Dualitat

Xavier Verge Mestre

PID_00186432

UOC
Universitat Oberta
de Catalunya

Índex

Introducció

Una vegada establerta la programació lineal, el primer avenç d'importància notable fou sens dubte la dualitat. Els programes lineals sempre en porten associats uns altres que denominem *programes duals*. Hem de destacar que el concepte de *dualitat* no és propi ni exclusiu de la programació lineal, sinó que s'utilitza en altres camps, tant de la investigació operativa com d'altres àmbits de l'optimització matemàtica.

Els **programes duals** en programació lineal tenen unes propietats que han facilitat avenços importants tant en el marc teòric com en la resolució de problemes. Aquests avenços han permès desenvolupar algoritmes de solució de problemes específics (l'algoritme de transport està basat en les propietats de la dualitat de la programació lineal), idear variants de l'algoritme símplex que ens permeten resoldre problemes sense haver d'utilitzar variables artificials i trobar el que denominem *preus ombra*.

Hem dividit aquest mòdul didàctic en quatre apartats:

1) En el primer apartat tractem la manera de plantejar el dual davant un problema lineal.

2) En el segon, analitzem les principals relacions entre el problema original i el seu dual i presentem les propietats més importants que en deriven.

3) En el tercer apliquem les propietats presentades a l'apartat anterior a la resolució de problemes lineals.

4) En el quart apartat ens ocupem del significat de la solució òptima dual i aprofundim en la interpretació dels preus ombra.

Objectius

Aquest mòdul didàctic és una reflexió sobre la dualitat de la programació lineal. Hi plantegem, resolem i interpretem programes duals, i hi introduïm maneres noves de resoldre els problemes lineals.

En els materials didàctics associats a aquest mòdul l'estudiant trobarà les eines i els continguts necessaris per a assolir els objectius següents:

1. Saber plantejar el dual de qualsevol programa lineal.

2. Poder resoldre el programa dual i ser capaç de facilitar la solució del problema original.

3. Trobar la solució de qualsevol problema lineal sense utilitzar variables artificials.

4. Interpretar de manera correcta i en tota la seva amplitud els preus ombra.

1. Formulació del problema dual

En aquest apartat plantegem els aspectes formals que ens permetran formular programes duals a partir de programes lineals. Començarem per veure com transformar un programa lineal en forma estàndard al seu dual, i a continuació generalitzarem la transformació a qualsevol programa lineal.

Denotem programa i problema lineal amb la sigla PL.

1.1. Formulació de programes duals a partir de la forma estàndard

Per a formular el dual d'un programa lineal comencem partint de la forma estàndard. Aquests tipus de duals també s'anomenen **duals asimètrics**.

Duals asimètrics

Si partim d'un programa lineal en forma estàndard i plantegem el seu dual, a aquests dos programes lineals se'ls dóna el nom de *duals asimètrics.*

Així doncs, donat el programa lineal següent, que a partir d'ara anomenarem **primal**:

$$
\begin{array}{l}
[\text{MIN}]\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{s.a} \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\
x_i \geq 0, \quad \forall i \text{ tal que } i = 1, 2, \ldots, n,
\end{array}
$$

definirem el seu **dual** com:

$$
\begin{array}{l}
[\text{MAX}]\ w = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m \\
\text{s.a} \\
a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \leq c_1, \\
a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m \leq c_2, \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \leq c_n,
\end{array}
$$

on les noves variables duals (u_j) seran lliures de signe.

Per a construir el dual és convenient assignar a cada restricció del primal una variable dual (u_j); generalment u_1 s'assigna a la primera restricció, u_2 a la segona, i així successivament. Llavors, tenim el següent:

a) El sentit de l'optimització del dual (minimitzar o maximitzar) és el contrari del primal.

b) Per a construir la funció objectiu del programa dual es prenen les variables duals i es multipliquen pels termes independents de les restriccions del primal.

c) Per a construir les restriccions del dual es pren, per columnes (cada variable del primal serà una columna), els coeficients de les restriccions del primal (a_{ji}) i es van multiplicant per les variables duals i, com a terme independent, es pren el coeficient en la funció objectiu del primal per a la variable en qüestió.

Recordeu que...

... per a canviar el sentit de l'optimització (de MAX a MIN o de MIN a MAX) només s'ha de canviar el signe a tots els coeficients de la funció objectiu. Per a transformar desigualtats en igualtats afegim variables de folgança, i pel que fa a les variables negatives o lliures de signe, el procés per a efectuar la linealització s'explica al subapartat 2.3.1 del mòdul "Introducció a la investigació operativa".

Exemple de plantejaments duals asimètrics

A la taula següent presentem els plantejaments primal i dual d'un problema lineal:

Primal	Dual
[MIN] $z = 7x_1 + 8x_2 + 0s_1 + 0s_2$ s.a $2x_1 + 3x_2 - s_1 + 0s_2 = 11, \ (u_1)$ $4x_1 + 5x_2 + 0s_1 - s_2 = 22, \ (u_2)$ $x_i \geq 0.$	[MAX] $w = 11u_1 + 22u_2$ s.a $2u_1 + 4u_2 \leq 7,$ $3u_1 + 5u_2 \leq 8,$ $-u_1 + 0u_2 \leq 0,$ $0u_1 - u_2 \leq 0.$

Tant en el plantejament primal com en el dual ens hem pres la llibertat d'explicitar tots els coeficients a fi de facilitar la comprensió de les transformacions. Noteu també que les variables s són les de folgança (que tractarem de la mateixa manera que les variables reals).

Abans de continuar és convenient que efectueu els exercicis d'autoavaluació 1 a 4. Caldria que convertíssiu el plantejament de cada exercici a la forma estàndard abans de formular el dual.

1.2. Formulació de programes duals a partir de qualsevol programa lineal

Si ens fixem en l'exemple anterior, podem convertir les dues últimes restriccions del dual en les condicions de no-negativitat d'aquest programa i, per tant, el programa seria lineal. Aquestes dues restriccions provenen de les variables de folgança del primal, i aquestes variables de folgança provenen al seu torn de convertir les inequacions prèvies en equacions. Per tant, en funció de tot això podríem proposar una nova manera de construir programes duals a partir d'un primal que estigui en forma canònica. Aquests tipus de duals també reben el nom de **duals simètrics**. Així doncs, donat un programa lineal de minimització qualsevol, definim el primal i el dual de la manera següent:

Duals simètrics

Si partim d'un problema lineal en forma canònica i plantegem el seu dual, a aquests dos problemes lineals se'ls dóna el nom de *duals simètrics*.

Primal	Dual
[MIN] $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ s.a $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1,$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2,$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m,$ $x_i \geq 0.$	[MAX] $w = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m$ s.a $a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \leq c_1,$ $a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m \leq c_2,$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \leq c_n,$ $u_j \geq 0.$

O bé, en cas de tenir una situació inversa, amb un programa lineal primal de maximització:

Primal	Dual
[MAX] $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ s.a $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1,$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2,$ $\vdots$ $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m,$ $x_i \geq 0.$	[MIN] $w = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m$ s.a $a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \geq c_1,$ $a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m \geq c_2,$ $\vdots$ $a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \geq c_n,$ $u_j \geq 0.$

Exemple de plantejaments duals simètrics

Considerem el problema lineal de l'exemple anterior. El plantejament primal general i el seu dual són els que es veuen en aquesta taula:

Primal	Dual
[MIN] $z = 7x_1 + 8x_2$ s.a $2x_1 + 3x_2 \geq 11,\ (u_1)$ $4x_1 + 5x_2 \geq 22,\ (u_2)$ $x_i \geq 0.$	[MAX] $w = 11u_1 + 22u_2$ s.a $2u_1 + 4u_2 \leq 7,$ $3u_1 + 5u_2 \leq 8,$ $u_j \geq 0.$

La lògica de la forma canònica

Quan tenim un programa en forma canònica partim d'una forma que podríem denominar *lògica*, és a dir, quan minimitzem esperem que les restriccions siguin $\geq$, mentre que si maximitzem se suposa que les restriccions seran $\leq$.

Evidentment, no sempre ha de ser així, podem trobar restriccions de qualsevol tipus tant si maximitzem com si minimitzem.

El raonament anterior obeeix al fet que si tots els paràmetres (a, b i c) fossin positius, si tenint totes les restriccions $\leq$ minimitzéssim, la solució òptima seria no fer res ($x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$), mentre que si tenint totes les restriccions $\leq$ maximitzéssim, la solució seria impròpia ($z^* = \infty$).

Activitat

1.1. Preneu el plantejament primal que hem proposat a la definició de duals simètrics (qualsevol dels dos), afegiu-hi les variables de folgança necessàries, adeqüeu la funció objectiu que s'ha de minimitzar, si és necessari, i plantegeu el seu dual de forma asimètrica.
El resultat d'aquesta activitat ha de ser el mateix que acabem de proposar, ja que no parlem de duals diferents, sinó de diverses maneres de trobar el dual.

El problema és que no sempre tindrem les restriccions del problema lineal plantejades en el sentit "adequat". Aleshores cal triar entre les dues possibles solucions que presentem tot seguit:

1) La primera consisteix, com ja sabem, a canviar la restricció de sentit multiplicant per -1; o, si es tracta d'una restricció en igualtat estricta, substituir-la per dues restriccions, una del tipus $\geq$ i una altra del tipus $\leq$ (amb els mateixos valors de a_{ij} i b_j).

Vegeu les operacions de transformació al subapartat 1.3 del mòdul "L'algoritme símplex" d'aquesta assignatura.

2) El segon procediment consisteix a deduir què li passaria al dual:

a) Si la restricció és del tipus $\geq$ i el problema és de maximitzar, la variable de folgança que cal introduir té el coeficient -1; per tant, la restricció que es generaria al dual (dual asimètric) seria del tipus $-u_j \geq 0$ i, per consegüent, la variable dual seria negativa.

b) En el cas contrari, si partim d'una restricció del tipus $\leq$ en un problema de minimitzar, la variable de folgança té un coeficient $+1$, de manera que la restricció associada del dual és $-u_j \leq 0$, és a dir, el mateix resultat.

c) Per acabar de completar el procediment, si una restricció del primal és del tipus =, la variable associada serà lliure de signe (com la definíem en els duals asimètrics).

Així doncs, podem concloure que si la restricció està "al revés", el signe de la variable al dual també estarà "al revés", és a dir, serà no positiva. Podem fer el mateix raonament a la inversa i concloure que si la variable és no positiva, la restricció associada del dual estarà "al revés".

En resum, podem plantejar el dual de qualsevol primal, estigui en la forma que estigui, fins i tot si és un problema no lineal perquè no totes les variables són no negatives*, tenint en compte el que indiquem a la taula següent:

*** Podem plantejar el dual d'un problema no lineal només en aquest cas.**

Relacions entre el primal i el dual

Primal	Dual
Funció objectiu de maximització ([MAX]) • Restricció $\leq$ al primal. • Restricció $\geq$ al primal. • Restricció = al primal. • Variable no negativa al primal. • Variable no positiva al primal. • Variable lliure de signe al primal.	**Funció objectiu de minimització ([MIN])** • Variable no negativa al dual. • Variable no positiva al dual. • Variable lliure de signe al dual. • Restricció $\geq$ al dual. • Restricció $\leq$ al dual. • Restricció = al dual.
Funció objectiu de minimització ([MIN]) • Restricció $\geq$ al primal. • Restricció $\leq$ al primal. • Restricció = al primal. • Variable no negativa al primal. • Variable no positiva al primal. • Variable lliure de signe al primal.	**Funció objectiu de maximització ([MAX])** • Variable no negativa al dual. • Variable no positiva al dual. • Variable lliure de signe al dual. • Restricció $\leq$ al dual. • Restricció $\geq$ al dual. • Restricció = al dual.

Tanmateix, generalment no utilitzarem totes aquestes possibilitats, ja que si plantegem un dual, el més normal és que ho fem per a treballar-hi tot seguit, de manera que no ens interessarà que el programa que plantegem sigui no lineal; és a dir, si tenim una restricció "al revés" serà més útil canviar aquesta restricció i plantejar el dual que formular el dual i després haver de fer una substitució de variable a tot el plantejament perquè sigui lineal.

Abans de continuar és convenient que feu els exercicis d'autoavaluació 1 a 4. Si convé, convertiu els programes duals en lineals.

2. Relacions en dualitat

En aquest apartat pretenem posar de manifest les relacions que hi ha entre el plantejament primal d'un problema lineal i el seu dual. D'aquestes relacions, n'extraurem algunes propietats importants.

Lectures recomanades

Trobareu la demostració dels teoremes enunciats en aquest apartat a les obres següents:

M. Bazaraa; J. Jarvis; H. Sherali (1990). *Linear Programming and Network Flows* (2a ed.). John Wiley & Sons.

J. Prawda (1980). *Métodos y modelos de investigación de operaciones* (vol. I). Mèxic: Limusa.

2.1. Dual del dual

El dual del dual és el primal. Aquesta relació indica que el concepte de *dualitat* és relatiu.

Per tant, les denominacions *primal* i *dual* són merament una convenció, ja que en realitat són dos duals, l'un de l'altre.

Activitat

2.1. Podeu comprovar la propietat que acabem de presentar si preneu el plantejament dual que resulta de l'exemple plantejat a l'apartat anterior i en plantegeu el dual. (Substituïu totes les u per x si us hi sentiu més còmodes, encara que, una vegada plantejat el dual del dual, torneu a substituir les u per x.)

Vegeu l'"Exemple de plantejaments duals asimètrics" al subapartat 1.1 d'aquest mòdul didàctic.

2.2. Teorema fonamental de la dualitat

Considerem els plantejaments primal i dual d'un PL i les solucions respectives:

Vegeu que el plantejament del programa lineal correspon a l'enunciat de l'exercici d'autoavaluació 2 del mòdul "Introducció a la investigació operativa".

Primal	Dual
[MAX] $z = 10x_1 + 12x_2 + 9x_3$ s.a $x_1 + 2x_3 \leq 30$, $2x_1 + x_2 \leq 40$, $x_2 + 2x_3 \leq 50$, $x_i \geq 0$.	[MIN] $w = 30u_1 + 40u_2 + 50u_3$ s.a $u_1 + 2u_2 \geq 10$, $u_2 + u_3 \geq 12$, $2u_1 + 2u_3 \geq 9$, $u_j \geq 0$.
$z^* = 525$	$w^* = 525$

Aquest resultat ($z^* = w^*$) no és casualitat, sinó que respon al teorema que presentem a continuació.

Recordeu que amb z^* i w^* denotem el valor òptim de la funció objectiu.

Teorema fonamental de la dualitat. Donat un problema lineal i el seu dual, és possible establir que:

1) Si un dels dos té solució òptima pròpia, l'altre també, i els valors de la funció objectiu a l'òptim coincideixen, és a dir, $z^* = w^*$.

2) Si un dels problemes té una solució impròpia, l'altre no té solució possible.

3) Si un dels problemes no té solució possible, l'altre o bé té solució impròpia en el sentit estricte, o bé tampoc no té solució possible.

Una solució no possible...

... és aquella que no satisfà alguna de les condicions exigides al problema (per exemple, la condició de no-negativitat de les variables).

Aquest teorema ens permetrà resoldre el dual i saber (de moment, no de manera exacta*) de quin tipus és la solució del primal.

* Encara no podem saber de manera exacta on s'assoleix l'òptim.

2.3. Teorema de la folgança complementària

Siguin els programes duals (expressats en forma matricial) següents:

Primal	Dual
[MIN] $z = \mathbf{c}'\mathbf{X}$ s.a $\mathbf{AX} \geq \mathbf{b}$, $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$.	[MAX] $w = \mathbf{b}'\mathbf{U}$ s.a $\mathbf{A}'\mathbf{U} \leq \mathbf{c}$, $\mathbf{U} \geq \mathbf{0}$

Teorema de la folgança complementària. Si $\mathbf{X}^*$ i $\mathbf{U}^*$ són solucions òptimes del primal i del dual, respectivament, es complirà que:

- $u_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji} x_i^* - b_j\right) = 0, \quad \forall j \in J = \{1, ..., m\}.$
- $x_i^* \left(c_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ji} u_j\right) = 0, \quad \forall i \in I = \{1, ..., n\}.$

Les equacions anteriors relacionen les variables del primal (dual) amb la restricció corresponent del dual (primal).

De les equacions obtingudes en el teorema de la folgança complementària es dedueix que si una variable del primal (dual) a l'òptim és diferent de zero, la restricció corresponent del dual (primal) se satisfà a l'òptim en igualtat.

Aquesta conseqüència vol dir que, en l'exemple del subapartat anterior, $x_1^* \neq 0$, i per tant, es verifica la restricció en igualtat: $u_1^* + 2u_2^* = 10$.

Noteu que el que hi ha entre parèntesis a les equacions en realitat són les variables de folgança de l'altre problema. Per tant, si **S** i **V** són els vectors de les variables de folgança del primal i del dual respectivament, podríem haver escrit aquestes equacions tal com les formulem a continuació:

- $u_j^* s_j^* = 0, \qquad \forall j \in J = \{1, ..., m\}.$
- $x_i^* v_i^* = 0, \qquad \forall i \in I = \{1, ..., n\}.$

Així, també podríem expressar la propietat anterior de la manera següent: si una variable primal (dual) a l'òptim és diferent de zero, la variable de folgança corresponent del dual (primal) valdrà zero.

De la mateixa manera, podem fer la lectura al revés: si una restricció del primal (dual) se satisfà a l'òptim no amb igualtat (és a dir, la variable de folgança no és zero), la variable corresponent del dual (primal) valdrà zero.

En l'exemple anterior això equival a dir que si $x_1^* \neq 0$, aleshores la variable de folgança corresponent del dual $v_1^* = u_1^* + 2u_2^* - 10 = 0$.

Quant a les relacions fora de l'òptim, es poden deduir teòricament a partir del teorema de la folgança complementària. Si $\mathbf{X}^0$ i $\mathbf{U}^0$ són dos vectors de la base del primal i del dual, respectivament, possibles o no, que verifiquen les relacions següents:

- $u_j^0 \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\, x_i^0 - b_j\right) = 0, \quad \forall j \in J = \{1, ..., m\};$
- $x_i^0 \left(c_i - \sum_{i=1}^{m} a_{ji}\, u_j^0\right) = 0, \quad \forall i \in I = \{1, ..., n\};$

aleshores, si $\mathbf{X}^0$ és una solució possible no òptima del primal, $\mathbf{U}^0$ serà un vector de la base no possible millor que l'òptim del dual i viceversa. Aquest resultat s'utilitzarà per a desenvolupar l'algoritme denominat *algoritme símplex dual*, que veurem més endavant.

L'algoritme símplex dual s'estudia al subapartat 3.2 d'aquest mòdul didàctic.

Finalment, ens queda una propietat per especificar, que ja hem deixat entreveure en el raonament anterior i que enunciem al paràgraf següent.

Si partim d'un vector de la base solució possible, òptima o no, les relacions individuals facilitades pel teorema de la folgança complementària permeten definir completament la solució de la base, possible (si és l'òptima) o no (si no és l'òptima), associada del seu dual.

La darrera propietat és la que ens donarà pas al subapartat següent, en què s'aprofiten aquestes relacions individuals per a construir una taula del dual (primal) a partir de la del primal (dual).

2.4. Relacions entre les taules òptimes del primal i del dual

Abans de començar, assenyalarem que les relacions entre el primal i el dual que expliquem a continuació solament són vàlides per a problemes amb solucions pròpies i sempre que s'ometin les variables artificials que hi pugui haver a la taula.

Per a poder veure amb més claredat les relacions entre primal i dual ens basarem en l'exemple de l'empresa Tropicfruit Inc.:

Primal	Dual
[MAX] $z = 10x_1 + 12x_2 + 9x_3$ s.a $x_1 + 2x_3 \leq 30$, $2x_1 + x_2 \leq 40$, $x_2 + 2x_3 \leq 50$, $x_i \geq 0$.	[MIN] $w = 30u_1 + 40u_2 + 50u_3$ s.a $u_1 + 2u_2 \geq 10$, $u_2 + u_3 \geq 12$, $2u_1 + 2u_3 \geq 9$, $u_j \geq 0$.
$z^* = 525$	$w^* = 525$

1) D'entrada, procedirem a construir la primera taula, tant del primal com del dual; les construirem de manera que tinguem una base canònica de partida, independentment que algun dels valors de les variables a la base sigui negatiu, utilitzant les variables de folgança com a variables a la base. Això implica no tenir en compte les condicions d'aplicabilitat de l'algoritme símplex que, com veurem en aquest exemple, suposa no poder aplicar directament l'algoritme símplex al plantejament dual, ja que hi ha valors de V_B negatius.

Primal ([MAX])			10	12	9	0	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1	0	30	1	0	2	1	0	0
s_2	0	40	2	1	0	0	1	0
s_3	0	50	0	1	2	0	0	1
$z^0 = 0$			−10	−12	−9	0	0	0

Dual ([MIN])			30	40	50	0	0	0
B	c	V_B	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3
v_1	0	−10	−1	−2	0	1	0	0
v_2	0	−12	0	−1	−1	0	1	0
v_3	0	−9	−2	0	−2	0	0	1
$w^0 = 0$			−30	−40	−50	0	0	0

Notació

Donat un problema lineal, la taula de l'algoritme símplex no distingeix entre el plantejament primal o el dual. Per aquest motiu, tant si resolem el primal com si resolem el dual, respectarem la denominació que hem donat fins ara a cada element de la taula. Així doncs, a la columna c del dual hi posarem els coeficients b_j, i a la fila dels valors de $z_i - c_i$ del dual hi posarem els valors de $w_j - b_j$.

Observeu, primerament, que els valors de les variables a la base figuren al dual a la fila dels valors de $z_i - c_i$ (canviats de signe a la taula de mínim) i que conserven les associacions de primera variable real del primal amb primera de folgança del dual, etc. Òbviament, el fet que una variable sigui a la base en un dels problemes implica que la seva associada no hi serà. Per exemple, com que s_1 és a la base, u_1 no hi és, i al revés, com que x_2 no és a la base, v_2 sí que hi és.

Vegeu les associacions entre variables primals i duals al subapartat 2.3 d'aquest mòdul didàctic.

Les columnes que formen els valors interns de la taula per a les variables que no són a la base (és a dir, exclosos els vectors canònics) són les files del dual canviades de signe, respectant les associacions entre variables*. En l'àmbit matricial, significaria que la submatriu de **A** corresponent als vectors associats a les variables fora de la base (els que anomenàvem $\mathbf{P}^k$), que ara denominarem **matriu** $\mathbf{B}^\mathrm{p}$, passaria a ser, en el dual, la transposada, i tindria el signe canviat.

*** Primera variable real del primal amb primera variable de folgança del dual, etc.**

Vegeu la notació emprada en aquesta assignatura al mòdul "L'algoritme símplex".

Aquestes relacions que hem mencionat i que sintetitzem a la taula següent també es compleixen a l'òptim:

Relacions entre els elements del primal i el dual	
Primal	**Dual**
$z_i - c_i$ de variable no a la base ([MAX])	V_B de la variable associada ([MIN])
$-(z_i - c_i)$ de variable no a la base ([MIN])	V_B de la variable associada ([MAX])
Valor de variable a la base, V_B ([MIN])	$z_i - c_i$ variable no base ([MAX])
Valor de variable a la base, V_B ([MAX])	$-(z_i - c_i)$ variable no base ([MIN])
Submatriu $\mathbf{B}^\mathrm{p}$	Traslladada i canviada de signe (respectant les associacions de variables)

2) A continuació, apliquem l'algoritme símplex fins a arribar a l'òptim en el primal i apliquem aquestes relacions entre el primal i el dual per a construir l'última taula del dual:

Primal ([MAX])			10	12	9	0	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1	0	20	3	0	0	1	1	−1
x_2	12	40	2	1	0	0	1	0
x_3	9	5	−1	0	1	0	−1/2	1/2
$z^* = 525$			5	0	0	0	15/2	9/2

Dual ([MIN])			30	40	50	0	0	0
B	c	V_B	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3
v_1	0	5	−3	0	0	1	−2	1
u_2	40	15/2	−1	1	0	0	−1	1/2
u_3	50	9/2	1	0	1	0	0	−1/2
$w^* = 525$			−20	0	0	0	−40	−5

Per a construir la part interna de les taules* extraiem la submatriu $\mathbf{B}^\mathrm{p}$, formada pels vectors columna associats a les variables que no són a la base, la transposem i multipliquem per −1 cada component.

*** Construir la part interna de les taules potser és el pas més complex.**

En el nostre exemple tenim:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & x_1 & s_2 & s_3 & & & & s_1 & x_2 & x_3 & \\
s_1 & 3 & 1 & -1 & u_1 & & x_1 & -3 & -2 & 1 & v_1 \\
x_2 & 2 & 1 & 0 & v_2 & \rightarrow & s_2 & -1 & -1 & 1/2 & u_2 \\
x_3 & -1 & -1/2 & 1/2 & v_3 & & s_3 & 1 & 0 & -1/2 & u_3 \\
 & v_1 & u_2 & u_3 & & & & u_1 & v_2 & v_3 &
\end{array}
$$

Un cop hem fet aquesta transformació haurem de reordenar els components d'aquesta matriu per a expressar les files o les columnes en un altre ordre, en cas que sigui necessari. Cal recordar que, en definitiva, les taules només són una expressió del sistema d'equacions del nostre problema, al qual hem aplicat operacions fonamentals*.

*** Com ara, multiplicar una equació per un nombre o sumar-li una combinació lineal de la resta d'equacions.**

Activitat

2.2. A partir de l'enunciat de l'exemple que acabem de veure, afegiu les variables artificials necessàries al programa lineal, trobeu-ne el dual i apliqueu-hi el mètode símplex. Haureu d'arribar a aquesta última taula.

3) Finalment, hem de destacar que el tipus de relacions que hi ha a l'òptim entre el primal i el dual permeten precisar que si la solució pròpia del primal és degenerada, la del dual serà múltiple (fitada o no), i viceversa. És a dir, si al primal tenim un valor d'una variable a la base igual a zero a l'òptim (solució degenerada), la variable associada del dual, que no serà a la base, tindrà un valor de $z_i - c_i$ igual a zero, i viceversa.

3. Aplicació de les propietats dels duals a la resolució de problemes lineals

En aquest apartat aprenem a trobar la solució d'un problema lineal a partir de la resolució del dual i aprofitar-ne les relacions amb el primal, i presentem els mètodes símplex dual i símplex dual estès, que ens permetran resoldre un problema lineal sense recórrer a les variables artificials.

3.1. Solució mitjançant el dual

Amb les relacions de dualitat que hem vist, en aquest moment podem resoldre un programa lineal mitjançant el dual, és a dir, plantejar el dual, resoldre'l pel mètode símplex per taules i presentar la solució del primal (fins i tot podem reconstruir l'última taula del primal sencera). Tot seguit ho farem; aplicarem el dual a un problema concret:

Vegeu les relacions en dualitat a l'apartat 2 d'aquest mòdul didàctic.

Primal	Dual
[MIN] $z = 50x_1 + 25x_2$ s.a $x_1 + 3x_2 \geq 8$, $3x_1 + 4x_2 \geq 19$, $3x_1 + x_2 \geq 7$, $x_i \geq 0$.	[MAX] $w = 8u_1 + 19u_2 + 7u_3$ s.a $u_1 + 3u_2 + 3u_3 \leq 50$, $3u_1 + 4u_2 + u_3 \leq 25$, $u_j \geq 0$.

Hem escollit aquest exemple perquè en principi és més difícil de resoldre a partir del primal que a partir del dual, ja que amb el primal hauríem d'introduir tres variables artificials i tres de folgança, cosa que implicaria tenir una taula amb vuit columnes i tres files a la part dreta i, en cas que hi hagués solució, caldria un mínim de tres iteracions per a treure de la base les variables artificials. En canvi, amb el dual podem evitar emprar variables artificials i la part dreta de la taula només tindrà cinc columnes i dues files.

Vegeu el problema de la dieta que vam proposar a l'exercici d'autoavaluació 3 del mòdul "Introducció a la investigació operativa" d'aquesta assignatura.

Apliquem, doncs, l'algoritme símplex al dual i obtenim:

Dual ([MAX])			8	19	7	0	0
B	c	V_B	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2
v_1	0	50	1	3	3	1	0
v_2	0	25	3	**4**	1	0	1
$w^0 = 0$			−8	−19	−7	0	0
v_1	0	125/4	−5/4	0	**9/4**	1	−3/4
u_2	19	25/4	3/4	1	1/4	0	1/4
$w^1 = 475/4$			25/4	0	−9/4	0	19/4

Dual ([MAX])			8	19	7	0	0
B	c	V_B	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2
u_3	7	125/9	−5/9	0	1	4/9	−1/3
u_2	19	25/9	8/9	1	0	−1/9	1/3
$w^* = 150$			5	0	0	1	4

Efectuant les transformacions pertinents, podem expressar l'última taula del primal de la manera següent:

			50	25	0	0	0	M	M	M
B	c	V_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3
x_1	50	1	1	0	0	1/9	−4/9	0	−1/9	4/9
x_2	25	4	0	1	0	−1/3	1/3	0	1/3	−1/3
s_1	0	5	0	0	1	−8/9	5/9	1	8/9	−5/9
$z^* = 150$			0	0	0	−25/9	−125/9	$-M$	$25/9-M$	$125/9-M$

Si solament estiguéssim interessats en la solució, ni tan sols no seria necessari reconstruir la taula, però aquí servirà com a pràctica addicional. A més, encara que no siguin necessàries en una última taula, hem introduït les variables artificials, a les columnes de les quals hi ha els mateixos valors que els que hi ha a les de les variables de folgança de la mateixa restricció però canviats de signe.

La solució serà $x_1 = 1$ i $x_2 = 4$ amb $z = 150$ que, expressat en els termes del plantejament, vol dir que els soldats han d'ingerir al dia 1 kg de carn de porc i 4 kg de patates, i el cost és de 150 u.m. per soldat.

Abans de continuar l'estudi d'aquest apartat és convenient que feu l'exercici d'autoavaluació 5 d'aquest mòdul didàctic.

3.2. Mètode símplex dual

Una vegada sabem resoldre problemes lineals mitjançant el seu dual, ens podem plantejar de fer el mateix treballant exclusivament amb el primal. Podem aprofitar les relacions en la dualitat per a construir un algoritme que, partint de la primera taula del primal i aplicant els mateixos criteris que aplicaria l'algoritme símplex en el seu dual, permeti arribar a la solució òptima (si n'hi ha).

Aquest és el raonament que van fer Lemke i Beale el 1954, que donà pas a l'algoritme conegut com *algoritme símplex dual*.

3.2.1. Condicions d'aplicabilitat

El mètode símplex dual es pot aplicar en una taula inicial quan es compleixen els requisits següents:

1) Les variables de la base han de tenir associats vectors canònics (s'ha de tenir una base canònica)

2) Tots els valors de la fila de $z_i - c_i$ són adequats a l'òptim*.

*** Els valors de $z_i - c_i$ adequats a l'òptim són negatius o zero, si minimitzem, i positius o zero, si maximitzem.**

3) Algun dels valors de les variables a la base (o tots) és negatiu. Si es donessin les condicions 1 i 2 i, a més, tots els valors de les variables bàsiques fossin zero o positius, ja seríem a l'òptim.

Si es compleixen les condicions d'aplicabilitat esmentades mai no podrem trobar una solució impròpia. El raonament és el següent: si el primal té solució impròpia, el dual no tindrà solució possible. Si tenim una taula on podem aplicar l'algoritme símplex dual, vol dir que al dual tenim un vèrtex (una base) que és solució possible (totes les $V_B \geq 0$, ja que tots els valors de $z_i - c_i$ del primal són adequats a l'òptim). Per consegüent, el conjunt de solucions possibles mai no podrà ser buit, atès que almenys hi ha un punt possible i, per tant, no es podrà donar el cas que el dual no tingui solució possible. Així, el primal no podrà tenir una solució impròpia.

Vegeu el teorema fonamental de la dualitat al subapartat 2.2 d'aquest mòdul didàctic.

En definitiva, si es pot aplicar l'algoritme símplex dual, mai no podrem trobar una solució impròpia al primal.

3.2.2. Funcionament de l'algoritme

L'algoritme símplex dual segueix els mateixos passos que l'algoritme símplex per taules un cop s'ha escollit el pivot. En l'algoritme símplex dual l'**elecció del pivot** es fa de la manera següent:

Vegeu l'algoritme símplex per taules al subapartat 3.2 del mòdul "L'algoritme símplex" d'aquesta assignatura.

1) Sortirà de la base la variable que tingui un valor V_B més negatiu.

2) Entrarà a la base la variable que tingui el valor $\min\left\{\left|\frac{z_k - c_k}{x_{j^*k}}\right|\right\}$, $\forall x_{j^*k} < 0$, $k \in K$, on j^* fa referència a la fila de la que surt.

Si no existeix cap $x_{j^*k} < 0$ direm que el problema té solució impròpia.

Aquestes regles que acabem de veure serveixen tant per al cas de mínim com per al cas de màxim.

Una vegada sabem quina variable entra i quina surt, triem, igual que a l'algoritme símplex, l'element comú a la fila de la variable que surt i a la columna de la variable que entra i el denominem *pivot*.

Procedirem a canviar la taula de la mateixa manera com ho fèiem en el mètode símplex, i repetirem les operacions fins que no puguem trobar un pivot, és a dir, fins que tots els valors de les x_{ji} de la fila de la variable que surt siguin positiu o zero i, per tant, no pugui entrar cap variable nova a la base.

3.2.3. Interpretació de la solució

Quan haurem arribat al final de l'algoritme ens podem haver trobat amb qualsevol d'aquests dos casos:

1) Si no pot entrar cap variable perquè no hi ha cap x_{ji} negatiu, hi haurà **solució no possible**.

Interpretació de la situació amb solució no possible

Si aïllem de la taula la restricció i analitzem què vol dir que no hi hagi cap x_{ji} negatiu (recordeu que els canvis que efectuem en passar d'una taula a una altra no afecten el sistema d'equacions), ens trobem amb la interpretació següent: "una suma de nombres positius (els coeficients, atès que no n'hi ha cap de negatiu) multiplicats per valors positius (les variables, que han de ser positives o zero) és igual a un valor negatiu". Òbviament, mai cap punt (conjunt de valors de x) no podrà complir aquesta restricció, de manera que el conjunt de solucions possibles serà buit, cosa que implica que el problema no té solució possible.

2) Si no pot sortir cap variable de la base perquè no hi ha cap variable a la base que tingui un valor negatiu, llavors tindrem una **solució pròpia**. A partir d'aquí la interpretació de la solució és la mateixa que la que efectuàvem després d'aplicar l'algoritme símplex, és a dir:

Vegeu la tipologia de solucions a l'apartat 4 del mòdul "L'algoritme símplex" d'aquesta assignatura.

a) Si hi ha un valor de $z_i - c_i$ d'una variable que no és a la base amb valor zero, aleshores tindrem una **solució múltiple**; si, a més:

- A la columna d'aquesta variable no hi ha cap x_{ji} positiu es tractarà d'una **solució múltiple no fitada**.
- Si a la columna de la variable hi ha algun x_{ji} positiu, serà una **solució múltiple fitada**.

b) Si no hi ha cap valor de $z_i - c_i$ d'una variable que no és a la base igual a zero, serà una **solució única**.

3.2.4. Exemple d'aplicació

Apliquem l'algoritme símplex dual a l'exemple de la dieta:

Vegeu l'exemple del problema de la dieta proposat al subapartat 3.1 d'aquest mòdul didàctic.

Primal	Dual
[MIN] $z = 50x_1 + 25x_2$ s.a $x_1 + 3x_2 \geq 8$, $3x_1 + 4x_2 \geq 19$, $3x_1 + x_2 \geq 7$, $x_i \geq 0$.	[MAX] $w = 8u_1 + 19u_2 + 7u_3$ s.a $u_1 + 3u_2 + 3u_3 \leq 50$, $3u_1 + 4u_2 + u_3 \leq 25$, $u_j \geq 0$.

Construïm la primera taula a partir del plantejament del primal, prenent com a base canònica els vectors associats a les variables de folgança, cosa que implicarà multiplicar per −1 totes les restriccions:

			50	25	0	0	0
B	***c***	V_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
s_1	0	−8	−1	−3	1	0	0
s_2	0	−19	−3	**−4**	0	1	0
s_3	0	−7	−3	−1	0	0	1
$z^0 = 0$			−50	−25	0	0	0

Com veiem, tenim almenys una V_B negativa (en aquest cas totes tres) i els valors de $z_i - c_i$ són adequats a l'òptim, de manera que podem aplicar l'algoritme símplex dual. Així doncs, per a la primera iteració escollim s_2 com a variable que surt de la base perquè té un valor V_B més negatiu (−19). I entra a la base la variable que correspon a $\min\{|-50/-3|, |-25/-4|\}$, és a dir, x_2.

			50	25	0	0	0
B	***c***	V_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
s_1	0	25/4	5/4	0	1	−3/4	0
x_2	25	19/4	3/4	1	0	−1/4	0
s_3	0	−9/4	**−9/4**	0	0	−1/4	1
$z^1 = 475/4$			−125/4	0	0	−25/4	0
s_1	0	5	0	0	1	−8/9	5/9
x_2	25	4	0	1	0	−1/3	1/3
x_1	50	1	1	0	0	1/9	−4/9
$z^* = 150$			0	0	0	−25/9	−125/9

Òbviament, aquesta és la mateixa última taula del primal que hem trobat abans.

Abans de continuar l'estudi d'aquest mòdul és convenient que efectueu l'exercici d'autoavaluació 6.

3.3. Mètode símplex dual estès

Un dels principals inconvenients de l'algoritme símplex dual radica en el fet que a vegades coincideix que alguna variable a la base (V_B) té valor negatiu i alhora algun valor de $z_i - c_i$ és inadequat a l'òptim, de manera que no es pot aplicar. Per a afrontar aquest tipus de situacions s'han desenvolupat diversos mètodes, entre els quals destaca per la seva simplicitat l'anomenat *mètode símplex dual estès* o també *mètode de la restricció artificial*.

3.3.1. Condicions d'aplicabilitat

Per a poder aplicar el mètode símplex dual estès en una primera taula s'han de complir les condicions següents:

1) Les variables a la base han de tenir associats vectors canònics (hem de tenir una base canònica).

2) Alguns (o tots) dels valors de $z_i - c_i$ han de ser no adequats a l'òptim.

3) Alguns (o tots) dels valors de les variables a la base (V_B) han de ser negatius.

3.3.2. Funcionament de l'algoritme

Per a poder aplicar l'algoritme de la manera habitual apliquem un artifici matemàtic que consisteix a introduir la **restricció artificial** següent:

$$\sum_{k \in K} x_k \leq M,$$

on M és el mateix concepte emprat en les variables artificials, és a dir, un nombre arbitràriament gran, i les x_k són les variables de la taula que no són a la base. A aquesta nova restricció li afegirem la corresponent variable de folgança per a convertir-la en igualtat. Com que té associat un vector canònic, quan introduïm aquesta restricció a la taula, la variable de folgança estarà a la base en aquesta última fila.

La restricció artificial...

... no és sinó un artifici matemàtic, ja que de fet no restringeix res; és com si, en un context en què s'hagi de decidir quina quantitat cal produir de diferents productes, diguéssim: "el nombre d'unitats produïdes de tots els productes no pot ser superior a 10^{97}".

A partir d'aquí, l'**aplicació de l'algoritme** s'efectua de la manera següent:

1) Triarem la variable que entra a la base amb els mateixos criteris que a l'algoritme símplex, és a dir, si el problema és de minimització entrarà a la base aquella variable amb un valor de $z_i - c_i$ més positiu, i si el problema és de maximització entrarà a la base la que tingui un valor de $z_i - c_i$ més negatiu.

Vegeu el subapartat 3.2.2 del mòdul "L'algoritme símplex" d'aquesta assignatura.

2) Sortirà de la base la variable de folgança de la restricció artificial. Identifiquem el pivot com sempre, és a dir, serà l'element comú a la columna de la variable que entra i a la fila de la que surt, i procedim a canviar de taula.

3) Si hem efectuat les operacions de manera correcta, la nova taula tindrà tots els valors de $z_i - c_i$ adequats a l'òptim, i algunes de les variables a la base continuaran essent negatives, de manera que ja podrem aplicar l'algoritme símplex dual fins a arribar a l'última taula, o fins que no sigui possible trobar un pivot. En aquest darrer cas, direm que el problema no té solució.

3.3.3. Interpretació de la solució

Una vegada arribats a l'última taula, la interpretació és semblant a la del mètode símplex dual, amb les matisacions següents:

Vegeu la interpretació de la solució del mètode símplex dual al subapartat 3.2.3 d'aquest mòdul didàctic.

1) Si la variable de folgança de la restricció artificial (s_A) pren un valor positiu, tenim una **solució pròpia**.

2) Si s_A val 0 (perquè no és a la base o perquè és a la base amb $V_B = 0$) i el seu valor $z_i - c_i$ també val 0, aleshores és una **solució múltiple no fitada**.

3) Si s_A val 0 i el seu valor $z_i - c_i \neq 0$, tenim una **solució impròpia**.

3.3.4. Exemple d'aplicació

Vegem la manera com s'aplica aquest mètode amb l'exemple següent:

Vegeu que el plantejament correspon a l'exercici d'autoavaluació 4 del mòdul "L'algoritme símplex".

$$[\text{MAX}]\ z = 30x_1 + 60x_2 + 20x_3$$

s.a

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 850,$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 900,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 400,$$
$$x_i \geq 0.$$

La primera taula és la següent:

			30	60	20	0	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1	0	850	5	2	1	1	0	0
s_2	0	900	1	2	4	0	1	0
s_3	0	−400	−1	−1	−1	0	0	1
$z^0 = 0$			−30	−60	−20	0	0	0

En aquesta primera taula tenim una V_B negativa (−400) i els valors de $z_i - c_i$ de x_1, x_2 i x_3 negatius (no adequats a l'òptim), de manera que aplicarem el mètode de l'algoritme símplex dual estès afegint la restricció següent*: $x_1 + x_2 + x_3 \leq M$ i procedim a resoldre'l. Després de la primera iteració tots els valors de $z_i - c_i$ són positius o zero (adequats a l'òptim), però encara hi ha V_B negatives (solució no possible), de manera que aplicarem l'algoritme símplex dual.

* Fixeu-vos que la restricció és formada per les variables que no són a la base.

			30	60	20	0	0	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	0	850	5	2	1	1	0	0	0
s_2	0	900	1	2	4	0	1	0	0
s_3	0	−400	−1	−1	−1	0	0	1	0
s_4	0	M	1	**1**	1	0	0	0	1
$z^0 = 0$			−30	−60	−20	0	0	0	0
s_1	0	$850 - 2M$	3	0	−1	1	0	0	**−2**
s_2	0	$900 - 2M$	−1	0	2	0	1	0	−2
s_3	0	$-400 + M$	0	0	0	0	0	1	1
x_2	60	M	1	1	1	0	0	0	1
$z^1 = 60M$			30	0	40	0	0	0	60

(Continua a la pàgina següent.)

			30	60	20	0	0	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4
s_4	0	$M - 425$	$-3/2$	0	1/2	$-1/2$	0	0	1
s_2	0	50	-4	0	3	-1	1	0	0
s_3	0	25	3/2	0	$-1/2$	1/2	0	1	0
x_2	60	425	5/2	1	1/2	1/2	0	0	0
$z^* = 25.500$			120	0	10	30	0	0	0

La variable de folgança de la restricció artificial és a la base en l'última taula amb valor $M - 425$ ($\neq 0$), de manera que la solució és única i és $x_2 = 425$, amb una $z = 25.500$ que, en el context del problema, significaria que s'han de produir 425 formatges del tipus 2 amb un benefici de 25.500.

Abans de continuar l'estudi del d'aquest mòdul és convenient que efectueu l'exercici d'autoavaluació 7.

3.4. Maneres de resoldre problemes lineals

A tall de conclusió, i una vegada hem vist tots els procediments de resolució de problemes lineals que expliquem a l'assignatura, farem un resum dels diversos procediments que es poden emprar per a resoldre un problema lineal:

1) Sobre qualsevol problema lineal podrem aplicar-hi directament l'algoritme símplex sempre que utilitzem les variables artificials que siguin necessàries per a obtenir una base canònica de sortida i que disposem d'un vèrtex de partida possible (totes les $V_B \geq 0$).

2) Una manera alternativa és plantejar el dual, resoldre'l i, a partir d'aquesta solució del dual, obtenir la solució del primal.

3) Podem resoldre qualsevol problema lineal (primal o dual) sense utilitzar variables artificials aplicant els criteris que mostrem a la taula següent, tenint en compte que sempre necessitarem una base canònica per a treballar amb taules:

	Hi ha almenys una variable amb valor $V_B < 0$	**Totes les variables tenen valor $V_B > 0$**
Tots els valors de $z_i - c_i$ són adequats a l'òptim	Símplex dual	Ja som a l'òptim
Alguns (o tots) els valors de $z_i - c_i$ són inadequats a l'òptim	Símplex dual estès	Símplex

4. Interpretació econòmica de la dualitat

Fins ara hem utilitzat els programes duals i les seves propietats per a obrir noves vies de solució de problemes lineals a fi de ser més eficients a l'hora de solucionar-los. Això no obstant, arribats a aquest punt és convenient que ens preguntem si és possible dotar de significat econòmic les variables del dual. Passem a deduir-ho. Com sabem:

$$z^* = \mathbf{c}'\mathbf{X}^* = c_1x_1^* + c_2x_2^* + \dots + c_nx_n^*.$$

D'altra banda, al dual tindrem:

$$w^* = \mathbf{b}'\mathbf{U}^* = b_1u_1^* + b_2u_2^* + \dots + b_mu_m^*.$$

Pel teorema fonamental de la dualitat sabem que $z^* = w^*$, per tant:

$$z^* = b_1u_1^* + b_2u_2^* + \dots + b_mu_m^*.$$

Fixem ara els valors de les variables a l'òptim i demanem-nos com variaria el valor de la funció objectiu si modifiquéssim un dels termes independents de les restriccions (b_k) de manera unitària i sempre que no es canviés la composició de la base. La derivada parcial següent expressaria aquesta variació:

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_k} = u_k^*.$$

Així doncs, les **variables reals del dual** representen l'increment (decrement) del valor de la funció objectiu en l'òptim produït per un increment (decrement) unitari del terme independent de la restricció del primal associada.

Vegem-ho aplicat a l'exemple Tropicfruit Inc., on tenim que l'última taula del primal és la següent:

Vegeu que aquesta taula correspon a l'exemple desenvolupat al subapartat 2.4 d'aquest mòdul didàctic.

			10	12	9	0	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1	0	20	3	0	0	1	1	−1
x_2	12	40	2	1	0	0	1	0
x_3	9	5	−1	0	1	0	−1/2	1/2
$z^* = 525$			5	0	0	0	15/2	9/2

El valor òptim de les variables duals és el mateix que el valor de $z_i - c_i$ de les variables de folgança del primal associades, que trobem a l'última taula del primal. Per exemple, el valor de u_2^* és 7,5. Això significa que si incrementem el terme independent de la segona restricció, el valor de z s'incrementarà en 7,5 per unitat d'increment. En el context del problema seria*: si disposem de 100 quilos més de kiwis (si $b_2 = 40$ passés a valer $b_2 = 41$) el benefici obtingut augmentaria en 7.500 euros, és a dir, seria de 52.500 + 7.500 = 60.000 euros. Aquest benefici s'explica perquè si disposem de més quantitat d'aquest component podrem fabricar més quantitat d'alguns productes (no produïm més perquè no tenim matèries primeres, en aquest cas perquè no tenim més kiwis). A aquest valor de la variable dual (7,5) se li dóna el nom de *preu ombra*.

*** Cal anar amb compte perquè en l'enunciat totes les unitats estaven en centenars.**

El **preu ombra** és un preu addicional perquè als coeficients *c* de la funció objectiu ja es té en compte el preu dels components, de manera que el fet de gastar-ne un ja implica que es descompti el cost del seu benefici.

Així doncs, el preu ombra dels kiwis seria de 7,5 euros/kg (7.500 euros per cada 100 kg), mentre que el dels alvocats seria de 0 euros i els mangos valdrien 4,5 euros/kg. Aquest seria el preu addicional (a més del que ja es paga ara) que estaríem disposats a oferir per disposar d'una unitat més de cada component.

Per tant, estaríem disposats a pagar, com a màxim, el cost actual del kg de kiwi + el preu ombra = 6 + 7,5 = 13,5 euros per disposar d'un kg més de kiwis. Si paguéssim exactament aquest preu màxim (13,5), el benefici total no en resultaria modificat: si disposem de 100 kg més, el nou benefici seria de 60.000, però si descomptem aquest sobrepreu (7,5 · 100) ens tornem a situar en 52.500. Òbviament, qualsevol sobrepreu inferior a 7,5 produiria un benefici total superior a 52.500, ja que l'increment seria el mateix, però hauríem de restar un cost extra menor.

El cas dels alvocats requereix un comentari a part, atès que el preu ombra és zero. Això significa que no estem disposats a pagar res més per a tenir una disponibilitat més gran d'aquest component.

Què significa tenir un preu ombra zero?

Un preu ombra zero implica que si es disposa d'una major quantitat d'aquest component no es millora el benefici obtingut.

Remarquem el fet que si una variable és a la base el seu valor de $z_i - c_i$ és zero. En altres paraules, si una variable de folgança és a la base, la variable real del dual associada val zero, de manera que el preu ombra d'aquest component també serà zero.

Quan una variable de folgança és a la base tenim un excedent del component associat a aquella variable. En el cas dels alvocats, s_1 és a la base amb valor 20, cosa que significa que ens sobren 2.000 kg d'alvocats. Per tant, si poguéssim disposar de més alvocats, l'únic que passaria és que ens en sobrarien més.

Què vol dir que una variable de folgança és a la base?

També hi ha la possibilitat que el valor $z_i - c_i$ d'una variable sigui zero a l'òptim i aquesta variable no sigui a la base: seria el cas que tinguéssim una solució múltiple. Aleshores, fins i tot si gastem totes les existències d'un component el benefici no millorarà. El fet que es consumeixin totes les unitats d'un component no implica que incrementant la disponibilitat s'incrementi el benefici, perquè també s'han de tenir en compte la resta de restriccions, i això és crucial per a poder entendre la validesa dels preus ombra.

Reprenguem un exemple que ja hem fet servir quan explicàvem la solució gràfica de problemes lineals i vegem què passa quan incrementem un terme independent d'una restricció en un problema amb solució única. Considerem el plantejament següent:

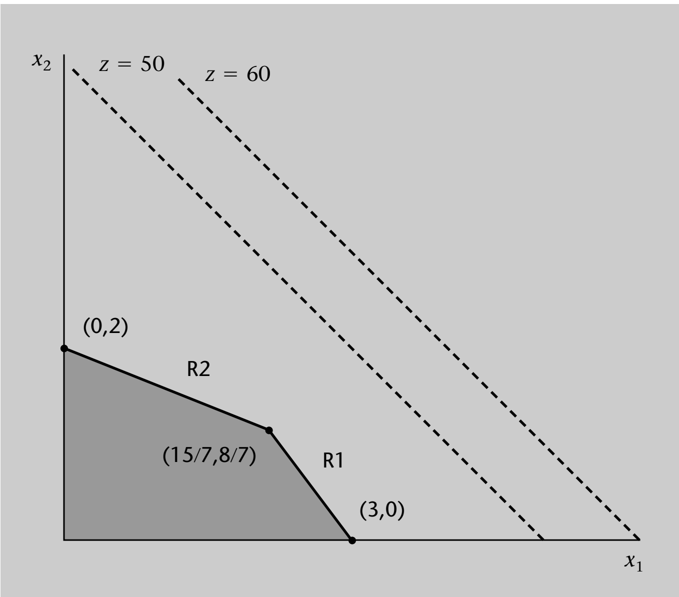
Vegeu l'exemple plantejat a l'apartat 4 del mòdul "Introducció a la investigació operativa" d'aquesta assignatura.

$$[\text{MAX}]\ z = 5x_1 + 10x_2$$

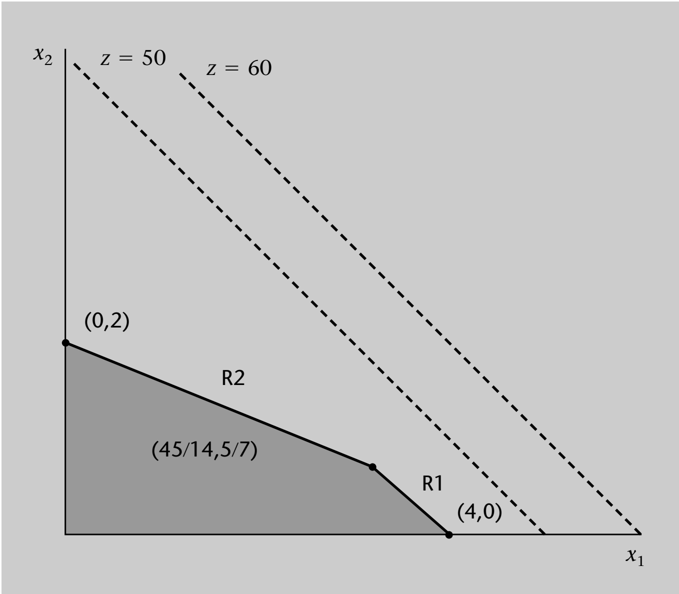
s.a

$$4x_1 + 3x_3 \leq 12,$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 10,$$
$$x_i \geq 0.$$

Pel mètode dels vèrtexs tenim que:

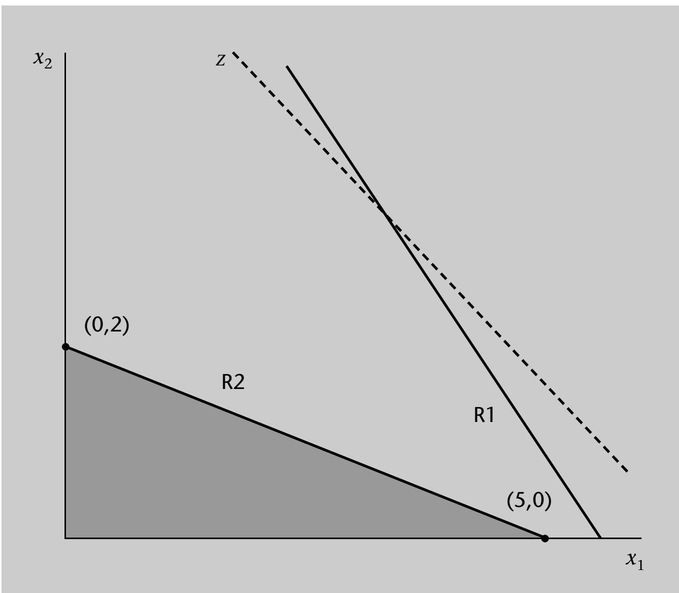


Quan el resolem mitjançant l'algoritme símplex trobem que $u_1 = 5/14$. Si modifiquem el terme independent de la primera restricció (12) i l'incrementem (per exemple a 15), desplacem aquesta restricció cap a la dreta i, per tant, engrandim el conjunt de solucions possibles per la dreta, com podeu observar a la figura següent:



Noteu que el nou òptim serà el punt de coordenades (45/14,5/7), és a dir, té les mateixes variables a la base, però amb un valor diferent, cosa que fa que la z^* hagi passat de valer 155/7 a 325/14 (= 5 · 45/14 + 10 · 5/7) i aquesta diferència (15/14) s'explica multiplicant 5/14 per 3 (que és precisament la diferència entre el terme independent del primer cas, 12, i el del segon cas, 15).

Un cop vist com funciona, podríem incrementar el terme independent de la primera restricció a 25. Amb això esperaríem obtenir un increment de z^* de 13 · 5/14 = 65/14 i obtenir una z^* = 375/14 (≈ 26,79). Això no obstant, si resolem el problema amb aquestes noves dades ($b_1 = 25$) la solució és: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$ amb un valor $z^* = 25$, menor del que esperàvem. Vegem en el gràfic què ha passat:



Hem desplaçat tant la restricció R1 que al final el conjunt de solucions possibles comprèn únicament els punts que compleixen la restricció R2, de manera que l'òptim ha canviat de vèrtex. Per aquest motiu no ha funcionat el càlcul efectuat mitjançant els preus ombra, amb els quals es pressuposa que no hi ha un canvi de vèrtex, i es dóna per fet que el nou vèrtex continuarà essent l'encreuament d'ambdues restriccions (95/14,−5/7), però que ara no és possible (el valor de z per a aquest punt efectivament és 375/14).

Per tant, els preus ombra únicament són vàlids si no es canvia de vèrtex òptim, tenint en compte que un canvi en un coeficient b_j pot provocar un canvi de vèrtex òptim, tal com acabem de veure a l'exemple. En conseqüència, la informació facilitada pels preus ombra és irrellevant tret que es conegui l'interval en el qual les modificacions del terme independent de la restricció no afecten la composició de la base (és a dir, no es canvia de vèrtex). En un altre mòdul veurem com es calcula aquesta dada.

Vegeu com es calcula l'interval de validesa dels preus al subapartat 3.3 del mòdul "Anàlisi de sensibilitat" d'aquesta assignatura.

En el nostre exemple, l'interval dels preus ombra és (6,20), és a dir que valors de b_1 entre 6 i 20 tenen com a òptim el mateix vèrtex. En el cas que ens situem en el límit de validesa dels preus ombra, per exemple, si ens haguéssim proposat passar b_1 a 20, ens trobaríem davant d'una solució degenerada, és a dir, la base corresponent a l'encreuament de dues restriccions ($\mathbf{P}^{x1}$, $\mathbf{P}^{x2}$), la base corresponent a l'encreuament de la restricció R2 amb l'eix de x_1 ($\mathbf{P}^{x1}$, $\mathbf{P}^{s2}$), i la base corresponent a l'encreuament de la restricció R1 amb l'eix de x_1 ($\mathbf{P}^{x1}$, $\mathbf{P}^{s1}$) estarien associades a un mateix vèrtex (5,0), de manera que si la composició de la base fos x_1 i s_1, la variable s_1 seria a la base, però el seu valor seria zero. En aquest cas, com ja hem comentat, encara que no sobrés res, un increment de disponibilitat no proporcionaria cap millora a z (el preu ombra, com que seria a la base, valdria zero).

Notació

Denotem amb $\mathbf{P}^{x1}$ el vector associat a la variable x_1, amb $\mathbf{P}^{s1}$ el vector associat a la variable s_1, etc. Aquesta notació encara no l'havíem fet servir perquè fins ara havíem utilitzat altres mecanismes per a distingir les variables reals de les de folgança.

Si, al contrari, tinguéssim reflectida a la taula qualsevol de les dues bases restants, s_1 no seria a la base, de manera que el preu ombra seria diferent de zero. Llavors, cap increment de b_1 no seria solució possible perquè implicaria canviar de base per petit que fos.

En definitiva, els preus ombra, que són el valor de les variables reals del dual a l'òptim, indiquen com es modificarà el valor de z si alterem el terme independent de la restricció associada, sempre que aquesta modificació no comporti un canvi de base. Per tant, aquesta informació assoleix el màxim potencial quan es coneix l'interval en el qual els moviments del terme independent no provoquen un canvi de base.

Per acabar, si la solució és degenerada, els preus ombra tampoc no es podran aplicar, atès que qualsevol canvi en els coeficients b_j provocarà un canvi de base.

Resum

En aquest mòdul hem tractat de la dualitat en la programació lineal. En concret, n'esmentem els aspectes següents:

1) Per començar, hem exposat com s'han de plantejar els programes duals a partir d'un programa lineal, primerament de forma asimètrica (partint de la forma estàndard) i posteriorment generalitzar-ho a qualsevol forma inicial.

2) Una vegada explicat el plantejament dels problemes duals, hem incidit en les seves propietats basant-nos en el teorema fonamental de la dualitat i en el teorema de la folgança complementària, dels quals hem desenvolupat unes propietats que ens han permès establir les relacions corresponents entre les taules del primal i del dual.

3) Aprofitant aquestes relacions hem obert noves vies de solució de problemes lineals: resoldre'ls amb el dual, aplicar l'algoritme símplex dual i el mètode símplex dual estès.

4) Finalment, hem dedicat un apartat a la interpretació econòmica de la dualitat tot posant un èmfasi especial en els preus ombra i en la seva aplicabilitat.

Exercicis d'autoavaluació

1. Plantegeu el dual del programa lineal següent:

$$[\text{MIN}]\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

s.a

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 11,\\ &2x_1 + x_2 - x_3 \geq 16,\\ &x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 20,\\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

2. Plantegeu el dual del programa lineal següent:

$$[\text{MAX}]\ z = 4x_1 + x_2 + 2x_3$$

s.a

$$\begin{aligned} &2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 100,\\ &x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 20,\\ &x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 200,\\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

3. Plantegeu el dual del programa lineal següent:

$$[\text{MAX}]\ z = x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

s.a

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 50,\\ &x_1 + 3x_2 - x_3 = 75,\\ &x_1 - 4x_2 + 4x_3 \geq 90,\\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

4. Plantegeu el dual del programa lineal següent:

$$[\text{MIN}]\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

s.a

$$\begin{aligned} &-x_1 + 4x_2 + 7x_3 \geq 11,\\ &2x_1 - 5x_2 - 8x_3 = 16,\\ &3x_1 + 6x_2 - 9x_3 \leq 20,\\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \text{ lliure de signe.} \end{aligned}$$

5. Per a alimentar un grup de vaques disposem de tres tipus d'aliments, a continuació en descrivim les característiques:

Taula de costos				
Aliment	**Matèria seca**	**Proteïnes**	**Greix**	**Cost***
Alfals	1	0	2	100
Civada	0	3	1	200
Ensitjament	1	2	0	150

* El cost s'expressa en u.m.

La ració diària per a mantenir aquests animals ha de contenir com a mínim 4 unitats de matèria seca i 5 de proteïnes, i el greix no ha de superar les 15 unitats.
Quina seria la ració més barata que es pot preparar amb aquests aliments?
Plantegeu el dual, resoleu-lo i especifiqueu la solució del primal. Construïu l'última taula del primal.

6. Resoleu l'exercici 5 a partir del primal i sense utilitzar variables artificials (apliqueu el mètode símplex dual).

7. Resoleu el problema de Fustes del Segre sense utilitzar variables artificials.

$$[\text{MAX}]\ z = 5x_1 + 8x_2$$

s.a

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 \leq 30,\\ &3x_1 + 4x_2 \leq 80,\\ &x_1 \geq 4,\\ &x_2 \geq 12,\\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

Vegeu l'enunciat complet del problema Fustes del Segre a l'exercici d'autoavaluació 3 del mòdul "L'algoritme símplex" d'aquesta assignatura.

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. El plantejament del dual és el següent:

$$[\text{MAX}]\ w = 11u_1 + 16u_2 + 20u_3$$

s.a

$$u_1 + 2u_2 + u_3 \leq 2,$$
$$2u_1 + u_2 - 2u_3 \leq 3,$$
$$3u_1 - u_2 + 4u_3 \leq 4,$$
$$u_j \geq 0.$$

2. El plantejament del dual corresponent a l'enunciat d'aquest exercici és el que veiem a continuació:

$$[\text{MIN}]\ w = 100u_1 - 20u_2 + 200u_3$$

s.a

$$2u_1 - u_2 + u_3 \geq 4,$$
$$3u_1 - 5u_2 - 2u_3 \geq 1,$$
$$5u_1 + u_2 + 4u_3 \geq 2,$$
$$u_j \geq 0.$$

3. El plantejament del dual corresponent a l'enunciat d'aquest exercici és el que veiem a continuació:

$$[\text{MIN}]\ w = 50u_1 + 75(u'_2 - u''_2) - 90u_3$$

s.a

$$u_1 + (u'_2 - u''_2) - u_3 \geq 1,$$
$$2u_1 + 3(u'_2 - u''_2) + 4u_3 \geq 3,$$
$$3u_1 - (u'_2 - u''_2) - 4u_3 \geq 2,$$
$$u_j \geq 0.$$

4. El plantejament del dual d'aquest problema és el que veiem a continuació:

$$[\text{MAX}]\ w = 11u_1 + 16(u'_2 - u''_2) - 20u_3$$

s.a

$$-u_1 + 2(u'_2 - u''_2) - 3u_3 \leq 2,$$
$$4u_1 - 5(u'_2 - u''_2) - 6u_3 \geq 3,$$
$$7u_1 - 8(u'_2 - u''_2) + 9u_3 = 4,$$
$$u_j \geq 0.$$

5. Per a resoldre el problema mitjançant el dual, d'entrada l'hem de plantejar:

Primal	Dual
$[\text{MIN}]\ z = 100x_1 + 200x_2 + 150x_3$ s.a $x_1 + x_3 \geq 4,$ $3x_2 + 2x_3 \geq 5,$ $2x_1 + x_2 \leq 15,$ $x_i \geq 0.$	$[\text{MAX}]\ w = 4u_1 + 5u_2 - 15u_3$ s.a $u_1 - 2u_3 \leq 100,$ $3u_2 - u_3 \leq 200,$ $u_1 + 2u_2 \leq 150,$ $u_i \geq 0.$

A continuació resolem la taula del dual:

			4	**5**	**−15**	**0**	**0**	**0**
B	c	V_B	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3
v_1	0	100	1	0	−2	1	0	0
v_2	0	200	0	**3**	−1	0	1	0
v_3	0	150	1	2	0	0	0	1
$w^0 = 0$			−4	−5	15	0	0	0

(Continua a la pàgina següent.)

			4	5	−15	0	0	0
B	c	V_B	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3
v_1	0	100	1	0	−2	1	0	0
u_2	5	200/3	0	1	−1/3	0	1/3	0
v_3	0	50/3	**1**	0	2/3	0	−2/3	1
$w^1 = 1.000/3$			−4	0	40/3	0	5/3	0
v_1	0	250/3	0	0	8/3	1	**2/3**	−1
u_2	5	200/3	0	1	−1/3	0	1/3	0
u_1	4	50/3	1	0	2/3	0	−2/3	1
$w^2 = 400$			0	0	16	0	−1	4
v_2	0	125	0	0	−4	3/2	1	−3/2
u_2	5	25	0	1	1	−1/2	0	1/2
u_1	4	100	1	0	−2	1	0	0
$w^* = 525$			0	0	12	3/2	0	5/2

A partir de la solució del dual construïm l'última taula del primal:

			100	200	150	0	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
x_3	150	5/2	0	3/2	1	0	−1/2	0
x_1	100	3/2	1	−3/2	0	−1	1/2	0
s_3	0	12	0	4	0	2	−1	1
$z^* = 525$			0	−125	0	−100	−25	0

Aquests resultats ens porten a la conclusió que la dieta òptima consisteix en 3/2 unitats d'alfals i 5/2 d'ensitjat, amb un cost de 525 unitats monetàries.

6. Apliquem l'algoritme símplex dual al plantejament de l'enunciat de l'exercici 5 i obtenim:

			100	200	150	0	0	0
B	c	V_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
s_1	0	−4	−1	0	−1	1	0	0
s_2	0	−5	0	**−3**	−2	0	1	0
s_3	0	15	2	1	0	0	0	1
$z^0 = 0$			−100	−200	−150	0	0	0
s_1	0	−4	−1	0	**−1**	1	0	0
x_2	200	5/3	0	1	2/3	0	−1/3	0
s_3	0	40/3	2	0	−2/3	0	1/3	1
$z^1 = 1.000/3$			−100	0	−50/3	0	−200/3	0
x_3	150	4	1	0	1	−1	0	0
x_2	200	−1	**−2/3**	1	0	2/3	−1/3	0
s_3	0	16	8/3	0	0	−2/3	1/3	1
$z^2 = 400$			−250/3	0	0	−50/3	−200/3	0
x_3	150	5/2	0	3/2	1	0	−1/2	0
x_1	200	3/2	1	−3/2	0	−1	1/2	0
s_3	0	12	0	4	0	2	−1	1
$z^* = 525$			0	−125	0	−100	−25	0

Els resultats que ens mostra la taula ens diuen que la dieta òptima consisteix en 3/2 unitats d'alfals i 5/2 d'ensitjat, amb un cost de 525 u.m., igual que en l'exercici 5, com podíem esperar.

7. Apliquem el mètode símplex dual estès al problema de Fustes del Segre i obtenim el següent:

			5	**8**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
B	c	V_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	0	30	1	2	1	0	0	0	0
s_2	0	80	3	4	0	1	0	0	0
s_3	0	−4	−1	0	0	0	1	0	0
s_4	0	−12	0	−1	0	0	0	1	0
s_5	0	M	1	**1**	0	0	0	0	1
$z^0 = 0$			−5	−8	0	0	0	0	0
s_1	0	$30 - 2M$	−1	0	1	0	0	0	−2
s_2	0	$80 - 4M$	−1	0	0	1	0	0	**−4**
s_3	0	−4	−1	0	0	0	1	0	0
s_4	0	$M - 12$	1	0	0	0	0	1	1
x_2	8	M	1	1	0	0	0	0	1
$z^1 = 0$			3	0	0	0	0	0	8
s_1	0	−10	**−1/2**	0	1	−1/2	0	0	0
s_5	0	$M - 20$	1/4	0	0	−1/4	0	0	1
s_3	0	−4	−1	0	0	0	1	0	0
s_4	0	8	3/4	0	0	1/4	0	1	0
x_2	8	20	3/4	1	0	1/4	0	0	0
$z^2 = 160$			1	0	0	2	0	0	0
x_1	5	20	1	0	−2	1	0	0	0
s_5	0	$M - 25$	0	0	1/2	−1/2	0	0	1
s_3	0	16	0	0	−2	1	1	0	0
s_4	0	−7	0	0	3/2	**−1/2**	0	1	0
x_2	8	5	0	1	3/2	−1/2	0	0	0
$z^3 = 140$			0	0	2	1	0	0	0
x_1	5	6	1	0	1	0	0	2	0
s_5	0	$M - 18$	0	0	−1	0	0	−1	1
s_3	0	2	0	0	1	0	1	2	0
s_2	0	14	0	0	−3	1	0	−2	0
x_2	8	12	0	1	0	0	0	−1	0
$z^* = 126$			0	0	5	0	0	2	0

Bibliografia

Bazaraa, M.; Jarvis, J.; Sherali, H. (1990). *Linear Programming and Network Flows* (2a ed.). John Wiley & Sons. Hi ha traducció al castellà amb la referència següent: (1998). *Programación lineal y flujo de redes* (2a ed.). Mèxic: Limusa.

Hillier, F.; Lieberman, G. (1997). *Introducción a la investigación de operaciones* (4a ed.). Mèxic: McGraw-Hill.

Prawda, J. (1980). *Métodos y modelos de investigación de operaciones* (vol. I). Mèxic: Limusa.

Ríos Insua, S. (1996). *Investigación operativa* (3a ed.). Madrid: Centro de Estudios Ramón Areces.