

Modulacions digitals de fase contínua (CPM)

Francesc Rey
Francesc Tarrés

PID_00194505

Índex

Introducció	5
Objectius	6
1. Conceptes bàsics	7
1.1. Motivació de les modulacions CPM	7
1.2. Model de senyal de les modulacions CPM	10
2. Modulació <i>offset</i>-QPSK (OQPSK)	15
3. Modulacions CPFSK (<i>continous phase FSK</i>)	18
4. Modulació MSK (<i>minimum shift keying</i>)	21
5. Modulació GMSK (<i>Gaussian MSK</i>)	24
Conclusions	27
Activitats	29
Bibliografia	30

Introducció

En assignatures bàsiques de la carrera s'han estudiat les modulacions digitals més clàssiques totes elles classificades dins de les anomenades *modulacions lineals*. Tot i que l'ús d'aquestes modulacions està molt estès en la majoria dels sistemes de comunicacions, no completen la llista de possibles modulacions i en alguns casos és necessari recórrer a modulacions més complexes. Les modulacions d'envolupant constant, com el seu nom indica, estan caracteritzades pel fet que l'envolupant del senyal és constant. Aquesta característica les fa molt robustes enfront de les no-linealitats que hi pot haver en la cadena de radiofreqüència.

Com es veurà en el mòdul, en un escenari real no hi ha prou de garantir que una modulació sigui robusta a les no-linealitats sinó que cal tenir cura sobre el seu espectre, factor que impactarà directament en l'eficiència espectral de la modulació. Les modulacions d'envolupant constant no garanteixen un bon control de l'espectre, per la qual cosa caldrà buscar alternatives en modulacions que alhora que robustes a les no-linealitats concentrin la potència en una part de l'espectre. La solució seran les modulacions de fase contínua CPM. Com es veurà, aquestes modulacions poden ser espectralment eficients i alhora eficients en potència.

La primera part del mòdul buscarà motivar la necessitat de les modulacions CPM i també fer-ne una classificació. La resta del mòdul està estructurat com una evolució natural des de la modulació lineal més simple QPSK fins a modulacions CPM més complexes, com la GMSK, passant per les modulacions OQPSK, CPFSK i MSK. L'objectiu serà anar presentant-les de manera progressiva indicant per a cadascuna els trets diferenciadors que les fan útils i també els seus punts febles i limitacions. Les sigles CPM no denoten una modulació en si mateixa sinó una família de modulacions. Aquesta família és prou àmplia i no s'estudiarà de manera completa en aquest mòdul. L'objectiu serà presentar una classificació de les modulacions CPM i descriure breument una de les més complexes que es poden trobar en alguns sistemes de comunicacions comercials quotidians. Per aquest motiu es presentarà la modulació GMSK, ja que forma part del sistema de telefonia mòbil GSM i del sistema de telefonia sense fil DECT.

Objectius

Els objectius que ha d'assolir l'estudiant en acabar aquest mòdul didàctic són els següents:

1. Conèixer els efectes que pateix un senyal quan travessa una no-linealitat principalment produïda en els amplificadors de potència.
2. Argumentar les principals raons que justifiquen l'ús de modulacions d'envelopant constant i modulacions de fase contínua.
3. Conèixer l'estructura de les modulacions CPM i poder fer una classificació de les diferents famílies de modulacions CPM.
4. Enunciar les principals característiques i diferències de les modulacions OQPSK, FSK, CPFSK, MSK, GMSK.
5. Comprendre els avantatges obtinguts pel que fa a l'amplada de banda en treballar amb modulacions CPM.

1. Conceptes bàsics

1.1. Motivació de les modulacions CPM

Les modulacions clàssiques estudiades en assignatures anteriors de la carrera (per exemple, les modulacions QPSK o QAM), modulen l'amplitud o la fase del senyal portador per a transmetre la seqüència de bits d'informació. Una característica d'aquestes modulacions són els canvis en l'amplitud del senyal que es produeixen al llarg del temps que fan que el senyal de radiofreqüència (RF) no sigui d'envolupant constant*. El principal problema dels senyals que no són d'envolupant constant és que, quan travessen una no-linealitat, es produeixen alteracions en el senyal que degraden substancialment la qualitat de la comunicació. En conseqüència, les modulacions que transmeten la informació a través de la seva amplitud, com pot ser la modulació QAM, no són adequades per a usar-les en sistemes amb no-linealitats fortes en la cadena de transmissió.

* En el cas de la modulació QPSK el senyal sí que és d'envolupant constant quan el pols conformador és un pols rectangular, condició que mai no s'aplica en transmissions reals sobre canals de banda limitada, ja que, o bé s'utilitzen polsos de Nyquist –generen un senyal que no és d'envolupant constant–, o bé s'utilitza un pols rectangular i es filtra el senyal amb un filtre passabaix –i es trenca la propietat d'envolupant constant.

Si analitzem en quin o quins punts de la cadena de transmissió podem trobar no-linealitats trobem que és l'amplificador de potència el punt més crític. Quan els amplificadors han de treballar al límit de les seves prestacions per a poder proporcionar la màxima potència en transmissió, aquests entren en saturació i es comporten com a dispositius no lineals. Les principals alteracions que es produeixen en el senyal que no és d'envolupant constant en travessar un amplificador no lineal són una distorsió de la constel·lació, i un recreixement de l'espectre. Tots dos problemes els presentarem breument a fi d'entendre la necessitat de les modulacions CPM.

Quan una modulació travessa una no-linealitat s'hi produeix una distorsió que es presenta en forma de distorsió en el mòdul (amplitud) dels símbols, perquè la relació *amplitud d'entrada - amplitud de sortida* de l'amplificador deixa de ser lineal (tècnicament es parla de la relació AM-AM) i també es manifesta en forma de distorsió en la fase dels símbols perquè l'amplificador introdueix un desfasament que és funció de l'amplitud del senyal (tècnicament es parla de la relació AM-PM). És important aclarir que quan parlem d'amplitud ens estem referint al valor de l'envolupant del senyal. La figura 1 il·lustra el comportament d'un amplificador no lineal i del senyal a la sortida del mateix amplificador quan a l'entrada tenim un senyal d'envolupant constant i quan tenim un senyal que no és d'envolupant constant. Com es pot apreciar, quan el senyal no és d'envolupant constant, a la sortida de l'amplificador l'envolupant del senyal es veu modificada. En l'exemple s'il·lustra una constel·lació 16QAM i es pot veure com a la sortida la constel·lació es veu distorsionada amb un canvi d'amplitud i un gir de fase degut a l'efecte AM/AM i AM/PM de l'amplificador. En el segon cas, quan el senyal és d'envolupant

constant es pot veure que el senyal a la sortida no es veu modificat (només amplificat i desfasat), i, per tant, la informació no es veu alterada en passar pel dispositiu no lineal.

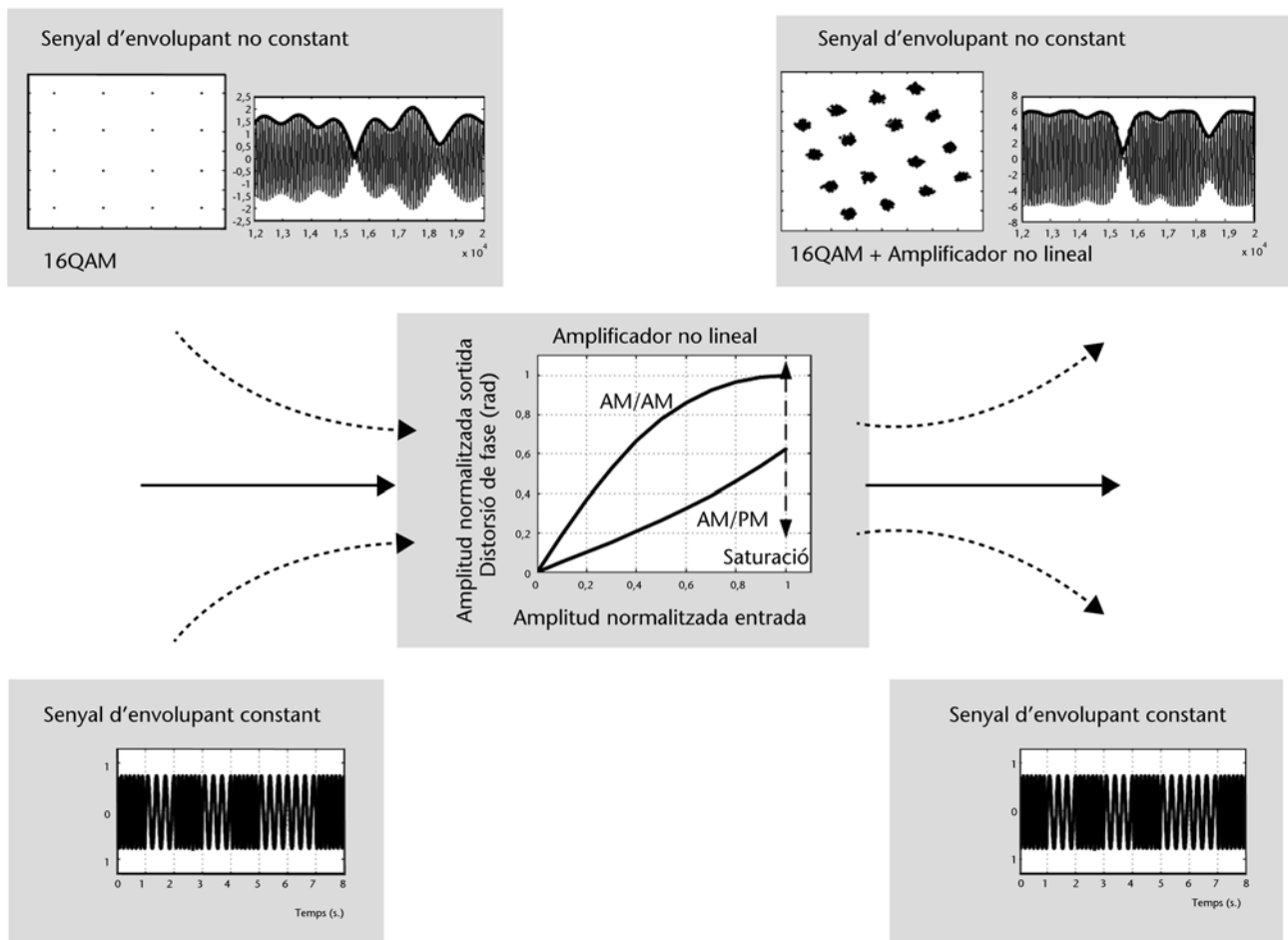


Figura 1. Comportament d'un amplificador no lineal sobre un senyal d'envolupant no constant i sobre un senyal d'envolupant constant

Com ja s'ha comentat, un segon efecte resultant d'amplificar un senyal d'RF que no és d'envolupant constant amb un amplificador no lineal en un punt de treball proper a la saturació és que es produeix un recreixement espectral (eixamplament de l'amplada de banda que ocupa el senyal) que genera espuris fora de la banda. Com que l'espectre de potència de tot transmissor ha de complir una màscara espectral imposada pels organismes reguladors, cal tenir cura especial en l'espectre del senyal tant a l'entrada com a la sortida de l'amplificador, i vetllar perquè el recreixement espectral sigui el mínim possible. La figura següent il·lustra en un exemple l'efecte de recreixement espectral a la sortida d'un amplificador no lineal.

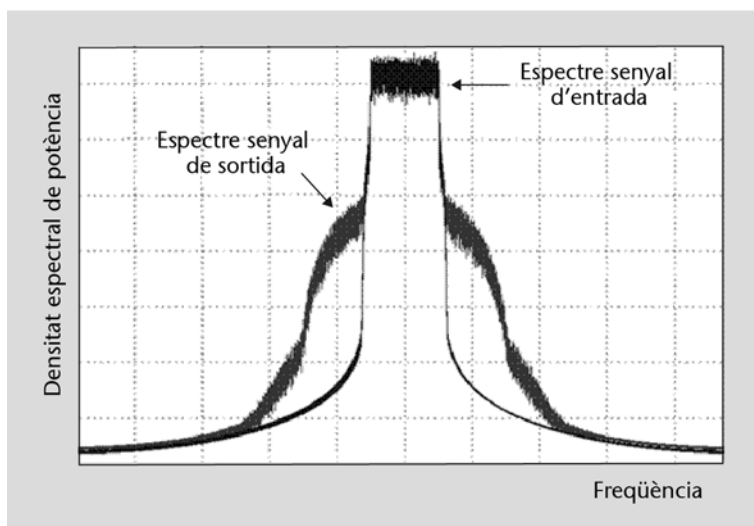


Figura 2. Exemple de recreixement espectral a la sortida d'un amplificador no lineal

Tenint un coneixement precís de les distorsions provocades pels amplificadors no lineals, podem buscar modulacions que presentin un bon comportament enfront d'aquests dispositius. A partir dels aspectes comentats anteriorment podem fixar els requisits de les noves modulacions:

- **Senyals d'envolupant constant.** Com hem vist, quan el senyal és d'envolupant constant, els amplificadors no lineals no distorsionen els símbols d'informació. Per tant, es buscaran modulacions amb aquesta propietat.
- **Senyals espectralment eficients.** L'espectre és un recurs limitat i, per tant, a l'hora de buscar noves modulacions es tindrà en compte l'amplada de banda del senyal resultant. A fi d'aconseguir modulacions amb una amplada de banda reduïda, a part del requisit d'envolupant constant, exigirem que el senyal no presenti canvis instantanis bruscos (discontinuitats), que es traduiran en un eixamplament de l'espectre.

Com a conseqüència dels dos punts anteriors, cal considerar modulacions que garanteixin l'eficiència en potència del sistema i alhora facin un ús eficient de l'amplada de banda. La condició d'envolupant constant, tot i resoldre el problema de les no-linealitats, no serà suficient per a garantir un ús eficient de l'espectre. Caldrà, en conseqüència, afegir una segona restricció a les modulacions per a mantenir l'espectre el més concentrat possible: que siguin de fase contínua (CPM).

Exemple

A mode d'exemple podem citar dos sistemes de comunicacions en els quals l'amplificador és crític i, per tant, en què cal considerar modulacions CPM. El primer exemple el trobem en comunicacions per satèl·lit, en què els amplificadors del satèl·lit han d'oferir molta potència per a vèncer la distància entre el satèl·lit i la Terra, i alhora han de ser eficients en potència, ja que el recurs d'energia en el satèl·lit és molt escàs. Pels dos motius anteriors a aquests amplificadors, tècnicament amplificadors de tub d'ones progressives (TWTA) capaços de donar molta potència, se'ls exigeix treballar prop de saturació i, per tant, presenten fortes no-linealitats. Aquest fet justifica que històricament s'hagi utilitzat la modulació FM (modulació analògica d'envolupant constant) en les comunicacions per

Com es veurà al llarg del mòdul, les modulacions CPM, que també són d'envolupant constant, seran, doncs, una alternativa a les modulacions lineals clàssiques, fet que en justifica l'anàlisi en aquest mòdul didàctic. És important remarcar que les modulacions CPM constitueixen una família de modulacions amb un ample ventall de variants. En aquest curs veurem només aquelles modulacions més conegudes i d'ús estès en alguns sistemes de comunicacions.

satèl·lit, i que sigui poc habitual trobar en comunicacions per satèl·lit modulacions diferents de la QPSK o 8-PSK. Tot i que l'ús de les modulacions CPM no està gaire estès en aquest àmbit, en futurs sistemes de comunicacions per satèl·lit s'està plantejant seriosament l'ús de les modulacions d'envolupant constant i CPM. Un segon exemple el trobem en sistemes de telefonia mòbil. En aquest cas, pel fet que els terminals han de ser de baix cost, s'ha de disposar d'amplificadors senzills i econòmics que poden presentar problemes de linealitat. Per aquest motiu trobem modulacions CPM (la modulació GMSK és una modulació de fase contínua) en el sistema de telefonia mòbil GSM i en el sistema de telefonia sense fil DECT.

1.2. Model de senyal de les modulacions CPM

Una modulació de fase contínua és una modulació d'envolupant constant que té la forma d'ona següent:

$$s_{CPM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t, \alpha) + \phi_o) \quad (1)$$

en què A_c és l'amplitud del senyal portador que fixa la potència del senyal transmès, f_c és la freqüència portadora, ϕ_o correspon a una constant de fase arbitrària, i $\phi(t, \alpha)$ conté la moduladora de fase. L'expressió genèrica de l'expressió 1 és vàlida per qualsevol modulació d'envolupant constant. Per a garantir que la modulació és de fase contínua cal introduir una restricció a la funció $\phi(t, \alpha)$, que aquesta sigui contínua. Per a poder garantir aquesta restricció, la funció $\phi(t, \alpha)$ està determinada per l'expressió:

$$\phi(t, \alpha) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \cdot h \cdot q(t - nT) \quad (2)$$

en què α_n és una seqüència de símbols i.i.d. que corresponen als símbols d'informació per transmetre, h és l'índex de modulació, i $q(t)$ és el pols que defineix com evoluciona la fase al llarg del temps. La característica d'aquest pols serà molt important a l'hora de perfilar l'espectre del senyal modulad. Tot i que per completitud ens referim α_n com una seqüència de símbols, la majoria de modulacions CPM a la pràctica són binàries i, per tant, podem llegir α_n com seqüència de bits d'informació i $T = T_b$ la durada d'un bit. La implementació d'un modulador CPM, en el qual s'ha de garantir continuïtat de fase en canviar de símbol, sovint es fa utilitzant un modulador d'FM que, com que presenta un integrador sobre el senyal d'entrada, garanteix la continuïtat de la fase del senyal modulad. En conseqüència, serà important introduir en el disseny la derivada del pols $q(t)$, que representarem com a $g(t)$:

$$g(t) = \frac{dq(t)}{dt}; \quad q(t) = \int_{-\infty}^t g(\lambda) d\lambda \quad (3)$$

En la figura 3 s'il·lustra l'esquema d'un modulador CPM que genera el senyal de l'equació 1. A partir de la seqüència de símbols α_n , que correspon als sím-

bols d'informació que es volen transmetre, es genera un senyal amb modulació PAM utilitzant el pols conformador $g(t)$, que anomenarem $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \cdot g(t - nT) \quad (4)$$

Aquest senyal $x(t)$ és un senyal continu en temps (sempre que el pols $g(t)$ garanteixi aquesta condició) i constituirà la freqüència instantània de la modulació CPM. Multiplicant aquest senyal $x(t)$ per l'índex de modulació i utilitzant un modulador d'FM convencional aconseguim generar el senyal CPM $s_{CPM}(t)$ definit en l'equació 1. Utilitzant les expressions 2-4 i el bloc modulador d'FM, demostrem a continuació que el senyal a la sortida del modulador es correspon amb la forma d'ona de l'equació 1.

$$\begin{aligned} s_{CPM}(t) &= A_c \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi h \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda + \phi_o \right) \\ &= A_c \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi h \int_{-\infty}^t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \cdot g(\lambda - nT) d\lambda + \phi_o \right) \\ &= A_c \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \cdot q(t - nT) + \phi_o \right) \\ &= A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t, \alpha) + \phi_o) \end{aligned}$$

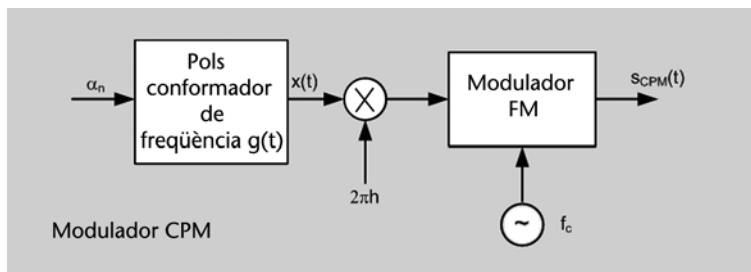


Figura 3. Modulador CPM

Cal observar que la modulació CPM estarà controlada per la fase $\phi(t, \alpha)$ definida en l'equació 2. Aquesta fase està parametritzada per l'índex de modulació h i el pols $q(t)$, o equivalentment $g(t)$. Per tant, fixant valors per a aquests dos paràmetres es poden obtenir famílies de modulacions CPM. Podem, per tant, fer algunes classificacions per a les modulacions CPM segons aquests paràmetres.

- **Full response CPM** enfront **partial response CPM**. Quan la durada del pols $g(t)$ coincideix amb la durada d'un símbol d'informació (és a dir, quan $g(t) = 0$ per a $t > T$) el senyal CPM es denomina de resposta completa o *full response CPM*. Al contrari, si la durada del pols $g(t)$ és més gran que el temps de símbol, quan $g(t) \neq 0$ per a $t > T$, el senyal CPM es denomina de resposta parcial o *partial response CPM*. La figura 4 mostra alguns exemples de forma de pols per a $g(t)$ i la seva funció $q(t)$ associada.

- **Modulacions CPFSK** (de l'anglès *continuous phase frequency-shift-keying*). La subclasse de modulacions *full response CPM* amb pols $g(t)$ rectangular i índex de modulació arbitrari s'anomena *modulacions CPFSK*. Que tot i que es presenten en aquest tema com una subfamília de les modulacions CPM, històricament van aparèixer primer (com a extensió de les modulacions de freqüència FSK).
- **Modulacions MSK**. La subclasse de modulacions *full response CPM* amb índex de modulació $h = 0,5$ es denomina de manera generalitzada modulacions MSK (de l'anglès *minimum shift-keying*). Típicament s'utilitza el pols rectangular per a la funció $g(t)$, i per tant la modulació MSK sempre s'entén com una modulació CPM amb índex de modulació $h = 0,5$ i pols $g(t)$ rectangular de durada T . Quan s'utilitza un pols diferent (poc habitual) s'indica explícitament.
- **Modulació GMSK** (de l'anglès *Gaussian minimum-shift-keying*). Dins de la subclasse de modulacions *partial response CPM*, la més popular, i que analitzarem en aquest mòdul, és la modulació GMSK, que s'obté utilitzant un filtre gaussià per a conformar el pols $g(t)$. El motiu pel qual s'utilitza aquest pols és que s'aconseguirà una modulació amb menys lòbuls secundaris de l'espectre i, per tant, espectralment més eficient.
- **Modulacions L-REC i L-RC**. Representant com a L la durada del pols en temps de símbol ($T = L \cdot T$), i utilitzant les sigles *REC* per a referir-se a un pols $g(t)$ rectangular i *RC* per a representar un pols $g(t)$ cosinus realçat (*raised cosine*), es pot parlar de manera genèrica de les modulacions *L-REC* i *L-RC*. Com en el cas de GMSK, la introducció de polsos més suaus (diferents del rectangular) estarà justificada pel fet que s'obtindran modulacions espectralment més eficients (els lòbuls secundaris es reduiran).

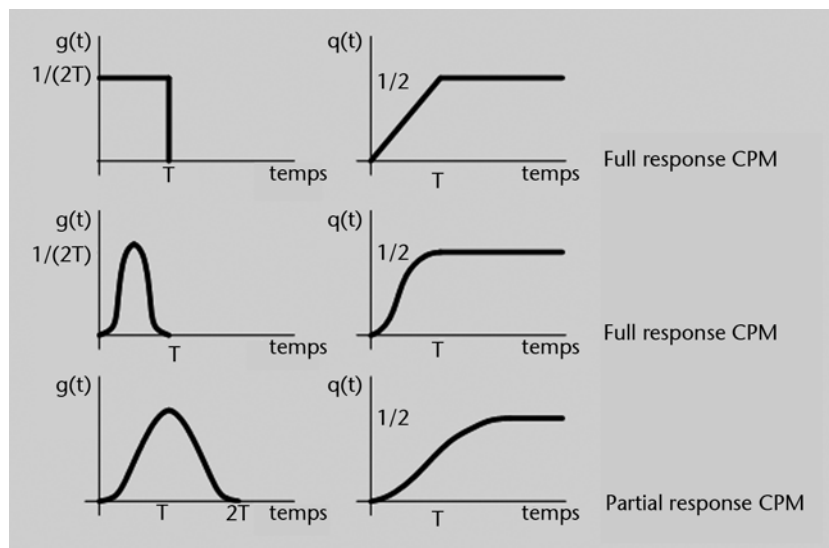


Figura 4. Exemples de polsos $g(t)$ i $q(t)$ per modulacions CPM de resposta completa i resposta parcial

A partir dels polsos de la figura 4 i de l'equació (2) es pot veure que un símbol (bit) α_n contribueix a la fase total del senyal CPM $2\pi \cdot \alpha_n \cdot h \cdot q(t - nT)$, i que passats T segons (en què T és la durada del pols $g(t)$) el bit α_n manté per sempre una contribució a la fase del senyal de $\pi \cdot \alpha_n \cdot h$ radians. En conseqüència, la fase en un instant determinat no depèn només del bit actual sinó també del valor de tots els bits passats, i genera una modulació amb memòria, característica de les totes les modulacions CPM.

Per a ajudar a comprendre l'existència d'aquesta memòria, i també la propietat de continuïtat de fase de les modulacions CPM i la manera de dissenyar el detector òptim, és freqüent representar el diagrama de Trellis de la seva fase. El diagrama de Trellis de la fase d'una modulació de fase contínua representa totes les trajectòries possibles que pot recórrer la fase instantània del senyal modulad en funció de les seqüències possibles de símbols d'informació α_n . La figura següent il·lustra dos exemples de les possibles trajectòries de fase en radians per a una modulació CPFSK i una modulació GMSK. Es pot apreciar la continuïtat de fase (característica de la modulació CPM) i l'evolució de la fase amb canvis més bruscos (CPFSK) o més suaus (GMSK) depenent del pols $g(t)$. Com es veurà més endavant, la suavitat en les variacions de la fase es traduirà en una amplada de banda del senyal CPM més estreta i, en conseqüència, en una eficiència espectral millor.

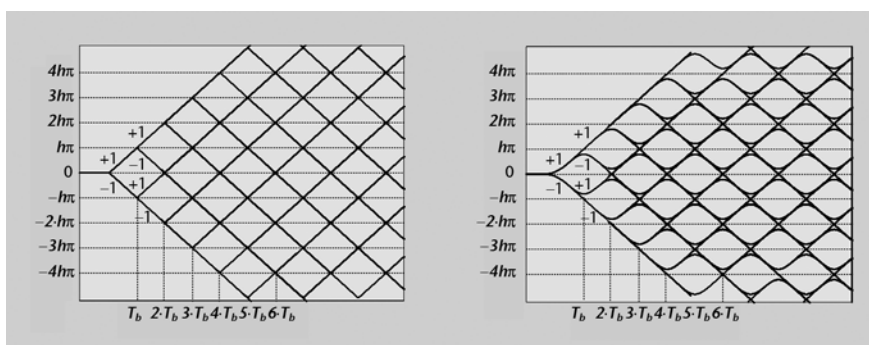


Figura 5. Trajectòries de fase (en radians) de modulacions CPM binàries $T = T_b$. Modulació CPFSK (esquerra) i modulació GMSK (dreta)

El fet que la modulació sigui amb memòria (fet que s'aprecia clarament en les figures anteriors) serà determinant a l'hora de plantejar esquemes per a demodular el senyal CPM. El detector òptim d'una modulació CPM s'implementarà mitjançant un algoritme que estimi la seqüència de bits més probable a partir de la seqüència de fases rebuda (estimador MLSE, *maximum-likelihood sequence estimator*) en contraposició dels detectors utilitzats en les modulacions lineals sense memòria, en què una detecció bit a bit és òptima. Una opció subòptima (més senzilla des d'un punt de vista d'implementació) serà implementar un descodificador de fase diferencial. Si la durada del pols és d'un temps de bit $T = T_b$, quan es transmet un +1 es produirà un increment de fase de $\pi \cdot h$ radians passats T_b segons, mentre que si es transmet un -1 es produirà un decrement de fase de $\pi \cdot h$ radians passat aquest temps. Per tant, detectada la variació de fase entre dos instants de temps es pot estimar el bit transmès. L'estratègia anterior resulta subòptima, a causa de la presència de soroll angu-

lar que provoca errors en la detecció que degraden les prestacions. Cal, a més, advertir que la degradació serà superior en modulacions de resposta parcial (per exemple, GMSK), ja que el pols s'allarga més d'un període de bit i fa més complexa i sensible a error la descodificació diferencial. Per aquest motiu, l'estimador MLSE implementat mitjançant l'algoritme de Viterbi acostuma a ser l'esquema clàssic per a desmodular les modulacions CPM.

2. Modulació *offset*-QPSK (OQPSK)

Abans de començar aquest apartat cal deixar clar que la modulació *offset*-QPSK no és una modulació de fase contínua. Malgrat això se n'inclou la descripció en aquest mòdul, ja que facilita la justificació de l'ús de les modulacions CPM i alhora, com es veurà més endavant, permetrà formular en termes de OQPSK la modulació MSK, que sí que és una modulació de fase contínua.

Idealment, la modulació QPSK, que per la seva simplicitat és àmpliament utilitzada (i en general les modulacions M-PSK), és una modulació d'envolupant constant i, per tant, potencialment seria robusta a les no-linealitats dels amplificadors de potència. Malgrat això, perquè aquesta modulació sigui d'envolupant constant cal que el pols conformador sigui un pols rectangular. Com ja s'ha discutit en altres cursos, el pols rectangular no és adequat per a comunicacions digitals quan el canal està limitat en banda, ja que espectralment és molt ineficient (típicament hi ha una màscara espectral que cal complir per no injectar potència interferent fora de la banda assignada a un servei). A fi de resoldre la ineficiència de l'espectre de la QPSK amb pols rectangular es poden suggerir dues alternatives:

- 1) Utilitzar un pols rectangular i posteriorment filtrar el senyal amb un filtre passabaix que redueixi l'ocupació fora de banda. En aquest primer cas cal observar que després del filtre passabaix el pols conformador deixa de ser rectangular (en veure's filtrat pel filtre passabaix).
- 2) Utilitzar polsos de Nyquist amb un cert factor d'excés de banda (*roll-off*) que garanteixin que el senyal està limitat en banda. Aquesta segona opció és preferible a la primera, ja que és espectralment més eficient, en tenir més control sobre l'espectre.

Independentment de la solució adoptada, el problema que apareix en deixar d'utilitzar un pols conformador rectangular és que el senyal deixa de ser d'envolupant constant, i per tant serà sensible a les no-linealitats dels amplificadors. Com ja s'ha descrit en la introducció d'aquest mòdul, els efectes de les no-linealitats sobre el senyal són una distorsió dels símbols i un recreixement espectral. Vegeu que aquest eixamplament de l'amplada de banda en travessar la no-linealitat actua en contra de la limitació de l'espectre que es perseguia amb el filtre passabaix o amb els polsos de Nyquist, amb l'agregant que el recreixement espectral pot ser molt gran si l'amplificador treballa prop de la saturació.

A continuació analitzarem el problema de la QPSK i buscarem la manera de reduir l'efecte del recreixement espectral provocat per les no-linealitats d'un amplificador potencial. Cal tenir present que el recreixement espectral serà més

gran com més grans siguin les fluctuacions d'envolupant del senyal (conceptualment podríem dir que com menys "d'envolupant constant" sigui el senyal) i, per tant, caldrà reduir al màxim les fluctuacions de fase. Una anàlisi de l'envolupant del senyal mostra que, en el cas de la QPSK (en què els símbols poden prendre els valors de fase $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$ i $7\pi/4$), es poden produir salts de fase de fins a π radians (per exemple, quan transmetem el símbol de fase $\pi/4$ i seguidament transmetem el símbol de fase $5\pi/4$), que poden generar grans fluctuacions d'envolupant (instantàniament l'envolupant pot arribar a zero). La figura 6 il·lustra un exemple d'un senyal modulad amb QPSK en què es veuen les fluctuacions d'envolupant. Es pot observar que l'envolupant del senyal es fa zero en alguns instants de temps.

Una estratègia per a reduir aquestes fluctuacions d'envolupant i, en conseqüència, el creixement espectral, és limitar els salts de fase i evitar que es produeixin salts de π radians. Desplaçant el component en quadratura respecte el component en fase mig temps de símbol ($T_s/2$ segons) garantim que el component en fase i el component en quadratura no puguin canviar simultàniament. El resultat és que es produeix un canvi de fase cada $T_s/2$ segons (canvia alternativament la fase i la quadratura) però que aquest salt instantani de fase no excedeixi mai $\pm\pi/2$ radians. Cal observar que aquesta simple estratègia no afecta la velocitat de transmissió ni modifica l'espectre del senyal (el pols conformador, que serà responsable de la forma de l'espectre, continua essent el mateix) però permet reduir les fluctuacions d'envolupant. Aquesta modulació rep el nom de *offset-QPSK* (OQPSK) o *staggered QPSK*, i matemàticament té la forma d'ona següent:

$$s_{OQPSK}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_i(n) p(t - nT_s) \cos(2\pi f_c t + \phi_o) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_q(n) p(t - nT_s - T_s/2) \sin(2\pi f_c t + \phi_o)$$

La figura 6 il·lustra un exemple d'un senyal modulad amb OQPSK en què es veuen els símbols transmesos i les fluctuacions d'envolupant. Es pot apreciar com les fluctuacions de fase són més petites perquè els salts de fase instantanis, a diferència de QPSK, són només de $\pm\pi/2$.

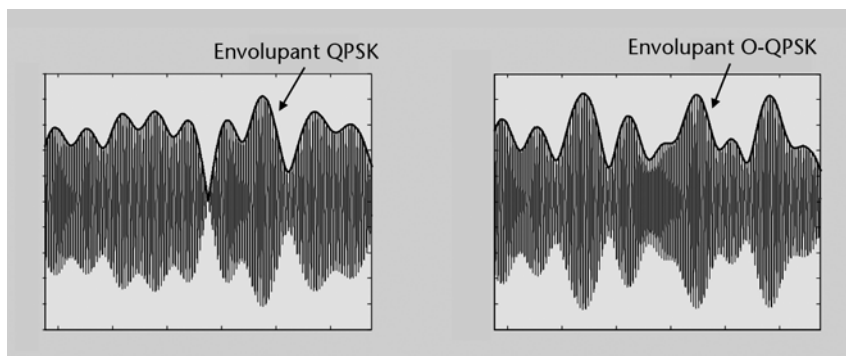


Figura 6. Comparació de l'envolupant de modulació QPSK (esquerra) i modulació O-QPSK (dreta) Pols de Nyquist amb factor d'excés de banda (*roll-off*) 0

L'esquema de detecció per a la modulació OQPSK no és gaire diferent de la de QPSK. Només caldrà corregir el retard de mig símbol aplicat a la branca de quadratura abans de la desmodulació, i posteriorment desmodular el senyal de la mateixa manera que es faria amb QPSK. En conseqüència el receptor serà una mica més complex, ja que serà necessari estimar i corregir aquest retard relatiu entre branques. Respecte a la corba de probabilitat d'error per a OQPSK, com que l'esquema de detecció serà el mateix, la probabilitat d'error serà la mateixa que per a QPSK:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Com es pot apreciar en la figura 6, la modulació OQPSK no és d'envolupant constant i no serà robusta enfront de les no-linealitats. Malgrat això, quan la no-linealitat no sigui gaire severa, aquesta solució de compromís, que permet reduir les fluctuacions d'envolupant respecte a la modulació QPSK mantenint la simplicitat de la modulació, serà una solució vàlida. Aquest motiu justifica que OQPSK sigui una modulació que es pot trobar en alguns sistemes de comunicacions. Ara bé, enfront de fortes no linealitats o quan calgui tenir una cura especial de l'espectre, OQPSK no serà la modulació més adequada, i caldrà trobar noves modulacions més robustes enfront de les no-linealitats. Un cop vista la millora obtinguda eliminant els salts de fase de π radians i limitant aquests salts a $\pm\pi/2$, podem pensar que l'estratègia a seguir per a dissenyar modulacions més avançades serà actuar sobre els salts de fase. En efecte, el pas natural serà dissenyar una modulació que sigui contínua en fase (CPM) i, per tant, que elimini per complet el salts en la fase. El resultat serà una modulació més robusta enfront de les no-linealitats i alhora amb un control millor de l'espectre.

3. Modulacions CPFSK (*continuous phase FSK*)

La modulació FSK de fase contínua és una variant de les modulacions digitals de freqüència (FSK) amb la restricció que no hi hagi salts de fase entre símbols. D'aquesta manera, tal com s'ha justificat en l'apartat anterior podrem dissenyar una modulació que sigui espectralment eficient (els salts de fase provoquen un increment dels lòbuls de l'espectre). Aquesta condició, imposada en el disseny, farà que la modulació sigui de fase contínua i, per aquesta raó, que es pugui estudiar com un cas particular de les modulacions CPM (la modulació CPFSK respon a una modulació *full response CPM* amb pols $g(t)$ rectangular i índex de modulació arbitrari). Tot i que en aquest mòdul es presenta com una variant de les modulacions CPM, històricament la modulació CPFSK es va formular com un cas particular de les modulacions FSK i és anterior a les modulacions CPM.

En les modulacions FSK els símbols d'informació determinen directament la freqüència instantània del senyal modulad. Els bits s'agrupen en símbols de b bits per a donar lloc a un conjunt de $M = 2^b$ freqüències diferents. Sense pèrdua de generalitat tractem en aquest mòdul les modulacions de freqüència binàries ($b = 1, M = 2$), ja que gran part dels sistemes de comunicacions basats en modulacions FSK i CPM són binaris. Assumint, per tant, el cas binari, les possibles freqüències instantànies són:

$$f_i(n) = f_c + f_d \alpha_n \quad (5)$$

en què f_d és la desviació de freqüència i té unitats de Hz/V. Aquests valors de freqüència instantània generen una modulació FSK de freqüència constant dins del període corresponent a cada símbol, però, com es pot apreciar en la figura 8, no garanteixen que la modulació presenti continuïtat de fase en canviar de símbol (vegeu la figura corresponent per a 2FSK).

Com ja s'ha discutit anteriorment, resultarà interessant garantir la continuïtat de fase amb l'objectiu de mantenir l'espectre confinat dins de l'amplada de banda de transmissió i aconseguir modulacions espectralment eficients. La manera pràctica d'aconseguir que la freqüència instantània respongui a l'equació 5 i alhora garantir la continuïtat de fase entre símbols, serà utilitzant un modulador de freqüència (modulador d'FM), tal com es va presentar en la figura 3. A causa de l'integrador del senyal d'entrada, present en un modulador d'FM, la continuïtat de la fase del senyal modulad quedarà garantida.

La freqüència instantània resultant per al senyal $s_{CPM}(t)$ de la figura 3 és $f_i = f_c + h \cdot x(t)$, i per tant, les condicions de freqüència instantània de l'expressió 5 s'assoleixen si el pols $g(t)$ és un pols rectangular (amb amplitud $A = 1/(2 \cdot T_b)$), i identificant la relació següent entre la desviació de freqüència f_d i l'índex de modulació h : $f_d = h/(2 \cdot T_b)$.

En la figura 7, es mostra un tram del senyal temporal modulad en 2CPFSK. La fase del senyal modulad es manté contínua fins i tot en les transicions de símbol. En la figura es poden apreciar dos tipus de símbol, els de freqüència més gran, corresponents a la transmissió d'un bit '1', i els de freqüència més petita, corresponents a la transmissió d'un bit '0'.

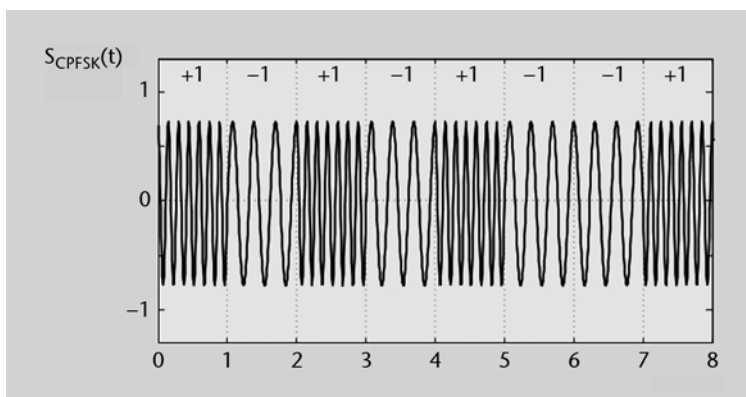


Figura 7. Exemple de modulació 2CPFSK. Senyal temporal durant la transmissió dels bits {1 0 1 0 1 0 0 1}

Per a veure la repercussió que té la continuïtat de fase sobre l'acotació d'amplada de banda, es mostra en la figura 8 l'espectre (obtingut mitjançant simulacions) per a una modulació 2FSK amb salts de fase i per a una modulació 2CPFSK. Els dos senyals tenen la mateixa potència i s'ha triat un valor idèntic de desviació de freqüència. En la part esquerra de la figura es mostra la forma d'ona en temps de les dues modulacions binàries. Aquesta representació en el domini del temps permet visualitzar les discontinuïtats de senyal (o salts de fase) per a la modulació en 2FSK en les transicions de símbol. Així mateix, es pot veure que hi ha continuïtat de fase per a la modulació 2CPFSK. A la dreta es pot comparar l'espectre de les dues modulacions amb lòbul principal més ample per a la modulació 2FSK (i amb una ratlla espectral) i en què es pot veure la millora que representa per a l'espectre el fet de mantenir la fase contínua (repercuteix en un lòbul principal més estret en 2CPFSK respecte a 2FSK, que no presenta ratlles espectrals).

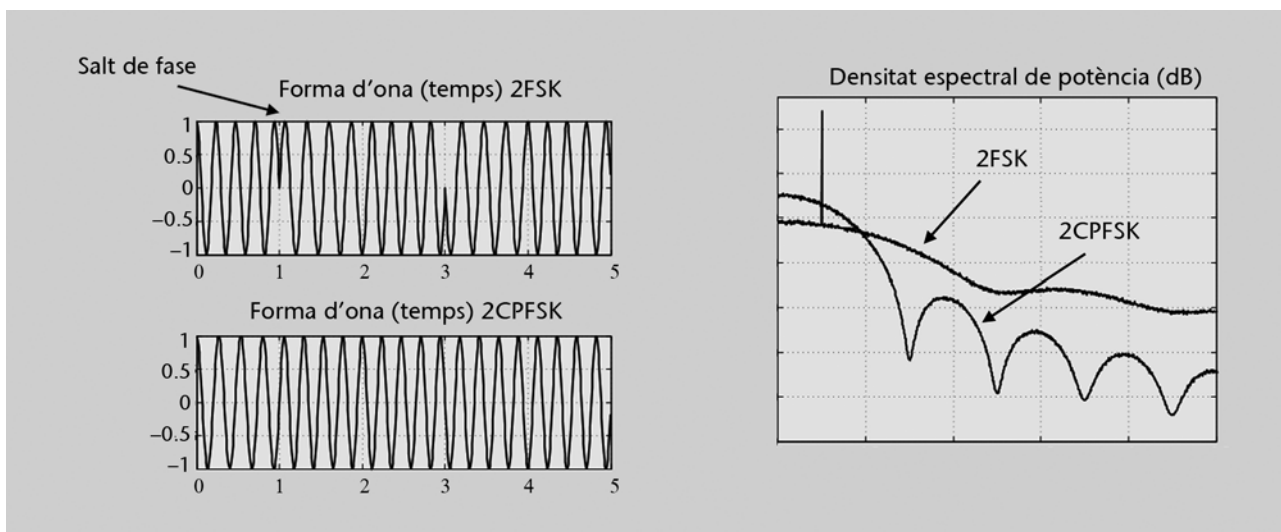


Figura 8. Comparació de les modulacions 2FSK i 2CPFSK. Forma d'ona (esquerra) i densitat espectral de potència en dB respecte de la freqüència normalitzada a la velocitat de símbol (dreta)

Una diferència entre la modulació 2FSK i la modulació CPFSK és que la primera no té memòria (la fase del senyal només depèn del bit d'informació que s'està enviant), mentre que la segona té memòria (la fase instantània depèn del bit d'informació que s'està enviant i dels bits passats). Aquesta memòria, responsable de garantir la continuïtat de fase en la transició entre símbols, comportarà un increment substancial en la complexitat a l'hora d'implementar els receptors i a l'hora d'analitzar la modulació. Una excepció serà la modulació MSK, que, com ja s'ha comentat a l'hora de fer la classificació de les modulacions CPM, és un cas particular de modulació CPFSK amb desviació de freqüència $f_d = 1/(4T_b)$. En l'apartat següent es veurà que aquesta modulació és una excepció entre les modulacions CPM, en poder formular-la segons una modulació lineal (OQPSK). Per aquest motiu MSK constitueix una de les modulacions CPM més simples que pot ser desmodulada, com les modulacions lineals, d'acord amb la detecció símbol a símbol a la sortida d'un filtre adaptat.

4. Modulació MSK (*minimum shift keying*)

La modulació MSK (*minimum shift keying* o canvi mínim de fase) es pot analitzar com un cas particular de CPFSK (i, per tant, com un cas particular de modulació *full response CPM*) amb índex de modulació $h = 0,5$ i pols $g(t)$ rectangular de durada T_b . Les equacions per als polsos $g(t)$ i $q(t)$ estan determinades per:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2T_b}, & 0 \leq t \leq T_b \\ 0, & \text{resta} \end{cases}; \quad q(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{2T_b}, & 0 \leq t \leq T_b \\ \frac{1}{2}, & t > T_b \end{cases}$$

I, seguint la descripció de l'apartat anterior, la desviació de freqüència és de $f_d = h \cdot A = 1/(4T_b)$. Aquesta separació entre freqüències és la mínima per a garantir ortogonalitat entre les dues formes d'ona (la corresponent a la transmissió del símbol $\alpha_k = +1$ i la corresponent a la transmissió del símbol $\alpha_k = -1$) fet que dóna nom a la modulació. Substituint els valors anteriors en l'expressió general d'una modulació CPM (1) s'obté l'expressió següent per a la modulació MSK:

$$\begin{aligned} s_{MSK}(t) &= A_c \cos \left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{2} \sum_{i=-\infty}^{k-1} \alpha_i + \pi \alpha_k \left(\frac{t - kT_b}{2T_b} \right) + \phi_o \right) \\ &= A_c \cos \left(2\pi f_c t + \phi_k + \pi \alpha_k \left(\frac{t - kT_b}{2T_b} \right) + \phi_o \right) \end{aligned} \quad k \cdot T_b \leq t \leq (k+1)T_b \quad (6)$$

Observeu que el terme ϕ_k , que conté la memòria de tots els símbols anteriors (fins al símbol $k-1$), és el responsable de garantir la continuïtat de fase de la modulació.

Una propietat interessant de la modulació MSK és que es pot expressar com una modulació OQPSK amb polsos sinusoidals. Per a poder arribar a aquesta conclusió només cal desenvolupar l'expressió 6 i interpretar alguns dels termes que queden multiplicant en els polsos. Aquesta expressió equivalent està representada per:

$$\begin{aligned} s_{MSK}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c I_i(n) p(t - 2nT_b) \cos(2\pi f_c t + \phi_o) - \\ &\quad - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c I_q(n) p(t - 2nT_b - T_b) \sin(2\pi f_c t + \phi_o) \end{aligned} \quad (7)$$

en què els símbols $I_f(n)$ i $I_q(n)$ estan relacionats amb els bits d'informació α_k i el pols conformador és:

$$p(t) = \begin{cases} \sin \frac{\pi t}{2T_b}, & 0 \leq t \leq 2T_b \\ 0, & \text{resta} \end{cases} \quad (8)$$

Comparant l'expressió anterior amb l'expressió de la modulació OQPSK és fàcil veure que són iguals amb la particularitat que el pols conformador es correspon a una sinusoide. Tot i que la demostració per arribar a l'expressió 7 a partir de la 6 no és complexa, desenvolupar-la va més enllà dels objectius d'aquest mòdul i, per tant, remetem el lector interessat a alguna de les referències de la bibliografia (vegeu Carlson, 2001; Sklar, 2003). La figura 9 il·lustra la descomposició d'un senyal MSK en els seus components de fase i quadratura. En la figura es pot observar que el resultat es correspon amb l'expressió 7: els components de fase i quadratura corresponen a modulacions lineals amb el pols conformador definit en l'expressió 8 en què els components en fase i en quadratura estan retardats mitja durada de pols respecte al component en quadratura.

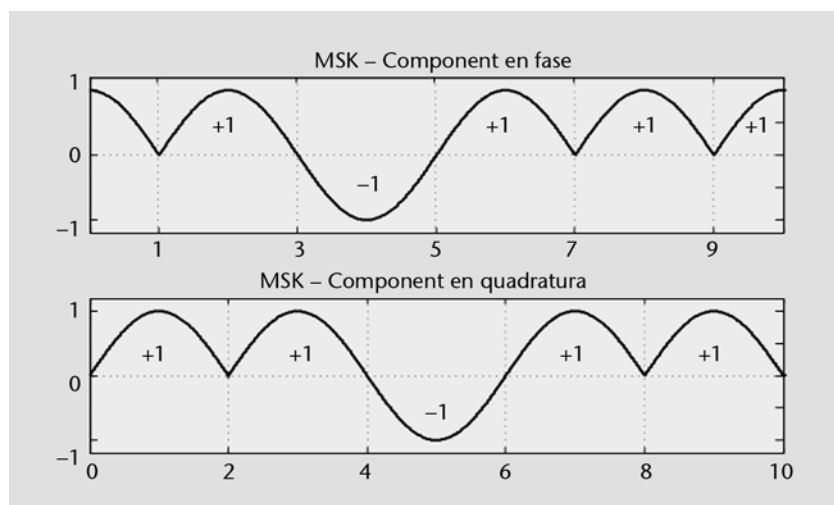


Figura 9. Descomposició de l'equivalent passabaix complex d'un senyal MSK en els seus components de fase i quadratura. Representació d'acord amb una modulació OQPSK amb polsos sinusoidals

Com es pot intuir, aquesta propietat que permet expressar la modulació MSK com una modulació OQPSK simplificarà molt tant l'anàlisi com la implementació d'aquesta modulació. Tot i tractar-se d'una modulació amb memòria i que, per tant, requeriria un detector amb memòria (per exemple, un estimador MLSE), la modulació MSK es pot desmodular a partir d'un detector bit a bit de les dades rebudes com si es tractés d'una modulació OQPSK. Per finalitzar aquesta reflexió cal dir que, tot i utilitzar un detector sense memòria, la memòria és present en la modulació MSK. Aquesta apareix en la relació entre els símbols $I_f(n)$ i $I_q(n)$ que es detecten i els bits d'informació α_k . Aquesta relació és, però, molt senzilla i, per tant, requerirà un processament simple per a obtenir els bits transmesos α_k a partir dels símbols $I_f(n)$ i $I_q(n)$.

Lectura complementària

A. B. Carlson (2001). *Communication Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication* (4a. ed., cap. 14.1). McGraw-Hill.

B. Sklar (2003). *Digital Communications: Fundamentals and Applications* (2a. ed., cap. 7.9). Prentice Hall.

Lectura complementària

K. S. Marvin (2003, juny). "Multiple-Bit Differential Detection of Offset QPSK". *IEEE Trans. on Communications* (vol. 51, núm. 6).

Tot i que amb la modulació MSK ja tenim resolts tots els problemes presentats en la introducció –tenim una modulació d’envolupant constant i, per tant, robusta a les no-linealitats–, en sistemes de comunicacions amb fortes restriccions espectrals, pot succeir que la densitat espectral de potència de la modulació MSK no compleixi els requisits espectrals i, per tant, sigui necessari recórrer a modulacions més eficients espectralment. Com ja es va discutir en parlar de la modulació OQPSK, filtrar el senyal abans de transmetre’l no és la millor solució, ja que això trencaria la propietat d’envolupant constant i, per tant, faria la modulació sensible a les no-linealitats. L’estratègia serà, doncs, buscar modulacions que continuïn mantenint la propietat d’envolupant constant i alhora ocupin una amplada de banda més petita. La solució es pot obtenir modificant els paràmetres de la família de modulacions CPM. Bàsicament la solució consistirà a actuar sobre el pols $g(t)$. Si en lloc d’utilitzar un pols rectangular, com s’utilitza en la modulació CPFSK (i, per tant, en la modulació MSK), s’utilitza un pols més suau, aconseguirem que l’evolució de la fase sigui més suau i, per tant, que els lòbuls secundaris de l’espectre siguin més petits. Aquesta idea es pot apreciar de manera intuïtiva en la figura 5, en què es representaven les trajectòries de fase d’una modulació CPFSK (pols rectangular) i una modulació GMSK (pols gaussià –com veurem, més suau que el rectangular). Com es pot veure, els canvis bruscos de pendent en la fase de la modulació CPFSK desapareixen amb la modulació GMSK, i això, com veurem, es reflectirà en l’espectre. Tot i que el ventall de polsos que podem dissenyar és molt gran, en l’apartat següent només descriurem molt breument el pols (i l’espectre associat) utilitzat en la modulació GMSK que podem trobar en alguns sistemes de comunicacions molt quotidians, com són el sistema de telefonia mòbil GSM i el sistema de telefonia sense fil DECT.

5. Modulació GMSK (*Gaussian MSK*)

La modulació GMSK és un exemple de modulació *partial-response* CPM amb índex de modulació $h = 0,5$, i en què el pols $g(t)$ s'obté filtrant un pols rectangular de durada T_b amb un filtre de resposta impulsional gaussiana (resulta, doncs, evident, que la durada del pols $g(t)$ serà sempre superior a un temps de símbol T_b). Com veurem a continuació, amb aquest tipus de pols es pot tenir un control dels lòbuls secundaris de l'espectre i aconseguir modulacions en les quals la potència del senyal estigui més concentrada dins de l'amplada de banda de transmissió. El preu a pagar serà, però, que els esquemes de transmissió i recepció seran més complexos. Aquest increment en complexitat justificarà que aquestes modulacions s'utilitzin només quan el sistema presenti restriccions d'espectre i en què hi hagi elements fortament no lineals, dues raons que requereixin modulacions espectralment molt eficients i d'envolupant constant.

La figura següent il·lustra gràficament la manera d'obtenir el pols $g(t)$ i la seva expressió matemàtica:

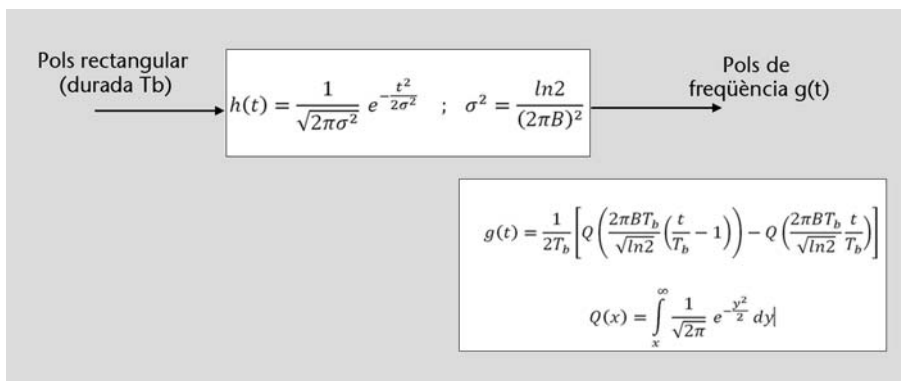


Figura 10. Pols de freqüència $g(t)$ per modulació GMSK

En la figura es veu clarament com el pols $g(t)$ s'obté filtrant un pols rectangular amb un filtre de resposta impulsional gaussiana en què B (paràmetre de configuració de la modulació GMSK) és l'amplada de banda d'aquest filtre gaussià. La figura següent mostra alguns exemples de pols $g(t)$ en funció del producte $B \cdot T_b$.

Nota

Com que habitualment la modulació GMSK és binària, en aquest apartat ens referirem a T_b com la durada del pols rectangular. En general, si la modulació no fos binària hauria de ser T .

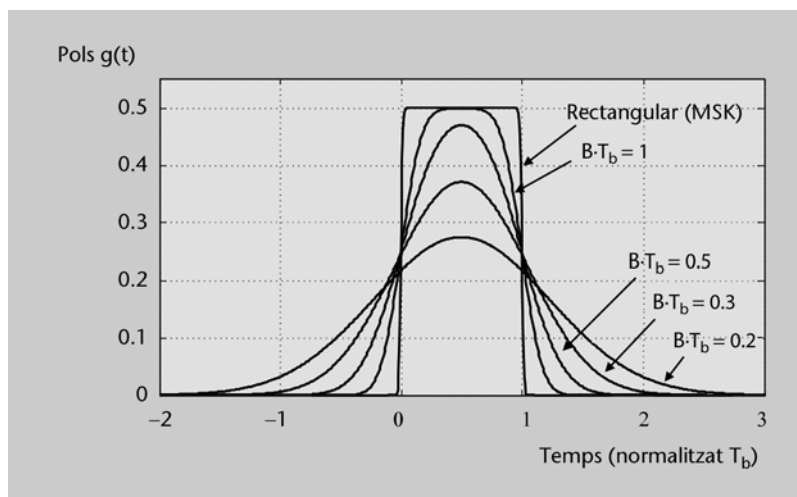


Figura 11. Exemples de pols de freqüència $g(t)$ per a diferents valors de $B \cdot T_b$

Com es pot veure en la figura, la durada del pols s'estén més enllà d'un temps de símbol (cal recordar que GMSK és una modulació *partial-response* CPM). Aquest fet provocarà que aparegui interferència intersimbòlica (ISI), que dificultarà la descodificació del senyal, i que pot provocar degradacions en el sistema. Aquesta ISI, però, com que és controlada i coneguda no presentarà problemes si es té en compte a l'hora de desmodular el senyal. En la figura 11 es pot veure que com més petit sigui el producte $B \cdot T_b$ més suau és el pols (i, per tant, més concentrat estarà l'espectre), però, al contrari, el pols dura més temps (i per tant, més ISI provocarà). Hi haurà, doncs, un compromís entre eficiència espectral i complexitat del desmodulador. Com a orientació podem tenir en compte que el sistema GSM utilitza un valor $B \cdot T_b = 0,3$ i el sistema DECT un valor $B \cdot T_b = 0,5$. Encara que teòricament el pols gaussià s'estén en temps des de menys infinit a més infinit, amb valors d'amplada de banda normalitzats a la velocitat de símbol de 0,3 i 0,5 (GSM i DECT, respectivament), es pot aproximar el pols per un de durada limitada a tres períodes de símbol, sense que per això el senyal quedi significativament afectat. Observem també que per a $B \cdot T_b \rightarrow \infty$ el pols tendeix a ser rectangular i, per tant, tindrem una modulació MSK. Aquest paràmetre de configuració $B \cdot T_b$ permetrà controlar l'amplada de banda de l'espectre del senyal modulad. La figura següent mostra l'espectre de la modulació GMSK respecte a la freqüència normalitzada a velocitat de símbol, i el compara amb l'espectre de MSK. Com es pot veure, per a GMSK el lòbul principal és més estret i els lòbuls secundaris són sempre més petits. Per tant, la modulació GMSK és espectralment la més eficient de les modulacions presentades en aquesta unitat.

Lectura complementària

K. Murota; K. Hirade (1981, juliol). "GMSK Modulation for Digital Mobile Radio Telephony". *IEEE Trans. on Communications* (vol. COM-29, núm. 7).

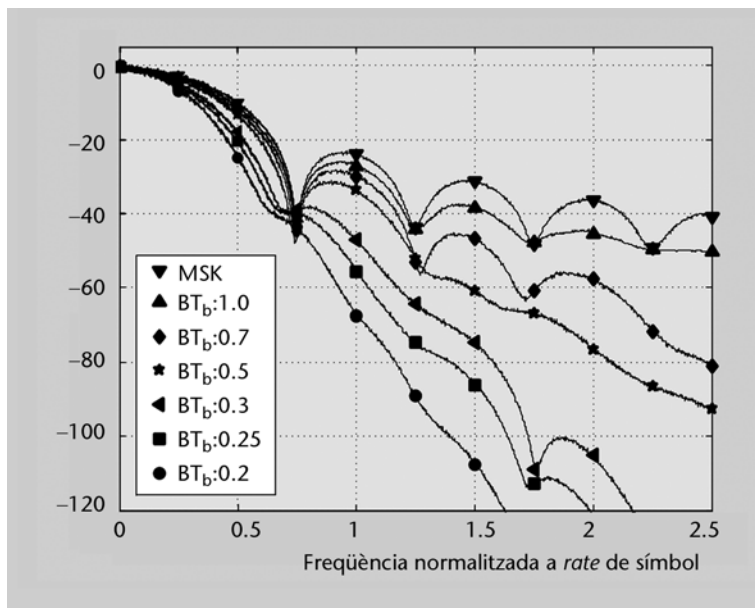


Figura 12. Densitat espectral de potència de la modulació GMSK en dB respecte de la freqüència normalitzada a la velocitat de símbol per a diferents valors de $B \cdot T_b$

Conclusions

Les modulacions CPM (o de fase contínua) són modulacions en les quals la fase del senyal no presenta discontinuïtats en els instants de transició de símbol. Aquestes modulacions angulars són relativament complexes d'implementar i de desmodular, especialment en comparar-les amb les modulacions lineals de tipus QAM. En el cas general, són modulacions en les quals s'introdueix ISI entre símbols consecutius, encara que de manera controlada. La finalitat d'utilitzar modulacions CPM està determinada per l'obtenció de modulacions robustes a les no-linealitats de les cadenes d'RF i amb una densitat espectral de potència que presenta una amplada de banda relativament reduïda.

En aquest mòdul, després de plantejar la problemàtica de les modulacions lineals enfront de les no linealitats, s'han descrit les principals modulacions de fase contínua, evolucionant de la més simple a la més complexa. La modulació OQPSK, tot i no tractar-se d'una modulació de fase contínua, s'ha presentat tenint en compte que és una de les primeres opcions que ens podem plantejar per a aconseguir modulacions robustes enfront de les no-linealitats. De les modulacions de fase contínua, la més simple, i la primera històricament proposada, és la modulació CPFSK. És una variant de les modulacions de freqüència FSK que es caracteritza per ser una modulació que compleix dues propietats: manté la freqüència constant dins de cada símbol (com una modulació FSK) i manté la fase contínua (com una modulació CPM). L'exemple més destacat de modulació CPFSK és la modulació MSK, que s'ha descrit i analitzat aïlladament, en tractar-se d'una excepció entre les modulacions CPM, en poder ser desmodulada mitjançant un detector lineal sense memòria. Quan l'eficiència espectral de la modulació MSK no és suficient es poden trobar altres modulacions més complexes que utilitzen polsos de freqüència més suaus i de més durada temporal. L'exemple més destacat el constitueix la modulació GMSK, utilitzada en alguns sistemes de comunicacions estesos comercialment (GSM i DECT), que utilitza polsos gaussians per a aconseguir concentrar l'espectre del senyal dins de l'amplada de banda de transmissió.

Tant el càlcul exacte de la densitat espectral de potència com l'anàlisi de la probabilitat d'error de les modulacions de tipus CPM són en general complexos i normalment es fan mitjançant simulacions per ordinador, a causa de la dificultat analítica que implicaria l'anàlisi detallada d'aquestes simulacions. La comparació de les modulacions CPM respecte a les QAM resulta similar a la feta amb les de tipus analògic en comparar FM respecte a les modulacions lineals DBL i AM. En aquest mòdul s'han presentat majoritàriament resultats gràfics per a il·lustrar les diferents modulacions.

Activitats

1. Donat el senyal $s(t)$ corresponent a una modulació de fase contínua:

$$s(t) = A_c \sin \left(2\pi f_c t + I_n \frac{\pi t}{2T_b} + \phi_k \right) n \cdot T_b \leq t \leq (n+1) \cdot T_b$$

en què $I_n \in \{-1, +1\}$, i ϕ_k conté la memòria dels bits transmesos fins a l'instant n .

- Indiqueu quin és el valor de l'índex de modulació h , la forma del pols $g(t)$ utilitzat.
- Indiqueu si es tracta d'una modulació *full response* o *partial response*.
- Podem dir exactament de quina de les modulacions descrites en el tema es tracta?

2. L'equivalent passabaix (expressió equivalent del senyal sense la informació de la portadora f_c) d'una modulació QPSK és el següent:

$$\begin{aligned} b_{\text{QPSK}}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_i(n) p(t - nT_s) + j\alpha_q(n) p(t - nT_s) \\ &= x_{i\text{QPSK}}(t) + jx_{q\text{QPSK}}(t) \end{aligned}$$

en què $\alpha_i(n)$, $\alpha_q(n)$ s'obtenen a partir de la seqüència de bits per transmetre, i $p(t)$ és el pols conformador.

- Assumint que el pols conformador és un pols rectangular de durada T_s , dibuixeu en dues gràfiques separades les formes d'ona dels components en fase $x_{i\text{QPSK}}(t)$ i en quadratura $x_{q\text{QPSK}}(t)$ per a les seqüències $\alpha_i(n) = \{+1, +1, -1, -1, +1\}$ i $\alpha_q(n) = \{+1, -1, -1, -1, +1\}$.
- A partir dels dibuixos anteriors dibuixeu les formes d'ona de l'envolupant $e(t)$ i la fase $\varphi(t)$ que s'obtenen a partir dels components en fase $x_i(t)$ i quadratura $x_q(t)$ segons les equacions següents:

$$\begin{aligned} e(t) &= \sqrt{x_i(t)^2 + x_q(t)^2} \\ \varphi(t) &= \arctan \frac{x_q(t)}{x_i(t)} \end{aligned}$$

c) A partir dels resultats obtinguts, empleneu la fila corresponent a la modulació QPSK en la taula resum de l'exercici 5.

3. L'equivalent passabaix (expressió equivalent del senyal sense la informació de la portadora f_c) d'una modulació OQPSK és el següent:

$$\begin{aligned} b_{\text{OQPSK}}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_i(n) p(t - nT_s) + j\alpha_q(n) p\left(t - nT_s - \frac{T_s}{2}\right) \\ &= x_{i\text{OQPSK}}(t) + jx_{q\text{OQPSK}}(t) \end{aligned}$$

en què $\alpha_i(n)$, $\alpha_q(n)$ s'obtenen a partir de la seqüència de bits per transmetre, i $p(t)$ és el pols conformador.

- Assumint que el pols conformador és un pols rectangular de durada T_s , dibuixeu en dues gràfiques separades les formes d'ona dels components en fase $x_{i\text{OQPSK}}(t)$ i en quadratura $x_{q\text{OQPSK}}(t)$ per a les mateixes seqüències $\alpha_i(n)$ i $\alpha_q(n)$ de l'exercici anterior.
- A partir dels dibuixos anteriors, dibuixeu les formes d'ona de l'envolupant $e(t)$ i la fase $\varphi(t)$. Les expressions de l'envolupant i la fase són les mateixes que en l'exercici anterior.
- A partir dels resultats obtinguts, empleneu la fila corresponent a la modulació OQPSK en la taula resum de l'exercici 5.

4. L'equivalent passabaix (expressió equivalent del senyal sense la informació de la portadora f_c) d'una modulació MSK és la següent:

$$\begin{aligned} b_{\text{MSK}}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_i(n) p(t - nT_s) + j\alpha_q(n) p\left(t - nT_s - \frac{T_s}{2}\right) \\ &= x_{i\text{MSK}}(t) + jx_{q\text{MSK}}(t) \end{aligned}$$

en què $\alpha_i(n)$, $\alpha_q(n)$ s'obtenen a partir de la seqüència de bits per transmetre, i $p(t)$ és el pols conformador que respon a l'expressió:

$$p(t) = \begin{cases} \sin \frac{\pi t}{T_s}, & 0 \leq t \leq T_s \\ 0, & \text{resta} \end{cases}$$

- a) Dibuixeu en dues gràfiques separades les formes d'ona dels components en fase $x_{i_{\text{QPSK}}}(t)$ i en quadratura $x_{q_{\text{QPSK}}}(t)$ per a les mateixes seqüències $\alpha_i(n)$ i $\alpha_q(n)$ dels exercicis anteriors.
- b) A partir dels dibuixos anteriors, dibuixeu les formes d'ona de l'envolupant $e(t)$ i la fase $\varphi(t)$. Les expressions de l'envolupant i la fase són les mateixes que en els exercicis anteriors.
- c) A partir dels resultats obtinguts, empleneu la fila corresponent a la modulació MSK en la taula resum de l'exercici 5.

5. Tenint en compte la taula següent, empleneu cadascuna de les caselles amb (sí/no) o $(0, \pi/2, \pi)$ segons les característiques de cadascuna de les modulacions. La informació per a emplenar la taula resum s'obté a partir dels exercicis anteriors.

	Màxim salt de fase ($0, \pi/2, \pi$)	Fase contínua (sí/no)	Envolupant constant (sí/no)
QPSK			
OQPSK			
MSK			

Bibliografia

Bibliografia bàsica

Carlson, A. B. (2001). *Communication Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication* (4a. ed.). McGraw-Hill.

Proakis, J. (2003). *Digital Communications* (4a. ed.). McGraw-Hill.

Proakis, J. G.; Salehi, M. (2002). *Communication Systems Engineering* (2a. ed.). Prentice Hall.

Sklar, B. (2003). *Digital Communications: Fundamentals and Applications* (2a. ed.). Prentice Hall.

Bibliografia complementària

Artés Rodríguez, A.; Pérez Gonzalez, F. i altres (2007). *Comunicaciones Digitales*. Prentice Hall.

Steele, R. (1995). *Mobile Radio Communications*. IEEE Press.

Articles d'interès

Marvin, K. S. (2003, juny). "Multiple-Bit Differential Detection of Offset QPSK". *IEEE Trans. on Communications* (vol. 51, núm. 6).

Murota, K.; Hirade, K. (1981, juliol). "GMSK Modulation for Digital Mobile Radio Telephony". *IEEE Trans. on Communications* (vol. COM-29, núm. 7).