Les funcions de diverses variables

Ricard Torres Bargalló

Exercicis a càrrec de
Margarida Corominas Bosch
Anna Espinal Berenguer

PID_00186428

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

Les funcions univariants, que hem vist més enrere, són una idealització convenient de moltes situacions, però si volem pensar en exemples de funcions que estiguin relacionades amb fenòmens econòmics, ens veurem temptats d'ampliar aquest concepte de tal manera que inclogui magnituds que depenen de més d'un factor.

Per exemple, si volguéssim especificar una funció que ens digués com ha estat la demanda de cotxes a Catalunya durant un període determinat, diríem que depèn del preu dels cotxes, però també de l'existència i el preu d'altres productes substitutoris, com ara el transport públic, a més d'altres factors, com el nivell d'ingressos familiars (els fabricants d'automòbils sempre es queixen que, en èpoques de crisi, els consumidors compren menys cotxes, i demanen al govern que faci coses com ara el Plan Renove).

El nostre objectiu en els apartats que hi ha a continuació és arribar a una definició formal de les funcions amb múltiples variables i estudiar l'extensió en aquest context més general de conceptes com són la continuïtat i la diferenciació, que hem vist que són una eina essencial per a l'anàlisi de funcions univariants.

En la primera part donem uns quants exemples senzills de funcions multivariants, que més endavant usarem en la presentació del material.

Objectius

Els objectius que podreu assolir en aquest mòdul didàctic són:

1. Apropar-se al concepte de funcions amb múltiples variables.

2. Saber generar gràfiques de funcions amb programes informàtics.

3. Reconèixer les corbes de nivell i seccions verticals en gràfiques de funcions.

4. Entendre l'extensió dels conceptes de continuïtat i diferenciació per a funcions multivariants.

5. Conèixer els conceptes de derivada parcial, derivada direccional, vector gradient, pla tangent i matriu hessiana.

6. Fer servir la regla de la cadena per a diferenciar funcions compostes.

7. Diferenciar funcions definides implícitament.

1. Una primera aproximació a funcions multivariants

Tot seguit introduirem, mitjançant l'ús d'exemples, el concepte de funcions multivariants i la rellevància que té per a l'estudiant d'economia.

1.1. Exemples de funcions multivariants

Després d'entendre el concepte de funció univariant, generalitzar-la a múltiples variables no presenta problemes des del punt de vista conceptual, però introdueix un grau més de complexitat; per això en aquest mòdul desenvoluparem eines i conceptes que ens permetran usar al màxim els nostres coneixements sobre funcions univariants i així comprendre millor les funcions amb més d'una variable.

Exemple 1.1. Consum de carn de boví

La taula següent (basada en dades dels Estats Units) expressa el consum de carn de boví en lliures per família a la setmana, en funció del preu de la carn i tenint en compte els ingressos anuals de la família.

Nota

Aquestes dades han estat extretes de la *Introducció a l'economia positiva* de Richard G. Lipsey. Nosaltres hem consultat la 3a edició anglesa, publicada per Weidenfield and Nicolson, Londres 1971, però també hi ha l'edició en castellà.

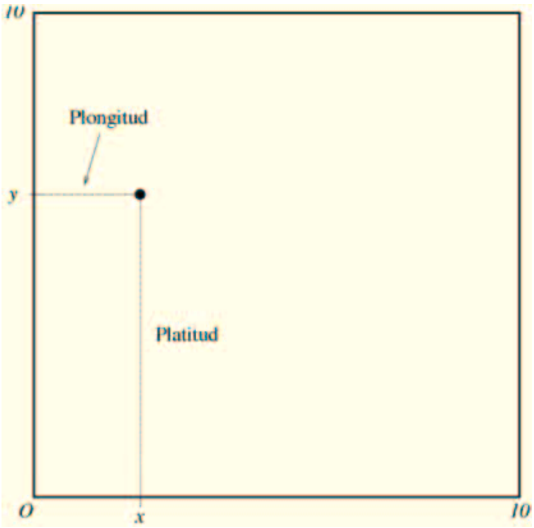
Haureu observat que seguim aquí la convenció anglosaxona de separar amb un punt la part entera de la decimal. D'una banda, això evita ambigüitats en la notació de funcions: si no fos així, f(3,2) podria ser tant una funció univariant que té '3.2' com a argument, com una funció de dues variables que té '3' i '2' com a arguments; en aquest text sempre tindrà el segon significat. També és convenient que ens acostumem a usar aquesta notació si hem de treballar amb programes d'ordinador com ara el Gnuplot.

		Preu ($ per lliura)			
		3.00	**3.50**	**4.00**	**4.50**
	20	2.65	2.59	2.51	2.43
Ingressos	**40**	4.14	4.05	3.94	3.88
Anuals	**60**	5.11	5.00	4.97	4.84
(Milers de $)	**80**	5.35	5.29	5.19	5.07
	100	5.79	5.77	5.60	5.53

Si anomenem i la variable ingressos anuals per família, p la variable preu de la carn de boví i c vol dir consum setmanal de carn de boví, la taula expressa c com a funció de i i de p. Si expressem aquesta relació funcional per $c = f(i,p)$, tindrem que, per exemple, $f(60, 3.5) = 5$ i $f(80, 4) = 5.19$.

Exemple 1.2. Platalònia is a flattened nation

Platalònia és un país situat en un altiplà remarcable: no solament és completament pla, sinó que forma un quadrat perfecte que té exactament 10 quilòmetres de costat.



La localització geogràfica a Platalònia està rigorosament legislada, i es fa en relació amb el que s'anomena la *platitud* i *plongitud* de cada punt. La *platitud* d'un punt és la distància vertical a la base del quadrat i la *plongitud*, la distància horitzontal al costat esquerre del quadrat, tal com s'indica en la gràfica adjunta.

Els habitants de Platalònia són molt patriòtics, i el que més els preocupa és saber la distància que els separa de la seva capital en cada moment. La capital, Banananona, està situada "al bell mig del pla", és a dir, al punt amb *platitud* 5 i *plongitud* 5. La distància que separa un habitant de la capital, mesurada en quilòmetres, la podem expressar com una funció D de la *plongitud*, x, i de la *platitud*, y, on es troba el bon senyor. Per exemple, tenim que $D(0,0) = D(10,10) = \sqrt{50}$, i també $D(0,5) = D(5,0) = 5$.

Exemple 1.3. La Funció de Producció Cobb-Douglas

El premi Nobel d'Economia Robert Solow, en un famós article publicat els anys cinquanta, va tractar de descriure l'evolució de la capacitat productiva dels Estats Units mitjançant l'estimació d'una **funció de producció** per l'agregat de l'economia nord-americana. Els arguments d'aquesta funció són el capital (K) i el treball (L), i el valor de la funció vindria a correspondre amb el producte interior brut. La funció de producció té la forma següent:

$$F(K, L) = A\, K^{\alpha}\, L^{1-\alpha},$$

on K i L són les variables, i A i α són **paràmetres** (és a dir, quantitats fixes). La productivitat relativa del factor capital *versus* el factor treball en un moment donat del temps ve determinada pel paràmetre α, mentre que la variació del paràmetre A al llarg del temps recull un increment en la productivitat de l'economia en el seu conjunt.

Robert Merton Solow

Economista nord-americà, autor de diversos estudis sobre el creixement econòmic pels quals va rebre el premi Nobel d'Economia el 1987.

Partint de les dades disponibles, Solow va fer una estimació dels valors dels paràmetres A i α al llarg del temps, i la seva conclusió va ser que α es manté bàsicament constant, mentre que A creix amb el temps i recull, d'aquesta manera, una major capacitat productiva de l'economia en el seu conjunt a causa de l'avenç tecnològic. Notem que un augment de A significa que, amb les mateixes quantitats de capital i treball, l'economia obté més quantitat de producte.

Nota

L'article de Solow ha tingut una gran influència en la **teoria del creixement econòmic**, una de les àrees més estudiades pels economistes en els darrers anys, que han centrat els seus treballs a tractar d'entendre què és el que determina el desenvolupament econòmic dels països.

La funció de producció postulada per Solow és del tipus **Cobb-Douglas**, i és àmpliament usada en nombrosos estudis, tant teòrics com aplicats, en l'economia.

Exemple 1.4. La mitjana aritmètica

Donats dos nombres qualssevol x i y, la seva mitjana aritmètica és el nombre intermedi entre els dos, és a dir:

$$\frac{x+y}{2}.$$

En general, donats n nombres x_1, $x_2 \ldots x_n$, la seva mitjana aritmètica és el nombre

$$M(x_1, x_2 \ldots x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

La mitjana aritmètica és, doncs, una funció $M(x_1, x_2 \ldots x_n)$ de n variables.

Exemple 1.5. La mitjana geomètrica

Donats dos nombres *positius* x i y, la seva mitjana geomètrica és donada per

$$g(x, y) = \sqrt{x\, y}.$$

En general, donats n nombres positius x_1, $x_2 \dots x_n$, la seva mitjana geomètrica és definida com

$$G(x_1, x_2 \dots x_n) = \sqrt[n]{x_1\, x_2\, \cdots\, x_n} = (x_1\, x_2\, \cdots\, x_n)^{1/n}\,.$$

1.2. Algunes definicions

De la mateixa manera que una funció d'una variable és una regla que assigna un nou nombre a cada nombre d'un cert domini, una funció de dues variables té com a domini parelles de nombres, i a cada parella assigna un nou nombre. En general, el domini d'una funció amb n variables ($n \geq 1$) està format per vectors amb n components, i la funció associa a cada vector un nombre real determinat.

Una **funció amb *n* variables** és una regla f que associa a cada vector $(x_1, x_2 \dots x_n)$ dins d'un cert conjunt D un nombre real $f(x_1, x_2 \dots x_n)$. El *domini* D és un subconjunt de $\mathbb{R}^n$, és a dir, està format per vectors amb n components. Representarem aquesta funció escrivint

$$f : D \to \mathbb{R} \quad \text{o bé} \quad D \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Quan vulguem indicar l'acció de la funció sobre un vector, escriurem

$$(x_1, x_2 \dots x_n) \xmapsto{f} f(x_1, x_2 \dots x_n).$$

Recordeu...

...com es defineix una funció univarinat? Repasseu la informació en els mòduls anteriors

Per exemple, si representem amb M la funció **mitjana aritmètica**, el seu domini és $D = \mathbb{R}^n$, i la seva acció sobre un vector de $\mathbb{R}^n$ és descrita per

$$(x_1, x_2 \dots x_n) \xmapsto{M} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

D'altra banda, el domini de la funció **mitjana geomètrica** és el conjunt de vectors:

$$D = \{\, (x_1, x_2 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n :\ x_1 > 0,\ x_2 > 0 \dots\ x_n > 0 \,\}\,,$$

és a dir, el conjunt de tots els vectors de dimensió n que tenen tots els components estrictament positius. Si representem amb G aquesta funció, llavors podem descriure-la escrivint:

$$(x_1, x_2 \dots x_n) \xmapsto{G} \sqrt[n]{x_1\, x_2\, \cdots\, x_n}.$$

1.3. Exercicis

1.1. Aquest exercici es basa en l'exemple 1.1, referent al consum de carn de boví.

a) Trobeu els valors de $f(20,3)$, $f(40,3.5)$, $f(60,4)$ i $f(80,4.5)$.

b) Suposeu que treballeu al departament de vendes d'una empresa i us acaben de donar aquesta taula. El cap us demana quin serà el consum de cada un dels 5 segments d'ingressos, si el preu que posen és de 3.75 dòlars per lliura. El cap vol xifres, no històries. Què li direu?

c) Suposeu que el vostre cap té una altra taula que li diu exactament com es distribueixen els ingressos familiars al vostre *county*. Les famílies amb menys ingressos reben 20.000 $ anuals i les més riques, 100.000 $ anuals. Però també hi ha famílies que guanyen 27.512 $ l'any i, de fet, qualsevol altre nombre comprès entre 20.000 i 100.000 apareix dins de la distribució. El cap vol tenir una estimació del que vendrà l'empresa si fixa el preu en 4 $ per lliura, i per això necessita saber el que consumirà cada grup d'ingressos. Què li direu, ara? (Sigueu tan precisos com pugueu. Una gràfica us pot ajudar a trobar la millor solució. Fixeu-vos també en la vostra resposta a la qüestió anterior.)

1.2. Aquest exercici es basa en l'exemple 1.2, sobre el país de Platalònia.

a) Dibuixeu en el mapa els punts amb la plongitud i platitud següents: $(10,5)$, $(5,10)$, $(5,6)$, $(4,4)$ i $(7,3)$, i trobeu la distància que els separa de la capital.

b) Quina serà la distància a la capital d'un punt que tingui la mateixa plongitud i platitud? Dibuixeu sobre el mapa tots els punts que tenen aquesta propietat.

c) Donat un nombre a tal que $0 \leq a \leq 10$, trobeu $D(a,a)$. Per a $0 \leq a \leq 10$, definiu la funció d'una variable $g(a) = D(a,a)$ i dibuixeu-ne la gràfica.

d) Trobeu la distància a la capital d'un punt que té per platitud el doble de la seva plongitud. Dibuixeu sobre el mapa tots els punts que tenen aquesta propietat.

e) Donat un nombre a tal que $0 \leq a \leq 5$, trobeu $D(a,2a)$. (*Nota:* $2a$ vol dir 2 multiplicat per a.) Per a $0 \leq a \leq 5$, definiu la funció d'una variable $h(a) = D(a,2a)$ i dibuixeu-ne la gràfica.

f) Trobeu la distància a la capital d'un punt la suma de la platitud i de la plongitud del qual sigui igual a 10. Dibuixeu sobre el mapa tots els punts que tenen aquesta propietat.

g) Donat un nombre a tal que $0 \leq a \leq 10$, trobeu $D(a,10-a)$. Per a $0 \leq a \leq 10$, definiu la funció d'una variable $j(a) = D(a,10-a)$ i dibuixeu-ne la gràfica.

h) Donat un punt amb plongitud x i platitud y, trobeu-ne la distància a la capital.

i) A què és igual $D(x,y)$ per a x i y qualssevol?

1.3. Ara emprarem el Gnuplot per a visualitzar el que hem fet a l'exercici anterior. Entreu al programa i definiu la funció D:

$$gnuplot > D(x,y) = sqrt((x-5)**2 + (y-5)**2)$$

Les altres funcions de què hem parlat, poden ser definides a partir de D; per exemple, la funció g la definim com

```
gnuplot > g(a) = D(a, a)
```

a) Introduïu al Gnuplot les definicions de les funcions h i j, tal com ho acabem de fer amb la funció g.

Ara podem fer una gràfica de les funcions univariants que hem definit. Hem de tenir cura amb els dominis de definició i també amb el fet que la lletra 'a' no és la variable fictícia per defecte en un `plot`.

Nota

És important de remarcar aquí que les lletres que usem com a variables a l'hora de definir una funció són fictícies. La funció `p(x) = = x**2 - 2*x` i la funció `q(s)= s**2 - 2*s` són una i la mateixa funció. Un programa de matemàtiques ben dissenyat com el Gnuplot s'adequa a aquesta convenció.

```
gnuplot > plot[a = 0 : 10]g(a)
```

b) Usant la instrucció `plot` del Gnuplot feu la gràfica de les funcions h i j, tenint cura en cada cas d'especificar el domini de definició.

c) La funció g té trams sospitosament lineals. Desenvolupeu-ne l'expressió algèbrica fins a trobar-ne la raó.

d) Les gràfiques de les funcions g i j s'assemblen molt. Justifiqueu que es tracta de la mateixa funció i expliqueu-ne el motiu.

1.4. Donats dos nombres qualssevol a i b, representeu per $m(a, b)$ la seva mitjana aritmètica.

a) Trobeu la mitjana aritmètica de cada un dels següents parells de nombres: $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(1, 5)$, $(1, 7)$ i $(1, 9)$.

b) Donat un nombre x qualsevol, trobeu la mitjana aritmètica dels nombres 1 i x. Definiu i feu la gràfica de la funció d'una variable $f(x) = m(1, x)$, i determineu-ne la derivada $f'(x)$.

c) Calculeu la mitjana aritmètica de cadascun dels parells de nombres següents: $(1, 3)$, $(2, 6)$, $(3, 9)$ i $(4, 12)$.

d) Donat un nombre x qualsevol, calculeu la mitjana aritmètica dels nombres x i $3x$. Definiu i feu la gràfica de la funció d'una variable $g(x) = m(x, 3x)$ i determineu-ne la derivada $g'(x)$.

Donats tres nombres qualssevol a, b i c, representarem per $n(a, b, c)$ la seva mitjana aritmètica.

e) Calculeu la mitjana aritmètica de cadascun dels triples de nombres següents: $(1, 0, 5)$, $(1, 3, 5)$, $(1, 6, 5)$ i $(1, 9, 5)$.

f) Donat un nombre x qualsevol, calculeu la mitjana aritmètica dels tres nombres: 1, x i 5. Definiu i feu la gràfica de la funció d'una variable $h(x) = n(1, x, 5)$ i determineu-ne la derivada $h'(x)$.

g) Calculeu la mitjana aritmètica de cadascun dels triples de nombres següents: $(1, 2, 3)$, $(2, 4, 6)$, $(3, 6, 9)$ i $(4, 8, 12)$.

h) Donat un nombre x qualsevol, calculeu la mitjana aritmètica dels tres nombres: x, $2x$ i $3x$. Definiu i feu la gràfica de la funció d'una variable $j(x) = n(x, 2x, 3x)$ i determineu-ne la derivada.

1.5. Donats dos nombres positius a i b, representarem per $g(a, b)$ la mitjana geomètrica.

a) Calculeu la mitjana geomètrica de cadascun dels parells de nombres següents: $(2, 2)$, $(2, 8)$, $(2, 18)$, $(2, 32)$ i $(2, 50)$.

b) Donat un nombre positiu x qualsevol, calculeu la mitjana aritmètica dels nombres 2 i x. Definiu la funció d'una variable $f(x) = g(2, x)$ i determineu-ne la derivada $g'(x)$. Feu la gràfica de la funció f i la seva derivada usant el Gnuplot.

c) Calculeu la mitjana geomètrica de cadascun dels parells de nombres següents: $(2, 8)$, $(3, 27)$, $(4, 64)$ i $(5, 125)$. Per a fer les operacions, podeu usar qualsevol calculadora, o millor el programa Gnuplot (amb la instrucció `print`).

d) Donat un nombre x qualsevol, calculeu la mitjana geomètrica dels nombres x i x^3. Definiu la funció d'una variable $h(x) = g(x, x^3)$ i determineu-ne la derivada $h'(x)$. Feu la gràfica de la funció h i la seva derivada usant el Gnuplot.

1.4. Solucionari

1.1.
a) $f(20, 3) = 2.65$, $f(40, 3.5) = 4.05$, $f(60, 4) = 4.97$ i $f(80, 4.5) = 5.07$.

b) No disposant d'informació més detallada, com que 3.75 està situat exactament en el punt intermedi entre 3.5 i 4, podem interpolar també el consum prenent els valors mitjans que corresponen a aquests dos preus. Per exemple, usant el Gnuplotfaríem:

```
gnuplot> m(x,y) = 0.5*x + 0.5*y
gnuplot> print m(2.59,2.51);
print m(4.05,3.94)
         2.55
         3.995
gnuplot> print m(5,4.97) ; print
m(5.29,5.19)
         4.985
         5.24
gnuplot> print m(5.77,5.6)
         5.685
```

c) El que pretenem ara és aplicar la tècnica d'**interpolació lineal** de l'apartat anterior. En termes d'una gràfica, això es tradueix en la unió amb línies rectes dels punts que corresponen als nivells d'ingressos indicats a la taula. Tornarem a fer servir el **Gnuplot** per a fer aquesta tasca.

Començarem per fer una gràfica de les dades que ens mostra la taula quan el preu és de 4$ per lliura. Per a això el que necessitarem és crear un arxiu que contingui aquestes dades. Amb un editor de textos crearem un arxiu que anomenarem "ing-cons.dat" i que contindrà les dades d'ingressos *versus* consum quan el preu està fixat en 4$ per lliura:

```
20    2.51
40    3.94
60    4.97
80    5.19
100   5.60
```

Per exemple...

... es pot crear amb el Notebook, des del Windows, o amb l'Edit, des del DOS. També es pot fer amb el Word i desar el document resultant com a arxiu de text.

Tot seguit, entrem al Gnuplot i creem la gràfica d'aquestes dades. Cal definir una mica de marge en els recorreguts de les variables, per tal de veure bé el que hi ha.

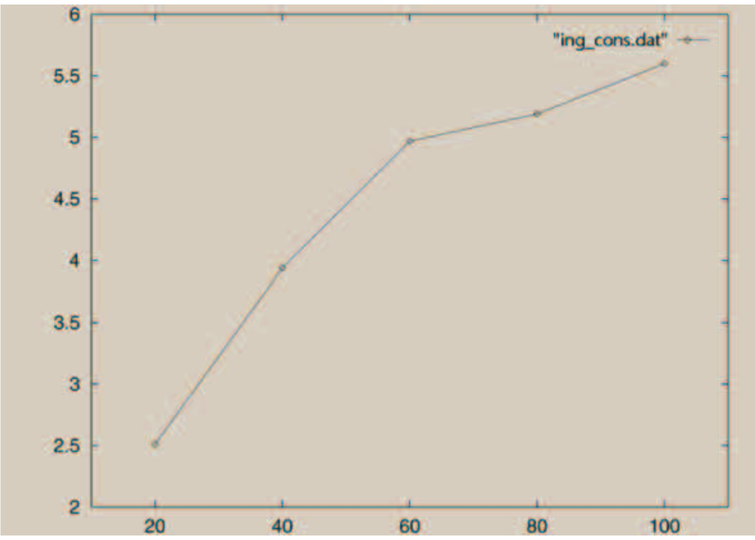
```
gnuplot > plot [10 : 110] [2 : 6] "ing – cons.dat"
```

Més endavant...

... parlarem amb molt més detall sobre com es poden generar gràfiques de dades amb el Gnuplot.

Això ens mostra només els 5 punts que corresponen a cada nivell de renda que hi ha a la taula. Si volem veure el que correspondria als nivells de renda intermedis, podem demanar al programa que uneixi els punts adjacents amb línies rectes.

```
gnuplot > plot [10 : 110] [2 : 6] "ing – cons.dat"withlinespoints
```



Ara el nostre objectiu és trobar la fórmula matemàtica que correspon a aquesta gràfica, és a dir, la fórmula que a cada nivell de renda entre 20.000 i 100.000 hi associa el resultat d'interpolar linealment els valors del consum en els dos punts adjacents.

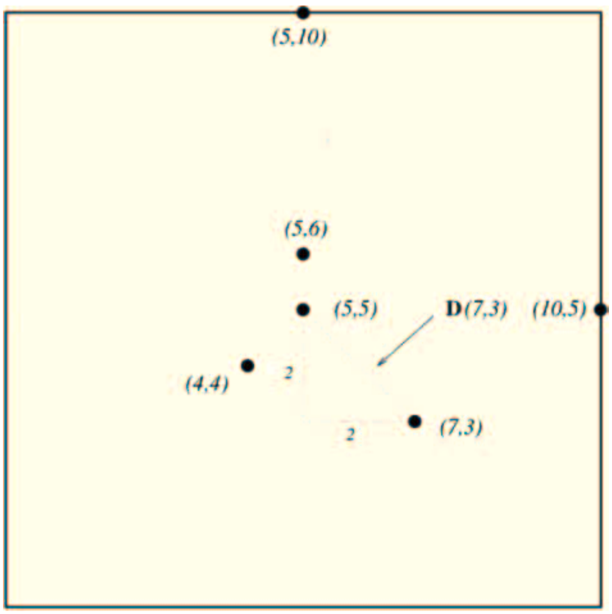
Per exemple, si tenim un nivell de renda de 30.000, hauríem de trobar el punt mitjà entre 2.51 i 3.94; si el nivell de renda i està entre 20.000 i 40.000, però no és el punt mitjà, llavors el nivell de consum que hi associarem serà el que hi correspon proporcionalment:

$$\frac{c-2.51}{i-20} = \frac{3.94-2.51}{40-20} \implies c = 2.51 + (i-20)\,\frac{3.94-2.51}{40-20}.$$

D'aquesta manera, obtenim la funció següent, que és la que correspon a la gràfica que hem vist amb el Gnuplot:

$$c(i) = \begin{cases} 2.51 + (i-20)\,\frac{3.94-2.51}{40-20} & \text{si } 20 \le i \le 40 \\ 3.94 + (i-40)\,\frac{4.97-3.94}{60-40} & \text{si } 40 \le i \le 60 \\ 4.97 + (i-60)\,\frac{5.19-4.97}{80-60} & \text{si } 60 \le i \le 80 \\ 5.19 + (i-80)\,\frac{5.60-5.19}{100-80} & \text{si } 80 \le i \le 100 \end{cases}$$

1.2 i **1.3.** Hem aplegat aquí les solucions als exercicis 1.2 i 1.3, perquè com veurem estan molt relacionades.



Localització dels punts

Per a trobar la distància d'un punt a la capital, hem d'aplicar el teorema de Pitàgores. Per exemple, al mapa hem indicat com es pot calcular la distància del punt $(7,3)$ a la capital

$$D(7,3) = \sqrt{(7-5)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{8}.$$

D'aquesta manera, trobem que $D(10,5) = 5$, $D(5,10) = 5$,
$D(5,6) = 1$ i $D(4,4) = \sqrt{2}$.

Observeu que, dins de la funció de distància, no cal que ens preocupem sobre si la plongitud és més gran de 5 o no, ja que en elevar la diferència al quadrat, el resultat sempre és el mateix:

$$(7-5)^2 = (5-7)^2 = 2^2 = 4.$$

així, donat qualsevol (x,y), la funció de distància és

$$D(x,y) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-5)^2}.$$

Usarem el Gnuplot per a fer les gràfiques, tal com s'indica en l'exercici 1.3. Primer definirem les funcions:

```
gnuplot> D(x,y) = sqrt( (x-5)**2 + (y-5)**2 )

gnuplot> g(a) = D(a,a)

gnuplot> h(a) = D(a,2*a)

gnuplot> j(a) = D(a,10-a)
```

Tot seguit, fem les gràfiques. Noteu que, dins de l'especificació del domini de definició, també hem de dir quina és la lletra amb què designem la nostra variable fictícia (en aquest cas una a), ja que el Gnuplot suposa per defecte que usem una x amb aquest objectiu.

```
gnuplot> plot [a=0:10] g(a)

gnuplot> plot [a=0:5] h(a)

gnuplot> plot [a=0:10] j(a)
```

Per a veure per què la gràfica de g té trams lineals, cal desenvolupar l'expressió algèbrica d'aquesta funció

$$
\begin{aligned}
g(a) = D(a,a) &= \sqrt{(a-5)^2+(a-5)^2} = \sqrt{(2\,(a-5)^2} = \\
&= \sqrt{2}\,\sqrt{(a-5)^2} = \sqrt{2}\,|a-5|.
\end{aligned}
$$

Observem que $\sqrt{(a-5)^2} = |a-5|$, ja que a pot prendre valors inferiors o superiors a 5. Quan $a<5$, tenim el tram lineal decreixent de la gràfica de g, i quan $a>5$ ens trobem amb el tram lineal creixent.

També veiem que, de fet, les funcions g i j són iguals, encara que les dues corresponen a punts diferents sobre el mapa. Si desenvolupem l'expressió de j, trobem

$$
\begin{aligned}
j(a) &= \sqrt{(a-5)^2-(10-a-5)^2} = \sqrt{(a-5)^2+(5-a)^2} = \\
&= \sqrt{(a-5)^2+(a-5)^2} = g(a).
\end{aligned}
$$

Per tant, no és casualitat la semblança entre les gràfiques de les dues funcions.

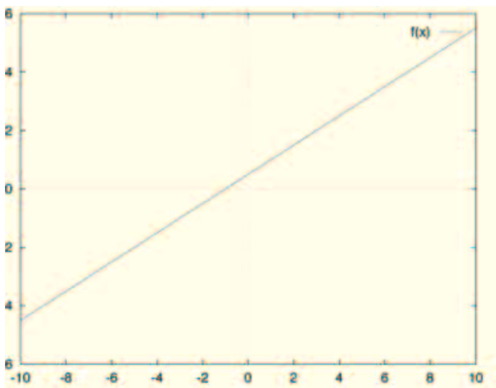
1.4.

a) Si definim $m(x,y) = \frac{x+y}{2}$, llavors tenim $m(1,1) = 1$, $m(1,3) = 2$, $m(1,5) = 3$, $m(1,7) = 4$ i $m(1,9) = 5$.

b) $f(x) = m(1,x) = \frac{1+x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$ és una funció lineal de x. La seva derivada és, per tant, una constant:

$$f'(x) = \frac{1}{2}$$

Per a fer la gràfica de la funció, usarem el Gnuplot. El domini de la variable x és irrellevant, ja que sabem que la funció és lineal. Nosaltres aquí prenem l'interval $[-10,10]$, però n'hauríem pogut prendre qualsevol altre (o deixar que el Gnuplot prengués el `xrange` que té per defecte).



La mitjana aritmètica entre 1 i x

Entrem al Gnuplot les definicions de les funcions

```
gnuplot> m(x,y)=(x+y)/2

gnuplot> f(x)=m(1,x)

gnuplot> plot [-10:10] f(x)
```

Noteu novament el fet que les lletres que usem per a les variables són irrellevants. Quan definim la funció m, usem la lletra x per a la primera variable, però dins de la definició de la funció f, la x l'hem posada com a segona variable de m.

c) $m(1,3) = 2$, $m(2,6) = 4$, $m(3,9) = 6$ i $m(4,12) = 8$.

d) $g(x) = m(x,3x) = \frac{x+3x}{2} = \frac{4x}{2} = 2x$ és una funció lineal de x. La seva derivada és, per tant, una constant:

$$g'(x) = 2.$$

El Gnuplot ens presentarà la gràfica de la funció fent:

```
gnuplot> g(x)=m(x,3*x)

gnuplot> plot [-10:10] g(x)
```

e) Donats tres nombres (x_1, x_2, x_3), en definirem la mitjana aritmètica com el nombreo:

$$n(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

per la qual cosa tenim,

$n(1,0,5) = 2$, $n(1,3,5) = 3$, $n(1,6,5) = 4$ i $n(1,9,5) = 5$.

f) $h(x) = m(1,x,5) = \frac{1+x+5}{3} = \frac{6+x}{3} = 2 + \frac{x}{3}$ és una funció lineal de x. La seva derivada és, per tant, una constant

$$h'(x) = \frac{1}{3}.$$

Amb el Gnuplot definirem la funció i ens en presentarà la gràfica fent:

```
gnuplot> n(x,y,z)=(x+y+z)/3

gnuplot> h(x)=n(1,x,5)

gnuplot> plot [-10:10] h(x)
```

Reflexionem

Si volem ser una mica pedants, direm que és una funció afí, que és el resultat de sumar una constant (en aquest cas 2) a una funció lineal; les funcions lineals tenen la propietat que sempre valen 0 quan les avaluem al 0. (Sabríeu dir per què?)

g) $n(1,2,3) = 2$, $n(2,4,6) = 4$, $n(3,6,9) = 6$ i $n(4,8,12) = 8$.

h) $j(x) = n(x,2x,3x) = \frac{x+2x+3x}{3} = \frac{6x}{3} = 2x$ és una funció lineal de x. La seva derivada és, per tant, una constant

$$j'(x) = 2.$$

El Gnuplot ens presentarà la gràfica de la funció fent:

```
gnuplot> j(x)=n(x,2*x,3*x)

gnuplot> plot [-10:10] j(x)
```

1.5. Usem el Gnuplot per a solucionar aquest exercici. Entrem i comencem definint la mitjana geomètrica:

```
gnuplot > g(x,y) = sqrt(x * y)
```

a) Per a trobar les mitjanes geomètriques fem:

```
gnuplot> print g(2,2); print g(2,8); print g(2,18)

2.0

4.0

6.0
gnuplot> print g(2,32); print g(2,50)

8.0

10.0
```

a) $f(x) = g(2, x) = \sqrt{2\,x}$. Si repassem una mica les regles de derivació d'arrels quadrades i de funcions compostes, veurem que la derivada de la funció és:

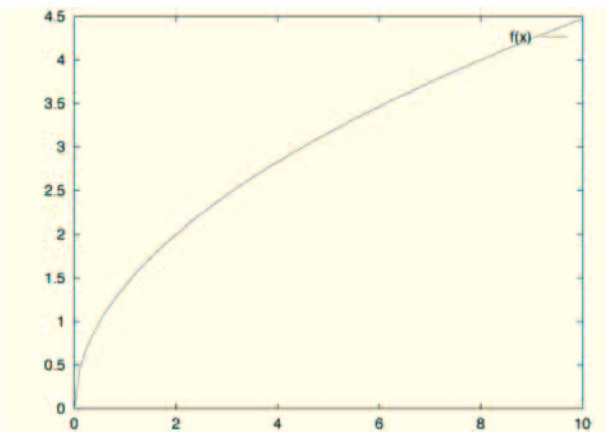
$$f(x) = \sqrt{2\,x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{2}{2\,\sqrt{2\,x}} = \frac{1}{\sqrt{2\,x}}.$$

Entrem tot això al Gnuplot (recordem que el Gnuplot sap fer gràfiques i calcular els valors de les funcions, però nosaltres hem de fer les derivades).

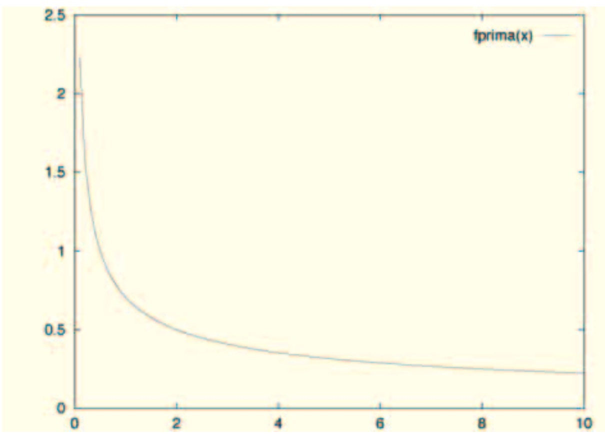
```
gnuplot> f(x) = g(2,x)
gnuplot> fprima(x) = 1/sqrt(2*x)
```

Quan fem les gràfiques, hem de tenir cura d'especificar els dominis, ja que les funcions no estan definides per valors negatius de la variable x. Notem, però, que no representa cap problema el fet que la funció `fprima` no estigui definida en un dels extrems de l'interval que especifiquem, en aquest cas quan $x = 0$.

```
gnuplot> plot [0:10] f(x)
gnuplot> plot [0:10] fprima(x)
```



La mitjana geomètrica entre 2 i x



I la seva derivada

1.5. Sumari

Els exemples que hem presentat de funcions amb múltiples variables il·lustren el fet que en la pràctica de l'economia ens trobem més aviat amb aquest tipus de funcions que no amb les que són univariants.

Els exemples ens haurien d'ajudar a entendre el per què de la definició formal de funcions multivariants com a funcions que associen nombres reals a vectors de nombres reals.

2. Un viatge amb el Gnuplot per funcions de dues variables

2.1. Presentació

Les funcions amb múltiples variables són, en molts aspectes, força més complicades que les d'una sola variable. Per exemple, per a fer la gràfica d'una funció f d'una variable, en tenim prou amb dos eixos cartesians sobre els quals dibuixem una sèrie de punts amb coordenades $(x, f(x))$, que finalment unim amb línies. Però si tenim una funció amb dues variables, els punts que hauríem de dibuixar tindran tres coordenades $(x, y, f(x, y))$, per la qual cosa si volguéssim representar-ho amb eixos cartesians ho hauríem de fer en una gràfica tridimensional. I llevat que siguem Salvador Dalí, ens serà molt difícil treballar amb gràfiques de funcions amb tres variables.

Salvador Dalí...

... va dibuixar l'**hipercub**, que seria la projecció en tres dimensions d'un cub quatridimensional. I, és clar, el dibuix el va fer sobre una tela bidimensional. . .

De tota manera, gairebé tots els recursos que usem per a tractar funcions amb múltiples variables, no són res més que generalitzacions immediates dels que emprem quan només hi ha dues variables.

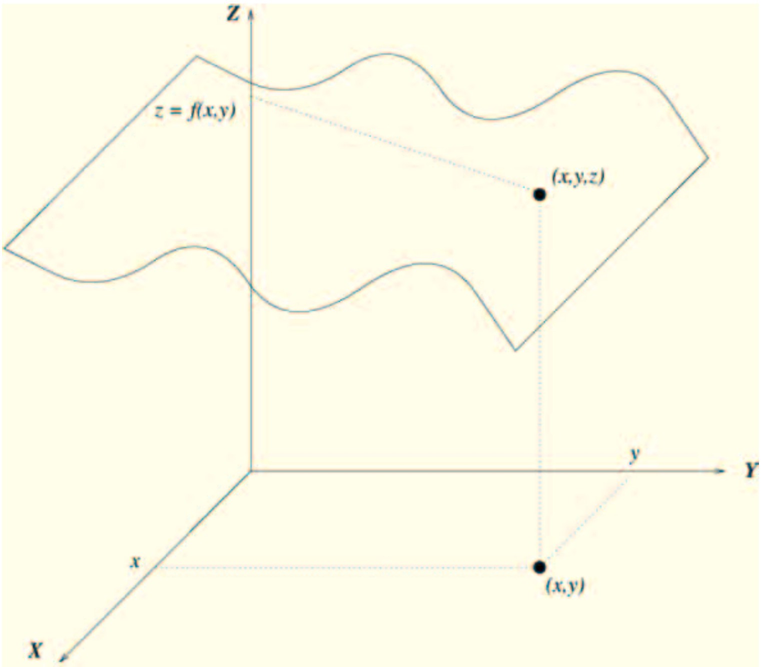
El gran avantatge de les funcions que només tenen dues variables és que les podem representar gràficament, plasmant en les dues dimensions d'un full de paper o de la pantalla d'un ordinador la representació de la seva gràfica tridimensional. I tampoc cal que siguem Salvador Dalí per a fer-ho, perquè altra gent s'ha preocupat d'escriure programes d'ordinador que ho fan, i fins n'hi ha que han considerat que això és un servei a la societat i han fet programes disponibles gratuïtament per a tothom, com és el cas dels autors del Gnuplot .

El nostre objectiu...

... en aquest apartat és analitzar amb un cert detall les funcions de dues variables, sense fixar-nos massa en els aspectes formals. En l'apartat següent ens encarregarem de generalitzar a múltiples variables el que fem aquí i presentarem de manera formal les definicions i els resultats.

2.2. Gràfiques, muntanyes i pastissos

La gràfica d'una funció h d'una sola variable és la representació d'un conjunt de punts de la forma (x, y), tals que $y = h(x)$. Quan tenim una funció f de dues variables, la gràfica ha de representar conjunts de punts de la forma (x, y, z), tals que $z = f(x, y)$. És per això que per a representar la gràfica d'una funció de dues variables necessitem tres dimensions. Per fer la gràfica tridimensional, partim de tres eixos perpendiculars entre si: als dos eixos horitzontals representem les variables, x i y, i a l'eix vertical representem els valors z que pren la funció.



Funció de dues variables

Hem denominat els eixos amb les lletres $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ i $\boldsymbol{Z}$, respectivament. A cada valor de les variables x i y, els correspon un punt (x, y) del pla que hi ha a la base. Finalment, la funció f associa un valor $z = f(x, y)$ al punt (x, y). D'aquesta manera construïm el **graf** de la funció, que és aquesta mena de llençol que apareix.

A la vista de la gràfica que acabem de mostrar, sembla que podem imaginar-nos el graf d'una funció de dues variables com si es tractés d'un llençol que hi ha per sobre (o per sota, si la funció pren valors negatius) del pla on hi ha els punts (x, y). Una altra manera útil d'imaginar-nos el graf és com si fos la superfície d'una muntanya, de tal manera que per descriure el comportament de la funció ens interessarà saber si el pendent és molt fort o no en una certa direcció, i també on es troben els cims i les valls. Una darrera manera, que ens resultarà intuïtiva per a altres propòsits, com veurem més endavant, és veure el graf de la funció com si es tractés de la superfície d'un pastís que hem col·locat sobre el pla on hi ha les variables x i y (d'ara endavant l'anomenarem **pla *XY***).

Vegem ara com podem usar el Gnuplot per a generar les gràfiques de les funcions de dues variables que hem vist en exemples de la sessió anterior.

Exemple 2.1. Considerem la mitjana geomètrica de dos nombres positius, definida com a funció de dues variables

$$g(x, y) = \sqrt{x\,y},$$

amb domini

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0 \text{ i } y > 0 \right\}.$$

Entrarem al Gnuplot per a fer la gràfica d'aquesta funció. La instrucció del Gnuplot per a fer gràfiques tridimensionals és `splot` (que ve de '*surface* plot'). Les seves opcions són una extensió de les que hi ha per a la instrucció `plot`.

Comencem per entrar la definició de la funció

```
gnuplot > g(x,y) = sqrt(x * y)
```

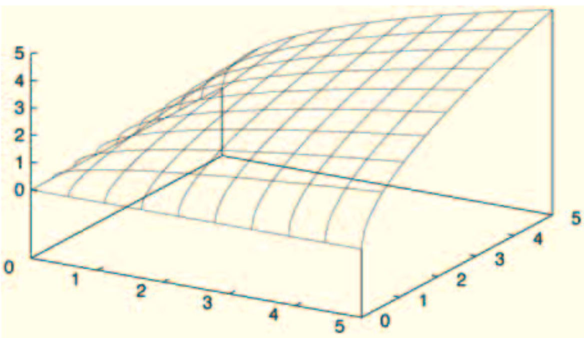
Com que tant la variable `x` com la `y` només han de prendre valors estrictament positius, ens evitarem problemes si ho diem d'entrada

```
gnuplot > set xrange [0 : 5]; set yrange [0 : 5]
```

Per a demanar la gràfica, hem de fer:

```
Gnuplot > splotg(x,y)
```

I obtindrem el resultat que veiem aquí.



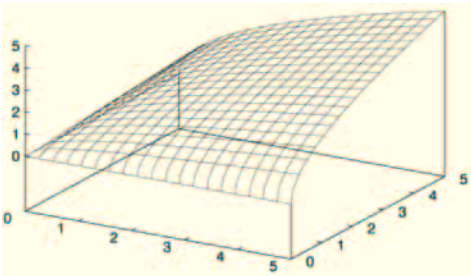
Resultat...

... d'un `splot`

El **graf** de la funció correspondria al conjunt de tots els punts (x, y, z) en què $z = g(x, y)$. A la gràfica que ens dóna el Gnuplot, és la superfície acolorida que sembla un enreixat doblegat. De fet, les línies que formen l'enreixat (en les dues direccions) són tot el que el programa ha usat per a representar la superfície. Dins del Gnuplot, aquestes línies reben el nom de *isosamples*. Per defecte, el programa en calcula deu en cada direcció (les direccions de la x i de la y). Si volem que el programa calculi més línies, podem modificar el valor per defecte d'aquest paràmetre.

Nota

La gràfica apareixerà en color, sempre que no tingueu un monitor en blanc i negre, és clar!



Un splot...

... amb més línies

Fent:

```
gnuplot> set isosamples 20
gnuplot> splot g(x,y)
```

tenim vint línies en cada direcció. L'enreixat és ara més fi, però el programa triga més a mostrar-nos la gràfica.

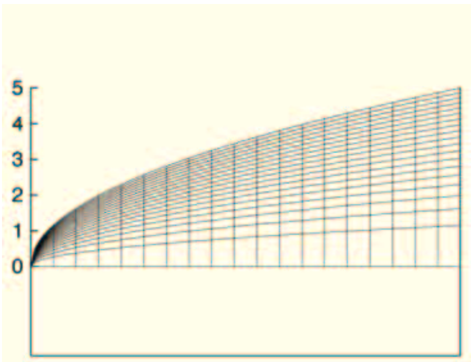
Fixem-nos que el programa ens mostra la gràfica tridimensional amb una certa perspectiva. Si volem, podem modificar aquesta perspectiva amb la instrucció `set view`. Aquesta instrucció especifica dos angles, que serveixen per a girar la gràfica longitudinalment i transversalment. Per defecte, els angles que ens mostra són 60 i 30; si demanéssim uns angles de 0 i 0, ho veuríem tot exactament des de dalt, per la qual cosa no podríem determinar la forma del graf a l'espai.

Nota

També la podem usar *set view* per a modificar les escales. Feu un `help set view` si voleu saber-ne més.

Un splot

... vist de costat



Per a veure la gràfica de costat, de tal manera que tinguem una idea acurada de la pujada que fa, hem de fer

```
gnuplot> set view 90,0
gnuplot> replot
```

La instrucció `replot`, que acabem d'usar, la fem servir quan volem continuar treballant amb una gràfica que ja hem definit.

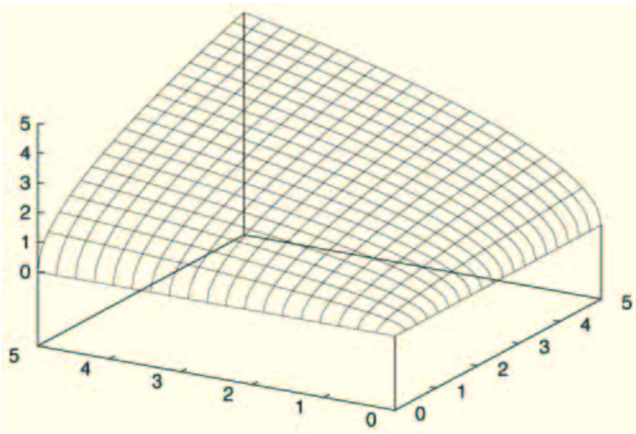
`Replot`

Per a entendre el perquè de la instrucció `replot`, veurem com el **Gnuplot** construeix les gràfiques que li encarreguem. Quan donem una instrucció `plot` o `splot`, el programa calcula una sèrie de punts de mostra (els quals nosaltres podem fer que siguin més o menys usant les instruccions `set samples` i `set isosamples`), i després uneix aquests punts mitjançant línies, que són les que ens mostra i ens permeten fer-nos una idea de com és al gràfica de la funció. Si usem `replot`, el programa fa servir els punts de mostra que ja ha calculat; amb un altre `plot` o `splot` faríem que els tornés a calcular.

Una altra manera de veure la pujada que fa la gràfica és canviant la perspectiva de manera que ho mirem tot des de l'origen de coordenades. Per a justificar això, hem d'entendre què representen els dos nombres que escrivim quan fem un `set view`:

- El primer nombre dóna la perspectiva **vertical** de la gràfica. Quan aquest nombre és 0, estem mirant la gràfica exactament des de dalt (per la qual cosa no veurem quina forma té). Si hi consignem el nombre 90, com abans, estarem mirant la gràfica exactament des del costat, de tal manera que veurem el pla que formen tots els punts de la forma (x, y) com una línia. Finalment, si féssim que fos 180, veuríem la gràfica des de sota (i tampoc no podríem distingir-ne la forma). El valor per defecte d'aquest angle és de 60 graus, i hi podem donar qualsevol valor entre 0 i 180 graus.

- El segon nombre dóna la perspectiva **horitzontal**. Imaginem que el primer nombre està fixat en un cert valor, per exemple 60 graus. Llavors, canviant el segon nombre entre 0 i 360 anirem girant horitzontalment la gràfica. Quan l'angle és 0, tenim l'eix de les x just davant, i l'eix de les y el veiem col·lapsat en un sol punt. Si anem augmentant l'angle, anem girant la figura en el sentit de les agulles del rellotge. El valor per defecte és de 30 graus.



Mirant-ho...

... des de l'origen

Volem fer girar la gràfica transversalment i, per tant, hem de fer

```
gnuplot> set view 60,300
gnuplot> replot
```

Exercici

2.1. Considereu la funció

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2 - x^4 - y^4\right)\, e^{-x^2-y^2}.$$

Per a entrar-la al Gnuplot, cal fer:

```
gnuplot > f(x,y) = (x**2 + y**2 - x**4 - y**4) * exp(-x**2 - y**2)
```

Feu servir les instruccions: `set xrange`, `set yrange`, `set isosamples` i `set view` per a analitzar a fons la gràfica d'aquesta funció. En particular, aneu canviant els angles usant `set view`, fins que vegeu exactament com podeu aconseguir la perspectiva que voleu amb aquesta instrucció.

Nota

Aquest exercici no té cap "solució", sinó que el que heu de fer és "jugar" amb les instruccions de manipulació de gràfiques, fins que us hi familiaritzeu i vegeu les possibilitats que ofereixen.

2.2.1. Superfícies i corbes parametritzades

La representació gràfica de funcions és una eina útil per a visualitzar-ne moltes propietats. Una funció d'una sola variable, de la forma $y = f(x)$, dóna lloc a un conjunt de punts de la forma (x,y), que quan els unim formen una corba dins d'un pla. De la mateixa manera, una funció de dues variables, de la forma $z = f(x,y)$, dóna lloc a un conjunt de punts de la forma (x,y,z), que quan els unim formen una superfície dins d'un espai tridimensional. Ara bé, també hi ha una altra manera de generar corbes i superfícies, que és amb el que anomenem una **parametrització**.

Com que la discussió de superfícies parametritzades pot semblar una mica complexa al principi, el que farem serà començar fent una ullada al cas de dues dimensions i després farem el salt a les tres dimensions.

2.2.2. Dues dimensions

Quan representem una funció com ara $y = f(x) = x^2$, estem tractant amb una funció donada en forma **explícita**. Això és així perquè donat qualsevol valor de x (sempre que estigui dins del domini de la funció), la funció f és una regla que ens diu l'alçada que li correspon.

Per representar una funció explícita, el Gnuplot tria uns quants punts de mostra per als valors de x (per defecte en tria 100), mira quin valor de y correspon a cada punt de mostra i, finalment, uneix tots els punts (x, y). El que en resulta d'unir aquests punts, la gràfica de la funció, és una corba dins del pla XY.

Un tipus diferent de corba dins del pla XY és el que anomenem una **corba parametritzada**. En aquest cas, tant la variable x com la y depenen d'una altra variable, t, que pren valors dins d'un cert interval real.

Exemple 2.2. A la comarca de la Jungla, els estudis estadístics han mostrat que el nivell de despesa de la gent en raquetes de tennis depèn del seu nivell d'ingressos; quan els ingressos són de t milions de pessetes anuals, la despesa anual en raquetes de tenis és de $\log(t)$ (on 'log' significa la funció logaritme). D'altra banda, la despesa telefònica dels habitants també depèn dels seus ingressos, corresponent $\sqrt{t}$ de despesa a uns ingressos t, tot mesurat en milions de pessetes. El que voldríem és veure una gràfica de la relació que hi ha entre la despesa en raquetes de tennis i la despesa telefònica.

Això ho podem fer de dues maneres. Anomenem x la despesa en raquetes i y la despesa en telèfon, mesurades en milions de pessetes. La primera manera consistiria a operar algèbricament amb la informació que tenim fins a obtenir la relació de dependència entre x i y. En aquest cas, faríem:

$$x = \log(t) \implies t = e^x$$

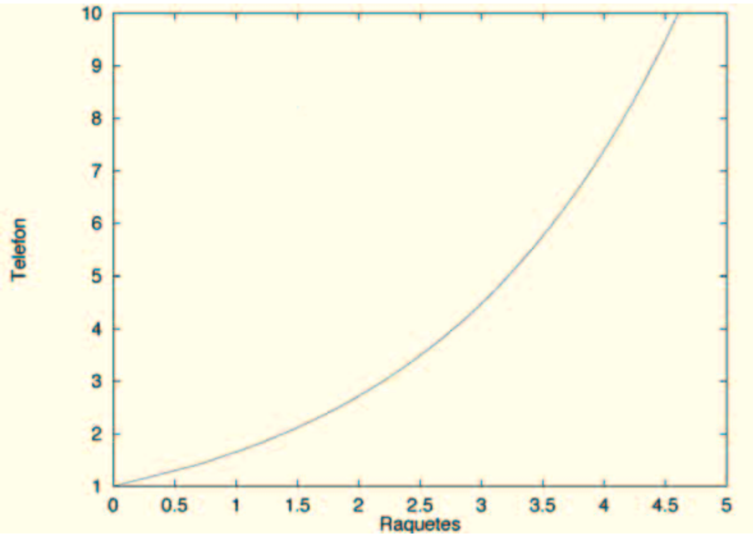
i, per tant,

$$y = \sqrt{t} \quad \text{i} \quad t = e^x \implies y = \sqrt{e^x} = e^{x/2}.$$

Després de fer això, ja podríem representar la funció que relaciona x i y.

Ara bé, hi ha una manera molt més senzilla de generar aquesta gràfica. Consisteix a indicar al programa Gnuplot que a l'eix de les x posi els valors de $\log(t)$ i a l'eix de les y posi els valors de $\sqrt{t}$, i després dibuixi la corba que en resulta. Això és el que s'anomena una **corba parametritzada**. En aquest cas, el **paràmetre** és la variable t. Si suposem que els ingressos varien entre 1 i 100 milions de pessetes l'any, la manera de fer que el Gnuplot ens dibuixi la corba parametritzada és:

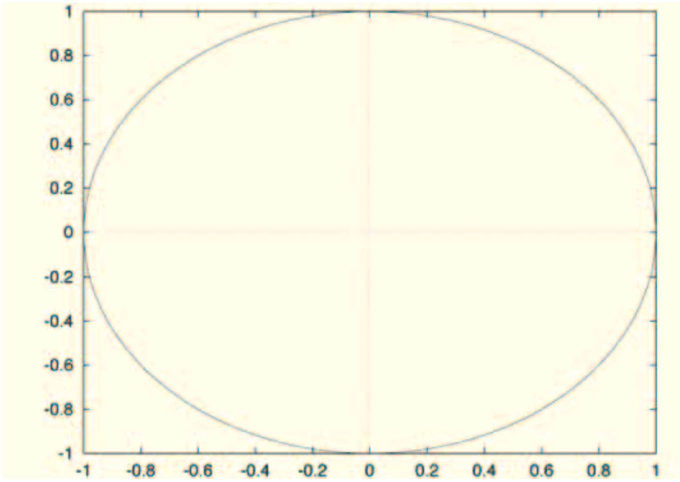
```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set xlabel "Raquetes"
gnuplot> set ylabel "Telefon"
gnuplot> plot [t=1:100] log(t), sqrt(t)
```



Raquetes versus telèfon

Com veiem, una corba parametritzada consisteix en realitat en dues funcions, que a la gràfica apareixen l'una contra l'altra. El que aconseguim amb aquesta operació, que pot semblar una mica artificiosa, és força important. Recordem que una funció de la forma $y = f(x)$ és una relació que, per a cada valor de x, dóna un i només un valor a la variable y. Això posa una limitació molt clara a les corbes que podem obtenir com el gràfic d'una funció. Per exemple, una cosa tan senzilla com una circumferència no pot ser mai la gràfica d'una funció, perquè sempre hi ha valors de x als quals haurien de correspondre dos valors de la variable y. En canvi, qualsevol corba que dibuixem en el pla pot aparèixer com el resultat d'una parametrització.

Per exemple, si t està compresa entre $-\pi$ i π, i fem $x = \sin(t)$ i $y = \cos(t)$, obtindrem una circumferència. Dins del Gnuplot , això ho escriuríem:



Circumferència

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set trange [-pi:pi]
gnuplot> plot sin(t), cos(t)
```

Naturalment, qualsevol funció, com ara $y = x^2$, també la podem representar com a corba parametritzada si fem $x = t$ i $y = t^2$. El que hi ha a continuació són dues formes alternatives d'obtenir la mateixa gràfica:

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set trange [-1:1]
gnuplot> plot t, t**2
gnuplot> set noparametric
gnuplot> plot [-1:1] [0:1] x**2
```

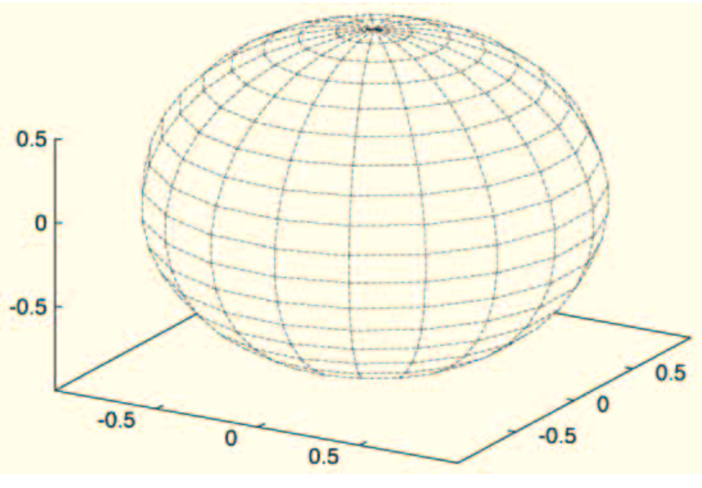
2.2.3. Tres dimensions

Tot el que hem dit abans per a dues dimensions, es generalitza quan considerem més variables.

Una funció explícita amb dues variables té la forma $z = f(x, y)$, i hem vist que la representació gràfica dóna lloc a una certa superfície dins d'un espai tridimensional, més o menys com un llençol deformat.

Una **superfície parametritzada** dins d'un espai tridimensional té dues dimensions (també vindria a ser com un llençol al qual donem una certa forma geomètrica), i per això depèn de dos paràmetres, que en el Gnuplot s'indiquen amb les lletres u i v. Per exemple, l'esfera no la podem representar com la gràfica d'una funció explícita, però la podem obtenir com a superfície parametritzada fent: !

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set urange [-pi:pi]
gnuplot> set vrange [0:pi]
gnuplot> set isosamples 20
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> splot cos(u)*sin(v),sin(u)*sin(v),cos(v)
```



Esfera

Un exemple il·lustratiu

No us preocupeu si les funcions trigonomètriques us semblen una mica esotèriques; el que fem aquí té un caràcter merament il·lustratiu. De fet, aquesta representació no seria massa difícil de justificar, però això ens desviaria una mica i no val la pena perdre-hi temps. Si l'esfera la veieu molt aplanada, en podeu canviar l'aspecte fent `set view ,,,2; replot` (podeu provar algun altre nombre entre 1 i 2). Finalment, la instrucció `set hidden3d` permet que vegem l'esfera com un cos sòlid no transparent; després de mirar la gràfica podeu fer

```
set nohidden3d; replot
```

i veureu la diferència.

Les superfícies parametritzades són una entitat més complexa que les corbes parametritzades; nosaltres no les usarem en aquest curs com un fi en si mateix, sinó que només ens serviran per a entendre la representació tridimensional de dades. Tot el que necessitarem entendre amb relació a representacions parametritzades és:

Recordem que,...

... quan tenim una funció de la forma $y = f(x)$, diem que x és la variable **independent** i y és la variable **dependent**, perquè el valor d'aquesta darrera ve determinat per la funció després de donar a x un valor determinat.

en una corba especificada en forma **no paramètrica**, nosaltres donem els valors de la variable **dependent**, però no els de les variables **independents**.

En canvi,

en una corba especificada en forma **paramètrica**, nosaltres diem com són totes les variables, tant si es tracta de la variable dependent com de les variables independents.

2.3. Representació gràfica de dades

Fins ara hem vist com usar el Gnuplot per a generar gràfiques basant-nos en funcions definides analíticament (és a dir, mitjançant fórmules). Tot seguit estudiarem com es pot generar la gràfica a partir de taules de valors, és a dir, a partir de sèries de dades. Il·lustrarem les diferents situacions que es poden presentar amb uns quants exemples.

Exemple 2.3. Les dades següents representen la quantitat de pluja caiguda a Sant Pedrós de Riussec en els dotze mesos de l'any 1995:

```
10
 2
18
27
20
18
```

```
10
 4
10
24
14
 8
```

Si guardem aquestes dades, tal com aquí apareixen, en un arxiu anomenat `pedros.dat`, llavors les podem visualitzar amb el Gnuplot , fent

```
gnuplot > plot 'pedros.dat'
```

Nota

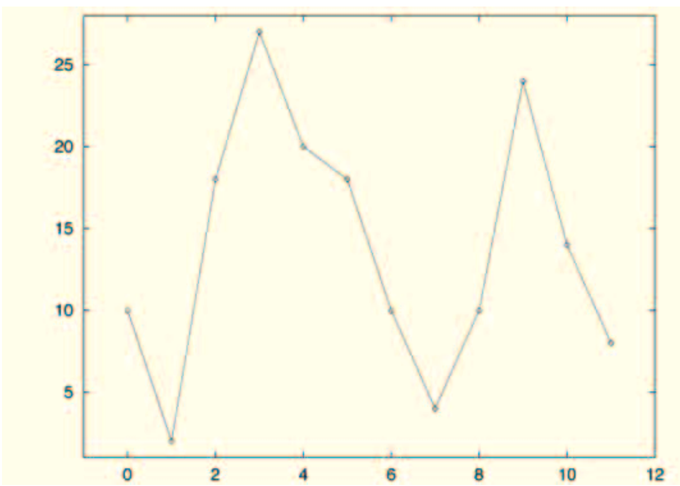
No escriviu l'accent i us estalviareu problemes, forasters.

Això resulta en punts aïllats, que tenen per coordenades cada una de les parelles que tenia el nostre arxiu de dades. Però els punts per si mateixos resulten difícils de veure. Es veu molt millor si unim els punts amb línies i, a més, deixem una mica de marge al voltant de les dades extremes:

```
gnuplot > plot [−1 : 12] [1 : 28] 'pedros.dat' w linesp
```

La pluja...

... a Sant Pedrós



En les instruccions anteriors, hem abreujat `with linespoints` escrivint només `w linesp`. Moltes instruccions del Gnuplot es poden abreujar d'una manera semblant, sempre que no donin lloc a ambigüitats.

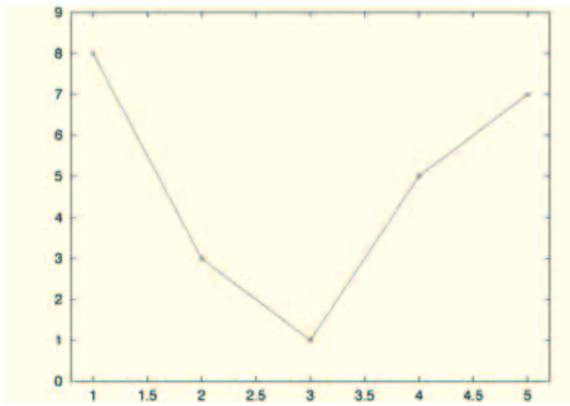
Fixem-nos que, com que el nostre arxiu només conté una sèrie de valors, en la representació gràfica el programa ha associat automàticament el primer valor al 0, el segon a l'1, etc., la qual cosa ja està bé, perquè ens dóna una idea prou acurada de com evoluciona la pluja al llarg de l'any.

Exemple 2.4. Volem representar les dades que tenim a continuació:

1	8
2	3
3	1
4	5
5	7

Per a això, primer haurem de crear un arxiu amb les dades i després donar-hi un nom adient, per exemple `dades0.dat`. Tot seguit cal fer:

```
gnuplot > plot [0.8 : 5.2] [0 : 9]'dades0.dat' w linesp
```



Dades bidimensionals (exemple)

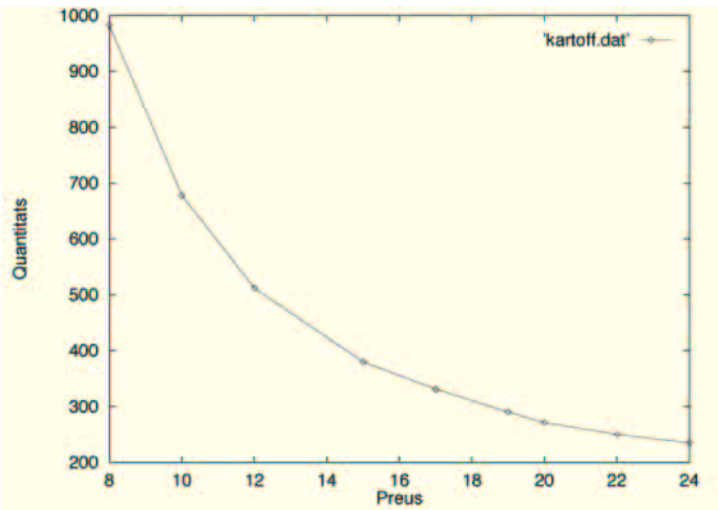
Tot això més o menys ja ho havíem vist anteriorment, però hi ha un detall que és important de remarcar. Si només representem punts sols, la gràfica no canvia si alterem l'ordre de les dades dins de l'arxiu, per exemple, posant la primera línia en darrer lloc. En canvi, quan usem la instrucció `with linespoints`, el que fem és unir els punts en l'ordre en què nosaltres els hem escrit a l'arxiu de dades i, per tant, si posem la primera línia al final de l'arxiu, la gràfica canvia completament. (Feu-ho!)

Exemple 2.5. Considerem ara les dades següents, que corresponen a observacions de quantitats i preus d'intercanvi al mercat de la patata de Kartoffelburg (la primera xifra correspon al preu i la segona, a la quantitat):

```
8  983
10 678
12 512
15 380
17 331
19 290
20 271
22 250
24 235
```

Per a visualitzar aquestes dades, ens anirà bé una gràfica que en un dels eixos tingui els preus i en l'altre les quantitats. Una gràfica com aquesta representarà una entitat ben familiar per a l'economista: una **corba de demanda**. La corba de demanda expressa les quantitats comprades en tant que funció dels preus existents. Quan l'economista veu unes dades com les que acabem de representar, ràpidament les associa a una relació de la forma $q = D(p)$, on q representa les quantitats, p representa els preus i D és la **funció de demanda**, que relaciona ambdues magnituds. Aquesta funció de demanda es representa fent:

```
gnuplot> set xlabel "Preus"
gnuplot> set ylabel "Quantitats"
gnuplot> plot "kartoff.dat" w linesp
```



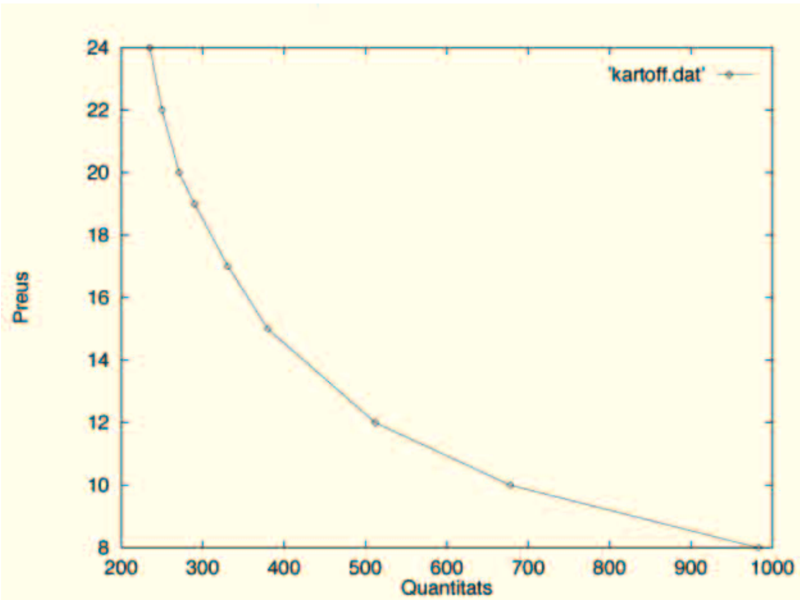
Preus *versus* quantitats

Observem que, com que la primera sèrie corresponia als preus i la segona, a les quantitats, la gràfica ens mostra els preus a l'eix de les abscisses i les quantitats a l'eix de les ordenades. Si us fixeu bé en els vostres textos d'economia, veureu que els economistes solen representar sempre les coses amb els eixos canviats: preus a les ordenades i quantitats a les abscisses. Això no és perquè considerin que els preus depenen de les quantitats, sinó per una tradició que remunta a Alfred Marshall i que ningú no s'ha molestat a canviar. Si volguéssim representar les dades de Kartoffelburg seguint la tradició marshalliana, no ens costaria gaire amb el Gnuplot .

Alfred Marshall

(Londres 1842-Cambridge 1924), economista anglès considerat un dels fundadors de l'escola neoclàssica, ha estat un dels economistes més infuents de tots els temps. Molts dels elements bàsics de l'instrumental analític de l'economista modern, com ara l'anàlisi d'equilibri parcial, són aportació seva.

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set xlabel "Quantitats"
gnuplot> set ylabel "Preus"
gnuplot> plot "kartoff.dat" using 2:1 w linesp
```



Quantitats *versus* preus

Amb la instrucció `using 2:1`, hem dit al Gnuplot que faci una gràfica de la segona sèrie contra la primera. Aquesta instrucció també serveix quan tenim més de dues sèries de dades. Per exemple, si tenim un arxiu amb cinc sèries de dades i volem representar la quarta contra la segona, ho farem amb una instrucció com ara:

```
gnuplot > plot "dades.dat" using 4 : 2 with linespoints
```

Exemple 2.6. Representació tridimensional de dades

Volem representar les dades donades per la taula següent:

	10	20	30
1	11	21	31
2	8	14	20
3	19	29	39

El primer que hem de fer és crear un arxiu que contingui les dades, amb una línia per a cada correspondència; per exemple, una línia hauria de dir que a 3 i 10 correspon 19, i ho faríem escrivint

```
3 10 19
```

Només hem de tenir cura de deixar un o més espais en blanc entre cada dos nombres.

Ara bé, la manera com escrivim les línies dins de l'arxiu de dades pot ser molt important, en aquest cas, per a obtenir la representació gràfica que desitgem. Només hi ha una excepció: si només volem representar un punt per a cada correspondència, llavors no importa com introduïm les dades. Però, si volem veure les dades interconnectades mitjançant línies, sí que és important com les escrivim dins de l'arxiu. Hem d'aconseguir que el Gnuplot dibuixi una línia per a cada columna i una altra línia per a cadascuna de les files. Mirant les gràfiques que hem fet fins ara, es pot observar que la combinació de línies en les dues direccions apareix a la superfície que veiem quan representem funcions de dues variables. ❗

Hi ha més d'una manera de llegir les dades d'una taula com la que tenim. Una manera és començar per la primera fila, llegint successivament les tres columnes que hi ha, després passaríem a la segona fila i així successivament. Per entendre'ns, direm que això és llegir les dades **per files**. Per donar les dades així al Gnuplot , només hem d'assenyalar el moment en què passem a una fila nova, i ho fem deixant una línia en blanc. En el nostre exemple, crearíem un arxiu fent:

```
1 10 11
1 20 21
1 30 31
```

```
2 10 8
2 20 14
2 30 20

3 10 19
3 20 29
3 30 39
```

Anomenem aquest arxiu `dades1.dat`. Per a representar aquest arxiu, hem de tenir en compte com està estructurat el Gnuplot . Quan volem fer un `splot` amb sèries de dades, tenim diverses eleccions, segons si volem que algun dels eixos sigui triat automàticament (com en l'exemple 2.3 de la pluja a Sant Pedrós), o bé si volem ser nosaltres qui l'especifiquem. En el cas d'una gràfica bidimensional, el programa ho pot inferir amb facilitat: si només hi ha una sèrie, triarà l'eix de les X automàticament, i si n'hi ha dues, representarà l'una contra l'altra.

En el cas de gràfiques tridimensionals, hi ha més possibilitats d'ambigüitat, i per això els autors del Gnuplot han fet que, si nosaltres especifiquem més d'una de les variables, ho hàgim d'assenyalar dient que es tracta d'una gràfica **paramètrica**. Fixeu-vos que això és més aviat un problema de comunicació entre el programa i l'usuari que no pas cap qüestió filosòfica profunda que ens hagi de treure la son. Així, per a representar l'arxiu que hem creat amb el Gnuplot haurem de fer:

Gràfics no paramètrics

Per tal que vegem bé la diferència, més endavant hi ha un exemple de gràfic en tres dimensions **no paramètric**.

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> splot 'dades1.dat' with linespoints
```

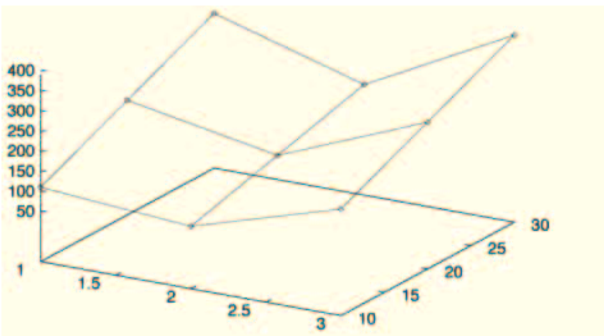
Si en comptes de llegir per files, ho fem **per columnes**, això també funciona per al Gnuplot . Per a veure-ho, podem crear un arxiu anomenat `dades2.dat`, amb el contingut següent:

```
1 10 11
2 10 8
3 10 19
```

```
1 20 21
2 20 14
3 20 29

1 30 31
2 30 20
3 30 39
```

Podeu comprovar ara que obtenim la mateixa gràfica que abans si fem:

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> splot 'dades2.dat' with linespoints
```



Dades tridimensionals (exemple)

Exemple 2.7. Dades qualitatives

Suposem que estem fent un estudi estadístic, i hem agrupat la població en dos tipus de categories: inclinacions polítiques i afeccions esportives. Per a cada categoria, hem determinat la mitjana d'ingressos de la gent que hem enquestat. Els resultats són els que presentem tot seguit, en els quals, per tal de mantenir la confidencialitat, indiquem les diferents categories amb lletres (majúscules per als esports, minúscules per als partits polítics).

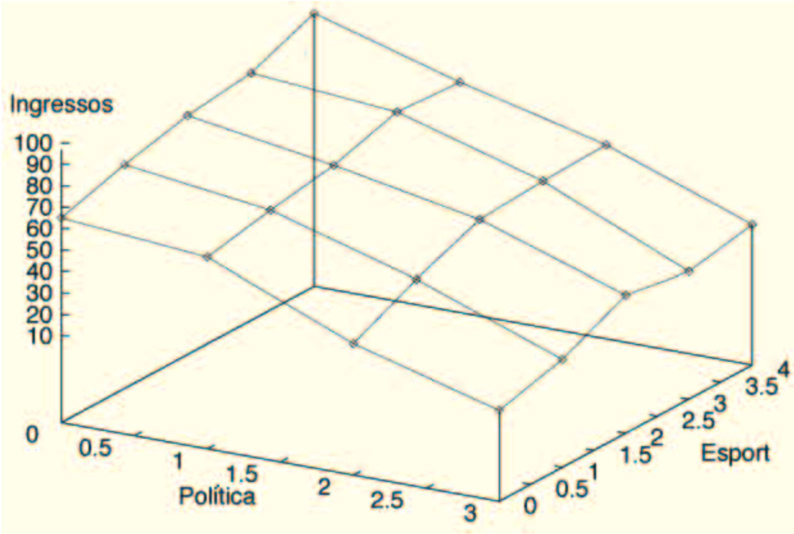
		Política			
		a	**b**	**c**	**d**
	A	65	59	31	12
	B	74	65	45	20
Esport	**C**	81	70	57	34
	D	85	79	59	29
	E	97	77	60	35

Per a representar aquestes dades, crearem un arxiu anomenat `politica.dat`, que tingui el contingut següent:

```
65
59
31
12

74
65
45
20

81
70
57
34

85
79
59
29

97
77
60
35
```

Notem que, amb el caràcter qualitatiu de les categories, per a visualitzar les dades ens interessarà ara usar una representació **no paramètrica**. Així, el que fem és:

```
gnuplot> set noparam
gnuplot> splot 'politica.dat' w linesp
```



Política contra esport

2.4. Anem per parts

El que hem vist fins ara de les funcions de dues variables no s'assembla gaire al que ja sabem fer amb funcions d'una sola variable. El que sí que és clar és que amb dues variables les coses es compliquen força més. Ara bé, moltes de les coses que ens interessarà saber sobre funcions de dues variables, les podem derivar del que sabem de funcions univariants. L'estratègia és senzilla: si fixem arbitràriament el valor d'una de les dues variables i deixem que l'altra vagi canviant, haurem obtingut una funció univariant. Per veure exemples d'això, fixeu-vos bé en els exercicis 1.2, 1.4 i 1.5.

Exemple 2.8. En el darrer exercici esmentat definim una funció $f(x)$ que és el resultat de trobar la mitjana geomètrica entre els nombres 2 i x:

$$g(x,y) = \sqrt{x\,y} \quad \text{i} \quad f(x) = g(x,2) = \sqrt{2\,x}.$$

Ens podríem preguntar si ens serveix de gaire, això. Una de les coses que més interessen els economistes és saber si una funció té valors màxims o mínims (pensem en guanys i en costos); doncs bé, l'exemple que estem veient ens permet fer la inferència que la funció g, la de dues variables, no té cap valor màxim. I el motiu és ben senzill: la funció f, que és la funció g quan fixem el valor d'una de les variables en 2, no té cap valor màxim, ja que l'arrel quadrada de $2x$ creix sense límits quan x es fa gran.

Fem una inferència negativa...

... en el sentit que alguna cosa **no** pot succeir. De fet, quan estudieu sistemàticament com es poden trobar màxims i mínims, veureu que el tipus de tècniques que usem sempre es basen en inferències negatives.

Abans hem vist la gràfica de la funció g, i en la resolució de l'exercici 1.5 vam fer la gràfica de la funció f. Ens podríem preguntar com es relacionen les dues gràfiques. És aquí que ens serà d'un gran ajut imaginar-nos la gràfica de la funció de dues variables g com un pastís. La funció f resulta de fixar el valor de la variable y en 2. Així, doncs, prendrem un ganivet matemàtic, farem un tall al pastís al llarg de la recta donada per $y = 2$ i mirarem el perfil que queda al llarg del tall que hi hem fet: aquest perfil correspon exactament a la gràfica de la funció f.

Això pot resultar una mica confús explicat amb paraules; tornarem a fer el procés amb el Gnuplot, pas a pas. Comencem entrant les definicions i fixant el recorregut de les variables:

```
gnuplot> g(x,y) = sqrt(x*y)
gnuplot> f(x) = g(x,2)
gnuplot> set xrange [0:5]
gnuplot> set yrange [0:5]
```

Per a visualitzar el perfil que queda quan tallem la funció al llarg de $y = 2$, definim una nova funció, que és senzillament el resultat de descartar tot el que hi ha per a valors de y inferiors a 2:

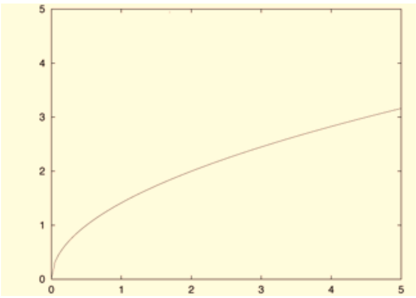
```
gnuplot > h(x, y) = (y < 2)?0 : g(x, y)
```

El que acabem d'escriure vol dir que la funció h val 0 si $y < 2$, i coincideix amb g quan y 2. Per a ressaltar més els perfils, fem:

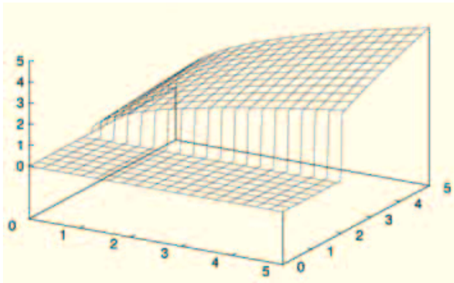
```
gnuplot > set isosamples 20
```

Ara ja estem llestos per comprovar l'afirmació que hem fet que la gràfica de la funció f coincideix amb el perfil que queda després de tallar la funció g per $y = 2$.

```
gnuplot> plot f(x)
gnuplot> splot h(x,y)
```



Gràfic de $\sqrt{2x}$



Gràfic de $\sqrt{xy}$ tallat a $y=2$

Un tall com el que acabem de fer a la funció g s'anomena en llenguatge formal una **secció vertical**. Nosaltres usarem les seccions verticals, que no són res més que funcions d'una variable, per a fer inferències en relació amb la funció de dues variables. Per exemple, abans ja hem esmentat que el fet que hi hagi una secció vertical que no té un valor màxim, implica immediatament que la funció de dues variables tampoc no pot tenir cap valor màxim. Les seccions verticals o, més ben dit, les seves derivades, també tenen un paper fonamental en el còmput de les derivades de funcions de dues variables.

Talls més sofisticats

En els exemples 1.2, 1.4 i 1.9, ens hem trobat amb talls més sofisticats que el que s'obté quan mantenim fix el valor d'una de les variables.

Exemple 2.9. Recordem que a Platalònia la distància a la capital d'un punt amb coordenades (x, y) és

$$D(x, y) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-5)^2}.$$

En un dels exercicis, se'ns demanava computar la funció d'una variable

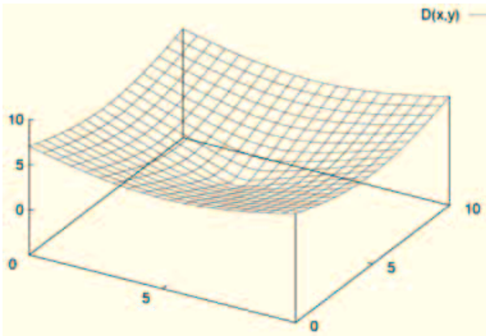
$$d(a) = D(a, a) = \sqrt{(a-5)^2 + (a-5)^2} = \sqrt{2}\,|a-5|.$$

Aquesta nova funció correspon a una secció vertical al llarg de la diagonal de Platalònia. Podem veure tot això usant el Gnuplot .

```
gnuplot> set xrange [0:10]
gnuplot> set yrange [0:10]
gnuplot> set zrange [0:10]
gnuplot> set isosamples 20
gnuplot> D(x,y) = sqrt( (x-5)**2 + (y-5)**2 )
gnuplot> d(x) = D(x,x)
```

Gràfic de...

...la distància a Platalònia

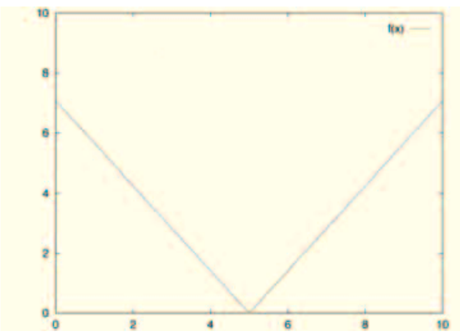


Abans de res, fem la gràfica D i notem que estem tractant amb una funció no lineal. Per veure millor el gràfic, n'hem canviat una mica la perspectiva:

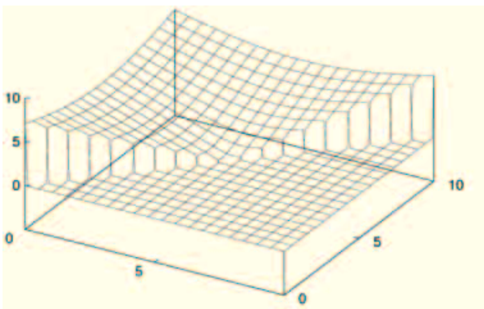
```
gnuplot > set view 45
```

Finalment, definim la funció que ens permetrà visualitzar la secció vertical al llarg de la diagonal, i fem les gràfiques:

```
gnuplot> h(x,y) = (x>y) ?  0 :  D(x,y)
gnuplot> plot d(x)
gnuplot> splot h(x,y)
```



Gràfic de $\sqrt{2}\,|x-5|$



Un tall al llarg de la diagonal

Per a poder sistematitzar la descripció de qualsevol possible tall vertical que fem, és bo introduir una mica de llenguatge. El que ens interessa és poder expressar el que seria una **direcció** determinada, a partir d'un punt qualsevol del domini (és a dir, d'un punt del pla $\mathbb{R}^2$). La idea pot semblar una mica artificiosa, però en el fons és ben senzilla; consisteix en dos passos:

1) En primer lloc, definim el que significa una **direcció des de l'origen de coordenades**. Ho hem de fer de la manera més senzilla: **qualsevol** vector ens assenyala una direcció des de l'origen de coordenades. Fixeu-vos que aquí tant la llargada del vector com la seva orientació són irrellevants: la direcció és donada per la recta que uneix l'origen amb el vector en qüestió i, per tant, qualssevol dos vectors situats sobre la mateixa recta que passa per l'origen motiven la mateixa direcció (és per això que se sol definir la direcció prenent només vectors de llargada unitària; nosaltres aquí no ho farem, per simplificar l'exposició). Formalment, donat un vector (a, b) del pla, la direcció des de l'origen a aquest vector és la recta formada per tots aquells (x, y) tals que $x = a\,t$ i $y = b\,t$, per a algun nombre real t.

2) En segon terme, definim una direcció des d'un vector qualsevol del pla, com la traslació a aquest vector d'una direcció des de l'origen. Formalment, si partim d'un vector (x_0, y_0), la direcció del vector (a, b) és la recta formada per tots aquells (x, y) tals que $x = x_0 + a\,t$ i $y = y_0 + b\,t$.

Noteu que...

... t ha de ser el mateix per a x i per a y, perquè altrament la qüestió no té cap gràcia.

Tot això pot semblar una mica confús, per tant, ho il·lustrarem amb un exemple.

Exemple 2.10. Direccions en el pla

Volem veure en una gràfica la direcció des de l'origen del vector $(2, -3)$, i després la mateixa direcció, però des del vector $(1, 2)$.

Per a dibuixar amb el Gnuplot la direcció des de l'origen del vector $(a, b) = (2, -3)$, hem d'especificar la recta formada per tots els punts (x, y) tals que, per a algun nombre t, siguin $x = 2\,t$ i $y = -3\,t$. Això és precisament el que havíem definit abans com una corba parametritzada dins del pla. Justament! Fer la gràfica d'aquesta direcció és la cosa més senzilla del món per a uns experts en el Gnuplot com som nosaltres.

Comencem per dir que volem una corba parametritzada i quina part del pla volem veure:

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set xrange [-5:5]
gnuplot> set yrange [-5:5]
```

Ara farem que el Gnuplot marqui tots els nombres enters als eixos:

```
gnuplot> set xtics -5, 1, 5
gnuplot> set ytics -5, 1, 5
```

La seqüència d'instruccions...

... és "límit inferior, increment, límit superior'', per a cada eix.

Primer farem que ens dibuixi el vector $(2,-3)$. Li direm que no ens posi senyals, que ja sabem de què va la cosa.

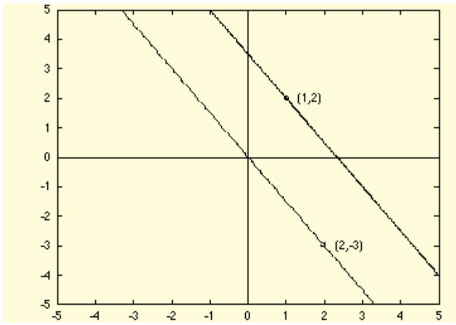
```
gnuplot> set nokey
gnuplot> set arrow to 2,-3
gnuplot> plot 2,-3
```

Bé, ara ja podem dibuixar la recta que marca la direcció des de l'origen donada pel vector $(2,-3)$.

$$\texttt{gnuplot} > \texttt{plot2} * \texttt{t}, -3 * \texttt{t}$$

Per a veure la mateixa direcció, però des del vector $(1,2)$, el que farem serà dibuixar a la mateixa gràfica la recta paramètrica de $x = 1 + 2\,t$ i $y = 2 - 3\,t$, a més de la recta que ja hi havíem dibuixat. També posarem un punt sobre el vector $(1,2)$ i una indicació a cadascun dels dos vectors. Observeu que, si una línia és massa llarga, sempre la podem trencar i indicar al Gnuplot que encara no hem acabat posant una \ al final de la línia:

```
gnuplot> set label "(1,2)" at 1.3,2
gnuplot> set label "(2,-3)" at 2.3,-3
gnuplot> plot 2*t, -3*t,
> 1 + 2*t, 2 - 3*t,
> 1, 2 with points
```



Gràfic

Direccions en el pla

Aquesta és la gràfica que finalment s'obté. Fixeu-vos que la direcció des del vector $(1, 2)$ és un desplaçament paral·lel de la direcció des de l'origen.

Una petita observació abans de concloure l'exemple. Quan hem estat fent fer al Gnuplot un munt de coses que el desvien del seu comportament habitual (mode paramètric, sagetes, lletres enmig del gràfic, etc.), és bo acabar tornant-ho a posar tot als seus valors per defecte, si és que volem continuar treballant amb el programa. En aquest cas, faríem

```
gnuplot> set noparam
gnuplot> set noxtics; set xtics
gnuplot> set noytics; set ytics
gnuplot> set noarrow
gnuplot> set nolabel
gnuplot> set autoscale
gnuplot> set view 60,30,1,1
```

Si alguna vegada...

... us heu trobat coses rares al Gnuplot, les instruccions anteriors tornen a posar-ho (gairebé) tot tal com està quan s'engega el programa.

Després de saber com es treballa amb direccions en el pla, podem definir qualsevol tipus de tall vertical en una funció amb dues variables. !

Exemple 2.11. Sigui $f(x, y) = 50 - x^2 - y^2$. Per a definir un tall vertical qualsevol, en tenim prou amb dir:

- un punt per on ha de passar el tall, per exemple, el punt $(1, 2)$;
- la direcció del tall, per exemple, la del vector $(2, -3)$.

Formalment, la funció que resultaria d'aquest tall és la funció univariant:

$$g(t) = f(1 + 2\,t, 2 - 3\,t) = 3 - (1 + 2\,t)^2 - (2 - 3\,t)^2.$$

Nosaltres deixarem que sigui el Gnuplot qui faci els còmputs:

```
gnuplot> f(x,y) = 3 - x**2 - y**2
gnuplot> g(t) = f(1+2*t,2-3*t)
```

Per a fer la gràfica de la funció univariant (el tall), podem fer (valors de t entre -1 i 2 fan que x i y estiguin entre -5 i 5):

```
gnuplot > plot [t = −1 : 2] g(t)
```

Per a veure el tall dins de la gràfica tridimensional, hem de fer com en els exemples anteriors, definir el valor de la funció com a zero en un dels costats. I per a fer això, cal expressar la recta que ens dóna la direcció en forma d'equació, en comptes de fer-ho en forma paramètrica com la teníem fins ara. Observem que:

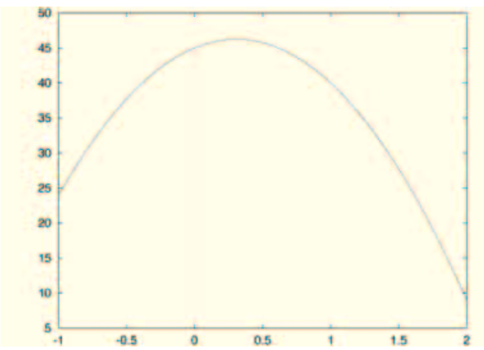
$$x = 1 + 2\,t \longrightarrow t = \frac{x-1}{2}.$$

Per tant,

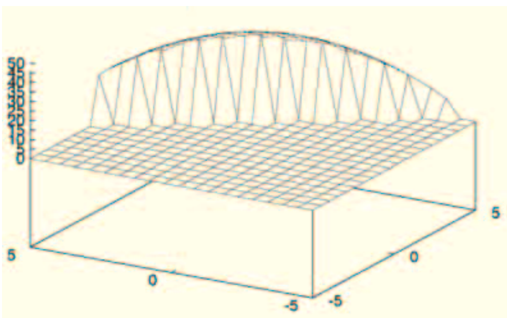
$$y = 2 - 3\,t = \frac{-3\,x + 7}{2} \longrightarrow 3\,x + 2\,y = 7.$$

Bé, ara ja podem definir la funció f tallada al llarg de la recta que ens interessa. També posem els altres paràmetres, perquè s'entengui bé.

```
gnuplot> h(x,y) = (3*x+2*y<7) ?  0 :  f(x,y)
gnuplot> set isosamples 20
gnuplot> set view 60,300
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> splot [-5:5] [-5:5] h(x,y)
```



Tall en dues dimensions



Tall en tres dimensions

Els talls o seccions verticals són els que més ens interessaran en el futur. Si volguéssim complicar les coses, podríem definir talls encara més sofisticats, per exemple el que resultaria de definir, a partir d'una funció f de dues variables, la funció univariant $u(t) = f(t^2, t^3)$, i d'altres per l'estil. Nosaltres ho ignorarem, però és bo esmentar-ho perquè us adoneu que és possible definir talls (és a dir, funcions univariants) de moltes menes a partir d'una funció de dues variables.

2.5. Mapes d'alçàries i corbes de nivell

Els afeccionats a l'excursionisme possiblement estan familiaritzats amb **mapes topogràfics**, que són mapes amb indicació de les alçàries dels punts mitjançant una sèrie de corbes que connecten punts que es troben a la mateixa altitud. Aquestes corbes són anomenades **corbes de nivell**, perquè resseguint-ne una un es manté al mateix nivell. Hem vist que una de les maneres possibles d'imaginar la gràfica d'una funció de dues variables, és com si fos una muntanya (o més aviat com una regió amb accidents geogràfics: muntanyes i valls). No ens ha d'estranyar, doncs, que el recurs de les corbes de nivell emprat als mapes topogràfics també ens serveixi a nosaltres per a simplificar la representació de funcions de dues variables.

Observem que les corbes de nivell no les representem en tres dimensions, sinó en dues. Les corbes de nivell són precisament una manera de tenir informació sobre la tercera dimensió (l'altitud), sense necessitat de dibuixar-la.

Per a determinar una corba de nivell, hem de fixar una certa altitud, és a dir, un cert valor de la z, i llavors unir tots els punts (x, y) que tenen la propietat que $f(x, y) = z$.

Exemple 2.12. Sigui $g(x, y) = \sqrt{xy}$ la mitjana geomètrica dels nombres x i y. La corba de nivell 4 està formada per tots aquells parells (x, y), la mitjana geomètrica dels quals és 4. Per exemple $(4, 4)$, $(2, 8)$ i $(8, 2)$ estan tots sobre aquesta corba de nivell.

Vegem com podem usar el Gnuplot per a fer gràfiques de corbes de nivell. Normalment, el Gnuplot dibuixa les corbes de nivell dins de la mateixa gràfica tridimensional.

Comencem entrant les dades i preparant-les:

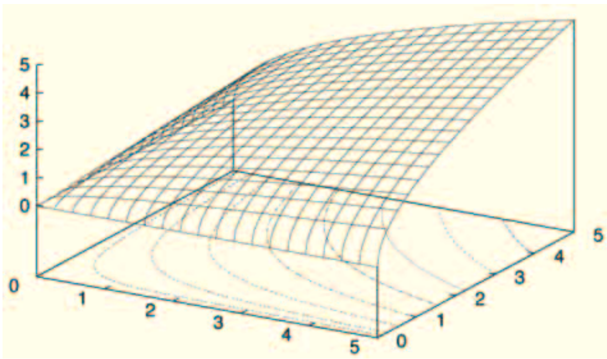
```
gnuplot> set isosamples 20
gnuplot> set autoscale
gnuplot> g(x,y) = sqrt(x*y)
```

El que permet dibuixar les corbes de nivell és la instrucció

```
gnuplot > setcontour
```

Ara demanem que ens dibuixi vuit corbes de nivell

```
gnuplot > set cntrparam levels auto8
```



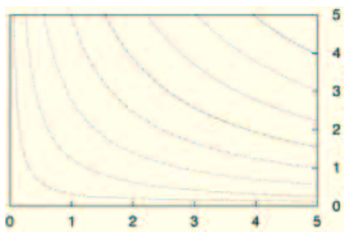
$\sqrt{xy}$ amb corbes de nivell

Ara podem veure que en fer:

```
gnuplot >  splot g(x,y)
```

la gràfica que en resulta té les corbes de nivell dibuixades sobre el pla XY.

Normalment, els mapes de corbes de nivell no es dibuixen dins d'una gràfica tridimensional com el que hi ha aquí, sinó que es representen en una gràfica bidimensional. Per obligar el Gnuplot a fer això hem d'usar una mica de "força bruta". Primer hem de posar la perspectiva just perpendicular sobre la gràfica:



Corbes de nivell de $\sqrt{xy}$

Finalment ja podem veure el mapa de corbes de nivell representat només sobre el pla:
`gnuplot> replot`

```
gnuplot > set view 0,0
```

Tot seguit diem que no ens ensenyi res de la gràfica:

```
gnuplot > set nosurface
```

Exemple 2.13. Considerem ara la funció $f(x, y) = x^2 + y^2$. La corba de nivell 4 està formada per tots aquells parells (x, y) que compleixen

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = 4.$$

Potser alguns de vosaltres heu vist anteriorment que l'equació descriu la circumferència de radi 2 ($2 = \sqrt{4}$) centrada en l'origen de coordenades. En qualsevol cas, nosaltres no ens n'hem de preocupar, ja que el Gnuplot ens mostrarà la gràfica de les corbes de nivell:

```
gnuplot> f(x,y) = x**2 + y**2
gnuplot> set contour
```

Ara hem d'especificar exactament que volem les corbes que corresponen als nivells 4, 16, 32, 64 i 128:

```
gnuplot> set xrange [-10:10]
gnuplot> set yrange [-10:10]
gnuplot> set cntrparam levels discrete 4, 16, 32, 64, 128
```

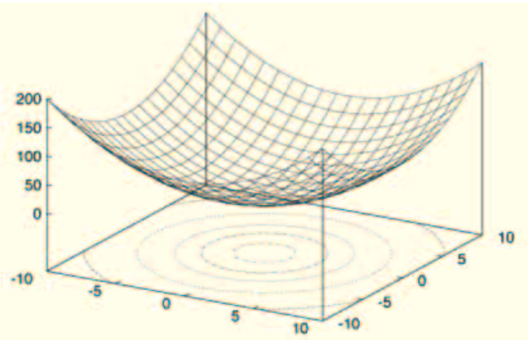
Per a obtenir la gràfica de la funció en tres dimensions, fem:

```
gnuplot> set view 60,30
gnuplot> set surface
gnuplot> splot f(x,y)
```

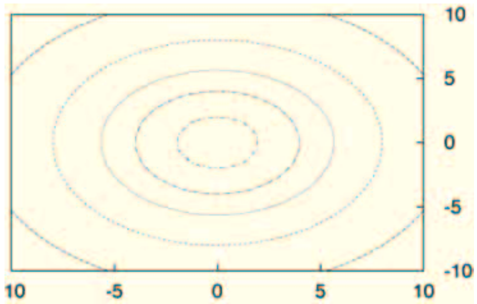
La gràfica amb les corbes de nivell soles surt de:

```
gnuplot> set view 0,0
gnuplot> set nosurface
gnuplot> replot
```

I, així, obtindrem el resultat que presentem tot seguit.



Gràfic de x^2+y^2



Corbes de nivell de x^2+y^2

2.6. Derivem, però només parcialment

Quan s'estudien les funcions univariants, es passa bona part del temps parlant de la derivació. Recordem que la **derivada d'una funció univariant** en un punt x_0 es defineix com el límit

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

que també es pot escriure com

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

En la darrera expressió, h significa l'increment de la variable x. Si indiquem amb y els valors que pren la funció, és a dir, fem $y = f(x)$, llavors l'increment de la variable y en el punt $y_0 = f(x_0)$ és donat per $\Delta y_0 = f(x_0+h) - f(x_0)$, i l'increment de la variable x és $\Delta x_0 = h$, per la qual cosa veiem que la derivada és el límit del quocient $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$ entre l'increment de la funció i l'increment de la variable.

Ara bé, amb dues variables ens trobem, d'entrada, que no té per què haver-hi un sol increment, sinó que n'hi pot haver un per a cada variable. En aquest cas, quin dels dos increments hem d'indicar al quocient? D'entrada, la qüestió no sembla òbvia i més si tenim en compte que la importància de la derivada en el càlcul univariant és donada pel paper que té en tant que aproximació a la funció al voltant del punt en qüestió.

Abans d'aventurar-nos en terrenys nous, el que farem és tractar de treure el màxim partit de tot el que ja coneixem. Suposem que el nostre objectiu és analitzar una funció bivariant $g(x,y)$. Ja que estem parlant de derivades, i el que sí que sabem amb certesa és com es poden trobar derivades de funcions univariants, el que farem serà veure com són les derivades de les seccions verticals de g, que ja sabem que no són res més que funcions univariants.

Jacques Beroulli i Nicolaus Bernouilli...

... van fer servir per primera vegada les derivades parcials en diversos estudis, però van ser A. Fontaine des Bertins, Euler, Clairut i D'Alembert qui van crear la teoria de derivades parcials.

Anomenem **derivades parcials** les derivades de les seccions verticals que resulten quan fixem el valor d'alguna de les variables.

Exemple 2.14. Sigui

$$g(x,y) = 4\,x^3 + 3\,x^2\,y - 2\,x\,y^2 - 5\,x + y^3 + 7.$$

Si mantenim el valor de y fix al nivell 0, obtindrem la secció vertical:

$$g_0(x) = g(x,0) = 4\,x^3 - 5\,x + 7.$$

La derivada d'aquesta funció en un punt x_0 és

$$g_0'(x_0) = 12\,x_0^2 - 5.$$

Anomenem aquesta darrera derivada la **derivada parcial** de g respecte de x en el punt $(x_0,0)$, i ho anotem com

$$\frac{\partial g}{\partial x}\,(x_0,0) = 12\,x_0^2 - 5.$$

D'altra banda, quan fixem $y = 1$, tenim

$$g_1(x) = g(x,1) = 4\,x^3 + 3\,x^2 - 7x + 8.$$

I la derivada parcial corresponent és

$$\frac{\partial g}{\partial x}\,(x_0,1) = 12\,x_0^2 + 6\,x - 7.$$

En general, si fixem el valor de y en un cert valor y_0, i fem una secció vertical al llarg d'aquest valor, la derivada parcial de g respecte de x en el punt (x_0,y_0) és donada per

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = g_{y_0}'(x_0) = 12\,x_0^2 + 6\,x_0\,y_0 - 2\,y_0^2 - 5.$$

De la mateixa manera definim la derivada parcial de g respecte de y en el punt (x_0, y_0)

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 3\,x_0^2 - 4\,x_0\,y_0 + 3\,y_0^2.$$

Més endavant veurem que les derivades parcials ens permeten trobar sense dificultats la derivada, en el sentit més general, d'una funció multivariant.

Derivades direccionals

Les derivades parcials són les derivades de les seccions verticals que obtenim en tallar la funció al llarg de les direccions dels eixos. Posats a derivar seccions verticals, també podríem trobar les derivades de les seccions que obtenim al llarg de qualsevol direcció. Això és el que s'anomenen **derivades direccionals**.

Exemple 2.15. Considerem la funció que hem vist abans:

$$g(x, y) = 4\,x^3 + 3\,x^2\,y - 2\,x\,y^2 - 5\,x + y^3 + 7.$$

Considerem la secció vertical que passa pel punt $(0, 0)$ i té la direcció del vector $(1, -1)$. Definim la derivada direccional de g en el punt $(0, 0)$ i en la direcció del vector $(1, -1)$, com la derivada de la funció d'una variable, quan $t = 0$:

$$u(t) = g(t, -t) = -2\,t^3 - 5\,t + 7.$$

Per tant,

$$u'(t) = -6\,t^2 - 5 \longrightarrow u'(0) = -5.$$

La derivada direccional és -5, la qual cosa ens indica que el tall vertical (i, per tant, la funció g) decreix a partir de $(0, 0)$, si ens movem en la direcció del vector $(1, -1)$. (Recordem que una derivada negativa indica que la funció és decreixent.)

Com hem vist, la derivada direccional ens permet saber si una funció creix o decreix en una certa direcció.

Per exemple,...

... per tal que un punt sigui un màxim local, la derivada direccional en aquell punt ha de ser ≤ 0, qualsevol que sigui la direcció que considerem. És a dir, la funció no pot creixer en cap direcció.

Una de les peculiaritats que es presenten en funcions de dues variables en relació amb les funcions univariants és que, atès que a partir d'un cert punt hi ha moltes direccions possibles, ens podem trobar amb punts on la funció té un mínim al llarg d'una certa direcció, però també té un màxim al llarg d'una altra direcció. Un punt amb aquestes característiques rep el nom de **punt de sella**. Vegem un exemple típic d'aquesta situació. !

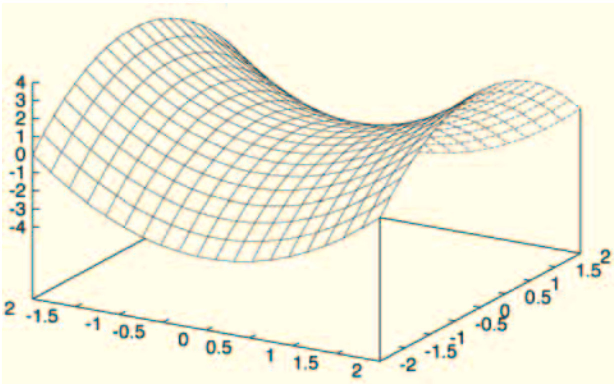
Exemple 2.16. Considerem la funció

$$f(x, y) = x^2 - y^2,$$

Mostrarem ara, amb l'ajut del Gnuplot , que l'origen de coordenades és un punt de sella de f.

Abans de res, fem una ullada a la gràfica de la funció al voltant de l'origen:

```
gnuplot> f(x,y) = x**2 - y**2
gnuplot> set isosamples 20
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> splot [-2:2] [-2:2] f(x,y)
```



Punt de sella...

... de $x^2 - y^2$

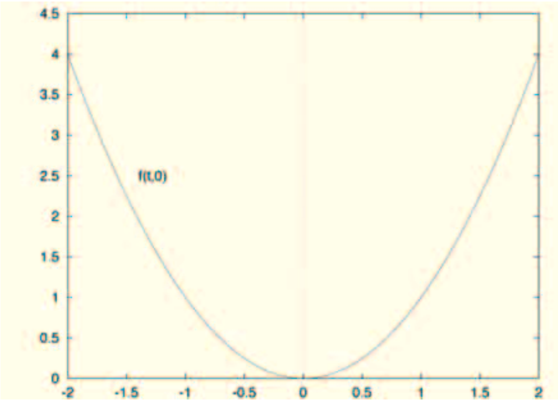
Veiem que la gràfica té una certa semblança amb una sella de muntar a cavall, que és d'on ve el seu nom.

Potser es pot comprovar que, vista des de l'origen, la funció creix en l'eix de les X i decreix en el de les Y. Verifiquem-ho amb el Gnuplot . Per a veure la gràfica en la direcció de les X, fem:

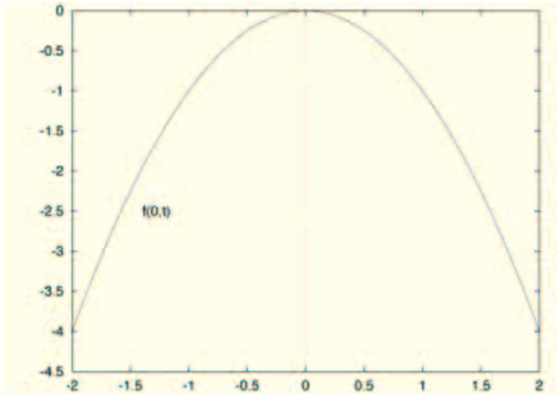
```
gnuplot> set nokey
gnuplot> set label "f(t,0)" at -1.4,2.5
gnuplot> plot [-2:2] f(t,0)
```

I per a obtenir la gràfica en la direcció de les Y, fem:

```
gnuplot> set nolabel
gnuplot> set label "f(0,t)" at -1.4,-2.5
gnuplot> plot [-2:2] f(0,t)
```



En la direcció de les X



En la direcció de les Y

Les gràfiques permeten veure que en la direcció de les X hi ha un mínim en $(0,0)$, i en la direcció de les Y hi ha un màxim en el mateix punt. En particular, les dues derivades direccionals en les direccions dels eixos (és a dir, les dues derivades parcials) són zero en el punt $(0,0)$.

2.7. Funcions lineals

El nostre viatge per funcions de dues variables ja s'està acabant. De fet, l'únic que ens resta és definir la derivació. Abans, però, ens aturarem un moment per recordar coses que ja hem vist en estudiar l'àlgebra lineal. Ens referim a les funcions lineals. La definició formal d'una funció lineal com aquella que satisfà les propietats d'additivitat i homogeneïtat podeu repassar-la als apunts d'àlgebra lineal. El que aquí interessa és fer-vos notar que una funció de dues variables $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és lineal si, i només si, hi ha dos **nombres fixos** a i b, tals que, per a cada possible vector (x,y), tenim que

$$f(x,y) = a\,x + b\,y.$$

El que segueix són exemples de funcions lineals:

- $f(x,y) = 2\,x + 3\,y$, ja que $a = 2$ i $b = 3$
- $f(x,y) = x$, ja que $a = 1$ i $b = 0$
- $f(x,y) = x - y$, ja que $a = 1$ i $b = -1$
- $f(x,y) = 0$, ja que $a = 0$ i $b = 0$

D'altra banda, cap d'aquestes funcions és lineal:

- $f(x,y) = x^2 + y^2$

- $f(x,y) = \log(x) + \sin(y)$
- $f(x,y) = x - 2\,y^3$
- $f(x,y) = x\,y$
- $f(x,y) = (x+y)^2$
- $f(x,y) = y^4$

Donada una funció lineal com ara $f(x,y) = 2\,x + 3\,y$, fixem-nos que podem expressar la imatge de qualsevol vector (x,y) com:

$$f(x,y) = 2\,x + 3\,y = (2,3)\cdot(x,y),$$

on el punt centrat $\cdot$ denota el producte escalar entre vectors. Per tant, per a descriure la funció lineal que hem donat, en tenim prou d' especificar el vector $(2,3)$.

Nota

Recordeu que el producte escalar té la propietat que dos vectors v i w són perpendiculars si, i només si, el seu producte escalar és 0.

Considerem ara una propietat molt interessant: el creixement de la funció f és màxim en la direcció marcada pel vector $(2,3)$. Per exemple, situem-nos en el punt $(0,0)$. Tenim que $f(0,0) = 2\cdot 0 + 3\cdot 0 = 0$. El creixement de la funció serà nul si ens movem perpendicularment al vector $(2,3)$, ja que, si (x,y) és perpendicular a $(2,3)$, llavors:

$$0 = (2,3)\cdot(x,y) = f(x,y).$$

En conseqüència, la funció es manté constant al llarg dels vectors perpendiculars a $(2,3)$. Això suggereix que el creixement màxim (i també el decreixement màxim) s'obté quan ens movem en les direccions més allunyades d'aquelles que fan la funció constant; de fet, la direcció de màxim creixement és la que és donada per $(2,3)$, i la de màxim decreixement és la direcció oposada. Podem resumir tot això dient:

una funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és lineal si, i només si, és el resultat d'aplicar el producte escalar entre un vector fix i cada vector de $\mathbb{R}^2$. Anomenem aquest vector fix el **vector gradient** de la funció lineal. El vector gradient indica, des de qualsevol punt, la direcció de màxim creixement de la funció.

El que també ens interessa de les funcions lineals són els fets següents:

el gràfic d'una funció lineal de dues variables consisteix en un pla dins de l'espai tridimensional.

En conseqüència,

les corbes de nivell d'una funció lineal de dues variables sempre són línies rectes.

Recordeu que tota funció lineal satisfà la propietat que $f(0,0) = 0$. En termes de la gràfica, això vol dir que la gràfica d'una funció lineal sempre conté l'origen de coordenades, és a dir, el punt $(0,0,0)$. Si prenem una funció lineal i hi sumem una constant a cadascun dels seus valors, llavors ja no passa per l'origen, però la seva gràfica continua sent un pla i les seves corbes de nivell, línies rectes. Una funció obtinguda d'aquesta manera és anomenada **funció afí**.

Formalment, f és una **funció afí** si hi ha tres nombres **fixos**, a, b i c, tals que, per a cada possible vector (x,y), tenim que

$$f(x,y) = a\,x + b\,y + c.$$

El que hi ha a continuació són exemples de funcions afins:

- $f(x,y) = 2\,x + 3\,y + 7$, ja que $a = 2$, $b = 3$ i $c = 7$
- $f(x,y) = x - 1$, ja que $a = 1$, $b = 0$ i $c = -1$
- $f(x,y) = x - y$, ja que $a = 1$, $b = -1$ i $c = 0$
- $f(x,y) = 99$, ja que $a = 0$, $b = 0$ i $c = 99$

Noteu que,...

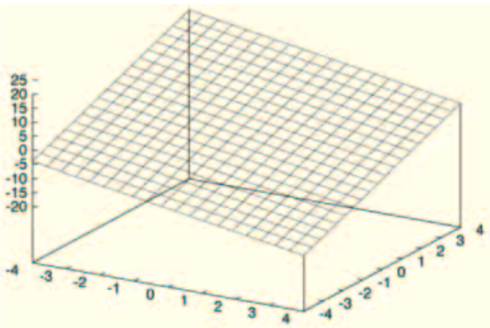
... en particular, tota funció lineal sempre és una funció afí (fent $c = 0$). Si no és que ens interessi ser molt formals, en general usem la denominació "funció lineal" quan volem designar tant una funció lineal pròpiament dita com una funció afí.

Exemple 2.17. Il·lustrarem tot seguit que el graf d'una funció lineal sempre és un pla i usarem el Gnuplot per a veure la gràfica de la funció $f(x,y) = -2\,x + 3\,y$. Obtenim la gràfica de f fent:

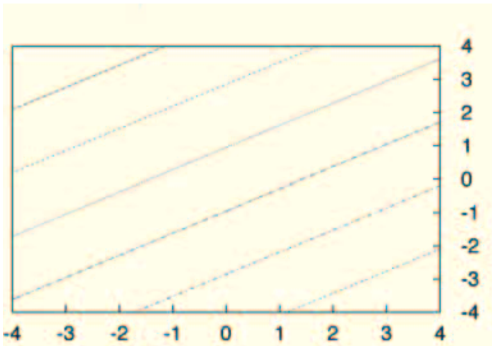
```
gnuplot> f(x,y) = - 2*x + 3*y
gnuplot> set isosamples 20
gnuplot> splot [-4,4] [-4,4] f(x,y)
```

Per a veure les seves corbes de nivell, haurem de fer:

```
gnuplot> set contour
gnuplot> set cntrparam levels auto 6
gnuplot> set view 0,0
gnuplot> set nosurface
gnuplot> splot f(x,y)
```



Gràfica d'una funció lineal



Algunes corbes de nivell

2.8. Plans tangents i diferenciació

Ens podem preguntar per què ens hem posat a parlar de funcions lineals quan el que volem es parlar de derivades. El motiu és clar per a qui hagi entès bé el càlcul univariant: en el fonament de la derivació hi ha la idea d'aproximar una funció qualsevol per mitjà d'una funció lineal (o afí). Mitjançant la derivació aproximem una funció amb la seva recta tangent i això ens permet tenir informació molt important sobre aquesta funció sense necessitat d'haver d'esforçar-nos-hi massa. Per exemple, amb la derivada gairebé sempre podem saber si una funció està creixent o decreixent i, per tant, podem saber si la gràfica de la funció té algun pic o una vall, és a dir, si la funció té un màxim o mínim local. Per a generalitzar la derivació a funcions multivariants, ens basarem en el concepte d'**aproximació lineal**. La idea essencial és la següent:

la diferenciació d'una funció de dues variables es basa en l'aproximació mitjançant el pla tangent a la gràfica de la funció en un punt.

Exemple 2.18. Començarem per mostrar amb un exemple com podem generar el pla tangent al gràfic a partir de les derivades parcials. Considerem la funció

$$f(x, y) = -x^2 + 2\,x - y^2 + 3\,y.$$

Les seves derivades parcials són

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2\,x + 2 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2\,y + 3.$$

Avaluant-les al punt $(0, 0)$ tenim que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 3.$$

Com ja sabem pels apunts de càlcul univariant, cadascuna d'aquestes derivades originen una aproximació lineal a la secció vertical respectiva. Les gràfiques d'aquestes aproximacions lineals són rectes tangents a cada secció vertical, al punt $(0, 0)$. Nosaltres podem veure aquestes rectes tangents amb el Gnuplot . Primer mirem la gràfica de la funció:

```
gnuplot> set nokey
gnuplot> set isosamples 8
gnuplot> splot [-3:3] [-3:3] -x**2+2*x-y**2+3*y
```

I ara vegem les dues rectes tangents. La derivada parcial respecte de x és la derivada en el punt 0 de la secció vertical $g(x) = f(x, 0) = -x^2 + 2\,x$. L'equació de la recta tangent en aquesta secció vertical és

$$g(0) + g'(0)\,(x - 0) = 0 + 2\,x.$$

Tot això, recordem-ho, ho hem obtingut fixant el valor de la variable y en 0. En tres dimensions, això vol dir que aquesta recta tangent està formada per tots aquells punts (x, y, z) en què $y = 0$ i $z = 2\,x$. En particular, la recta tangent conté els punts $(-4, 0, -8)$ i $(3, 0, 6)$.

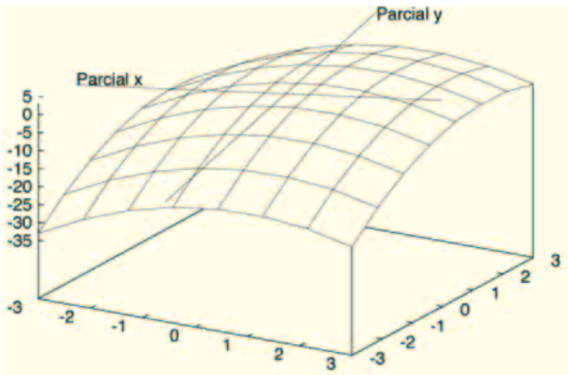
La derivada parcial respecte de y és la derivada en el punt 0 de la secció vertical $h(y) = f(0, y) = -y^2 + 3\,y$. L'equació de la recta tangent en aquesta secció vertical és

$$h(0) + h'(0)\,(y - 0) = 0 + 3\,y.$$

Tot això ho hem obtingut fixant el valor de la variable x en 0. Per tant, la recta tangent en tres dimensions està formada per tots aquells punts (x, y, z) en què $x = 0$ i $z = 3y$. En particular, la recta tangent conté els punts $(0, -4, -12)$ i $(0, 3, 9)$.

En definitiva:

```
gnuplot> set arrow 1 from 0,-4,-12 to 0,3,9 nohead
gnuplot> set arrow 2 from -4,0,-8 to 3,0,6 nohead
gnuplot> set label "Parcial x" at -4,0,-6.5
gnuplot> set label "Parcial y" at 0,3,8.5
gnuplot> replot
```



Derivades parcials

Podem veure com les dues rectes tangents estan sobre el que seria el pla tangent a la gràfica en el punt $(0, 0, 0)$.

L'exemple anterior ens mostra una cosa ben entenedora:

el **pla tangent** a la gràfica de la funció en un punt conté les rectes tangents a totes les seccions verticals que passen per aquell punt.

Dit d'una altra manera, totes les derivades direccionals originen rectes que estan contingudes en el pla tangent.

Ara el nostre objectiu és veure com podem trobar analíticament el pla tangent. Però si admetem el que acabem d'escriure al requadre, la tasca que ens hem proposat és ben senzilla. La raó és la següent: per a especificar un pla, només cal donar dues rectes (diferents) que estiguin sobre seu. En el nostre cas, aquestes dues rectes, les tenim a l'abast. Com que les rectes tangents que obtenim a partir de les derivades parcials són perpendiculars (una va en la direcció de l'eix de les X i l'altra, en la de l'eix de les Y), aquestes rectes tangents són tot el que necessitem per a descriure completament el pla tangent. ❗

L'equació general del pla tangent es pot obtenir de la manera següent. Suposem que tenim una funció de dues variables $f(x, y)$, que volem aproximar al voltant del punt (x_0, y_0). Anomenem z_0 el valor de la funció en aquest punt $z_0 = f(x_0, y_0)$. La gràfica de la funció f passa, doncs, pel punt (x_0, y_0, z_0) dins de l'espai tridimensional. Volem trobar el pla que és tangent en aquest punt a la gràfica de f. Si fixem el valor de $y = y_0$, la recta tangent a la secció vertical així generada està formada per tots els punts (x, y, z), en què

$$y = y_0, \quad \text{i} \quad z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0).$$

Anàlogament, si fixem el valor de $x = x_0$, la recta tangent a la secció vertical així generada està formada per tots els punts (x, y, z), en què

$$x = x_0, \quad \text{i} \quad z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0).$$

Com que els punts tant de l'una com l'altra recta tangent estan continguts dins del pla tangent, l'únic pla que conté aquestes dues rectes està format per tots aquells punts (x, y, z) que satisfan

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0).$$

Aquesta fórmula ens interessa molt especialment, perquè expressa precisament l'aproximació lineal a la funció f al voltant del punt (x_0, y_0).

> L'aproximació lineal a la funció $f(x, y)$ al voltant d'un cert punt (x_0, y_0) és donada per l'expressió següent
>
> $$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$
>
> (on $\approx$ es llegeix aproximadament igual a).

Amb l'afirmació anterior, només hem volgut dir que el pla tangent és una bona aproximació a la funció f, almenys al voltant del punt (x_0, y_0). Per això, fixem-nos que el que hi ha a la dreta del signe $\approx$ és l'alçada del pla tangent, si recordem que $z_0 = f(x_0, y_0)$. La part lineal (és a dir, el que resulta d'eliminar termes no constants) de l'aproximació lineal és la **derivada** de la funció f en el punt (x_0, y_0).

2.9. El vector gradient i el pla tangent

A la secció anterior hem vist que l'expressió analítica del pla tangent a la gràfica de la funció f en un punt (x_0, y_0) és

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0).$$

Cal tenir present que això ho podem expressar amb notació vectorial com:

$$z = z_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (x - x_0, y - y_0)\,,$$

on $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ i $(x - x_0, y - y_0)$ són vectors, i el punt centrat $\cdot$ denota el producte escalar entre vectors.

Recordeu que,...

... donats dos vectors (a, b) i (c, d), el seu **producte escalar**, el definim com el nombre $(a, b) \cdot (c, d) = ac + bd$.

El vector de derivades parcials és un instrument molt útil per a analitzar el comportament de la funció, i veurem que té un paper molt important dins de la teoria de l'optimització. L'anomenem **vector gradient**.

El **vector gradient** de la funció $f(x, y)$, que indiquem amb el símbol $\nabla f(x, y)$, és el vector que té per components les derivades parcials de f.

Usant el vector gradient, el pla tangent a la gràfica de f en el punt (x_0, y_0) és donat per

$$z = z_0 + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

Noteu que...

... de fet, és el vector gradient de l'aplicació lineal generada, d'acord amb la definició que hem donat en l'apartat sobre aplicacions lineals.

Exemple 2.19. A l'exemple 2.18, ens hem trobat amb la funció

$$f(x, y) = -x^2 + 2\,x - y^2 + 3\,y$$

que té com a derivades parcials:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2\,x + 2 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2\,y + 3.$$

Per tant, el seu vector gradient és

$$\nabla f(x, y) = (-2\,x + 2, -2\,y + 3)\,.$$

En particular,

$$\nabla f(0,0) = (2,3) \qquad \text{i} \qquad \nabla f(1,2) = (0,-1).$$

Tenim que $f(0,0) = 0$, per la qual cosa el pla tangent a la gràfica de f en el punt $(0,0)$ és donat per tots aquells (x,y,z) que satisfan l'equació

$$z = \nabla f(0,0) \cdot (x,y) \implies z = 2x + 3y.$$

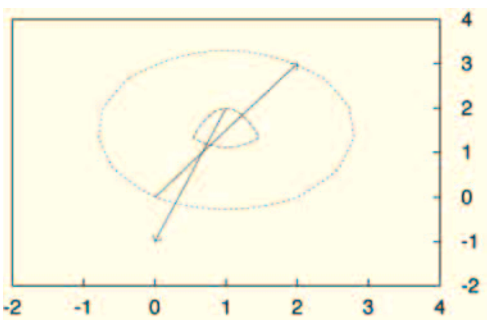
En el punt $(1,2)$, tenim que $f(1,2) = 3$, i el pla tangent és

$$z = f(1,2) + \nabla f(1,2) \cdot (x-1, y-2) \implies z = -y + 5.$$

Per a visualitzar el vector gradient amb el Gnuplot , el primer que hem de tenir en compte és que el vector gradient pertany al **domini de la funció**. És a dir, cal representar el vector gradient a la mateixa gràfica on veiem les corbes de nivell.

Introduïm al Gnuplot les dades sobre la funció:

```
gnuplot> f(x,y)=-x**2+2*x-y**2+3*y
gnuplot> set view 0,0
gnuplot> set contour
gnuplot> set cntrparam levels discrete 0, 3
gnuplot> set nosurface
gnuplot> set arrow from 0,0,0 to 2,3,0
gnuplot> set arrow from 1,2,0 to 0,-1,0
gnuplot> set xrange [-2:4]
gnuplot> set yrange [-2:4]
gnuplot> splot f(x,y)
```



Gràfic

Corbes de nivell i gradients

Una propietat molt important és que els gradients són perpendiculars a les seves corbes de nivell, encara que la representació gràfica distorsioni una mica les coses.

2.10. Exercicis

2.2. Feu servir el Gnuplot per a representar gràficament les dades amb relació al consum de carn de boví de l'exemple 1.1. Creeu un arxiu amb les dades escrites per columnes, de tal manera que el programa interpreti correctament les relacions creuades. Feu rotacions de la gràfica que permetin distingir millor el comportament de les dades.

2.3. Feu el mateix que abans, però ara creeu un arxiu diferent on les dades estiguin escrites per files i comproveu que les gràfiques que obteniu en ambdós casos coincideixen.

2.4. Recordeu les dades sobre els ingressos classificats per inclinacions polítiques i per afeccions esportives, que hem presentat a l'exemple 2.7. L'arxiu que hi hem escrit amb aquelles dades era llegint-les per files. Si escriviu un arxiu llegint-les per columnes: sortiria la mateixa gràfica? Per què? Comproveu la vostra resposta fent-ho amb el Gnuplot.

2.5. Una funció sinuosa

Considereu la funció $f(x, y) = \sin(3\,x)\,\sin(y)$, on 'sin' designa la funció trigonomètrica sinus (no us preocupeu massa per aquesta funció, el Gnuplot la coneix bé). Usant el programa Gnuplot, feu una gràfica de la funció f que mostri vuit corbes de nivell de la funció dins de la mateixa gràfica (si veieu la gràfica molt embolicada, feu servir la instrucció `hidden3d`, que ja hem comentat abans). Després, feu un mapa de corbes de nivell on apareguin els vuit mateixos nivells. Per a evitar mals de cap amb tantes ratlles, restringiu el recorregut de les variables x i y a l'interval $[-3, 3]$. Per a elaborar la gràfica, useu vint línies en cada direcció.

2.11. Solucionari

2.1. El nostre objectiu aquí és representar les dades que hem mostrat a l'exemple 1.1. El primer que farem és generar, mitjançant un editor de textos, un arxiu que contingui les dades que hi ha a la taula. Hem de tenir cura d'escriure-hi les dades de tal manera que el Gnuplot les interpreti correctament com a corresponents a una funció de dues variables. Hem vist abans que això ho aconseguim escrivint la taula o bé per files, o bé per columnes, però deixant una línia en blanc per a assenyalar cada trencament. Per exemple, si ho volguéssim fer per columnes, crearíem un arxiu anomenat "bovi.dat" amb la informació següent:

```
20 3.0 2.65

40 3.0 4.14

60 3.0 5.11

80 3.0 5.35

100 3.0 5.79


20 3.5 2.59

40 3.5 4.05

60 3.5 5.00

80 3.5 5.29

100 3.5 5.77


20 4.0 2.51

40 4.0 3.94

60 4.0 4.97

80 4.0 5.19

100 4.0 5.60
```

```
20 4.5 2.43

40 4.5 3.88

60 4.5 4.84

80 4.5 5.07

100 4.5 5.53
```

Una vegada haguem escrit aquest arxiu, ja podem entrar al programa per fer la gràfica.

És important recordar d'especificar que es tracta d'una gràfica **paramètrica**:

```
gnuplot > set parametric
```

Ara ja estem llestos i podem generar-la. Amb aquest objectiu, diem al Gnuplot que llegeixi les dades de l'arxiu que hem creat.

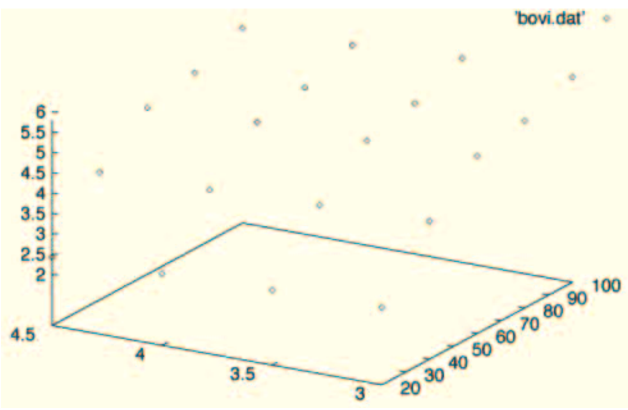
```
gnuplot > splot 'bovi.dat'
```

Això ens mostra un núvol de punts. Si volem veure la forma de la superfície que generen aquests punts, podem fer:

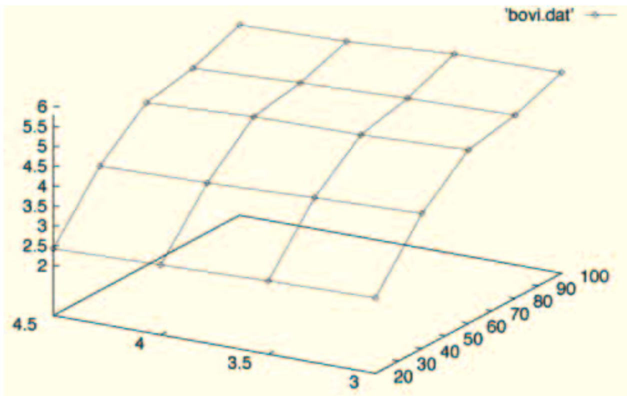
```
gnuplot > splot 'bovi.dat' with linespoints
```

Tot plegat sembla una mica embolicat: tots els punts s'ajunten en un extrem. Per tal que quedi bonic, el que fem és canviar la perspectiva per veure-ho tot des de l'origen, tal com hem vist a l'exemple 2.2. Després podem tornar a generar les gràfiques:

```
gnuplot> set view 60,300

gnuplot> splot 'bovi.dat'

gnuplot> splot 'bovi.dat' with linespoints
```



Consum de boví: només punts



Consum de boví: punts i línies

2.2. Les dades llegides per files són:

```
20 3.0 2.65
20 3.5 2.59
20 4.0 2.51
20 4.5 2.43

40 3.0 4.14
40 3.5 4.05
40 4.0 3.94
40 4.5 3.88

60 3.0 5.11
60 3.5 5.00
60 4.0 4.97
60 4.5 4.84

80 3.0 5.35
80 3.5 5.29
80 4.0 5.19
80 4.5 5.07

100 3.0 5.79
100 3.5 5.77
100 4.0 5.60
100 4.5 5.53
```

Si posem això dins d'un arxiu anomenat `bovifil.dat`, llavors el podrem representar fent:

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set view 60,300
gnuplot> splot 'bovifil.dat' with linespoints
```

La representació hauria de ser la mateixa que quan hem escrit les dades per columnes.

2.4. En aquest cas, la cosa canvia si llegim per files o per columnes. Llegint per files, l'eix de les X és assignat a la política i l'eix de les Y, a l'esport. Si ho fem per columnes, és a l'inrevés, ja que el programa no té prou informació per a discriminar. Fixeu-vos que quan la gràfica és paramètrica, el programa **sí** que té la informació addicional per a saber quina variable va a cada eix: la primera columna correspon a l'eix de les X i la segona, a l'eix de les Y.

2.5. Tenim $f(x,y) = \sin(3\,x)\,\sin(y)$. Entrem les dades al Gnuplot:

```
gnuplot> f(x,y) = sin(3*x)*sin(y)
gnuplot> set contour
gnuplot> set isosamples 20
gnuplot> set xrange [-3:3]
gnuplot> set yrange [-3:3]
gnuplot> set cntrparam levels auto 8
```

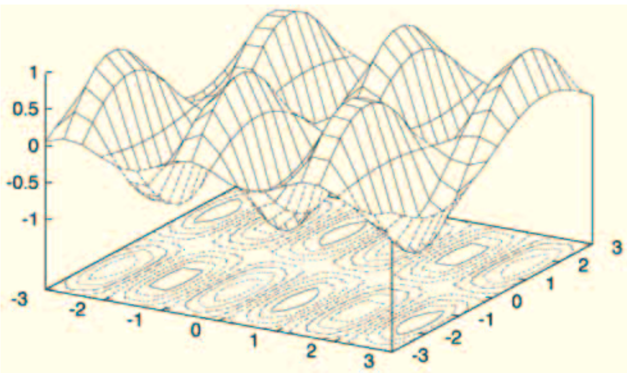
La gràfica tridimensional s'obté fent:

```
gnuplot> set view 60,30
gnuplot> set surface
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> splot f(x,y)
```

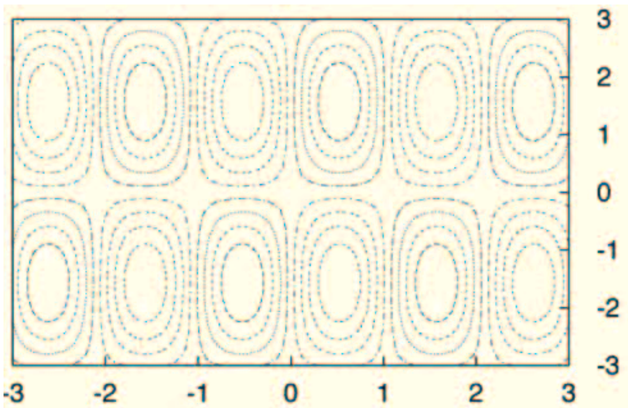
I el mapa de corbes de nivell fent:

```
gnuplot> set view 0,0
gnuplot> set nosurface
gnuplot> replot
```

Com es pot veure, es tracta d'un paisatge sinuós, tal com indica el nom.



La funció $\sin(3x)\,\sin(y)$



I les seves corbes de nivell

2.12. Sumari

Fins a aquest moment, hem fet una ullada per sobre, d'una manera més aviat informal, a tota una sèrie d'aspectes de les funcions de dues variables. Hem vist com són les gràfiques de funcions de dues variables, i com els podem generar amb el Gnuplot , ja sigui a partir de funcions definides analíticament o a partir d'arxius de dades. En particular, hem pensat en la gràfica d'una funció com si es tractés d'un pastís i hem vist què és el que surt quan tallem aquest pastís de maneres diferents; sobretot, ens hem concentrat en el que passa quan fem talls al llarg d'una línia recta. Tot això ens ha permès de fer servir els coneixements que ja tenim de funcions univariants per a dir coses interessants sobre funcions de dues variables.

Hem definit les derivades parcials i les derivades direccionals com les derivades dels talls lineals que podem fer a la gràfica d'una funció de dues variables.

Finalment, hem vist com podem expressar el pla tangent a la gràfica a partir de les derivades parcials. Tot això ho mirarem a partir d'ara des d'un punt de vista més formal.

3. Funcions multivariants: definicions i resultats

3.1. Presentació

En aquesta sessió presentarem d'una manera més formal els conceptes bàsics i els resultats importants sobre funcions multivariants. Estendrem al cas de moltes variables el que hem dit anteriorment sobre funcions de dues variables, i també discutirem alguns conceptes nous que tenen força importància a fi d'aplicar els coneixements adquirits en aquest curs.

Comencem per recordar la definició que vam donar en la part introductòria.

Una **funció amb n variables** és una regla f que associa a cada vector $(x_1, x_2 ... x_n)$ dins d'un conjunt D determinat un nombre real $f(x_1, x_2 ... x_n)$. El **domini** D és un subconjunt de $\mathbb{R}^n$, és a dir, està format per vectors amb n components. Representarem aquesta funció escrivint:

$$f : D \to \mathbb{R} \quad \text{o bé} \quad D \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Quan vulguem indicar l'acció de la funció sobre un vector, escriurem

$$(x_1, x_2 ... x_n) \xmapsto{f} (x_1, x_2 ... x_n).$$

Lagrange...

... en la seva obra *Théorie des functions analytiques* (1797) defineix una funció d'una o diverses variables com qualsevol expressió útil per al càlcul en què aquestes variables hi intervenen de qualsevol manera.

Tal com en el cas de funcions univariants, quan escrivim una funció multivariant, com ara $f(x, y) = \sqrt{x - y}$, se sobreentén que el domini de definició de f és el subconjunt més gran dins del qual la fórmula té sentit. Per exemple, en el cas de la funció que acabem d'escriure, el domini seria el semiespai: $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \quad y \}$.

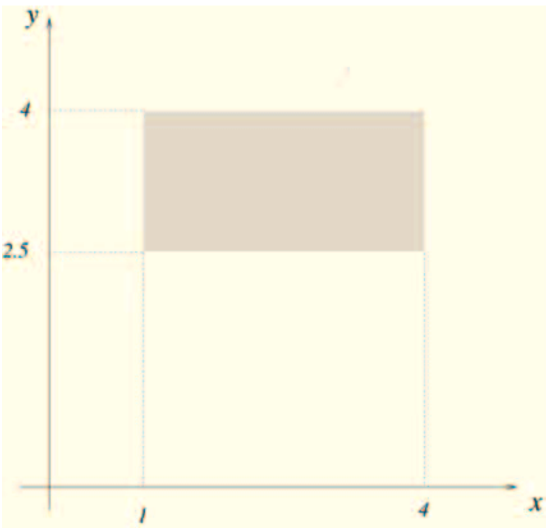
Un apunt sobre la notació que serà rellevant és el que segueix. Com que treballarem amb funcions amb múltiples variables, ens interessarà usar notació vectorial de tant en tant, per tal de simplificar la notació. Per a evitar confusions, encara que no hi hauria d'haver la possibilitat d'ambigüitats, usarem les lletres v i w sempre que ens referim a vectors, i lletres com ara x, y i z, per a referir-nos a components de vectors o a nombres. De tant en tant, també recorrerem a l'ús de subíndexs per a referir-nos a components d'un vector. Els subíndexs també els usarem per a referir-nos a un vector determinat, i no qualsevol; la diferència hauria de quedar perfectament clara pel context.

3.2. Conjunts oberts i tancats. Entorns

Abans d'entrar en matèria, serà bo considerar breument com s'estenen les definicions de conjunts oberts i tancats a subconjunts de $\mathbb{R}^n$. El concepte fonamental és, com en el cas de $\mathbb{R}$, el d'un entorn. Recordem que un interval obert és un conjunt de nombres que no té forats enmig i que no inclou els seus extrems.

Suposem que, per a cada un dels n components de $\mathbb{R}^n$, prenem un interval obert determinat, i després considerem tots els vectors que es poden formar que tinguin els components dins dels respectius intervals oberts. El conjunt que obtenim d'aquesta manera l'anomenarem un **rectangle obert** de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.1. Considerem el conjunt $\mathbb{R}^2$. Dins del primer component, prenem l'interval obert $(1, 4)$, i dins del segon component prenem l'interval obert $(2, 5, 4)$. El rectangle que en resulta és el que hi ha al dibuix.



Un rectangle obert a $\mathbb{R}^2$

Fixem-nos com en el cas de $\mathbb{R}^2$ els rectangles oberts de la nostra definició són rectangles en el sentit geomètric, però incloent l'interior i sense incloure-hi els costats.

Notem, finalment, que els rectangles oberts a $\mathbb{R}^3$ serien cubs i els de $\mathbb{R}^4$, hipercubs, en el sentit dalinià del terme.

Diem que un subconjunt O de $\mathbb{R}^n$ és un **conjunt obert**, si cada punt de O està envoltat per un rectangle obert que està enterament contingut en O.

La idea d'un conjunt obert...

... és que cada punt del conjunt està envoltat d'altres punts que també pertanyen al conjunt.

Exercici

3.1. Proveu que tot rectangle obert és un conjunt obert. Tracteu d'expressar el vostre argument amb la màxima precisió.

En general, fins i tot en els casos més senzills, com ara el de l'exercici anterior, comprovar si un conjunt és obert és un exercici força entretingut. Amb un parell de resultats, però, n'hi haurà gairebé per a tot el que nosaltres necessitem.

Si partim d'un nombre qualsevol (finit) de conjunts oberts i fem unions i/o interseccions entre ells, el resultat és un nou conjunt obert.

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una funció contínua i c és un nombre real qualsevol, llavors els dos conjunts

$$\{\, v \in \mathbb{R}^n : \ f(v) > c \,\}$$
$$\{\, v \in \mathbb{R}^n : \ f(v) < c \,\}$$

són oberts.

Exercici

3.2. Usant els dos resultats anteriors, mostreu que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una funció contínua, i a i b nombres reals qualssevol, llavors el conjunt

$$\{\, v \in \mathbb{R}^n : \ a < f(v) < b \,\}$$

és obert.

Els següents són tots conjunts oberts de $\mathbb{R}^2$.

- $\{ (x, y) : 0 < x < 1, \text{ i } 0 < y < 1 \}$
- $\{ (x, y) : 0 < x + y < 1 \}$
- $\{ (x, y) : x^2 + y^2 < 1 \}$
- $\mathbb{R}^2$
- $\{ (x, y) : x < y \}$

Exercici

3.3. En cada un dels exemples anteriors, dibuixeu el conjunt i justifiqueu que es tracta d'un conjunt obert.

Diem que un subconjunt T de $\mathbb{R}^n$ és un **conjunt tancat**, si el seu complementari (és a dir, el conjunt de tots els vectors que **no** són en T) és un conjunt obert.

Si partim d'un nombre qualsevol (finit) de conjunts tancats i fem unions i/o interseccions entre ells, el resultat és un nou conjunt tancat.

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una funció contínua i c és un nombre real qualsevol, llavors els dos conjunts

$$\{ v \in \mathbb{R}^n : \ f(v) \quad c \}$$
$$\{ v \in \mathbb{R}^n : \ f(v) \leq c \}$$

són tancats.

Observeu la diferència fonamental dels resultats que relacionen funcions contínues amb conjunts oberts i tancats: desigualtats **estrictes** originen conjunts oberts, i desigualtats **febles** originen conjunts tancats.

3.4. Usant els dos resultats anteriors, mostreu que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una funció contínua, i a i b nombres reals qualsevol, llavors el conjunt

$$\{ v \in \mathbb{R}^n : \ a \leq f(v) \leq b \}$$

és tancat.

Els següents són tots conjunts tancats de $\mathbb{R}^2$.

- $\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, \text{ i } 0 \leq y \leq 1 \}$
- $\{ (x, y) : 0 \leq x + y \leq 1 \}$
- $\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \}$
- $\{ (x, y) : x + y = 1 \}$

Exercici

3.5. En cada un dels exemples anteriors, dibuixeu el conjunt i justifiqueu que es tracta d'un conjunt tancat.

No ens deixem confondre per la terminologia: no cal que un conjunt pertanyi a una de les dues categories que acabem de veure. És molt fàcil escriure conjunts que no són oberts ni són tancats. Heus ací alguns exemples:

- $\{ (x, y) : 1 < x < 1, \text{ i } 0 \leq y \leq 1 \}$
- $\{ (x, y) : 1 < x + y \leq 2 \}$
- $\{ (x, y) : 0 \leq x < y \}$

Per a definir els conceptes de continuïtat i diferenciació, és útil formalitzar la concepció d'entorn.

Un **entorn** d'un cert vector v és qualsevol conjunt obert que conté v.

Tots aquests conceptes que hem vist poden semblar una mica esotèrics, però estan molt relacionats amb d'altres més familiars, com el concepte de límit.

Hi ha una categoria de conjunts, però, que és especialment important per a l'economista, ja que té força rellevància en problemes d'optimització. Es tracta dels **conjunts compactes**. Per a definir-los, cal estendre a $\mathbb{R}^n$ un concepte familiar a la recta real.

Un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ és **fitat** si el podem incloure dins d'un rectangle determinat que té per components intervals fitats.

Per exemple, una recta dins del pla no és mai un conjunt fitat, perquè sempre s'estén més enllà de qualsevol rectangle fitat. D'altra banda, una circumferència és un conjunt fitat, perquè sempre la podem inscriure dins d'un cert rectangle.

Diem que un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ és **compacte**, si és alhora fitat i tancat.

Els següents són tots conjunts compactes de $\mathbb{R}^2$.

- $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \text{ i } 0 \leq y \leq 1\}$
- $\{(x,y) : x+y \leq 1, \ x \quad 0, \text{ i } y \quad 0\}$
- $\left\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\right\}$
- $\{(x,y) : x+y = 1, \ x \quad 0, \text{ i } y \quad 0\}$

I cap dels següents conjunts de $\mathbb{R}^2$ no és compacte.

- $\{(x,y) : x \leq 1, \text{ i } y \leq 1\}$
- $\{(x,y) : 0 \leq x+y \leq 1\}$
- $\left\{(x,y) : x^2+y^2 < 1\right\}$
- $\{(x,y) : x+y = 1\}$

Exercici

3.6. En cada un dels exemples anteriors, dibuixeu el conjunt i justifiqueu per què es tracta d'un conjunt compacte o no.

3.3. Continuïtat

Ara el nostre objectiu és definir la continuïtat d'una funció multivariant. De fet, la definició és exactament la mateixa que ja havíem vist en el cas univariant.

> Sigui D un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ i $f : D \to \mathbb{R}$, una funció definida en D. Diem que f és **contínua en el vector** $v_0 \in D$ si el límit $\lim_{v\to v_0} f(v)$ existeix i, a més, coincideix amb $f(v_0)$.

La definició és intuïtivament clara: tots entenem prou bé que el concepte de continuïtat significa que la funció no té salts bruscs. Quan tractem amb subconjunts de $\mathbb{R}$, només hi ha dues direccions a través de les quals un punt pot ser aproximat: des de dalt o des de baix. Quan hi ha més variables, la situació canvia, ja que hi ha moltes trajectòries possibles d'aproximació, i això, d'una banda, marca una diferència no trivial respecte del cas univariant i, d'altra banda, fa que la definició de límit sigui més restrictiva, ja que el límit està ben definit si, i només si, existeix per a totes i cada una de les trajectòries possibles d'aproximació. L'exemple següent il·lustra aquest punt.

Exemple 3.2. Considerem la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\,y^2}{x^2+y^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Volem mostrar que aquesta funció **no** és contínua en el punt $(0,0)$, encara que qualsevol secció vertical que passi per $(0,0)$ és una funció contínua. Aquest és un fenomen que no apareix, com és lògic, quan estudiem funcions univariants, i que ens mostra que el concepte de continuïtat de funcions multivariants és força restrictiu. Una secció vertical que passi per $(0,0)$ és donada per l'equació

$$a\,x + b\,y = 0,$$

on a i b són nombres fixos. Considerarem dos casos. En primer lloc, si $b = 0$, llavors la secció vertical és $x = 0$, és a dir, estem mirant la funció al llarg de l'eix de les Y. En aquest cas, tenim que $f(0,y) = 0$, per a tot y, per la qual cosa la secció vertical és clarament una funció contínua (ja que és constant). D'altra banda, si $b \neq 0$, tenim que $y = -(a/b)\,x$. Definim $c = -(a/b)$, de tal manera que $y = c\,x$, la qual cosa implica que qualsevol secció vertical d'aquest tipus és de la forma

$$f(x, c\,x) = \begin{array}{ll} \frac{c^2\,x^3}{x^2+c^4x^4} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{array}$$

Simplificant, veiem que:

$$f(x, c\,x) = \frac{c^2\,x}{1 + c^4x^2}.$$

I aquesta és una funció contínua, donat un determinat c que es manté fix.

D'altra banda, per a veure que f no és contínua en el $(0, 0)$, considerem la secció (no vertical, és clar) obtinguda en aproximar-nos a $(0, 0)$ al llarg de la trajectòria (parabòlica) donada per $x = y^2$. En aquest cas, la funció univariant que en resulta és:

$$f(y^2, y) = \begin{array}{ll} \frac{y^4}{y^4+y^4} & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{array}$$

és a dir,

$$f(y^2, y) = \begin{array}{ll} \frac{1}{2} & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{array}$$

que és clarament una funció discontínua quan $y = 0$. Això implica, en particular, que la funció $f(x, y)$ no pot ser contínua en el punt $(0, 0)$.

De fet, però, la continuïtat és un aspecte de les funcions que a nosaltres no ens preocuparà gaire en aquest curs, perquè totes les funcions amb què treballarem seran no solament contínues, sinó també diferenciables, exceptuant exemples, com el que hem comentat, construïts expressament. El resultat positiu que podem tenir en compte és el següent:

si partim de funcions contínues i n'anem construint d'altres mitjançant les operacions d'addició/substracció, multiplicació/divisió i composició de funcions, arribarem novament a funcions contínues (sobre els seus dominis de definició).

Per exemple, una aplicació d'aquest principi a l'exemple que hem vist abans, ens diria que la funció:

$$f(x, y) = \frac{x\,y^2}{x^2 + y^4}$$

és contínua sobre el seu domini. Fixem-nos, però, que aquesta funció no està definida en el punt $(0, 0)$. Abans hem provocat la discontinuïtat precisament en voler definir-la també en aquest punt.

Hi ha un resultat molt important pel que fa a optimització que té relació amb l'apartat anterior, en què hem parlat de conjunts, i amb aquest, en què parlem de continuïtat.

Teorema de Weierstrass

Sigui C un subconjunt compacte de $\mathbb{R}^n$ i $f : C \to \mathbb{R}$, una funció contínua. Llavors f assoleix tant un màxim absolut com un mínim absolut, és a dir, hi ha vectors $M \in C$ i $m \in C$, tals què per a cada $v \in C$ es compleix que $f(m) \leq f(v) \leq f(M)$.

Karl Weierstrass...

... (Westlia 1815-Berlín 1897) en l'obra **Werke** de 1890 presenta el seu mètode per a desenvolupar la teoria de funcions.

Quan tractem de temes d'optimització ja tindrem oportunitat de tornar a parlar d'aquest teorema.

3.4. Gràfiques, corbes de nivell

A la sessió anterior hem vist com podíem obtenir la gràfica d'una funció de dues variables usant el Gnuplot. Per a funcions de més de dues variables, això ja no sembla tan senzill! Els conceptes, però, es generalitzen. Per exemple, per a funcions amb n variables també ens interessa parlar del **graf** de la funció, que seria el conjunt de vectors de $n+1$ components formats en associar a cada vector del domini el valor que hi pren la funció.

Una eina molt usada també en economia són les **corbes de nivell**.

Donada una funció f amb domini dins de $\mathbb{R}^n$ i un nombre qualsevol c, la **corba de nivell c de la funció f** està formada pel conjunt de punts que satisfan $f(x_1, x_2 \ldots x_n) = c$.

Notem que la definició no exclou el fet que hi hagi algun c en què la corba de nivell c de f no tingui cap punt, encara que aquest és un cas ben poc interessant. Per exemple, si $f(x,y) = x^2 + y^2$, la corba de nivell -1 no té cap punt, perquè la funció f associa un nombre no negatiu a cada vector de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 3.3. Donada la funció $f(x,y) = 2\,\log(x) + \log(y)$, la seva corba de nivell 2 està formada per aquelles parelles (x,y) que solucionen l'equació

$$2\,\log(x)+\log(y)=2 \implies \log(x^2\,y)=2 \implies x^2\,y=e^2,$$

és a dir,

$$x^2\,y=e^2 \implies y=\left(\frac{e}{x}\right)^2.$$

Exemple 3.4. En l'economia moderna, el comportament individual s'analitza partint del supòsit que els individus actuen moguts pel seu propi interès. Una manera d'expressar això matemàticament és postular que els individus comparen diferents alternatives d'acord amb una **funció d'utilitat**, que és un índex de desitjabilitat, de manera que les alternatives amb una major utilitat són les preferides. En les aplicacions que els economistes fan de les funcions d'utilitat, s'han mostrat com una eina essencial les corbes de nivell de la funció d'utilitat, que els economistes anomenen **corbes d'indiferència**.

3.5. Diferenciació

Comencem amb un concepte familiar.

La **derivada parcial d'una funció** $f(x_1, x_2 ... x_n)$ respecte de l'i-èsim component és la derivada de la funció univariant obtinguda en fixar els valors de tots els components excepte l'i-èsim. Indiquem aquesta derivada parcial com:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2 ... x_n)$$

o bé

$$D_i f(x_1, x_2 ... x_n).$$

Exemple 3.5. Sigui $f(x,y,z)=x^2y+x\,z^3-y^2z^2$. Les derivades parcials d'aquesta funció són

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2\,x\,y+z^3\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2-2\,y\,z^2\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= 3\,x\,z^2-2\,y^2z.
\end{aligned}$$

La diferenciació també és, en el cas multivariant, una aproximació lineal a una funció, al voltant d'un cert punt. El que hi ha a continuació n'és una definició formal.

Diem que f és **diferenciable** en un vector w determinat, si hi ha una certa funció lineal, que anomenem T_w, tal que, quan v s'apropa a w, la diferència entre $f(v)$ i la funció $f(w) + T_w(v - w)$ minva més ràpidament que la distància entre v i w.

Encara que estigui expressat en un llenguatge una mica críptic, el significat de la definició anterior hauria de ser prou clar. La funció $f(w) + T_w(v - w)$ té per graf el pla tangent al graf de f en el punt w. El que estem dient en la definició és que el pla tangent és una bona aproximació al graf de la funció al voltant de w. De fet, és fàcil mostrar que, si f és diferenciable, la funció lineal T_w és única, per la qual cosa en tenim prou trobant una funció lineal que tingui per graf el pla tangent. Però abans hem vist que el pla tangent sempre el podem definir a partir de les derivades parcials, i és per això que ens serà ben fàcil caracteritzar la derivada de f. Heu vist, quan estudiàveu àlgebra lineal, que una funció lineal té associada una matriu, que no és res més que el resultat d'aplicar la funció als vectors de la base.

La matriu que representa la funció lineal T_w que hem esmentat en la definició de diferenciabilitat, té com a components les derivades parcials de f, avaluades al vector w.

Exemple 3.6. A l'exemple 3.5, hem trobat les derivades parcials de la funció $f(x, y, z) = x^2y + x\,z^3 - y^2z^2$. En el punt $(1, -1, 0)$, aquestes derivades parcials valen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1, 0) = -2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1, 0) = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1, -1, 0) = 0.$$

Com que $f(1, -1, 0) = -1$, el pla tangent ve donat per

$$-1 + \begin{pmatrix} -2 \; 1 \; 0 \end{pmatrix} (x - 1, y + 1, z) = 2 - 2\,x + y,$$

on $(x - 1, y + 1, z) = (x, y, z) - (1, -1, 0)$. Per tant, la derivada de f en el punt $(1, -1, 0)$ és la funció lineal:

$$T(x, y, z) = 2 - 2\,x + y.$$

En general, la derivada d'una funció $f(x_1, x_2 ... x_n)$ és la funció lineal que ve donada per la matriu:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \; \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \; \cdots \; \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Això comporta una nova definició, a la qual retornarem sovint en aquest curs.

El **vector gradient** de la funció $f(x_1, x_2...x_n)$ en el punt $(\bar{x}_1, \bar{x}_2...\bar{x}_n)$ és el vector que té per components les derivades parcials de f en aquest punt. Designem el vector gradient amb $\nabla f(\bar{x}_1, \bar{x}_2...\bar{x}_n)$. Si donem per sobreentès que estem avaluant-ho tot en el punt $(\bar{x}_1, \bar{x}_2...\bar{x}_n)$, tenim:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

És important remarcar que el gradient és un vector, no una matriu.

En particular, si indiquem el producte escalar entre dos vectors amb un punt centrat $\cdot$, llavors el pla tangent a una funció $f(v)$ en el vector $\bar{v}$, el podrem calcular fent:

$$f(\bar{v}) + \nabla f(\bar{v}) \cdot (v - \bar{v}).$$

Exemple 3.7. El gradient de $f(x, y, z) = x^2 y + x\,z^3 - y^2 z^2$ és donat per

$$\nabla f(x, y, z) = (2\,x\,y + z^3, x^2 - 2\,y\,z^2, 3\,x\,z^2 - 2\,y^2 z).$$

En el punt $(1, -1, 0)$, el gradient és el vector

$$\nabla f(1, -1, 0) = (-2, 1, 0).$$

Com que $f(1, -1, 0) = -1$, el pla tangent és donat per

$$-1 + (-2, 1, 0) \cdot (x - 1, y + 1, z) = 2 - 2\,x + y.$$

Noteu...

... la manera diferent com hem escrit aquí i a l'exemple 3.5 el pla tangent. Allà, aplicàvem la matriu $(-2\;1\;0)$ al vector $(x - 1, y + 1, z)$; aquí, en canvi, hem buscat el producte escalar entre els vectors $(-2, 1, 0)$ i $(x - 1, y + 1, z)$. El resultat és el mateix, òbviament, però conceptualment estem fent coses diferents.

El que ens interessa remarcar, ja que és l'expressió que es fa servir més freqüentment, és:

l'aproximació lineal a una funció diferenciable f al voltant d'un vector $\bar{v}$, la podem escriure en termes del gradient com

$$f(v) \quad f(\bar{v}) + \nabla f(\bar{v}) \cdot (v - \bar{v}).$$

De cara als càlculs, fixem-nos que:

$$\nabla f(\bar{v}) \cdot (v - \bar{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial v_i} (v_i - \bar{v}_i).$$

Un altre resultat important és que

si $f(x_1, x_2...x_n)$ és diferenciable en un cert punt, llavors f és contínua en el mateix punt. Dit en altres paraules, diferenciabilitat implica continuïtat.

Per a garantir la diferenciabilitat a partir de les derivades parcials, necessitem verificar el següent.

Condició suficient per a la diferenciabilitat

Si les derivades parcials existeixen i són funcions contínues dins d'un cert conjunt obert O inclòs en el domini de f, llavors f és diferenciable en tots els punts de O.

3.6. Derivades d'ordre superior

Donada una funció f de n variables, si mantenim totes les variables menys una fixes en un cert valor, el que en resulta és una funció univariant (una secció vertical). La derivada d'aquesta funció l'hem anomenada derivada parcial. Si derivem aquesta funció univariant dues vegades, obtindrem una **derivada parcial de segon ordre**. De la mateixa manera, amb derivacions successives podem definir derivades parcials de qualsevol ordre.

Exemple 3.8. La funció $f(x, y) = x^4 - x^2 + x\,y + y^2 - y^4$ té com a derivades parcials

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 4y^3.$$

Cada derivada parcial és funció tant de x com de y. Així, tenim **quatre** possibles derivades parcials de segon ordre:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 12x^2 - 2, & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} &= 1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} &= 1, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2 - 12y^2. \end{aligned}$$

Fixem-nos que, amb n variables, hi ha n^2 possibles derivades parcials de segon ordre, que corresponen a totes les possibles parelles (ordenades) que podem formar amb les n variables.

Donada una funció $f(x_1, x_2 ... x_n)$, definim la seva **matriu hessiana** com aquella matriu que té com a components les derivades parcials de segon ordre, arranjades de la manera següent:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \, \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \, \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Designem la matriu hessiana de f avaluada al vector $(\bar{x}_1, \bar{x}_2 ... \bar{x}_n)$ per $D^2 f(\bar{x}_1, \bar{x}_2 ... \bar{x}_n)$.

Exemple 3.9. A l'exemple 3.8, hem trobat les derivades parcials de segon ordre de la funció $f(x,y) = x^4 - x^2 + x\,y + y^2 - y^4$. La matriu hessiana d'aquesta funció és

$$\begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 1 \\ 1 & 2 - 12y^2 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.10. En aquest exemple usarem una notació alternativa que també apareix en molts llibres de text. Sigui $f(x,y,z) = x\,y\,z$. Llavors,

$$D_1 f(x,y,z) = y\,z, \qquad D_2 f(x,y,z) = x\,z, \qquad D_3 f(x,y,z) = x\,y.$$

i donat el punt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1,2,3)$, les derivades parcials en aquest punt són

$$D_1 f(1,2,3) = 6, \qquad D_2 f(1,2,3) = 3 \qquad i \qquad D_3 f(1,2,3) = 2.$$

Les derivades parcials segones són

$$\begin{aligned} D_{11} f(x,y,z) = D_{22} f(x,y,z) = D_{33} f(x,y,z) = 0 \\ D_{12} f(x,y,z) = D_{21} f(x,y,z) = z \\ D_{13} f(x,y,z) = D_{31} f(x,y,z) = y \\ D_{23} f(x,y,z) = D_{32} f(x,y,z) = x. \end{aligned}$$

Per la qual cosa la matriu hessiana és

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad D^2 f(1,2,3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un resultat útil que cal considerar és el següent.

Teorema de Young

Sempre que les derivades parcials de segon ordre siguin funcions contínues, les derivades creuades coincidiran:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i},$$

qualsevol que siguin els índexs i i j.

A efectes pràctics nostres, com que sempre treballarem amb funcions que tenen derivades de qualsevol ordre contínues, el resultat que acabem de veure vol dir que, de totes les n^2 possibles derivades de segon ordre, n'hem de calcular força menys (quantes?).

3.7. La regla de la cadena

Hi ha una sèrie de funcions amb les quals ens topem sovint, ja des de l'escola elemental: suma i resta, multiplicació i divisió, potenciació i radicació. N'hi ha d'altres que hem tingut ocasió de veure, més o menys profundament, posteriorment, com ara logaritmes, exponencials o funcions trigonomètriques. Totes aquestes funcions són contínues i diferenciables, i de fet gairebé tots els exemples de funcions que trobareu en aquest text de càlcul diferencial (o en qualsevol altre d'un nivell similar) no són res més que el resultat de fer "barreges" amb aquestes funcions. Aquestes barreges són el que, en un llenguatge més formal, s'anomena la **composició de funcions**. Per exemple, la funció $f(x) = \log[\sin^2(x)]$ és el resultat del procés de composicions següent:

$$x \mapsto \sin(x) \mapsto \sin^2(x) \mapsto \log[\sin^2(x)].$$

És a dir, hem compost el sinus amb el quadrat i, després, tot això amb el logaritme.

El que facilita molt el treball amb aquestes funcions és el que anomenem **regla de la cadena**, que implica que per a trobar les derivades de funcions compostes en tenim prou coneixent les derivades de les funcions elementals.

En el cas del càlcul univariant, la regla de la cadena ens diu que

$$\frac{d\,g[h(x)]}{d\,x} = g'[h(x)]\,h'(x),$$

és a dir, que el que hem de fer és anar multiplicant les successives derivades de les funcions components.

Per exemple,...

... en el cas de la funció que hem escrit abans tindríem: $f'(x) =$

$$= \frac{1}{\sin^2(x)}\,\Big(2\,\sin(x)\Big)\,\cos(x).$$

El primer terme correspon a la derivada del logaritme; el segon, a la derivada del quadrat i el tercer, a la derivada del sinus.

En el cas de diverses variables, la cosa es complica més, encara que si s'usa una notació adequada, tot resulta molt semblant al que acabem de veure. El que farem aquí no serà veure el cas més general possible, sinó solament dos casos particulars, que són els de més interès per a les aplicacions econòmiques. Per a simplificar la presentació, només escriurem el cas de dues variables. Quan hi ha més variables el problema és exactament igual.

Suposem que tenim una certa funció de dues variables $z = f(x, y)$. Això vol dir que a cada vector (x, y) associem un nombre z. Un tipus de composició molt freqüent és aplicar ara una funció univariant h a z. La funció composta resultant és $h(z) = h[f(x, y)]$, una nova funció de dues variables. Vegem-ne un parell d'exemples:

Si $f(x, y) = x^2 + y^2$ i $h(z) = \sqrt{z}$, llavors la funció composta és $h[f(x, y)] = \sqrt{x^2 + y^2}$, la norma del vector (x, y).

Si $f(x, y) = x^{2/3}\,y^{1/3}$ i $h(z) = \log(z)$, llavors la funció composta és $h[f(x, y)] = = \log[x^{2/3}\,y^{1/3}] = \frac{2}{3}\,\log(x) + \frac{1}{3}\,\log(y)$. Aquesta és una transformació típica en economia, que s'usa per a mostrar que totes aquestes funcions pertanyen a la classe de funcions Cobb-Douglas.

Exercici

3.7. Justifiqueu que $\log[x^{2/3}\,y^{1/3}] = \frac{2}{3}\,\log(x) + \frac{1}{3}\,\log(y)$.

Regla de la cadena I

Suposem que tenim una funció composta de la forma $g(x, y) = =h[f(x, y)]$. La regla de la cadena diu que les seves derivades parcials són

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = h'[f(x, y)]\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\;i$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = h'[f(x,y)]\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Esquemàticament, si $z = f(x,y)$, podem escriure

$$\frac{\partial g}{\partial x} = h'(z)\,\frac{\partial f}{\partial x}\; i$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = h'(z)\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Exemple 3.11. Sigui $f(x,y) = x^2 + y^2$, $h(z) = \sqrt{z}$ i $g(x,y) = h[f(x,y)] =$ $= \sqrt{x^2+y^2}$. Llavors tenim que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\Big(2\,x\Big) i$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\Big(2\,y\Big).$$

Exercici

3.8. Aplicant la regla de la cadena, trobeu les derivades parcials de la funció composta $g(x,y) = h[f(x,y)] = \log[x^{2/3}\,y^{1/3}]$.

Un altre cas típic en economia és quan partim d'una funció de dues variables $f(x,y)$, en què tant x com y depenen d'una altra variable p. Si suposem que hi ha dues funcions univariants u i v, en què $x = u(p)$ i $y = v(p)$, llavors la funció composta és $g(p) = f[u(p), v(p)]$.

Exemple 3.12. Suposem que $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x = u(p) = \sqrt{p}$ i $y = v(p) =$ $= p^2$. Llavors la funció composta és

$$g(p) = (\sqrt{p})^2 + \left(p^2\right)^2 = p + p^4.$$

Regla de la cadena II

Suposem que tenim una funció composta de la forma $g(p) = f(x,y) = f[u(p), v(p)]$. La regla de la cadena diu que la seva derivada és

$$g'(p) = \tfrac{\partial f}{\partial x}\,u'(p) + \tfrac{\partial f}{\partial y}\,v'(p).$$

Suposem que $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x = u(p) = \sqrt{p}$ i $y = v(p) = p^2$. Llavors podem trobar la derivada de la funció composta aplicant la regla de la cadena:

$$g'(p) = (2\,x)\,\frac{1}{2\,\sqrt{p}} + (2\,y)\,(2\,p) = (2\,\sqrt{p})\,\frac{1}{2\,\sqrt{p}} + (2\,p^2)\,(2\,p) = 1 + 4\,p^3$$

Podem veure que aquesta derivada coincideix amb la que hauríem trobat si primer haguéssim operat algèbricament fins a simplificar la funció composta a $g(p) = p + p^4$.

Exercici

3.9. Aplicant la regla de la cadena, trobeu la derivada de $g(p)$, obtinguda a partir de $f(x,y) = \log(x) + 2\,\log(y)$, on $x = p^2$ i $y = p^4$. Després, opereu algèbricament fins a simplificar la funció composta i determineu-ne la derivada directament, per a comprovar que amb els dos mètodes arribeu al mateix resultat.

3.8. Derivació de funcions implícites

En els models econòmics, les relacions d'equilibri s'acaben reduint gairebé sempre a sistemes d'equacions que descriuen les relacions entre les diferents variables que hi intervenen. En general, algunes de les variables són **endògenes**, és a dir, generades dins del model econòmic, mentre que d'altres són **exògenes**, la qual cosa vol dir que el seu valor es pren com una dada dins del model. El sistema d'equacions que descriu l'equilibri expressa en forma **implícita** la relació de dependència de les variables endògenes respecte de les variables exògenes. És per aquest motiu que, en economia, les funcions definides implícitament tenen un paper molt rellevant.

La teoria del càlcul diferencial també ens facilita molt les coses, ja que ens ensenya com podem diferenciar funcions definides implícitament sense necessitat de fer explícites aquestes relacions de dependència.

Exemples de relacions entre dues variables x i y definides

implícitament serien:

- $x^2\,\log(y) = 1$!

- $x + e^{-x} + y + \log(y) = 0$

Suposem que la relació entre les variables x i y és descrita per l'equació $f(x,y) = 0$. Suposem també que y és la variable endògena i x la variable exògena, és a dir, x és la variable independent i y, la variable dependent.

Il·lustrem com podem trobar la derivada d'aquesta relació sense necessitat de fer-la explícita primer. La idea és molt senzilla i es basa en el fet d'aproximar les coses linealment. Les solucions de l'equació que hem escrit no expressen altra cosa que la corba de nivell 0 de la funció f. Suposem que partim d'un cert punt que està sobre aquesta corba de nivell (és a dir, partim d'una certa solució a l'equació). Volem considerar què passa quan fem variar x en un cert valor Δx, i fem variar y en un cert valor Δy, però de tal manera que els nous valors $x + \Delta x$ i $y + \Delta y$ estiguin encara sobre la corba de nivell (és a dir, satisfacin també l'equació anterior). La fórmula de l'aproximació lineal a la funció diu que

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \quad f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y.$$

Però com que $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y)$, tindrem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y \quad 0.$$

Fixem-nos que aquesta expressió és **lineal en els increments**, per la qual cosa podem reordenar-la i obtenir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Prenent límits quan els increments tendeixen a zero, obtenim:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Aquest procediment que hem emprat serà vàlid sempre que puguem aïllar el quocient $\Delta y/\Delta x$, i això és possible si la divisió per $\frac{\partial f}{\partial y}$ té sentit, és a dir, si $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. El **teorema de la funció implícita** ens assegura que el raonament que acabem de fer està ben fonamentat: sempre que puguem aïllar el quocient d'increments, la funció implícita que estem considerant està ben definida matemàticament.

D'aquesta manera obtindrem les derivades als dos exemples que hem vist abans.

Exemple 3.14. Sigui $f(x, y) = x^2 \log(y) - 1 = 0$. Llavors tenim

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{2\,x\,\log(y)}{x^2/y} = -\frac{2\,y\,\log(y)}{x}.$$

Si no fem explícita la relació $y = g(x)$, llavors tampoc no podem expressar $\frac{d\,y}{d\,x}$ en termes de x només. Per a veure la diferència que hi ha entre això i tenir la relació explícita, podem resoldre l'equació de partida en termes de y i escriure:

$$y = g(x) = e^{x^{-2}},$$

d'on

$$\frac{d\,y}{d\,x} = g'(x) = -2\,x^{-3}\,e^{x^{-2}}.$$

(Observeu, per cert, l'aplicació de la regla de la cadena per a trobar aquesta derivada.) La derivada explícita no s'assembla gaire a la implícita, però podem passar de la segona a la primera si, a la seva expressió, posem $e^{x^{-2}}$ en comptes de y.

Exercici

3.10. Suposeu que l'equació $x+e^{-x}+y^2+\log(y)=0$ defineix una relació implícita entre x i y. Trobeu la derivada de y respecte de x aplicant la regla de la derivació implícita.

El que hem fet més amunt amb una equació i dues variables, ho podem fer amb múltiples equacions i variables (sempre que sigui superior el nombre de variables al d'equacions, és clar). El que hi ha a continuació ho donem més aviat a tall d'il·lustració per a veure com es pot generalitzar el que hem fet més amunt quan hi ha més variables i/o més equacions. La idea bàsica és que en aquest cas la cosa no canvia substancialment, sinó que només hi entren els elements que hem d'esperar amb el creixement de la dimensionalitat. Per exemple, suposem que les dues equacions

$$f(x,y,z)=0 \qquad \text{i} \qquad g(x,y,z)=0$$

defineixen una relació entre les tres variables x, y i z, en què y i z són les variables dependents i x és la variable independent. Noteu que, si tenim dues equacions i tres incògnites, els valors de dues de les incògnites estan determinats per les equacions, després de fixar el valor de la tercera. Si considerem, com abans, increments de les variables, trobarem:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\Delta z & 0i \\ \frac{\partial g}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}\,\Delta y + \frac{\partial g}{\partial z}\,\Delta z & 0. \end{array}$$

Dividint les dues equacions per Δx, tindrem:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\Delta z}{\Delta x} & 0\,i \\ \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\partial g}{\partial z}\,\frac{\Delta z}{\Delta x} & 0. \end{array}$$

Podem expressar aquesta equació en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ \frac{\Delta z}{\Delta x} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix}$$

i, per tant,

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ \frac{\Delta z}{\Delta x} \end{pmatrix} = -\left(\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{matrix} \right.^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Prenent límits quan $\Delta x \to 0$, tindrem

$$\begin{pmatrix} \frac{d\,y}{d\,x} \\ \frac{d\,z}{d\,x} \end{pmatrix} = -\left(\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{matrix} \right.^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

De tota manera, no sembla gaire convenient tractar de memoritzar aquesta fórmula, sinó que el més raonable seria tractar de seguir els mateixos passos per tal d'obtenir el resultat.

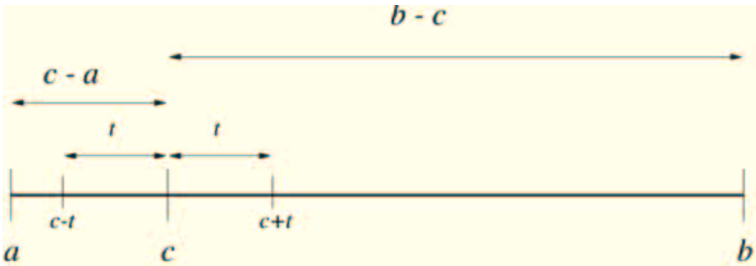
Observeu que per a arribar a aïllar els quocients dels increments, hem hagut d'invertir una matriu. Si aquesta matriu és efectivament invertible, el **teorema de la funció implícita** ens assegura que les funcions implícites amb què estem treballant estan ben definides matemàticament.

3.9. Solucionari

3.1. Això té un pèl de tautologia: tot punt d'un rectangle obert està envoltat pel mateix rectangle; per tant, un rectangle obert és un conjunt obert.

De fet, el que hauríem de precisar més aquí és quin és el significat d'"estar envoltat". En el text hem pres l'interval obert de nombres reals com a concepte primitiu i, per tant, podem admetre com a definició que qualsevol punt d'un interval obert està envoltat pel mateix interval i, en conseqüència, qualsevol punt d'un rectangle obert està envoltat pel mateix rectangle.

De fet, podríem anar més enllà i mostrar que tot punt d'un rectangle obert està envoltat per un altre rectangle obert centrat en aquell punt. Ara la cosa canvia, però no és gaire difícil de fer si entenem com s'ha de fer per a un interval obert de nombres reals. Per exemple, suposem que $c \in (a, b)$, és a dir $a < c < b$. Volem mostrar que hi ha un interval obert centrat a c i contingut a (a, b). Un interval centrat a c és de la forma $(c - t, c + t)$, on t és un cert nombre positiu. És senzill veure que qualsevol nombre t que sigui més petit que els dos nombres $b - c$ i $c - a$ dóna lloc a un interval centrat a c i contingut a (a, b). Un dibuix pot ajudar a veure-ho.



Interval obert

El punt c té un altre interval obert centrat al seu voltant.

En general, donat qualsevol punt $c = (c_1, c_2 \ldots c_n)$ d'un rectangle obert R, sempre hi ha un altre rectangle obert que està centrat a c i està enterament contingut a R. Per a trobar-lo, per cada un dels components fem l'operació que acabem de veure, i el resultat és el rectangle centrat a c que busquem.

3.2. El conjunt

$$\{ v \in \mathbb{R}^n : a < f(v) < b \}$$

és la intersecció dels conjunts oberts

$$\{ v \in \mathbb{R}^n : a < f(v) \} \text{ i } \{ v \in \mathbb{R}^n : f(v) < b \}$$

3.3. Els dibuixos són senzills i els deixem per a vosaltres.

- Si $f(x, y) = x$ i $g(x, y) = y$, llavors el conjunt és la intersecció dels conjunts oberts

$$\{ (x, y) : 0 < f(x, y) < 1 \} \text{ i } \{ (x, y) : 0 < g(x, y) < 1 \}$$

- Si $f(x, y) = x + y$, el conjunt és $\{ (x, y) : 0 < f(x, y) < 1 \}$.

- Si $f(x, y) = x^2 + y^2$, el conjunt és $\{ (x, y) : f(x, y) < 1 \}$.

- $\mathbb{R}^2$ és obert, ja que qualsevol punt està envoltat per un rectangle obert contingut a $\mathbb{R}^2$.

- Si $f(x, y) = x - y$, el conjunt és $\{(x, y) : f(x, y) < 0\}$.

3.4. El conjunt

$$\{v \in \mathbb{R}^n : a \leq f(v) \leq b\}$$

és la intersecció dels conjunts tancats

$$\{v \in \mathbb{R}^n : a \leq f(v)\} \text{ i } \{v \in \mathbb{R}^n : f(v) \leq b\}$$

3.5. Els dibuixos són senzills i els deixem per a l'estudiant.

- Si $f(x, y) = x$ i $g(x, y) = y$, llavors el conjunt és la intersecció dels conjunts tancats

$$\{(x, y) : 0 \leq f(x, y) \leq 1\} \text{ i } \{(x, y) : 0 \leq g(x, y) \leq 1\}$$

- Si $f(x, y) = x + y$, el conjunt és $\{(x, y) : 0 \leq f(x, y) \leq 1\}$.

- Si $f(x, y) = x^2 + y^2$, el conjunt és $\{(x, y) : f(x, y) \leq 1\}$.

- Si $f(x, y) = x + y$, el conjunt és la intersecció dels conjunts tancats

$$\{(x, y) : f(x, y) \leq 1\} \text{ i } \{(x, y) : f(x, y) \geq 1\}$$

3.6. Com hem fet abans, deixem els dibuixos per a vosaltres.

Els conjunts compactes són:

- El conjunt $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \text{ i } 0 \leq y \leq 1\}$ hem vist abans que és tancat. Que és fitat és immediat, ja que es tracta d'un rectangle fitat.

- El conjunt $\{(x, y) : x + y \leq 1,\ x \geq 0, \text{ i } y \geq 0\}$ és tancat, ja que és la intersecció dels dos tancats:
$$\{(x, y) : f(x, y) \leq 1\},\ \{(x, y) : g(x, y) \geq 0\}$$
on $f(x, y) = x + y$ i $g(x, y) = \min\{x, y\}$. Que és fitat ho mostra el fet que està inclòs dins del rectangle fitat
$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \text{ i } 0 \leq y \leq 1\}$$

- El conjunt $\left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ hem vist abans que és tancat. Que és fitat ho mostra el fet que està inclòs dins del rectangle fitat $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \text{ i } 0 \leq y \leq 1\}$.

- El conjunt $\{(x, y) : x + y = 1,\ x \geq 0, \text{ i } y \geq 0\}$ és tancat, ja que és la intersecció dels tres tancats:
$$\begin{aligned} &\{(x, y) : f(x, y) \leq 1\}, \\ &\{(x, y) : f(x, y) \geq 1\}, \quad \text{i} \\ &\{(x, y) : g(x, y) \geq 0\}, \end{aligned}$$
on $f(x, y) = x + y$ i $g(x, y) = \min\{x, y\}$. Que és fitat ho mostra el fet que està inclòs dins del rectangle fitat
$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \text{ i } 0 \leq y \leq 1\}$$

Els conjunts no compactes són:

- El conjunt $\{(x, y) : x \leq 1, \text{ i } y \leq 1\}$ no és fitat, ja que cada una de les dues components pertany a l'interval no fitat $(-\infty, 1]$.

- El conjunt $\{ (x,y) : 0 \le x+y \le 1 \}$ no és fitat: donat un nombre M tan gran com vulguem, sempre podem trobar x i y que siguin majors que M en valor absolut. Per exemple, $x = M+1$ i $y = -(M+1)$ pertanyen al conjunt.

- El conjunt $\left\{ (x,y) : x^2+y^2 < 1 \right\}$ no és tancat, ja que el seu complement és el conjunt $\left\{ (x,y) : x^2+y^2 \ge 1 \right\}$, que no és obert.

- El conjunt $\{ (x,y) : x+y = 1 \}$ no és fitat: donat un nombre M tan gran com vulguem, sempre podem trobar x i y que siguin majors que M en valor absolut. Per exemple, $x = M+2$ i $y = -(M+1)$ pertanyen al conjunt.

3.7. Es deriva immediatament de les relacions $\log(ab) = \log(a)+\log(b)$ i $\log(a^b) = b\ \log(a)$.

3.8. Tenim $g(x,y) = h[f(x,y)] = \log[x^{2/3}\, y^{1/3}]$. Llavors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{1}{x^{2/3}\, y^{1/3}}\, \frac{2}{3}\, x^{-1/3}\, y^{1/3} = \frac{2}{3}\, x^{-1} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{1}{x^{2/3}\, y^{1/3}}\, \frac{1}{3}\, x^{2/3}\, y^{-2/3} = \frac{2}{3}\, y^{-1} \end{aligned}$$

3.9. Obtenim $g(p)$ a partir de $f(x,y) = \log(x) + 2\ \log(y)$, prenent $x = p^2$ i $y = p^4$. Per tant,

$$g'(p) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dp} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dp} = \frac{1}{x}\, 2\, p + \frac{2}{y}\, 4\, p^3 = \frac{1}{p^2}\, 2\, p + \frac{2}{p^4}\, 4\, p^3 = \frac{2}{p} + \frac{8}{p} = \frac{10}{p}$$

Ara trobem $g(p)$ primer:

$$g(p) = \log(p^2) + 2\ \log(p^4) = 2\ \log(p) + 8\ \log(p) = 10\ \log(p)$$

Per tant,

$$g'(p) = \frac{10}{p}$$

3.10. Definim $f(x,y) = x + e^{-x} + y^2 + \log(y) = 0$. Les derivades parcials són

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 1 - e^{-x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2\, y + \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Per tant,

$$\left(1 - e^{-x}\right)\ \Delta x + \left(2\, y + \frac{1}{y}\right)\ \Delta y \approx 0$$

D'on aïllem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{-1 + e^{-x}}{2\, y + \frac{1}{y}}$$

Prenent límits obtenim la derivada de la funció implícita

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 + e^{-x}}{2\, y + \frac{1}{y}}$$

3.10. Sumari

Aquesta secció ha estat més formal que les precedents. Hem vist les definicions de continuïtat i diferenciació per a funcions multivariants.

Hem après a aplicar la regla de la cadena, que és l'eina que permet diferenciar funcions arbitràries obtingudes mitjançant la composició de funcions elementals conegudes.

Finalment, hem vist com podem diferenciar funcions definides implícitament, una eina molt útil per al que els economistes anomenen *anàlisi d'estàtica comparativa*.

Exercicis d'autoavaluació

1. Donada la funció $f(x,y) = xy$, què representa la corba de l'equació $xy = 9$?
a) Els punts que estan en una mateixa alçada igual a 9.
b) Els punts que defineixen els màxims de la funció.
c) Cap de les respostes anteriors és correcta.

2. Com es definiria la secció d'una funció $f(x,y)$ en el punt (x_0, y_0) seguint la direcció del vector (v,w)?
a) $(x_0, y_0) + f(v,w)$
b) $f((x_0, y_0) + t(v,w))$
c) $f(x_0, y_0) + f(tv, tw)$

3. La secció de la funció $f(x,y) = xy$ en el punt (2,3) i seguint la direcció (1,0) és
a) $3(2+t)$
b) $2(3+t)$
c) $t^2 + 2t - 3$

4. Les derivades parcials de la funció $f(x,y) = x^{y^2}$ són

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^2} 2y \ln y^2$
b) $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^2} 2y \ln x$
c) $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1} 2y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^2} 2y \ln x$

5. Si existeix $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 3$, llavors
a) el $\lim_{x\to 1}(\lim_{y\to 2} f(x,y)) = 3$.
b) el $\lim_{y\to 2}(\lim_{x\to 1} f(x,y))$ no necessàriament ha de valdre 3.
c) Cap de les respostes anteriors és correcta.

6. El domini de la funció $z = \ln(xy+1)$ és
a) $\mathrm{dom} z = \{(x,y) | xy \geq -1\}$.
b) $\mathrm{dom} z = \{(x,y) | xy > -1\}$.
c) $\mathrm{dom} z = \{(x,y) | x > 0 \text{ i } y > 0\}$.

7. La derivada de la funció implícita de x definida per l'equació $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ és

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{-9x}{4y}$
b) $\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{9y}$
c) $\frac{dy}{dx} = \frac{-3x}{2y}$

8. El conjunt donat pels punts (x,y), en què $x^2 + y^2 < 1$ és
a) compacte.
b) fitat però no tancat.
c) tancat.

9. La intersecció de dos conjunts tancats sempre és un conjunt tancat. Si S és tancat i T és compacte, aleshores podem assegurar que
a) $S \cap T$ és compacte.
b) $S \cup T$ és compacte.
c) Cap de les respostes anteriors és correcta.

10. El vector gradient de $f(x,y) = x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)$ en el punt (0,1) és
a) (1,0)
b) (1,1)
c) (0,0)

11. L'aproximació lineal a la funció $e^{x^2+y^2}$ és

a) $2e^{x^2+y^2}(x\,\Delta x + y\,\Delta y)$
b) $2e^{x^2+y^2}(\Delta x + \Delta y)$
c) $2xe^{x^2}\,\Delta x + 2ye^{y^2}\,\Delta y$

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. a, **2.** b, **3.** a, **4.** b, **5.** a, **6.** b, **7.** a, **8.** b, **9.** a, **10.** c, **11.** a.

Glossari

Conjunt compacte: tot aquell conjunt que és tancat i fitat alhora.

Conjunt fitat: aquell conjunt que està contingut dins d'un rectangle obert que té per components intervals fitats.

Conjunt obert: O és un conjunt obert si cada punt de O està envoltat d'un rectangle obert que està contingut enterament en O.

Conjunt tancat: conjunt complementari d'un conjunt obert.

Corba de nivell: donada una funció f i un nombre real c, la corba de nivell c és el conjunt de tots els vectors v, en què $f(v) = c$.

Derivada: funció lineal que aproxima una funció donada al voltant d'un punt. La gràfica de la derivada és el pla tangent, al punt al voltant del qual fem l'aproximació, al gràfic de la funció.

Derivada direccional: derivada de la funció univariant que s'obté quan avaluem una funció multivariant al llarg d'una recta.

Derivada parcial: derivada de la funció univariant que s'obté quan mantenim fixos els valors de totes les variables excepte una.

Funció implícita: relació de dependència entre dues variables o més, definida a partir d'una equació o d'un sistema d'equacions.

Gradient: aquell vector que té com a components les derivades parcials de la funció. Sempre apunta en la direcció de creixement màxim de la funció.

Multivariant: funció amb dues o més variables.

Rectangle obert: subconjunt de $\mathbb{R}^n$ que resulta quan prenem un interval obert a cada eix i després trobem tots els vectors que tenen cada component dins dels seus intervals.

Regla de la cadena: norma per a trobar la derivada d'una funció composta a partir de les derivades de les funcions components.

Bibliografia

Bones obres de consulta sobre càlcul diferencial i integral, amb un enfocament més formal que el que nosaltres hem fet servir en aquest curs són:

Apostol, Tom (1967). *Cálculus*. Reverté.

Salas, S.; Hille, Einar (). *Calculus*. Reverté.

Podeu trobar nombrosos problemes resolts al llibre:

Sanz, Paloma; Vázquez, Francisco, J. (1995). *Cuestiones de cálculo*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Una obra molt bona dirigida a economistes, però encara no traduïda al català ni al castellà, és:

Sydsaeter, Knut; Hammond, Peter (1995). *Mathematics for Economic Analysis*. Englewood cliffs, N.J.: Prentice-Hall International.