L'algoritme símplex.

Fonaments i metodologia

Daniel Blabia Girau

PID_00186431

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

En aquest mòdul didàctic introduirem l'algoritme de resolució de programes lineals desenvolupat per George Dantzig el 1947. Avui dia és l'algoritme més utilitzat, fonamentalment perquè els càlculs són senzills i per la facilitat amb què s'interpreten els seus resultats des d'una perspectiva econòmica.

A fi de poder entendre a fons aquest mòdul és imprescindible haver superat amb èxit el mòdul "Introducció a la investigació operativa", ja que farem referències constantment a conceptes com *vèrtexs*, *conjunts convexos*, *solucions impròpies*, *solucions múltiples*, i d'altres.

El mòdul comença amb la descripció dels fonaments de l'algoritme símplex, és a dir, la base de què cal disposar per a poder aplicar aquest algoritme a un programa lineal. A continuació ens centrarem en l'algoritme en si, i mirarem d'entendre com funciona per dins, és a dir, no ens limitarem simplement a veure'n la mecànica de resolució. Finalment estudiarem els diferents tipus de solucions que podem trobar durant la resolució i al terme d'aquesta.

Per a presentar l'algoritme símplex comencem per explicar l'algoritme en la seva forma original (matricial) a fi d'arribar de manera gradual a l'algoritme símplex per taules.

Objectius

L'objectiu principal d'aquest mòdul és conèixer l'algoritme símplex amb un cert grau de detall. Si establim un símil amb la informàtica, direm que l'objectiu del mòdul no és quedar-nos en un coneixement de l'algoritme com a usuaris, sinó també aprendre algunes nocions sobre els fonaments conceptuals de l'algoritme. D'aquesta manera, si en aplicar l'algoritme no ho fem mecànicament sinó conscients del perquè, sabrem interpretar les diferents situacions o variacions que se'ns presentin. Als materials didàctics facilitats en aquest mòdul l'estudiant trobarà les eines indispensables per a assolir els objectius següents:

1. Conèixer els fonaments teòrics de l'algoritme símplex.

2. Saber generar solucions de partida de manera que s'evitin els passos innecessaris.

3. Poder aplicar el mètode símplex per taules i explicar-ne els diferents tipus de solucions.

4. Aprendre a detectar casos en què es produeixen bucles infinits i degeneració.

1. Formulació de problemes lineals

Com que ja hem vist el mètode de resolució gràfic de l'espai de les variables, a continuació expliquem un mètode de resolució numèric, el mètode símplex. Desenvolupat per George Dantzig el 1947, constitueix un mètode extraordinàriament robust per a resoldre problemes lineals, ja sigui de manera manual (per a petits problemes) o informatitzada (és un mètode comú en tots els paquets informàtics). A fi que un problema es pugui resoldre mitjançant aquesta eina tan potent que és el mètode símplex, cal que compleixi els dos requisits següents:

Vegeu el mètode de resolució gràfic de l'espai de les variables a l'apartat 4 del mòdul "Introducció a la investigació operativa" d'aquesta assignatura.

- S'ha de poder formular com un programa lineal.
- S'ha de poder expressar en forma estàndard.

El primer requisit se suposa que es dóna quan el problema està ben modelitzat, però el segon significa prendre el problema tal com vingui de la modelització i "maquillar-lo" a fi de poder-hi aplicar el mètode símplex.

Nota

Al llarg d'aquest text farem servir les expressions *problema lineal* i *programa lineal* com a sinònims.

1.1. La forma estàndard d'un programa lineal

Direm que un programa lineal (PL) està en forma estàndard quan compleix els requisits formals següents:

- Que les restriccions es presentin en forma d'igualtat.
- Que els termes independents siguin $b_j \geq 0$, $\forall j \in \{1, 2, ..., m\}$.
- Que totes les variables siguin no negatives, és a dir, que es verifiqui $x_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Abreugem *problema lineal* o *programa lineal* amb la sigla PL.

En llenguatge matemàtic, la forma estàndard d'un programa lineal és:

$$
\begin{array}{l}
[\text{OPT}]\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{s.a} \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\
x_i \geq 0.
\end{array}
$$

Com podem observar, el sentit de l'optimització* és indiferent, és a dir, es respectarà el que s'obtingui de la modelització.

* L'optimització pot consistir a maximitzar o minimitzar.

Si volem definir la forma estàndard utilitzant la nomenclatura que emprarem habitualment al llarg d'aquest mòdul i en els següents, convé que us la presentem. La descrivim tot seguit:

Vegeu la notació i nomenclatura emprades a l'apartat 2 del mòdul "Introducció a la investigació operativa" d'aquesta assignatura.

- **X** (de vegades $\mathbf{X}^i$) és el vector que recull totes les variables que inclou el problema lineal siguin del tipus que siguin*.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

  i quan vulguem fer referència a una de les seves components de manera genèrica emprarem x_i amb $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$.

* Més endavant veurem que les variables poden ser reals, de folgança o artificials.

- **A** és la matriu que recull tots els coeficients tècnics que figuren a les restriccions:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$
$$\begin{array}{cccc} \mathbf{P}^1 & \mathbf{P}^2 & & \mathbf{P}^n \end{array}$$

  i quan vulguem al·ludir de manera genèrica a un dels seus elements, ho farem amb l'expressió a_{ji}, on tenim que $j \in J = \{1, 2, ..., m\}$ i $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$.

- $\mathbf{P}^i$, amb $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$, és cada un dels vectors columna que componen la matriu **A**, als quals donarem el nom de **vectors associats** perquè cada $\mathbf{P}^i$ està associat a la variable i-èsima. Hi haurà un nombre n d'aquests vectors.

- **c** és el vector que recull els coeficients de la funció objectiu, i el denotem de la manera següent:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

  i quan ens vulguem referir a un dels seus elements de manera genèrica emprarem l'expressió c_i.

- **b** és el vector que recull els termes independents:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

i quan ens referim de manera genèrica a un dels seus elements utilitzem b_j.

D'aquesta manera, la definició anterior en forma estàndard d'un PL es podria formular de la manera següent:

[OPT] $z = f(\mathrm{X}) = \mathbf{c}'\mathbf{X}$	[OPT] $z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$
s.a	s.a
$\mathrm{AX} = \mathbf{b}$,	$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}^i x_i = \mathbf{b}$,
$\mathrm{X} \geq \mathbf{0}$.	$x_i \geq 0$.

Exemple d'ús de la nomenclatura en un programa lineal

Considerem el programa lineal que presentem a continuació:

$$[\mathrm{MAX}]\ z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

s.a

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + 3x_3 = 50, \\ &x_1 + x_3 = 20, \\ &6x_2 + x_3 = 30, \\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

Atesa la nomenclatura i notació habituals en la formulació de problemes lineals, distingim els elements següents:

- La matriu A de coeficients tècnics (en aquest cas $n = 3$ i $m = 3$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

- Els vectors $\mathbf{P}^i$ associats a cada variable i-èsima:

$$\mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- El vector **c** de la funció objectiu:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- El vector **b** dels termes independents:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Anomenarem **estandardització d'un programa lineal** el procés de "maquillatge" del problema a fi de transformar les restriccions en forma d'inequacions en restriccions en forma d'equacions.

Aquest procés d'estandardització requereix definir unes variables noves que anomenarem *variables de folgança*.

1.1.1. Variables de folgança

Variables d'un PL

Ja hem definit dos tipus de variables:

- les reals, que provenen de la modelització.
- les de folgança, que provenen de l'estandardització.

Suposem que després de la modelització se'ns presenta un programa lineal que hem de resoldre amb el mètode símplex, de manera que algunes restriccions estan en forma de $\geq$, altres com a $\leq$ i altres com $=$. En aquest cas, l'estandardització consistirà a sumar en el cas de restriccions de $\leq$ i a restar en el cas de restriccions de $\geq$ unes variables que denominarem **variables de folgança**.

Si seguim la nomenclatura de les variables reals del problema continuarem numerant les variables de folgança des de l'últim subíndex que hi hagi, encara que sovint s'utilitza un altre sistema: començar una nova nomenclatura, s_j.

Les variables de folgança se solen representar amb s_j perquè en anglès s'anomenen *slack* o *surplus*.

Exemple d'ús de les variables de folgança

Considerem el programa lineal següent:

$$[\text{MAX}]\ z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

s.a

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 50,\\ &x_1 + x_3 \geq 20,\\ &6x_2 + x_3 = 30,\\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

Un cop estandarditzat obtenim:

$$[\text{MAX}]\ z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

s.a

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 50,\\ &x_1 + x_3 - x_5 = 20,\\ &6x_2 + x_3 = 30,\\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

Com podem observar, el procediment és molt senzill. Tot seguit expliquem el que hem fet:

a) Suposem que la primera restricció es referia al fet que només disposem de 50 t d'una determinada matèria primera. Així, la restricció ens obliga a fer que el consum (la part esquerra de la restricció) sigui $\leq$ que la quantitat disponible (b_j). En estandarditzar la restricció i fer que estigui obligatòriament en igualtat, la variable de folgança que afegim (x_4) absorbirà la quantitat en què el consum és inferior a la disponibilitat, és a dir, el que ens sobra de les 50 t disponibles. Lògicament, en el cas que el consum fos igual a la disponibilitat, la variable de folgança x_4 automàticament prendria valor zero.

b) En el cas de la segona restricció, si, per exemple, ens obliga a efectuar un mínim de 20 peces de tipus 1 i tipus 3, la variable de folgança que hem afegit (x_5) restant-hi el seu valor ens indicarà el nombre de peces de més que fem per sobre de les 20 que són obligatòries.

c) Pel que fa a la tercera restricció, no és necessari modificar-la perquè ja es presenta en forma d'igualtat.

Les variables de folgança prendran un valor en funció del que hagin pres les variables reals, és a dir, les que són fruit de la modelització i no de modificacions posteriors (com és el cas de les variables de folgança).

En la funció objectiu hi han de figurar totes les variables del PL, de manera que després de les variables reals posarem les de folgança multiplicades per zero, ja que, tret que ens indiquin el contrari, no afegeixen cost ni benefici.

1.2. La forma canònica d'un programa lineal

Considerarem que un PL té les restriccions "en concordança" amb la funció objectiu quan es compleixin les condicions següents:

- A una funció objectiu que s'ha de minimitzar li corresponen restriccions del tipus $\geq$.
- A una funció objectiu que s'ha de maximitzar li corresponen restriccions del tipus $\leq$.

La lògica de les restriccions "en concordança"

Podem trobar una certa lògica en la necessitat de tenir les restriccions en concordança amb la funció objectiu perquè si en un problema de minimitzar els costos de fabricació totes les restriccions de producció fossin del tipus $\leq$, els valors de les variables tendirien irremissiblement a zero, és a dir, a no produir res, atès que seria la manera d'obtenir uns costos mínims. Per això hi ha d'haver restriccions que estableixin una producció mínima (i que estaran en forma $\geq$) per a obligar les variables a prendre valors diferents de zero.

Passa el mateix amb els problemes de maximitzar, només que en aquest cas hem de tenir restriccions que limitin la producció o el consum de materials (i que estaran en forma $\leq$) perquè no es disparin ($\rightarrow \infty$) els valors de les variables.

Un **programa lineal en forma canònica** té les restriccions "en concordança" amb la funció objectiu. A més, totes les seves variables han de tenir restricció de no-negativitat i tots els termes independents han de ser no negatius.

Tot seguit presentem les formes canòniques d'un PL de maximitzar i d'un de minimitzar:

a) Forma canònica d'un PL de maximitzar

$$[\text{MAX}]\ z = \mathbf{c}'\mathbf{X}$$

s.a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b},$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}.$$

b) Forma canònica d'un PL de minimitzar

$$[\text{MIN}]\ z = \mathbf{c}'\mathbf{X}$$

s.a

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} \geq \mathbf{b},$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}.$$

Com podem observar, la diferència entre la forma estàndard i la forma canònica radica en el fet que així com l'estàndard no ens marcava el sentit de la funció objectiu, en el cas de la forma canònica ens marca una relació de concordança entre el signe de totes les restriccions (excepte la de no-negativitat de les variables, que sempre serà igual) i el sentit de la funció objectiu. Aquesta forma canònica serà força útil més endavant, quan es presenta el tema de la dualitat.

Vegeu l'ús de la forma canònica en programes duals a l'apartat 1 del mòdul "Dualitat" d'aquesta assignatura.

1.3. Operacions de transformació

La forma estàndard i la canònica no són les úniques en què es pot presentar un programa lineal, sinó que també hi ha la forma ampliada, que estudiarem més endavant, ja que el primer pas en l'aplicació de l'algoritme símplex consistirà a transformar el programa lineal de la forma estàndard a la forma ampliada.

La forma ampliada d'un programa lineal s'estudia al subapartat 3.2.3 d'aquest mòdul didàctic.

De totes maneres, hi ha una sèrie d'operacions que podrem utilitzar a l'hora de preparar el nostre programa lineal segons la forma que vulguem que presenti*. Aquestes **operacions de transformació** són les següents:

*** Un programa lineal es pot presentar en les formes estàndard, canònica o ampliada.**

a) Canvi del sentit d'optimització. Per a canviar el sentit de l'optimització només caldrà modificar el signe de la funció objectiu multiplicant tots els coeficients per -1. D'aquesta manera, l'expressió:

$$[\text{MAX}]\ z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

equivaldrà a l'expressió:

$$[\text{MIN}]\ z' = -\sum_{i=1}^{n} c_i x_i.$$

Canvi del sentit d'optimització

El programa lineal:

$$[\text{MAX}]\ z = 4x_1 + 2x_2$$

equival a aquest altre:

$$[\text{MIN}]\ z' = -4x_1 - 2x_2$$

amb $z' = -z$.

b) Canvi del sentit de les restriccions. Per a canviar el sentit de les restriccions n'hi haurà prou de multiplicar per -1 tota la restricció. Així, les restriccions generals del tipus:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j,$$

es poden expressar de la manera següent:

$$\sum_{i=1}^{n} -a_{ji} x_i \geq -b_j.$$

Canvi del sentit de les restriccions

La restricció:

$$-5x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 25$$

es pot expressar com:

$$-5x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -25.$$

c) Transformació d'inequacions en equacions. Per a transformar inequacions en equacions, ja hem vist com es fa amb l'ajuda de les variables de folgança.

Vegeu com es poden transformar inequacions en equacions amb l'ajuda de les variables de folgança al subapartat 1.1.1 d'aquest mòdul didàctic.

d) Transformació d'equacions en inequacions. Per a convertir equacions en inequacions només caldrà desdoblar la igualtat en dues desigualtats de signe contrari. D'aquesta manera:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = b_j$$

serà igual al sistema d'inequacions:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \leq b_j, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \geq b_j. \end{cases}$$

Transformació d'equacions en inequacions

Si tenim la igualtat:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 25$$

la podem convertir en el sistema d'inequacions següent:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 25,$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 25.$$

2. Conceptes i teoremes fonamentals

Un cop estudiada la formulació de problemes lineals, en aquest apartat presentem quatre teoremes fonamentals i un corol·lari relatius a la programació lineal; els explicarem, però no en farem la demostració.

2.1. Convexitat

Atès que en les pàgines següents haurem de fer referència a alguns conceptes relacionats amb la convexitat, en els propers subapartats en recordarem d'associats a aquest concepte.

2.1.1. Combinació lineal convexa

Donats dos elements o punts $X^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ i $X^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$ de $\mathbb{R}^n$, direm que un punt X és una combinació lineal convexa de X^1 i X^2 si existeix $\alpha \in [0,1]$, tal que:

$$X = \alpha X^1 + (1 - \alpha)X^2.$$

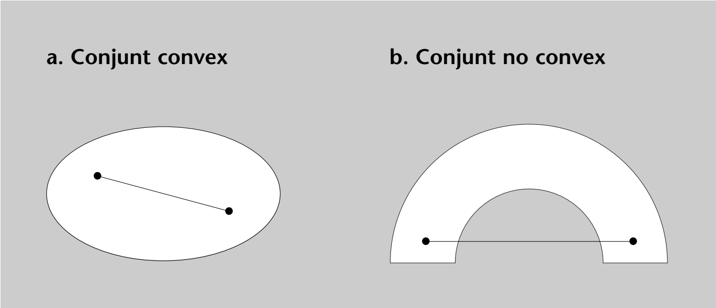
El conjunt de punts que són combinació lineal convexa de dos punts X^1 i X^2 rep el nom de segment i es denota amb $[X^1,X^2]$.

2.1.2. Conjunt convex

Direm que un subconjunt K no buit de $\mathbb{R}^n$ és un subconjunt convex si conté el segment que uneix dos dels seus punts qualssevol.

De manera analítica equivaldria a dir que si donats dos punts qualssevol, X^1 i X^2, tal que X^1, $X^2 \in K$, llavors per a tot α tal que $0 \leq \alpha \leq 1$, tota combinació lineal convexa dels seus punts, és a dir, $X = \alpha X^1 + (1 - \alpha)X^2$, està continguda en K.

En la figura que trobareu a la pàgina següent podeu veure de manera intuïtiva un exemple gràfic d'un conjunt convex i un exemple d'un conjunt no convex:



2.1.3. Vèrtex

Direm que el punt X^0 és un vèrtex o un punt extrem de *K* si no hi ha cap segment inclòs en *K* que el contingui en un punt que no sigui una extremitat.

Exemples de punts extrems

- Els vèrtexs d'un triangle, incloent-hi el contorn, són punts extrems.
- Tots els punts del perímetre d'un disc són punts extrems.
- L'origen és l'únic punt extrem del primer quadrant.

De manera analítica això equival a dir que X^0 és un vèrtex de *K* si no es poden trobar dos punts X^1 i X^2 de *K* tals que $X^0 = \alpha X^1 + (1 - \alpha)X^2$ amb $\alpha \in (0,1)$.

2.2. Teoremes fonamentals de la programació lineal

Lectura complementària

Trobareu les demostracions de tots els teoremes presentats en aquest subapartat a l'obra següent:

M. Bazaraa; J. Jarvis; H. Sherali (1990). *Linear Programming and Networks* (2a ed.). Nova York: John Wiley and Sons. (Hi ha una traducció al castellà d'aquesta edició a Limusa.)

Sigui el programa d'optimització lineal següent:

$$[\text{OPT}]\ z = f(\mathbf{X}) = \mathbf{c}'\mathbf{X}$$
$$\text{s.a}$$
$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{b},$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}.$$

Teorema 1: el conjunt *S* de totes les solucions possibles del problema, si no és buit, és convex.

És a dir, si el conjunt de solucions possibles té almenys un element, ja és un conjunt convex. D'aquest teorema es desprèn que si el conjunt de solucions possibles té com a mínim un punt, el problema tindrà solució òptima; no hem d'oblidar, però, que el fet que un conjunt sigui convex no implica que la seva solució sigui pròpia, ja que podria ser no fitat i alhora que la solució tendís a infinit.

Vegeu les solucions pròpies al subapartat 4.5 del mòdul "Introducció a la investigació operativa" d'aquesta assignatura.

Teorema 2: la funció *z* assoleix el mínim o el màxim en un vèrtex del conjunt de solucions possibles *S*, que haurà de ser fitat. Si l'assoleix en més d'un vèrtex, pren aquest valor mínim per a tota combinació convexa d'aquests vèrtexs.

Com a conseqüència d'aquest teorema limitarem als vèrtexs la cerca de l'òptim dins del conjunt de solucions possibles S, ja que és segur que almenys en un d'aquests hi hagi l'òptim. Si s'assoleix en dos vèrtexs o més, aleshores s'assoleix també a qualsevol combinació convexa d'aquests, és a dir, en el segment que els uneix.

Ara es tracta d'aprendre els criteris que ens permetin distingir fàcilment els vèrtexs de la resta de punts possibles. Aquesta és la finalitat dels teoremes que vénen a continuació.

Teorema 3: donat un conjunt de n vectors tal que conté un subconjunt $\mathbf{P}^{(J)}$ de m vectors linealment independents i que verifiquen la relació $x_1^0\mathbf{P}^1 + x_2^0\mathbf{P}^2 + ... + x_n^0\mathbf{P}^n = \mathbf{b}$, llavors el vector:

$$\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix},$$

amb m components diferents de zero, és un vèrtex del conjunt de solucions possibles S.

Intentarem aclarir la nomenclatura que s'empra en la programació lineal. Anomenarem $\mathbf{X}^0$ un vèrtex qualsevol, que serà format per una sèrie de n components x_i^0, que tindran associats uns vectors $\mathbf{P}^i$ formats pels coeficients tècnics de les restriccions (a_{ji}) en el primer vèrtex i per les seves transformacions (x_{ji}) en els posteriors.

Teorema 4*: si $\mathbf{X}^0$ és un vèrtex del conjunt S de solucions possibles, ha de complir que els m vectors associats a les components estrictament positives del vèrtex ($x_j^0 > 0$), que denotarem per $\mathbf{P}^{(J)}$, formen un conjunt linealment independent. En conseqüència, com a màxim hi haurà m components x_j^0 estrictament positives en un vèrtex (tantes com restriccions).

*** Aquest teorema és el recíproc de l'anterior.**

És a dir, perquè un punt del conjunt de solucions possibles sigui vèrtex, haurà de complir que, de totes les seves components, les que siguin estrictament positives ($x_j^0 > 0$) tinguin associats uns vectors que siguin linealment independents.

A continuació presentem la nomenclatura que emprarem al llarg d'aquest mòdul. Convé que tingueu clara aquesta notació abans de continuar amb l'estudi d'aquest material didàctic: !

a) Denotem amb $\mathbf{P}^{(\mathrm{I})}$ un conjunt de n vectors, on l'índex **I** fa referència al conjunt $I = \{1, 2, ..., i, ..., n\}$. Farem referència de manera genèrica a un element d'aquest conjunt amb $\mathbf{P}^{i}$.

b) Denotem amb $\mathbf{P}^{(\mathrm{J})}$ el conjunt de m vectors de $\mathbf{P}^{(\mathrm{I})}$ associats a les m components de X^0 estrictament positives. L'índex **J** fa referència al conjunt J format pels índexs de les components estrictament positives del vector X^0. Quan ens vulguem referir genèricament a un element d'aquest conjunt, ho farem amb l'expressió $\mathbf{P}^{j}$.

El nombre d'elements de *J* o cardinal de *J* coincideix amb el nombre de restriccions del programa lineal ($|J| = m$).

c) Denotem amb $\mathbf{P}^{(\mathrm{K})}$ el conjunt de vectors de $\mathbf{P}^{(\mathrm{I})}$ que estan associats a les components nul·les del vector X^0. L'índex **K** fa referència al conjunt K format pels índexs de les components nul·les del vector X^0. Denotarem amb $\mathbf{P}^{k}$ un element genèric d'aquest conjunt.

d) Sigui $\mathrm{X}^0 \in \mathbb{R}^n$. Denotem amb $\mathrm{X}_{(\mathrm{J})}$ el conjunt de components estrictament positives del vector X^0. Denotem cadascuna d'aquestes components amb x_j, on $j \in J$. Denotem amb $\mathrm{X}_{(\mathrm{K})}$ el conjunt de components nul·les del vector X^0. Cadascuna de les components d'aquest conjunt es denota amb x_k, on $k \in K$, i a més $x_k = 0\ \forall k \in K$. Segons aquesta notació, escriurem $\mathrm{X}^0 = (\mathrm{X}_{(\mathrm{J})}, \mathrm{X}_{(\mathrm{K})}) = (\mathrm{X}_{(\mathrm{J})}, \mathbf{0}_{(\mathrm{K})})$.

Exemple d'utilització de la nomenclatura

Considerem el programa lineal següent:

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{MAX}]\ z = x_1 + x_2 \\
&\text{s.a} \\
&x_1 + 2x_2 \leq 1, \\
&3x_1 + 2x_2 \leq 8, \\
&x_1 - x_2 \leq 0, \\
&x_i \geq 0.
\end{aligned}
$$

Estandarditzem:

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{MAX}]\ z = x_1 + x_2 \\
&\text{s.a} \\
&x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\
&3x_1 + 2x_2 + x_4 = 8, \\
&x_1 - x_2 + x_5 = 0, \\
&x_i \geq 0.
\end{aligned}
$$

En aquest programa hi ha dues variables reals i tres de folgança que s'originen en estandarditzar el problema. Direm que els vectors $\mathbf{P}^{i}$ seran:

$$
\mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix};\ \mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{P}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{P}^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Si trobem un vèrtex que anomenem $\mathbf{X}^0$ les components del qual són les següents:

$$\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 = 1/3 \\ x_2^0 = 1/3 \\ x_3^0 = 0 \\ x_4^0 = 19/3 \\ x_5^0 = 0 \end{bmatrix}$$

llavors, denotem amb **B** la matriu formada pels $\mathbf{P}^j$; aleshores el determinant de **B** haurà de ser diferent de zero perquè els vectors $\mathbf{P}^j$ siguin linealment independents. En aquest exemple, la matriu **B** és la següent:

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \mathbf{P}^1 & \mathbf{P}^2 & \mathbf{P}^4 \end{array} \end{array}.$$

Segons la notació que hem establert, tenim el següent:

- El conjunt I és $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; el conjunt J és $J = \{1, 2, 4\}$; i el conjunt K és $K = \{3, 5\}$; i per tant, $j = 1, 2, 4$ i $k = 3, 5$.
- D'altra banda, $\mathbf{P}^{(J)} = \{\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^4\}$, i, per tant, $\mathbf{B} = (\mathbf{P}^1\ \mathbf{P}^2\ \mathbf{P}^4)$. De la mateixa manera, $\mathbf{P}^{(K)} = \{\mathbf{P}^3, \mathbf{P}^5\}$.
- Així mateix, denotem $\mathbf{X}_{(J)} = \{x_1^0 = 1/3, x_2^0 = 1/3, x_4^0 = 19/3\}$ i $\mathbf{X}_{(K)} = \{x_3^0 = 0, x_5^0 = 0\} = \mathbf{0}_{(K)}$.

Fixeu-vos que el cardinal de J és $m = 3$ ($|J| = 3$), que correspon al nombre de restriccions del problema, i que els vectors $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{P}^2$ i $\mathbf{P}^4$ són linealment independents (el seu determinant és 3).

Segons el que hem dit, quan haguem de resoldre un programa lineal amb, per exemple, quatre restriccions ($m = 4$) podem esperar que com a màxim hi hagi quatre variables amb valor diferent de zero.

Com a corol·lari del teorema anterior tenim que la condició necessària i suficient perquè una solució $\mathbf{X}^0$ sigui vèrtex del conjunt S és que les components $x_j^0 > 0$ siguin els coeficients dels vectors $\mathbf{P}^j$ linealment independents en l'expressió següent:

$$\sum_{i \in I} x_i^0 \mathbf{P}^i = \mathbf{B}.$$

Respecte al sumatori...

... hem de destacar que en aquesta equació es multipliquen totes les components (nul·les i no nul·les) pels seus vectors associats. Per això el sumatori fa referència a tota variable i-èsima, $i \in I = \{1, ..., n\}$.

Exemple de vèrtex del conjunt *S*

En el cas de l'exemple anterior comprovem que es verifica el corol·lari presentat en el text. Donats els vectors $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{P}^2$ i $\mathbf{P}^4$, i donat el vèrtex $\mathbf{X}^0$:

$$\begin{array}{l} (1/3) + 2 \cdot (1/3) + 0 \cdot (1) = 1, \\ 3 \cdot (1/3) + 2 \cdot (1/3) + (19/3) = 8, \\ (1/3) - (1/3) + 0 \cdot (1) = 0, \\ x_i \geq 0, \end{array}$$

comprovem que, efectivament, les components del vèrtex $\mathbf{X}^0$ ($x_1^0 = 1/3$, $x_2^0 = 1/3$ i $x_4^0 = 19/3$) són els coeficients de l'expressió donada al corol·lari.

3. Funcionament de l'algoritme símplex

De manera esquemàtica, podríem dir que l'algoritme símplex funciona de la manera següent:

- Parteix d'un vèrtex del conjunt de solucions *S* que li proporciona un valor de *z*.
- Comprova si hi ha un altre vèrtex capaç de millorar aquest valor de *z*.
- Si existeix, el troba i s'hi situa, i torna a comprovar si n'hi ha un altre de millor.
- Aquest procés es va repetint fins que no és capaç de trobar un vèrtex que millori la *z*, i llavors es considera que l'últim vèrtex és la solució òptima.

L'algoritme símplex té una primera versió matricial i una de posterior tabular*. Començarem per la matricial, ja que després de fer diversos exercicis amb aquest mètode és més fàcil entendre el funcionament del mètode tabular.

*** La versió tabular de l'algoritme símplex es coneix amb el nom d'*algoritme símplex per taules*.**

3.1. El mètode símplex per matrius

A partir d'ara caldrà que tinguem present el funcionament de l'algoritme símplex per a no perdre el rumb mentre efectuem les operacions.

3.1.1. Filosofia de l'algoritme símplex per matrius

Vegeu els teoremes presentats al subapartat 2.2 d'aquest mòdul.

Com hem pogut veure en l'espai de les variables i hem comprovat després en els teoremes, limitarem la cerca de l'òptim als vèrtexs del conjunt de solucions possibles que hauran definit les restriccions.

En el mètode matricial partirem d'un vèrtex qualsevol del conjunt de solucions possibles, $\mathbf{X^0}$, que com a punt inclòs en el conjunt de solucions possibles, complirà $\mathbf{A\,X^0} = \mathbf{b}$, és a dir, s'ajustarà a les restriccions. Dit de manera analítica, el vèrtex $\mathrm{X^0} = (\mathrm{X_{(J)}},\mathrm{X_{(K)}})$ complirà:

$$\sum_{i \in I} x_i^0 \mathbf{P}^i = \mathbf{B}, \quad \text{amb } x_i^0 \geq 0.$$

Recordem que, com qualsevol altre vèrtex, tindrà com a màxim tantes components x_i^0 no nul·les (variables a la base) com restriccions, *m*.

Cas particular

En el cas que les $\mathrm{X_{(J)}}$ fossin les *m* últimes components tindríem:

$$\mathbf{X^0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{n-m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Aquest és un cas habitual en la primera solució que es troba amb l'algoritme símplex per taules.

Direm que una variable (component) és a la base si té un valor diferent de zero en el vèrtex. Quan ens referim de manera genèrica a aquestes variables a la base emprarem el subíndex j.

Igualment, direm que una variable no és a la base quan al vèrtex pren un valor igual a zero. Per a referir-nos de manera genèrica a aquest conjunt de variables farem servir el subíndex k.

Vegeu al subapartat 2.2 d'aquest mòdul didàctic que el vèrtex té com a màxim tantes components no nul·les com restriccions.

Analògament, anomenarem $\mathbf{P}^k$ els vectors associats a les variables k-èsimes* i $\mathbf{P}^j$ seran els vectors associats a les variables j-èsimes**.

*** Els $\mathbf{P}^k$ no pertanyen a la base.**
**** Els $\mathbf{P}^j$ pertanyen a la base.**

3.1.2. L'algoritme símplex

En aquest subapartat expliquem els passos de l'algoritme i, de manera simultània, els apliquem a un exemple senzill.

Considerem el programa lineal que presentem a continuació:

$$\begin{aligned}
&[\text{MAX}]\ z = x_1 + 2x_2\\
&\text{s.a}\\
&2x_1 + x_2 \le 3,\\
&x_1 + x_2 \le 2,\\
&x_i \ge 0,
\end{aligned}$$

i el vèrtex de partida:

Noteu que a l'algoritme símplex ens han de donar un vèrtex de partida.

$$\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}.$$

El mètode símplex per matrius consisteix en el procediment que detallem a continuació:

1) Estandarditzem el problema amb l'ajuda de les variables de folgança. En el nostre cas, hi haurem d'afegir les variables de folgança x_3 i x_4:

$$\begin{aligned}
&[\text{MAX}]\ z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4\\
&\text{s.a}\\
&2x_1 + x_2 + x_3 = 3,\\
&x_1 + x_2 + x_4 = 2,\\
&x_i \ge 0.
\end{aligned}$$

2) Determinem els $\mathbf{P}^k$ i els $\mathbf{P}^j$ i comprovem si els $\mathbf{P}^J$ són linealment independents:

- $$\begin{cases} \mathbf{P}^{(K)} = \{\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}; \\ \mathbf{P}^{(J)} = \{\mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}. \end{cases}$$

- $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$, de manera que són linealment independents.

Per tant, $K = \{3, 4\}$ i $J = \{1, 2\}$.

3) Mirem quin és el valor de la funció objectiu (z) que ens proporciona aquesta solució $\mathbf{X}^0$:

$$z^0 = \sum_{i \in I} c_i x_i^0 = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 \Rightarrow 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 3.$$

4) Posem els $\mathbf{P}^k$ en funció dels $\mathbf{P}^j$:

$$\mathbf{P}^k = \sum_{j \in J} x_{jk} \mathbf{P}^j,$$

essent $k \in K = \{3, 4\}$ i $j \in J = \{1, 2\}$.

Per a "transformar" els vectors $\mathbf{P}^k$ en vectors $\mathbf{P}^j$ necessitem unes "variables transformadores" que denotarem amb x_{jk} i de les quals de moment desconeixem el valor. Per a fer aquest pas és imprescindible que els vectors $\mathbf{P}^j$ siguin linealment independents, cosa que ja hem comprovat al segon pas. Aleshores:

$$[\mathbf{P}^3 \ \ \mathbf{P}^4] = [\mathbf{P}^1 \ \ \mathbf{P}^2] \begin{bmatrix} x_{13} & x_{14} \\ x_{23} & x_{24} \end{bmatrix}.$$

Si hi assignem els valors que coneixem, obtenim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} & x_{14} \\ x_{23} & x_{24} \end{bmatrix},$$

i si aïllem la matriu de les incògnites:

$$\begin{bmatrix} x_{13} & x_{14} \\ x_{23} & x_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{13} & x_{14} \\ x_{23} & x_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5) Calculem el valor de l'expressió $z_k - c_k$, que definim més avall, per a veure si alguna variable k-èsima ens demana entrar a la base (prendre un valor diferent de zero) per a millorar la z. Definim:

$$z_k - c_k = \sum_{j \in J} c_j x_{jk} - c_k, \quad \forall k \in K = \{3, 4\}.$$

Vectors linealment independents

Comprovarem que un conjunt de vectors són linealment independents col·locant-los en una matriu i comprovant que el seu determinant és diferent de zero.

Notació

La notació x_{jk} que presentem en aquest subapartat serà únicament vàlida per al mètode símplex per matrius.

En calcular els valors de $z_k - c_k$ de les variables que no són a la base el que fem és comprovar si hi ha cap altre vèrtex capaç de millorar la z que hem obtingut amb el vèrtex actual. Aquesta possibilitat ens la indicarà el valor de $z_k - c_k$, de manera que si es tracta d'un problema lineal de maximitzar podrem generar un vèrtex millor sempre que hi hagi algun valor de $z_k - c_k$ negatiu i si es tracta de minimitzar podrem anar millorant sempre que hi hagi algun valor de $z_k - c_k$ positiu.

D'això es desprèn que l'algoritme símplex haurà arribat al vèrtex òptim i, per tant, no podrà millorar el valor de la funció objectiu z, quan no hi hagi valors de $z_k - c_k$ que li ho permetin.

Si anem una mica més enllà, direm que quan maximitzem (minimitzem) i tinguem una variable k-èsima amb valor negatiu (positiu) de $z_k - c_k$, és que aquella variable ens demana entrar a la base, és a dir, ens demana que li donem un valor diferent de zero (que passi a ser j-èsima) i ens assegura que si ho fem (i generem d'aquesta manera un nou vèrtex) millorarem el valor de z.

Si ens trobéssim que diverses variables ens demanen entrar-hi, triarem les que siguin més negatives o més positives, segons si maximitzem o si minimitzem, perquè són les que ens garanteixen la millora més gran possible de z.

En el nostre cas, com que es tracta d'un problema de maximització, podrem millorar mentre hi hagi valors de $z_k - c_k$ negatius. A partir de la definició de $z_k - c_k$, $\forall k \in K = \{3, 4\}$ fem els càlculs i obtenim els valors següents:

- $z_3 - c_3 = (c_1x_{13} + c_2x_{23}) - c_3 = (1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)) - 0 = -1.$

- $z_4 - c_4 = (c_1x_{14} + c_2x_{24}) - c_4 = (1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2) - 0 = 3.$

Ja hem calculat els valors de $z_k - c_k$, i $z_3 - c_3$ ens ha donat un valor negatiu, és a dir que l'algoritme ens demana que entrem x_3 a la base.

6) Determinem el valor de les σ_j per a saber quina variable surt de la base (passa a prendre valor 0).

Una vegada que s'ha escollit qui entra a la base, com que en tot vèrtex hi poden haver com a màxim m components (variables) no nul·les, si en fem entrar una altra (pas anterior) tindrem $m + 1$ components no nul·les, de manera que ens veurem obligats a treure una variable de la base (fer que passi a ser k-èsima). Això ho farem calculant les σ_j de les variables que siguin a la base i traient de la base aquella que tingui la σ_j menor, que denotarem amb σ^*. Definim:

$$\sigma_j = \frac{x_j^0}{x_{jk}}, \quad \forall x_{jk} > 0.$$

En aquest cas entenem per k la variable que hem dit que entra a la base i per j cada una de les variables de la base, de manera que x_j^0 serà el valor de cada una de les variables j-èsimes en el vèrtex sobre el qual encara ens trobem i x_{jk} serà algun dels valors que obtinguem en el quart pas.

Si apliquem el que hem dit al nostre exemple, tenim el següent:

- $\sigma_1 = \dfrac{x_1^0}{x_{13}} = \dfrac{1}{1} = 1.$
- $\sigma_2 = \dfrac{x_2^0}{x_{23}} = \dfrac{1}{-1}$ la desestimem perquè x_{23} és negativa.

En aquest cas la mínima σ_j és la que correspon a x_1, de manera que $\sigma^* = 1$ i aquesta serà la variable que sortirà de la base.

7) Generem el nou vèrtex. El nou vèrtex sobre el qual ens situarem es genera a partir de l'anterior, és a dir, és com una evolució de l'antic. Per a conèixer el nou valor de cada variable o component seguirem les pautes següents:

- Si una variable no era a la base i no és la que entra, continuarà valent zero.

- Si una variable no era a la base i és la que entra, ho farà prenent el valor de la σ_j mínima ja determinat, σ^*.

- Si una variable era a la base i no és la que surt, el seu nou valor serà $x_j^0 - (\sigma^* x_{jk})$, és a dir, el que tenia (x_j^0), però lleugerament modificat (on k indica la variable que entra).

- Si una variable era a la base i és la que surt, el seu nou valor és zero.

Així, doncs, som al vèrtex de partida $\mathbf{X}^0$ i en una primera iteració generem el nou vèrtex, que anomenarem $\mathbf{X}^1$, de manera que ens quedarà:

$$\mathbf{X}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^0 - \sigma^* x_{23} \\ \sigma^* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aquest nou vèrtex ens proporciona un valor de la funció objectiu:

$$z = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 4,$$

que compleix que $z(\mathbf{X}^1) \geq z(\mathbf{X}^0)$.

8) Ara hem de comprovar si aquest nou vèrtex sobre el qual ens situem és susceptible de millora o no, de manera que hem de verificar si hi ha alguna variable que no sigui a la base que tingui un valor de $z_k - c_k$ negatiu i que ens demani entrar a la base. Per a fer-ho hem de tornar al quart pas a fi de calcular les noves x_{jk} necessàries per a calcular els valors de $z_k - c_k$.

En aquesta segona iteració tornem al quart pas, posant els $\mathbf{P}^k$ en funció dels $\mathbf{P}^j$:

$$\mathbf{P}^k = \sum_{j \in J} x_{jk}^0 \mathbf{P}^j,$$

essent ara $k \in K = \{1, 4\}$ i $j \in J = \{2, 3\}$. Aleshores:

$$[\mathbf{P}^1 \;\; \mathbf{P}^4] = [\mathbf{P}^2 \;\; \mathbf{P}^3] \begin{bmatrix} x_{21} & x_{24} \\ x_{31} & x_{34} \end{bmatrix}.$$

que si substituïm pels valors que coneixem:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} & x_{24} \\ x_{31} & x_{34} \end{bmatrix}.$$

Si aïllem la matriu de les incògnites:

$$\begin{bmatrix} x_{21} & x_{24} \\ x_{31} & x_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{21} & x_{24} \\ x_{31} & x_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A continuació ve el cinquè pas, on calculem els nous valors de $z_k - c_k$. A partir de l'expressió:

$$z_k - c_k = \sum_{j \in J} c_j x_{jk} - c_k, \quad \forall k \in K = \{1, 4\},$$

calculem els nous valors i obtenim:

- $z_1 - c_1 = (c_2 x_{21} + c_3 x_{31}) - c_1 = (2 \cdot 1 + 0 \cdot 1) - 1 = 1.$
- $z_4 - c_4 = (c_2 x_{24} + c_3 x_{34}) - c_4 = (2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)) - 0 = 2.$

Com que estem en un problema de maximització i no tenim cap variable k-èsima que ens demani entrar, ja que totes tenen els valors de $z_k - c_k$ positius, donem per òptim l'últim vèrtex sobre el qual ens situàvem, $\mathbf{X}^1$. Per tant, la solució del nostre problema lineal és el vèrtex:

$$\mathbf{X}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

amb un valor $z^* = 4$.

Passos de l'algoritme símplex per matrius

L'esquema de l'algoritme símplex per matrius és el següent:

- Els tres primers passos es fan únicament al principi de l'algoritme.

- El quart pas és de tràmit, ja que simplement consisteix a calcular els x_{jk} valors necessaris per al pas següent.
- El cinquè pas ens diu si som al vèrtex òptim i s'ha acabat l'algoritme o, si no hi som, qui ha d'entrar a la base.
- El sisè pas ens diu qui ha de sortir de la base en canvi.
- En el setè pas, sabent qui entra i qui surt, generem el nou vèrtex.
- Al vuitè pas, per a comprovar si el nou vèrtex és l'òptim o no, iterem el procés des del quart pas.

3.2. El mètode símplex per taules

Després d'haver vist com funciona l'algoritme símplex amb una formulació de tipus matricial, en aquest subapartat presentem l'algoritme símplex per taules.

3.2.1. Introducció al mètode per taules

Com hem pogut veure, la part més carregosa a l'hora d'aplicar el mètode símplex en la forma matricial és calcular les x_{jk} (quart pas), perquè el fet de treballar amb bases no necessàriament canòniques comporta un volum de càlcul molt superior al que tindríem si poguéssim garantir que la matriu dels $\mathbf{P}^j$ és canònica. Aquest càlcul no és problemàtic per les operacions, però sí que és fàcil caure en petits errors de signes, etc. Així, veuríem simplificats els càlculs, ja que la inversa de la matriu identitat és aquesta mateixa i multiplicar qualsevol matriu (la dels $\mathbf{P}^k$) per la identitat és com multiplicar per 1, és a dir, queda igual. Per tant, el càlcul de les x_{jk} seria immediat, ja que la matriu de les x_{jk} serà $(x_{jk})^{-1} = (\mathbf{P}^k) = \mathbf{P}^{(K)}$, amb les k corresponents a les variables que no són a la base.

Vegeu el càlcul de les x_{jk} al quart pas del mètode símplex per matrius, al subapartat 3.1.2 d'aquest mòdul didàctic.

Podeu comprovar que amb una matriu dels $\mathbf{P}^j$ canònica se simplifiquen els càlculs fent l'exercici d'autoavaluació 1.

És per aquest motiu que el nostre objectiu serà aconseguir una solució que compleixi el requisit que les variables que pertanyin a la base* tinguin uns vectors associats, $\mathbf{P}^j$, que formin una base canònica.

*** Les variables que pertanyen a la base són les variables *j*-èsimes.**

Per a aconseguir-ho haurem de trobar en el problema lineal m variables que apareguin una sola vegada a cada restricció a fi que els seus vectors associats siguin:

$$(\mathbf{P}^j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La primera pregunta que ens fem és: quines són aquestes variables? Doncs bé, les variables que compliran aquest requisit seran (habitualment) les variables de folgança, ja que n'hem utilitzat una en cada restricció a l'hora d'estandarditzar el programa lineal.

Vegeu les variables de folgança al subapartat 1.1.1 d'aquest mòdul didàctic.

Una vegada que hem respost la primera pregunta i ja sabem que en el primer vèrtex (el de partida de l'algoritme) hi haurà a la base les variables de folgança, ens plantegem la segona pregunta: amb quin valor? Sabem que com a solució possible que és, el vèrtex complirà les restriccions, és a dir, $\mathbf{A}X^0 = \mathbf{b}$.

Si fem servir una notació compacta per a un cas general, podem denotar $\mathbf{X^0} = (X_{(J)},\mathbf{0}_{(K)})$. Aleshores: $\mathbf{A}(X_{(J)},\mathbf{0}_{(K)}) = \mathbf{b}$, on podem denotar $\mathbf{A} = (\mathbf{P}^{(J)},\mathbf{P}^{(K)}) = (\mathbf{B},\mathbf{P}^{(K)})$.

Per tant es verifica la relació $(\mathbf{P}^{(J)},\mathbf{P}^{(K)})(X_{(J)},\mathbf{0}_{(K)}) = \mathbf{b}$, o el que és el mateix, $\sum_{j \in J} \mathbf{P}^j x_j^0 + \sum_{k \in K} \mathbf{P}^k x_k^0 = \mathbf{b}$.

En el cas que les components $X_{(J)}$ fossin les m primeres, direm que el vèrtex següent:

$$\mathbf{X^0} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_4^0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

complirà $\sum_{i \in I} \mathbf{P}^i x_i^0 = \mathbf{b}$, amb $x_i^0 \geq 0$; és a dir:

$$\underbrace{[\mathbf{P^1} \; \dots \; \mathbf{P}^n]}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_m^0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X^0}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \mathbf{X^0P^1} = x_1^0 \cdot 1 + x_2^0 \cdot 0 + \dots + x_m^0 \cdot 0, \\ b_2 = \mathbf{X^0P^2} = x_1^0 \cdot 0 + x_2^0 \cdot 1 + \dots + x_m^0 \cdot 0, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ b_m = \mathbf{X^0P}^m = x_1^0 \cdot 0 + x_2^0 \cdot 0 + \dots + x_m^0 \cdot 1. \end{cases}$$

Per tant, els valors de les variables que siguin a la primera base seran $b_1 = x_1^0$, $b_2 = x_2^0$, ..., $b_m = x_m^0$, i per això, el vèrtex que compleix el requisit formulat abans, que els $\mathbf{P}^j$ associats formin base canònica perquè se simplifiquin els càlculs i que utilitzarem com a solució de partida en aplicar l'algoritme símplex, és el següent:

$$\mathbf{X^0} = \begin{bmatrix} x_1^0 = b_1 \\ x_2^0 = b_2 \\ \vdots \\ x_m^0 = b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

on només prenen valors diferents de zero les variables de folgança (i són iguals als coeficients b_j), és a dir que a l'exemple desenvolupat al subapartat anterior:

$$\begin{aligned}&[\text{MAX}]\ z = x_1 + 2x_2\\ &\text{s.a}\\ &2x_1 + x_2 \leq 3,\\ &x_1 + x_2 \leq 2,\\ &x_i \geq 0,\end{aligned}$$

la solució de partida seria:

$$\mathbf{X^0} = \begin{bmatrix} x_1^0 = 0 \\ x_2^0 = 0 \\ x_3^0 = 3 \\ x_4^0 = 2 \end{bmatrix}.$$

D'aquesta manera, a partir d'ara l'elecció d'aquest vèrtex de partida es podrà aplicar també en el cas que s'apliqui l'algoritme símplex per matrius. Així generarem la nostra pròpia solució inicial.

Més endavant veurem què passa quan les restriccions estan expressades com a igualtats o quan les variables de folgança no són suficients per a formar base canònica en la primera base perquè les restriccions no són totes del tipus $\leq$.

Vegeu l'algoritme símplex per taules quan les restriccions no són totes del tipus $\leq$ al subapartat 3.2.3 d'aquest mòdul didàctic.

3.2.2. Estructura i funcionament de la taula de l'algoritme símplex

Hi ha diverses maneres de construir la taula de l'algoritme símplex, però l'única diferència radica en la col·locació de la informació del problema lineal. A continuació especifiquem la forma que utilitzarem:

En aquesta columna col·locarem les variables que són a la base.

Aquí posarem els coeficients c_i de la funció objectiu de les variables que són a la base.

Aquí hi haurà els valors de les variables que són a la base.

Sobre cada variable, el seu c_i de la funció objectiu.

En aquest espai posarem els vectors columna, $\mathbf{P}^i$ associats a cada variable.

			c_1	...	c_i	...	c_n
B	c	V_B	x_1	...	x_i	...	x_n
x_{B1} $\vdots$ x_{Bj} $\vdots$ x_{Bm}	c_{B1} $\vdots$ c_{Bj} $\vdots$ c_{Bm}	V_{B1} $\vdots$ V_{Bj} $\vdots$ V_{Bm}	x_{11} $\vdots$ x_{j1} $\vdots$ x_{m1}	... ...	x_{1i} $\vdots$ x_{ji} $\vdots$ x_{mi}	... ...	x_{1n} $\vdots$ x_{jn} $\vdots$ x_{mn}
$z = c_{B1}V_{B1} + ... + c_{Bj}V_{Bj} + ... + c_{Bm}V_{Bm}$			$z_1 - c_1$	...	$z_i - c_i$	...	$z_n - c_n$

Aquí apareixerà el valor de la z que proporcioni la solució.

En aquesta zona es posaran els valors de $z_i - c_i$ de totes les variables.

A la part superior de la taula hi figuren segons l'ordre següent totes les variables del problema: reals, de folgança i, per acabar, artificials (si n'hi hagués).

Vegeu les variables artificials i el seu significat al subapartat 3.2.3 d'aquest mòdul didàctic.

Convé fer un seguit de puntualitzacions sobre la taula:

a) Abans d'aplicar l'algoritme el primer que hem de fer és construir la taula i col·locar-hi els valors del problema lineal d'una determinada manera.

b) L'algoritme símplex és el mateix que hem vist anteriorment. Per tant, es repeteix la seqüència de les operacions, només que ara cada iteració de l'algoritme símplex, és a dir, cada vegada que canviem de vèrtex per a millorar la z, farà que la taula creixi en sentit vertical, de manera que cada vèrtex és una taula. L'únic canvi és que ara el vèrtex de partida el generarem nosaltres mateixos.

Vegeu la seqüència de les operacions de l'algoritme símplex al subapartat 3.1.2 d'aquest mòdul didàctic.

c) A la primera columna hi figuraran les variables que hi hagi a la base, de manera que les que no hi constin és que valen zero. Com que l'algoritme actuarà de manera diferenciada per a cada variable de la base segons la fila on sigui, per a explicar el funcionament teòric etiquetem cada una de les variables de la base de manera que x_{B1} serà la primera variable de la base*.

*** Per exemple, la primera variable de la base podria ser x_4.**

d) A la segona columna procedim a etiquetar els elements de cada fila de la mateixa manera que a la primera. Així, c_{B1} serà el coeficient de la primera variable que hi ha a la base.

e) A la tercera columna apareixen els valors de les variables de la base, de manera que V_{B1} serà el valor de la primera variable que hi ha a la base.

La tercera columna de la taula...

... de l'algoritme símplex per taules en alguns textos rep el nom de *columna B* perquè a la primera taula les variables que hi hagi a la base hi seran amb aquest valor i, encara que posteriorment aquest valor canviï, el "títol" de la columna es manté.

f) A la resta de columnes trobem les x_{ji}, que a la primera taula sabem que coincidiran amb els valors dels coeficients tècnics a_{ji}.

Els dos subíndexs d'aquests elements fan referència a la fila i a la columna, respectivament, de manera que x_{34} és l'element corresponent a la tercera fila (no a x_3!) i a la quarta columna (que serà, efectivament, x_4).

A continuació veurem el funcionament del mètode símplex per taules mitjançant l'aplicació d'aquest a l'exemple que hem considerat al llarg d'aquest apartat:

$$[\text{MAX}]\ z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$x_i \geq 0.$$

Ho farem per passos:

1) Com sempre, el primer pas consistirà a estandarditzar el programa lineal:

$$[\text{MAX}]\ z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

s.a

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 2,$$
$$x_i \geq 0.$$

2) Ara passem a construir la taula i a col·locar-hi els valors coneguts. Comencem per col·locar a la part superior totes les variables del problema (x_1, ..., x_4) amb els valors respectius c_i a sobre de cada una. A continuació posarem els vectors columna associats a cada variable. De la mateixa manera, generem el vèrtex de partida consignant a la primera columna (que recull les variables que formen la base) aquelles variables, els vectors associats de les quals siguin canònics. D'acord amb el que hem explicat a la introducció prèvia col·locarem a la base del nostre programa les variables de folgança. En el nostre cas, $x_{B1} = x_3$ i $x_{B2} = x_4$.

			1	2	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3 x_4			**2** **1**	**1** **1**	**1** **0**	**0** **1**

A la segona columna col·loquem els coeficients de la funció objectiu associats a les variables que hi ha a la base (c_{Bj}), que en el nostre cas són zero.

Finalment, a la tercera columna posarem els valors dels termes independents de les restriccions, b_j, que al mateix temps és el que valdran les variables que són a la base (V_{Bj}) perquè es compleixin les restriccions. Els col·locarem de manera que si agafem els seus vectors associats en l'ordre en què estan col·locats (de dalt cap a baix) en la primera columna han de formar base canònica.

			1	2	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3 x_4	**0** **0**	**3** **2**	2 1	1 1	1 0	0 1

3) Passem a fer els primers càlculs i comencem per veure el valor de z que ens proporciona aquest primer vèrtex. Per a fer-ho, si recordem la fórmula de z avaluada al vèrtex aplicada al cas actual:

Vegeu l'expressió de la funció objectiu avaluada al vèrtex al subapartat 3.1.2 d'aquest mòdul didàctic.

$$z = \sum_{j \in J} c_{Bj} V_{Bj},$$

veiem que és inútil multiplicar per la c corresponent aquelles variables que valen 0 (no són a la base), de manera que resulta més pràctic senzillament prendre el valor de les variables que són a la base* i multiplicar-lo per la c corresponent**.

*** Elements de la tercera columna.**
**** Elements de la segona columna.**

Així, per a obtenir la z, multipliquem el primer element de la segona columna pel primer de la tercera columna i el segon pel segon... i anem sumant els resultats que obtenim. És a dir:

$$z = \sum_{j \in J} c_{Bj} V_{Bj}.$$

En el nostre cas:

			1	2	0	0
B	***c***	$\boldsymbol{V_B}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$
x_3	0	3	2	1	1	0
x_4	0	2	1	1	0	1
$\mathbf{z^0 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 0}$						

4) Ara mirarem si el vèrtex en el qual ens trobem és l'òptim, i per a comprovar-ho verificarem si hi ha alguna variable que ens hi demani entrar. Caldrà calcular els valors de $z_i - c_i$ que, malgrat que comporti el mateix procediment que el que hem vist en l'algoritme símplex per matrius, en canviar la nomenclatura la fórmula quedarà d'aquesta manera:

$$z_i - c_i = \sum_{j \in J} c_{Bj} x_{ji} - c_i, \quad \forall i \in I = \{1, ..., n\}.$$

Veiem que a la taula el càlcul de $z_i - c_i$ consistirà simplement a multiplicar la segona columna (c) per la columna de $\mathbf{P}^i$ corresponent, i del resultat restar les c_i (col·locades a dalt de la taula). Els valors de $z_j - c_j \; \forall j \in J$ sempre hauran de ser 0. En cas que no sigui així, és que haurem comès un error previ de càlcul.

Diem $z_i - c_i$ perquè farem el càlcul per a totes les variables, $i \in I = \{1, ..., n\}$.

			1	2	0	0
B	***c***	$\boldsymbol{V_B}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$
x_3	0	3	2	1	1	0
x_4	0	2	1	1	0	1
$z^0 = 0$			**−1**	**−2**	**0**	**0**

5) Triem com a variable que entra a la base en un problema de maximitzar la que tingui el valor de $z_i - c_i$ més negatiu (el més positiu si minimitzem). En el cas que cap no ens hi demani entrar, és que som a sobre del vèrtex (solució) òptim i aquí s'acaba l'algoritme. En el nostre cas entra a la base x_2 i passem a l'etapa següent.

A la taula podeu comprovar que el valor de $z_i - c_i$ és zero per a les variables de la base.

			1	2	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	0	3	2	1	1	0
x_4	0	2	1	1	0	1
$z^0 = 0$			−1	−2	0	0

Consell gràfic

És aconsellable fer-se un petit senyal a la taula com, per exemple, una fletxa, que indiqui la variable que hem decidit de fer entrar per a evitar errors.

6) Una vegada escollida la variable que entra, mirarem quina és la variable que sortirà de la base. Per a fer-ho calcularem les σ_j. A la taula aquest pas es limitarà a dividir cada un dels elements de la tercera columna (V_{Bj}) per cada un dels elements estrictament positius (> 0) de la columna del vector $\mathbf{P}^k$ on en aquests moments k ens indica la variable que entra. Així obtindrem els σ_j i triarem com a variable que surt de la base aquella que tingui la $\sigma_j = V_{Bj}/x_{Bj,k}$ mínima (σ^*).

En el nostre cas, la variable que surt és x_4.

			1	2	0	0	
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	V_{Bj}/x_{jk}; $k = 2$
x_3	0	3	2	1	1	0	$\sigma_3 = 3/x_{B1,2} = 3/1 = 3$
x_4	0	2	1	**1**	0	1	$\sigma_4 = 2/x_{B2,2} = 2/1 = \mathbf{2}$
$z^0 = 0$			−1	−2	0	0	

7) Generem el nou vèrtex, que tindrà x_3 i x_2 a la base, cosa que implica una nova taula. Per a construir-la, efectuarem un procés de quatre etapes que descrivim tot seguit:

a) Definim i marquem el pivot com aquell element ($x_{Bs,r}$) en el qual s'encreuarien dues línies imaginàries que nasquessin de la variable que entra i de la que surt. En el nostre cas el pivot és 1.

Notació

Denotem amb r la columna del pivot, que correspon a la k de la variable que entra (en aquest cas, $r = 2$), i per Bs la fila del pivot, que correspon a la Bs de la variable que surt (en aquest cas, Bs = 2).

			1	2	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	0	3	2	1	1	0
x_4	0	2	1	**1**	0	1
$z^0 = 0$			−1	−2	0	0

b) Muntem la nova taula col·locant ja les variables que hi ha a la nova base (x_3, x_2). Crearem sota la taula que ja teníem una taula nova, en blanc, en la qual podrem posar les variables que són a la base, i també els seus respectius valors de c*. Recordem que la variable que entra ocupa la mateixa posició on era la que surt (per això x_2 ocupa la segona posició).

*** Primera i segona columna, respectivament.**

			1	2	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3 x_4	0 0	3 2	2 1	1 **1**	1 0	0 1
$z^0 = 0$			−1	−2	0	0
$\mathbf{x_3}$ $\mathbf{x_2}$	**0** **2**					

c) Calculem la nova fila del pivot o, el que és el mateix, la fila de la variable que ha entrat nova. Per a fer-ho dividirem tots els elements corresponents a aquesta fila a la taula antiga pel pivot, així essent Bs = 2 (segona fila).

Antiga fila del pivot
÷ Pivot
Nova fila del pivot

En el nostre cas particular:

$$\begin{array}{ccccc} V_{B2} & x_{B2,1} & x_{B2,2} & x_{B2,3} & x_{B2,4} \\ & & & & \div \text{ Pivot} \\ \hline V_{B2} & x'_{B2,1} & x'_{B2,2} & x'_{B2,3} & x'_{B2,4} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & \div 1 \\ \hline \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}$$

Omplim els buits de la taula amb els resultats anteriors i obtenim la taula següent:

			1	2	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3 x_4	0 0	3 2	2 1	1 **1**	1 0	0 1
$z^0 = 0$			−1	−2	0	0
x_3 x_2	0 2	 **2**	 **1**	 **1**	 **0**	 **1**

d) Passem a calcular la resta de files noves, essent en aquest cas únicament la fila x_{B1}. Per a fer-ho, restem a cada fila antiga la fila nova del pivot multiplicada per $x_{B1,r}$:

$$\begin{array}{r} \text{Antiga fila de } x_{B1,i} \\ -x_{B1,r} \cdot \text{Nova fila del pivot} \\ \hline \text{Nova fila de } x_{B1,i} \end{array}$$

on $x_{B1,r}$ és l'element de la columna del pivot i de la nova fila que calculem (en el nostre cas, $B1 = 1$ i $r = 2$). Per tant:

$$\begin{array}{r} V_{Bj} \;\; x_{B1,1} \;\; x_{B1,2} \;\; x_{B1,3} \;\; x_{B1,4} \\ -x_{B1,r} \cdot \text{Nova fila del pivot} \\ \hline V'_{Bj} \;\; x'_{B1,1} \;\; x'_{B1,2} \;\; x'_{B1,3} \;\; x'_{B1,4} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrrrr} & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 \cdot & (2 & 1 & 1 & 0 & 1) \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{array}$$

Amb aquests altres valors seguim omplint els buits de la taula i queda:

			1	**2**	**0**	**0**
B	***c***	$\boldsymbol{V_B}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$
x_3	0	3	2	1	1	0
x_4	0	2	1	1	0	1
$z^0 = 0$			−1	−2	0	0
x_3	0	**1**	**1**	**0**	**1**	−**1**
x_2	2	2	1	1	0	1

Si recordem que Bs i r són, respectivament, la fila i la columna del pivot, podem indicar de manera general les operacions que hem fet a les etapes **c** i **d** de la generació d'un nou vèrtex pel mètode símplex per taules tal com segueix:

$$x'_{Bj,i} = \begin{cases} \dfrac{x_{Bj,i}}{x_{Bs,r}}, & \text{si B}j = \text{B}s. \\ x_{Bj,i} - x_{Bj,r}\dfrac{x_{Bs,i}}{x_{Bs,r}}, & \text{altrament.} \end{cases}$$

on B$j = \{1, ..., m\}$ i $i = \{1, ..., n\}$. A més a més:

$$V_{Bj} = \begin{cases} \dfrac{v_{Bj}}{x_{Bs,r}}, & \text{si B}j = \text{B}s. \\ v_{Bj} - x_{Bj,r}\dfrac{v_{Bs}}{x_{Bs,r}}, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Aquestes operacions són equivalents a les operacions de generació d'un nou vèrtex explicades al setè pas del mètode símplex per matrius, que hem vist al subapartat 3.1.2 d'aquest mòdul didàctic.

Ja hem generat un nou vèrtex:

$$\mathbf{X}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

encara que a la taula únicament figuren les variables que hi ha a la base.

Una vegada arribats a aquest punt, tornem al tercer pas, és a dir, mirem quina z ens proporciona aquest nou vèrtex X^1 que, tret que hi hagi error de càlcul, haurà de ser superior a z^0. A la taula afegim el valor de la nova z i veiem que, efectivament, és superior a z^0.

			1	**2**	**0**	**0**
B	***c***	$\boldsymbol{V_B}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$
x_3	0	3	2	1	1	0
x_4	0	2	1	1	0	1
$z^0 = 0$			−1	−2	0	0
x_3	0	1	1	0	1	−1
x_2	2	2	1	1	0	1
$\mathbf{z^1 = 4}$						

8) Ara comprovarem, en una segona iteració de l'algoritme, si aquest vèrtex X^1 sobre el qual ens trobem és l'òptim o és susceptible de millora. Calculant els valors de $z_i - c_i$ sabrem si alguna variable ens demana entrar:

			1	**2**	**0**	**0**
B	***c***	$\boldsymbol{V_B}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$
x_3	0	3	2	1	1	0
x_4	0	2	1	1	0	1
$z^0 = 0$			−1	−2	0	0
x_3	0	1	1	0	1	−1
x_2	2	2	1	1	0	1
$z^1 = 4$			**1**	**0**	**0**	**2**

Podem veure que no hi ha cap valor de $z_i - c_i$ negatiu. Com que en els problemes de maximitzar això és senyal que aquesta és la taula òptima, ja som al vèrtex òptim. Per tant, la solució serà la següent:

$$\mathbf{X}^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 = 0 \\ x_2^1 = 2 \\ x_3^1 = 1 \\ x_4^1 = 0 \end{bmatrix},$$

que ens proporciona un $z^* = 4$.

Abans de continuar l'estudi d'aquest apartat és convenient que efectueu l'exercici d'autoavaluació 1.

3.2.3. Variables artificials

Què passaria si en estandarditzar el programa lineal els vectors associats a les variables de folgança no formessin una base canònica? Fins ara els exemples que hem vist tenien les restriccions de tipus $\leq$, de manera que en estandarditzar afegíem una variable de folgança amb el signe + a cada restricció, però ens podem trobar els casos següents:

1) Hi ha restriccions amb $\geq$.

Utilitzem l'exemple que hem fet servir al subapartat anterior, modificant-ne la segona restricció.

$$
\begin{aligned}
&[\text{MAX}]\ z = x_1 + 2x_2\\
&\text{s.a}\\
&2x_1 + x_2 \leq 3,\\
&x_1 + x_2 \geq 2,\\
&x_i \geq 0.
\end{aligned}
$$

Si estandarditzem:

$$
\begin{aligned}
&[\text{MAX}]\ z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4\\
&\text{s.a}\\
&2x_1 + x_2 + x_3 = 3,\\
&x_1 + x_2 - x_4 = 2,\\
&x_i \geq 0.
\end{aligned}
$$

Si ara construíssim una taula ja no podríem posar x_3 i x_4 a la base, perquè la matriu que formen els seus $\mathbf{P}^j$ associats ja no és base canònica (falla la $\mathbf{P}^4$):

$$[\mathbf{P}^3\ \ \mathbf{P}^4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Quan passa això, hem de posar un "pedaç" en aquesta posició (la de x_4 al programa lineal). Aquest pedaç és el que es coneix amb el nom de *variables artificials*.

> Les **variables artificials** s'anomenen així perquè simplement són un artifici; provenen de l'ampliació i les inserim a fi de resoldre una determinada situació que trobem a la primera taula.

Ús de les variables artificials

Utilitzarem les variables artificials quan amb la forma estàndard no tinguem base canònica. Una vegada les haguem usat, direm que "estem en forma ampliada".

Com que la nova variable, que denotem amb A_1, és un artifici, és a dir, no té cap significat econòmic, haurà de desaparèixer de la base tan aviat com sigui possible; per a provocar-ho li posarem una c a la funció objectiu que la penalitzi de manera exagerada. La millor manera de penalitzar una variable en un problema de maximitzar com el nostre és posant-li una c igual a $-M$ (essent M un valor arbitràriament gran, molt més gran que qualsevol valor dels que utilitzem en el programa lineal), mentre que si fos de minimitzar, actuaríem penalitzant amb una $+M$. Així, en el nostre cas particular, si estandarditzem:

$$[\text{MAX}]\ z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - MA_1$$

s.a

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$
$$x_1 + x_2 - x_4 + A_1 = 2,$$
$$x_i \geq 0.$$

Per tant, a la primera base hi haurà x_3 i A_1, per aquest ordre:

			1	2	0	0	$-M$
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1
$\boldsymbol{x_3}$	0	3	2	1	**1**	0	**0**
$\boldsymbol{A_1}$	$-M$	2	1	1	**0**	-1	**1**

2) Hi ha una restricció o diverses en forma d'igualtat. Utilitzem el mateix exemple modificant-hi la primera restricció.

$$[\text{MAX}]\ z = x_1 + 2x_2$$

s.a

$$2x_1 + x_2 = 3,$$
$$x_1 + x_2 \leq 2,$$
$$x_i \geq 0.$$

Si estandarditzem:

$$[\text{MAX}]\ z = x_1 + 2x_2 - MA_1 + 0x_3$$

s.a

$$2x_1 + x_2 + A_1 = 3,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 2,$$
$$x_i \geq 0.$$

Aquí la primera base estaria formada, en aquest ordre, per A_1 i x_3. A aquesta manera de representar el programa lineal li donem el nom de *forma ampliada*.

Ordre de les variables

Tant en estandarditzar el programa lineal com en col·locar-les a la taula, en primer lloc posarem les variables de folgança i després les artificials.

La **forma ampliada de l'algoritme símplex** és aquella en la qual s'assegura que a cada restricció hi ha una variable que apareix únicament una vegada, de manera que el seu vector associat sigui canònic.

Les formes estàndard i ampliada podran coincidir quan no hi figurin les variables artificials, cosa que acostuma a passar quan les restriccions són del tipus $\leq$.

Sempre cal procurar estalviar-se l'ús de variables artificials, atès que si el problema té solució, el més probable és que necessitem almenys tantes taules com variables artificials hi haguem posat, ja que l'algoritme símplex les anirà traient de la base una per una.

Com estalviar-se variables artificials

És possible que una variable real aparegui només en una restricció. Aleshores, aquesta variable pot formar part de la primera base, ja que el seu vector associat serà canònic. Això permet que en alguns problemes ens puguem estalviar les variables artificials, encara que no les de folgança.

Per a veure com es pot obtenir la forma ampliada de l'algoritme símplex, considerem l'exemple següent:

$$
\begin{aligned}
&[\text{MAX}]\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
&\text{s.a} \\
&3x_2 + x_3 \geq 60, \\
&5x_2 - 2x_3 \leq 100, \\
&x_1 - x_2 + 3x_3 = 70, \\
&x_i \geq 0.
\end{aligned}
$$

La forma ampliada per a la resolució de l'algoritme símplex seria la que presentem a continuació:

$$
\begin{aligned}
&[\text{MAX}]\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - MA_1 - MA_2 \\
&\text{s.a} \\
&3x_2 + x_3 - x_4 + A_1 = 60, \\
&5x_2 - 2x_3 + x_5 = 100, \\
&x_1 - x_2 + 3x_3 + A_2 = 70, \\
&x_i \geq 0.
\end{aligned}
$$

En la primera solució (taula) posem, per aquest ordre, A_1, x_5 i x_1.

Exemple de resolució d'un PL en forma ampliada amb l'algoritme símplex

Considerem el programa lineal que plantegem a continuació:

$$
\begin{aligned}
&[\text{MAX}]\ z = x_1 + x_2 + x_3 \\
&\text{s.a} \\
&x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4, \\
&-x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -2, \\
&x_i \geq 0.
\end{aligned}
$$

Si resolguéssim aquest programa mitjançant les taules de l'algoritme símplex, trobaríem un problema a la segona restricció, ja que té un terme independent negatiu. Això ens impedeix, en un principi, utilitzar aquest mètode. Això no obstant, la solució és senzilla: multiplicar la restricció per -1. Així se soluciona el problema.

La dificultat següent que trobarem és que a causa del signe més gran o igual que ens queda en multiplicar-la per -1, la variable de folgança que introduirem anirà precedida d'un signe negatiu, per la qual cosa no tindrem base de partida. Ho haurem de solucionar introduint-hi una variable artificial.

Així, el problema estandarditzat final ens quedarà tal com el que presentem a continuació:

$$[\text{MAX}]\ z = x_1 + x_2 + x_3 - MA_2$$

s.a

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4,\\ &x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 + A_2 = 2,\\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

La taula corresponent a aquest programa lineal és la que presentem tot seguit:

			1	**1**	**1**	**0**	**0**	$-M$
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_2
x_4	0	4	1	2	1	1	0	0
A_2	$-M$	2	1	-1	**2**	0	-1	1
$z^0 = -2M$			$-1 - M$	$-1 + M$	$-1 - 2M$	0	M	0
x_4	0	3	1/2	**5/2**	0	1	1/2	$-1/2$
x_3	1	1	1/2	$-1/2$	1	0	$-1/2$	1/2
$z^1 = 1$			$-1/2$	$-3/2$	0	0	$-1/2$	$1/2 + M$
x_2	1	6/5	1/5	1	0	2/5	1/5	$-1/5$
x_3	1	8/5	**3/5**	0	1	1/5	$-2/5$	2/5
$z^2 = 14/5$			$-1/5$	0	0	3/5	$-1/5$	$1/5 + M$
x_2	1	6/9	0	1	$-1/3$	1/3	**1/3**	$-1/3$
x_1	1	8/3	1	0	5/3	1/3	$-6/9$	6/9
$z^3 = 10/3$			0	0	1/3	6/9	$-1/3$	$1/3 + M$
x_5	0	2	0	3	-1	1	1	-1
x_1	1	4	1	2	1	1	0	0
$z^* = 4$			0	1	0	1	0	M

Aquesta taula és l'òptima, atès que tots els valors de $z_i - c_i$ són positius.

A efectes pedagògics, hem abordat el tractament de les variables artificials en l'àmbit de l'anomenat *mètode de la penalització*. Ara bé, aquest mètode comporta un seguit de dificultats quan s'implementa en procediments automatitzats de càlcul. Per això s'han desenvolupat altres mètodes, com el denominat *mètode de les dues fases*, que no explicarem perquè s'escapa de l'abast d'aquest mòdul.

4. Tipologia de solucions

En aquest apartat explicarem com podem detectar, mentre utilitzem el mètode símplex, els diferents tipus de solució que ja hem vist en el sistema gràfic de l'espai de les variables.

Vegeu la tipologia de solucions al subapartat 4.5 del mòdul "Introducció a la investigació operativa" d'aquesta assignatura.

En la resolució dels PL ens podem trobar amb les situacions següents:

1) Problemes lineals sense solució

Direm que un problema lineal no té solució si a la taula òptima* tenim a la base alguna variable artificial amb valor diferent de zero.

*** La taula òptima és la taula on tots els valors de $z_i - c_i$ estan adequats a l'òptim.**

Pot semblar una reiteració parlar d'una variable a la base amb valor diferent de zero, però com veurem més endavant, no ho és, ja que hi ha el que es coneix com a *solucions degenerades*.

Si ens trobem en el cas d'un problema lineal sense solució ens haurem de replantejar alguns paràmetres del problema, ja que és possible que l'haguem de dotar de més recursos o ser menys exigents amb algunes restriccions.

2) Problemes lineals amb solució impròpia

Ens trobarem davant d'una solució impròpia quan un component qualsevol de la solució tendeix, igual que el valor de z, a $+\infty$ o $-\infty$.

A efectes de còmput, aquesta situació es detecta quan durant l'aplicació de l'algoritme símplex una variable ens permet entrar a la base i no en trobem cap que en surti, perquè en calcular les $\sigma_j = V_{Bj} / x_{Bj,k}$, $\forall x_{Bj,k} > 0$, no tenim cap denominador estrictament positiu.

3) Problemes lineals amb solució pròpia múltiple

Detectar que ens trobem davant d'una solució pròpia múltiple és tan senzill com trobar el nombre de zeros que hi ha en els valors de $z_i - c_i$, de manera que si n'hi ha més que variables a la base (m) és que la solució és múltiple.

Podem detectar que ens trobem davant d'una solució pròpia múltiple si en l'última taula hi ha una variable que no és a la base, però que té un valor $z_i - c_i = 0$, cosa que, com ja hem vist en els exemples, és característica de les variables que hi ha a la base.

Vegeu els exemples presentats al llarg de l'apartat 3 d'aquest mòdul didàctic.

Tindrem una solució pròpia múltiple no fitada quan la solució es troba al llarg d'un marge no fitat de solucions possibles.

A efectes de còmput, una situació de solució pròpia múltiple no fitada es detecta quan durant l'aplicació de l'algoritme símplex, una variable ens demana entrar a la base i no en trobem cap altra que en surti, perquè en calcular les $\sigma_j = V_{Bj}/x_{Bj,k}$, $\forall x_{Bj,k} > 0$ no tenim cap denominador estrictament positiu, però tenim a més una variable que no és a la base amb un valor $z_i - c_i = 0$. Quan hi ha algun determinador estrictament positiu, parlem de *solució pròpia múltiple fitada*. En aquest cas haurem d'obligar la variable que no és a la base amb el valor de $z_i - c_i$ igual a zero a entrar a la base. Així, com ja hem vist en l'espai de les variables, generem un nou vèrtex que ens proporcionarà el mateix valor de z.

Exemple de situació amb solució pròpia múltiple

Considerem el programa lineal següent:

$$[\text{MAX}]\ z = 6x_1 + 10x_2$$

s.a

$$5x_1 + 2x_2 \le 10,$$
$$3x_1 + 5x_2 \le 15,$$
$$x_i \ge 0.$$

La solució d'aquest cas es presenta a la taula que mostrem a continuació:

			6	10	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3 x_4	0 0	10 15	5 3	2 **5**	1 0	0 1
$z^0 = 0$			−6	−10	0	0
x_3 x_2	0 10	4 3	**19/5** 3/5	0 1	1 0	−2/5 1/5
$z^1 = 30$			0	0	0	2

Ara ja som a l'òptim, però x_1, que no és a la base, té un valor $z_1 - c_1 = 0$, per la qual cosa és solució múltiple i entrem x_1:

			0	0	0	2
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1 x_2	6 10	20/19 45/19	1 0	0 1	5/19 −3/19	−2/19 5/19
$z^2 = 30$			0	0	0	38/19

En aquest cas la solució òptima estarà formada per la combinació lineal convexa dels vèrtexs X^1 i X^2 i s'indicarà de la manera següent:

$$X^* = \alpha X^1 + (1 - \alpha)X^2 = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \begin{bmatrix} 20/19 \\ 45/19 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4) Problemes lineals amb solució pròpia única

Direm que ens trobem davant d'una solució òptima pròpia única si no estem en cap dels casos anteriors.

5. Degeneració i bucles infinits

En un problema lineal en aplicar l'algoritme símplex ens podem trobar que a la base tenim alguna variable amb valor zero. En aquest cas parlarem de **degeneració**.

La presència de degeneració pot originar diferents problemes quan intentem aplicar els resultats habituals de la programació lineal. En particular, en presència de degeneració no es garanteix que l'algoritme símplex convergeixi en un nombre finit de passos.

Molt succintament, la raó rau en el fet que com que partim d'un punt degenerat i portem a terme una iteració de l'algoritme, és possible que es passi a una altra base que representa el mateix punt. Així, doncs, és factible que es parteixi d'un punt degenerat i al cap de t iteracions tornem al mateix punt. El procés es pot repetir indefinidament sense que s'assoleixi la solució òptima encara que existeixi.

En aquest cas, direm que ens trobem en un bucle infinit, i es farà necessari introduir algun mecanisme addicional sobre l'algoritme símplex per a garantir-ne la convergència.

Entre els diferents mètodes per a tractar el problema dels bucles infinits, per la seva simplicitat, adoptarem la **regla de Bland**, que es basa en les premisses següents:

1) Representar les variables de manera indexada a fi que sigui possible ordenar-les per l'índex.

2) Si tenim un problema de maximització, caldrà triar com a variable que ha d'entrar en la nova base aquella variable fora de la base que amb un valor de $z_k - c_k$ no adequat (≤ 0) tingui el subíndex més petit d'entre les candidates.

3) En cas que tinguem dues variables candidates (o més) a sortir de la base, perquè tenen el mateix valor $\sigma_j = V_{Bj}/x_{Bj,k} > 0$ seleccionarem aquella que tingui el subíndex més petit.

Exemple de problema de bucle infinit

Podem veure la situació a la qual fèiem referència en un exemple (de minimitzar) creat per Beale. Sigui la primera taula que trobeu a la pàgina següent.

			0	0	0	−3/4	20	−1/2	6	
B	***c***	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	0	0	1	0	0	1/2	−8	−1	9	$\sigma_1 = 0/(1/2) = 0$
x_2	0	0	0	1	0	1/2	−12	−1/2	3	$\sigma_2 = 0/(1/2) = 0$
x_3	0	0	0	0	1	0	0	1	0	
$z^0 = 0$			0	0	0	3/4	−20	1/2	−6	

Si continuem iterant, la setena taula que obtindríem seria idèntica a la primera, i totes correspondrien al punt (0,0,1,0,0,0,0) expressat en diferents bases. Es tracta, per tant, d'un problema de bucle infinit.

En el nostre exemple, la primera fase de la regla de Bland no és necessària, ja que les variables ja estan indexades.

Com a variable fora de la base que entrarà a la base triarem aquella que tingui un valor $z_i - c_i \geq 0$ i que tingui l'índex més petit. En el nostre cas, les candidates a entrar són x_4 i x_6. Com que 4 és inferior a 6 hem d'entrar x_4 (noteu que amb relació als valors de $z_i - c_i$ només ens interessa el signe, i no el seu valor).

Si entrem x_4 tindrem dues candidates a sortir: x_1 i x_2. Igual que abans, escollim aquella que sortirà a x_1 perquè 1 és més petit que 2. Procedint així s'obté el vèrtex òptim igual a (3/4,0,0,1,0,1,0) que proporciona un valor de la $z = -5/4$.

En aquest cas, l'elecció coincideix amb la que hauríem fet amb el símplex normal, cosa que és casualitat i, de fet, continua així fins a la quarta taula.

Si bé, com ja hem assenyalat, no tota situació de degeneració comporta un problema de bucle infinit, podem aplicar la regla de Bland sempre que tinguem un punt amb degeneració; no cal esperar a detectar el bucle.

Lectura complementària

Podeu trobar més informació sobre l'algoritme creat per Beale a l'obra següent:

M. Bazaraa; J. Jarvis; H. Sherali (1990). *Linear Programming and Network Flows* (2a ed.). Nova York: John Wiley & Sons.

Resum

En aquest mòdul hem descrit l'algoritme símplex per a resoldre numèricament problemes lineals. Aquesta descripció s'ha fet tant des d'un vessant teòric, esbossant els teoremes en què es fonamenta, com des d'un vessant pràctic, detallant la manera d'aconseguir que l'aplicació de l'algoritme sigui operativa.

També hem après a reconèixer les condicions que ha de tenir un programa lineal perquè s'hi pugui aplicar l'algoritme, i hem presentat les transformacions necessàries que cal efectuar per a garantir aquesta aplicabilitat. Finalment, hem apuntat alguns dels problemes de còmput de l'algoritme, tant els que sorgeixen en introduir variables artificials com els que estan associats a la degeneració.

Exercicis d'autoavaluació

1. Resoleu utilitzant el mètode símplex per matrius el programa lineal següent:

$$[\text{MAX}]\ z = 3x_1 + 8x_2$$

s.a

$$\begin{aligned} &2x_1 + 4x_2 \leq 1.600, \\ &6x_1 + 2x_2 \leq 1.800, \\ &x_2 \leq 1.600, \\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

Partiu del vèrtex:

$$\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.600 \\ 1.800 \\ 350 \end{bmatrix}.$$

2. Resoleu el problema de Tropicfruit Inc. Convé recordar que el plantejament que teníem era el següent:

a) Definició de les variables:

- x_1: cents de litres de Katxumbo que s'han d'elaborar.
- x_2: cents de litres de Kimbombo que s'han d'elaborar.
- x_3: cents de litres d'Angaua que s'han d'elaborar.

b) Plantejament:

$$[\text{MAX}]\ z = 10x_1 + 12x_2 + 9x_3$$

s.a

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_3 \leq 30, \\ &2x_1 + x_2 \leq 40, \\ &x_2 + 2x_3 \leq 50, \\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

Vegeu l'exercici d'autoavaluació 2 del mòdul "Introducció a la investigació operativa" d'aquesta assignatura.

3. Fustes del Segre elabora un pla per a explotar els recursos de fusta d'una de les seves explotacions forestals de manera òptima. Aquesta explotació és formada per la zona de Pedraroja, d'on es poden extreure uns 30.000 m^3 de fusta d'avet, i la zona de l'Estacat, que pot donar uns 80.000 m^3 de pi comú. Una vegada recollida la fusta en totes dues zones, es porta a una serradora on se'n fan taulons. L'altra part de la fusta extreta es transporta a una planta d'elaboració de planxa.

Per a obtenir 1.000 m^3 de taulons es necessiten aproximadament uns 1.000 m^3 de fusta d'avet i uns 3.000 m^3 de fusta de pi. Per a elaborar 1.000 m^3 de planxa es necessiten 2.000 m^3 de fusta d'avet i 4.000 m^3 de fusta de pi. L'empresa s'ha compromès en un contracte a servir comandes per un total de 4.000 m^3 de taulons i 12.000 m^3 de planxa.

La fusta d'avet costa a l'empresa 10.000 u.m./m^3, mentre que la de pi val 5.000 u.m./m^3.

Els taulons es venen a un preu de 100.000 u.m./m^3 i han de suportar uns costos d'elaboració de 25.000 u.m./m^3, a més de la fusta. D'altra banda, la planxa es ven a un preu de 180.000 u.m./m^3 i suporta uns costos d'elaboració de 60.000 u.m./m^3, a més de la fusta.

L'empresa vol saber quina quantitat ha de produir de cada producte perquè el benefici sigui el màxim possible respectant els compromisos de demanda adquirits.

4. Industrial Formatgera SA és una empresa que es dedica a elaborar tres tipus de formatges utilitzant llet de cabra i llet d'ovella. Per al mes vinent disposen de 850 litres de llet de cabra i de 900 de llet d'ovella. Podem obtenir els coeficients tècnics i els costos a partir de la taula següent:

Taula de costos						
Costos	**Producte**					
	Formatge 1		**Formatge 2**		**Formatge 3**	
	Quantitat (l)	**Cost (u.m.)**	**Quantitat (l)**	**Cost (u.m.)**	**Quantitat (l)**	**Cost (u.m.)**
Llet de cabra (20 euros/l)	5	100	2	40	1	20
Llet d'ovella (10 euros/l)	1	10	2	20	4	40
Altres costos	–	500	–	600	–	300

(Continua a la pàgina següent.)

Taula de costos						
Costos	**Producte**					
	Formatge 1		**Formatge 2**		**Formatge 3**	
	Quantitat (l)	**Cost (u.m.)**	**Quantitat (l)**	**Cost (u.m.)**	**Quantitat (l)**	**Cost (u.m.)**
Total de costos/unitat		610		660		360
Preu de venda/unitat		910		1.260		560
Benefici/unitat		300		600		200

A més, per a garantir els llocs de treball que té l'empresa, la direcció ha decidit que com a mínim s'han d'elaborar un total de 400 formatges.
Quina quantitat ha de produir de cada formatge perquè el benefici sigui màxim?

5. Resoleu utilitzant el mètode símplex per taules el programa lineal següent:

$$[\text{MAX}]\ z = 6x_1 + 4x_2$$

s.a

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \geq 2, \\ &-x_1 + x_2 \leq 2, \\ &3/2x_1 + x_2 \leq 9, \\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

6. Resoleu utilitzant el mètode símplex per taules el programa lineal següent:

$$[\text{MIN}]\ z = x_1 + x_2 + 4x_3$$

s.a

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 20, \\ &3x_1 + x_3 = 14, \\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

7. Resoleu utilitzant el mètode símplex per taules el programa lineal següent:

$$[\text{MAX}]\ z = 10x_1 - 8x_2 + 3x_3$$

s.a

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 1/2x_3 \geq -4, \\ &4x_1 + x_2 + x_3 \leq 10, \\ &x_2 \geq -2, \\ &x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{i} \quad x_3 \text{ lliure de signe.} \end{aligned}$$

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. És fàcil adonar-se que el vèrtex proposat ens aporta un valor de z de zero, ja que:

$$z^0 = 3 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 0 \cdot 1.600 + 0 \cdot 1.800 + 0 \cdot 350 = 0.$$

Un cop hem comprovat que el punt que ens donen és un vèrtex, passem a resoldre el programa lineal mitjançant el mètode símplex per matrius:
1) Estandarditzem el programa lineal:

$$[\text{MAX}]\ z = 3x_1 + 8x_2$$

s.a

$$\begin{aligned} &2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1.600,\\ &6x_1 + 2x_2 + x_4 = 1.800,\\ &x_2 + x_5 = 1.600,\\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

2) Partim d'un punt que, a més de complir les restriccions, per a ser vèrtex ha de tenir uns vectors linealment independents associats a les variables amb valor diferent de zero. Vegeu-ne la comprovació: diferenciem els vectors $\mathbf{P}^j$ dels $\mathbf{P}^k$, essent $\mathbf{P}^{(J)} = \{\mathbf{P}^3, \mathbf{P}^4, \mathbf{P}^5\}$ i $\mathbf{P}^{(K)} = \{\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2\}$, on:

$$\mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} 2\\6\\0 \end{bmatrix};\ \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 4\\2\\1 \end{bmatrix};\ \mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 1\\0\\0 \end{bmatrix};\ \mathbf{P}^4 = \begin{bmatrix} 0\\1\\0 \end{bmatrix};\ \mathbf{P}^5 = \begin{bmatrix} 0\\1\\1 \end{bmatrix}.$$

Podem veure que:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

de manera que els vectors $\mathbf{P}^j$ són linealment independents.

3) Ara calcularem les x_{jk} que ens permetran transformar els $\mathbf{P}^k$ en $\mathbf{P}^j$. Així, per a $k \in K = \{1, 2\}$ i $j \in J = \{3, 4, 5\}$ aplicarem:

$$\mathbf{P}^k = \sum_{j \in J} x_{jk} \mathbf{P}^j$$

de manera que obtindrem:

- $\mathbf{P}^1 = x_{31}\mathbf{P}^3 + x_{41}\mathbf{P}^4 + x_{51}\mathbf{P}^5$,
- $\mathbf{P}^2 = x_{32}\mathbf{P}^3 + x_{42}\mathbf{P}^4 + x_{52}\mathbf{P}^5$,

que matricialment és:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4\\ 6 & 2\\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31} & x_{32}\\ x_{41} & x_{42}\\ x_{51} & x_{52} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_{31} & x_{32}\\ x_{41} & x_{42}\\ x_{51} & x_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 4\\ 6 & 2\\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4\\ 6 & 2\\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En aquest cas podem comprovar que ha estat extremadament fàcil calcular x_{jk} perquè la matriu de $\mathbf{P}^j$ era canònica.

4) Per tant, podem procedir a calcular els valors de $z_k - c_k$ per a les variables que no pertanyen a la base, i com que es tracta d'un problema de maximitzar, no arribarem a l'òptim fins que tinguem els valors $z_k - c_k \geq 0$. A partir de la definició:

$$z_k - c_k = \sum_{j \in J} c_j x_{jk} - c_k, \quad \forall k \in K = \{1, 2\},$$

arribem als resultats següents:

- $z_1 - c_1 = (c_3 \cdot x_{31} + c_4 \cdot x_{41} + c_5 \cdot x_{51}) - c_1 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 0) - 3 = -3.$
- $z_2 - c_2 = (c_3 \cdot x_{32} + c_4 \cdot x_{42} + c_5 \cdot x_{52}) - c_2 = (0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1) - 8 = -8.$

En aquest cas farem entrar x_2 a la base, ja que és la que té un valor de $z_k - c_k$ més negatiu.

5) Una vegada sabem quina variable entra, hem d'esbrinar quina variable en sortirà perquè x_2 ocupi el seu lloc.
Per a saber-ho, calculem les σ_j per a cada una de les variables a la base:

$$\sigma_j = \frac{x_j^0}{x_{jk}}, \quad \forall x_{jk} > 0.$$

Així tenim:

- $\sigma_3 = \dfrac{x_3^0}{x_{32}} = \dfrac{1.600}{4} = 400.$

- $\sigma_4 = \dfrac{x_4^0}{x_{42}} = \dfrac{1.800}{2} = 900.$

- $\sigma_5 = \dfrac{x_5^0}{x_{52}} = \dfrac{350}{1} = 350.$

La variable que surt de la base és x_5, que és la que té la σ_j més petita, és a dir, $\sigma^* = 350$.

Vegeu el procés de generació d'un nou vèrtex al setè pas del subapartat 3.2.2 d'aquest mòdul didàctic.

6) Tot seguit generem un nou vèrtex $\mathbf{X}^1$ seguint els passos indicats, així:

$$\mathbf{X}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 350 \\ 1.600 - 4 \cdot 350 \\ 1.800 - 2 \cdot 350 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 350 \\ 200 \\ 1.100 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

I obtenim un valor de $z^1 = 2.800$.
Ara tornem a efectuar els mateixos passos per veure si aquesta solució és l'òptima. En primer lloc, diferenciem una altra vegada els vectors $\mathbf{P}^j$ dels $\mathbf{P}^k$: $\mathbf{P}^{(J)} = \{\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \mathbf{P}^4\}$i $\mathbf{P}^{(K)} = \{\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^5\}$:

$$\mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \ \mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{P}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{P}^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Podem veure que

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1,$$

de manera que els $\mathbf{P}^j$ són linealment independents. Aquí es troba la diferència amb el mètode símplex per taules: que els vectors associats a la nova solució no han de ser necessàriament base canònica, cosa que, com podrem comprovar, alenteix els càlculs.
Continuem calculant les x_{jk} que ens permetran transformar els $\mathbf{P}^k$ en $\mathbf{P}^j$. Així, per a $k \in K =$ $= \{1, 5\}$ i $j \in J = \{2, 3, 4\}$ aplicarem:

$$\mathbf{P}^k = \sum_{j \in J} x_{jk} \mathbf{P}^j$$

i obtindrem:

- $\mathbf{P}^1 = x_{21}\mathbf{P}^2 + x_{31}\mathbf{P}^3 + x_{41}\mathbf{P}^4,$
- $\mathbf{P}^5 = x_{25}\mathbf{P}^2 + x_{35}\mathbf{P}^3 + x_{45}\mathbf{P}^4.$

que matricialment és:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} & x_{25} \\ x_{31} & x_{35} \\ x_{41} & x_{45} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_{21} & x_{25} \\ x_{31} & x_{35} \\ x_{41} & x_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Coneixent ja els x_{jk} podem calcular els valors de $z_k - c_k$. A partir de la definició:

$$z_k - c_k = \sum_{j \in J} c_j x_{jk} - c_k, \quad \forall k \in K,$$

obtenim els resultats següents:

- $z_1 - c_1 = (c_2 \cdot x_{21} + c_3 \cdot x_{31} + c_4 \cdot x_{41}) - c_1 = (8 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 6) - 3 = -3.$
- $z_5 - c_5 = (c_2 \cdot x_{25} + c_3 \cdot x_{35} + c_4 \cdot x_{45}) - c_5 = (8 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) + 0 \cdot (-2)) - 0 = 8.$

Encara no som a l'òptim i x_1 entra a la base. Una vegada sabem quina variable entra, hem d'esbrinar quina variable en sortirà perquè x_2 ocupi el seu lloc. Per a saber-ho calculem σ_j per a cada una de les variables de la base:

$$\sigma_j = \frac{x_j^0}{x_{jk}}, \quad \forall x_{jk} > 0.$$

Obtenim els resultats següents:

- $\sigma_2 = \dfrac{x_2^0}{x_{21}} = \dfrac{350}{0}$,
- $\sigma_3 = \dfrac{x_3^0}{x_{31}} = \dfrac{200}{2} = 100,$
- $\sigma_4 = \dfrac{x_4^0}{x_{41}} = \dfrac{1.100}{6} = 183{,}3.$

La variable que surt de la base és x_3, que és la que té la σ_j més petita, és a dir, $\sigma^* = 100$. Generem el nou vèrtex $\mathbf{X}^2$:

$$\mathbf{X}^2 = \begin{bmatrix} 100 \\ 350 \\ 0 \\ 1.100 - 100 \cdot 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 350 \\ 0 \\ 500 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

i obtenim una $z^2 = 3.100$.

Per a comprovar si hi ha un vèrtex millor necessitem calcular els valors de $z_k - c_k$ de les variables k-èsimes (en aquest cas, x_3 i x_5), i per a fer-ho hem de saber les x_{jk}. Amb aquest objectiu posem novament els $\mathbf{P}^k$ en funció dels $\mathbf{P}^j$:

- $\mathbf{P}^3 = x_{13}\mathbf{P}^1 + x_{23}\mathbf{P}^2 + x_{43}\mathbf{P}^4,$
- $\mathbf{P}^5 = x_{15}\mathbf{P}^1 + x_{25}\mathbf{P}^2 + x_{45}\mathbf{P}^4,$

que matricialment s'escriu de la manera següent:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} & x_{15} \\ x_{23} & x_{25} \\ x_{43} & x_{45} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_{13} & x_{15} \\ x_{23} & x_{25} \\ x_{43} & x_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Una vegada coneguts aquests valors, ja podem calcular els valors de $z_k - c_k$:

$$z_k - c_k = \sum_{j \in J} c_j x_{jk} - c_k, \quad \forall k \in K = \{3, 5\},$$

obtenim els resultats següents:

- $z_3 - c_3 = (c_1 \cdot x_{13} + c_2 \cdot x_{23} + c_4 \cdot x_{43}) - c_3 = (3 \cdot 1/2 + 8 \cdot 0 + 0 \cdot (-3)) - 0 = 3/2.$
- $z_5 - c_5 = (c_1 \cdot x_{15} + c_2 \cdot x_{25} + c_4 \cdot x_{45}) - c_5 = (3 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 + 0 \cdot 10) - 0 = 2.$

Ara ja sabem que no hi ha cap vèrtex que millori la z^2, de manera que el vèrtex $\mathbf{X}^2$ és l'òptim i la solució queda de la manera següent:

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 100 \\ 350 \\ 0 \\ 500 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aquest vèrtex òptim ens dóna un valor de la funció objectiu $z^* = 3.100$.

2. A partir de les dades del plantejament construïm la taula i efectuem l'algoritme fins que trobem l'òptim:

			10	12	9	0	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1	0	30	1	0	2	1	0	0
s_2	0	40	2	1	0	0	1	0
s_3	0	50	0	1	2	0	0	1
$z^0 = 0$			−10	−12	−9	0		

(Continua a la pàgina següent.)

			10	12	9	0	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1	0	30	1	0	2	1	0	0
x_2	12	40	2	1	0	0	1	0
s_3	0	10	−2	0	2	0	−1	1
$z^1 = 480$			14	0	−9	0	12	0
s_1	0	20	3	0	0	1	1	−1
x_2	12	40	2	1	0	0	1	0
x_3	9	5	−1	0	1	0	−1/2	1/2
$z^2 = 525$			5	0	0	0	7,5	4,5

Així, doncs, es tenen els resultats següents:
- $x_1 = 0 \Rightarrow$ no es produirà Katxumbo el mes següent.
- $x_2 = 40 \Rightarrow$ es produiran 4.000 litres de Kimbombo.
- $x_3 = 5 \Rightarrow$ es produiran 500 litres d'Angaua.
- $z^* = 525 \Rightarrow$ s'obtindrà un benefici total de 52.500 euros.

3. Les dades de l'empresa Fustes del Segre es recullen a la taula següent:

Taula de costos					
Costos		**Producte**			
		Taulons (x_1)		**Planxes (x_2)**	
	Quantitat per unitat	**Quantitat**	**Cost**	**Quantitat**	**Cost**
Avet	10.000	1	10.000	2	20.000
Pi	5.000	3	15.000	4	20.000
Altres	–	–	25.000	–	60.000
Total de costos			50.000		100.000
Preu de venda			100.000		180.000
Benefici			50.000		80.000

A continuació passem a la resolució del problema, efectuant els passos següents:

a) Definició de les variables:
- x_1: nombre de taulons.
- x_2: nombre de planxes.

b) Plantejament del problema:

$$[\text{MAX}]\ z = 5x_1 + 8x_2$$

s.a

$$x_1 + 2x_2 \leq 30,$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 80,$$
$$x_1 \geq 4,$$
$$x_2 \geq 12,$$
$$x_i \geq 0.$$

Construïm la taula i apliquem el mètode:

			5	8	0	0	0	0	$-M$	$-M0$
B	c	V_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	A_1	A_2
s_1	0	30	1	2	1	0	0	0	0	0
s_2	0	80	3	4	0	1	0	0	0	0
A_1	$-M$	4	1	0	0	0	−1	0	1	0
A_2	$-M$	12	0	**1**	0	0	0	−1	0	1

(Continua a la pàgina següent.)

			5	8	0	0	0	0	$-M$	$-M$
B	**c**	V_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	A_1	A_2
$z^0 = -16M$			$-M-5$	$-M-8$	0	0	M	M	0	0
s_1	0	6	1	0	1	0	0	2	0	-2
s_2	0	32	3	0	0	1	0	4	0	-4
A_1	$-M$	4	**1**	0	0	0	-1	0	1	0
x_2	8	12	0	1	0	0	0	-1	0	1
$z^1 = -4M + 96$			$-M-5$	0	0	0	M	-8	0	$M+8$
s_1	0	2	0	0	1	0	1	**2**	-1	-2
s_2	0	20	0	0	0	1	3	4	-3	-4
x_1	5	4	1	0	0	0	-1	0	1	0
x_2	8	12	0	1	0	0	0	-1	0	1
$z^2 = 116$			0	0	0	0	-5	-8	$M+5$	$M+8$
s_4	0	1	0	0	0,5	0	**0,5**	1	$-0{,}5$	-1
s_2	0	16	0	0	-2	1	1	0	-1	0
x_1	5	4	1	0	0	0	-1	0	1	0
x_2	8	13	0	1	0,5	0	0,5	0	$-0{,}5$	0
$z^3 = 124$			0	0	4	0	-1	0	$M+1$	M
s_3	0	2	0	0	1	0	1	2	-1	-2
s_2	0	14	0	0	-3	1	0	-2	0	2
x_1	5	6	1	0	1	0	0	2	0	-2
x_2	8	12	0	1	0	0	0	-1	0	1
$z^4 = 126$			0	0	5	0	0	2	M	$M-2$

Per tant, la solució és aquesta:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 = 6 \\ x_2 = 12 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 14 \\ s_3 = 2 \end{bmatrix},$$

que ens proporciona un resultat de $z^* = 126$. Aquests resultats ens diuen que s'ha d'obtenir una producció de 6.000 m^3 de taulons i 12.000 m^3 de planxes per a tenir 1.260 milions d'unitats monetàries de benefici màxim.

4. El plantejament del programa lineal en el cas de la Industrial Formatgera SA és el següent:

$$[\text{MAX}]\ z = 30x_1 + 60x_2 + 20x_3$$

s.a

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 \le 850,$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 900,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \ge 400,$$
$$x_i \ge 0.$$

Amb aquest plantejament efectuem l'algoritme del mètode símplex per taules i obtenim la taula que veiem a continuació:

			30	60	20	0	0	0	$-M$
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	0	25	3/2	0	$-1/2$	1/2	0	1	-1
x_5	0	50	-4	0	3	-1	1	0	0
x_2	60	425	5/2	1	1/2	1/2	0	0	0
$z = 25.500$			120	0	10	30	0	0	M

Per tant, la solució és produir 425 formatges del tipus 2 que proporcionarà un benefici de 25.500 euros.

5. Per a solucionar el problema amb les taules del mètode símplex hem d'obtenir la forma estàndard del programa, que és pràcticament la mateixa que hem donat en la resolució matricial de l'algoritme símplex. L'única diferència és que per a emprar les taules, necessitem uns vectors $\mathbf{P}^j$ amb els quals puguem formar una base canònica. Si observem el programa lineal estandarditzat del cas que ens ocupa, veiem que els vectors associats de dues de les variables de folgança formen part de la base canònica de $\mathbb{R}^3$, ja que:

$$\mathbf{P}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (associat a } x_4\text{)}; \quad \mathbf{P}^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (associat a } x_5\text{)}.$$

Com que el mètode símplex ens exigeix partir d'una base canònica, necessitem construir-la. Per a fer-ho tenim les dues opcions següents:
a) Multiplicar per -1 la primera restricció, a fi d'aconseguir que la variable de folgança sigui positiva i ens permeti formar la base que busquem. El problema d'aquest mètode és que pot donar lloc a un terme independent de la restricció que sigui negatiu, cosa que ens impedeix d'utilitzar l'algoritme símplex. En aquest cas caldrà introduir variables artificials.
b) Introduir una variable artificial amb la qual puguem crear la base. El coeficient d'aquesta variable a la funció objectiu serà M o $-M$ segons si és un problema de minimitzar o de maximitzar, respectivament, essent M un valor molt gran. Amb això volem que no entri a la base final. Si la variable artificial entrés en la solució òptima, amb un valor més gran que zero, el problema no tindria solució.
Seguirem la segona via i plantejarem el problema estàndard (incloent-hi les variables artificials necessàries):

$$[\text{MAX}]\ z = 6x_1 + 4x_2 - MA_1$$

s.a

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - x_3 + A_1 = 2, \\ &-x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ &(3/2)x_1 + x_2 + x_5 = 9, \\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

Ara ja tenim base canònica per a iniciar l'algoritme símplex: $\mathbf{P}^{A1}$, $\mathbf{P}^{(4)}$ i $\mathbf{P}^{(5)}$ (aquest primer vector és l'associat a la variable artificial). Apliquem l'algoritme:

			6	**4**	**0**	**0**	**0**	**$-M$**
B	***c***	**V_B**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**A_1**
A_1	$-M$	2	**1**	1	-1	0	0	1
x_4	0	2	-1	1	0	1	0	0
x_5	0	9	3/2	1	0	0	1	0
$z = -2M$			$-6 - M$	$-4 - M$	$-M$	0	0	0
x_1	6	2	1	1	-1	0	0	1
x_4	0	4	0	2	-1	1	0	1
x_5	0	6	0	$-1/2$	**3/2**	0	1	$-3/2$
$z = 12$			0	2	-6	0	0	$6 + M$
x_1	6	6	1	6/9	0	0	6/9	0
x_4	0	8	0	**5/3**	0	1	6/9	0
x_3	0	4	0	$-1/3$	1	0	6/9	-1
$z = 36$			0	0	0	0	4	M

Per tant, el primer vèrtex que trobem és:

$$\mathbf{X}^1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aquesta taula és l'òptima, però amb una particularitat: hi ha un valor de $z_i - c_i$ d'una variable fora de la base amb valor zero. Quan es doni aquest cas tindrem una solució múltiple.

Davant una solució múltiple hem d'introduir a la base la variable que tingui un valor de $z_i - c_i$ nul i que no sigui a la base, en aquest cas x_2. Una vegada triada la variable entrant, continuem normalment amb el mètode símplex per a trobar la taula següent (també òptima, evidentment). La raó de seguir aquest procediment davant una solució múltiple radica en el fet que les variables fora de la base amb valor $z_i - c_i = 0$ ni milloraran ni empitjoraran el valor de la funció objectiu; són susceptibles, doncs, d'entrar a la base sense canviar el valor òptim de la funció objectiu. La solució final serà la combinació lineal convexa de les diferents solucions que puguem trobar.

La taula següent que obtindrem en el nostre cas serà (tenint en compte que entra x_2):

			6	**4**	**0**	**0**	**0**	$-M$
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1
x_1	6	14/5	1	0	0	−2/5	2/5	0
x_2	4	24/5	0	1	0	3/5	2/5	0
x_3	0	8/5	0	0	1	1/5	4/5	−1
$z = 36$			0	0	0	0	4	M

Aleshores, el segon vèrtex és:

$$X^2 = \begin{bmatrix} 14/5 \\ 24/5 \\ 8/5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La solució al problema plantejat serà, com hem comentat, la combinació lineal convexa dels dos vèrtexs òptims obtinguts. L'expressió matemàtica d'això serà la següent:

$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 = 6 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 8 \\ x_5 = 0 \\ A_1 = 0 \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \begin{bmatrix} x_1 = 14/5 \\ x_2 = 24/5 \\ x_3 = 8/5 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \\ A_1 = 0 \end{bmatrix}, \quad \text{on } 0 \le \alpha \le 1.$$

6. Per a resoldre aquest problema l'hem de posar en forma estàndard. El programa estàndard de minimització queda de la manera següent:

$$[\text{MIN}]\ z = x_1 + x_2 + 4x_3 + MA_1 + MA_2$$

s.a

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + A_1 = 20,$$
$$3x_1 + x_3 + A_2 = 14,$$
$$x_i \ge 0.$$

El comentari que cal fer d'aquest programa lineal és que hem introduït una variable de folgança per a transformar la igualtat de la primera restricció i una variable artificial per a crear base. N'hem afegit una altra d'artificial en la segona restricció perquè, encara que sigui d'igualtat, no teníem un segon vector amb el qual poguéssim formar la base de partida a $\mathbb{R}^2$, de manera que hem inserit una segona variable artificial amb aquest objectiu.

			1	**1**	**4**	**0**	M	M
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2
A_1	M	20	1	2	−1	−1	1	0
A_2	M	14	**3**	0	1	0	0	1
$z = 34M$			$4M - 1$	$2M - 1$	−4	$-M$	0	0

(Continua a la pàgina següent.)

			1	1	4	0	M	M
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2
A_1	M	46/3	0	2	−4/3	−1	1	−1/3
x_1	1	14/3	1	0	1/3	0	0	1/3
$z = 46/3M + 14/3$			0	$2M - 1$	$-4/3M - 4/3$	$-M$	0	$4/3M + 1/3$
x_2	1	46/6	0	1	−2/3	−1/2	1/2	−1/6
x_1	1	14/3	1	0	1/3	0	0	1/3
$z = 74/6$			0	0	−13/3	−1/2	$1/2 - M$	$-1/6 + M$

Aquesta taula és l'òptima. Ens presenta una solució factible, ja que no hi ha cap variable artificial a la base amb valor positiu diferent de zero (és a dir, si en arribar a una taula òptima trobéssim a la base alguna variable artificial amb un valor positiu diferent de zero, el problema no tindria solució).

7. Per a aplicar el mètode símplex sabem que els termes independents de les restriccions han de ser no negatius i les variables no negatives (entre d'altres condicions). En el programa lineal present no es compleixen aquestes condicions. Per a solucionar el primer dels problemes només haurem de multiplicar per −1 la primera restricció i la tercera, mentre que per al segon hem de definir la variable lliure de signe de la manera següent:

$$x_3 = x'_3 - x''_3, \quad \text{on } x'_3, x''_3 \geq 0.$$

Així permetem que x_3 sigui lliure de signe. Una vegada haguem resolt el programa lineal veurem les conseqüències a l'hora d'interpretar la solució obtinguda. Fets aquests aclariments, tot seguit estandarditzarem el nostre programa i el deixarem a punt per a aplicar-li l'algoritme símplex.
El programa estàndard (incloent-hi el canvi de variable de x_3) és el següent:

$$[\text{MAX}]\ z = 10x_1 - 8x_2 + 3x'_3 - 3x''_3$$

s.a

$$-x_1 - x_2 - (1/2)x'_3 + (1/2)x''_3 + x_4 = 4,$$
$$4x_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 + x_5 = 10,$$
$$-x_2 + x_6 = 2,$$
$$x_i \geq 0.$$

Aplicant el mètode arribem al següent:

			10	−8	3	−3	0	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x'_3	x''_3	x_4	x_5	x_6
x_4	0	4	−1	−1	−1/2	1/2	1	0	0
x_5	0	10	**4**	1	1	−1	0	1	0
x_6	0	2	0	−1	0	0	0	0	1
$z^0 = 0$			−10	8	−3	3	0	0	0
x_4	0	13/2	0	−3/4	−1/4	1/4	1	1/4	0
x_1	10	5/2	1	1/4	**1/4**	−1/4	0	1/4	0
x_6	0	6	0	−1	0	0	0	0	1
$z^1 = 25$			0	21/2	−1/2	1/2	0	5/2	0
x_4	0	9	1	−1/2	0	0	1	1/2	0
x'_3	3	10	4	1	1	−1	0	1	0
x_6	0	6	0	−1	0	0	0	0	1
$z^* = 30$			2	11	0	0	0	3	0

Com podeu veure, aquesta taula és l'òptima. Ens hem de fixar en dos aspectes:
- El valor de la variable x_3 serà $10 - 0 = 10$.

- No és una solució múltiple fitada. En els casos de variables lliure de signe, molt probablement tindrem solucions d'aquest tipus ($z_k - c_k = 0$ en variables fora de la base), perquè el que ens interessa únicament és la diferència de les variables auxiliars emprades per a tornar a definir la variable lliure de signe (aquesta diferència serà el valor òptim de la variable inicial). En aquest problema la diferència és 10, però podríem haver aconseguit una infinitat de valors per a les variables auxiliars. Tanmateix, és important assenyalar que la solució no és impròpia, ja que en canviar els valors de les variables auxiliars l'únic que fem és aconseguir el mateix valor per a la variable principal que representen (x_3, en aquest cas), de manera que no es canvia de vèrtex.

Bibliografia

Bazaraa, M.; Jarvis, J.; Sherali, H. (1990). *Linear Programming and Network Flows* (2a ed.). Nova York: John Wiley & Sons. Hi ha traducció al castellà amb la referència següent: (1998). *Programación lineal y flujo de redes* (2a ed.). Mèxic: Limusa.

Hillier, F.; Lieberman, G. (1997). *Introducción a la investigación de operaciones* (4a ed.). Mèxic: McGraw-Hill.

Prawda, J. (1980). *Métodos y modelos de investigación de operaciones* (vol. I). Mèxic: Limusa.

Ríos Insua, S. (1996). *Investigación operativa* (3a ed.). Madrid: Centro de Estudios Ramón Areces.