Disseny i anàlisi de filtres en processament d'àudio

Marta Ruiz Costa-jussà
Helenca Duxans Barrobés

PID_00188049

UOC
Universitat Oberta de Catalunya

Els textos i imatges publicats en aquesta obra estan subjectes –llevat que s'indiqui el contrari– a una llicència de Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 Espanya de Creative Commons. Podeu copiar-los, distribuir-los i transmetre'ls públicament sempre que en citeu l'autor i la font (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), no en feu un ús comercial i no en feu obra derivada. La llicència completa es pot consultar a http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.ca

Índex

Introducció 5

Objectius 6

1. Concepte i tipus de filtres. Per què s'ha d'aprendre com funciona un filtre? 7

2. Conceptes bàsics per al disseny de filtres digitals 11
- 2.1. Caracterització d'un filtre: resposta impulsional i funció de transferència 11
- 2.2. Especificació de l'entrada-sortida d'un filtre: equacions en diferències finites 15

3. Filtres reals: plantilla d'especificació d'un filtre 19

4. Disseny de filtres digitals 22
- 4.1. Disseny de filtres FIR 22
  - 4.1.1. Mètode de finestres 22
  - 4.1.2. Mètode de Parks-McClellan 26
- 4.2. Disseny de filtres IIR 29
  - 4.2.1. Transformació bilineal 30
  - 4.2.2. Disseny de filtres analògics: breu resum 31
  - 4.2.3. Transformació bilineal i teoria de filtres analògics 33

5. De la teoria a la pràctica 35
- 5.1. L'elecció d'un filtre FIR o IIR. Quan hem d'utilitzar l'un o l'altre? 35
- 5.2. Cas pràctic: disseny d'un filtre des de zero amb l'Audacity i amb el Matlab 36
  - 5.2.1. Cas 1. Filtratge d'un senyal d'àudio utilitzant l'Audacity 36
  - 5.2.2. Cas 2. Filtratge d'un senyal d'àudio utilitzant el Matlab 36

Annex 39

Introducció

L'objectiu principal d'aquest mòdul és explicar la **teoria bàsica de disseny de filtres digitals i analògics**. Concretament, es vol donar a l'estudiant la capacitat d'aprendre a utilitzar qualsevol **programari** de disseny de filtres i que així pugui dissenyar els seus propis filtres donades unes especificacions concretes. Així mateix, es combina la teoria i la pràctica del **disseny de filtres** amb l'estudi de diferents utilitats dels filtres digitals i analògics dins de l'àrea de processament del senyal d'àudio.

Objectius

Concretament, en acabar de treballar aquest mòdul, l'estudiant ha de:

1. Conèixer, saber dissenyar i interpretar la resposta impulsional que caracteritza un filtre.

2. Conèixer els paràmetres de disseny d'un filtre: banda de pas i d'atenuació, entre d'altres.

3. Diferenciar entre filtratge analògic i digital.

4. Conèixer diferents mètodes per a dissenyar els filtres digitals i analògics.

5. Tenir la capacitat, donada una aplicació que requereixi filtratge digital, per a escollir el tipus de filtres digitals (FIR/IIR) més adequat segons les especificacions en mòdul i fase del sistema.

1. Concepte i tipus de filtres. Per què s'ha d'aprendre com funciona un filtre?

Un filtre, genèricament parlant, és un sistema que discrimina part de l'objecte que processa, segons un atribut o més. Per exemple, un filtre d'aire deixa passar l'aire però impedeix el pas a les partícules de pols presents a l'aire. Un filtre en processament de senyal és un concepte molt ampli ja que pot ser qualsevol sistema que tracti el senyal. Ens centrarem en els sistemes o filtres que, donat qualsevol senyal, permeten el pas d'un conjunt determinat de freqüències i atenuen o eliminen la resta.

Partint de la mateixa definició de *filtre*, podem definir els tipus clàssics de filtre següents:

- Un filtre **passabaix** permet el pas de les freqüències baixes i atenua les freqüències altes.

  Exemple

  Per exemple, una paret fa de filtre passabaix quan sentim la música que ve d'una altra habitació. Com que les freqüències altes (és a dir, els sons aguts) tendeixen a reflectir-se sobre qualsevol superfície rígida (per exemple, les parets), a la nostra habitació aquestes freqüències hi arriben atenuades i només sentim les freqüències baixes o greus de la música original. Per tant, el senyal original (la música) ha estat filtrat passabaix.

- Un filtre **passaalt** permet el pas de freqüències altes i atenua les freqüències baixes. Es poden utilitzar per a fer que les freqüències altes d'un senyal d'àudio vagin a uns altaveus per a sons aguts.

- Un filtre **passabanda** permet el pas de freqüències d'una determinada banda de freqüències, eliminant les freqüències baixes i altes. Trobem filtres passabanda en la transmissió i recepció del senyal, per a eliminar el contingut freqüencial que no es troba en la banda del senyal que s'ha de transmetre.

- Un filtre de **banda eliminada** és complementari al filtre passabanda, perquè elimina les freqüències d'una determinada banda de freqüències, i deixa passar les freqüències que hi ha fora d'aquesta banda. S'utilitzen freqüentment en equalitzadors.

Nota

Un equalitzador processa senyals d'àudio i és capaç de modificar l'amplitud de les freqüències, entre altres característiques. A la pràctica s'utilitza per a adaptar el so a les necessitats de l'oient.

La figura 1 mostra un exemple ideal de cadascun d'aquests filtres:

Representació freqüencial d'alguns filtres ideals

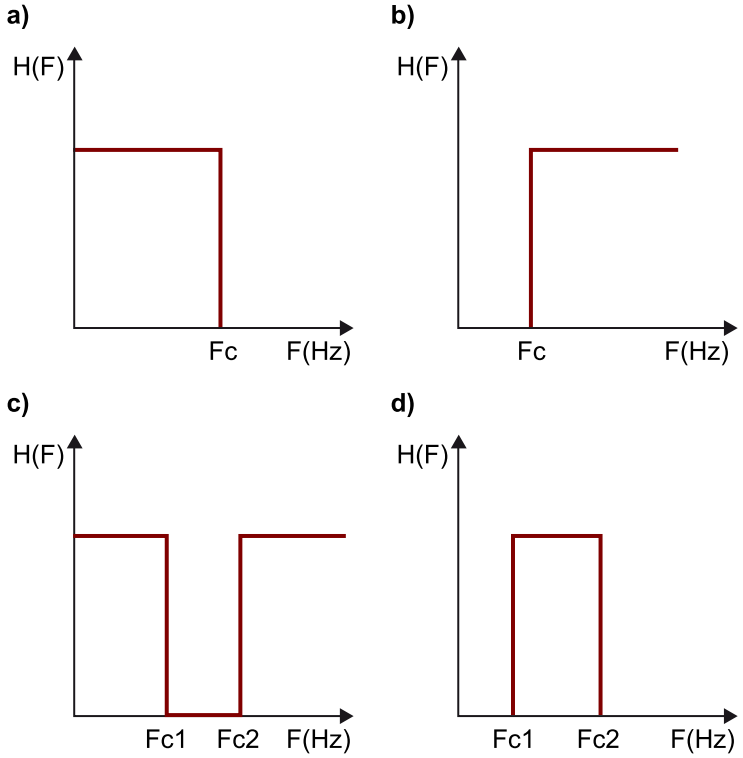

Figura 1. Representació freqüencial dels filtres ideals següents: **a)** passabaix; **b)** passaalt; **c)** de banda eliminada; **d)** passabanda. Els filtres són simètrics respecte a l'eix d'ordenades.

La figura 1 mostra el mòdul dels filtres ideals. Respecte a la fase, un filtre ideal té la fase lineal. Això vol dir que la fase de la resposta del filtre és una funció lineal de la freqüència. Per tant, el senyal filtrat no té distorsió de fase.

El concepte de fase lineal i no lineal el teniu explicat detalladament a la pàgina 428 i següents del llibre *Señales y sistemas*, d'A. V. Oppenheim i A. S. Willsky.

Sense ser-ne conscients, en el dia a dia, constantment topem amb filtres acústics, tant si són **analògics** (tracten senyals de variable contínua, com ara t) com **digitals** (tracten senyals de variable discreta, com ara n, o dit d'una altra manera, llistes de nombres ordenats). Per exemple, quan parlem per telèfon, les freqüències del senyal que es transmet es filtren a 4 kHz (si es tracta d'una línia analògica, el filtratge és analògic), i això és una limitació molt forta comparada amb el que l'orella humana és capaç de sentir (fins a 20 kHz). Per aquest motiu, escoltar un CD de música per la línia telefònica no és tan agradable com escoltar-lo directament. L'enregistrament del CD de música es filtra a 22 kHz per a assegurar que es manté tot el que l'orella humana pot sentir.

Els músics electrònics gairebé sempre utilitzen filtres digitals en cada peça de música que creen; per exemple, per a fer reverberació digital.

Reverberació

El concepte de reverberació s'estudia en el mòdul d'introducció a l'acústica. Breument, la reverberació és el fenomen acústic pel qual un receptor (oient) rep al mateix temps el so directe que emet un emissor (font acústica) i les reflexions d'aquest so produïdes per la sala on hi ha emissor i receptor, fet que millora la qualitat del so i crea una sensació de calidesa en l'oient.

Tanmateix, la reverberació és només un petit exemple de les capacitats dels filtres digitals. Hem de ser conscients que un filtre digital és capaç de manipular l'espectre d'un so, com veurem en el mòdul d'efectes d'àudio. Un objectiu d'aquesta assignatura és ajudar els estudiants a tenir una idea sobre les eines necessàries per a dissenyar filtres personalitzats.

Hi ha força programari disponible per al disseny de filtres digitals (a l'assignatura utilitzarem el Matlab o l'Octave). Ara bé, per a utilitzar el programari és essencial el coneixement teòric de la manera com funcionen els filtres digitals. Fins i tot en aplicacions estàndard, l'ús eficaç d'un programa de disseny de filtres requereix una comprensió dels paràmetres de disseny, que al mateix temps requereix una certa comprensió de la teoria de filtres.

Exemple

Vegem l'efecte de filtrar un so passabaix. Tenim un so d'un canari. La figura següent representa la forma d'ona en el temps i en freqüència.

(1)Per a passar d'una figura a l'altra hem utilitzat la transformada discreta de Fourier.

So de canari

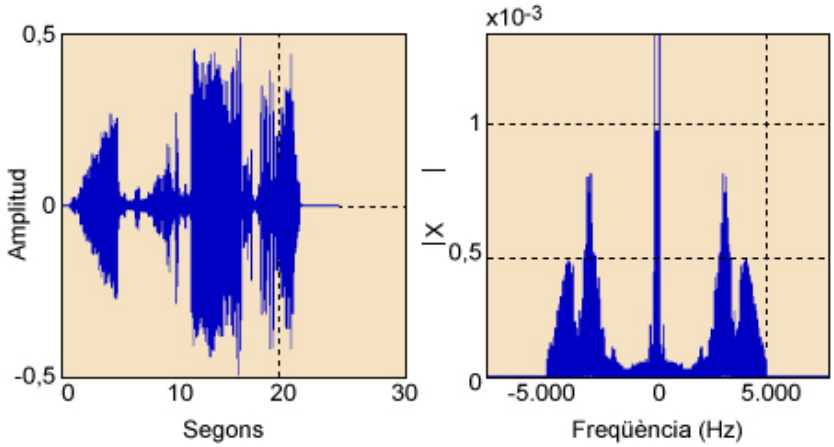

Figura 2. So de canari

Si ara filtrem[1] amb un passabaix a 2 kHz tenim els senyals següents:

So de canari filtrat

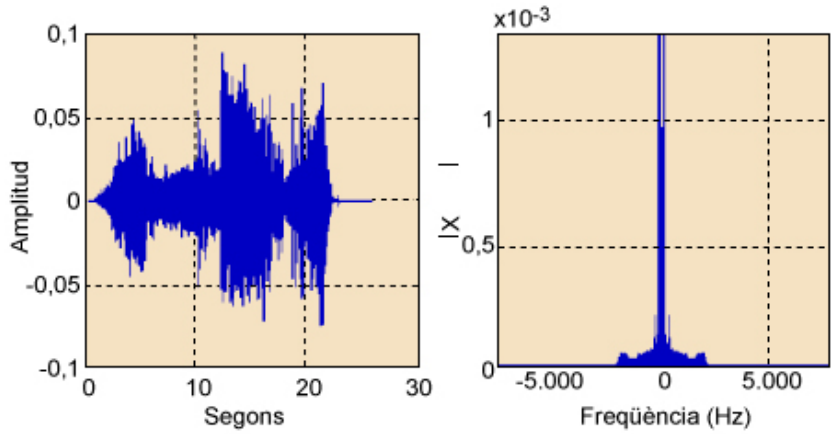

Figura 3. So de canari filtrat

Noteu que ara el so del canari s'ha suavitzat.

Com hem vist en l'apartat "Conversió AD i D/A: entorn analògic i entorn digital" del mòdul 1, a la naturalesa hi trobem senyals analògics, com és el cas de la veu humana; per això si els volem manipular amb ordinadors cal convertir-los en digitals –aquest procés s'anomena *conversió analògic-digital* (A/D). A continuació, una vegada s'ha manipulat el senyal digital, per exemple filtrant-lo, aquest senyal s'ha de tornar a convertir en senyal analògic –aquest pas s'anomena *conversió digital-analògic* (D/A). Per tant, podem dir que hi ha molts filtres digitals que treballen en un entorn analògic convertint els senyals analògics en digitals i, després de la manipulació amb l'ordinador, tornant-los a convertir en analògics.

2. Conceptes bàsics per al disseny de filtres digitals

Un **filtre digital clàssic** es pot definir com un sistema que modifica un senyal digital de manera que deixa passar un determinat interval de freqüències i n'atenua unes altres amb l'objectiu d'obtenir una sortida amb unes característiques determinades. Els filtres "clàssics" treballen en l'espai freqüencial i les plantilles es dissenyen en aquest espai.

Nota

Un senyal discret és un senyal mostrejat però no quantificat i un senyal digital és un senyal mostrejat i quantificat. Per exemple, un senyal discret és x = [0,1 0,4 0,9] i el mateix senyal digital és x_d = [0 0 1] (amb un pas de quantificació d'1).

Concretament, estudiarem els filtres digitals **realitzables** i, per això, aquests sistemes han de verificar certes propietats: la linealitat, la invariància en el temps, la causalitat i l'estabilitat.

Vegeu també

Hem vist la definició de sistema en l'apartat "Definició de sistema" del mòdul "Conceptes de senyals i sistemes".

2.1. Caracterització d'un filtre: resposta impulsional i funció de transferència

Com hem dit (i com hem vist a les assignatures de *Senyals i sistemes I i II*), en el domini temporal, la resposta impulsional relaciona l'entrada i la sortida d'un sistema lineal i invariant en el temps (SLIT).

Si parlem de sistemes digitals, que és el domini que tractarem més (és a dir, filtres digitals), la sortida és la suma de convolució entre l'entrada $x[n]$ i la resposta impulsional $h[n]$.

Aquesta relació la veiem representada a l'equació i figura següents:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Lectura recomanada

Trobareu més informació sobre la suma de convolució a les pàgines 77 a 90 del llibre *Señales y sistemas*, d'A. V. Oppenheim i A. S. Willsky.

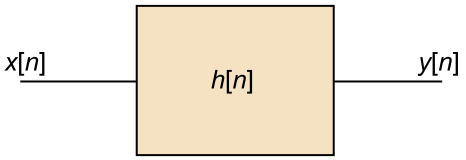

Figura 4. Relació genèrica d'entrada i sortida d'un sistema digital $h[n]$ amb entrada $x[n]$ i sortida $y[n]$

Referències

Pel que fa a la transformada Z i a la transformada discreta de Fourier, vegeu l'apartat "Transformació del domini temporal al domini freqüencial" del mòdul 1.

Trobareu més informació sobre mòdul i fase a les pàgines 427 a 430 del llibre *Señales y sistemas*, d'A. V. Oppenheim i A. S. Willsky.

El principal avantatge d'un filtre lineal i invariant, d'ara endavant **SLTI** (sistema lineal i invariant en el temps o *linear time invariant system*), és que es pot caracteritzar per la **resposta impulsional** en el domini del temps i per la funció de transferència en el domini Z. Només els filtres SLTI verifiquen la **propietat de superposició (propietat de linealitat)**: així, podem assegurar que, amb un filtre SLTI, el filtratge d'una suma de senyals d'àudio es pot obtenir com la suma de cada senyal filtrat per separat. D'altra banda, les propietats de causalitat i estabilitat permeten que el filtre sigui realitzable. Per tant, els filtres representats en la figura 1 són filtres **ideals** o **no realitzables**, ja que la resposta impulsional és no causal i inestable.

Així, doncs, en el domini Z, la funció de transferència $H(z)$ relaciona l'entrada i la sortida d'un sistema LTI. Per tant, la funció de transferència és la transformada Z de la resposta impulsional:

$$y[n] = x[n] * h[n] \xrightarrow{\text{TZ}} Y(z) = X(Z)H(Z)$$

$$H(Z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

Finalment, en el domini freqüencial, que és una particularització del domini Z, la resposta freqüencial és la transformada de Fourier de seqüències discretes (TFSD) de la resposta impulsional:

$$H(f) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] e^{-j2\pi f n}$$

Recordeu

Estem utilitzant la variable f per a indicar freqüència discreta, i equival, per tant, a la freqüència analògica normalitzada per la freqüència de mostreig.

En el cas dels filtres, la resposta impulsional i la funció de transferència que tenen determinen els conceptes següents:

- El guany ($G(f)$) es defineix com l'amplificació del senyal de sortida respecte a l'entrada. Si aquesta amplificació és negativa parlem d'atenuació:

$$G(f) = 10 log \frac{|H(f)|^2}{H_{ref}^2}$$

- La resposta en amplitud d'un filtre es defineix com el mòdul de la resposta freqüencial del filtre:

$$A(f) = |H(f)|$$

Així, doncs, la resposta en amplitud d'un filtre ideal és 1 a la banda de pas i 0 a la banda atenuada.

- La resposta en fase d'un filtre es defineix com la fase de la resposta impulsional:

$$\theta(f) = \angle H(f)$$

- L'ordre d'un filtre és el nombre de coeficients que té un filtre i coincideix amb el màxim retard (en termes de mostres) que s'utilitza o del senyal d'entrada o de sortida anteriors per a calcular $y[n]$.
  Així mateix, l'ordre d'un filtre es pot definir com l'ordre de la resposta impulsional. I a la vegada l'ordre d'un polinomi es defineix com el valor més alt de l'exponent del mateix polinomi.
  En el cas d'una funció racional, l'ordre es defineix com el màxim entre l'ordre del polinomi del numerador i el del denominador.

Així, per exemple, un filtre definit per a l'equació següent té ordre 3:

$$y[n] = x[n] + x[n-1] - y[n-3]$$

- La banda de pas d'un filtre és el rang de freqüències que el filtre deixa passar de l'entrada a la sortida amb una atenuació, per exemple, més petita de 3 dB, o guany $G(f) = -3$ dB (aquest valor es pren per convenció i pot variar depenent de les especificacions del sistema). I la banda atenuada és la complementària. Per extensió, les freqüències de pas i d'atenuació defineixen el rang de banda de pas i atenuada. En el cas d'un filtre ideal la freqüència de pas i atenuació coincideixen en la freqüència de tall. Vegem la figura següent:

Nota

La f no va en hertzs. Recordeu que és la freqüència analògica normalitzada i es pot dir que $f \leq 0{,}5$).

Banda de pas i atenuada en un filtre passabaix ideal

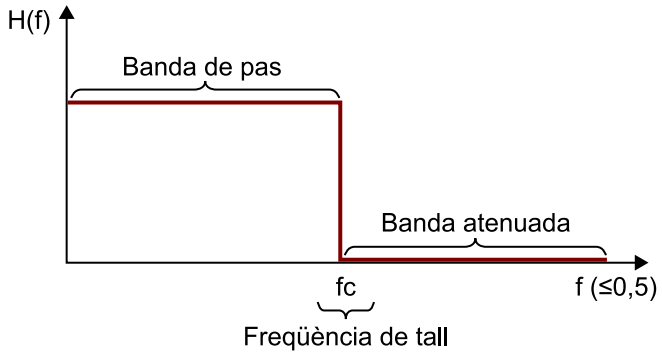

Figura 5. Banda de pas i atenuada en un filtre passabaix ideal

Definicions

Un **decibel** (dB) es pot definir com una mesura logarítmica de potència en relació amb una potència patró. Bàsicament, dit d'una altra manera, és una unitat no dimensional que representa la relació entre un senyal d'interès i un senyal de referència. Un dB es basa en un logaritme de base 10 del quocient entre les dues magnituds.

La **freqüència de tall** d'un filtre és la freqüència a partir de la qual el senyal de sortida s'atenua significativament. Normalment, es considera que el senyal d'entrada s'ha d'atenuar un valor de 3 dB (o 3 dB si parlàvem de guany). La relació entre guany i atenuació és donada per $At(f) = -G(f)$.

La resposta freqüencial és caracteritzada pel seu mòdul $|H(f)|$ i fase $\theta_h(f)$: $H(f) = |H(f)|e^{j\theta_h(f)}$. En un cas genèric, si tenim el senyal en freqüència d'entrada $X(f)$ i el filtre anterior, llavors el mòdul i la fase del senyal de sortida ($Y(f)$) són els següents:

$$Y(f)| = |H(f)||X(f)|$$

$$\theta_y(f) = \theta_h(f) + \quad \theta_x(f)$$

El mòdul $|H(f)|$ determina el guany del filtre (recordeu la definició de *guany*) i la fase $\theta_h(f)$ determina el retard del filtre. Una propietat molt important relacionada amb la fase de la resposta del filtre és el retard de grup:

$$\tau_g = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta}{df}$$

El retard de grup avalua el senyal de sortida respecte al d'entrada en mostres per cada freqüència. Per tant, s'avalua el retard global que experimenta un senyal. Si el retard de grup és constant, vol dir que la fase és lineal (el sistema retarda totes les freqüències de la mateixa manera). En cas que el retard de grup sigui diferent segons la freqüència es produeix una distorsió en l'espectre del senyal.

Si el **mòdul és constant** (H_0) i la **fase és lineal en freqüència** ($f \cdot m$) tenim la relació entrada-sortida següent:

$$Y(f) = H(f)X(f) = H_0 e^{-j2\pi f m} X(f)$$

A la vegada veiem que el senyal de sortida en el temps és el senyal d'entrada retardat m i multiplicat per H_0 (aplicant propietats de la TFSD).

$$y[n] = H_0 x[n-m]$$

En aquestes condicions específiques, es verifica que el **senyal d'entrada no canvia de forma**.

Absència de canvi de forma

El fet que el senyal d'entrada no canviï de forma vol dir que totes les freqüències que conformen el senyal es retarden de la mateixa manera. Recordem que això significa que el retard de grup és constant i la fase és lineal.

Exemple

Vegem un cas particular. Si prenem el senyal discret d'entrada $x[n] = \sin(2\pi f n + \varphi)$ i el passem pel filtre $H(f)$ a la sortida tenim:

$$y[n] = |H(f)|\sin\left(2\pi f n + \varphi + \theta_h(f)\right) = |H(f)|\sin\left(2\pi f\left(n + \frac{\theta_h(f)}{2\pi f}\right) + \varphi\right)$$

en què $\frac{\theta_h(f)}{2\pi f}$ és el retard de fase. Comprovem que perquè es verifiqui $|H(f)|$ ha de ser constant i $\theta_h(f)$ ha de ser lineal. La figura següent mostra un exemple de la influència d'un filtre en amplitud i retard sobre un senyal sinusoïdal:

Sinus a l'entrada i sortida del filtre

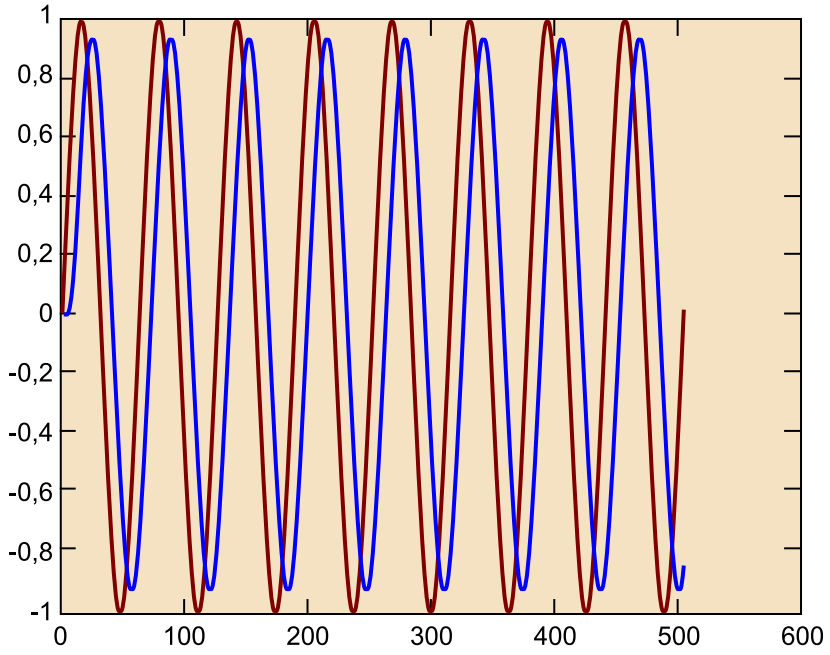

Figura 6. Sinus a l'entrada del filtre, és a dir, abans d'aplicar-hi un filtre (vermell). Sinus a la sortida del filtre, és a dir, després d'aplicar-hi el filtre (blau). La sortida queda lleugerament atenuada i retardada. L'eix *X* són mostres i l'eix *Y*, amplitud.

Aquesta propietat de mantenir el senyal d'entrada sense distorsió (sense que el senyal canviï de forma), a la pràctica ens pot interessar molt. Ara bé, hem de tenir present que, perquè un sistema causal amb resposta impulsional real i funció de transferència racional tingui **fase lineal**, la **resposta impulsional ha de ser simètrica o antisimètrica (respecte a la seva mostra central) i finita**.

Referència bibliogràfica

Vegeu-ne la demostració a:

J. G. Proakis; D. G. Manolakis (2007). *Tratamiento digital de señales*. Madrid: Pearson Prentice Hall.

2.2. Especificació de l'entrada-sortida d'un filtre: equacions en diferències finites

Una manera directa per a descriure la relació entrada-sortida[2] d'un filtre causal és mitjançant una **equació en diferències finites**.

(2)Per a veure gràficament la relació entrada-sortida d'un filtre causal vegeu la figura 7 en aquest mateix apartat.

Aquesta equació és una fórmula per a calcular la mostra *n* de sortida que depèn de mostres d'entrada presents i passades (en el domini del temps). Una equació genèrica en diferències finites es pot escriure com segueix:

Informació complementària

Trobareu més informació referent a les equacions en diferències finites a les pàgines 120 a 124 del llibre *Señales y sistemas*, d'A. V. Oppenheim i A. S. Willsky.

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \ldots + b_M x[n-M] - a_1 y[n-1] - \ldots - a_N y[n-N]$$

que, compactada en sumatoris, s'escriu:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M} b_i x[n-i] - \sum_{i=1}^{N} a_i y[n-i]$$

en què $x[n]$ és el senyal discret d'entrada i $y[n]$ és el senyal de sortida, i les constants b_i $(i = 0,1,2\ldots, \quad M)$ i a_i $(i = 1,2\ldots, \quad N)$ són el nombre de coeficients del filtre.

Si analitzem aquestes equacions en el domini Z, obtindrem la funció de transferència:

$$y[n] = x[n] * h[n] \overset{\text{TZ}}{\Rightarrow} \; Y(z) = X(Z)H(Z)$$

$$H(Z) = \frac{Y(z)}{X(Z)}$$

Sabem que:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M} b_i x[n-i] - \sum_{i=1}^{N} a_i y[n-i] \overset{\text{TZ}}{\Rightarrow} \; Y(z) = \sum_{n=0}^{M} b_n X(z) z^{-n} - \sum_{n=1}^{N} a_n Y(z) z^{-n}$$

Llavors:

$$Y(z)(1 + \sum_{n=1}^{N} a_n z^{-n}) = \sum_{n=0}^{M} b_n X(z) z^{-n}$$

Per tant:

$$H(Z) = \frac{Y(z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^{N} a_n z^{-n}}$$

La funció de transferència es pot reformular en termes de les arrels dels polinomis numerador i denominador de la manera següent:

Nota

Podeu veure el vídeo "Arrels d'un polinomi".

$$H(Z) = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^{P} a_n z^{-n}} = \frac{b_0 \prod_{n=0}^{M} (1 - z_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^{P} (1 - p_k z^{-1})}$$

en què z_k són els zeros (perquè quan $z = z_k$, la funció transferència val zero) i p_k són els pols (perquè quan $z = p_k$, la funció transferència és infinita). Recordem que els pols es representen en el pla Z amb una creu i els zeros, amb un cercle, tal com es veu representat en la figura següent:

Recordeu

El diagrama de pols i zeros l'obtenim a partir del $H(z)$.

Exemple de diagrama de pols i zeros

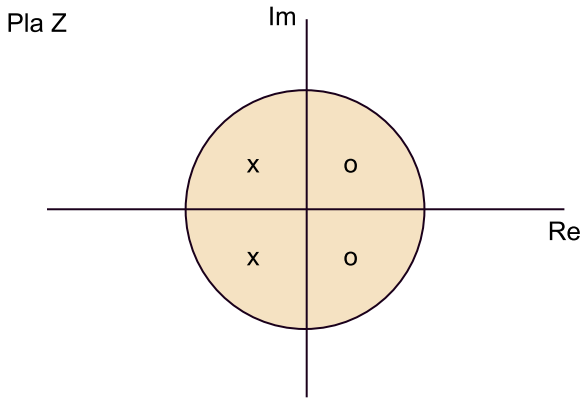

Figura 7. Exemple de diagrama de pols i zeros

Vegeu també

Pel que fa a la Transformada Z, vegeu l'apartat "Transformació del domini temporal al domini freqüencial" del mòdul 1.

Condicions que ha de verificar una funció de transferència perquè sigui causal i estable

Analitzem quines condicions ha de verificar una funció de transferència perquè sigui causal i estable.

L'estabilitat es garanteix si, i només si, $|z| = 1$ pertany a la regió de convergència (per a sistemes LTI causals).

La causalitat es garanteix si, i només si, $|z| > \max\{|p_k|\}$ pertany a la regió de convergència i H(z) expressada com una raó de polinomis en z verifica que l'ordre del numerador no és més gran que l'ordre del denominador.

L'única manera de verificar aquests dos criteris és que el mòdul del pols sigui més petit que 1.

La definició d'un filtre en equació en diferències finites ens permet fer clarament una distinció entre dos tipus de filtres:

- **Filtres no recurrents**: són aquells en què els coeficients són zero i, per tant, només depenen del senyal d'entrada. La resposta impulsional del filtre té un nombre finit de mostres diferents de zero i, per això, reben el nom de **filtres FIR** (resposta impulsional finita o *finite impulse response*).

- **Filtres recurrents**: són aquells en què la resposta impulsional té un nombre infinit de mostres diferents de zero, i reben el nom de **filtres IIR** (resposta impulsional infinita o *infinite impulse response*). Això se sap perquè els coeficients a_k i b_k són diferents de zero.

Finalment, i com hem vist a les definicions del primer apartat d'aquest mòdul, l'**ordre** d'un filtre es defineix com el màxim entre M i P (que són l'ordre del polinomi numerador i denominador, respectivament).

Ordre d'un filtre

L'ordre d'un filtre determina la complexitat d'implementació del filtre mateix. Com més gran és l'ordre, més recursos computacionals es necessiten.

Exemple

Per a exemplificar alguns dels conceptes que hem definit, utilitzarem un filtre FIR molt senzill definit per l'equació d'entrada-sortida següent:

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

en què $x[n]$ és el senyal discret d'entrada i $y[n]$ és el senyal discret de sortida.

El senyal de sortida és el resultat de fer la convolució entre el senyal d'entrada i la resposta impulsional i es pot expressar com segueix:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{i=0}^{1} h[i]x[n-i] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1]$$

Si hi apliquem la transformada Z de l'expressió anterior obtindrem la funció de transferència del filtre:

$$Y(z) = h[0]X(z) + \quad h[1]X(z)z^{-1}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = h[0] + h[1]z^{-1}$$

En aquest cas, els coeficients de la resposta impulsional són $h[0] = 1,\ \ h[1] = 1$. Com que només s'utilitza un retard d'una mostra, el filtre és d'ordre 1. La resposta impulsional té un nombre finit de mostres diferents de zero; per tant, podem afirmar que es tracta d'un filtre FIR.

Aquest filtre es pot programar fàcilment en el Matlab o l'Octave de la manera següent:

1. Definim el senyal d'entrada: $x = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]$.

2. Definim els coeficients de la resposta impulsional: $h = [1,1]$.

3. Inicialitzem la suma de convolució: $v = 0$.

4. Definim l'ordre del filtre: $M = 1$.

5. Definim la longitud del senyal d'entrada: $N = 10$.

6. Escrivim el codi de la suma de convolució:

```
for n = 1:N
 y(n) = h*[x(n);v]; % producte escalar de dos vectors
  : vector fila*vector columna
 v=[x(n)];
```

Obtenim el senyal de sortida: $y = [1,3,5,7,9,11,13,15,17,19]$.

3. Filtres reals: plantilla d'especificació d'un filtre

Com hem dit, els filtres representats en la figura 1 són filtres **ideals** o **no realitzables** ja que la resposta impulsional és no causal. A l'hora d'especificar les característiques, un filtre **real** o **realitzable** es permet una relaxació de les especificacions teòriques volgudes (això ho anomenem *marge de tolerància* o *relaxació*). Per això, a la pràctica, abans de dissenyar un filtre, el primer que necessitem és la **plantilla d'especificacions**[3], que bàsicament determina com volem que sigui el filtre (passabaix, passaalt i la freqüència de tall i d'atenuació, entre altres paràmetres) i quin marge de tolerància o relaxació[4] acceptem.

(3)Dins de les especificacions hi trobem freqüència de tall i freqüència de pas, entre d'altres.

(4)Per relaxació de les especificacions teòriques volgudes hi entenem permetre un marge de variació a les especificacions.

El filtre **real** es dissenya de manera que la funció de transferència correspongui a l'equació següent:

$$H(Z)=\frac{\sum_{n=0}^{M} b_n z^{-n}}{1+\sum_{n=1}^{P} a_n z^{-n}}=\frac{b_0\prod_{n=0}^{M}(1-z_k z^{-1})}{a_0\prod_{k=1}^{P}(1-p_k z^{-1})}$$

La figura 8 mostra una plantilla d'especificació corresponent a la funció real $H(f)$ i la corresponent atenuació d'un filtre passabaix:

Plantilla d'especificació corresponent al mòdul (esquerra) i l'atenuació (dreta) del filtre passabaix

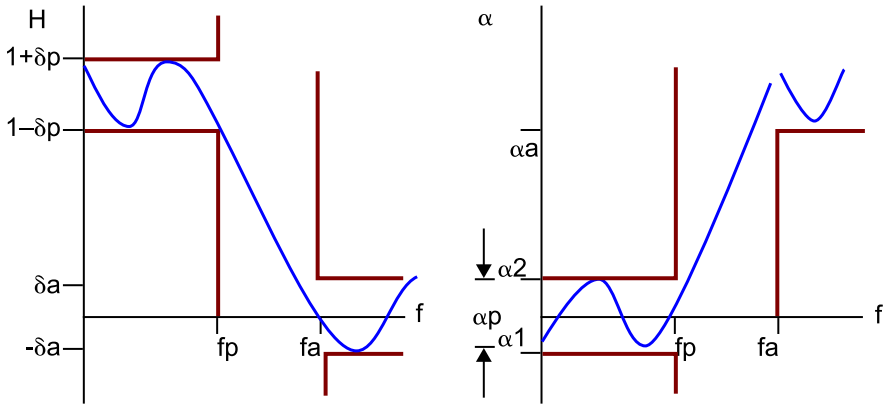

Figura 8. Plantilla d'especificació corresponent al mòdul (esquerra) i l'atenuació (dreta) del filtre passabaix

Nomenclatura

- f_p: freqüència de pas (fins a aquesta freqüència el filtre deixa passar el senyal).
- f_a: freqüència d'atenuació (a partir d'aquesta freqüència el filtre atenua el senyal).
- δ_p: tolerància de pas en mòdul, que és la relaxació en mòdul que permetem a la banda de pas.
- δ_a: tolerància d'atenuació en mòdul, que és la relaxació en mòdul que permetem a la banda d'atenuació.

- $\propto_p = \propto_2 - \propto_1$: tolerància de pas en atenuació, que és la relaxació en atenuació que permetem a la banda de pas.

- $\propto_a$: tolerància d'atenuació en atenuació, que és la relaxació en atenuació que permetem a la banda d'atenuació.

Podem definir l'atenuació a partir de la funció de transferència:

$$\propto(f) = -G(f) = -10log\frac{|H(f)|^2}{H_{ref}^2}$$

Fixeu-vos que a la banda esquerra de la figura 8 es permet:

- Una tolerància entorn del valor del mòdul ($1 \pm \delta_p$).

- Una tolerància sobre el valor la banda atenuada (δ_a).

- Una banda de pas entre la freqüència de pas i la freqüència atenuada ($f_a - f_p$).

Fixeu-vos que a la banda dreta de la figura 8 es permet:

- Una tolerància entorn del valor de la banda de pas (α_p).

- Una tolerància sobre el valor de la banda atenuada (α_a).

- Una banda de pas entre la banda de pas i la banda atenuada ($f_a - f_p$).

Com més restrictius siguem a l'hora de definir les toleràncies, més costós resultarà d'implementar el filtre en qüestió.

Generalment, el valor màxim de la funció $H(f)$ és 1. Sabent la relació entre l'atenuació i la funció de transferència, trobarem la relació entre les especificacions de l'atenuació i les especificacions de la funció de transferència. Així, doncs, si prenem $H_{max} = 1$, tenim que:

$$\propto_p = \propto_2 - \propto_1 = 20 \quad log\frac{1+\delta_p}{1-\delta_p}; \quad \alpha_a = -20log\delta_a$$

$$\delta_p = \frac{10^{\frac{\alpha_p}{20}} - 1}{10^{\frac{\alpha_p}{20}} + 1}; \quad \delta_a = 10^{\frac{\alpha_a}{20}}$$

Un filtre és un **sistema lineal** i **invariant**; per això, es pot caracteritzar amb el que coneixem com a **resposta impulsional**.

La resposta impulsional relaciona l'entrada i la sortida d'un sistema lineal i invariant en el temps.

Abans de dissenyar un filtre, el primer que necessitem és la **plantilla d'especificacions**, que bàsicament determina com volem que sigui el filtre: passabaix, passaalt i la freqüència de tall i d'atenuació, entre altres paràmetres.

4. Disseny de filtres digitals

En aquest apartat ens centrarem en el disseny de filtres digitals, que bàsicament se subdivideixen en dos tipus: filtres FIR i IIR. Els primers tenen una resposta impulsional finita i els segons es caracteritzen pel fet de tenir una resposta impulsional infinita. Dins del subapartat de filtres IIR farem un repàs molt breu del disseny de filtres analògics perquè es necessiten per al disseny de filtres IIR.

4.1. Disseny de filtres FIR

Ja hem vist que un filtre FIR realitzable, a més a més de ser lineal, invariant, causal i estable, es caracteritza pel fet de tenir una resposta impulsional de longitud finita L i la sortida que té només depèn de valors de l'entrada, mai de la sortida. En cas de voler tenir fase lineal[5], la resposta impulsional ha de ser simètrica o asimètrica.

(5)Recordeu que hem dit que un filtre de fase lineal vol dir que no distorsiona la forma de l'ona del senyal original.

Lectura suggerida

Trobareu explicat el concepte de simetria a la pàgina 13 del llibre *Señales y sistemas*, d'A. V. Oppenheim i A. S. Willsky.

L'estructura directa genèrica d'un filtre FIR (coneguda també com a *estructura transversal*) es correspon amb la figura 9. Hi veiem que un filtre FIR només fa servir mostres retardades del senyal d'entrada:

Estructura directa d'un filtre FIR d'ordre M

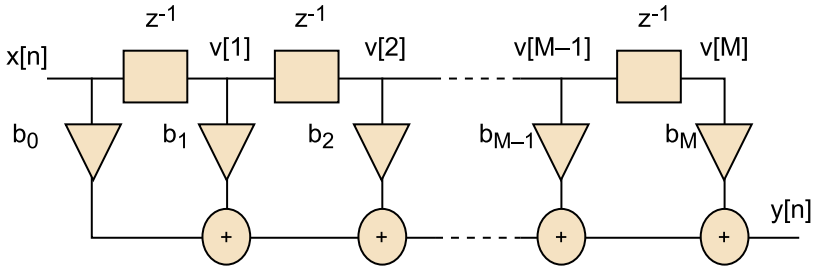

Figura 9. Estructura directa d'un filtre FIR d'ordre M. Els triangles es corresponen amb multiplicadors i els elements z^{-1}, amb retardadors d'una mostra. Noteu que $v[i] = x[n \quad i]$.

Hi ha diferents mètodes per a implementar filtres FIR. En aquesta assignatura veurem amb detall el mètode de finestres i el mètode de Parks-McClellan. El primer es caracteritza per la simplicitat i el segon, perquè s'utilitzen freqüentment a la pràctica (de fet, és el tipus de filtre que assoleix unes determinades especificacions amb un ordre més petit). Tots dos estan implementats en el Matlab i l'Octave i en veurem la utilització.

4.1.1. Mètode de finestres

Una manera directa de fer que la resposta ideal sigui finita és limitant una resposta infinita. Així, doncs, si per exemple tenim una resposta impulsional ideal que, en el temps, és una funció sinc (conté infinites mostres) i la multi-

pliquem per una funció que té un nombre limitat de mostres diferents de zero, obtindrem una resposta impulsional finita centrada a l'origen per a garantir la simetria (noteu que, per a fer el filtre causal, hem de desplaçar la finestra):

$$h[n] = h_i[n]w[n]$$

En aquesta equació, $h_i[n]$ és la resposta impulsional del filtre ideal i $w[n]$ és la funció que actua de finestra (en anglès, *window*). Fixem-nos que en el domini transformat aquesta multiplicació temporal és una convolució.

Alguns altres tipus de finestres que s'utilitzen en aquest mètode per a limitar la funció sinc que pertany al filtre ideal són la triangular, Barlett, Blackman, Hanning, Hamming i Kaiser i cada finestra té unes propietats diferents.

El Matlab permet l'ús de totes aquestes finestres. Vegeu com són amb les ordres següents:

```
L=64 % defineix la longitud de la finestra
wvtool(blackman(L)) % dibuixa la finestra de Blackman en temps i en freqüència
wvtool(hamming(L)) % dibuixa la finestra de Hamming en temps i en freqüència
wvtool(kaiser(L)) % dibuixa la finestra de Kaiser en temps i en freqüència
wvtool(kaiser(L),blackman(L),hamming(L)) % permet comparar diferents tipus de finestres
```

Finestres simètriques

Noteu que les finestres són simètriques; això vol dir que tenim fase lineal i que el retard de grup és constant.

Resposta en freqüència de diferents tipus de finestres: Kaiser, Blackman i Hamming

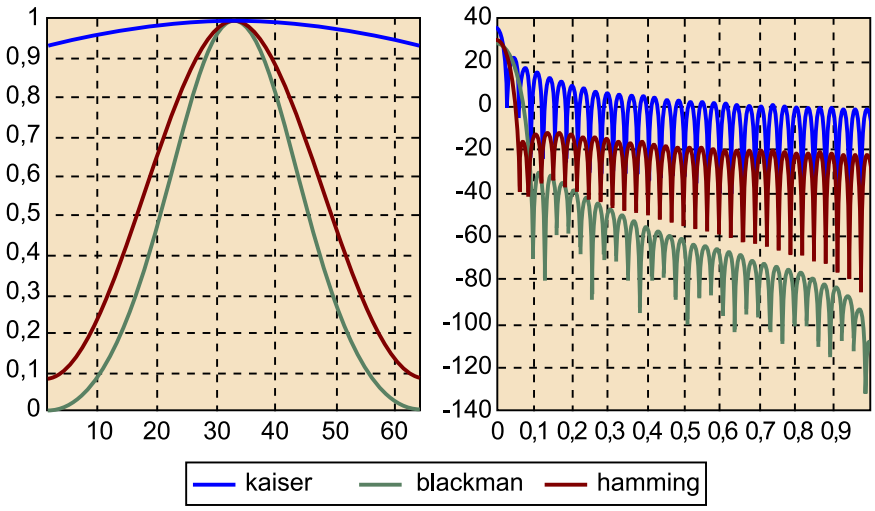

Figura 10. Resposta en freqüència de diferents tipus de finestres: Kaiser, Blackman i Hamming

Cada finestra presenta unes prestacions diferents. Per exemple, una finestra rectangular presenta una banda de pas més ampla, però l'atenuació a la banda eliminada és més petita. Tal com es veu en la figura 10, l'amplitud del lòbul principal és gran, i la diferència entre lòbul principal i secundari és petita. Aquest comportament és totalment oposat en una finestra triangular. Així, segons les especificacions de disseny, ens decidirem per una finestra en concret.

Comproveu els diferents comportaments de les finestres seguint l'exemple següent.

Així, doncs, a continuació posem un exemple concret per veure com funciona aquest mètode. Utilitzarem la finestra rectangular, que és la més simple de les finestres, i una finestra més elaborada, la de Hanning.

Exemple

En aquest exemple mostrem el filtratge (o en aquest cas, l'anomenat *enfinestrament*) d'un senyal sinusoïdal amb un filtre de finestra rectangular i finestra de Hanning en el domini temporal i en el domini de la freqüència calculat en el Matlab:

```
n=512 % nombre de mostres de la fft
m=128 % nombre de mostres de la finestra
h = hanning(m);
sr = zeros(size(1:n));
sh = zeros(size(1:n));
f = pi / 3; % freqüència del senyal sinusoïdal

for i = 1:m ; sr(i) =        sin(f * i) ; end
for i = 1:m ; sh(i) = h(i) * sin(f * i) ; end

plot(sr);
plot(sh);
```

A continuació mostrem l'enfinestrament del senyal sinusoïdal amb un filtre de finestra rectangular i finestra de Hanning en el domini temporal, respectivament, en termes d'amplitud i mostres temporals:

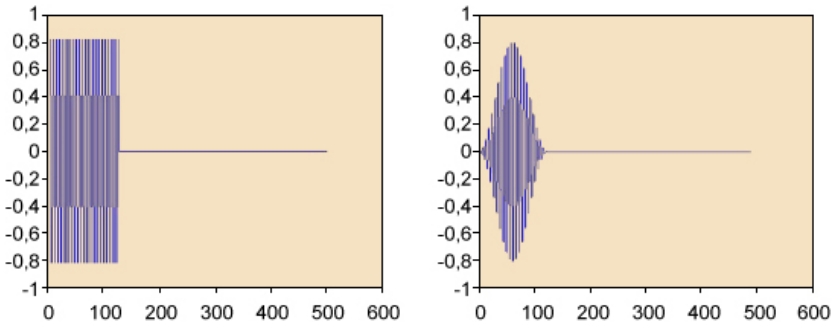

Figura 11. Enfinestrament en el domini temporal d'un senyal sinusoïdal amb una finestra rectangular i una de Hanning, respectivament. La figura mostra amplitud en termes de mostres temporals.

```
ar=abs(fft(sr));
ah=abs(fft(sh));

plot(ar(1:n/2))
plot(20 * log10(ar(1:n/2)))
plot(20 * log10(ah(1:n/2)))
```

A continuació mostrem l'enfinestrament del senyal sinusoïdal amb un filtre de finestra rectangular i finestra de Hanning en el domini freqüencial, respectivament, en dB i mostres freqüencials:

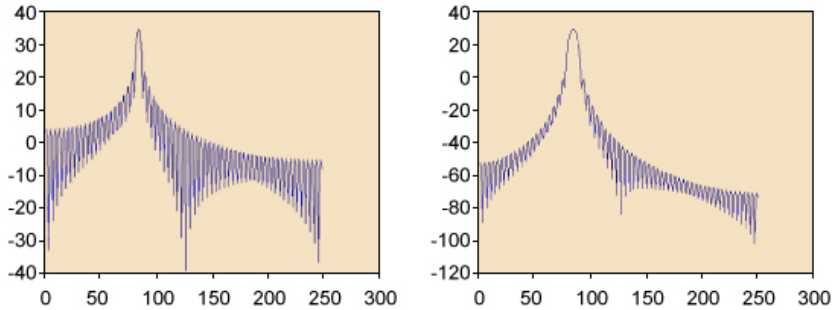

Figura 12. Enfinestrament en el domini freqüencial d'un senyal sinusoïdal amb una finestra rectangular i una de Hanning, respectivament. La figura mostra dB en termes de mostres freqüencials.

A partir d'aquestes imatges, observeu que la freqüència central dels filtres és la mateixa. D'altra banda, veiem que la freqüència de tall a 3 dB aproximada no coincideix en els dos filtres. La freqüència de tall a 3 dB és aquella freqüència en què l'atenuació és més gran de 3 dB respecte a l'atenuació mínima (la de la freqüència central).

Finalment, l'amplada del lòbul principal i el màxim pic dels lòbuls laterals permet determinar la **resolució** i **sensibilitat** d'un filtre, respectivament. Anomenem *lòbuls* els "pics" del filtre. El lòbul principal és el pic del filtre on el senyal té menys atenuació. Els lòbuls laterals són tots els altres pics del filtre on el senyal té més atenuació.

El fet que l'amplada del lòbul principal sigui més petita en el cas de la finestra rectangular que en la de Hanning vol dir que hi ha una resolució més gran. És a dir, una discriminació més gran entre la freqüència central i les freqüències més properes a la central. D'altra banda, el fet que la relació lòbul principal - lòbul lateral sigui més gran en el cas de la finestra de Hanning que en la rectangular fa que aquesta finestra tingui més sensibilitat. Això permet una atenuació més gran de les freqüències no volgudes (que són a una distància més gran del que ocupa el lòbul principal).

Amb el mètode de finestres tenim una manera senzilla i entenedora de fer filtres. Ara bé, el principal inconvenient del mètode és que s'observa un comportament oscil·latori entre la banda de pas i la banda atenuada i no permet controlar la separació entre totes dues bandes.

Referència bibliogràfica

Julián Quiroga Sepúlveda (2009) *Diseño de filtros FIR: Método de ventanas. Procesamiento digital de señales. Pontificia Universidad Javieriana.*

Exemple

La figura següent mostra de manera gràfica l'equació de construcció d'un filtre pel mètode de finestres (utilitzant una finestra rectangular):

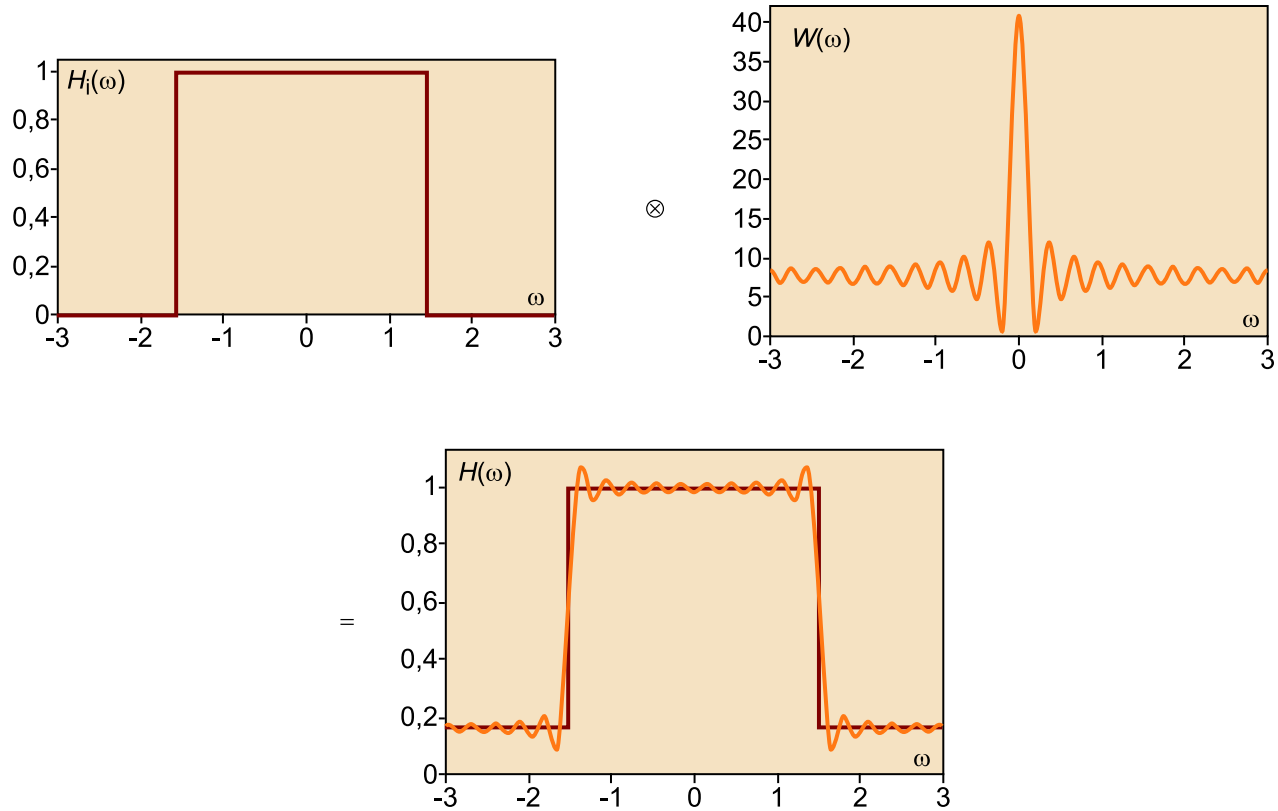

Figura 13. Construcció d'un filtre FIR utilitzant el mètode de finestres

4.1.2. Mètode de Parks-McClellan

L'algoritme de Parks-McClellan es basa en aproximacions polinòmiques. Aquest mètode presenta un comportament d' arrissament constant[6] a les bandes de pas i atenuada.

(6)S'anomena arrissament quan la forma d'ona té pics i valls. Arrissament constant vol dir que els pics i les valls sempre tenen el mateix valor.

No entrarem en detall en la manera com es fan els càlculs per a obtenir el filtre, ja que per a això tenim eines com l'FDAtool del Matlab.

Referència bibliogràfica

Podreu aprofundir sobre l'FDAtool del Matlab en la pàgina web de Mathworks.

FDAtool del Matlab

Aquesta eina proporciona una interfície per a dissenyar i analitzar filtres ràpidament. L'FDAtool permet dissenyar filtres FIR i IIR amb determinades especificacions. Així mateix, l'eina permet analitzar les característiques d'un filtre en concret.

Per a utilitzar l'FDAtool heu d'entrar al Matlab i escriure *fdatool* a la línia d'ordres –és a dir, a continuació del signe (>>). Després us apareixerà la finestra següent:

Lectura suggerida

Llegiu l'article "Comparación de filtros FIR de fase lineal, por Método Óptimo y de Ventanas"

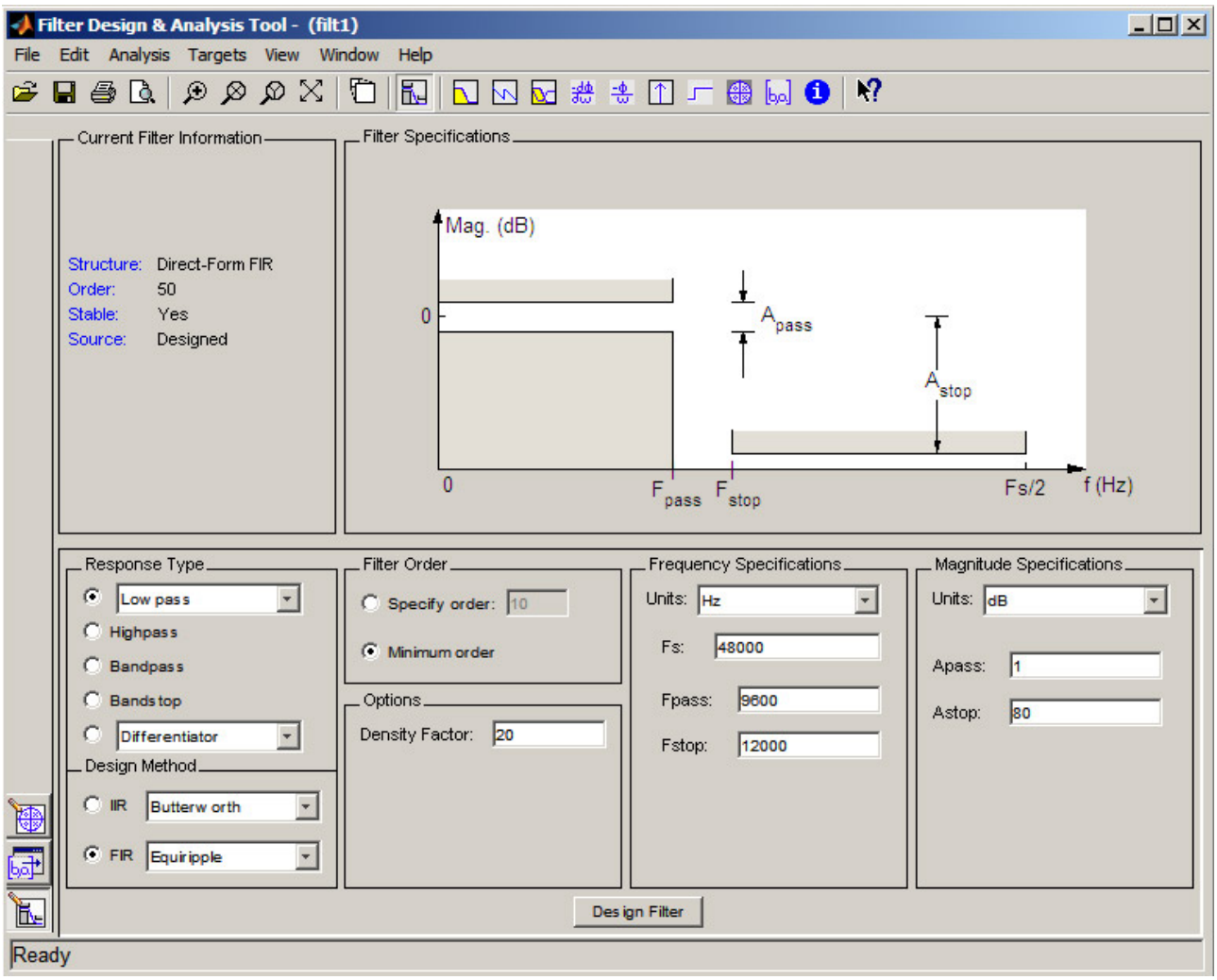

Figura 14. Eina FDAtool del Matlab

Dissenyem un filtre passabaix FIR amb les especificacions següents:

- Mètode: Parks-McClellan (noteu que el Matlab l'anomena *Least-squares*, que és el mateix que *equiripple*):
  - Design Method → FIR → Least-squares
  - Cal tenir seleccionat Response Type → Low pass
- Freqüència de pas 8 kHz, freqüència d'atenuació a 6 dB (Fstop a fdatool) 8.8 kHz:
  - Frequency Specifications → Units → Hz"
  - Llavors Fpass 8000 i Fstop 8000

Si especifiquem ordre 5 (Order → Specify order --< 5), obtenim el filtre següent:

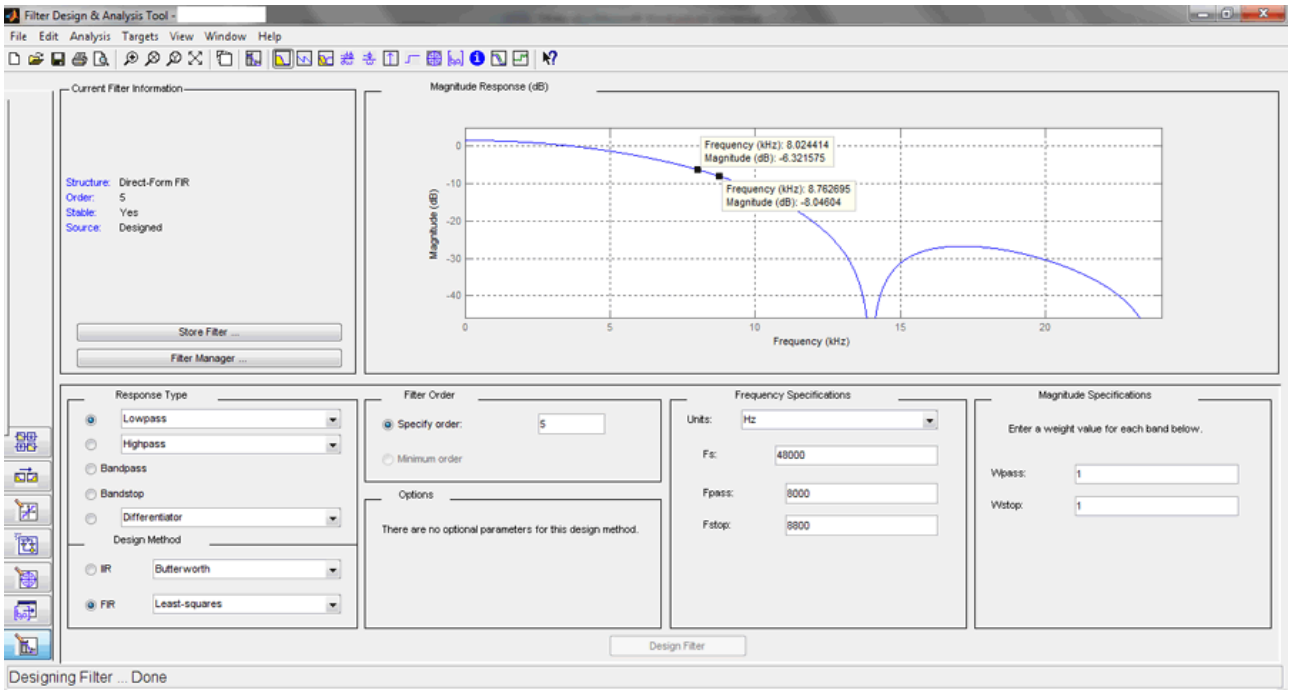

Figura 15. Pantalla d'especificacions

Considereu que és el filtre que volem?

No ho és, perquè les freqüències de 8 kHz estan atenuades 6 dB; per tant, hem de pujar l'ordre del filtre.

Les nostres especificacions són força exigents; per tant, necessitem ordres més alts:

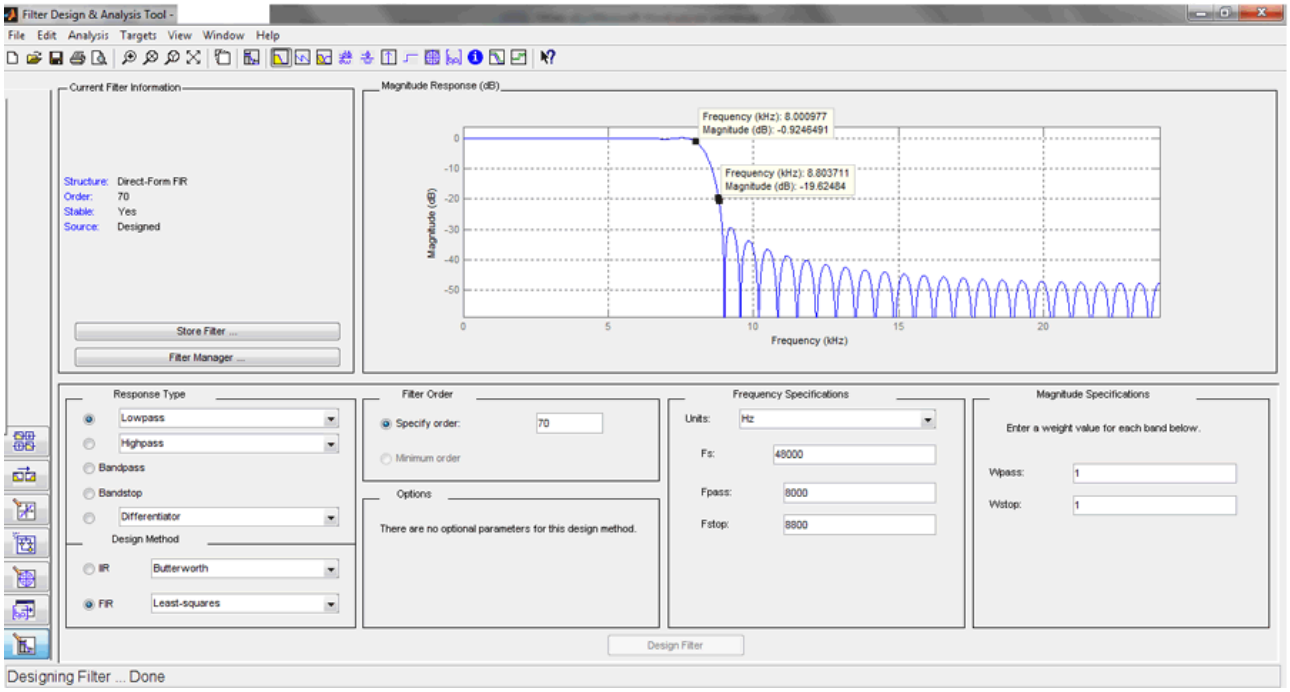

Figura 16. Filtre creat

Activitat

Amb les mateixes especificacions que l'exemple anterior, comproveu quin ordre necessiteu si en comptes d'utilitzar el mètode de Parks-McClellan (especificació 1 de l'exemple) utilitzeu el mètode de finestres amb una finestra de Cauer.

Un **filtre FIR** té una resposta impulsional de longitud finita. Així mateix, la resposta en freqüència té fase lineal sempre que es compleixin les condicions de simetria. El fet que la **fase sigui lineal** implica que el filtre **no distorsioni la sortida a la banda de pas**. Aquesta característica de no-distorsió acostuma a ser el principal motiu per a utilitzar filtres FIR.

4.2. Disseny de filtres IIR

Els **filtres IIR** es diferencien dels filtres FIR perquè tenen una resposta impulsional infinita i el senyal de sortida filtrat depèn de valors anteriors de l'entrada i de la sortida. Això vol dir que la resposta freqüencial no és de fase lineal perquè no es compleixen les condicions de simetria.

El principal avantatge d'aquests filtres és que es poden assolir unes determinades especificacions d'atenuació i freqüències de pas o atenuades amb un ordre inferior a l'ordre que requereix un filtre FIR. L'estructura directa d'un filtre IIR es representa en la figura següent:

Estructura directa d'un filtre IIR d'ordre $M = max\ (P, Q)$

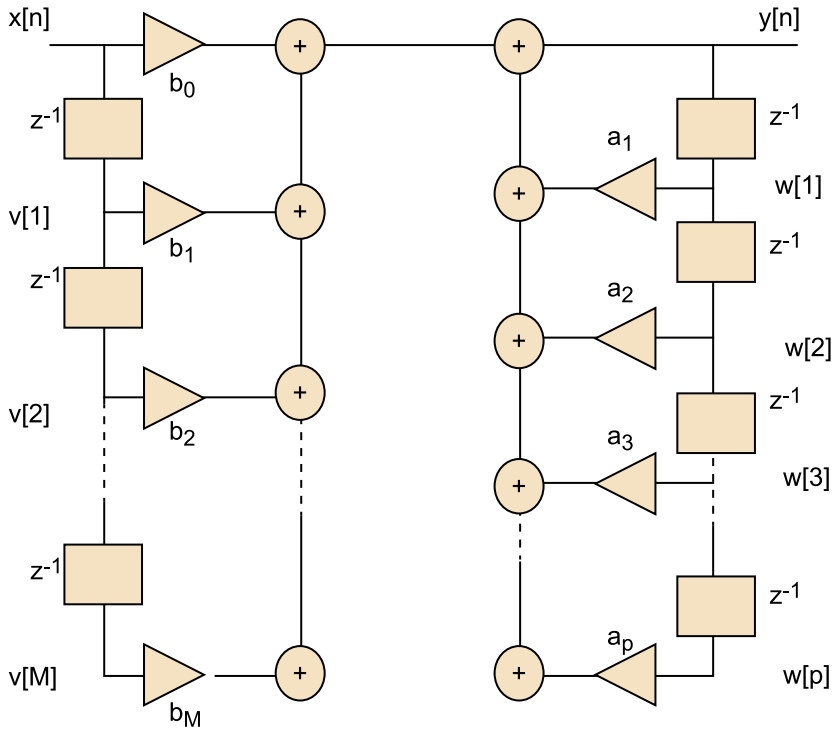

Figura 17. Estructura directa d'un filtre IIR d'ordre $M = max\ (P, Q)$. Noteu que $v[i] = x[n-i]$ i $w[i] = y[n-i]$.

En el disseny de filtres IIR es determinen els coeficients a_k i b_k de manera que verifiquin unes determinades especificacions. Ara bé, no hi ha una teoria específica per a dissenyar filtres digitals IIR, sinó que s'utilitza la teoria de filtres

Vegeu també

Veurem breument la teoria dels filtres analògics en l'apartat "Disseny de filtres analògics: breu resum" d'aquest mateix mòdul.

analògics. El motiu principal pel qual s'utilitza la teoria de filtres analògics en digital és perquè la teoria de filtres analògics està molt desenvolupada, estudiada i experimentada. Per tant, val la pena aprofitar-la per a filtres digitals.

La teoria de filtres analògics per al disseny de filtres digitals es basa a fer una transformació de variable. Hi ha diferents procediments per a fer aquesta transformació. En aquests apunts revisarem el mètode per transformació bilineal. Una vegada feta la transformació bilineal, ja es poden utilitzar les aproximacions analògiques clàssiques com Butterworth, Txebyxev, Invers de Txebyxev o Cauer.

Resumint, per a dissenyar un filtre IIR digital el que fem és dissenyar-lo en analògic i fer la transformació d'aquest filtre analògic a digital.

4.2.1. Transformació bilineal

La transformació s'aplica a la funció de transferència d'un filtre analògic $H_a(s)$ i el resultat que s'obté és la funció de transferència d'un filtre discret $H(z)$.

Vegeu també

Recordeu l'apartat "Conversió A/D i D/A: entorn analògic i entorn digital" del mòdul 1.

Lectura recomanada

Trobareu informació sobre la Transformada de Laplace a la pàgina 654 i següents del llibre *Señales y sistemas*, d'A. V. Oppenheim i A. S. Willsky.

Recordeu que hem vist la Transformada Z en l'apartat "Transformació del domini temporal al domini freqüencial" del mòdul 1.

Aquesta transformació ha de verificar les condicions següents:

1. Garanteix una relació punt a punt entre el pla z i el pla s.

2. Per a associar la freqüència entre tots dos plans, la circumferència de radi unitat del pla z es transforma en l'eix imaginari del pla s.

3. Per a assegurar l'estabilitat, tot punt situat a l'interior de la circumferència de radi unitat en z es relaciona amb un punt del semiplà esquerra de s.

Nota

Els filtres analògics són estables si, i només si, els pols de la funció de transferència tenen part real negativa, com veurem a la propera secció.

La transformació bilineal compleix aquests requisits:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Exemple

Verifiquem que un punt z situat sobre la circumferència de radi unitat té com a imatge en s un punt amb part real nul·la (per tant, se situa sobre l'eix imaginari):

$$z = e^{jw} \longrightarrow \; s = \frac{1 - e^{-jw}}{1 + e^{-jw}} = j\tan\frac{w}{2} = j\Omega$$

D'aquí podem extreure que la pulsació del domini analògic (Ω) queda relacionada amb la pulsació (ω) del domini discret per l'expressió següent:

$$\tan\frac{w}{2} = \Omega$$

Aquesta relació s'utilitza per a adaptar les especificacions digitals, tal com veurem a continuació.

Activitat

Comproveu que un punt qualsevol $z_a = re^{jwa}$ amb mòdul r <1 verifica la condició 3.

Una vegada definida la transformació bilineal, ja podem dissenyar el filtre IIR.

4.2.2. Disseny de filtres analògics: breu resum

Un filtre analògic es pot definir com un sistema que manipula un senyal continu (és a dir, analògic) de manera que deixa passar un determinat interval de freqüències i n'atenua unes altres.

En molts aspectes presenten moltes analogies amb els filtres digitals. En particular, els filtres LTI analògics es caracteritzen per la resposta impulsional que tenen (en aquest cas és contínua en el temps). En lloc d'utilitzar equacions en diferències finites, els filtres analògics relacionen la seva entrada-sortida amb una equació diferencial. En lloc d'utilitzar la transformada Z per a calcular la funció de transferència, s'utilitza la transformada de Laplace.

Els filtres analògics mantenen les propietats que hem vist a la secció 1.3. Ja sabem que, perquè una funció de transferència caracteritzi un sistema, aquest sistema ha de ser LTI. La funció de transferència per a un filtre analògic és el quocient entre la transformada de Laplace del senyal de sortida i la transformada de Laplace del senyal d'entrada:

Lectura recomanada

Trobareu informació sobre la Transformada de Laplace a la pàgina 654 i següents del llibre *Señales y sistemas*, d'A. V. Oppenheim i A. S. Willsky.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Com hem dit, la relació d'entrada-sortida utilitza equacions diferencials:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \ldots + b_0 x(t)$$

$$a_n (s)^n Y(s) + \ldots + a_0 Y(s) = b_m (s)^m X(s) + \ldots + bX(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{l=0}^{m} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

Si fem la transformada inversa de $H(s)$, necessitem utilitzar la transformada de Laplace següent:

$$\frac{k_i}{s - p_i} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} k_i e^{p_i t} u(t), \quad \text{en què} \quad k_i, \; p_i \; \varepsilon \; \mathbb{C}$$

$$h(t) = \sum k_i e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} u(t)$$

Vegem quins són els requisits perquè el filtre analògic sigui causal i estable:

- La causalitat es verifica perquè els valors t 0 són 0 a causa de $u(t)$ (la funció graó és zero per a valors inferiors a 0, i 1 per a valors superiors a 0).

- L'estabilitat es verifica si:

$$\sum_{t=0}^{\infty} |h(t)| < \infty$$

Per tant, hem de garantir que $\sigma_i < 0$. I a més a més, noteu que, perquè el filtre sigui real, les exponencials complexes han d'aparèixer en pols conjugats (d'aquesta manera les parts imaginàries s'anul·len entre si).

A continuació veurem alguns paràmetres que són útils a l'hora de dissenyar un filtre analògic:

- Constant de selectivitat (és a dir, el quocient, la freqüència d'atenuació i la freqüència de pas).

- Relació atenuació i funció freqüencial (ara utilitzem F com a freqüència analògica):

$$\propto(F) = -10 log \frac{|H(F)|^2}{H_{max}^2}$$

Les plantilles d'atenuació dels filtres es defineixen exactament com en l'apartat 1.3. La figura següent mostra uns exemples dels filtres analògics principals (per a una freqüència de pas de 0.5):

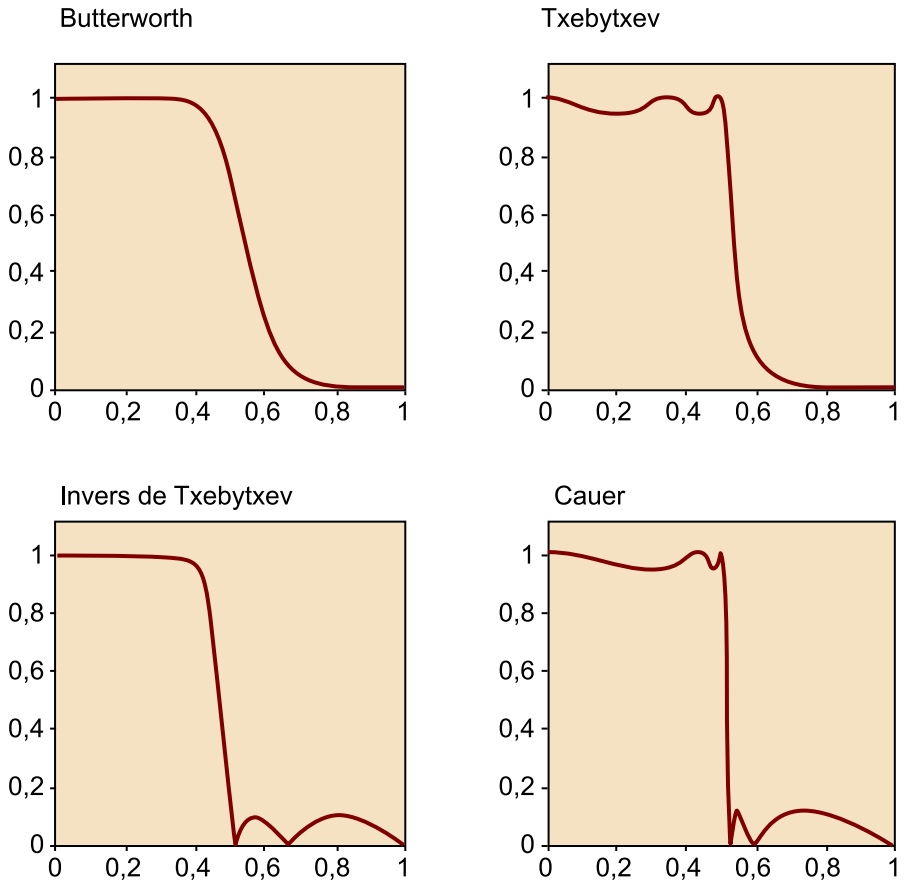

Figura 18. Funció de transferència de diferents tipus de filtres analògics passabaix: Butterworth, Txebyxev, invers de Txebyxev i Cauer

Les respostes més comunes de filtres analògics passabaix són les que es mostren en la figura. Butterworth assegura una resposta màximament plana a la banda de pas i una taxa adequada d'atenuació a la banda atenuada. Per això, el filtre de Butterworth és adequat per a aplicacions dins del processament d'àudio.

El filtre de Txebyxev dóna una atenuació molt més pronunciada, però l'amplitud no constant de la banda de pas el fa inadequat per als sistemes d'àudio.

El filtre de tipus el·líptic o de Cauer és un filtre complex però que resulta molt adequat a la pràctica perquè, donades unes especificacions, les compleix amb el mínim ordre possible. Així mateix, si volem una resposta plana a la banda de pas, es pot obtenir augmentant lleugerament l'ordre mínim.

Ara bé, si pensem a aplicar filtres analògics dins d'entorns digitals, s'ha de tenir en compte que la transformació bilineal provoca una forta distorsió de fase.

4.2.3. Transformació bilineal i teoria de filtres analògics

Per a fer el disseny d'un filtre IIR seguim el procediment següent:

- Hem d'obtenir les especificacions del filtre analògic a partir de les especificacions del filtre digital IIR.

– Els límits d'atenuació α_a i α_p es mantenen.

– Transformem els límits freqüencials f_p i f_a en Ω_p i Ω_a mitjançant la relació que hem obtingut a (eq. 3).

- A partir de les especificacions analògiques, dissenyem el filtre analògic utilitzant alguna tècnica analògica (és a dir, Butterworth, Txebyxev, invers de Txebyxev o Cauer).

- Tenint $H_a(s)$ i aplicant la transformació bilineal, obtenim la funció de transferència del filtre digital IIR $H(z)$:

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Nota

L'FDAtool del Matlab fa la transformació bilineal internament, de manera que el dissenyador no ho ha de fer explícitament.

Així, si tenim un filtre passa baix, com ara $H_a(s) = \frac{1}{1+s}$, el filtre digital després d'aplicar-hi la transformació bilineal seria el següent:

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1}{1+s}\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1}{1+\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = 1+\frac{1}{z}$$

Exemple

Extrets d'Internet, trobem exemples de filtres analògics fets en el Matlab com els que trobeu en l'annex:

butter_ana_ex.m

txeby_ana_ex.m

Un **filtre IIR** presenta una resposta impulsional infinita, la qual cosa implica que no tenen una fase lineal i poden ser estables o inestables.

5. De la teoria a la pràctica

En aquest apartat desenvoluparem un parell de conceptes pràctics de filtres. D'una banda, veurem criteris per escollir un filtre FIR o un IIR. D'altra banda, veurem com hem de dissenyar un filtre des de zero.

5.1. L'elecció d'un filtre FIR o IIR. Quan hem d'utilitzar l'un o l'altre?

Després de veure els principals aspectes teòrics dels filtres, ara ens centraremen aspectesmés pràctics.

Pel que fa als **avantatges** d'utilitzar aquesta mena de filtres, tenim que els filtres FIR poden tenir fase lineal, cosa que permet mantenir la forma del senyal. Ara bé, en processament d'àudio, en general, no és necessari tenir una fase lineal o mantenir el senyal d'ona.

Nota

L'orella humana, genèricament parlant, no és extremament sensible a la distorsió de fase. En canvi, la fase és més important en imatge per a la sensibilitat de l'ull.

Així mateix, els filtres FIR són sempre estables.

D'altra banda, els filtres IIR acostumen a ser d'ordre petit (per tant, menys cost computacional).

Pel que fa als **inconvenients** principals, tenim que els filtres FIR són d'ordre gran i els filtres IIR són de fase no lineal i se n'ha de controlar la inestabilitat, perquè si són inestables no són realitzables.

S'ha de tenir en compte que en un filtratge àudio, si està ben fet, no tenim per què percebre si hem filtrat amb un filtre FIR o IIR.

Finalment, **a l'hora d'escollir un filtre FIR o IIR a la pràctica, preferentment utilitzarem el filtre de Parks-McClellan si volem un filtratge FIR, i el filtre de Cauer si volem un filtratge IIR**. Les altres aproximacions, finestres en el cas FIR i Butterworth o Txebyxev en el cas IIR, requereixen un ordre més gran per a complir les mateixes especificacions, tal com hem vist, amb l'eina FDAtool del Matlab.

5.2. Cas pràctic: disseny d'un filtre des de zero amb l'Audacity i amb el Matlab

5.2.1. Cas 1. Filtratge d'un senyal d'àudio utilitzant l'Audacity

L'Audacity és un programa lliure i de codi obert que permet gravar i editar sons. En aquesta assignatura l'utilitzarem en diferents mòduls.

Així, doncs, com a exemple d'aplicació obrirem l'Audacity i obrirem una cançó que tinguem en format *.mp3*, per exemple. Per això feu clic a *Obre* i busqueu la cançó que us faci gràcia editar. Un cop oberta, seleccioneu amb el ratolí el fragment que vulgueu editar. Després feu clic a *Efecte* i a *Filtre FFT*. Especifiqueu el filtre que voleu provar i feu clic a *Aplica*.

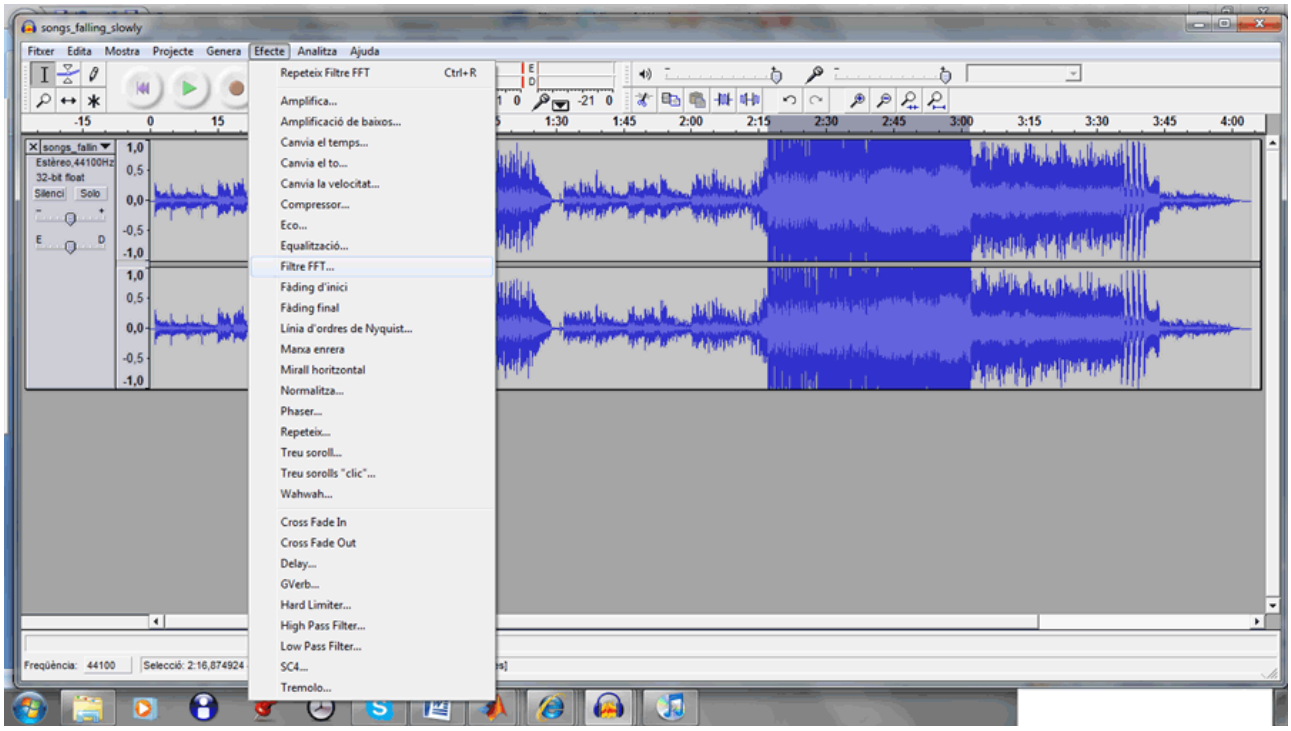

Figura 19. Visualització de l'Audacity fent filtratge

5.2.2. Cas 2. Filtratge d'un senyal d'àudio utilitzant el Matlab

El Matlab permet jugar amb més paràmetres que l'Audacity.

Per començar, llegirem el fitxer de so en format *.wav*, que és el format de so que llegeix el Matlab per defecte.

```
[Y,Fs]=wavread(&#8216;file.wav&#8217;)
```

Lectura de la línia de codi

Y és el so codificat de manera digital, amb freqüència de mostreig *Fs*

El fitxer *file.wav* pot ser qualsevol que tingueu en el vostre ordinador.

Si volem comprovar que el so s'ha codificat correctament, l'hem d'escoltar de la manera següent:

```
sound(Y,Fs)
```

Ara dissenyem un filtre com vulguem, utilitzant l'eina FDAtool. En aquest punt es tracta que penseu quines especificacions voleu. Per a posar un exemple, nosaltres definirem el filtre següent:

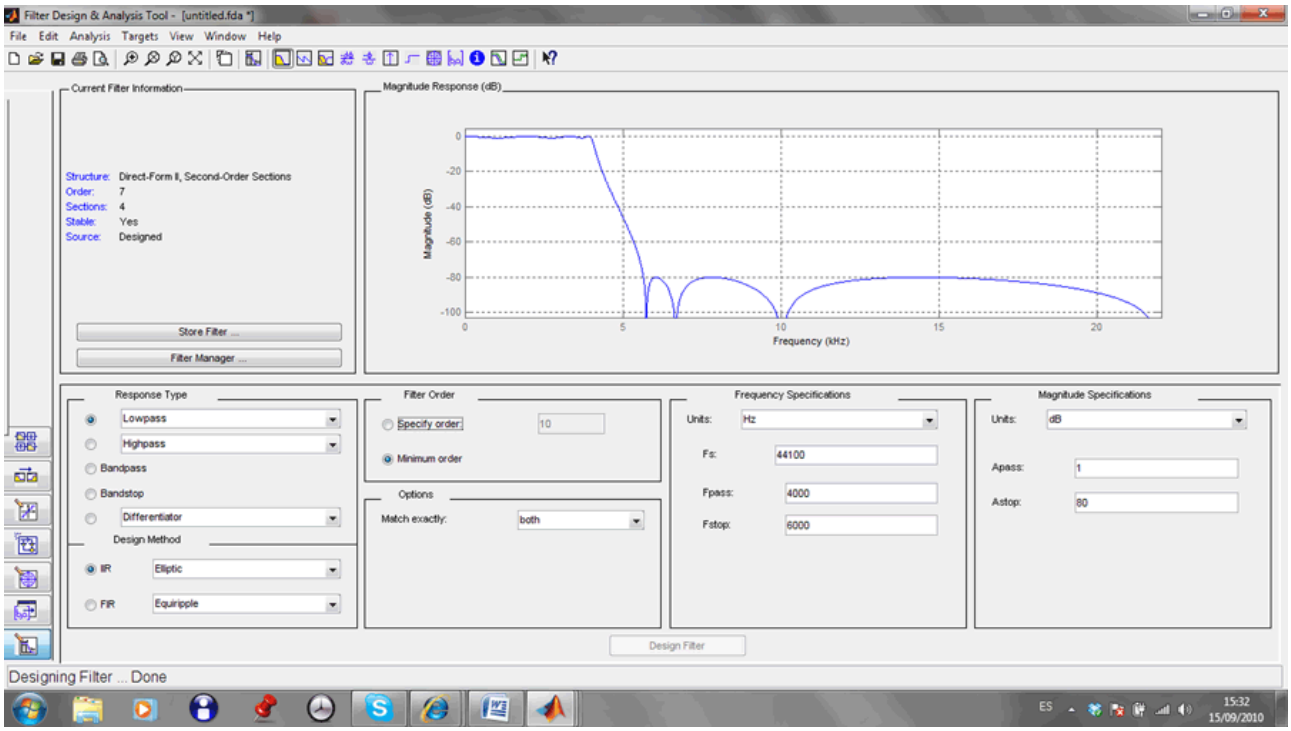

Figura 20. Filtratge amb el Matlab utilitzant l'FDAtool

A continuació fem *FileGenerate M-File* i el posem a la línia d'ordres.

```
Fs = 44100;  % Sampling Frequency
Fpass = 4000;   % Passband Frequency
Fstop = 6000;   % Stopband Frequency
Apass = 1;      % Passband Ripple (dB)
Astop = 80;      % Stopband Attenuation (dB)
match = 'both';   % Band to match exactly
% Construct an FDESIGN object and call its ELLIP method
h = fdesign.lowpass(Fpass, Fstop, Apass, Astop, Fs);
Hd = design(h, 'ellip', 'MatchExactly', match);
```

Per a utilitzar aquest filtre el que fem és:

```
X=filter(Hd,Y)
```

Escoltem el nou senyal filtrat:

```
sound(X, 44100)
```

Annex

Filtre de Butterworth: butter_ana_ex.m

Adreça web

Podeu consultar la pàgina del a Escuela de Ingenieros de la Universidad de Navarra (TECNUM)

```
%% Exemple de filtre passabaix de Butterworth analògic
clear all;

fp=20e3;wp= 2*pi*fp;
Ap=0.5;
fs=90e3;ws= 2*pi*fs;
As=50;

% Càlcul de e2
e2 = 10^(0.1*Ap)-1;

% Ordre del filtre
n = log(sqrt((10^(0.1*As)-1)/e2))/log(fs/fp);
n = ceil(n);

% Freqüència de tall
wc = wp/(e2^(1/(2*n)));

% Paràmetres per a calcular els pols del filtre
k=1:n;
alpha = (2*k-1)*pi/(2*n);

% Determinació dels pols en el prototip
pk = -sin(alpha) +j*cos(alpha);

[B,A]=zp2tf([],pk,1);

[B1,A1] = lp2lp(B,A,wc);

N=500;
wf=2*pi*100e3;

W=0:wf/N:wf;
H=freqs(B1,A1,W);

subplot(1,2,1); plot(W/(2*pi),20*log10(abs(H)));grid;
ylabel(['|H(w)|']);
xlabel(['Freqüència (Hz)']);
subplot(1,2,2); plot(W/(2*pi),20*log10(abs(H)));grid;
```

```
ylabel(['|H(w)|']);
xlabel(['Freqüència (Hz)']);
axis([0 1.1*fp -Ap-0.1 0.1]);
print -depsc2 butter_ej
pause;close;

% Retard de grup

dW=W(2)-W(1);
phase=unwrap(angle(H));
dphase = -diff(phase)/dW;

plot(W(1:length(W)-1)/(2*pi),dphase);grid;
ylabel(['Retard de Grup (s)']);
xlabel(['Freqüència (Hz)']);
print -depsc2 butter_groupdelay_ej
pause;close;
```

Txebychef: txeby_ana_ex.m

```
%% Exemple de filtre passabaix de Txebyxev-I analògic

clear all;

fp=20e3;wp=2*pi*fp;
Ap=0.5;
fs=90e3;ws=2*pi*fs;
As=50;

% Càlcul de e2
e2 = 10^(0.1*Ap)-1;

% Ordre del filtre
n = acosh(sqrt((10^(0.1*As)-1)/e2))/acosh(fs/fp);
n = ceil(n);

% Paràmetres per a calcular els pols i zeros del filtre

theta = (1/n)*asinh(1/sqrt(e2));
k=1:n;
alpha = (2*k-1)*pi/(2*n);

% Determinació dels pols en el prototip
pk = -sinh(theta)*sin(alpha) +j*cosh(theta)*cos(alpha);

[B,A]=zp2tf([],pk,1);
```

```
% Ajustar guany perquè |H(0)|=1
if rem(n,2)==0
   K=A(length(A))*(1/sqrt(1+e2));
else
   K=A(length(A));
end

[B1,A1] = lp2lp(K*B,A,wp);

N=500;
wf=2*pi*100e3;

W=0:wf/N:wf;
H=freqs(B1,A1,W);

subplot(1,2,1); plot(W/(2*pi),20*log10(abs(H)));grid;
ylabel(['|H(w)|']);
xlabel(['Freqüència (Hz)']);
subplot(1,2,2); plot(W/(2*pi),20*log10(abs(H)));grid;
ylabel(['|H(w)|']);
xlabel(['Freqüència (Hz)']);
axis([0 1*fp -Ap-0.1 0.1]);
print -depsc2 cheb1_ej
pause;close;

%% Calcular el retard de grup
dW=W(2)-W(1);
phase=unwrap(angle(H));
dphase = -diff(phase)/dW;

plot(W(1:length(W)-1)/(2*pi),dphase);grid;
ylabel(['Retard de Grup (s)']);
xlabel(['Freqüència (Hz)']);
print -depsc2 cheb1_groupdelay_ej
pause;close;
plot(pk,'x');axis([-1.1 0 -1.1 1.1]);axis equal;
```

Codi de la funció del Matlab easyspec.m

```
function [s,f]=easyspec(x,fs)
%EASYSPEC Easy plot of spectrum estimate
%      S=EASYSPEC(X) will return a spectrum vector of
%      X. [S,F]=EASYSPEC(X,FS) will also return a frequency
%      axis in F, while the sample frequency is given in FS.
%      EASYSPEC(X) and EASYSPEC(X,FS), will plot the spectrum
```

```
%      and return the S vector in Matlab's "ans".
%      Notes:
%      1. Spectrum values are in dB.
%-      2. The frequency domain goes from DC to the Nyquist
%         frequency. The "mirror part" of the spectrum is omitted.
%      3. The sample segments, from which the spectrum is
%         calculated are picked by random. The function might
%         return significantly different results each time it's
%         called to if X isn't stationary.
%      4. EASYSPEC uses a hanning window and zero-pads by a
%-         factor of 4. The spectrum vector will look smooth.

% Eli Billauer, 17.1.01 (Explicitly not copyrighted).
% This function is released to the public domain; Any use is allowed.

if nargin==0
   error('No input vector given');
end

if (nargin==1)
   fs=2;
end

NFFT=16384; NWIN=NFFT/4;
LOOP=100;
win=hanning(NWIN)';

x=x(:)'*(17.127/NFFT/sqrt(LOOP));
n=length(x);
maxshift=n-NWIN;

if (n&lt;2*NWIN)
   error(['Input vector should be at least of length '...
      num2str(2*NWIN)]);
end

s=zeros(1,NFFT);

for i=1:LOOP
   zuz=floor(rand*maxshift);
   s=s+abs(fft([win.*x(1+zuz:NWIN+zuz) zeros(1,NFFT-NWIN)])).^2;
end


s=10*log10(s(1:NFFT/2));
f=linspace(0,fs/2,NFFT/2);
```

```
if nargout==0
   hold off;
   plot(f,s);
   ylabel('Espectre');
   xlabel('Freqüència');
      grid on; zoom on;
end
```