Anàlisi de sensibilitat

Daniel Blabia Girau

amb la col·laboració de
David Pujolar Morales
José Luís Martínez Parra

PID_00186433

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

Un cop s'ha resolt un programa lineal, pot ser interessant estudiar l'impacte que tindran els canvis en els paràmetres inicials del problema sobre la solució obtinguda. En aquest sentit, són susceptibles d'anàlisi els efectes de variacions introduïdes a **b**, **c** i **A**.

Des d'un punt de vista pràctic, aquesta qüestió és fàcil d'aplicar a l'àmbit de la gestió empresarial. Així, per exemple, una variació en el pressupost disponible, una modificació dels preus de venda o un increment en la productivitat no són altra cosa que canvis a **b**, **c** i **A**, respectivament, en un problema de planificació de producció. D'altra banda, ens podríem plantejar la possibilitat d'introduir nous productes (variables) o noves restriccions.

Davant totes aquestes modificacions tenim dues alternatives per a conèixer-ne tots els efectes sobre la solució:

1) Una consisteix a resoldre el problema des del principi amb els valors nous.

2) L'altra és intentar derivar un seguit de resultats que possibilitin la inferència de la nova solució sense haver de resoldre explícitament el problema, és a dir, efectuar una anàlisi de sensibilitat.

L'**anàlisi de sensibilitat** permet conèixer els efectes que una modificació en les condicions inicials del problema provoca en la solució òptima sense haver de resoldre el problema de nou.

A continuació estudiem amb detall totes i cada una de les modificacions que es poden produir en el problema.

Des d'un punt de vista més matemàtic, el que fem és analitzar la sensibilitat de la solució d'un problema lineal respecte de cada un dels seus paràmetres. És a dir, volem estudiar en quina mesura una solució és sensible a canvis que es poden donar en els seus paràmetres avaluant els efectes derivats d'aquests canvis.

L'esquema d'aquest mòdul didàctic és el següent: sobre un programa inicial ja resolt anirem plantejant consecutivament un seguit de modificacions sobre alguns dels seus paràmetres amb la finalitat de saber quins efectes tenen aquestes modificacions sobre el resultat (el pla de producció) inicial; és a dir, per a veure com és de sensible aquella solució. Així doncs, plantejarem una modificació en el problema i n'estudiarem els efectes. Després tornarem a la situació inicial per a introduir un altre canvi, i així successivament.

Objectius

En els materials didàctics d'aquest mòdul, l'estudiant trobarà les eines bàsiques per a assolir els objectius següents:

1. Determinar l'impacte teòric de variacions a **b**, **c** i **A** i també el nombre de restriccions i de variables que influeixen en la solució òptima.

2. Deduir, a partir dels resultats aportats per l'anàlisi teòrica, procediments que automatitzin la cerca de la nova solució del problema sense haver de resoldre'l des de l'inici.

1. Fonaments de l'anàlisi de sensibilitat

Mitjançant l'anàlisi de sensibilitat es vol examinar l'impacte que exerceixen uns canvis discrets (és a dir, de caràcter puntual) en els paràmetres sobre la solució que s'obté del problema.

L'**anàlisi de sensibilitat** s'entén com el procés d'anàlisi dels canvis que pot experimentar la solució d'un problema quan s'introdueixen variacions en algun dels seus paràmetres o en la seva estructura.

L'anàlisi de sensibilitat s'aplica majoritàriament a problemes de producció, en els quals, donats uns productes amb unes característiques tècniques de consum de materials, de beneficis unitaris, etc., se'ns demana que fem el pla de producció per a cada un dels productes.

Un pla de producció...

... és aquell que ens indica quins béns s'acabaran produint i en quina quantitat.

Amb l'anàlisi de sensibilitat es pot estudiar el grau de sensibilitat que té la solució d'un programa lineal enfront de variacions dels seus paràmetres inicials. D'aquesta afirmació es desprèn la metodologia de treball que cal seguir, que consistirà a agafar un programa ja resolt i treballar-hi estudiant com es comporta la solució davant variacions d'un determinat paràmetre.

2. Base teòrica de l'anàlisi de sensibilitat

A continuació recollim totes les relacions bàsiques que s'estableixen a les taules de l'algoritme símplex, de manera que cada vegada que efectuem un canvi vindrem en primer lloc a aquest punt per veure sobre quins elements de la taula repercuteixen cada un dels canvis que portem a terme.

Donat un programa lineal com el següent:

$$\begin{aligned}&[\text{OPT}]\ f(\mathbf{X}) = \mathbf{c}'\mathbf{X}\\ &\text{s.a}\\ &\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b},\\ &\mathbf{X} \geq \mathbf{0},\end{aligned}$$

és possible establir els resultats següents a partir de l'àlgebra lineal, els quals seran de màxima utilitat per a comprendre les operacions implícites en l'anàlisi de sensibilitat:

- $\mathbf{B}^{(i)}\mathbf{T}^{(i)} = \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}^{(i)-1}\mathbf{A} = \mathbf{T}^{(i)};$ (2.1)
- $\mathbf{A}\mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{b} \equiv \mathbf{B}^{(i)}\,\overline{\mathbf{X}}^{(i)} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \overline{\mathbf{X}}^{(i)} = \mathbf{B}^{(i)-1}\mathbf{b};$ (2.2)
- $(\mathbf{z} - \mathbf{c})^{(i)'} = \overline{\mathbf{c}}^{(i)'}\,\mathbf{T}^{(i)} - \mathbf{c}';$ (2.3)
- $f(\mathbf{X}^{(i)}) \equiv \mathbf{z}^{(i)} = \mathbf{c}'\mathbf{X}^{(i)} = \overline{\mathbf{c}}^{(i)}\overline{\mathbf{X}}^{(i)},$ (2.4)

Recordeu que un vector o una matriu transposats es denoten amb una prima.

on:

a) El superíndex (i) fa referència a la iteració i-èsima, és a dir, que aquestes igualtats es compleixen per a tota iteració o taula i, d'altra banda, l'última iteració (l'òptima) se sol denotar amb $*$.

Vegeu la notació emprada al subapartat 2.2 del mòdul "L'algoritme símplex" d'aquesta assignatura.

b) **A** és la matriu dels coeficients tècnics (paràmetres inicials, a_{ji}).

c) $\mathbf{T}^{(i)}$ és la matriu dels coeficients tècnics (x_{jk}) de la iteració i-èsima. Noteu que a la primera iteració $\mathbf{A} \equiv \mathbf{T}^{(1)}$.

d) $\mathbf{B}^{(i)}$ és la matriu formada per aquells vectors columna $\mathbf{P}^i$ de la matriu **A** associats a les variables que a la iteració i-èsima són a la base, posats en l'ordre en què figuren a la base d'aquesta iteració.

e) $\mathbf{B}^{(i)-1}$ és la inversa de $\mathbf{B}^{(i)}$, i es pot obtenir de manera immediata si tenim en compte que està formada pels vectors de $\mathbf{T}^{(i)}$ d'aquelles variables que eren a la base en la iteració de partida, posades segons l'ordre en què figuren les variables a la base en aquella primera iteració. Noteu que a la primera iteració $\mathbf{B}^{(1)} \equiv \mathbf{B}^{(i)-1} = \mathbf{I}$.

f) $\overline{\mathbf{X}}^{(i)}$ és el vector format pels valors de les variables que són a la base (V_B) a la iteració *i*-èsima. Per tant, el vèrtex *i*-èsim estarà format per unes components a la base i unes que no són a la base que valdran zero. Així, $\mathbf{X}^{(i)} = (\overline{\mathbf{X}}^{(i)}_{(J)}, \mathbf{0}_{(K)})$.

g) $\overline{\mathbf{c}}^{(i)}$ és el vector format pels coeficients de les variables que són a la base a la iteració *i*-èsima.

h) $(\mathbf{z} - \mathbf{c})^{(i)'}$ és el vector dels valors de $z_i - c_i$ en la iteració *i* èsima.

Exemple de notació

Presentem un exemple en què il·lustrem la notació emprada en aquest mòdul. A partir del plantejament següent:

$$[\text{MAX}]\ z = 7x_1 + 10x_2$$

s.a

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12,$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 10,$$
$$x_i \geq 0,$$

resolem el programa lineal i arribem al resultat que es mostra a continuació:

			7	10	0	0
B	***c***	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3 x_4	0 0	12 10	4 2	3 5	1 0	0 1
$z^1 = 0$			−7	−10	0	0
x_3 x_2	0 10	6 2	14/5 2/5	0 1	1 0	−3/5 1/5
$z^2 = 20$			−3	0	0	10/5
x_1 x_2	7 10	15/7 8/7	1 0	0 1	5/14 −1/7	−3/14 10/35
$z^* = 185/7$			0	0	40/14	2

Els valors de les matrius per a cada una de les taules són els següents:

1) Per a la primera taula:

- $\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}^{(1)-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- $\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}$; $\overline{\mathbf{X}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \end{bmatrix}$; $\overline{\mathbf{c}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Els vectors estan ordenats segons la posició que ocupen a la primera base, és a dir, s_1, s_2, i s_3.

2) A la segona taula, els coeficients de cada element s'han modificat i són aquests:

- $\mathbf{T}^{(2)} = \begin{bmatrix} 14/5 & 0 & 1 & -3/5 \\ 2/5 & 1 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}^{(2)-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$.

- $\mathbf{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\overline{\mathbf{X}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\bar{\mathbf{c}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$.

3) Finalment, a l'última taula els valors són aquests:

- $\mathbf{T}^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/14 & -3/14 \\ 0 & 1 & -1/7 & 10/35 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}^{*} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}^{*-1} = \begin{bmatrix} 5/14 & -3/14 \\ -1/7 & 10/35 \end{bmatrix}$.

- $\mathbf{X}^{*} = \begin{bmatrix} 15/7 \\ 8/7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\overline{\mathbf{X}}^{*} = \begin{bmatrix} 15/7 \\ 8/7 \end{bmatrix}$; $\bar{\mathbf{c}}^{*} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$.

De les quatre relacions anteriors cal destacar que l'equació 2.1 ($\mathbf{B}^{(i)}\mathbf{T}^{(i)} = \mathbf{A} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \mathbf{B}^{(i)-1}\mathbf{A} = \mathbf{T}^{(i)}$) revesteix un especial interès perquè, donat un vector de coeficients $\mathbf{P}^{i}$ qualsevol, ens permet obtenir directament l'expressió que tindrà a la iteració ***i***-èsima. En altres paraules, donat un vector $\mathbf{P}^{i}$ de $\mathbf{A}$, la matriu $\mathbf{B}^{*-1}$ el "transforma" en un nou vector, que és precisament el que formarà part de la matriu $\mathbf{T}^{*}$. Per això, en molts textos $\mathbf{B}^{*-1}$ es denomina **matriu de transformació**, i es denota per **MT**.

Exemple de matriu de transformació

Com a il·lustració de la utilitat que té la matriu $\mathbf{B}^{*-1}$, prenguem el vector $\mathbf{P}^{1}$ de la primera taula de l'exemple anterior i multipliquem-lo per $\mathbf{B}^{*-1}$ a fi d'obtenir-ne directament el valor a l'última taula, $\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{P}^{1} = \mathbf{P}^{1*}$, que en el nostre cas és:

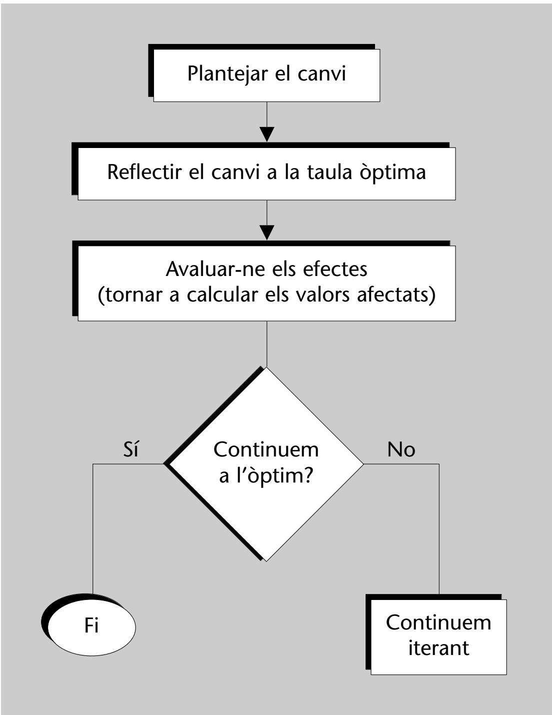
$$\begin{bmatrix} 5/14 & -3/14 \\ -1/7 & 10/35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Canvis en els paràmetres del problema

Analitzarem els diferents canvis en els paràmetres suposant que s'efectuen individualment, atès que els canvis simultanis en diversos paràmetres es poden descompondre en els seus components individuals. En aquesta línia, considerarem els factors següents:

Tipus de canvis	
Canvis en els paràmetres	**Canvis en l'estructura**
• Canvis a **c** • Canvis a **b** • Canvis a **A**	• Inclusió de noves restriccions • Inclusió de noves variables

Cada vegada que efectuem un canvi seguirem els passos que esquematitzem al quadre següent:



Durant tot aquest procés el vector que tenim a la base continua sent vàlid fins que no es demostri que deixa de ser-ho.

D'altra banda, aquesta anàlisi es pot complementar en el sentit de determinar quins són els intervals de variació entre els quals pot oscil·lar un paràmetre sense que es modifiqui l'optimació de la taula de l'algoritme símplex. És a dir, serà interessant analitzar en quina mesura pot variar algun component de **c** o de **b** sense que variï el pla de producció (la solució).

3.1. Canvi en un valor de la funció objectiu (c_i)

El fet que variï el preu d'una determinada primera matèria o que haguem de tornar a negociar preus amb clients poden ser algunes de les causes que ens obliguin a retocar els nostres marges o beneficis, és dir, la **c**. Per a comprovar els efectes de cada un dels canvis que proposarem a continuació, en primer lloc haurem d'anar a la base teòrica per veure on és el paràmetre que s'ha canviat a fi de mostrar-lo després en un exemple.

Així, en el nostre cas podem observar que en les equacions 2.3 i 2.4, que veiem a continuació, figuren les c_i:

- $(\mathbf{z} - \mathbf{c})^{(i)\prime} = \overline{\mathbf{c}}^{(i)}\mathbf{T}^{(i)} - \mathbf{c}'$. (2.3)

- $f(\mathbf{X}^{(i)}) \equiv \mathbf{z}^{(i)} = \mathbf{c}'\mathbf{X}^{(i)} = \overline{\mathbf{c}}^{(i)}\overline{\mathbf{X}}^{(i)}$. (2.4)

Per tant, és fàcil determinar que quan canviem una c_i haurem de tornar a calcular algun dels valors de les components del vector $(\mathbf{z} - \mathbf{c})^{(i)}$ i el de $z^{(i)}$ a fi de poder analitzar després l'optimitat de la taula.

Així, en cas que la nova taula no sigui òptima, continuarem aplicant l'algoritme símplex. Sovint, al llarg del mòdul farem una modificació d'algun paràmetre. Denotarem el paràmetre modificat amb un punt gruixut de superíndex. Per exemple, si modifiquem el paràmetre c_i, el paràmetre modificat el denotem per $c_i^{\bullet}$. !

Variacions en el vector de coeficients de la funció objectiu a Tropicfruit Inc.

Suposem que l'empresa Tropicfruit Inc., davant la necessitat d'augmentar el preu de venda d'alguns dels seus productes, decideix fer un estudi previ per a conèixer per endavant els efectes que aquestes variacions poden provocar en el seu benefici global i en el seu pla de producció. Ens plantegem, doncs, la possibilitat d'incrementar el preu de cada un dels productes en 10 euros; fem un estudi individualitzat per a cada producte:

Vegeu el plantejament de Tropicfruit Inc. i la seva resolució, respectivament, als exercicis d'autoavaluació 2 dels mòduls "Introducció a la investigació operativa" i "L'algoritme símplex" d'aquesta assignatura.

1) Si ens plantegem un increment en el preu de venda del producte Katxumbo (x_1) de 10 euros, en realitat preveiem un canvi de c_1 d'una variable x_1 que no pertany a la base a l'última taula.

Això implicarà, a efectes de canvis físics a la taula, una modificació de c_1 a la part superior de la taula, de manera que passarà de valer $c_1 = 10$ a valer $c_1^{\bullet} = 10 + 10 = 20$. Fer aquesta modificació representa el següent:

a) En un primer pas reflectim el canvi de c_1 a la taula:

			20	12	9	0	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1	0	20	3	0	0	1	1	−1
x_2	12	40	2	1	0	0	1	0
x_3	9	5	−1	0	1	0	−1/2	1/2

b) En un segon pas hem de tornar a calcular els valors que resulten afectats pel nostre canvi de c_1. En el nostre cas es tracta de 2.3 i 2.4, és a dir:

			20	12	9	0	0	0
B	***c***	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1	0	20	3	0	0	1	1	−1
x_2	12	40	2	1	0	0	1	0
x_3	9	5	−1	0	1	0	−1/2	1/2
z = 525			**−5**	**0**	**0**	**0**	**15/2**	**9/2**

Aquí els valors de z_i, i també els de $z_i - c_i$ de les variables que no són x_1, romanen invariables. D'altra banda, com podem comprovar, el valor de $z_1 - c_1$ ara és −5, de manera que el problema passa a estar inacabat; és a dir, davant aquest canvi, la solució actual ja no és vàlida (ens ho indica el fet que un valor de $z_i - c_i$ d'una variable fora de la base passi a ser negatiu) i el mateix algoritme ens guia cap a la nova solució òptima (fent entrar la variable x_1 a la base perquè prengui un valor diferent de zero).

La nova solució consisteix a passar a produir 20/3 de x_1, 80/3 de x_2 i 35/3 de x_3, cosa que ens reportarà un benefici de 1.675/3 (≈ 55.833 euros) i, de fet, el que ha passat és lògic, ja que el producte x_1, que fins ara no resultava atractiu de produir (ho eren més els productes x_2 i x_3), ha passat a ser-ho perquè hem incrementat el benefici, de manera que el mateix algoritme detecta que la solució actual és millorable introduint x_1 a la base. Així ens oferirà una nova solució i, per tant, un valor millor de z.

És convenient que efectueu l'activitat 1 a fi de reforçar l'aprenentatge.

2) Si ara ens plantegem un augment del preu de venda de Kimbombo (x_2), que és una variable que sí que és a la base a l'última taula, els canvis seran de la mateixa naturalesa, però variarà el nombre d'operacions que cal dur a terme:

a) En primer lloc, cal reflectir el canvi a la taula; passem de $c_2 = 12$ a $c_2^* = 12 + 10 = 22$ a l'última taula; per tant:

			10	**22**	9	0	0	0
B	***c***	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1	0	20	3	0	0	1	1	−1
x_2	**22**	40	2	1	0	0	1	0
x_3	9	5	−1	0	1	0	−1/2	1/2

Observeu que en aquest cas la substitució s'ha portat a terme en dues ubicacions, de manera que ara sí que variaran tots els valors de $z_i - c_i$ i també el valor de z.

b) En segon lloc, passem a avaluar els efectes, que, com ja sabem per la base teòrica, significa tornar a calcular per a 2.3 i 2.4 els valors de $z_i - c_i$ i el valor de z.

			10	**22**	9	0	0	0
B	***c***	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1	0	20	3	0	0	1	1	−1
x_2	**22**	40	2	1	0	0	1	0
x_3	9	5	−1	0	1	0	−1/2	1/2
$z^* = 925$			**25**	**0**	**0**	**0**	**17,5**	**4,5**

Hem tornat a calcular tots els valors de $z_i - c_i$ i cap no ens ha donat negatiu, de manera que aquesta solució (aquest pla de producció) continua essent l'òptim, però ens aporta un benefici més gran que abans. Observeu que en aquest cas també canvien el valor de z i tots els valors de $z_i - c_i$.

3) En el cas del tercer producte, Angaua, atès que la variable associada (x_3) és a la base, l'anàlisi és anàloga a la que hem efectuat en el punt anterior.

Interval de variació

Una de les preguntes clàssiques que faria un gerent una vegada facilitat el pla de producció, és entre quin interval de preus (beneficis) es pot moure sense que li varïi la composició del seu pla de producció. En altres paraules, entre quins valors poden variar les c_i sense que es torni negatiu cap dels valors de $z_i - c_i$ i, per tant, haguem d'entrar (i, conseqüentment treure) alguna variable.

Rang de variació del benefici a Tropicfruit Inc.

Suposem que el gerent de Tropicfruit Inc., un cop se li ha donat el pla de producció, es fa les preguntes següents:

1) Entre quins valors es pot moure el preu de venda del Katxumbo sense que ens varïi el pla de producció òptim? O, dit d'una altra manera, fins on puc apujar el preu del Katxumbo sense que ens varïi el pla de producció actual?

Atès que Katxumbo (x_1) és un producte que no és a la base, direm que canviarà la composició del pla de producció quan x_1 ens demani entrar a la base, i això serà quan $z_1 - c_1 \leq 0$. Per tant, posarem $z_1 - c_1$ en funció del seu benefici (c_1):

$$z_1 - c_1 = (0 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 9 \cdot -1) - c_1 = 15 - c_1 \leq 0.$$

Així, podem afirmar que si $c_1 \geq 15$ ens interessarà produir Katxumbo i, per tant, ens canviarà la composició del pla de producció. Com que sabem que els costos de producció són de 1.925,75, podem afirmar que a partir d'un preu de venda de 3.425,75 euros (per cada cent litres) ens valdrà la pena produir Katxumbo (c_1 = 3.425,75 − 1.925,75 = 1.500).

2) Entre quins preus es pot moure el preu de venda de Kimbombo sense que varïi la composició del pla de producció? En aquest cas actuarem d'una altra manera, ja que la seva variable (x_2) és a la base i, per tant, es modificarà la composició si alguna variable que no és a la base ens demana entrar. Com que les variables que poden entrar a la base són x_1, s_2 i s_3, haurem de posar els valors de $z_i - c_i$ d'aquestes variables en funció de c_2 i mirar quan es tornen negatius:

- $z_{x1} - c_{x1} = (0 \cdot 3 + c_2 \cdot 2 + 9 \cdot -1) - 10 = 2c_2 - 19 \leq 0 \Rightarrow c_2 \leq 19/2 = 9{,}5$.
- $z_{s2} - c_{s2} = (0 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + 9 \cdot -1/2) - 0 = c_2 - 4{,}5 \leq 0 \Rightarrow c_2 \leq 4{,}5$.
- $z_{s3} - c_{s3} = (0 \cdot -1 + c_2 \cdot 0 + 9 \cdot 1/2) - 0 = 4{,}5$.

Actualment el valor de c_2 és 12, però pot anar baixant fins a 9,5 sense que varïi el pla de producció, ja que és a partir d'aquest valor quan la variable x_1 ens demana entrar a la base, perquè el seu valor de $z_{x1} - c_{x1}$ es torna zero i tindríem una solució múltiple. Una c_2 de 9,5 implica un preu de venda de 2.303,75 euros per cada cent litres (2.303,75 − − 1.353,75 = 950, on 1.353 és el cost de producció).

3.2. Canvi en la disponibilitat d'un recurs (b_j)

Per a comprovar els efectes de cada un dels canvis que proposarem, primerament anirem a la base teòrica per comprovar on és el paràmetre que s'ha canviat i a continuació veure'l en un exemple.

D'entrada, observem que en les equacions 2.2 i 2.4 hi surt **b**:

- $\mathbf{AX}^{(i)} = \mathbf{b} \equiv \mathbf{B}^{(i)}\overline{\mathbf{X}}^{(i)} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \overline{\mathbf{X}}^{(i)} = \mathbf{B}^{(i)-1}\mathbf{b}$ (si canviem **b** canvia $\overline{\mathbf{X}}^{(i)}$). (2.2)
- $f(\mathbf{X}^{(i)}) \equiv z^{(i)} = \mathbf{c}'\mathbf{X}^{(i)} = \overline{\mathbf{c}}^{(i)\prime}\overline{\mathbf{X}}^{(i)\prime}$ (si canviem $\overline{\mathbf{X}}^{(i)\prime}$ canvia z^*). (2.4)

b surt de manera implícita a 2.4, ja que $\overline{\mathrm{X}}^*$ no deixa de ser el b inicial transformat taula per taula.

Aleshores, podem afirmar que un canvi a **b** afecta (per 2.2) el valor de les variables bàsiques (V_B) i, com a conseqüència d'això, (per 2.4) haurem de tornar a calcular z.

Una vegada conegut el nou vector de V_B podrem (per 2.4) calcular la nova z corresponent al nou vector de disponibilitats (**b**). Aleshores:

- Si tots els components del vector solució són no negatius, aquest constituirà el nou òptim del problema.
- Si hi ha algun valor de V_B amb valor negatiu, i atès que els valors de $z_i - c_i$ continuaran essent adequats a l'òptim, haurem d'aplicar l'algoritme símplex dual.

Variacions en el vector de disponibilitats a Tropicfruit Inc.

Reprenent l'exemple de Tropicfruit Inc., suposem que el transportista dels kiwis en perd uns quants pel camí, i en lloc d'arribar els 4.000 quilos que esperaven només els n'arriben 3.000. El vector inicial:

Vegeu l'exemple de Tropicfruit Inc. que hem fet servir al subapartat 3.1 d'aquest mòdul didàctic.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix}$$

passa a ser:

$$\mathbf{b}^{\bullet} = \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \\ 50 \end{bmatrix},$$

que si es multiplica per $\mathbf{B}^{*-1}$, essent:

$$\mathbf{B}^{*-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

resulta ($\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{b}^{\bullet} = \mathbf{b}^{\bullet *} = \mathbf{V}^*_{\mathbf{B}}$), que en el nostre cas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix} = \mathbf{V}^*_{\mathbf{B}}.$$

Reflectim aquests canvis a la taula:

			10	**22**	**9**	**0**	**0**	**0**
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1	0	**10**	3	0	0	1	1	−1
x_2	12	**30**	2	1	0	0	1	0
x_3	9	**10**	−1	0	1	0	−1/2	1/2
z^* = **450**			5	0	0	0	7,5	4,5

Una vegada col·locats aquests nous valors, només hem de tornar a calcular el valor de la z^*, ja que aquests valors no afecten per a res el càlcul dels valors de $z_i - c_i$. Per tant, la solució continuarà essent òptima, tret que en baixar el nou vector $\mathbf{b}^{\bullet}$ se'ns tornés negatiu algun dels valors; aleshores estaríem davant d'una solució no possible, en què tots els valors de $z_i - c_i$ estan adequats a l'òptim, però una variable bàsica té valor negatiu. Caldria, doncs, aplicar l'algoritme símplex dual.

Interval de variació

Igual que en el cas del vector **c** de coeficients de la funció objectiu, en aquest cas també és possible que un gerent estigui interessat a saber fins a quins valors es poden reduir (o ampliar) les disponibilitats de cada una de les primeres matèries sense que varii la composició del pla de producció. En aquest cas sabem que un canvi en la composició del pla de producció causat per les components de $\mathbf{b}^{\bullet}$ solament es pot produir si una d'aquestes es torna negativa.

Rang de variació de la disponibilitat a Tropicfruit Inc.

El gerent de Tropicfruit Inc. es pregunta ara quin rang de variació han de tenir les disponibilitats inicials conjuntament per tal que a l'última taula no passin a ser negatives. Es tracta de fer el següent:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{b}^{\bullet} = \begin{bmatrix} 30+\lambda \\ 40+\lambda \\ 50+\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^{*-1}\mathbf{b}^{\bullet} = \mathbf{b}^{\bullet *} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{b}^{\bullet *} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30+\lambda \\ 40+\lambda \\ 50+\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20+\lambda \\ 40+\lambda \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Per consegüent, a fi que cap b_j no es torni negativa, la λ ha de ser més gran que -20. És a dir, podem reduir totes les disponibilitats fins a 20 unitats sense que cap variable no se'ns torni negativa, i si les reduïm a 21, es pot comprovar que la primera variable que ens sortirà de la base és s_1, que donarà pas a s_3.

3.3. Canvi en un coeficient tècnic (a_{ji})

La modificació d'un coeficient tècnic a_{ji} en un dels problemes d'assignació de recursos (o de producció) habituals podria ser motivada per una variació en la productivitat real d'un determinat article.

Per a comprovar els efectes de cada un dels canvis que proposem, primerament haurem d'anar a la base teòrica per veure on és el paràmetre que s'ha canviat, a fi de veure'l en un exemple.

En el nostre cas observem que en les equacions 2.1 i 2.3 figuren les a_{ji}:

- $\mathbf{B}^{(i)}\mathbf{T}^{(i)} = \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}^{(i)-1}\mathbf{A} = \mathbf{T}^{(i)}$ (en variar **A** es modifica **T**). (2.1)

- $(\mathbf{z} - \mathbf{c})^{(i)\prime} = \bar{\mathbf{c}}^{(i)\prime}\mathbf{T}^{(i)} - \mathbf{c}'$ (la variació de **T** afecta les $z_i - c_i$). (2.3)

Els coeficients a_{ji} surten de manera implícita a l'expressió 2.3.

Així, doncs, amb 2.1 veiem un efecte, però també la seva solució; és a dir, d'una banda constatem que si canviem un a_{ji} de la primera taula (vector $\mathbf{P}^i$ de A) això afectarà $\mathbf{T}^*$. Però d'altra banda veiem que coneixent el nou vector $\mathbf{P}^i$ de **A** amb la $\mathbf{B}^{(i)-1}$ podem determinar fàcilment el seu valor com a $\mathbf{P}^{i*}$ a l'última taula ($\mathbf{T}^*$).

Anàlogament, amb 2.3 veiem que el fet d'haver modificat algun vector de $\mathbf{T}^*$ implicarà haver de tornar a calcular les components de $(\mathbf{z} - \mathbf{c})^*$.

Des del punt de vista matemàtic, aquests són els únics efectes d'un canvi a a_{ji}, però cal anar amb compte, perquè, en cas que es tracti d'un problema de planificació de la producció (assignació de recursos), en fer un canvi a a_{ji} es deriva un segon canvi. Concretament, una variació en la composició tècnica del producte afecta el seu cost i, per tant, també afecta **c**. Caldrà tractar aquest punt com un canvi en un valor de **c** i això implica tornar a calcular els valors de $z_i - c_i$ i el de z (en cas que la c_i sigui d'una variable a la base).

3.3.1. Coeficient associat a una variable que no pertany a l'última base

Establim la diferenciació entre coeficients associats a variables a la base i a variables fora de la base perquè si canviem el vector $\mathbf{P}^{i}$ inicial (vector de **A**) d'una variable que a l'última taula és a la base, hem de ser conscients que, una vegada incorporat a l'última taula, ha de ser canònic, i si no ho és, haurem d'efectuar les operacions elementals que siguin necessàries entre files (restriccions) per a aconseguir-ho.

Vegeu les operacions elementals sobre una matriu per a aconseguir tenir una base canònica al subapartat 3.3.2 d'aquest mòdul didàctic.

A la pràctica, el procés que cal seguir consisteix a calcular l'expressió que el vector $\mathbf{P}^{i}$ subjecte a modificació tindrà a l'última taula, fent $\mathbf{P}^{k\bullet *} = \mathbf{B}^{*-1}\mathbf{P}^{k\bullet}$, i essent $\mathbf{P}^{k\bullet *}$ el vector que conté el coeficient a_{ji} modificat. Una vegada hàgim efectuat aquesta operació, determinarem si els valors de $z_i - c_i$ són adequats a l'òptim, i si ho són significarà que l'òptim no varia. Si no és així, continuarem aplicant l'algoritme símplex.

Recordeu que reservem l'índex *k* per a les variables que no són a la base.

Variacions en els coeficients tècnics a Tropicfruit Inc. (I)

Suposem que ens indiquen que hi ha un error en la quantitat de kiwis (segona restricció) necessaris per a fabricar Katxumbo, i que en lloc de 2 només se'n necessita 1. Quines implicacions té aquest error? Vegem-ho:

a) D'entrada, cal reflectir els canvis a la taula. Aquí, la segona restricció, que era $2x_1 + x_2 \leq 40$, queda com $x_1 + x_2 \leq 40$. Això ens afectarà el vector columna. En aquest cas treballarem amb el nou vector columna $\mathbf{P}^{1\bullet}$. Per tant, el vector:

$$\mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

passa a ser:

$$\mathbf{P}^{1\bullet} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

i si el baixem a l'última taula coneixerem el seu valor a $\mathbf{T}^*$. Així, $\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{P}^{1\bullet} = \mathbf{P}^{1\bullet *} \in \mathbf{T}^*$. En el nostre cas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Podem procedir, doncs, a inserir-lo a l'última taula, però caldrà anar amb compte perquè simultàniament es produeix un segon canvi, que és el de c_1, ja que si variem la composició tècnica del producte fem canviar també el seu cost (en el nostre cas disminueix en 600 euros) i, per tant, també el seu benefici (en el nostre cas augmenta la mateixa quantitat), que passa de 10 a 16.

			16	**12**	**9**	**0**	**0**	**0**
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1	0	20	**2**	0	0	1	1	−1
x_2	12	40	**1**	1	0	0	1	0
x_3	9	5	**−1/2**	0	1	0	−1/2	1/2

b) En segon lloc, cal avaluar els efectes del canvi: hem de tornar a calcular aquells valors que siguin afectats pel nostre canvi de c_1, que són els que es recullen a les equacions 2.3 i 2.4.

			16	**12**	**9**	**0**	**0**	**0**
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1	0	20	2	0	0	1	1	−1
x_2	12	40	1	1	0	0	1	0
x_3	9	5	−1/2	0	1	0	−1/2	1/2
z^* = 525			**−8,5**	**0**	**0**	**0**	**7,5**	**4,5**
x_1	16	10	1	0	0	1/2	1/2	−1/2
x_2	12	30	0	1	0	−1/2	1/2	1/2
x_3	9	10	0	0	1	1/4	−1/4	1/4
z^* = 610			0	0	0	17/4	47/4	1/4

En aquest cas, el canvi en el coeficient tècnic ens ha portat, finalment, a un increment del benefici i a un canvi en el pla de producció, de manera que ara produïm tots els productes.

Podem afirmar, doncs, que la variació d'un valor d'un coeficient tècnic, a_{ji}, d'una variable fora de la base repercuteix a la taula òptima en el seu vector $\mathbf{P}^{i*}$ i també en el seu c_i i implica tornar a calcular únicament el seu valor de $z_i - c_i$.

3.3.2. Coeficient associat a una variable que pertany a l'última base

Vegem el cas en què modifiquem un paràmetre a_{ji} que forma part d'un vector $\mathbf{P}^i$ i que era a la base en l'última iteració. De manera resumida, el procés que caldrà seguir serà el següent:

a) Igual que en el cas anterior, calcular l'expressió del vector $\mathbf{P}^{j\bullet}$ que conté el paràmetre modificat a l'última taula mitjançant $\mathbf{P}^{j\bullet *} = \mathbf{B}^{*-1}\mathbf{P}^{j\bullet}$.

b) Considerar una nova matriu, $\mathbf{H}^*$, formada pel vector $\mathbf{V}_\mathbf{B}^*$ i $\mathbf{T}^*$.

c) Aplicar transformacions elementals sobre $\mathbf{H}^*$ a fi de tornar a aconseguir la mateixa base canònica que abans.

Recordeu que reservem l'índex *j* per a les variables que són a la base.

Transformacions elementals

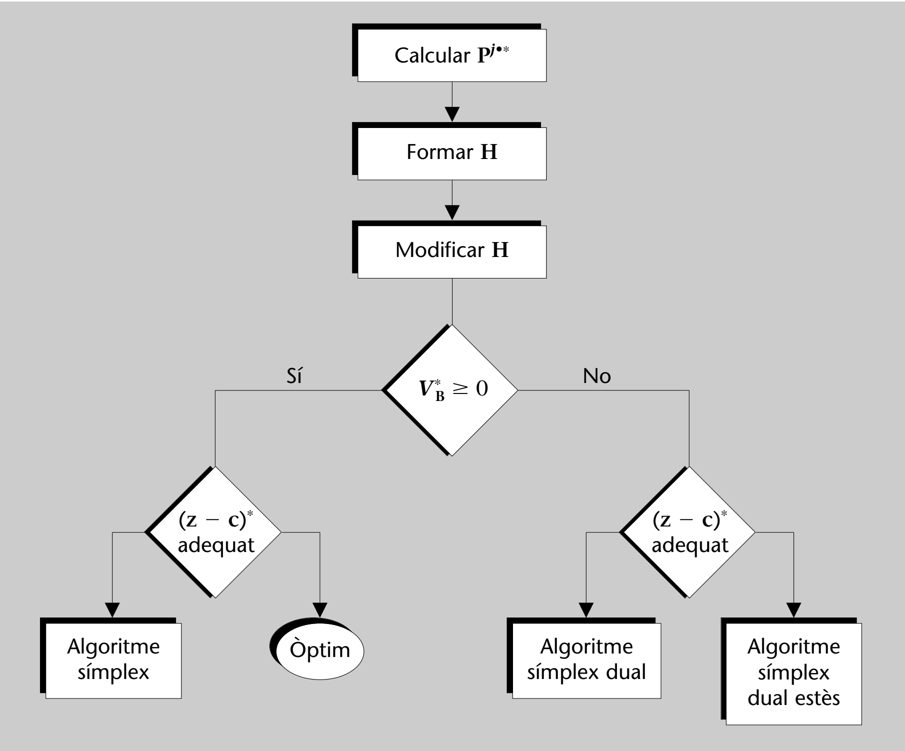
Anomenem *operacions elementals sobre una matriu* o *transformacions elementals sobre una matriu* les operacions que consisteixen a:

- multiplicar tota una fila pel mateix número,
- sumar a una fila una combinació lineal d'altres files.

d) Analitzar si totes les components de $\mathbf{V}_\mathbf{B}^*$ són no negatives.

- Si totes són no negatives, determinar si els valors de les components de $(\mathbf{z} - \mathbf{c})^*$ són adequats a l'òptim. En cas que ho siguin, serem a l'òptim, i si no, senzillament continuarem aplicant l'algoritme símplex.

- Si alguna component de $\mathbf{V}_\mathbf{B}^*$ és negativa, determinarem també el valor de les components de $(\mathbf{z} - \mathbf{c})$. Així, si totes les components són adequades a l'òptim, haurem d'aplicar l'algoritme símplex dual, mentre que si n'hi ha alguna no adequada haurem d'aplicar l'algoritme símplex dual estès.



Variacions en els coeficients tècnics a Tropicfruit Inc. (II)

Imaginem que des del departament de producció ens comuniquen que, per motius de deficiències en la qualitat de les primeres matèries que s'han rebut, es necessita el doble de kiwis per unitat de Kimbombo. Per aquest motiu, des de gerència volen demanar indemnitzacions al proveïdor pels costos derivats de la seva mala actuació. De quin import parlem?

a) De fet, es tracta de fer un canvi en el vector $\mathbf{P}^2$, de manera que:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

passa a ser:

$$\mathbf{P}^{2\bullet} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

i si el baixem a l'última taula, coneixerem el seu valor a $\mathbf{T}^*$. Així, $\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{P}^{2\bullet} = \mathbf{P}^{2\bullet *}$, que en el nostre cas és:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Com és lògic i cal que recordem, un canvi en la composició d'un producte afectarà també el seu cost, de manera que ens trobem davant d'un doble canvi: d'un coeficient tècnic i d'un coeficient de la funció objectiu. En el nostre cas, en doblar-se el consum de kiwis, essent el seu cost de 600 euros, el benefici del Kimbombo es reduirà de 12 a 6; en valors de la taula:

			10	**6**	**9**	**0**	**0**	**0**
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1 x_2 x_3	0 **6** 9	20 40 5	3 2 −1	**1** **2** **−1/2**	0 0 1	1 0 0	1 1 −1/2	−1 0 1/2

b) En segon lloc, el que fem és avaluar els efectes del canvi, és a dir, a causa del canvi de c_1 haurem de tornar a calcular totes les components de ($\mathbf{z} - \mathbf{c}$) i també z^*, però prèviament caldrà que solucionem un defecte de forma que es produeix. Efectivament, si ens hi fixem veurem que no es compleix la condició que cadascuna de les variables que és a la base ha de tenir un vector canònic. El vector associat a x_2 en aquesta taula:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

no és el canònic que correspondria a la seva ubicació, sinó que és:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Per consegüent, hem d'introduir modificacions elementals a la matriu $\mathbf{H}^*$. En el nostre cas, operarem de la manera següent:

- En primer lloc dividim la segona fila per 2 per aconseguir tenir l'1 on el volem:

$$\mathbf{H}^* = \begin{bmatrix} 20 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 40 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -1/2 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

- Després restem aquesta fila a la primera per aconseguir el zero a la primera fila:

$$\mathbf{H}^* = \begin{bmatrix} 20 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 20 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 5 & -1 & -1/2 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

- Finalment multipliquem tota la segona fila per 1/2 i la sumem a la tercera; així aconseguim el zero de la tercera fila:

$$\mathbf{H}^* = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 \\ 20 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 15 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Una vegada resolt el problema de la base canònica, ja podem calcular els valors de $z_i - c_i$ i com que la de x_1 és negativa, hem de continuar iterant:

			10	**6**	**9**	**0**	**0**	**0**
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1 x_2 x_3	0 **6** 9	20 40 5	3 2 −1	**1** **2** **−1/2**	0 0 1	1 0 0	1 1 −1/2	−1 0 1/2
s_1 x_2 x_3	0 6 9	0 20 15	2 1 −1/2	0 1 0	0 0 1	1 0 0	1/2 1/2 −1/4	−1 0 1/2

(Continua a la pàgina següent.)

			10	6	9	0	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
			−8,5	0	0	0	3/4	9/2
x_1	10	0	1	0	0	1/2	1/4	−1/2
x_2	6	20	0	1	0	−1/2	1/4	1/2
x_3	9	15	0	0	1	1/4	−1/8	1/4
z = 255			0	0	0	17/4	23/8	1/4

Davant aquesta nova situació, el més convenient seria que produíssim 2.000 litres de Kimbombo i 1.500 d'Angaua. Això ens reportaria un benefici de 25.500 euros, cosa que suposa una pèrdua respecte de la situació anterior de 27.000 euros (abans el benefici era de 52.500 euros), que seria en aquest cas la indemnització mínima a sol·licitar al nostre proveïdor.

Com hem vist, és possible que una vegada efectuades les operacions fonamentals per a buscar la base canònica, en calcular després els valors de $z_i - c_i$ aquests no siguin adequats a l'òptim. Llavors hem de continuar iterant, encara que també és possible que durant el procés de canonització els valors d'algunes variables (V_B) es converteixin en negatius, de manera que ens caldrà calcular els seus valors de $z_i - c_i$ per a saber com hem d'actuar, ja que en funció d'això aplicarem l'algoritme símplex dual o el símplex dual estès.

4. Canvis en l'estructura del problema

En aquest apartat ens plantegem la possibilitat d'introduir modificacions en el plantejament d'un problema lineal. Concretament, estudiem què passa quan hi afegim noves variables o noves restriccions.

4.1. Introducció d'una nova restricció

En aquest punt prendrem en consideració una de les possibilitats més freqüents al món real: el fet que l'empresari consideri pertinent introduir una restricció que fins ara no tenia en compte.

Cal destacar que quan introduïm una nova restricció ho fem a partir de la solució òptima, és a dir, que a efectes pràctics treballarem sobre l'última taula.

El procés que hem de seguir quan volem introduir una nova restricció consistirà en primer lloc a determinar si la solució òptima compleix ja la nova restricció:

a) En cas que la verifiqui, continuarà essent òptima, és a dir, que el pla de producció no varia.

b) Si no la verifica procedirem a introduir-la a l'última taula, i per a fer-ho haurem de tenir-la prèviament en forma de $\leq$. Això es deu al fet que d'aquesta manera, en estandarditzar-la, sumarem una variable de folgança que tindrà un vector canònic associat i, per consegüent, podrà entrar directament a la base. Si no té la restricció en forma de $\leq$, procedirem a obtenir-la tal com ja heu vist.

Vegeu com s'obté una restricció en forma de $\leq$ al subapartat 1.3 del mòdul "L'algoritme símplex" d'aquesta assignatura.

En introduir la restricció, de fet, ampliem la matriu $\mathbf{H}^*$ (composta pel vector $\mathbf{V_B}$ i $\mathbf{T}^*$) amb una nova fila (la nova restricció) i una nova columna (la variable de folgança associada a aquesta).

Vegeu com es pot reconstruir la base canònica al subapartat 3.3.2 d'aquest mòdul didàctic.

Una vegada fet això, procedirem a reconstruir la base canònica que hem perdut en introduir la nova fila. Si una vegada efectuades les operacions elementals necessàries cap valor de les variables que hi ha a la base (elements de V_B) no s'ha tornat negatiu, conclourem que ja som a la solució òptima. Altrament, caldrà aplicar l'algoritme símplex dual, ja que tots els valors de $z_i - c_i$ seran adequats a l'òptim.

Introducció d'una restricció nova a Tropicfruit Inc.

En el problema de Tropicfruit Inc., el gerent ens informa que, per qüestions de presència al mercat, des del departament de màrqueting li han comunicat que, com a mínim, del conjunt dels tres productes ha de produir 42 unitats. Abans d'introduir la restricció veurem si la solució actual ja compleix la restricció. Així:

1) El valor de $x_1 + x_2 + x_3$ ha de ser superior a 42. En el nostre cas $0 + 40 + 5 = 45 > > 42$, de manera que no seria necessari retocar el problema, atès que ja complim la restricció.

2) En cas que això no sigui així (que serà el més habitual), introduirem aquella restricció directament a l'última taula tornant a calcular allò que en resulti afectat, és a dir, els valors de z i de $z_i - c_i$.

Imaginem que el gerent reconeix que es va equivocar inicialment en dir que la quantitat disponible d'aigua (que és un component comú a tots tres productes) era il·limitada, ja que ara admet que com a màxim disposarà de 10 m^3 al mes (10.000 litres), i ens demanem quins efectes tindrà aquest descuit inicial.

Com que coneixem els coeficients tècnics de consum d'aigua de cada un dels productes, la restricció serà aquesta:

$$150x_1 + 250x_2 + 100x_3 \leq 10.000,$$

que passem a introduir directament a l'última fila de l'última taula, una vegada hem comprovat que la solució actual ($x_1 = 0$, $x_2 = 40$, $x_3 = 5$) no la compleix. Per tant:

			10	12	9	0	0	0	**0**
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\boldsymbol{s_4}$
s_1	0	20	3	0	0	1	1	−1	**0**
x_2	12	40	2	1	0	0	1	0	**0**
x_3	9	5	−1	0	1	0	−1/2	1/2	**0**
$\boldsymbol{s_4}$	**0**	**10.000**	**150**	**250**	**100**	**0**	**0**	**0**	**1**

A continuació hem de recompondre els vectors canònics que hem trencat en introduir la nova restricció (recordem que totes les variables que són a la base han de tenir un vector canònic). Ho farem utilitzant les operacions elementals. En primer lloc recomponem el vector canònic de x_2 i després el de x_3.

Per a aconseguir un zero on ara hi ha un 250 hem de multiplicar la fila de x_2 per 250 i restar-la a la de s_4. Una vegada arreglat el vector de x_2, multiplicarem la fila de x_3 per 100 i la restarem a la de s_4. Arribats a aquest punt, podrem calcular els valors de $z_i - c_i$, que en aquest cas continuen adequats a l'òptim. Però en operar sobre la fila de s_4 se'ns ha tornat negatiu el valor de s_4, i per tant haurem d'aplicar l'algoritme símplex dual. Tot això ho veiem a la taula següent:

			10	12	9	0	0	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	0	20	3	0	0	1	1	−1	0
x_2	12	40	2	1	0	0	1	0	0
x_3	9	5	−1	0	1	0	−1/2	1/2	0
s_4	0	0	−350	0	100	0	−250	0	1
s_1	0	20	3	0	0	1	1	−1	0
x_2	12	40	2	1	0	0	1	0	0
x_3	9	5	−1	0	1	0	−1/2	1/2	0
s_4	0	−500	**−250**	0	0	0	−200	−50	1
			5	**0**	**0**	**0**	**15/2**	**9/2**	**0**
s_1	0	14	0	0	0	1	−7/5	−8/5	3/250
x_2	12	36	0	1	0	0	−3/5	−2/5	1/125
x_3	9	7	0	0	1	0	3/10	7/10	−1/125
x_1	10	2	1	0	0	0	4/5	1/5	−1/250
$z^* = 515$			0	0	0	0	7/2	7/2	1/50

En introduir una nova restricció...

... sovint deixem de tenir vectors canònics i hem d'efectuar un seguit d'operacions entre les files per a recompondre'ls. Si en introduir la restricció no es trenca la base canònica, com que la variable que entrarà a la base és una variable de folgança (amb una $c_i = 0$), no és necessari tornar a calcular tots els valors de $z_i - c_i$ ni el de z, perquè quedaran inalterats en afegir als càlculs uns valors multiplicats per zero. Només hauríem de calcular el valor de $z_i - c_i$ corresponent a la nova variable.

4.2. Introducció d'una nova variable

Sovint pot passar que ens plantegem si és pertinent introduir un nou producte a la nostra gamma de producció, cosa que comporta determinar si convé modificar el pla de producció anterior. Matemàticament, això suposa introduir una nova variable en el problema.

A efectes pràctics, el procediment que cal seguir consistirà en els passos que explicitem tot seguit:

1) Calcular l'expressió del vector $\mathbf{P}^i$ associat a la nova variable a la taula òptima fent l'operació següent:

$$\mathbf{P}^{i\bullet *} = \mathbf{B}^{*-1}\mathbf{P}^{i\bullet},$$

on $\mathbf{P}^{i\bullet}$ designa el vector associat a la nova variable.

2) Ampliar la matriu $\mathbf{T}^*$ amb una nova columna, $\mathbf{P}^{i\bullet *}$.

3) Determinar si el valor de $z_i - c_i$ és adequat a l'òptim o no:

- Si ho és, el pla de producció òptim no es modificarà o, en altres termes, no interessa produir el nou producte.

- En cas contrari, s'haurà d'aplicar l'algoritme símplex, cosa que indicarà que sí que interessa produir-lo.

Introducció d'una variable nova a Tropicfruit Inc.

Suposem que el gerent ja ha aplicat el pla de producció que li hem proposat, però amb el pas del temps pensa en la possibilitat de llançar un altre producte a un determinat preu i ens consulta si és convenient. En cas que sí que ho sigui, caldrà estudiar-ne els efectes, tant en el pla de la producció actual com en el benefici.

Posem per cas que el nou producte es diu Unga i que per a elaborar-ne 100 litres es necessiten 100 kg d'alvocats, 100 de kiwis, 100 de mangos, 80 kg de sucre i 200 litres d'aigua. En aquest cas no es preveu cap cost referit a additius químics. El preu de venda del producte s'estima que seria de 28,41 euros/l.

En primer lloc ens preguntem si val la pena fabricar-lo a aquest preu de venda i, en cas afirmatiu, quantes unitats estarem interessats a produir.

Per això, els passos que haurem de seguir seran en primer lloc introduir una nova variable a l'última taula del problema (és a dir, en el pla actual de producció) i calcular tot seguit el seu valor de $z_i - c_i$, de manera que, si és negatiu, la variable ens demanarà entrar a la base, i podrem afirmar que és interessant produir-lo.

La variable que volem introduir és x_4, que representa els litres d'Unga que caldrà produir. El benefici per cada 100 litres (b^0) és el preu de venda menys el cost:

$$b^0 = 2.841 - (1 \cdot 500 + 1 \cdot 600 + 1 \cdot 400 + 80 \cdot 0{,}5 + 200 \cdot 0{,}005) = 1.300 \text{ euros},$$

i el seu vector $\mathbf{P}^i$ inicial és:

$$\mathbf{P}^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que, baixat a l'última taula utilitzant la $\mathbf{B}^{*-1}$, serà $\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^{4*}$, és a dir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Per tant, la taula queda de la manera següent:

			10	**12**	**9**	**0**	**0**	**0**	**13**
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	x_4
s_1	0	20	3	0	0	1	1	−1	**1**
x_2	12	40	2	1	0	0	1	0	**1**
x_3	9	5	−1	0	1	0	−1/2	1/2	**0**
$z = 525$			5	0	0	0	15/2	9/2	**−1**
x_4	13	20	3	0	0	1	1	−1	1
x_2	12	20	−1	1	0	−1	0	1	0
x_3	9	5	−1	0	1	0	−1/2	1/2	0
$z^* = 545$			8	0	0	1	4,5	3,5	0

El fet que el valor de $z_4 - c_4$ sigui negatiu significa que interessa produir-lo, ja que en entrar a la base x_4, aquesta variable prendrà un valor diferent de zero.

Així, donada la solució final, la resposta que podríem donar al gerent és que sí que és convenient que produeixi aquest nou article (Unga), ja que incloure'l ens incrementa els beneficis en 2.000 euros.

Resum

Al començament del mòdul hem presentat la base teòrica en què es recullen les relacions bàsiques que s'estableixen en l'algoritme símplex i a les quals ens hem de remetre cada vegada que se'ns presenti un canvi en algun paràmetre. Així, la metodologia que caldrà seguir davant cada canvi consistirà en el següent:

1) En primer lloc, anar a la base teòrica i veure quins efectes provocarà a l'última taula.

2) Una vegada establerts els efectes, el pas següent consistirà a especificar el procediment que caldrà seguir per a avaluar-los.

Quant als canvis, caldrà diferenciar-los en funció de si afecten els paràmetres o l'estructura del problema. El primer grup estarà format per canvis efectuats a **c**, **b** i **A**, mentre que en el segon hi haurà les modificacions que consisteixen en la introducció d'una nova restricció i d'una nova variable.

En el cas de **variacions a c**, caldrà distingir si es tracta de la c_i d'una variable que pertany a la base o no, ja que els conceptes que s'hauran de tornar a calcular seran els mateixos, però el nombre variarà. Així, en el primer cas haurem de tornar a calcular els valors de z^* i de tots els de les $z_i - c_i$, mentre que en el segon només caldrà calcular el valor de $z_i - c_i$ de la variable afectada.

En el cas que hi hagi **variacions a b**, ens limitarem a baixar a l'última taula el nou vector **b** utilitzant la matriu de transformació, $\mathbf{B}^{*-1}$, i posteriorment tornarem a calcular únicament, i en el cas que cap $\mathbf{V}_\mathbf{B}^*$ no s'hagi transformat en negativa, el valor de z^*.

En el cas de **modificacions a a_{ji}**, també haurem de diferenciar si es tracta del coeficient tècnic d'una variable bàsica o no, ja que si és el coeficient d'una variable bàsica s'alterarà la composició de la base canònica.

Per acabar, hem abordat els canvis en l'estructura del problema aportant dos exemples per a explicar-los.

Finalment, volem destacar que l'anàlisi de sensibilitat considera canvis puntuals en els paràmetres. Això no obstant, podríem demanar-nos quins serien els efectes de canvis continus en aquests paràmetres: en la forma, per exemple, de considerar un nou vector $\mathbf{c}^\bullet = \mathbf{c} + \lambda\Delta\mathbf{c}$ amb $\lambda \in (-\infty,+\infty)$. En aquest cas parlarem de **programació paramètrica**, que constitueix un cos teòric de la programació lineal del qual no tractem perquè supera l'abast d'aquesta assignatura.

Activitats

1. En el cas de Tropicfruit Inc., calculeu els efectes d'un increment del preu de venda de Katxumbo (x_1) per valor de 3 euros i posteriorment feu el mateix per a un increment de 5 euros.

2. Considereu el plantejament de Tropicfruit Inc. i plantegeu-vos les qüestions següents:
a) Imagineu que ens demanen que fem una oferta per un lot de 800 quilos de kiwis.
b) Suposeu que ara el proveïdor de mangos ens ofereix comprar quantitats addicionals (sense cap límit) a 6 euros/kg (fixeu-vos que el preu és de 2 euros/kg més car que l'actual).

Nota

Podeu trobar el plantejament corresponent a Tropicfruit Inc. a l'exercici d'autoavaluació 2 del mòdul "Introducció a la investigació operativa" i la solució pel mètode símplex per taules al solucionari del mòdul "L'algoritme símplex" d'aquesta assignatura.

Exercicis d'autoavaluació

1. L'empresa Li Costa di Vendre SA ha de planificar el que produirà a la temporada d'hivern dels articles que actualment fabrica: pantalons, jerseis i camises. Aquests productes es confeccionen a partir de tres primeres matèries bàsiques: el cotó, el polièster i la llana.

Dades
Els consums unitaris expressats en quilos es reflecteixen a la taula següent:

	Cotó	**Polièster**	**Llana**
Pantalons	2	1	0
Jerseis	1	1	1
Camises	1	2	1

La disponibilitat de cotó, polièster i llana és de 200, 250 i 150 kg, respectivament, i els preus de compra són 3, 2 i 4 euros/kg per cada producte.
La confecció de cada un dels articles requereix botons, cremalleres i etiquetes. Això suposa uns costos addicionals xifrats en 4 euros per als pantalons, 1 euro per als jerseis i 3 per a les camises.
Se'ns demana que, sabent que els preus de venda de cada un dels articles són de 20 euros per als pantalons i els jerseis, i 23 per a les camises, trobem el pla de producció que maximitzi els beneficis.

Plantejament
Per consegüent, haurem de plantejar-lo matemàticament de manera lineal. Si x_i és la variable que ens indica la quantitat de producte que cal fabricar, el plantejament és el següent:

$$[\text{MAX}]\ z = 8x_1 + 10x_2 + 9x_3$$

s.a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 200,$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 250,$$
$$x_2 + x_3 \leq 150,$$
$$x_i \geq 0.$$

Resolució
Si passem a resoldre'l amb l'algoritme símplex per taules, tindrem el següent:

			8	10	9	0	0	0
B	c	**Vb**	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
$X1$	8	125	1	0	0	1/2	0	−1/2
$X5$	0	−25	0	0	1	**−1/2**	1	−1/2
$X2$	10	150	0	1	1	0	0	1
			0	0	1	4	0	6
$X1$	8	100	1	0	1	0	1	−1
$X4$	0	50	0	0	−2	1	−2	1
$X2$	10	150	0	1	1	0	0	1
z = 2.300			0	0	9	0	8	2

En aquest punt podem afirmar que el problema tenia solució òptima única i finita, i és el vèrtex següent:

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} x_1 = 25 \\ x_2 = 150 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 75 \\ x_6 = 0 \end{bmatrix},$$

el qual ens facilita un valor de la solució de $z^* = 1.700$ euros.
Per tant, fabricarem 25 pantalons, 150 jerseis i cap camisa, i obtindrem un benefici de 1.700 euros.

Qüestions breus
A partir d'aquí ens podem plantejar les qüestions següents:

a) Ens afectaria d'alguna manera una reducció de 50 kg en la disponibilitat de polièster?

b) Ens afectaria d'alguna manera un increment de 200 kg en la disponibilitat inicial de cotó? Quina quantitat estaríem disposats a pagar per aquest increment?

c) La consultoria Germans Andersen ens ha garantit que amb uns "petits retocs" en l'organització del nostre sistema de producció podríem reduir a la meitat el coeficient tècnic de consum de cotó en els pantalons. Quant estaríem disposats a pagar com a màxim a la prestigiosa consultoria pels seus "suggeriments"? (suposem que el cost dels retocs és nul).

d) Ens plantegem la conveniència de llançar uns calçotets per al fred per als quals necessitaríem 1 kg de cotó, 1 de poliester i 2 de llana, i tindríem uns costos de confecció unitaris de 2 euros. D'altra banda, el departament de màrqueting ens avisa que el preu màxim a què es podria vendre el producte és de 30 euros. Interessa produir aquest nou producte? Si la resposta és afirmativa, en quina quantitat? I si la resposta és negativa, a partir de quin preu resultarà interessant produir-lo?

2. Nil Montsolís és un empresari vinicultor que té vinyes de les quals s'obtenen tres tipus de raïm: xarel·lo, macabeu i parellada.

Dades
La collita d'enguany ha estat especialment favorable i s'han obtingut 300.000 kg de xarel·lo, 250.000 de macabeu i 287.000 de parellada. Es podran obtenir 0,7 litres de most per cada quilo de xarel·lo, 0,88 litres per quilo de macabeu i 0,8 litres de most per cada quilo de parellada.
Nil comercialitza tres marques diferents de vi: Blanc ben Blanc, Masia Blanc i Blanc Peixater, que s'obtenen barrejant els diferents mostos en les proporcions següents:

- Per a elaborar el Blanc ben Blanc es necessiten 4 parts de most de xarel·lo, 4 de most de macabeu i 2 parts de parellada.
- Per a elaborar el Masia Blanc es necessiten 2 parts de xarel·lo, 4 de macabeu i 4 de parellada.
- Per a elaborar el Blanc Peixater s'utilitzen 4 parts de xarel·lo, 2 de macabeu i 4 de parellada.

En qualsevol cas, les pèrdues que es produeixen en els transvasaments i durant l'elaboració representen el 25% del volum.
El cost d'elaborar un litre de most de xarel·lo (des que es verema fins s'utilitza en la barreja pertinent) és de 100 u.m., el cost del macabeu és de 110 i el del parellada és de 120. El cost d'envasar, etiquetar i encapsar una ampolla de vi Blanc ben Blanc és de 110 u.m., el de Masia Blanc és de 100 i el del Blanc Peixater és de 120. A més, aquests vins suporten addicionalment uns costos imputables a la producció (envelliment, etc.) de 350, 260 i 250 u.m. per ampolla, respectivament. El preu de venda a distribuïdor (p.v.d.) és de 14.680, 17.720 i 14.800 u.m. per caixa per a cada tipus de vi. Cada caixa conté 10 ampolles.

Plantejament
Tenint en compte les dades anteriors, el programa lineal que maximitzant el benefici ens proporciona les quantitats de caixes que s'han de manufacturar dels diferents vins a partir dels mostos obtinguts en aquesta collita, es determina de la manera següent:
1) Definició de variables: x_i: quantitat de caixes de 10 ampolles que s'han de produir del vi; on $i = 1$ correspon a Blanc ben Blanc, $i = 2$ a Masia Blanc i $i = 3$ a Blanc Peixater.
2) Càlcul de disponibilitats:

- Most de xarel·lo: 300.000 kg · 0,7 l/kg = 210.000 litres.
- Most de macabeu: 250.000 kg · 0,88 l/kg = 220.000 litres.
- Most de parellada: 287.500 kg · 0,8 l/kg = 230.000 litres.

La pèrdua ens permet passar directament de litres de most a ampolles de vi, ja que les ampolles són de 0,75 litres (25% menys).
3) Càlcul de la folgança per caixa de 10 ampolles:

Taula de costos							
		Blanc Ben Blanc		Masia Blanc		Blanc Peixater	
	q/u	Quantitat	Cost	Quantitat	Cost	Quantitat	Cost
Most xarel·lo	100	4	400	2	200	4	400
Most macabeu	110	4	440	4	440	2	220
Most parellada	120	2	240	4	480	4	480
Cost de m.p.	–	–	1.080	–	1.120	–	1.100
Envasat	–	–	1.100	–	1.000	–	1.200
Addicionals	–	–	3.500	–	2.600	–	2.500
Cost total	–	–	5.680	–	4.720	–	4.800
PVD	–	–	14.680	–	17.720	–	14.800
Marge unitat	–	–	**9.000**	–	**13.000**	–	**10.000**

Així, doncs, tenim el plantejament següent:

$$[\text{MAX}]\ z = 9x_1 + 13x_2 + 10x_3$$

s.a

$$\begin{aligned}
&4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 210.000,\\
&4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 220.000,\\
&2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 230.000,\\
&x_i \geq 0; \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},
\end{aligned}$$

on z s'expressa en milers d'unitats monetàries.

Resolució

			9	13	10	0	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1	0	210.000	4	2	4	1	0	0
s_2	0	220.000	4	**4**	2	0	1	0
s_3	0	230.000	2	4	4	0	0	1
$z^0 = 0$			−9	−13	−10	0	0	0
s_1	0	100.000	2	0	3	1	−0,5	0
x_2	13	55.000	1	1	0,5	0	0,25	0
s_3	0	10.000	−2	0	**2**	0	−1	1
$z^1 = 715.000$			4	0	−3,5	0	3,25	0
s_1	0	85.000	5	0	0	1	1	−1,5
x_2	13	52.500	1,5	1	0	0	0,5	−0,25
x_3	10	5.000	−1	0	1	0	−0,5	0,5
$z^* = 732.500$			0,5	0	0	0	1,5	1,75

Pla de producció: cal produir 52.500 caixes de Masia Blanc (525.000 ampolles) i 5.000 caixes de Blanc Peixater (50.000 ampolles); això reportarà un benefici de 732.500.000 u.m.

Qüestions

A partir dels resultats anteriors, responeu les qüestions següents:

a) Suposem que un altre viticultor ofereix proporcionar quantitats addicionals de most xarel·lo a 1.500 u.m./l. Interessarà adquirir quantitats addicionals? En cas afirmatiu, quina quantitat? En cas contrari, a partir de quin preu estaríeu disposats a comprar? I si ofereix most de parellada a 1.800 u.m./l?

b) Suposem que les quantitats no utilitzades de most donen lloc a un cost d'emmagatzematge i conservació de 2.000 u.m. per litre de cada tipus de most. Quina repercussió tindria aquest fet en el pla de producció?

c) La capacitat d'emmagatzematge ens obliga a produir un màxim de 55.000 caixes de vi. Té cap efecte això en el pla de producció? En cas afirmatiu, quin és el nou pla de producció?

d) Imaginem que en Nil decideix llançar una nova marca que anomenarà Alblanquinyo, el consum de xarel·lo, macabeu i parellada del qual seria de 4, 3 i 3 parts, respectivament. A partir de quin benefici començarà a ser interessant produir-lo?

Solucionari

Activitats

1. A vegades l'increment del benefici d'un determinat producte no és suficient perquè ens interessi entrar-lo a la base i desbancar una altra variable (producte). Per exemple, si l'increment de c_1 fos de 3 euros, només s'hauria aconseguit a l'última taula que el nou valor de $z_1 - c_1$ prengués el valor 2, cosa que no comporta cap canvi ni en la composició de la solució ni en el valor de z^*.
Si l'increment fos de 5 euros, comprovaríem que en tornar a calcular el valor de $z_1 - c_1$ ens donaria zero, de manera que estaríem davant d'una solució múltiple, i caldria actuar en conseqüència. Quan l'increment és igual al valor de $z_k - c_k$ de la variable considerada, llavors ens trobarem davant d'una solució múltiple:

			15	12	9	0	0	0
B	***c***	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
x_3	0	20	3	0	0	1	1	−1
x_2	12	40	2	1	0	0	1	0
x_1	9	5	−1	0	1	0	−1/2	1/2
$z^* = 525$			**0**	0	0	0	7,5	4,5
x_1	15	20/3	1	0	0	1/3	1/3	−1/3
x_2	12	80/3	0	1	0	−2/3	1/3	2/3
x_3	9	35/3	0	0	1	1/3	−1/6	1/6
$z^* = 525$			0	0	0	0	7,5	4,5

Així tindríem, almenys, dos plans de producció alternatius que ens reportarien el mateix benefici:

$$\mathbf{X}^* = \alpha \begin{bmatrix} 5 \\ 40 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 20/3 \\ 80/3 \\ 35/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Abans d'entrar en matèria convé recordar el significat que té en un problema de producció el valor de les variables de folgança, ja que aquestes es refereixen a cada restricció, de manera que el seu valor ens indica la quantitat de primera matèria que ens sobra en cada pla de producció.
D'aquesta manera, si els proveïdors es posen en contacte amb el gerent de Tropicfruit Inc. amb la intenció de fer-li una oferta de quantitats addicionals de primeres matèries, el primer que farà el gerent és veure si d'alguna d'aquestes matèries té excedent per a desestimar ja d'entrada l'oferta.
Davant la possibilitat d'adquirir quantitats addicionals d'una determinada primera matèria, cal comprovar el valor de la variable de folgança corresponent, i si és a la base i té un valor diferent de zero, declinarem l'oferta.

a) Primerament esbrinarem si amb el pla de producció actual tenim excedents de kiwis. Haurem de mirar el valor de s_2 (variable de folgança corresponent a la restricció que es refereix a la disponibilitat de kiwis). Com podem veure a la taula òptima, el seu valor és zero, de manera que actualment estem exhaurint la totalitat de la disponibilitat inicial, per la qual cosa ens interessarem per la compra de quantitats addicionals.
Una vegada feta aquesta anàlisi prèvia, per a poder respondre la pregunta concreta esbrinarem quins beneficis ens aportaria la inclusió d'aquest lot en les disponibilitats inicials. Per a saber-ho suposarem que els tenim des d'un començament; així, el vector inicial:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix}$$

passa a ser:

$$\mathbf{b}^\bullet = \begin{bmatrix} 30 \\ 48 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Aleshores, $\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{b}^{\bullet} = \mathbf{b}^{\bullet *}$, que en el nostre cas resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 48 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 48 \\ 1 \end{bmatrix},$$

i si el substituïm a l'última taula a la tercera columna podrem calcular el benefici amb aquest supòsit, que és de 58.600 euros. Com podem veure, el fet de tenir 800 quilos addicionals de kiwis ha provocat que el nostre benefici augmenti en 6.100 euros. Però compte, perquè quan diem que el benefici s'incrementa en 6.100 euros no afirmem que aquesta és la quantitat màxima que estem disposats a pagar pel lot, sinó que serà aquesta xifra més el cost per kiwi que havíem fixat en el problema, ja que el nou benefici s'ha produït assumint ja (o malgrat) un cost per kiwi de 6 euros/kg (dada inicial del problema). Així, l'import màxim que pagaríem per un lot de 800 quilos de kiwis és:

$$(\text{Benefici amb el lot} - \text{Benefici sense el lot}) + (\text{Lot en unitats} \times \text{Cost unitari}) =$$
$$= (58.600 - 52.500) + (800 \cdot 6) = 6.100 + 4.800 = 10.900 \text{ euros.}$$

És obvi que si paguéssim aquest import no obtindríem cap benefici econòmic, encara que hi podria haver altres interessos que n'aconsellessin la compra (per exemple, més implantació en el mercat, més poder de negociació amb proveïdors, etc.).

b) Com abans, farem l'anàlisi prèvia de manera que sapiguem si estem interessats o no a adquirir quantitats addicionals. Així, mirem en aquest cas el valor de s_3 en el pla de producció òptim i veiem que val zero, de manera que no tenim excedents i, per tant, sí que ens interessa comprar-ne més.
Ara bé, si el que volem és determinar la quantitat addicional de mangos que hem de comprar a un preu de 6 euros/kg, el millor que podem fer és introduir aquesta incògnita (variable) en el problema. Per tant, introduirem la variable x_4 que representarà la quantitat de mangos en kg que estem disposats a comprar a un preu de 6 euros/kg.
La manera d'introduir aquesta restricció al programa serà considerant que aquests nous mangos són més disponibilitat que tenim, és a dir, que ara la disponibilitat de mango que tenim és de $50 + x_4$. D'aquesta manera, la restricció dels mangos (la tercera) queda així:

$$x_2 + 2x_3 \leq 50 + x_4,$$

i com que no hi pot haver cap variable a la part dreta de la restricció, passarem la variable a la part esquerra, on passarà com $-x_4$; el vector $\mathbf{P^4}$ serà:

$$\mathbf{P^4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

i el coeficient de la funció objectiu c_4 serà -2, és a dir, que el benefici serà de -2, ja que d'entrada els mangos que fins ara ens costaven 4 euros/kg passaran a costar-ne 6.
Per a baixar $\mathbf{P^4}$ fins a l'última taula hem de multiplicar-la per la matriu $\mathbf{B}^{*-1}$, però hi ha una petita trampa, que és veure que $\mathbf{P^4}$ és el mateix que tenia s_3 a la primera taula, però canviat de signe, de manera que podem afirmar que els $\mathbf{P}^i$ respectius de l'última taula tindran els mateixos valors però canviats de signe.
A la pregunta de si ens pot interessar comprar una cosa que tingui un benefici de -2 la resposta és que sí, ja que és possible que d'entrada perdem diners per cada quilo, però amb aquest quilo i els estocs que tinguem inutilitzats d'altres fruites potser podrem fabricar algun litre de suc i el benefici que obtinguem en vendre'l compensi aquella pèrdua inicial.

			10	12	9	0	0	0	**−2**
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	x_4
s_1	0	20	3	0	0	1	1	−1	**1**
x_2	12	40	2	1	0	0	1	0	**0**
x_3	9	5	−1	0	1	0	−1/2	1/2	**−1/2**
			5	0	0	0	15/2	9/2	**−5/2**
x_4	−2	20	3	0	0	1	1	−1	1
x_2	12	40	2	1	0	0	1	0	0
x_3	9	15	1/2	0	1	1/2	0	0	0
$z^* = 575$			8	0	0	5/2	10	2	0

Podem afirmar, doncs, que comprarem a aquest proveïdor 2.000 quilos de mangos a 6 euros/kg, cosa que incrementarà el nostre benefici en 5.000 euros.

Exercicis d'autoavaluació

1. Efectuem una anàlisi de sensibilitat per a resoldre cadascuna de les qüestions plantejades a l'enunciat:

a) En aquest cas la resposta és immediata perquè podem veure que la variable de folgança que es refereix a la restricció de polièster és a la base i val 75, de manera que aquest és l'excedent que tenim i, com que és superior a 50, l'únic que ens implicaria aquesta reducció inicial de 50 kg és que ens sobrarien 25 kg.

b) En aquest cas ens ofereixen una primera matèria que consumim totalment, ja que no en tenim excedent (x_4 val 0), de manera que sí que hi estem interessats. Ara bé, per a poder saber què estem disposats a pagar hem de saber exactament quins beneficis ens reportarà, de manera que suposarem que aquests quilos de més els teníem en un principi i calcularem quin benefici obtenim. Es tracta de calcular el $\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{b}^{\bullet} = \mathbf{b}^{\bullet *}$ nou, que en el nostre cas:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 250 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ -25 \\ 150 \end{bmatrix}.$$

Efectivament, el valor de z que es deriva d'aquests nous valors de les variables de la base és:

$$8 \cdot 125 + 0 \cdot -100 + 10 \cdot 150 = 2.500 \text{ euros},$$

és a dir, 800 euros superior a l'anterior, però el nou vèrtex no és possible, ja que un dels seus components és negatiu ($x_5 = -25$), cosa que hem de solucionar, i en fer-ho, la solució que obtindrem serà inferior, com veurem a la taula següent. Apliquem l'algoritme símplex dual:

			8	10	9	0	0	0
B	***c***	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1 x_5 x_2	8 0 10	125 −25 150	1 0 0	0 0 1	0 1 1	1/2 **−1/2** 0	0 1 0	−1/2 −1/2 1
			0	0	1	4	0	6
x_1 x_4 x_2	8 0 10	150 50 100	1 0 0	0 0 1	−1 −2 3	1 1 −1	−1 −2 2	0 1 0
$z = 2.200$			0	0	9	0	8	2

Noteu que no hem pogut superar els 800 euros de guany perquè ens ho ha impedit la segona restricció (faltava primera matèria), i finalment el nou benefici és de 2.200 euros, cosa que significa un increment de 500 euros. Així, podem afirmar que com a màxim estem disposats a pagar:

$$\begin{aligned}&(\text{Benefici amb l'increment} - \text{Benefici sense l'increment}) + (\text{Increment} \times \text{Cost unitari}) = \\ &= (2.200 - 1.700) + (200 \cdot 3) = 1.100 \text{ euros.}\end{aligned}$$

c) En aquest cas es tracta d'un canvi de a_{ji} d'una variable que és a la base. El valor $a_{11} = 2$ passa a ser $a_{11} = 1$, cosa que d'una banda significa un canvi en el vector $\mathbf{P}^1$, de manera que:

$$\mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^{1\bullet} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que a l'última taula quedarà $\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^{1\bullet *}$, és a dir:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Però fer canvis en a_{ji} té repercussions en el cost del producte i, per tant, en el seu benefici. En el nostre cas, el cost disminueix en 3 euros, de manera que el coeficient c_1 augmenta en 3. Anem a la taula, operem per a refer el vector canònic de x_1 i arribem al següent:

			11	**10**	**9**	**0**	**0**	**0**
B	***c***	$\boldsymbol{V_B}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{x_6}$
x_1	**11**	25	**1/2**	0	0	1/2	0	−1/2
x_5	0	75	**1/2**	0	1	−1/2	1	−1/2
x_2	10	150	**0**	1	1	0	0	1
x_1	11	50	1	0	0	1	0	−1
x_5	0	50	0	0	1	−1	1	0
x_2	10	150	0	1	1	0	0	1
$z^* = 2.050$			0	0	1	11	0	−1
x_1	11	200	1	1	1	1	0	0
x_5	0	50	0	0	1	−1	1	0
x_6	0	150	0	1	1	0	0	1
$z^* = 2.200$			0	1	2	11	0	0

Segons això, podem afirmar que en cas que coneguéssim el "suggeriment", ens causaria un increment de beneficis de 500 euros, de manera que aquest seria l'import màxim que estaríem disposats a pagar. I en cas que acceptéssim el consell sabem que provocaria un canvi en el pla de producció consistent a passar a produir únicament pantalons.

d) Introduïm una nova variable el vector de la qual és:

$$\mathbf{P^7} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Per a passar-lo a l'última taula l'hem de multiplicar per la matriu $\mathbf{B}^{*-1}$; així $\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{P}^{7\bullet} = \mathbf{P}^{7\bullet *}$, que en el nostre cas és:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Per a calcular la c_7 hem de restar al preu de venda els costos de producció, que són:

$$1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 = 15.$$

Ara ja sabem que el benefici dels calçotets és de 15 ($c_4 = 30 - 15 = 15$). Per a saber si interessa o no produir-los, calculem el valor de $z_7 - c_7$: si és negatiu o zero significa que sí que interessa, mentre que si és positiu, la variable no demana entrar a la base i, per consegüent, podem afirmar que no interessa:

$$z_7 - c_7 = [8\ \ 0\ \ 10] \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix} - 15 = -4 + 20 - 15 = 1 \Rightarrow \text{No interessa.}$$

Lògicament és fàcil comprovar que serà interessant des del moment que el seu benefici augmenti en 1 euro, ja que a partir de llavors tindrem una solució múltiple.

2. Efectuem una anàlisi de sensibilitat dels resultats de l'empresa Montsolís SA per a resoldre les qüestions plantejades:

a) Oferta de primeres matèries:

- L'oferta de xarel·lo no ens interessa perquè en sobra ($s_1 = 85.000$) i, per tant, podem afirmar que no en compraríem a cap preu.
- L'oferta de parellada sí que pot ser interessant, ja que no en tenim excedents (el vam gastar tot). L'import màxim que estaríem disposats a pagar per un kg més és de:

Preu màxim = Benefici que reportarà + Cost actual assumit en el plantejament.

Així, el preu màxim serà:

$$1{,}5 + 0{,}12 = 1{,}62,$$

és a dir, 1.620 u.m./l, que és inferior a les 1.800 u.m./l que ens ofereixen. Per tant, no compraríem.

b) En aquest cas ens trobem davant d'un canvi múltiple i, en concret, un canvi de tres c_i (les de les variables de folgança) que ara valen −2, ja que no penalitzen els excedents i aquestes són les variables que els recullen. L'última taula nova serà la següent:

			9	13	10	−2	−2	−2
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1	**−2**	85.000	**5**	0	0	1	1	−3/2
x_2	13	52.000	1,5	1	0	0	1/2	−1/4
x_3	10	5.000	−1	0	1	0	−1/2	1/2
z = 562.500			−9,5	0	0	0	1,5	6,75
x_1	9	17.000	1	0	0	2/10	2/10	−3/10
x_2	13	27.000	0	1	0	−3/10	2/10	2/10
x_3	10	22.000	0	0	1	2/10	−3/10	2/10
z^* = 724.000			0	0	0	29/10	34/10	39/10

La nova solució és produir 17.000 caixes de Blanc ben Blanc, 27.000 de Masia Blanc i 22.000 de Blanc Peixater, cosa que proporcionarà un benefici de 724.000.000 d'u.m.

c) Aquest cas consisteix a introduir una nova restricció:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 55.000.$$

Com hem dit en la teoria, el primer que farem serà comprovar si es compleix amb el pla actual de producció. Veiem que no es compleix (52.500 + 5.000 = 57.500 > 55.000) de manera que sens dubte afectarà el pla de producció:

			9	13	10	0	0	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	0	85.000	5	0	0	1	1	−3/2	**0**
x_2	13	52.500	1,5	1	0	0	1/2	−1/4	**0**
x_3	10	5.000	−1	0	1	0	−1/2	1/2	**0**
$\mathbf{s_4}$	**0**	**55.000**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
s_1	0	85.000	5	0	0	1	1	−3/2	0
x_2	13	52.500	1,5	1	0	0	1/2	−1/4	0
x_3	10	5.000	−1	0	1	0	−1/2	1/2	0
s_4	0	−2.500	1/2	0	0	0	0	−1/4	1
z^1 = 732.500			0,5	0	0	0	3/2	7/4	0
s_1	0	100.000	2	0	0	1	1	0	−6
x_2	13	55.000	1	1	0	0	1/2	0	−1
x_3	10	0	0	0	1	0	−1/2	0	2
s_3	0	10.000	−2	0	0	0	0	1	−4
z^* = 715.000			4	0	0	0	13/2	0	7

La nova solució és produir 55.000 caixes de Masia Blanc, que proporcionarà un benefici de 715.000.000 d'u.m. (La solució que obtenim és degenerada de grau 1.)

d) En aquest cas es tracta d'introduir un nou producte. Per a introduir-lo a l'última taula primerament hem de multiplicar-lo per la matriu de transformació:

$$\mathbf{B}^{*-1}\,\mathbf{P}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1,5 \\ 0 & 0,5 & -0,25 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 0,75 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i ara ja estaríem en condicions d'introduir-lo, però com que només ens demanen el preu al qual començaria a resultar interessant produir-lo, calcularem el valor de $z_4 - c_4$ i l'igualarem a zero.

$$z_4 - c_4 = (0 \cdot 2{,}5 + 13 \cdot 0{,}75 + 10 \cdot 0) - c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = 9{,}75.$$

Podem afirmar, doncs, que a partir d'un benefici de 9,75 (el valor de $z_4 - c_4$ serà zero) començarà a ser interessant produir el producte (la solució es fa múltiple per a $c_4 = 9{,}75$).

Bibliografia

Bazaraa, M.; Jarvis, J.; Sherali, H. (1990). *Linear Programming and Network Flows* (2a ed.). John Wiley & Sons. Hi ha traducció al castellà amb la referència següent: (1998). *Programación lineal y flujo de redes* (2a ed.). Mèxic: Limusa.

Hillier, F.; Lieberman, G. (1997). *Introducción a la investigación de operaciones* (4a ed.). Mèxic: McGraw-Hill.

Prawda, J. (1980). *Métodos y modelos de investigación de operaciones* (vol. I). Mèxic: Limusa.

Ríos Insua, S. (1996). *Investigación operativa* (3a ed.). Madrid: Centro de Estudios Ramón Areces.