribució de càrrega qualsevol que es trobés en el medi 2...
a) seria el doble del que tindríem en el medi 1 i quatre vegades més gran que en el buit.
b) seria la meitat del que tindríem en el medi 1 i quatre vegades més petit que en el buit.
c) seria el doble del que tindríem en el medi 1 i la meitat del que tindríem en el buit.
d) seria la meitat del que tindríem en el medi 1 i el doble del que tindríem en el buit.

6. Un imant s'introdueix de forma parcial dins d'una superficie tancada S, de tal manera que una part de l'imant es troba fora i l'altra es troba a dins. El flux de camp magnètic Φ_B que travessa S...
a) és $\Phi_B = 0$, atès que es tracta d'una superfície tancada.
b) depèn de les característiques de l'imant (geometria, magnetització, etc.).
c) depèn de quina fracció de l'imant es troba fora i quina es troba a dins.
d) depèn de la permeabilitat magnètica tant de l'imant com del medi material de l'interior d'S.

7. La divergència del camp magnètic ($\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$)...
a) depèn de la permeabilitat magnètica (μ) del medi.
b) és sempre zero, ja que el camp magnètic sempre és uniforme.
c) és sempre zero, ja que no existeixen "càrregues magnètiques".
d) en general és zero, però pot ser diferent de zero si el camp magnètic no és uniforme.

8. Una càrrega positiva q es troba en repòs a la posició $\vec{r} = (0, 0, 0)$. Quan s'hi aplica un camp magnètic $\vec{B} = 5\vec{i}$, la càrrega...
a) s'accelera cap a la direcció x.
b) s'accelera cap a la direcció y.
c) s'accelera cap a la direcció z.
d) no s'accelera.

9. Una càrrega negativa $-q$ es desplaça al llarg de l'eix x amb una velocitat $\vec{v}$ per una regió on existeix un camp magnètic $\vec{B}$ que apunta en la direcció de l'eix y. La força magnètica experimentada per la càrrega és...

a) $\vec{F} = -qvB\vec{k}$

b) $\vec{F} = qvB\vec{k}$

c) $\vec{F} = qvB\sin 45°\vec{k}$

d) $\vec{F} = 0$

10. Un cert camp vectorial $\vec{v}(\vec{r})$ presenta sempre components radials. Això vol dir que...
a) el seu gradient sempre és 0.
b) la seva divergència és 0.
c) el seu rotacional és 0.
d) Totes les respostes anteriors són falses.

11. Un solenoide genera un cert camp magnètic $\vec{B}$ en el seu interior. Si introduïm un material diamagnètic en el seu interior, el camp magnètic $\vec{B}$:
a) continua tenint la mateixa direcció i sentit però augmenta en mòdul.
b) continua tenint la mateixa direcció i sentit però disminueix en mòdul.
c) continua tenint la mateixa direcció però ara en sentit oposat.
d) Totes les respostes anteriors són falses.

12. Sotmetem un material ferromagnètic inicialment desmagnetitzat $\left(\vec{M} = 0\right)$ a un camp magnètic en un sentit fins que el material es magnetitza completament, és a dir, fins que la magnetització és màxima. Per tal de desmagnetitzar-lo, és a dir, fer que la magnetització torni a ser 0 $\left(\vec{M} = 0\right)$, ...
a) seria suficient amb eliminar completament el camp magnètic inicial, ja que aquest n'és la causa.
b) caldria eliminar completament el camp magnètic inicial i aplicar-ne un altre de la mateixa magnitud en sentit oposat.
c) caldria eliminar el camp magnètic inicial i aplicar-ne un altre amb una magnitud igual al valor de la coercitivitat del material però en sentit oposat.
d) no caldria eliminar el camp magnètic inicial ni canviar-ne el sentit, seria suficient amb reduir-ne la magnitud fins a un valor igual a la coercitivitat del material.

13. La llei d'inducció de Faraday es pot expressar en forma diferencial i es converteix en...

a) la primera llei de Maxwell ($\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$).

b) la segona llei de Maxwell ($\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$).

c) la tercera llei de Maxwell ($\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$).

d) la quarta llei de Maxwell ($\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$).

14. El mòdul del camp magnètic en una certa regió és $\|\vec{B}\| = 5$. En absència de càrregues i corrents elèctrics, el mòdul del camp elèctric seria...

a) $\|\vec{E}\| = c5$

b) $\|\vec{E}\| = c/5$

c) $\|\vec{E}\| = 5/c$

d) $\|\vec{E}\| = 25/c^2$

15. En una ona electromagnètica, el camp elèctric $\vec{E}$ oscil·la en la direcció $1\vec{i} - 1\vec{j}$ i el camp magnètic $\vec{B}$ ho fa en la direcció $1\vec{i} + 1\vec{j}$. La direcció de propagació de l'ona serà...

a) $\vec{i}$

b) $\vec{j}$

c) $\vec{k}$

d) Totes les respostes anteriors són falses.

Solucionari

1. b; **2.** b; **3.** c; **4.** a; **5.** b; **6.** b; **7.** c; **8.** d; **9.** a; **10.** c; **11.** b; **12.** c; **13.** c; **14.** a; **15.** c

Glossari

camp de desplaçament elèctric *m* Camp vectorial definit per a tenir en compte només el camp elèctric produït per les càrregues lliures, les no produïdes en el fenomen de la polarització elèctrica. El camp de desplaçament elèctric es relaciona amb el camp electrostàtic a través de la permitivitat del medi.

camp d'inducció magnètica *m* Entitat matemàtica que s'utilitza per a concentrar, amb una sola expressió, tota la informació magnètica d'un sistema de càrregues en moviment. En un camp vectorial.

camp electrostàtic *m* Entitat matemàtica que s'utilitza per a concentrar, amb una sola expressió, tota la informació electrostàtica d'un sistema de càrregues. En un camp vectorial.

camp magnètic *m* Denominació amb què sovint es fa referència, per abús del llenguatge, al camp d'inducció magnètica. Camp vectorial definit per a tenir en compte només els corrents lliures. No té en compte la magnetització. Es relaciona amb el camp d'inducció magnètica a través de la permeabilitat del medi.

càrrega elèctrica *f* Propietat que tenen algunes partícules fonamentals, que els confereix la possibilitat d'interaccionar amb altres partícules que també tinguin aquesta propietat. La interacció és de tipus electromagnètic.

conductor *m* Material en el qual, a causa de la seva estructura microscòpica, pot haver-hi càrregues lliures que en presència d'un camp elèctric es veuran afectades de manera que el material serà capaç de conduir corrent elèctric.

corrent elèctric *m* Moviment aproximadament continu de càrregues elèctriques per mitjà d'un fil, superfície o volum.

densitat de càrrega *f* Quantitat de càrrega elèctrica per unitat de longitud, superfície o volum quan es troba distribuïda al llarg d'una línia, superfície o volum.

dielèctric *m* Material en el qual, a causa de la seva estructura microscòpica, les càrregues que hi ha estan fortament lligades i no es poden moure lliurement.

energia electrostàtica *f* Energia deguda a la presència d'un camp electrostàtic o a la presència de càrregues (estàtiques) en una certa regió de l'espai.

flux de camp *m* Magnitud que mesura la quantitat de línies de camp que travessa una determinada superfície. Depèn del valor del camp, de l'àrea de la superfície i de l'orientació relativa entre aquests dos elements.

fem induïda *f* Diferència de potencial o tensió que es genera en un circuit tancat quan el flux de camp magnètic que travessa la superfície imaginària que dibuixa és variable en funció del temps. La força electromotriu induïda també es pot generar sense la necessitat d'un cable.
sin. **força electromotriu induïda**

força electromotriu induïda *f*
sin. **fem induïda**

força electrostàtica *f* Força que experimenta una càrrega o un sistema de càrregues quan es troba en una regió on existeix un camp elèctric.

força magnètica *f* Força que experimenta una càrrega o un sistema de càrregues en moviment quan es troba en una regió on existeix un camp magnètic.

histèresi magnètica *f* Propietat que tenen alguns materials magnètics, especialment els ferromagnètics, segons la qual les propietats magnètiques d'aquests materials depenen de la seva història magnètica.

imantació *f* Procés pel qual els corrents microscòpics en un material magnètic s'orienten de la mateixa manera i provoquen una reacció macroscòpica en el material.

intensitat de corrent *f* Magnitud que indica la quantitat de càrrega que travessa una determinada superfície durant un cert temps.

interacció electromagnètica *f* Una de les quatre interaccions fonamentals de la natura.

línies de camp *f pl* Línies imaginàries que serveixen per a representar un camp i donar una idea qualitativa de la seva direcció i intensitat en qualsevol punt de la regió representada.

llei d'Ampère-Maxwell *f* Llei que relaciona la circulació d'un camp magnètic a través d'una línia tancada amb les seves causes.

llei d'inducció de Faraday *f* Llei que relaciona la variació de flux magnètic amb la força electromotriu induïda.

magnetització *f* Mesura de la direcció i la intensitat, per unitat de volum, dels moments dipolars magnètics induïts per les partícules carregades dels àtoms d'un material, com a resposta a un camp magnètic extern.

material diamagnètic *m* Material magnètic que reacciona, en presència d'un camp magnètic extern, de manera que es crea una magnetització molt feble i amb sentit oposat al del camp magnètic aplicat.

material ferromagnètic *m* Material magnètic que reacciona, en presència d'un camp magnètic extern, de manera que es crea una magnetització molt intensa i amb el mateix sentit que el camp magnètic aplicat. Els materials ferromagnètics, a més, poden presentar una magnetització romanent un cop desapareix el camp magnètic extern i una certa histèresi magnètica.

material paramagnètic *m* Material magnètic que reacciona, en presència d'un camp magnètic extern, de manera que es crea una magnetització molt feble i amb el mateix sentit que el camp magnètic aplicat.

permeabilitat magnètica *f* Propietat dels medis materials que dóna compte de les seves propietats magnètiques. En el valor de la permeabilitat es concentren tots els efectes microscòpics relacionats amb el camp magnètic.

permitivitat elèctrica *f* Propietat dels medis materials que dóna compte de les seves propietats elèctriques. En el valor de la permitivitat es concentren tots els efectes microscòpics relacionats amb el camp elèctric.

ona *f* Pertorbació que es propaga per l'espai i el temps, amb transport d'energia però sense transport net de matèria.

ona electromagnètica *f* Ona que propaga energia electromagnètica.

polarització elèctrica *f* Efecte que es produeix en un material dielèctric degut a l'orientació dels dipols microscòpics que constitueixen aquest material quan es troba en una regió on existeix un camp elèctric.

potencial electrostàtic *m* Magnitud escalar que mesura l'energia per unitat de càrrega que hi ha en un cert punt de l'espai. Es pot considerar també com una funció matemàtica que indica l'energia "en potència" d'un punt de l'espai.

teorema de Gauss *m* Teorema fonamental de l'electromagnetisme que relaciona el flux de camp a través d'una superfície tancada amb la càrrega que hi ha dins d'aquesta superfície. Quan es tracta d'un camp magnètic, el teorema de Gauss enuncia que aquest flux ha de ser zero, atès que no existeixen "càrregues magnètiques".

Bibliografia

Feynman, R. P.; Leighton, R. B.; Sands, M. (1987). *Física. Electromagnetismo y materia* (vol. II). Pearson Addison Wesley.

Lorrain, P.; Corson, D. (1972). *Campos y ondas electromagnéticos*. Madrid: Selecciones Científicas.

Reitz, R.; Milford, F. J.; Christy, R. W. (1996). *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Pearson Addison Wesley.

Sears, F. W.; Zemansky, M. W.; Young, H. D.; Freedman, R. A. (1996). *Física Universitaria* (11a. ed., 2 vol.). Pearson Addison Wesley.

Wangsness, R. K. (1996). *Campos electromagnéticos* (1a. ed.). Mèxic: Limusa.