Introducció a la investigació operativa.

Models de programació lineal i aplicacions

Xavier Verge Mestre
David Pujolar Morales

PID_00186430

UOC
Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

En aquest mòdul didàctic ens centrarem en el context de la investigació operativa i en el seu àmbit d'aplicació. Un cop definits, serà convenient veure l'evolució d'aquesta disciplina des de l'origen fins als nostres dies, i presentar una relació dels problemes que tracta.

Posteriorment analitzarem tres aspectes bàsics de la programació lineal:

- Com és un problema lineal.
- Com es formula un problema lineal.
- Quines particularitats dels problemes lineals ens permeten aplicar algoritmes que en facilitaran la resolució numèrica.

Per a il·lustrar aquest últim punt, resoldrem problemes lineals de manera gràfica, la qual cosa, juntament amb els punts anteriors, ens permetrà establir les bases per a poder aprofundir, als altres mòduls, en l'obtenció i l'explicació de la solució de problemes lineals.

Objectius

Aquest mòdul suposa una primera presa de contacte amb la investigació operativa, atès que s'hi presenta la gamma de possibilitats que aquesta ofereix i introdueix l'estudiant en el camp de la programació lineal. Als materials didàctics associats a aquest mòdul l'estudiant trobarà les eines necessàries per a assolir els objectius següents:

1. Saber què s'entén per *investigació operativa* i conèixer-ne l'àmbit d'aplicació.

2. Situar la programació lineal com una part de la investigació operativa.

3. Formular problemes de programació lineal.

4. Conèixer els components bàsics d'un problema lineal.

5. Identificar qualsevol tipus de solució d'un problema lineal.

1. La investigació operativa

La investigació operativa es pot definir com una disciplina científica que té com a objectiu incidir en els processos de presa de decisions mitjançant l'aplicació de tècniques de caràcter quantitatiu amb vista a millorar-ne l'eficiència.

En termes metodològics, la base de la investigació operativa pertany fonamentalment a l'àmbit de les matemàtiques i de l'estadística, mentre que el seu camp d'aplicació el constitueixen bàsicament l'economia i l'enginyeria.

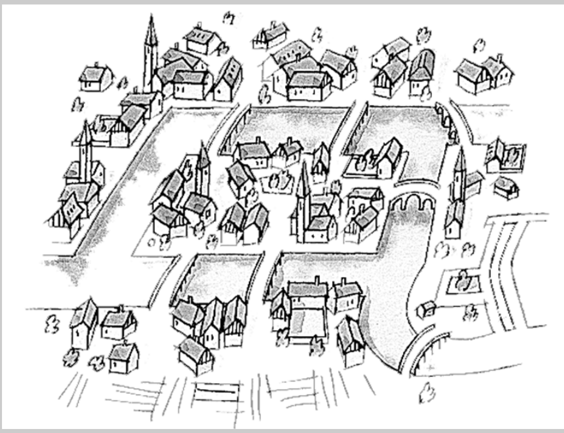
1.1. Referència històrica

Els orígens de la investigació operativa remunten aproximadament a l'any 1758, en què l'economista François Quesnay comença a utilitzar models de programació matemàtica molt simples a la seva obra *Tableau économique*. Paral·lelament, Leonhard Euler estableix les bases de la teoria de grafs amb el seu conegut "problema dels ponts de Königsberg". Un segle més tard, el 1874, un altre economista, Léon Walras, fa ús de tècniques de programació matemàtica i Frederick W. Taylor proposa el mètode d'estudi de temps i moviments (1881).

François Quesnay (1694-1774).

Königsberg

L'antiga ciutat de Königsberg, actualment Kaliningrad, s'estén per ambdues ribes del riu Pregolia, dins del qual hi ha dues illes, de manera que queda dividida en quatre barris, units per set ponts. El problema consistia a buscar un camí que, partint i acabant en qualsevol dels quatre barris, passés una vegada i només una per cadascun dels set ponts, o demostrar que no era possible trobar aquest camí.



En el camp de l'àlgebra matricial cal destacar les aportacions de Camille Jordan (1870) i Georg Frobenius (1878), i la de Hermann Minkowski (1890) en el camp de les formes quadràtiques. Al mateix temps, Andrej Markov dóna origen als models dinàmics probabilístics i estableix les bases dels processos markovians de decisió (cadenes de Markov), que s'inclouran en la teoria de la probabilitat desenvolupada per Andrej Kolmogorov uns quants anys més tard (1933).

En el primer quart de segle es desenvolupa una teoria clàssica de gestió d'estocs (F.W. Harris, 1913; R.H. Wilson, 1931). Uns anys més tard, a Hongria, Köning i Egervary (1931) introdueixen els models d'afectació mitjançant models matemàtics i, a l'URSS, el premi Nobel Leonid Kantorovič treballa en els models de distribució ja des de l'any 1939. El 1937 Johannes von Neumann crea els fonaments del que anys després es denominarà *teoria de jocs* i, juntament amb Morgenstern, formula la teoria de preferències.

Tots els models matemàtics que van utilitzar aquests precursors es basaven fonamentalment en l'ús del càlcul diferencial i integral, desenvolupat prèviament per Newton, Lagrange, Laplace, Lebesgue, Leibnitz, Riemman i Stieltjes, entre d'altres, i en l'aplicació de la probabilitat i l'estadística, disciplines que prengueren cos gràcies als treballs de Bernoulli, Poisson, Gauss, Bayes, Kolgomorov i Snedecor, entre d'altres.

Amb relació a l'aplicació, podem situar el naixement de la investigació operativa durant la Segona Guerra Mundial (1939-1945), no perquè sigui una disciplina pròpia de l'àmbit militar, sinó perquè l'entorn oferia unes particularitats que van propiciar la seva aparició en aquest context. Es crearen grups formats per científics especialistes en diverses matèries, que tractaven de resoldre problemes d'estratègia militar.

Els èxits aconseguits per la investigació operativa anglesa durant el començament de la Segona Guerra Mundial, que anaven des de la millora de la detecció d'atacs enemics fins a la dimensió òptima dels combois navals, passant pel càlcul de la profunditat òptima a la qual s'havien de regular les càrregues de profunditat antisubmarines, van afavorir la ràpida adopció d'aquests grups per part de l'exèrcit dels Estats Units, on, tant la marina, sota el nom d'*Operations Evaluation**, com la força aèria, amb el nom d'*Operations Analysis*** i l'exèrcit de terra, amb el nom d'*Operations Research**** van desenvolupar ràpidament aquestes unitats mixtes, que esdevingueren un poderós instrument d'ajuda a l'hora de prendre decisions.

*** En català, avaluació d'operacions.**

**** En català, anàlisi d'operacions.**

***** En català, investigació operativa.**

Una vegada finalitzada la guerra, molts d'aquests científics s'incorporaren al sector privat, on van introduir nombrosos avenços en diferents àrees de les empreses i crearen associacions avui encara vigents, com l'*Operations Research Society* al Regne Unit o l'*Operations Research Society of America*, als Estats Units, ambdues fundades al final dels anys quaranta i començament dels anys cinquanta.

La investigació operativa va anar rebent valuoses aportacions fins al final dels cinquanta, alhora que es desenvolupava de manera incipient la informàtica.

D'aquestes aportacions, podríem destacar les següents: el 1947 George Dantzig, culminant els treballs dels seus precursors, va idear el mètode símplex, amb el qual es donà inici a la programació lineal tal com la coneixem ara; Bellman desenvolupà la programació dinàmica; Kuhn i Tucker van fer destacades contribucions en programació no lineal i Gomory, en programació entera; Ford i Fulkerson, en xarxes d'optimització; Markowitz, en simulació; Arrow, Kalin, Scarf i Whitin, en gestió d'estocs; Raiffa, en anàlisi de decisions i Howard, en processos markovians de decisió.

Posteriorment, autors com Churchman, Ackoff i Arnoff, en un primer moment, i el mateix Ackoff amb Sadieni uns quants anys més tard, van treballar en la generalització de la investigació operativa.

1.2. Problemes tipus

A grans trets, els problemes bàsics que aborda la investigació operativa es poden catalogar en els problemes tipus que presentarem a continuació. Això no obstant, cal subratllar que, atesa l'extensió de l'assignatura, evidentment no els podrem analitzar tots.

Ara bé, per a cada problema tipus comentarem la solució que se li aplica i que serveix de punt de referència per a localitzar-lo pràcticament a tots els llibres que citem a la bibliografia.

1.2.1. Problemes d'estocs

Un **estoc** és un recurs no emprat que té un valor determinat. El fet que sorgeixi un problema de gestió d'estocs és determinat pels tipus de costos associats a aquesta gestió.

Els **tipus de costos** es poden dividir en dos grans grups:

Tipus de costos

Hi ha dos tipus de costos associats a la gestió d'estocs:

- Els costos que augmenten amb un creixement del nivell d'estoc.
- Els costos que augmenten amb una disminució del nivell d'estoc.

1) Un primer grup inclou els costos que augmenten si la quantitat que hi ha en estoc creix.

Exemples de costos que augmenten amb el creixement del nivell d'estoc

Alguns dels costos que augmenten amb el creixement del nivell d'estoc són els següents: costos d'emmagatzematge derivats de la utilització d'un espai físic per a guardar estocs, costos de depreciació dels estocs (obsolescència, minves, etc.), costos financers associats al capital invertit en estocs (interessos bancaris, remuneració del capital propi, etc.), primes d'assegurances, etc.

2) Un segon grup inclou els costos amb una relació inversa a la dels del grup anterior, és a dir, els costos que augmenten si la quantitat que hi ha en estoc disminueix.

Exemples de costos que augmenten amb la disminució del nivell d'estocs

Els costos més característics del grup de costos que augmenten quan disminueix el nivell d'estoc són els costos de ruptura d'estoc. Aquests costos són els associats a la impossibilitat de servir una comanda per falta de material en existència.

A més, de manera indirecta, es troben en aquest grup els costos associats al reaprovisionament. Si es gestiona un estoc en quantitats petites, la freqüència amb què s'efectuen les comandes augmentarà, de manera que es faran més llançaments d'ordres de reaprovisionament i els costos corresponents a aquest concepte augmentaran.

El **problema de la gestió d'estocs** consisteix a definir, bàsicament mitjançant la freqüència i la quantitat dels reaprovisionaments, el nivell d'estocs que proporcioni un cost total mínim, tenint en compte tots els costos que siguin significatius.

Fonamentalment, els paràmetres que es coneixen de manera exacta en la gestió d'estocs solen ser els diferents tipus de costos (excepte els costos de ruptura d'estocs, que, a causa de la seva subjectivitat, són molt difícils de valorar); en canvi, altres dades, com la demanda i el termini de reaprovisionament, normalment es coneixen només de manera aproximada i cal fer servir models probabilístics per a expressar-los.

Com en tots els problemes d'investigació operativa, els models de gestió d'estocs no sempre són aplicats a situacions en què apareguin mercaderies en un entorn empresarial proper a un magatzem, sinó que, per analogia, també serveixen per a problemes que en principi no tenen res a veure amb aquests entorns, però que tenen les mateixes propietats i permeten aplicar-hi aquests mateixos models, potser amb alguna modificació.

Exemple de model de gestió d'estocs

Un model de gestió d'estocs aplicat a una situació diversa és la gestió de l'aigua d'un embassament.

La solució d'aquests tipus de problemes es troba en la teoria clàssica de gestió d'estocs basada en el càlcul diferencial i integral i en el càlcul de probabilitats. En les formulacions més avançades que hi ha actualment es recorre a elements d'aquesta mateixa teoria, però dins de sistemes de gestió de producció més complexos. En aquest temari no tractarem d'aquests tipus de problemes, que trobareu descrits en la majoria de llibres que figuren a la bibliografia.

1.2.2. Problemes de repartició

Els problemes de repartició són problemes relacionats amb la repartició d'una sèrie de recursos disponibles entre un determinat nombre de tasques que cal portar a terme.

Segons el nivell de recursos de què es disposi, podem catalogar aquests problemes en els tres nivells següents:

1) En el **primer nivell** hi ha prou recursos per a poder efectuar totes les tasques, però no per a fer-les de la millor manera possible, atès que certes maneres de fer la feina són millors que d'altres. De fet, si no hi hagués la possibilitat de fer les feines amb menys recursos, encara que de manera menys òptima, el problema no tindria cap solució possible o bé passaríem al nivell següent.

Si hi ha prou recursos...

... per a fer totes les feines de la millor manera possible, evidentment, ja no hi ha cap problema.

El **problema de repartició en el primer nivell** consisteix, doncs, a repartir els recursos entre totes les tasques de manera que el resultat en conjunt sigui el millor possible*.

*** Per exemple, que el cost total sigui mínim.**

En el cas més elemental, en què cada feina necessita una unitat del recurs i aquestes unitats són homogènies (per exemple, destinar homes a llocs de treball), es tracta d'un **problema d'assignació** i la solució s'obté mitjançant el denominat *algoritme hongarès*, desenvolupat per Köning i Egervary.

Lectura complementària

Vegeu l'algoritme hongarès a:

F. Hillier; G. Lieberman (1997). *Introducción a la investigación de operaciones* (4a ed., capítol 8). Mèxic: McGraw-Hill.

D'altra banda, si les feines que cal dur a terme requereixen més d'una unitat dels recursos, es tracta d'un **problema de transport**, denominat així perquè el problema més característic és precisament el de transportar productes des del seu origen (la fàbrica) als destins possibles (els clients), especificant, des de cada fàbrica, la quantitat que rep cada client a un cost mínim. Naturalment, hi ha molts problemes que, tot i que no tenen res a veure amb el transport, per analogia es poden resoldre de la mateixa manera.

2) El **segon nivell** es presenta quan hi ha més tasques per fer del que permeten els recursos.

El **problema de repartició en el segon nivell** rau en la tria de les feines que es portaran a terme i en la decisió de com s'efectuaran a fi que el resultat global sigui el millor possible.

Problemes de repartició en el segon nivell

Alguns problemes de repartició en el segon nivell són, per exemple, l'elecció dels productes que ha de produir una refineria, la repartició del temps d'un venedor entre els clients, etc.

3) Finalment, tenim un **tercer nivell** en els problemes de repartició, que sorgeix quan s'és l'amo dels recursos.

Un **problema de repartició en el tercer nivell** es té quan s'és amo dels recursos, de manera que cal incloure la decisió de quina quantitat i varietat de recursos s'han de produir en el cas plantejat.

Aquests problemes habitualment es resolen per mitjà de la programació lineal o amb alguna de les seves variants, com la programació lineal entera o la programació lineal binària. En altres casos s'hauran d'aplicar algoritmes de programació no lineal o de programació dinàmica.

1.2.3. Problemes de cues

Els problemes de cues són els típics problemes que es produeixen en les finestretes, i es poden resoldre buscant l'equilibri que permeti obtenir una relació millor entre el nombre de finestretes obertes i els clients que s'hi esperen:

a) Si el nombre de finestretes és elevat, cal una inversió important en personal, espai físic, etc., que fins i tot pot provocar ineficiències d'aquestes unitats per pèrdua de temps útil. En canvi, els clients estaran perfectament servits i pràcticament no hauran d'esperar pels serveis.

b) Per contra, un nombre reduït de finestretes provoca una sèrie de costos associats a la insatisfacció del client, i que poden anar des del simple descontentament fins a la pèrdua del client i, fins i tot, segons el context en què ens moguem, a la pèrdua de vides humanes, a un deteriorament important del material, etc.

Si bé els primers costos solen ser difícils d'avaluar, els segons presenten inconvenients tan grans que a vegades les valoracions que se'n fan resulten subjectives.

El **problema tipus de les cues** es pot definir en termes més formals de la manera següent: determinades unitats iguals o diferents, originàries d'un dipòsit finit o infinit, arriben a un lloc per a rebre un servei determinat de durada finita, però desigual en cada cas, generalment aleatòria o que segueix una distribució de probabilitat concreta. El lloc per a rebre el servei és compost per un punt de servei o més que el presten i per una zona on les unitats esperen que els toqui el torn, és a dir, esperen fins que un punt de servei queda buit.

Exemples de problemes de cues

Podem trobar problemes de cues en infinitat de situacions, per exemple: els avions que arriben i surten d'un aeroport, els serveis d'urgències (o de consultes) d'un hospital, les finestretes de l'administració, els sistemes de manteniment i reparació de maquinària, les peticions de connexió a un servidor d'Internet, etc.

La teoria matemàtica de cues, com a part de la teoria de processos estocàstics, està molt desenvolupada, sobretot pel que fa als aspectes estructurals del sistema, malgrat que prevalen certs problemes econòmics centrats majoritàriament en la valoració dels costos associats a la insatisfacció del client. En tot cas, la teoria de cues fa un ús molt intens dels mètodes de simulació.

1.2.4. Problemes de seqüències

Els problemes de seqüències sorgeixen fonamentalment en la planificació i el control de projectes. Tot **problema de seqüències** o **problema d'ordenació** ha de presentar les característiques següents:

1) Cal conèixer el projecte que s'ha de desenvolupar, és a dir, els aspectes tecnològics i de recerca i desenvolupament han d'estar resolts.

2) El projecte s'ha de poder descompondre en tasques elementals. Les **tasques elementals** o **activitats** seran definides pels tres tipus de característiques que mostrem tot seguit:

a) Denominatives: permeten diferenciar una tasca respecte de les altres.

b) Temporals: cal conèixer la durada d'una tasca, ja sigui de manera absoluta o relativa.

c) Necessitats: convé saber les quantitats i els tipus de recursos que consumeix una tasca.

3) Les tasques elementals estan sotmeses a unes restriccions o uns lligams imposats per la tecnologia. Les **restriccions**, o **lligams**, poden ser dels tipus que presentem a continuació:

Un lligam imposat per la tecnologia...

... es dóna, per exemple, quan hi ha feines que s'han de dur a terme obligatòriament abans que d'altres.

a) Potencials: consisteixen a situar una tasca en el temps, ja sigui de manera absoluta (s'ha de fer el dia dd/mm/aa), ja sigui de manera relativa (A s'ha de fer abans que B).

b) Acumulatives: comporten la impossibilitat d'utilitzar en un moment determinat més recursos d'aquells de què es disposa.

c) Disjuntives: impliquen que l'acompliment simultani de dues tasques diferents no tingui cap part en comú.

Exemple de restricció disjuntiva

Si les activitats A i B fan servir la mateixa màquina, no es poden portar a terme alhora: o bé A precedeix B, o bé B precedeix A.

La solució del problema de seqüències consisteix a facilitar un calendari de realització de les activitats que inclogui l'afectació dels recursos disponibles. Per a trobar aquesta solució, si el problema presenta únicament lligams potencials es pot emprar el diagrama de GANTT o els mètodes PERT, ROY o CPM, basats en la teoria de grafs.

Si es donen, a més, altres tipus de lligams, el problema es complica força, de manera que se solen utilitzar mètodes heurístics, és a dir, mètodes que cerquen una bona solució, però que no poden garantir que aquesta sigui la millor entre totes les solucions possibles.

1.2.5. Problemes de renovació

Les màquines, igual que les persones, envelleixen i arriba un punt en què s'han de renovar o substituir per altres. Aleshores apareix el problema de la renovació d'equips.

El **problema de la renovació d'equips** es pot subdividir en dos casos generals: quan les màquines (o instruments, peces, etc.) envelleixen lentament, i quan senzillament deixen de funcionar.

A continuació expliquem amb més detall cadascun d'aquests casos:

1) En el primer cas, trobem elements d'un valor relativament elevat*, als quals, a fi que es conservin en un bon estat de funcionament, s'ha d'aplicar un cert tipus de manteniment. D'altra banda, al llarg del temps van sortint nous models més avançats tecnològicament que fan que el valor dels models anteriors en el mercat baixi. En aquest cas, el problema consisteix a fixar el termini idoni de substitució, de manera que, tenint en compte el cost d'utilització (manteniment més depreciació més amortització) i el cost de substitució, el termini sigui l'òptim.

*** Per exemple, màquines pròpiament dites, vehicles o instal·lacions.**

2) En el segon cas, trobem elements de poc valor per unitat, però dels quals, generalment, s'utilitza un nombre elevat*. Llavors, el problema rau a trobar el termini òptim de recanvi, i s'ha de plantejar de dues maneres possibles, que esmentem a continuació:

*** Com ara bombetes o eines petites.**

a) Canviar els elements avariats poc després que s'espatllin per elements nous.

b) Canviar tots els elements d'aquest tipus de manera periòdica (tant si encara funcionen com si no).

Hi ha una àmplia sèrie de tècniques que es poden utilitzar segons les característiques del problema, encara que predominen els models d'anàlisi matemàtica i els d'optimització dinàmica, i també els de simulació.

1.2.6. Problemes d'itineraris

Els problemes d'itineraris s'associen amb l'enunciat clàssic del "problema del viatjant de comerç". El plantejament d'aquest problema és el següent: un viatjant de comerç ha de visitar les ciutats A_1, A_2, ..., A_n. Surt d'A_1 i torna a A_1. Es coneix el cost (en hores, unitats monetàries, km, etc.) entre cada trajecte elemental ($A_1 \rightarrow A_2$, $A_1 \rightarrow A_3$, $A_2 \rightarrow A_3$, etc.) i es vol determinar l'itinerari que ha de seguir el viatjant per a passar per totes les ciutats amb el menor cost possible.

El "problema del viatjant de comerç"...

... es coneix amb el nom anglès *Travelling Salesman Problem*, i sovint es denota amb la sigla TSP, o, si hi ha diversos vehicles, *Multitravelling Salesman Problem*, i es denota amb la sigla MTSP.

Malgrat que l'enunciat és senzill i força elemental, és molt difícil resoldre el problema. El gran volum d'informació que comporta un problema d'aquest tipus, encara que tingui un nombre reduït de variables (per exemple, si tenim deu ciutats relacionades totes entre si, tenim 362.880 itineraris possibles), implica descartar els mètodes d'enumeració.

Exemple de la complexitat d'un problema d'itineraris

A títol d'exemple del gran volum d'informació que comporta un problema d'itineraris, podem citar que el repartiment normal d'un bé de consum corrent (electrodomèstics, alimentació, tabac, etc.) pot representar un graf d'uns 800 punts, amb un repartiment diari d'un centenar de clients i una flota d'entre deu i dotze vehicles.

Fins fa pocs anys es tractava d'un problema irresoluble de manera exacta, i per aquest motiu s'empraven mètodes heurístics. A partir dels anys setanta s'han desenvolupat diverses tècniques basades en determinats perfeccionaments de la teoria de grafs, que permeten trobar la solució exacta sota certes condicions. En qualsevol cas, a causa del gran volum de càlcul que comporten, sovint es continuen aplicant mètodes heurístics.

1.2.7. Problemes de la teoria de jocs

Els problemes de la teoria de jocs corresponen a situacions en què decisions que han de ser preses per un agent econòmic entren en oposició amb les d'altres agents.

La teoria de jocs

El 1937 Johannes von Neumann, matemàtic, crea els fonaments de la teoria de jocs. Uns anys més tard, el 1944, publica, juntament amb Oskar Morgenstern, l'obra *Theory of games and economic behaviour*, un model de comportament econòmic basat en la teoria de jocs.

En aquest cas podem dividir els problemes en tres classes, segons el grau de coneixement de les accions de la competència:

- L'acció de la competència es pot predir amb exactitud.
- L'acció de la competència es pot predir de manera aproximada representant-la mitjançant probabilitats.
- Es desconeixen totalment les accions que pot emprendre la competència.

La teoria de jocs ha permès que es produïssin grans avenços en la comprensió de situacions competitives i ha donat lloc a un cos teòric que ha experimentat un fort desenvolupament els darrers anys.

1.2.8. Problemes de cerca

Els problemes de cerca estan relacionats amb la millor manera d'obtenir informació.

Certament, en la realitat sovint, quan afrontem un problema, ens adonem que no disposem de tota la informació necessària per a prendre una decisió sobre el problema en qüestió.

Exemples de problemes de cerca

Podem trobar exemples de problemes de cerca en un gran nombre de camps. En l'àmbit econòmic, per exemple: una verificació comptable és una cerca d'errors; els problemes de previsió són, en essència, problemes de cerca, etc.

Pel que fa a altres camps, també podem incloure en aquesta categoria processos ben diversos: les estratègies de cerca de jaciments (petrolífers, de carbó, de minerals i, fins i tot, arqueològics); el control de qualitat (cerca de defectes); la classificació i localització d'informació en una base de dades, l'emmagatzematge i la recuperació d'informació bibliotecària; la localització d'objectius en el camp militar, i un llarg etcètera.

La solució d'aquests problemes està intrínsecament lligada a la teoria de la decisió estadística, i també, en altres casos, a l'anàlisi efectuada mitjançant la simulació o l'ús de tècniques basades en grafs.

1.2.9. Problemes mixtos

Realment, com ja havíem anticipat, sovint trobem problemes que no podem enquadrar en cap de les categories anteriors perquè tenen components típics de dues d'aquestes categories o de més.

Els **problemes mixtos** són problemes que tenen diversos components típics de les categories anteriors, és a dir, són una combinació de diversos tipus de problemes.

Exemples de problemes mixtos

Podem citar com a exemples de problemes mixtos la cerca d'un itinerari de menor cost que compleixi un seguit de restriccions, problemes de cues amb components de competència (el nivell d'insatisfacció del client, que està en funció del servei ofert per la competència, etc.).

La solució dels problemes mixtos pot venir de dos vessants:

1) Si el problema es pot descompondre en parts que actuïn de manera independent i que continguin problemes purs (és el cas menys freqüent), cal solucionar aquests problemes de la manera que hem indicat per a cada cas.

2) Si el problema és indivisible o si hi ha parts que encara contenen problemes mixtos, cal adaptar els algoritmes existents a les noves situacions o crear noves maneres de resoldre'ls: fins i tot, si la situació ho requereix, creant grups interdisciplinaris a aquest efecte.

2. Problemes lineals

En aquest apartat presentem diversos aspectes relacionats amb els problemes lineals. Estudiarem la manera de passar d'un problema no lineal a un de lineal en alguns casos particulars; veurem els fonaments matemàtics en què es basa el tractament d'aquest tipus de problemes i introduirem alguns dels algoritmes més freqüents associats a aquests.

2.1. Optimització matemàtica: conceptes elementals

En aquest subapartat oferim una sèrie de resultats i idees bàsiques de la teoria de l'optimització matemàtica clàssica. Amb això volem sustentar amb un cert grau de rigor els diferents aspectes relatius a la programació lineal que presentem.

1) Problema d'optimització matemàtica

Sigui A un subconjunt no buit de $\mathbb{R}^n$ i f una funció real amb domini a A, és a dir: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$. Anomenem **problema d'optimització matemàtica** a tot problema que respongui a la formulació següent:

$$\underset{\mathbf{X}}{[\text{OPT}]}\ f(\mathbf{X})$$

$$\text{s.a}$$

$$\mathbf{X} \in B,\ B \subseteq A.$$

L'expressió s.a vol dir "subjecte a:".

El conjunt B se sol denominar **conjunt de restriccions del problema**, mentre que el vector X s'anomena **òptim del problema** o, senzillament, **punt òptim**, on tenim que:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

La condició anterior, a efectes operatius, se sol formular mitjançant un seguit de restriccions, algunes de les quals es presentaran en forma d'igualtat i altres en forma de desigualtat, segons la naturalesa del problema. Així doncs, tindrem:

$$\begin{array}{ll}
\underset{\mathbf{X}}{[\text{OPT}]}\ f(\mathbf{X}) & \underset{x_1,x_2,\dots,x_n}{[\text{OPT}]}\ f(x_1,x_2,\dots,x_n) \\
\text{s.a} & \text{s.a} \\
h_i(\mathbf{X}) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m_1\}, & h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m_1\}, \\
g_j(\mathbf{X}) \le 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, m_2\}, & g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, m_2\}, \\
k_s(\mathbf{X}) \ge 0 \quad \forall s \in \{1, \dots, m_3\}, & k_s(x_1, x_2, \dots, x_n) \ge 0 \quad \forall s \in \{1, \dots, m_3\},
\end{array}$$

Nota

D'ara endavant no identificarem les variables sobre les que optimitzem perquè en aquesta assignatura optimitzem sempre sobre totes les variables del problema. Convé adonar-se, però, que hi pot haver situacions en què no optimitzem sobre totes les variables.

que significa que es busca el vector X que optimitza una funció de n variables subjecta a m_1 restriccions d'igualtat (=), m_2 restriccions de desigualtat menor o igual (≤) i m_3 restriccions de desigualtat superior o igual (≥).

Tipus de restriccions

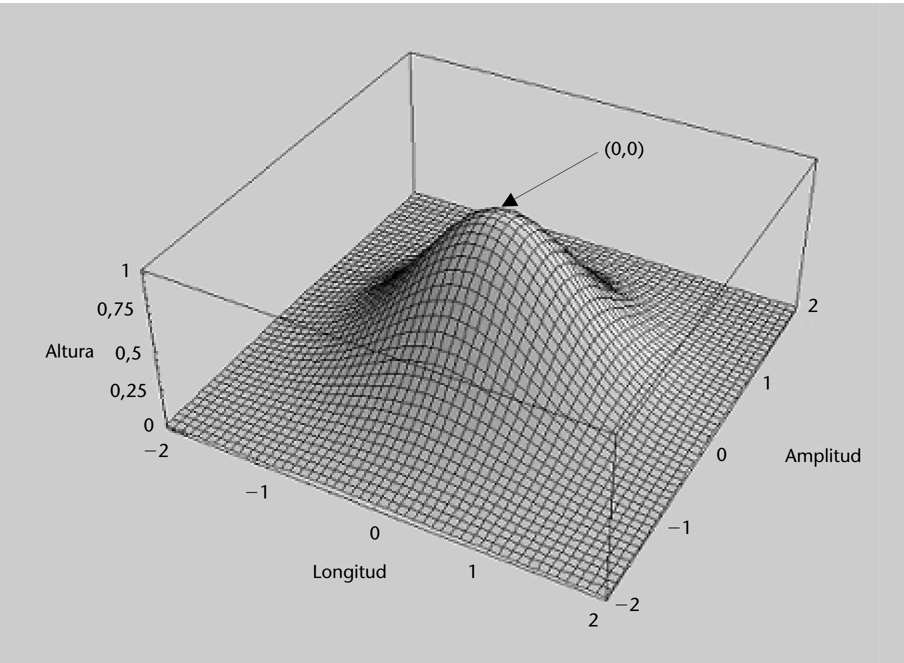
Les restriccions d'un problema d'optimització es poden donar en forma d'igualtat i/o de desigualtat.

2) Punts òptims

Els punts òptims es classifiquen de la manera següent:

a) Òptims globals: direm que $X^* \in B$ és un **màxim (mínim) global del problema d'optimització** si $\forall X \in B$, $f(X^*) \geq f(X)$ ($f(X^*) \leq f(X)$ en cas de mínim). Si la desigualtat és estricta parlarem d'**òptim global estricte** (màxim o mínim), i d'**òptim global relatiu** (màxim o mínim) en cas contrari.

Il·lustrem el concepte d'òptim global mitjançant el gràfic següent, corresponent a la funció $f(x,y) = \exp[-(x^2 + y^2)]$, que assoleix un màxim global estricte no restringit (si la funció no està sotmesa a cap restricció) en el punt (0,0):



b) Òptims locals: direm que X^* és un **màxim (mínim) local d'un problema d'optimització** si $\exists \varepsilon > 0$, $\forall X \in B$, $\|X^* - X\| < \varepsilon$, $X^* - X \neq 0$, $f(X^*) \geq f(X)$ ($f(X^*) \leq f(X)$ en cas de mínim) essent $\| \quad \|$ la norma euclidiana. Si la desigualtat és estricta, parlarem d'**òptim local estricte** (màxim o mínim), i d'**òptim local relatiu** (màxim o mínim) en cas contrari.

Norma euclidiana

Recordeu d'altres cursos de matemàtiques que sobre l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ es defineix la norma euclidiana de la manera següent:

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

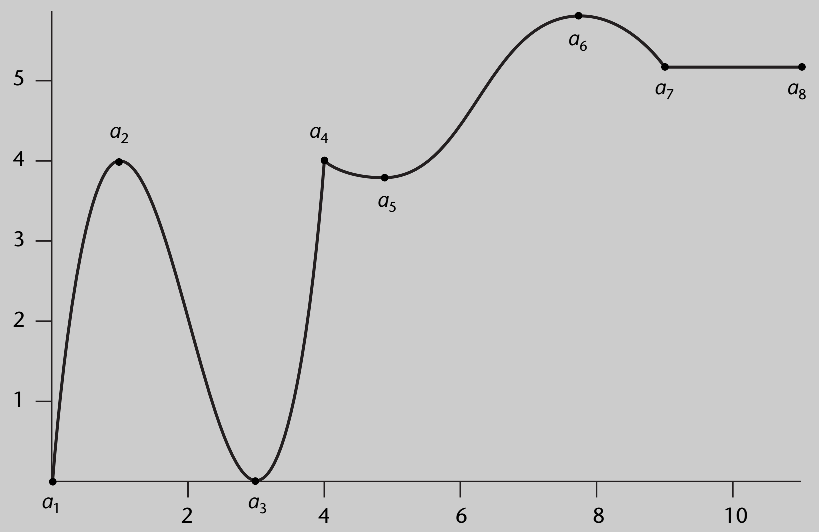
Exemple de punts òptims d'una funció

Considerem la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} x(x-3)^2 & \text{si } x \leq 4 \\ \sin(x) - \sin(4) + 4 & \text{si } 4 \leq x \leq 9 \\ \sin(9) - \sin(4) + 4 & \text{si } x \geq 9 \end{cases}$$

Si representem gràficament aquesta funció a l'interval [0,11], podem observar que té diferents punts òptims:

Exemple de funció amb diversos punts òptims



Els tipus de punts òptims que s'hi observen són els següents:

- Mínims globals relatius a a_1 i a_3 (a_1 és relatiu, ja que hi ha un altre punt, en aquest cas a_3, per al qual la funció assoleix el mateix valor, i viceversa).
- Màxims locals relatius a a_2 i a_4 (són locals perquè la funció, en altres punts de l'interval considerat, assoleix valors superiors).
- Mínim local estricte a a_5.
- Màxim global estricte a a_6 (atès que és el punt on, al llarg de l'interval considerat, la funció assoleix un valor més gran).
- Mínims locals relatius a l'interval $[a_7,a_8]$ (observeu que també és correcte afirmar que els punts de l'interval $(a_7,a_8]$ corresponen a màxims locals relatius).

3) Punts estacionaris

Sigui $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, amb $f(\mathbf{X})$ contínua i amb derivades parcials també contínues (és a dir, de classe C^1); en aquest cas direm que $\mathbf{X}^0$ és un **punt estacionari** (també conegut com a **punt crític**) si pertany a l'interior de A i el seu gradient verifica $\nabla f(\mathbf{X}^0) = 0$, és a dir, es verifica la relació que presentem tot seguit:

$$\left.\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^0} = 0; \quad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Punts estacionaris

Recordeu que els punts estacionaris són aquells per als quals les derivades parcials de la funció s'anul·len; és a dir, satisfan les denominades *condicions de primer ordre* o C^1.

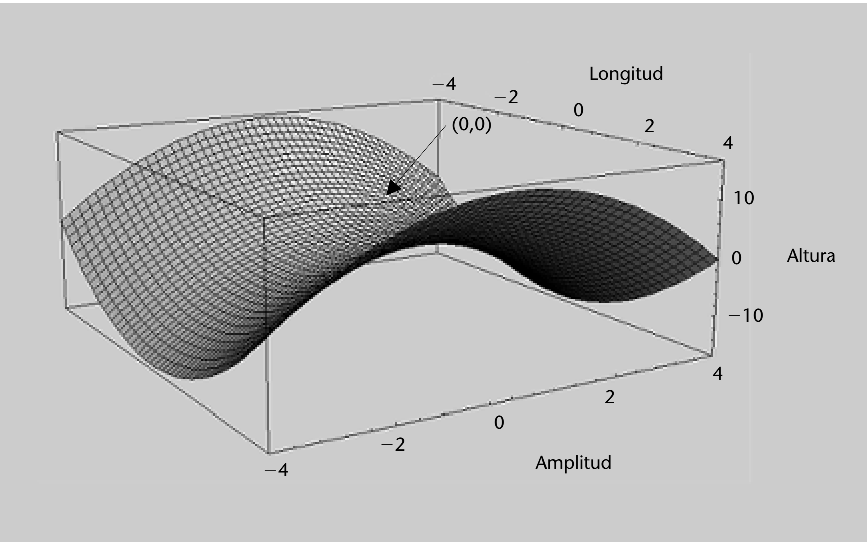
Teorema: sigui $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, amb $f(\mathbf{X})$ de classe C^1; aleshores, si $\mathbf{X}^*$ és un òptim local d'aquesta funció i pertany a l'interior d'aquest conjunt, també serà un punt estacionari.

Aquest teorema té una especial rellevància per a la caracterització analítica dels òptims locals de funcions de classe C^1 (molt freqüents en les aplicacions econòmiques), tot i que presenta els inconvenients que esmentem a continuació:

- No aporta gens d'informació sobre la globalitat d'aquest òptim (el qual es pot trobar tant en els punts interiors de A que són estacionaris com en els punts que formen part de la frontera de A).

- Una funció pot no tenir punts estacionaris (pel fet que no sigui diferenciable) i, tanmateix, tenir un òptim global.

- Hi pot haver punts estacionaris que no siguin òptims locals (coneguts com **punts de sella**, en un entorn qualsevol dels quals hi ha punts en què la funció pren valors superiors i d'altres en què pren valors inferiors), tal com ho il·lustra el gràfic de la funció $f(x,y) = x^2 - y^2$, amb un punt de sella a (0,0):



Malgrat les dificultats anteriors, es poden derivar condicions d'existència de l'òptim global d'una funció sota certes condicions, com ho posen en relleu el teorema de Weierstrass i el teorema fonamental de la convexitat, que analitzem a continuació:

a) Teorema de Weierstrass: sigui $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, amb $f(\mathbf{X})$ contínua sobre A, i A un conjunt compacte. En aquest cas la funció té un màxim i un mínim globals a A.

Conjunt compacte

Recordeu de les assignatures de matemàtiques que els conjunts compactes són conjunts tancats i fitats.

Com veurem més endavant, en el cas de la programació lineal, el conjunt de restriccions sempre serà un conjunt tancat.

Si a més es dóna el cas que és fitat, l'existència d'òptims globals és garantida per aplicació directa del teorema anterior. I encara més, si no és fitat serà molt senzill de discernir si hi ha l'òptim global o no hi és.

Vegeu el subapartat 4.6 d'aquest mòdul didàctic.

Finalment, si tenim en compte l'equivalència següent:

$$\left.\begin{array}{l}\underset{\mathbf{X}}{[\text{OPT}]}\ f(\mathbf{X}) \\ \text{s.a} \\ \mathbf{X} \in B,\ B \subseteq A\end{array}\right] \blacktriangleright \equiv \underset{\mathbf{X}}{[\text{OPT}]}\ f(\mathbf{X}),\ f: B \to \mathbb{R},$$

l'aplicació del teorema de Weierstrass a problemes d'optimització clàssica amb restriccions, com el que s'ha descrit al principi d'aquest subapartat, és immediata.

b) Teorema fonamental de la convexitat: sigui $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ i considereu un problema d'optimització com el que es presenta al principi d'aquest subapartat. En aquest cas, si el problema és de maximització (minimització), la funció és còncava (convexa) i el conjunt de restriccions és un conjunt convex; aleshores es tenen els resultats següents:

Repasseu els conceptes de *conjunt convex* i de *funció còncava* i *funció convexa* als materials dels cursos de matemàtiques.

- El conjunt dels màxims (mínims) locals de la funció en el conjunt de restriccions és un conjunt convex.
- Tot màxim (mínim) local és un màxim (mínim) global sobre aquest conjunt de restriccions.

Del teorema resulta d'especial interès la segona asserció, atès que permet, si més no en el cas de les funcions de classe C^1, restringir la cerca dels candidats a òptim global a aquells punts que siguin estacionaris. Quant a la convexitat del conjunt de màxims (mínims) locals, això assegura que, en el cas que hi hagi punts òptims, la seva combinació lineal convexa també ho serà.

Problemes convexos

Els problemes d'optimització que satisfan les condicions del teorema fonamental de la convexitat s'anomen en *problemes convexos*.

En el cas de la programació lineal, l'aplicabilitat del teorema també és immediata, ja que, com veurem, el conjunt de restriccions defineixen sempre un conjunt que, a més de ser tancat, és convex i la funció lineal $f(\mathbf{X})$, pel fet que és lineal, simultàniament, és còncava i convexa.

Vegeu el subapartat 4.6 d'aquest mòdul didàctic.

Teorema: sigui $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, f: $A \to \mathbb{R}$ i un problema d'optimització com el que es presenta al principi d'aquest subapartat. En aquest cas, serà un conjunt convex si el conjunt de restriccions es formula en forma d'igualtat i desigualtat i satisfà les condicions següents:

- Les funcions que defineixen les restriccions en forma de $\leq$ són convexes.
- Les funcions que defineixen les restriccions en forma de $\geq$ són còncaves.
- Les funcions que defineixen les restriccions en forma de $=$ són lineals.

Aquest teorema és interessant perquè, a efectes operatius, facilita la determinació de la convexitat del conjunt de restriccions.

Especialment, noteu que tot problema lineal en forma estàndard és un problema convex.

2.2. Concepte de problema lineal

Un problema lineal té les característiques següents:

1) Una **funció objectiu**, $f(\mathbf{X})$, que presenta el que es vol minimitzar o maximitzar. La funció objectiu ha de ser lineal.

2) Un **conjunt de restriccions**, $g_j(\mathbf{X})$, que representen les limitacions existents. Totes les restriccions també han de ser lineals.

Algunes de les restriccions...

... que ens podem trobar són, per exemple, que no es poden utilitzar més recursos dels disponibles, que s'han de satisfer unes quantitats mínimes, que s'han de complir uns percentatges mínims, etc.

3) Totes les variables han de ser **variables no negatives**.

Un **problema lineal**, des d'un punt de vista més matemàtic, ha de tenir la forma següent:

$$
\begin{aligned}
&[\text{OPT}]\ f(\mathbf{X})\\
&\text{s.a}\\
&g_j(\mathbf{X}) = 0; \quad \forall j \in \{1, 2, ..., m\},\\
&\mathbf{X} \geq \mathbf{0},
\end{aligned}
$$

on $\mathbf{X}$ és un vector de variables i l'operador [OPT] s'ha de substituir per maximitzar ([MAX]) o minimitzar ([MIN]), segons el cas.

Fixeu-vos que hem emprat el signe = en les restriccions, encara que també podem trobar restriccions del tipus $\leq$ o del tipus $\geq$, o combinacions de totes tres.

La condició que la funció objectiu i les restriccions siguin lineals suposa que aquestes siguin una suma de variables multiplicades per paràmetres, tal com es descriu formalment a la pàgina següent. Si alguna restricció i/o la funció objectiu no són lineals, parlarem de **problemes no lineals**.

La condició de no-negativitat de les variables impedeix que aquestes puguin adoptar valors negatius. De totes maneres, aquesta condició no revesteix una especial transcendència en la pràctica, atès que la majoria de magnituds econòmiques* no té sentit que adoptin valors negatius. Addicionalment, en algunes ocasions podem trobar variables lliures de signe (poden prendre valors

*** Per exemple, quantitats de productes, nombre de persones, quantitats en litres, tones, metres, etc.**

positius i negatius) o que han de ser menors o iguals a zero. Malgrat tot, si fos necessari treballar amb variables negatives o lliures de signe, aquests sempre es podran expressar com a variables no negatives, tal com es descriu més endavant.

Vegeu la manera d'expressar variables negatives o lliures de signe com a variables no negatives al subapartat 2.3.1 d'aquest mòdul didàctic.

Si adoptem una forma més explícita, podem plantejar un problema lineal tal com indiquem tot seguit:

Per tal d'agilitzar la notació ens referirem a la funció objectiu com a z.

$$
\begin{array}{l}
[\text{OPT}]\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{s.a} \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\
x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},
\end{array}
$$

que, representat en notació matricial, seria:

$$
\begin{array}{l}
[\text{OPT}]\ z = \mathbf{c}'\mathbf{X} \\
\text{s.a} \\
\mathrm{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}, \\
\mathbf{X} \geq \mathbf{0},
\end{array}
$$

on **c** és el vector de coeficients de la funció objectiu, **b** és el vector dels termes independents de les restriccions, A és la matriu de coeficients tècnics i X és el vector de les variables:

$$\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Exemple de plantejament matricial d'un problema lineal

Tenim el problema lineal següent:

$$
\begin{array}{l}
[\text{MAX}]\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
\text{s.a} \\
8x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 22, \\
3x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leq 30, \\
x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.
\end{array}
$$

Llavors, els vectors i les matrius associats a aquest problema són:

$$\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 22 \\ 30 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

2.3. Problemes lineals i no lineals

Com ja hem avançat, qualsevol problema d'optimització matemàtica que no compleixi les condicions de linealitat haurà de ser considerat com un problema no lineal; en aquest cas, els algoritmes que es poden fer servir per a resoldre'l són diferents.

Si es volen resoldre problemes numèricament, més que analíticament, els **algoritmes de programació no lineal** són molt més complexos que els de programació lineal; encara més: en molts casos (segons les característiques del problema) serà difícil aplicar un algoritme que garanteixi que la solució obtinguda sigui l'òptima (la millor), sinó que senzillament ens donarà una "bona solució". Aquests algoritmes es denominen *algoritmes heurístics*, i se'n justifica l'ús pel fet que a vegades no hi ha un algoritme de cerca d'òptim, o bé (si n'hi ha un) perquè és tan complex que no val la pena utilitzar-lo. En canvi, els **algoritmes de programació lineal**, i en concret l'algoritme símplex, són comparativament poc complexos i proporcionen solucions òptimes.

Resolució analítica i resolució numèrica

La resolució numèrica d'un problema fa referència al fet que utilitzant dades concretes es pugui obtenir una solució específica. Contràriament, la resolució analítica està més orientada a obtenir la solució de manera genèrica i a derivar les relacions d'optimitat entre les variables susceptibles de ser interpretades econòmicament i, tot i que és fonamental per a desenvolupaments teòrics, sol ser poc pràctica per a prendre decisions concretes.

2.3.1. Linealització de problemes no lineals

A vegades podem trobar problemes que no siguin lineals únicament perquè no compleixen les condicions de no-negativitat de les variables. En aquests casos podem convertir-los en problemes lineals, i beneficiar-nos així de les facilitats de solució, introduint-hi petits canvis. Tot seguit presentem la manera de fer algun d'aquests canvis.

Variables negatives

Si una o més variables del problema ha d'adoptar valors únicament negatius o zero, podem fer la substitució que expliquem tot seguit. Sigui x_k una variable tal que $x_k \leq 0$; aleshores la substituïm per $x'_k = -x_k$, i ara ja el podrem resoldre com el problema lineal que és.

Òbviament, quan facilitem la solució haurem de desfer el canvi per a no perdre el significat original de la variable.

Exemple de linealització d'un problema amb variables negatives

En l'exemple de plantejament matricial d'un problema lineal, suposem que x_2 ha de ser negativa o zero. En aquest cas, procedim a substituir-la i el problema lineal seria el següent:

Vegeu l'"Exemple de plantejament matricial d'un problema lineal" al subapartat 2.2 d'aquest mòdul didàctic.

$$\left.\begin{array}{l} [\text{MAX}]\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} \\ 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 22, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leq 30, \\ x_1,\ x_3 \geq 0,\ x_2 \leq 0. \end{array}\right] \quad \underset{\Rightarrow}{x_2 = -x'_2} \quad \left[\begin{array}{l} [\text{MAX}]\ z = 2x_1 - 3x'_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} \\ 8x_1 - 2x'_2 + 5x_3 \leq 22, \\ 3x_1 - 7x'_2 + 4x_3 \leq 30, \\ x_1,\ x'_2,\ x_3 \geq 0. \end{array}\right.$$

Ara ja el podem resoldre, com a problema lineal que és, on:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2' \\ x_3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{C} = [2\ -3\ 4].$$

i el vector **b** queda igual.

Variables lliures de signe

Si una o més variables del problema poden adoptar qualsevol valor (positiu, negatiu o zero) podem fer la substitució que presentem tot seguit. Sigui x_k una variable tal que $x_k \in \mathbb{R}$; aleshores la substituïm per $x_k = x_k' - x_k''$, on definim ambdues variables com a positives.

Igual que en el cas anterior, una vegada haguem obtingut la solució, haurem de desfer el canvi per a no perdre el significat real de les variables.

Exemple de linealització d'un problema amb variables lliures de signe

Considerem l'"Exemple de plantejament matricial d'un problema lineal" i suposem que la variable x_2 pot prendre qualsevol valor. La manera de linealitzar el problema és la següent:

$$\left.\begin{array}{l} [\text{MAX}]\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} \\ 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 22, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 \le 30, \\ x_1, x_3 \ge 0. \end{array}\right] \blacktriangleright \quad \begin{array}{c} x_2 = x_2' - x_2'' \\ \Rightarrow \end{array} \quad \blacktriangleleft \left[\begin{array}{l} [\text{MAX}]\ z = 2x_1 + 3x_2' - 3x_2'' + 4x_3 \\ \text{s.a} \\ 8x_1 + 2x_2' - 2x_2'' + 5x_3 \le 22, \\ 3x_1 + 7x_2' - 7x_2'' + 4x_3 \le 30, \\ x_1, x_2', x_2'', x_3 \ge 0. \end{array}\right.$$

En forma matricial:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 7 & -7 & 4 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2' \\ x_2'' \\ x_3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

i el vector **b** segueix essent el mateix.

Aquesta substitució implica haver de canviar una variable per dues (hi haurà, per tant, una variable addicional), amb la particularitat que les columnes corresponents a la matriu **A** són les mateixes, però canviades de signe.

En resum...

... podem linealitzar fàcilment els casos no lineals següents:

- Si tenim una variable negativa, la substituirem per una altra canviada de signe, que serà positiva $x_k' = -x_k$.
- Si tenim una variable lliure de signe la reemplacem per la diferència de dues variables positives $x_k = x_k' - x_k''$.

2.4. Tipus de problemes lineals i algoritmes existents

Segons les característiques de les variables, podem classificar els problemes lineals en els tipus següents:

1) Problemes lineals continus (PLC): problemes com els que hem vist fins ara, en què les variables poden adoptar qualsevol valor real, és a dir, $x_i \in \mathbb{R}$. La resolució generalment es basa en les dues vies següents:

a) L'**algoritme símplex**.

b) L'**algoritme de Karmarkar**, més recent i més complex, que s'emmarca dins dels algoritmes de caràcter polinòmic, i que resulta més eficient que l'algoritme símplex quan l'estructura del problema presenta certes particularitats.

2) **Problemes lineals enters (PLE)**: problemes en què totes les variables o part d'aquestes han d'adoptar valors enters (per exemple, si el significat d'una variable és un nombre de persones, no es poden tenir en compte valors que no siguin enters). Aquest tipus de problemes lineals es pot subdividir en dues categories:

a) **Problemes lineals enters purs (PLEP)**: problemes lineals enters en els quals totes les variables han de ser enteres.

b) **Problemes lineals enters mixtos (PLEM)**: problemes lineals enters en els quals només part de les variables són enteres i la resta no ho han de ser necessàriament (però, òbviament, sí que han de ser reals).

Cal subratllar que la utilització d'un algoritme de PLC en un PLE només donarà l'òptim en el cas que la solució que s'obtingui proporcioni valors enters per a les variables que ho han de ser. En cas contrari, fins i tot arrodonint els resultats a l'enter més pròxim, aquests resultats no ens serviran. Hi ha un elevat nombre d'algoritmes específics segons les característiques particulars de cada problema, malgrat que s'ha de destacar l'ús generalitzat dels **algoritmes de ramificació i de fitació** (en anglès, *Branch and Bound*). Aquests problemes, com els següents, no es consideraran en el desenvolupament de l'assignatura.

3) **Problemes lineals binaris (PLB)**: problemes lineals en els quals totes les variables de què consten (**Problemes lineals binaris purs**, **PLBP**) o part d'aquestes (**Problemes lineals binaris mixtos, PLBM**) són binàries. Les variables binàries es poden considerar com un subconjunt de les variables enteres amb la particularitat que només poden adoptar els valors 1 i 0. Són molt útils per a poder modelitzar situacions que impliquin una presa de decisió qualitativa, com ara col·locar (1) o no col·locar (0) un semàfor en una cruïlla, obrir (1) o no (0) un magatzem determinat, comprar (1) o no comprar (0) un determinat component, i un llarg etcètera. Per norma general es resolen com un PLE afegint-hi restriccions del tipus $x_i \leq 1$ per a totes les variables que hagin de ser binàries. Si tenim un PLBP, tanmateix, també es pot aplicar l'**algoritme de Balas**.

Problemes particulars de la programació lineal entera

Com a casos particulars dins de la programació lineal entera podem destacar dos problemes molt característics:

- El **problema del transport**, que de fet és un PLEP amb una estructura molt particular que permet l'aplicació de l'algoritme conegut amb el nom de *stepping stone*.
- El **problema de l'assignació** o **problema de l'afectació**, que és un PLBP també amb una estructura molt particular. Per a resoldre'l s'aplica l'algoritme hongarès, o algoritme de Köning i Egervary.

Recordeu

Les sigles que presentem a continuació fan referència als diferents tipus de problemes lineals que ens podem trobar:

- **PLC**: problema lineal continu.
- **PLE**: problema lineal enter.
- **PLEP**: problema lineal enter pur.
- **PLEM**: problema lineal enter mixt.
- **PLB**: problema lineal binari.
- **PLBP**: problema lineal binari pur.
- **PLBM**: problema lineal binari mixt.

Variables enteres

Una variable és entera adopta valors enters. L'existència d'una sola variable entera ja implica que el problema lineal sigui enter i, per tant, haurem de recórrer a algoritmes diferents dels PLC.

Variables binàries

Una variable és binària si adopta únicament els valors 0 o 1. Un PLB pot ser tractat com un PLE amb la restricció que les variables binàries siguin enteres i inferiors a 1 o iguals a 1.

Lectura complementària

El desenvolupament dels algoritmes de fitació i de ramificació, així com altres algoritmes específics, per exemple el de Balas, es pot trobar, per exemple, a l'obra següent:

S. Ríos Insua (1996). *Investigación operativa* (3a ed.). Madrid: Centro de Estudios Ramón Areces.

3. Formulació de problemes lineals

Malgrat que, com ja hem comentat, la investigació operativa aplica el mètode científic, hi ha una part d'aquest que s'allunya de la ciència i s'acosta a l'art: és la **modelització**. Aquesta conversió d'una situació real en fórmules matemàtiques mai no la podem considerar una qüestió banal, encara més, haurem de dedicar-li la major concentració possible, atès que si el model especificat és inadequat, la resolució serà supèrflua. El fet d'intentar aplicar una metodologia, sense fer cap altre pas, al cas que ens ocupa, la modelització de problemes lineals, no és suficient. Hi ha aspectes molt importants en aquest procés, aliens a concepcions científiques, dels quals en destacarem dos, la creativitat i l'experiència:

L'art de la modelització

La pràctica de modelitzar problemes lineals correctament té un vessant d'art pel fet que requereix creativitat i experiència.

a) Pel que fa a la **creativitat**, volem destacar el fet que per a procedir a modelitzar problemes lineals cal desprendre's de les idees preconcebudes i dels procediments mecanicistes. Cada situació real és un problema completament diferent de qualsevol altre que s'hagi vist anteriorment; per tant, el fet d'aplicar un estàndard sens dubte donarà uns resultats no volguts. En definitiva, es tracta d'aconseguir l'equilibri entre la lògica i la inventiva.

b) L'**experiència** és, com en tot art, una de les maneres de perfeccionar-se. Aquesta idea, aplicada al nostre context, implica la realització d'un seguit de plantejaments, els quals constitueixen bona part d'aquest apartat.

3.1. Metodologia de formulació de problemes lineals

En aquest subapartat es desgranen les diferents etapes que, a grans trets, comporta el procés de modelització en problemes lineals. Cal tenir en compte, però, que el procediment que descrivim només constitueix un intent de sistematització amb fins pedagògics d'un conjunt d'operacions molt més complexes i específiques en què la creativitat i la intuïció personal tenen, com ja hem dit, un paper fonamental.

Identificació del problema (o comprensió)

La primera fase és crucial. En depèn que qualsevol cosa que fem amb posterioritat sigui útil o sigui merament un malbaratament de temps i recursos. Ens hem de situar mentalment dins el problema, comprendre'l, veure'n les ramificacions principals, conèixer l'entorn en què es mou, sospesar els diferents punts de vista, escollir les dades que siguin útils, decidir quines es podran adaptar i quines no podrem conèixer. S'han de conèixer els objectius que es persegueixen i, en definitiva, tenir molt clar què es vol fer o on es vol arribar.

Si ens situem en l'esfera en què ens mourem al llarg de l'apartat (i, més endavant, en els altres mòduls), ens trobarem unes situacions adaptades, molt simplificades, en què generalment tota la informació que es facilita és rellevant. En definitiva, són situacions que podríem definir com a exemples de laboratori, l'únic objectiu de les quals és introduir l'estudiant en el procés d'aprenentatge.

Identificació de variables

El pas següent per a la formulació d'un problema lineal és la identificació de les variables i dels paràmetres del problema.

Construcció de restriccions

Les restriccions consistiran en la formulació matemàtica dels condicionaments i les limitacions a què ens enfrontem. Si no aconseguim expressar les restriccions, el més probable és que no haguem identificat correctament les variables, i caldrà tornar enrere, a la fase d'identificació de variables. El sol fet que no es reculli en una restricció una limitació, invalidarà pel que fa a la pràctica tota la resolució.

Construcció de la funció objectiu

Una vegada s'hagin construït les restriccions determinarem la funció objectiu, el valor de la qual hem d'optimitzar. Si no aconseguim construir aquesta funció, normalment és perquè no hem identificat correctament les variables, de manera que haurem de tornar enrere.

Comprovació de la coherència interna

Una vegada formulat el problema, és recomanable estudiar-lo de manera global, comprovar que es compleixen totes les restriccions, que la funció objectiu representa realment l'objectiu perseguit, que l'estructura matemàtica, a primera vista és correcta (no hi ha restriccions redundants evidents, totes les variables estan enllaçades entre si, etc.) i, en definitiva, verificar qualsevol cosa que ens faci dubtar de la seva correcció. Aquesta faceta, com és previsible, va millorant amb el temps, és a dir, a mesura que s'adquireix més experiència.

Recordeu

Els passos que cal seguir a l'hora de formular problemes lineals són:

- Comprensió del problema.
- Identificació de les variables.
- Construcció de les restriccions.
- Construcció de la funció objectiu.
- Comprovació de la coherència interna.

3.2. Aplicació de la metodologia

Per a veure de manera pràctica la metodologia de problemes lineals que acabem d'explicar, en aquest subapartat en desenvolupem un cas concret. Metalls del Ter és una petita empresa metal·lúrgica que produeix principalment el trepant dels xassissos d'aire condicionat com a subcontractista d'una gran empresa. El procés de producció és el següent: es recullen els xassissos de la foneria, s'hi fan uns forats i tot seguit es poleixen. Per a fer-ho s'utilitzen tres tipus de màquines: el trepant, la polidora i l'embaladora. Les disponibilitats per a demà d'aquestes màquines són de 720, 840 i 350 minuts, respectivament. Demà es poden fer dos models de xassís: el gran i el petit. Un xassís gran requereix 4 minuts de trepant, 10 de polit i 5 d'embalatge, mentre un de petit necessita 6 minuts de trepant, 6 de polit i 2 d'embalatge.

Sabent que el benefici que reporta un xassís gran és de 500 ptes. i que un de petit en dóna 300, quina quantitat s'ha de produir de cadascun perquè el benefici total sigui el màxim?

La manera de procedir és la següent:

1) En primer lloc definirem les **variables**. Per a descobrir-les és útil preguntar-se: què puc variar (decidir) per a aconseguir l'objectiu? La resposta és: la quantitat de xassissos grans i petits que cal produir. Les variables seran, doncs:

- x_1: nombre de xassissos grans que cal fabricar.

- x_2: nombre de xassissos petits.

2) Una vegada definides les variables, passarem a les **restriccions**. El que ens hem de preguntar és: hi ha alguna limitació que no ens permeti fabricar tot el que vulguem? En aquest cas tindrem tres restriccions d'un mateix tipus: no podem emprar més recursos d'aquells de què disposem.

Així doncs, si x_1 és el nombre de xassissos grans i cadascun requereix uns 4 minuts, $4x_1$ serà el temps total de trepant que es farà servir amb xassissos grans, i si li sumem el dels petits ($6x_2$) obtindrem el temps total de trepant que necessitarem, que ha de ser menor que el temps disponible (720 minuts). Expressat en forma d'inequació:

$$4x_1 + 6x_2 \leq 720.$$

Procedirem de la mateixa manera amb les limitacions de temps de la polidora i de l'embaladora:

$$10x_1 + 6x_2 \leq 840,$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 350.$$

Formalment, també hem d'explicitar que les variables no poden adoptar valors negatius (no té sentit que hi hagi quantitats negatives de productes):

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

i amb això ja tindrem totes les restriccions.

3) A continuació passem a la **funció objectiu**. En aquest cas es tracta de maximitzar el benefici afegit dels productes, de manera que serà:

$$[\text{MAX}]\ z = 500x_1 + 300x_2.$$

Ara ja tenim plantejat el problema, que, en conjunt i expressat amb una estructura més formal, és el següent:

$$\begin{array}{l} [\text{MAX}]\ z = 500x_1 + 300x_2 \\ \text{s.a} \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 720, \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 840, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 350, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Abans de continuar la lectura d'aquest mòdul és convenient que feu els exercicis d'autoavaluació 1 a 6 per a poder assimilar bé el tema de la modelització.

4. Resolució gràfica de problemes lineals continus

La resolució gràfica de problemes lineals no és en absolut una manera eficient de solucionar-los, com veurem a continuació, però sí que és un mètode de molt pedagògic, pel fet que ens permetrà identificar visualment l'estructura i les particularitats d'un problema lineal. En definitiva es tracta de representar el problema en un espai determinat per les variables. Tot i que és factible treballar amb tres variables que representin el problema en $\mathbb{R}^3$, ens limitarem al cas de dues variables perquè és molt més senzill.

Per a poder resoldre un problema lineal de manera gràfica, en primer lloc hem de buscar el conjunt de solucions possibles.

El **conjunt de solucions possibles** és el conjunt de valors de X que compleixin les restriccions i les condicions de no-negativitat.

Tot seguit resoldrem un problema lineal de manera gràfica mitjançant un exemple, que plantegem a continuació:

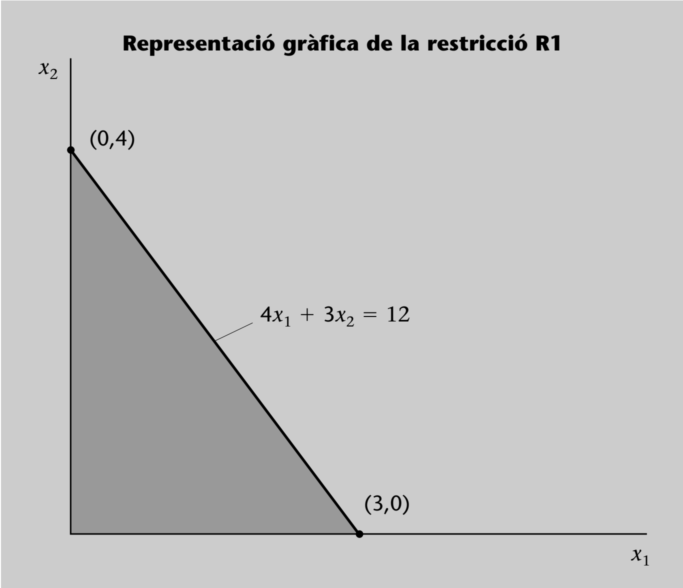
$$\begin{aligned}
&[\text{MAX}]\ z = 5x_1 + 10x_2 \\
&\text{s.a} \\
&\text{R1: } 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\
&\text{R2: } 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\
&x_i \geq 0.
\end{aligned}$$

4.1. Construcció del conjunt de solucions possibles

Per a construir el conjunt de solucions possibles, primer situarem els eixos corresponents a cada una de les variables i ens centrarem en el quadrant positiu del pla, atès que les condicions de no-negativitat impliquen la impossibilitat d'adoptar valors de fora d'aquest quadrant. Un cop dibuixats els eixos, representarem la primera restricció (R1) i, per a representar-la, en primer lloc buscarem la recta que resultaria si en comptes de ser una inequació fos una equació:

$$4x_1 + 3x_2 = 12.$$

Com que es tracta d'una inequació (tenim una desigualtat $\leq$), els punts que compleixen aquesta restricció són els del semiplà inferior, incloent-hi aquesta recta (vegeu el gràfic de la pàgina següent).

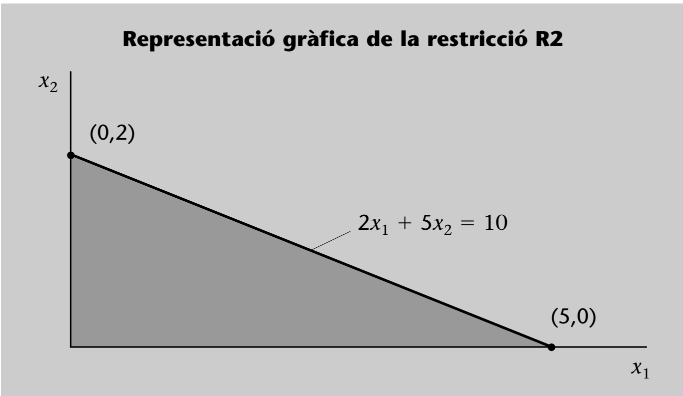


Representació gràfica d'una restricció

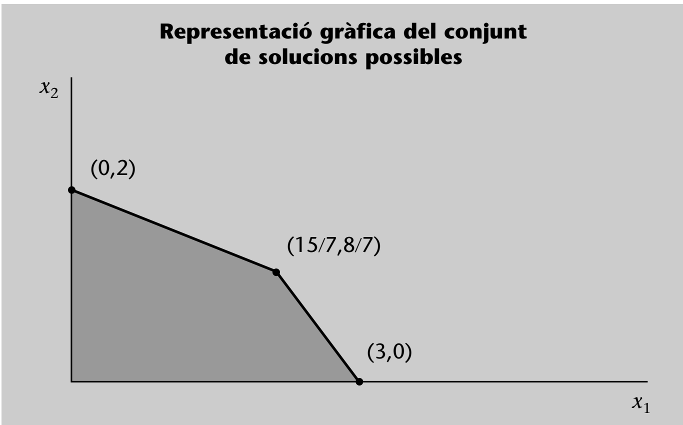
Per a representar gràficament una restricció buscarem dos punts que pertanyin a la recta: si fem que $x_1 = 0$ tindrem que $3x_2 = 12$ i, per tant, $x_2 = 4$. És a dir, el punt (0,4) pertany a aquesta recta. Procedim de la mateixa manera a buscar un altre punt d'aquesta recta: (3,0). I la dibuixem.

Per a trobar la zona del pla corresponent a la restricció busquem un punt que no sigui en aquesta recta, per exemple el (0,0) i veiem que compleix aquesta restricció ($0 \leq 12$), de manera que el semiplà definit per l'equació és el que veiem ombrejat a la figura.

Farem el mateix amb la segona restricció, la recta de la qual passa pels punts (0,2) i (5,0), i la dibuixem tal com es mostra a la figura següent:



La intersecció de les dues àrees que hem obtingut representarà, doncs, tots els punts que compleixen alhora les dues restriccions del problema i les condicions de no-negativitat, és a dir, el conjunt de solucions possibles que es representa a la figura següent:



El punt d'intersecció

El punt d'intersecció d'ambdues rectes es pot obtenir fàcilment resolent el sistema d'equacions format per les equacions (=) de les restriccions que s'encreuen.

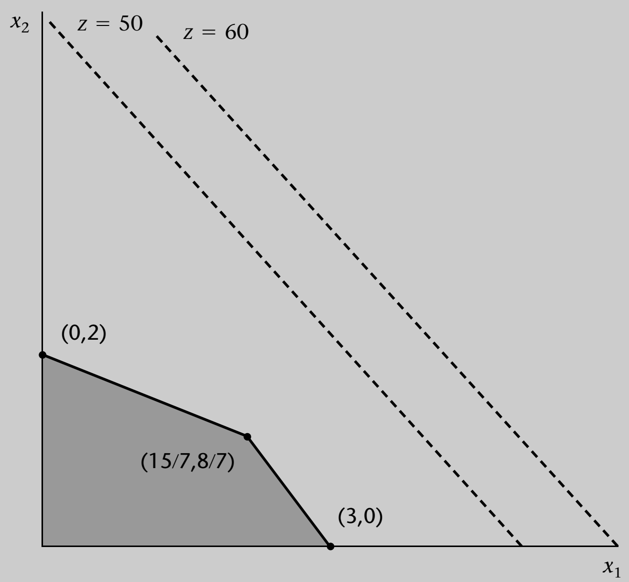
4.2. Mètode de la línia isobenefici

Un cop hem construït el conjunt de solucions possibles, ens cal saber quin o quins d'aquests punts del conjunt proporciona un valor més gran de la funció objectiu. Per a esbrinar-ho aplicarem el mètode de la línia isobenefici*. La **línia isobenefici** és la recta que adopta la funció objectiu per a un valor de z determinat en un problema de maximització.

*** En el cas que tinguem un problema de minimització parlarem del mètode de la línia isocost.**

En el gràfic següent mostrem les rectes isobenefici del nostre exemple per a $z = 60$ i per a $z = 50$:

Mètode de la línia isobenefici



Per a dibuixar les rectes isobenefici...

... començarem prenent un valor arbitrari de z, per exemple $z = 60$. La recta serà $5x_1 + 10x_2 = 60$, i passa pels punts (12,0) i (6,0). A més, dibuixarem la recta isobenefici per a un valor de $z = 50$, que passa pels punts (10,0) i (5,0) i que, òbviament, és paral·lela a l'anterior però desplaçada cap avall perquè el pendent de la recta no s'ha modificat.

Veiem que si desplacem paral·lelament una d'aquestes rectes isobenefici cap amunt, el valor de z és superior, mentre que si la desplacem avall, el valor és inferior. Si mirem el gràfic anterior podem observar que el punt del conjunt de solucions que proporciona una z de més valor és el vèrtex (angle) resultat de l'encreuament d'ambdues restriccions, de manera que la solució seria la següent:

$$x_1 = 15/7,\ x_2 = 8/7 \text{ amb un valor de } z = 155/7 \approx 22{,}14.$$

En aquest cas la solució és única, atès que hi ha una i només una combinació de valors (propis) de les variables que proporciona el valor màxim de z.

Així, doncs, el mètode de la línia isobenefici (isocost) consisteix a localitzar la solució òptima desplaçant la línia isobenefici (isocost) fins que es trobi el valor de z més gran (més petit).

4.3. Mètode dels vèrtexs

Hem vist que a l'òptim la línia isobenefici sempre serà tangent a un o més vèrtexs (angles) del conjunt de solucions possibles. Així, doncs, en lloc de dibuixar la línia isobenefici podríem utilitzar un altre mètode per a trobar la solució: el mètode dels vèrtexs.

> El **mètode dels vèrtexs consisteix** a identificar i avaluar tots els vèrtexs del conjunt de solucions possibles i quedar-nos amb el millor (és a dir, el valor de z més gran en el cas de màxim, o el més petit, en el cas de mínim).

Apliquem aquest mètode al nostre exemple. Els vèrtexs del conjunt de solucions possibles són: (0,0), (0,2), (15/7,8/7) i (3,0); passem, doncs, a substituir aquests valors a la funció objectiu amb els resultats següents:

Mètode dels vèrtexs		
x_1	x_2	z
0	0	0
0	2	20
15/7	8/7	155/7
3	0	15

Com veiem, el valor de z més gran és 155/7 (≈ 22,14); per tant, la solució és:

$$x_1 = 15/7,\ x_2 = 8/7.$$

Abans de passar al subapartat següent és convenient que feu els exercicis d'autoavaluació 7 i 8.

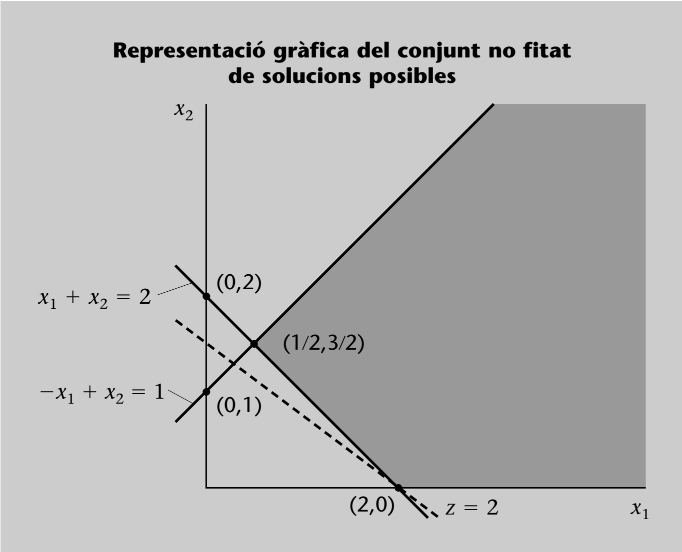
4.4. Cas de conjunts no fitats de solucions possibles

L'exemple sobre el qual hem explicat els mètodes de la línia isobenefici i el dels vèrtexs proporciona un conjunt fitat de solucions possibles. Quan això no passa es poden produir certes diferències que comentarem en l'exemple següent. Considerem el problema lineal que plantegem a continuació:

$$\begin{aligned}
&[\text{MIN}]\ z = x_1 + 2x_2 \\
&\text{s.a} \\
&x_1 + x_2 \geq 2, \\
&-x_1 + x_2 \leq 1, \\
&x_i \geq 0.
\end{aligned}$$

Com veiem, en la figura de la pàgina següent, el conjunt de solucions possibles no és un conjunt fitat, de manera que les variables podrien arribar a adoptar un valor infinit, sense deixar de ser solucions possibles. En aquest exemple, tanmateix, la solució també és única, ja que el valor mínim que es pot obtenir de z és de 2, valor que és proporcionat pel vèrtex (2,0).

Si el conjunt de solucions possibles no és fitat, la solució pot adoptar el valor infinit.

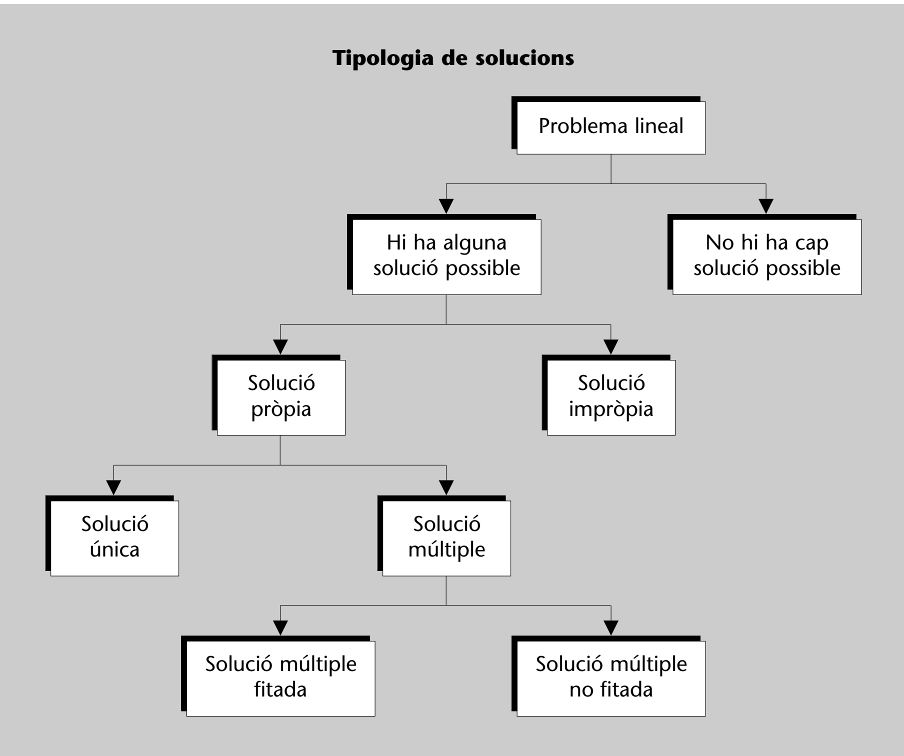


Arribats a aquest punt, és convenient que feu els exercicis d'autoavaluació 9 a 12 abans de continuar, a fi de veure les diferents situacions que podem trobar.

4.5. Tipologia de solucions

Una vegada vistos els exemples i els exercicis que hem proposat, estem en condicions d'estructurar la tipologia de solucions que ens podem trobar en la resolució de problemes lineals (no solament en el pla gràfic). L'**estructura de la tipologia de solucions possibles** es mostra a la figura següent:

Vegeu els exemples i exercicis proposats al llarg de tot l'apartat 4 d'aquest mòdul didàctic.



En primer lloc, podem trobar els problemes sense solució i els problemes amb solució. La qüestió és si el conjunt de solucions possibles, format per la intersecció de les regions definides per les restriccions, és buit o no. La **inexistència de solució** en un problema lineal queda perfectament definida des del punt de vista matemàtic. Això no obstant, des d'un punt de vista de l'aplicació real, la primera interpretació que li hem de donar és que el plantejament del problema no s'ha fet de manera correcta. Abans de donar per bona aquesta situació (és a dir, acceptar que no hi ha solució) és molt aconsellable repassar de nou la modelització i preguntar-nos si totes les restriccions que hi figuren són realment necessàries.

Si és un **problema amb solució**, el pas següent de la classificació fa referència a si el valor de la funció objectiu en l'òptim pot adoptar el valor infinit o no, és a dir, si és una solució impròpia o una solució pròpia:

1) Serà una **solució impròpia** si el valor de z a l'òptim (z^*) tendeix a ∞ o a $-\infty$ i, per tant, algunes variables adopten el valor infinit.

En la mateixa línia del comentari sobre la inexistència de solució, l'existència de solucions impròpies (perfectament definides des del punt de vista matemàtic) també ens porta a dubtar del plantejament inicial en la mesura que no és gaire habitual tenir solucions que expressin, per exemple, que el màxim benefici és infinit. Per tant, abans de donar per bona aquesta solució, és molt aconsellable repassar el plantejament inicial de la cerca de limitacions existents (explícitament o implícitament) no expressades en les restriccions.

2) En el cas de tenir **solució pròpia**, pot ser de dos tipus:

a) **Única**: només un vèrtex proporciona el millor valor de z i, per tant, solament una combinació de valors de les variables ens aporta un resultat òptim.

b) **Múltiple**: pot haver-hi més d'un punt (vèrtex o no) implicat en la solució, i per tant, pot ser que s'obtingui el mateix valor de z per a tots aquests punts. Dins de les solucions múltiples podem trobar dos casos, segons si el conjunt de les solucions òptimes és fitat o no ho és:

- En el cas més senzill, suposem que l'òptim s'assoleix en dos vèrtexs i en la combinació lineal convexa d'aquests (el segment que els uneix): el conjunt de solucions òptimes seria fitat, de manera que tindríem una **solució múltiple fitada**. Aquest cas és extensible a qualsevol altre en què hi intervinguin diversos vèrtexs i en què la combinació lineal convexa entre aquests formi un conjunt fitat.

- En altres casos, i sempre tenint un conjunt no fitat de solucions possibles, trobem que l'òptim es pot assolir en un o més vèrtexs i també en la com-

El conjunt de solucions òptimes...

... és el subconjunt de solucions possibles, format per tots els punts que proporcionen un valor millor de z (el menor possible en el cas de minimitzar, i el major, en el cas de maximitzar).
Si es té una solució única, solament un punt pertanyerà a aquest conjunt. En canvi, si tenim una solució múltiple (més d'un punt és solució), sempre tindrà infinits components, és a dir, hi haurà infinites combinacions de valors de les x que proporcionaran un valor millor de z.

binació lineal convexa d'aquests i, a més, en punts que no pertanyen a aquesta combinació lineal convexa. Aleshores, els valors de les variables podran adoptar valors infinits (però el valor de z en l'òptim no serà infinit), ja que el conjunt de solucions òptimes serà no fitat. Aquesta solució rep el nom de **solució múltiple no fitada**.

Cal remarcar que alguns autors, pel fet que les variables poden assolir valors infinits, cataloguen les solucions múltiples no fitades com impròpies. No obstant això, considerem que el fet diferencial i que realment proporciona unes implicacions econòmiques importants rau en el valor de z i no en el de les variables. Per exemple, és molt diferent poder assolir beneficis infinits que tenir infinites maneres d'assolir un benefici determinat.

Conceptualment podem establir un seguit d'equivalències entre aquesta nomenclatura pròpia de la programació lineal i la nomenclatura pròpia de l'optimització matemàtica que ja hem vist abans, fet que reflectim en la taula següent:

Vegeu la nomenclatura típica de l'optimització matemàtica al subapartat 2.1 d'aquest mòdul didàctic.

Equivalència de nomenclatura	
Programació lineal	**Optimització matemàtica**
Solució única	Òptim global estricte
Solució múltiple	Òptim global relatiu
Solució impròpia	Inexistència d'òptim global
Inexistència de solució possible	El problema de l'optimització matemàtica no té sentit

4.6. Consideracions sobre la resolució de problemes lineals

Un cop vistes les solucions possibles que podem trobar en la resolució d'un problema lineal és convenient remarcar alguns aspectes que han sorgit en resoldre els exemples i els exercicis plantejats.

Fixem-nos que el conjunt de solucions possibles, si existeix, pot ser fitat o no fitat. En qualsevol dels dos casos podem trobar solucions pròpies, però només hi pot haver solucions impròpies si el conjunt és no fitat.

Recordem que un conjunt és convex si, per a qualsevol parell de punts del conjunt, la combinació lineal convexa (el segment que els uneix) pertany en la totalitat al conjunt. Cal recordar igualment el teorema fonamental de la convexitat. Aleshores, el conjunt de solucions possibles o bé és buit o bé és convex.

Vegeu el teorema fonamental de la convexitat al subapartat 2.1 d'aquest mòdul didàctic.

Com hem indicat en l'explicació del mètode dels vèrtexs, sempre trobem la solució a la frontera del conjunt de solucions possibles (és a dir, al marge exte-

Vegeu el mètode dels vèrtexs al subapartat 4.3 d'aquest mòdul didàctic.

rior) i, llevat del cas de la solució impròpia, sempre hi intervé almenys un vèrtex. Com que hi haurà un nombre finit de vèrtexs, podem limitar l'exploració a un nombre finit de punts. Aquesta és la base de l'algoritme símplex, que desenvoluparem en altres mòduls.

Vegeu l'algoritme símplex al mòdul "L'algoritme símplex" d'aquesta assignatura.

De fet, el **mètode símplex**, en essència treballa de la mateixa manera que el mètode dels vèrtexs, però en comptes d'analitzar de manera exhaustiva tots els vèrtexs del conjunt de solucions possibles, porta a terme una anàlisi de manera ordenada.

Resum

En aquest mòdul hem introduït la investigació operativa com a eina d'ajuda per a resoldre problemes propis d'una organització. Hem fet un repàs de la seva història a fi de poder entendre'n millor els camps d'aplicació i la metodologia que utilitza. D'altra banda, mitjançant la presentació d'una classificació de problemes tipus, hem situat el paper de la programació lineal com una de les eines de què es val la investigació operativa per a resoldre problemes, aspecte que serà la part central de l'assignatura.

Entrant de ple en la programació lineal, en primer lloc, hem presentat l'aspecte formal dels problemes lineals i les seves principals variants. A continuació hem introduït una metodologia de formulació de problemes lineals acompanyada d'exemples i exercicis enfocada a formular problemes lineals continus.

La darrera part d'aquest mòdul s'ha dedicat a establir les bases que permetran comprendre el funcionament de l'algoritme símplex. Per a fer-ho hem resolt problemes lineals de manera gràfica, cosa que ens ha permès veure components com el conjunt de solucions possibles i els vèrtexs. La resolució d'exemples ha servit per a presentar les diferents solucions que es poden plantejar i ha permès efectuar algunes consideracions que permetran entendre millor els mètodes que aplicarem en altres mòduls.

Exercicis d'autoavaluació

1. En aquest exercici d'autoavaluació plantegem un problema de limitació de recursos.
L'empresa química Indústries Ripoll SA (INRI) elabora un pla de producció de tres productes químics per al mes següent, denominats RJ-1423, QC-1269 i XT-2541. Per a elaborar-los fa servir tres components bàsics que, a fi d'estalviar-nos els complicats noms químics, identificarem amb les referències C1, C2 i C3, i dels quals disposa de 800, 750 i 850 tones, respectivament. Aquests components, perquè es converteixin en els productes finals, han de passar per tres processos productius: P1, P2 i P3.
A la taula següent mostrem les tones necessàries de cada component per a obtenir una tona de producte final, els temps en hores que tarda cada tona de producte final a superar cada procés productiu i els costos respectius per tona o per hora, segons el cas.

Taula de costos

Producte	Components bàsics per t (en t)			Hores de processament		
	C1	C2	C3	P1	P2	P3
RJ-1423	10	8	7	3	4	5
QC-1269	9	6	12	5	4	1
XT-2541	7	12	6	2	2	4
Cost (u.m./unitat)	5.000	6.000	4.000	40.000	30.000	50.000

El preu de venda d'aquests productes és de 750.000, 600.000 i 550.000 u.m./t. L'empresa treballa durant 20 dies al mes i 16 hores al dia.
Formuleu el problema lineal que maximitza el benefici total.
Tingueu en compte que per a calcular el benefici per unitat de cada producte haurem de sumar els diferents costos per unitat i restar-los del preu de venda.

2. Aquest exercici també tracta d'un problema de limitació de recursos.
Tropicfruit Inc. està especialitzada en l'elaboració de combinats de fruites tropicals sense alcohol. En la planta que aquesta empresa té a Tampa es fabriquen tres productes: Katxumbo, Kimbombo i Angaua, que es venen a un preu de venda al distribuïdor (pvd) de 29,2575, 25,5375 i 28,305 euros/litre, respectivament. Per a elaborar 100 litres de cada un d'aquests productes es necessiten els ingredients següents:

Taula de matèries primeres*

	Alvocat	Kiwi	Mango	Sucre	Aigua
Katxumbo	100	200	–	50	150
Kimbombo	–	100	100	105	250
Angaua	200	–	200	60	100

* Totes les quantitats estan expressades en quilograms, tret de l'aigua, que s'expressa en litres.

Per al proper mes els proveïdors han garantit el subministrament de matèries primeres fins a un màxim de 3.000 kg d'alvocats a un preu de 5 euros/kg, 4.000 kg de kiwis a 6 euros/kg i 5.000 kg de mangos a 4 euros/kg. El sucre es compra a Brazil Sugar Co., que facilita qualsevol quantitat que es vulgui a 0,5 euros/kg. L'aigua emprada per a elaborar els combinats es transporta amb camions cisterna propis des d'una font que tenen a prop. Al municipi (que és propietari de la font) se li paga un cànon d'1 euro/m^3, mentre que el cost del transport puja a 4 euros/m^3. Finalment, els productes químics que es fan servir (conservadors, colorants, i antioxidants) suposen un cost de 2 euros/litre per a Katxumbo, 3 euros/litre per a Kimbombo i 1 euro/litre per a Angaua.
Quin és el pla òptim de producció dels combinats fabricats per Tropicfruit Inc. per al proper mes de manera que es maximitzi el benefici?

3. El problema següent el podríem anomenar *problema de la dieta*. L'enunciat es planteja a continuació.
El sergent Arensívia és l'encarregat d'organitzar els menús de la caserna. Com que el sergent troba molt complicat haver de comprar més de dos tipus d'aliments, ha decidit que aquest mes la tropa de la caserna només menjarà menús a base de carn de porc i patates, productes que abunden al poble del costat i que pot arribar a comprar al preu de 50 i 25 u.m./kg, respectivament.

Segons la circular mèdica distribuïda pel ministeri recentment, els soldats han d'ingerir al dia un mínim de 8 unitats d'hidrats de carboni, 19 de vitamines i 7 de proteïnes, de manera que el sergent ha anat al tinent mèdic de la caserna, el qual, després de grans esforços, li ha proporcionat els continguts en hidrats de carboni, vitamines i proteïnes per quilo de carn i de patates segons es mostra a la taula següent:

Dades mèdiques		
	Carn	Patates
Hidrats de carboni	1	3
Vitamines	3	4
Proteïnes	3	1

Plantegeu el problema lineal que proporcioni la quantitat de carn de porc i de patates que cal comprar per soldat i dia i que resulti més barata.

4. En aquest exercici d'autoavaluació plantegem un problema de mescles.
Destil·leries del Llobregat SL importa whisky a granel de diferents qualitats que utilitza per a elaborar els seus productes: els coneguts whiskies de garrafa tan apreciats pels locals *after-hours* i pels seus clients.
Per al mes següent disposa dels productes, quantitats i preus següents:
- Tennesse Old: 50 bidons de 70 litres, a 35.000 u.m. el bidó.
- Scottish Red: 100 garrafes de 25 litres a 7.500 u.m. la garrafa.
- Montsec Bru: una cisterna de 1.500 litres a 300.000 u.m.

Aquests components els barreja i n'elabora els tres productes més preuats: garrafa De Luxe, garrafa Medium i garrafa Extreme. Això no obstant, per a poder mantenir els seus productes dins del sector de l'alimentació, i no en el de detergents, ha de respectar certes normes a l'hora de fer les mescles. Aquestes normes són les que s'especifiquen a continuació per a cadascun dels tres productes:

1) Garrafa De Luxe:
- Ha de garantir que la seva composició té almenys un 30% de Tennesse Old.
- No hi ha limitacions sobre la quantitat de Scottish Red.
- No pot tenir més del 50% de Montsec Bru.

2) Garrafa Medium:
- No pot tenir menys del 15% de Tennesse Old.
- No pot tenir menys del 20% de Scottish Red.
- No hi ha limitacions de Montsec Bru, encara que, òbviament, no en pot tenir més del 65%.

3) Garrafa Extreme:
- No pot tenir menys del 5% de Tennesse Old.
- Ha de tenir almenys un 20% de Scottish Red.
- No pot tenir més del 70% de Montsec Bru.

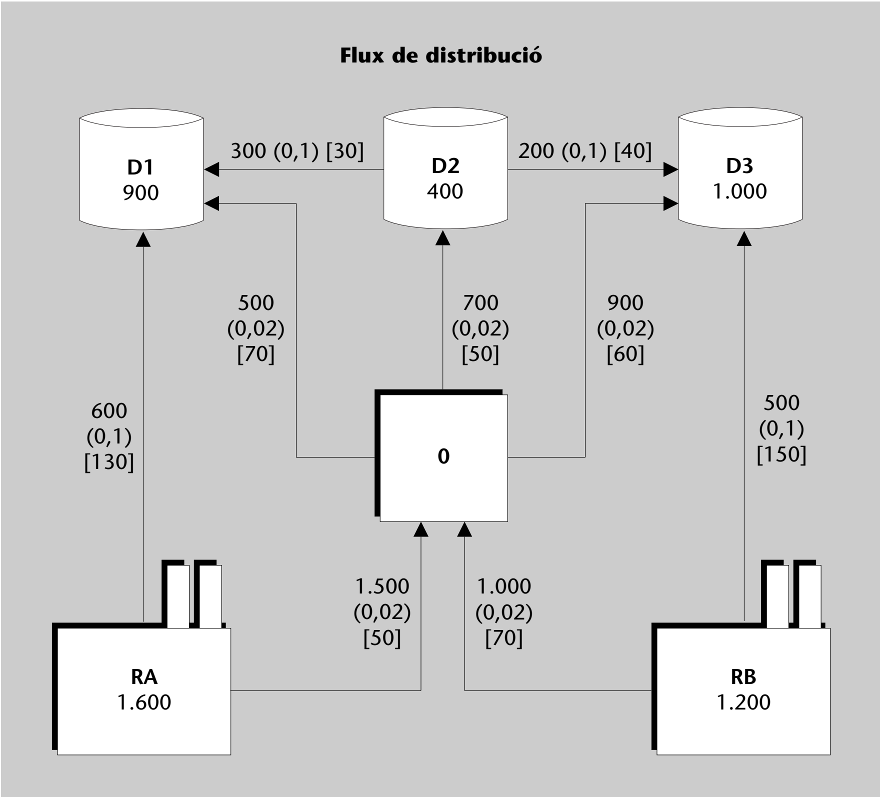
Els preus de venda dels productes són de 500 u.m./l per a De Luxe, 400 per a Medium i 300 per a Extreme.
Calculeu les mescles que produeixen el benefici màxim a l'importador.

5. En aquest exercici plantejarem un problema d'assignació horària.
El parc natural de la Fageda d'en Miquel, davant l'alt risc d'incendis, ha decidit reorganitzar els vigilants que actuen en defensa de la integritat d'aquest paratge tan extens. Per al mes d'agost s'han determinat les necessitats que es presenten a la taula següent:

Necessitats horàries		
Període	Franja horària	Nombre mínim de vigilants
1	2-6	10
2	6-10	45
3	10-14	80
4	14-18	120
5	18-22	75
6	22-2	15

Considerant que el període 1 és immediatament posterior al període 6 i tenint en compte que l'horari de treball d'un vigilant és de 8 hores consecutives, es vol obtenir una assignació diària de vigilants a cada període de manera que compleixi les necessitats anteriors i que ocupi el menor nombre d'aquests, tenint present que les hores d'entrada dels torns són les 2, 6, 10, 14, 18 i 22 hores.

6. Aquest exercici presenta un problema de fluxos.
Petrolis del Francolí disposa de dues refineries (RA i RB) que produeixen combustible per a tres centres de distribució (D1, D2 i D3), els quals estan connectats mitjançant una xarxa d'oleoductes, com es mostra a la figura següent:



Per a cada refineria i centre de distribució s'indiquen la capacitat productiva i la demanda, respectivament, i per a cada conducció s'indica la capacitat màxima de transport en tones, entre parèntesis la pèrdua que es produeix (és a dir, una pèrdua de 0,1 significa que si s'envien 100 tones en realitat solament se'n reben 90); i finalment, entre claudàtors, hi ha la distància en quilòmetres.
Com s'aprecia a la figura, hi ha una plataforma central de distribució (0) que no té gens de capacitat d'emmagatzematge.
Els costos de producció associats són de 18.000 u.m./t per a RA i de 21.000 u.m./t per a RB, mentre que els costos de transport són de 100 u.m./km/tn.
Plantegeu el problema lineal que permeti determinar la política de producció i distribució de cost mínim i que satisfaci exactament la demanda sol·licitada.

7. En aquest exercici s'il·lustra un cas de problema en què hi ha restriccions redundants.
Resoleu gràficament el problema lineal següent:

$$[\text{MAX}]\ z = 5x_1 + 10x_2$$

s.a

$$\begin{aligned} &\text{R1: } 4x_1 + 3x_2 \leq 12,\\ &\text{R2: } 2x_1 + 5x_2 \leq 10,\\ &\text{R3: } 4x_1 + 5x_2 \leq 20,\\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

8. En aquest exercici d'autoavaluació veurem el cas d'existència d'una solució impròpia.
Resoleu gràficament el problema lineal següent:

Abans de resoldre l'exercici d'autoavaluació 8, vegeu el problema plantejat al subapartat 4.4 d'aquest mòdul didàctic.

$$[\text{MAX}]\ z = x_1 + 2x_2$$

s.a

$$\begin{aligned} &\text{R1: } x_1 + x_2 \geq 2,\\ &\text{R2: } -x_1 + x_2 \leq 1,\\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

9. Aquest exercici d'autoavaluació presenta el cas d'una solució múltiple en un conjunt de solucions possibles fitat.

Abans de resoldre l'exercici d'autoavaluació 9, vegeu el problema plantejat a l'inici de l'apartat 4 d'aquest mòdul didàctic.

Resoleu gràficament el problema lineal següent:

$[\text{MAX}]\ z = 4x_1 + 10x_2$

s.a

R1: $4x_1 + 3x_2 \leq 12$,
R2: $2x_1 + 5x_2 \leq 10$,
$x_i \geq 0$.

10. En aquest exercici d'autoavaluació es presenta un cas de solució múltiple no fitada.
Resoleu gràficament el problema lineal següent:

Abans de resoldre l'exercici d'autoavaluació 10, vegeu el problema plantejat al subapartat 4.4 d'aquest mòdul didàctic.

$[\text{MAX}]\ z = -x_1 + x_2$

s.a

R1: $x_1 + x_2 \geq 2$,
R2: $-x_1 + x_2 \leq 1$,
$x_i \geq 0$.

11. Aquest exercici d'autoavaluació il·lustra un cas de solució múltiple fitada en un conjunt no fitat.
Resoleu gràficament el problema lineal següent:

Abans de resoldre l'exercici d'autoavaluació 11, vegeu el problema plantejat al subapartat 4.4 d'aquest mòdul didàctic.

$[\text{MIN}]\ z = 2x_1 + 2x_2$

s.a

R1: $x_1 + x_2 \geq 2$,
R2: $-x_1 + x_2 \leq 1$,
$x_i \geq 0$.

12. Hi ha casos, com el que presentem en aquest exercici d'autoavaluació, en què es té inexistència de solució.
Resoleu gràficament el problema lineal següent:

$[\text{MAX}]\ z = x_1 + x_2$

s.a

R1: $x_1 + x_2 \leq 1$,
R2: $x_1 + x_2 \geq 2$,
$x_i \geq 0$.

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. Per a resoldre el problema de limitació de recursos que hem plantejat hem de procedir de la manera següent:

1) Definició de les variables

- x_1: quantitat en tones que s'ha de produir d'RJ-1423.
- x_2: quantitat en tones que s'ha de produir de QC-1269.
- x_3: quantitat en tones que s'ha de produir d'XT-2541.

2) Restriccions

a) Per la limitació de components:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 9x_2 + 7x_3 &\leq 800, \\ 8x_1 + 6x_2 + 12x_3 &\leq 750, \\ 7x_1 + 12x_2 + 6x_3 &\leq 850. \end{aligned}$$

b) Per la limitació de temps de processament (es treballa $16 \cdot 20 = 320$ hores al mes):

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\leq 320, \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 320, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq 320. \end{aligned}$$

c) A més, les variables no poden adoptar valors negatius:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

3) Funció objectiu

Per a poder expressar la funció objectiu, en primer lloc hem de calcular els marges unitaris de cada producte. Aquests marges es poden obtenir amb la configuració d'una taula com la que mostrem a continuació:

Taula de costos							
Costos		**Producte**					
		RJ-1423 (x_1)		**QC-1269 (x_2)**		**XT–2541 (x_3)**	
Component	**Component per unitat**	**Quantitat**	**Total**	**Quantitat**	**Total**	**Quantitat**	**Total**
C1	5.000	10	50.000	9	45.000	7	35.000
C2	6.000	8	48.000	6	36.000	12	72.000
C3	4.000	7	28.000	12	48.000	6	24.000
P1	40.000	3	120.000	5	200.000	2	80.000
P2	30.000	4	120.000	4	120.000	2	60.000
P3	50.000	5	250.000	1	50.000	4	200.000
Total de costos			616.000		499.000		471.000
Preu de venda al detall			750.000		600.000		550.000
Benefici			**134.000**		**101.000**		**79.000**

Si per a abreujar treballem amb milers d'unitats monetàries, la funció objectiu serà la següent:

$$[\text{MAX}]\ z = 134x_1 + 101x_2 + 79x_3,$$

on z està expressat en milers d'unitats monetàries. Per tant, el plantejament resultant serà:

$$[\text{MAX}]\ z = 134x_1 + 101x_2 + 79x_3$$

s.a

$$\begin{aligned} 10x_1 + 9x_2 + 7x_3 &\leq 800, \\ 8x_1 + 6x_2 + 12x_3 &\leq 750, \\ 7x_1 + 12x_2 + 6x_3 &\leq 850, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\leq 320, \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 320, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq 320, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

2. Per a establir el pla òptim del problema de limitació de recursos de la producció dels combinats de manera que es maximitzi el benefici per al proper mes hem de procedir de la manera següent:
1) Definició de les variables
- x_1: centenars de litres de Katxumbo que s'han d'elaborar.
- x_2: centenars de litres de Kimbombo que s'han d'elaborar.
- x_3: centenars de litres d'Angaua que s'han d'elaborar.

2) Càlcul de costos per a 100 litres de cada un dels productes:

Taula de costos							
Costos		**Producte**					
		Katxumbo		**Kimbombo**		**Angaua**	
Component	**Component per unitat**	**Quantitat**	**Total**	**Quantitat**	**Total**	**Quantitat**	**Total**
Alvocats	5	100	500	0	0	200	1.000
Kiwis	6	200	1.200	100	600	0	0
Mangos	4	0	0	100	400	200	800
Sucre	0,5	50	25	105	52,5	60	30
Aigua	0,005	150	0,75	250	1,25	100	0,50
Productes químics	–	–	200	–	300	–	100
Total de costos			1.925,75		1.353,75		1.930,50
Preu de venda al detall			2.925,75		2.553,75		2.830,50
Benefici			**1.000**		**1.200**		**900**

Per tant, el plantejament queda de la manera següent:

$$[\text{MAX}]\ z = 10x_1 + 12x_2 + 9x_3$$

s.a

$$x_1 + 2x_3 \leq 30,$$
$$2x_1 + x_2 \leq 40,$$
$$x_2 + 2x_3 \leq 50,$$
$$x_i \geq 0.$$

on z s'expressa en centenars d'euros.

3. Per a resoldre el problema de la dieta dels soldats seguirem el procediment habitual.
1) Definició de les variables
Sigui x_1 els quilos de carn i x_2 els quilos de patates.
2) Restriccions

$$x_1 + 3x_2 \geq 8,$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 19,$$
$$3x_1 + x_2 \geq 7,$$
$$xi \geq 0.$$

3) Funció objectiu

$$[\text{MIN}]\ z = 40x_1 + 25x_2.$$

4. Per a resoldre el problema de mescles procedim segons els passos que assenyalem a continuació.
1) Definició de les variables
x_{ij} representarà la quantitat de whisky importat i que s'utilitza per a elaborar el producte j. Tant i com j poden valer d'1 a 3 amb relació als productes pel mateix ordre que en l'enunciat. Per consegüent, $x_{1j} + x_{2j} + x_{3j}$ indicarà la quantitat total produïda de la mescla j i $x_{i1} + x_{i2} + x_{i3}$ la quantitat total emprada del producte importat i, i no caldrà utilitzar noves variables.
2) Funció objectiu
Per a facilitar-ne la comprensió presentarem el plantejament sense simplificar. Totes les xifres especificades fan referència a litres.

$$[\text{MAX}]\ z = 500(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 400(x_{12} + x_{22} + x_{32}) +$$
$$+ 300(x_{13} + x_{23} + x_{33}) - 500(x_{11} + x_{12} + x_{13}) -$$

$$- 300(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 200(x_{31} + x_{32} + x_{33}).$$

3) Restriccions

a) Quantitat màxima que es pot utilitzar de la matèria primera a cada mescla:

$$(x_{11} + x_{12} + x_{13}) \leq 3.500,$$
$$(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \leq 2.500,$$
$$(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \leq 1.500.$$

b) Limitacions de la composició de les mescles:

$$x_{11} \geq 0{,}3(x_{11} + x_{21} + x_{31}),$$
$$x_{31} \leq 0{,}5(x_{11} + x_{21} + x_{31}),$$
$$x_{12} \geq 0{,}15(x_{12} + x_{22} + x_{32}),$$
$$x_{22} \geq 0{,}2(x_{12} + x_{22} + x_{32}),$$
$$x_{13} \geq 0{,}05(x_{13} + x_{23} + x_{33}),$$
$$x_{23} \geq 0{,}2(x_{13} + x_{23} + x_{33}),$$
$$x_{33} \leq 0{,}7(x_{13} + x_{23} + x_{33}).$$

c) $x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j.$

5. Aquest problema d'assignació horària es pot resoldre de la manera següent:

1) Definició de les variables

Sigui x_i el nombre de vigilants que comencen a treballar a l'inici del període *i*.

2) Plantejament

La jornada d'un vigilant cobreix dos períodes. Així doncs, els vigilants que cobreixen l'interval 1 són els que han entrat a treballar en aquest horari (x_1) i els que han entrat a treballar en l'immediatament anterior (x_6). Per tant, el plantejament matemàtic del problema és el que veiem a continuació:

$$[\text{MIN}]\ z = \sum_{i=1}^{6} x_i$$

s.a

$$x_1 + x_6 \geq 10,$$
$$x_1 + x_2 \geq 45,$$
$$x_2 + x_3 \geq 80,$$
$$x_3 + x_4 \geq 120,$$
$$x_4 + x_5 \geq 75,$$
$$x_5 + x_6 \geq 15,$$
$$x_i \geq 0.$$

6. Per a resoldre el problema de fluxos plantejat seguirem els passos següents:

1) Definició de les variables

Sigui x_{ij} la quantitat que s'envia des de *i* fins a *j*, on $i, j \in \{\text{A, B, 0, 1, 2, 3}\}$.

Respecte a les variables d'aquest problema haurem de tenir en compte les observacions següents:

- Les variables es defineixen com la quantitat que surt, que serà diferent de la que arriba perquè sempre es produeixen pèrdues.
- No caldrà definir una variable tipus x_A que signifiqui la quantitat produïda a RA, atès que podem obtenir aquesta quantitat de l'operació següent: $x_A = x_{A1} + x_{A0}$.

2) Funció objectiu

La funció objectiu associada al plantejament d'aquest problema és la que presentem a continuació:

$$\begin{aligned}[\text{MIN}]\ z = {} & 18.000\ (x_{A1} + x_{A0}) + 21.000\ (x_{B0} + x_{B3}) + 13.000x_{A1} + 5.000x_{A0} + \\ & + 7.000x_{B0} + 15.000x_{B3} + 7.000x_{01} + 5.000x_{02} + \\ & + 6.000x_{03} + 3.000x_{21} + 4.000x_{23}.\end{aligned}$$

3) Restriccions

Hem de tenir en compte les restriccions que planteja el problema, i que es formalitzen de la manera següent:

- Restriccions de producció de les refineries:

$$\text{RA: } x_{A1} + x_{A0} \leq 1.600.$$
$$\text{RB: } x_{B0} + x_{B3} \leq 1.200.$$

- Entrades i sortides dels centres de distribució:

$$0\text{: } 0{,}98x_{A0} + 0{,}98x_{B0} = x_{01} + x_{02} + x_{03}.$$
$$\text{D1: } 0{,}9x_{A1} + 0{,}98x_{01} + 0{,}9x_{21} = 900.$$
$$\text{D2: } 0{,}98x_{02} - 0{,}9x_{21} - 0{,}9x_{23} = 400.$$

D3: $0{,}9x_{23} + 0{,}98x_{03} + 0{,}9x_{B3} = 1.000$.

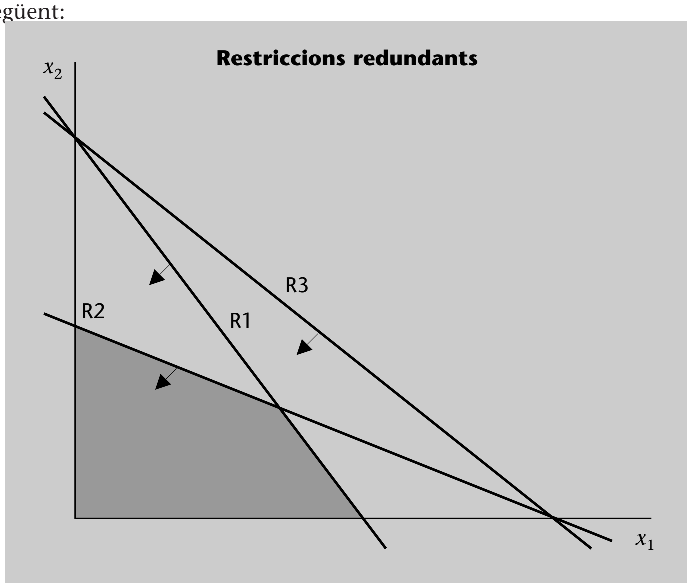
- Capacitats màximes de transport:

$$x_{A0} \le 1.500,$$
$$x_{A1} \le 600,$$
$$x_{B0} \le 1.000,$$
$$x_{B3} \le 500,$$
$$x_{01} \le 500,$$
$$x_{02} \le 700,$$
$$x_{03} \le 900,$$
$$x_{21} \le 300,$$
$$x_{23} \le 200.$$

- A més a més,

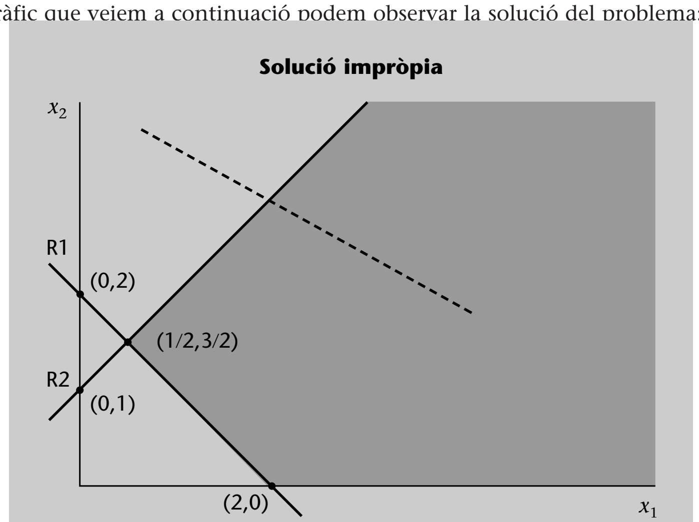
$$x_{ij} \ge 0.$$

7. La solució del problema amb restriccions redundants que hem plantejat es presenta en el gràfic següent:



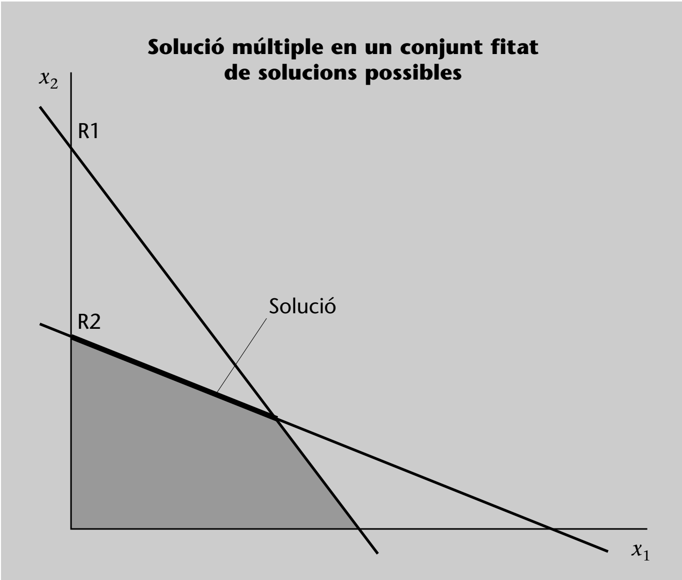
Com veiem en el gràfic, el fet d'afegir una nova restricció d'aquestes característiques no afecta el conjunt de solucions possibles, de manera que la solució és la mateixa. Es tracta d'una restricció redundant, és a dir, no afecta el problema. Analíticament, ho podríem veure mitjançant el rang de la matriu **A**: si Rang(A) $< m$ (m = nombre de restriccions), aleshores hi ha restriccions redundants.
Noteu que el fet d'afegir restriccions a un problema lineal afecta únicament el conjunt de solucions possibles: si el conjunt es queda igual, la solució no varia; si es redueix, la solució pot ser la mateixa (si l'òptim anterior continua pertanyent al conjunt de solucions possibles), o una de pitjor (més petita si és MAX o més gran si és MIN) si aquest ja no hi pertany.

8. En el gràfic que veiem a continuació podem observar la solució del problema:



En aquest cas, si utilitzem el mètode de la línia isobenefici veiem que a mesura que aquesta línia es va desplaçant cap amunt, va millorant el valor de z i sempre hi ha algun punt del conjunt de solucions possibles que toca a la recta, de manera que el valor més alt de z podrà ser l'infinit. A aquest tipus de solució se li dóna el nom de **solució impròpia en sentit estricte** i s'expressa únicament indicant que el valor de z pot assolir l'infinit: $z^* = +\infty$. Com veiem en el gràfic, les solucions impròpies només es poden donar en conjunts de solucions possibles no fitats. Tanmateix, cal tenir present que si el conjunt de solucions possibles és no fitat, això no vol dir que la solució sigui necessàriament impròpia, sinó que podem trobar qualsevol tipus de solució.

9. El cas que hem plantejat a l'enunciat és un cas amb solució múltiple en un conjunt de solucions possibles fitat. En aquest cas, si utilitzem el mètode de la línia isobenefici podem veure a la figura següent que la tangència no es produeix en un vèrtex del conjunt de solucions possibles, sinó que té lloc en tot un costat, és a dir, que hi ha dos vèrtexs que són solució òptima del problema.



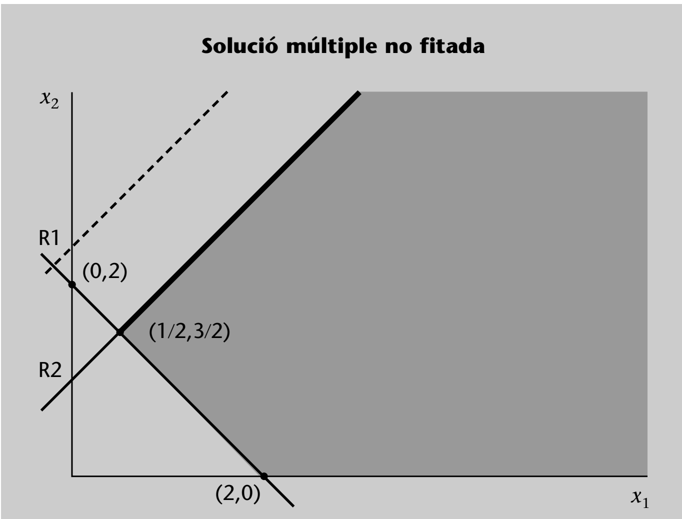
Aquest tipus de solució (quan hi intervé més d'un vèrtex) rep el nom de **solució múltiple** i s'expressa com la combinació lineal convexa dels vèrtexs:

$$\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*)' = \lambda(0,2)' + (1-\lambda)(15/7, 8/7)'; \quad 0 \le \lambda \le 1,$$

amb un valor de $z^* = 20$.

En aquest cas particular, el conjunt de solucions òptimes és fitat (si el conjunt de solucions possibles és fitat, el conjunt de solucions òptimes, com que és subconjunt del primer, òbviament també serà fitat), de manera que es tracta d'una solució múltiple fitada.

10. La solució d'aquest cas es presenta a la figura següent:

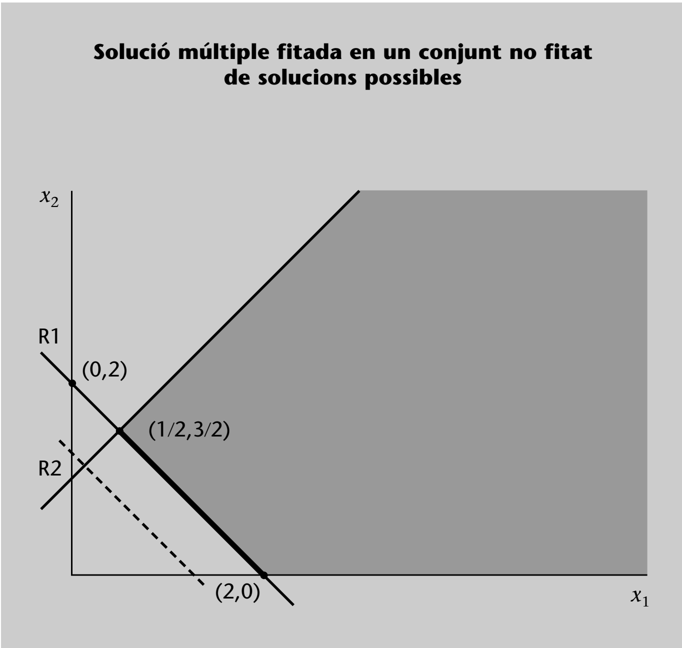


Aquesta solució és múltiple, igual que en el cas de l'exercici precedent, atès que hi ha múltiples combinacions de les variables que assoleixen el valor òptim de z ($z^* = 1$), però el conjunt de solucions òptimes és no fitat, i per tant, les variables sí que poden arribar a adoptar valors infinits. Es tracta d'una **solució múltiple no fitada**.
Per aquest motiu, si utilitzem el mètode dels vèrtexs, veurem que el millor vèrtex és (1/2,3/2), però hem d'analitzar què passa si ens desplacem per la recta de la segona restricció. Per a fer-ho agafem un punt d'aquesta recta, a la dreta del vèrtex ($x_1 > 1/2$), per exemple el (2,3), i l'avaluarem en la funció objectiu ($z = 1$), que és el mateix valor que el que proporciona el vèrtex (1/2,2/3). Per consegüent, podem concloure que són solució del problema tots els punts següents:

$$\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*)' \text{ tal que } x_1^* \geq 1/2 \text{ i } x_2^* = x_1^* + 1,$$

amb un valor de $z^* = 1$.

11. La solució del problema plantejat en aquest exercici es mostra a la figura que veiem a continuació:



El fet que un conjunt de solucions possibles sigui obert no exclou la possibilitat de tenir una solució múltiple fitada, que és el cas que ens ocupa.
La solució seran els dos vèrtexs implicats (2,0) i (1/2,3/2) o qualsevol combinació lineal convexa d'aquests:

$$\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*)' = \lambda(2{,}0)' + (1 - \lambda)(1/2{,}3/2)'; \; 0 \leq \lambda \leq 1,$$

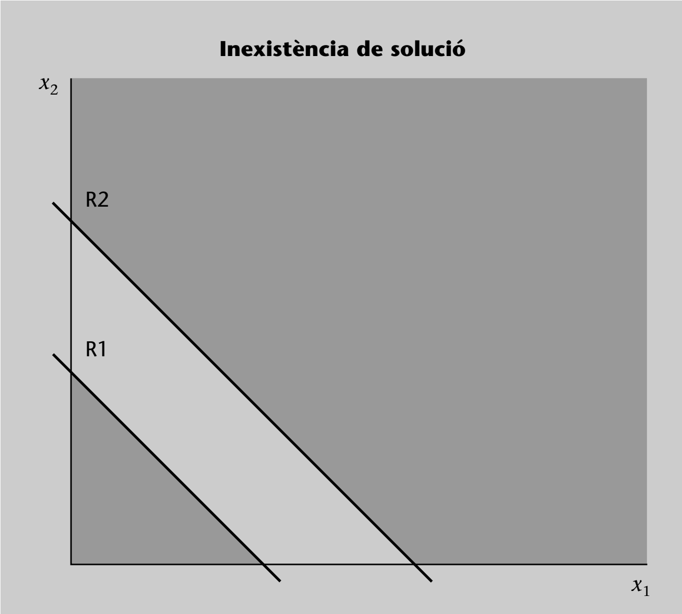
amb un valor de $z^* = 4$.
Arribats a aquest punt, és convenient puntualitzar que per a tenir una solució múltiple no fitada és necessari que el conjunt de solucions possibles sigui no fitat, però el fet que el conjunt de solucions possibles sigui no fitat no implica en absolut que tinguem una solució múltiple no fitada, com podem veure en aquest exercici.

Vegeu la solució de l'exercici d'autoavaluació 9.

Observeu que...

... en els casos de solució múltiple (exercicis 9, 10 i 11), el pendent de la corba isobenefici és igual al pendent d'alguna de les restriccions.

12. El cas plantejat a l'enunciat d'aquest exercici d'autoavaluació és un cas d'inexistència de solució. La solució gràfica es mostra a la figura de la pàgina següent.
En aquest cas la intersecció de les àrees definides per les rectes és buida. Per tant, el conjunt de solucions possibles és buit, és a dir, no hi ha cap punt que compleixi les restriccions del problema. Per consegüent, per al problema plantejat no hi ha cap solució possible.
La inexistència de solucions pot ser provocada tant pel fet que les restriccions siguin paral·leles (i no estan superposades) i generen regions oposades, que és el cas que ens ocupa, com perquè encara que no siguin paral·leles la intersecció de les regions es produeix fora del quadrant positiu de $\mathbb{R}^2$, o perquè la regió definida per qualsevol de les restriccions se situa fora d'aquest quadrant.



Bibliografia

Bibliografia bàsica

Ackoff, R. L. (1979). *El arte de resolver problemas*. Mèxic: Limusa.

Bazaraa, M.; Jarvis, J.; Sherali, H. (1990). *Linear Programming and Network Flows* (2a ed.). John Wiley & Sons. Hi ha traducció al castellà amb la referència següent: (1998). *Programación lineal y flujo de redes* (2a ed.). México: Limusa.

Hillier, F.; Lieberman, G. (1997). *Introducción a la investigación de operaciones* (4a ed.). Mèxic: McGraw-Hill.

Prawda, J. (1980). *Métodos y modelos de investigación de operaciones* (vol. I). Mèxic: Limusa.

Ríos Insua, S. (1996). *Investigación operativa* (3a ed.). Madrid: Centro de Estudios Ramón Areces.

Bibliografia complementària

Balbas, A.; Gil, J. A. (1990). *Programación Matemática*. Madrid: AC.

Borrell, J. (1989). *Métodos matemáticos para la economía* (vol. II). Madrid: Pirámide.

Karmanov, V. (1989). *Mathematical programming*. Moscou: Mir.

Luenberger, D. (1989). *Programación lineal y no lineal*, (traducció de la 2a edició en anglès). Argentina: Addison-Wesley.

Schrijver, A. (1986). *Theory of Linear and Integer programming*. Chichester: John Wiley