Introducción a la investigación operativa.

Modelos de programación lineal y aplicaciones

Xavier Verge Mestre
David Pujolar Morales

PID_00186451

Universitat Oberta de Catalunya

Índice

Introducción

En este módulo didáctico nos centraremos en el contexto de la investigación operativa y en su ámbito de aplicación. Una vez definidos, será conveniente ver la evolución de esta disciplina desde el origen hasta nuestros días, y presentar una relación de los problemas que trata.

Con posterioridad analizaremos tres aspectos básicos de la programación lineal:

- Cómo es un problema lineal.
- Cómo se formula un problema lineal.
- Qué particularidades de los problemas lineales nos permiten aplicar algoritmos que facilitarán la resolución numérica.

Para ilustrar este último punto, resolveremos problemas lineales de manera gráfica, lo que, junto con los puntos anteriores, nos permitirá establecer las bases para profundizar, en los otros módulos, en la obtención y la explicación de la solución de problemas lineales.

Objetivos

Este módulo representa una primera toma de contacto con la investigación operativa, dado que se presenta en el mismo la gama de posibilidades que ésta ofrece e introduce al estudiante en el campo de la programación lineal. En los materiales didácticos asociados a este módulo el estudiante encontrará las herramientas necesarias para alcanzar los objetivos siguientes:

1. Saber qué se entiende por *investigación operativa* y conocer su ámbito de aplicación.

2. Situar la programación lineal como una parte de la investigación operativa.

3. Formular problemas de programación lineal.

4. Conocer los componentes básicos de un problema lineal.

5. Identificar cualquier tipo de solución de un problema lineal.

1. La investigación operativa

La investigación operativa se puede definir como una disciplina científica que tiene como objetivo incidir en los procesos de toma de decisiones mediante la aplicación de técnicas de carácter cuantitativo con vistas a mejorar su eficiencia.

En términos metodológicos, la base de la investigación operativa pertenece fundamentalmente al ámbito de las matemáticas y de la estadística, mientras que su campo de aplicación lo constituyen básicamente la economía y la ingeniería.

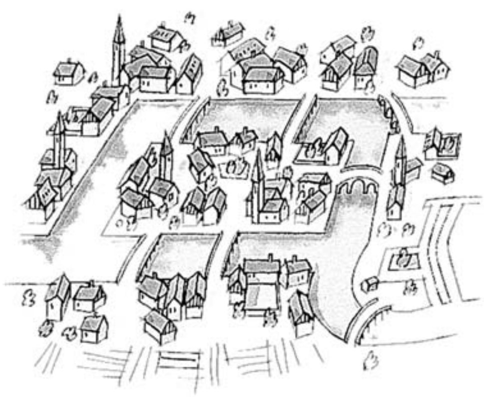
1.1. Referencia histórica

Los orígenes de la investigación operativa se remontan aproximadamente al año 1758, en el que el economista François Quesnay empieza a utilizar modelos de programación matemática muy simples en su obra *Tableau économique*. De forma paralela, Leonhard Euler establece las bases de la teoría de grafos con su conocido "problema de los puentes de Königsberg". Un siglo más tarde, en 1874, otro economista, Léon Walras, utiliza técnicas de programación matemática y Frederick W. Taylor propone el método de estudio de tiempo y movimientos (1881).

François Quesnay (1694-1774).

Königsberg

La antigua ciudad de Königsberg, en la actualidad Kaliningrado, se extiende por ambas orillas del río Pregel, dentro del cual hay dos islas, de manera que queda dividida en cuatro barrios, unidos por siete puentes. El problema consistía en buscar un camino que, partiendo de cualquiera de los cuatro barrios y acabando de la misma manera, pasara una vez y sólo una por cada uno de los siete puentes, o demostrar que no era posible encontrar este camino.



En el campo del álgebra matricial hay que destacar las aportaciones de Camille Jordan (1870) y Georg Frobenius (1878), y la de Hermann Minkowski (1890) en el campo de las formas cuadráticas. Al mismo tiempo, Andrej Markov da origen a los modelos dinámicos probabilísticos y establece las bases de los procesos markovianos de decisión (cadenas de Markov), que se incluirán en la teoría de la probabilidad desarrollada por Andrej Kolmogorov unos cuantos años más tarde (1933).

En el primer cuarto de siglo se desarrolla una teoría clásica de gestión de stocks (F.W. Harris, 1913; R.H. Wilson, 1931). Unos años más tarde, en Hungría, Köning y Egervary (1931) introducen los modelos de asignación mediante modelos matemáticos y, en la URSS, el premio Nobel Leonid Kantorovič trabaja en los modelos de distribución ya desde el año 1939. En 1937 Johannes von Neumann crea los fundamentos de lo que años después se denominará *teoría de juegos* y, junto con Morgenstern, formula la teoría de preferencias.

Todos los modelos matemáticos que utilizaron estos precursores se basaban fundamentalmente en el uso del cálculo diferencial e integral, desarrollado previamente por Newton, Lagrange, Laplace, Lebesgue, Leibnitz, Riemann y Stieltjes, entre otros, y en la aplicación de la probabilidad y la estadística, disciplinas que tomaron cuerpo gracias a los trabajos de Bernoulli, Poisson, Gauss, Bayes, Kolgomorov y Snedecor, entre otros.

Con relación a la aplicación, podemos situar el nacimiento de la investigación operativa durante la Segunda Guerra Mundial (1939-1945), no porque sea una disciplina propia del ámbito militar, sino porque el entorno ofrecía unas particularidades que propiciaron su aparición en este contexto. Se crearon grupos formados por científicos especialistas en varias materias, que trataban de resolver problemas de estrategia militar.

Los éxitos conseguidos por la investigación operativa inglesa durante el comienzo de la Segunda Guerra Mundial, que iban desde la mejora de la detección de ataques enemigos hasta la dimensión óptima de los convoyes navales, pasando por el cálculo de la profundidad óptima en la cual se tenían que regular las cargas de profundidad antisubmarinas, favorecieron la adopción rápida de estos grupos por parte del ejército de Estados Unidos, donde, tanto la marina, con el nombre de *Operations Evaluation**, como la fuerza aérea, con el nombre de *Operations Analysis***, y el ejército de tierra, con el nombre de *Operations Research****, desarrollaron rápidamente estas unidades mixtas, que devinieron un instrumento de ayuda poderoso a la hora de tomar decisiones.

*** En castellano, evaluación de operaciones.**

**** En castellano, análisis de operaciones.**

***** En castellano, investigación operativa.**

Una vez finalizada la guerra, muchos de estos científicos se incorporaron al sector privado, donde introdujeron numerosos avances en diferentes áreas de las empresas y crearon asociaciones vigentes todavía hoy, como la *Operational Research Society* en el Reino Unido o la *Operations Research Society of America* en Estados Unidos, fundadas respectivamente en 1948 y 1952.

La investigación operativa recibió aportaciones valiosas hasta el final de los cincuenta, a la vez que se desarrollaba de manera incipiente la informática.

De estas aportaciones, podríamos destacar las siguientes: en 1947 George Dantzig, culminando los trabajos de sus precursores, ideó el método simplex, con el cual se dio inicio a la programación lineal tal como la conocemos ahora; Bellman desarrolló la programación dinámica; Kuhn y Tucker hicieron contribuciones destacadas en programación no lineal y Gomory, en programación entera; Ford y Fulkerson, en redes de optimización; Markowitz, en simulación; Arrow, Kalin, Scarf y Whitin, en gestión de stocks; Raiffa, en análisis de decisiones y Howard, en procesos markovianos de decisión.

Con posterioridad, autores como Churchman, Ackoff y Arnoff, en un primer momento, y el mismo Ackoff con Sadieni unos cuantos años más tarde, trabajaron en la generalización de la investigación operativa.

1.2. Problemas tipo

A grandes rasgos, los problemas básicos que aborda la investigación operativa se pueden catalogar en los problemas tipo que presentaremos a continuación. No obstante, hay que subrayar que, atendiendo a la extensión de la asignatura, evidentemente no los podremos analizar todos.

Ahora bien, para cada problema tipo comentaremos la solución que se le aplica y que sirve de punto de referencia para localizarlo prácticamente en todos los libros que citamos en la bibliografía.

1.2.1. Problemas de inventarios

Un **inventario** es un recurso no utilizado que tiene un valor determinado. El hecho de que surja un problema de gestión de inventarios está determinado por los tipos de costes asociados a esta gestión.

Los **tipos de costes** se pueden dividir en dos grandes grupos:

Tipos de costes

Hay dos tipos de costes asociados a la gestión de inventarios:

- Los costes que aumentan con un crecimiento del nivel de inventario.
- Los costes que aumentan con una disminución del nivel de inventario.

1) Un primer grupo incluye los costes que aumentan si la cantidad que hay en inventario crece.

Ejemplos de costes que aumentan con el crecimiento del nivel de inventario

Algunos de los costes que aumentan con el crecimiento del nivel de inventario son los siguientes: costes de almacenamiento derivados de la utilización de un espacio físico para guardar inventarios, costes de depreciación de los inventarios (obsolescencia, merma, etc.), costes financieros asociados al capital invertido en inventarios (intereses bancarios, remuneración del capital propio, etc.), primas de seguros, etc.

2) Un segundo grupo incluye los costes con una relación inversa a la de los del grupo anterior, es decir, los costes que aumentan si la cantidad que hay en inventario disminuye.

Ejemplos de costes que aumentan con la disminución del nivel de inventarios

Los costes más característicos del grupo de costes que aumentan cuando disminuye el nivel de inventario son los costes de ruptura de inventario. Estos costes son los asociados a la imposibilidad de servir un pedido por falta de material en existencia.

Además, de manera indirecta, se encuentran en este grupo los costes asociados al reaprovisionamiento. Si se gestiona un inventario en cantidades pequeñas, la frecuencia con que se efectúan los pedidos aumentará, de manera que se harán más lanzamientos de órdenes de reaprovisionamiento y los costes correspondientes a este concepto aumentarán.

El **problema de la gestión de inventarios** consiste en definir, básicamente mediante la frecuencia y la cantidad de los reaprovisionamientos, el nivel de inventarios que proporcione un coste total mínimo, teniendo en cuenta todos los costes que sean significativos.

Fundamentalmente, los parámetros que se conocen de manera exacta en la gestión de inventarios suelen ser los diferentes tipos de costes (excepto los costes de ruptura de inventarios, que, a causa de su subjetividad, son muy difíciles de va-lorar); en cambio, otros datos, como la demanda y el plazo de reaprovisionamiento, normalmente se conocen sólo de manera aproximada y es necesario utilizar modelos probabilísticos para expresarlos.

Como en todos los problemas de investigación operativa, los modelos de gestión de inventarios no siempre se aplican a situaciones en las que aparezcan mercancías en un entorno empresarial próximo a un almacén, sino que, por analogía, también sirven para problemas que en principio no tienen nada que ver con estos entornos, pero que tienen las mismas propiedades y permiten aplicar estos mismos modelos, quizá con alguna modificación.

Ejemplo de modelo de gestión de inventarios

Un modelo de gestión de inventarios aplicado a una situación diversa es la gestión del agua de un embalse.

La solución de estos tipos de problemas se encuentra en la teoría clásica de gestión de inventarios basada en el cálculo diferencial e integral y en el cálculo de pro-babilidades. En las formulaciones más avanzadas que hay en la actualidad se recurre a elementos de esta misma teoría, pero dentro de sistemas de gestión de producción más complejos. En este temario no trataremos estos tipos de problemas, que encontraréis descritos en la mayoría de los libros que figuran en la bibliografía.

1.2.2. Problemas de reparto

Los problemas de reparto son problemas relacionados con la reparto de una serie de recursos disponibles entre un determinado número de tareas que hay que llevar a cabo.

Según el nivel de recursos de que se disponga, podemos catalogar estos problemas en los tres niveles siguientes:

1) En el **primer nivel** hay bastantes recursos para efectuar todas las tareas, pero no para hacerlas de la mejor manera posible, dado que ciertas maneras de hacer el trabajo son mejores que otras. De hecho, si no hubiera la posibilidad de hacer los trabajos con menos recursos, aunque de manera menos óptima, el problema no tendría ninguna solución posible o bien pasaríamos al nivel siguiente.

Si hay bastantes recursos...

... para hacer todos los trabajos de la mejor manera posible, evidentemente, ya no hay ningún problema.

El **problema de reparto en el primer nivel** consiste, pues, en repartir los recursos entre todas las tareas de manera que el resultado en conjunto sea el mejor posible*.

*** Por ejemplo, que el coste total sea mínimo.**

En el caso más elemental, en el que cada trabajo necesita una unidad del recurso y estas unidades son homogéneas (por ejemplo, destinar hombres a puestos de trabajo), se trata de un **problema de asignación** y la solución se obtiene mediante el denominado *algoritmo húngaro*, desarrollado por Köning y Egervary.

Lectura complementaria

Podéis consultar el problema de asignación en:

F. Hillier; G. Lieberman (2001). Introducción a la investigación de operaciones (7.ª ed., capítulo 8). México: McGraw–Hill.

Por otra parte, si los trabajos que hay que llevar a cabo requieren más de una unidad de los recursos, se trata de un **problema de transporte**, denominado así porque el problema más característico es precisamente el de transportar productos desde su origen (la fábrica) a los destinos posibles (los clientes), especificando, desde cada fábrica, la cantidad que recibe cada cliente a un coste mínimo. Naturalmente, hay muchos problemas que, aunque no tienen nada que ver con el transporte, por analogía se pueden resolver de la misma manera.

2) El **segundo nivel** se presenta cuando hay más tareas por hacer de lo que permiten los recursos.

El **problema de reparto en el segundo nivel** reside en la elección de los trabajos que se llevarán a término y en la decisión de cómo se efectuarán para que el resultado global sea el mejor posible.

Problemas de reparto en el segundo nivel

Algunos problemas de reparto en el segundo nivel son, por ejemplo, la elección de los productos que tiene que producir una refinería, la reparto del tiempo de un vendedor entre los clientes, etc.

3) Finalmente, tenemos un **tercer nivel** en los problemas de reparto, que surge cuando se es propietario de los recursos.

Un **problema de reparto en el tercer nivel** se tiene cuando se es propietario de los recursos, de manera que hay que incluir la decisión de qué cantidad y qué variedad de recursos se tienen que producir en el caso planteado.

Estos problemas habitualmente se resuelven por medio de programación lineal o con alguna de sus variantes, como la programación lineal entera o la programación lineal binaria. En otros casos se tendrán que aplicar algoritmos de programación no lineal o de programación dinámica.

1.2.3. Problemas de colas

Los problemas de colas son los típicos problemas que se producen en las ventanillas, y se pueden resolver buscando el equilibrio que permita obtener una relación mejor entre el número de ventanillas abiertas y los clientes que se esperan en las mismas:

a) Si el número de ventanillas es elevado, se precisa una inversión importante en personal, espacio físico, etc., que incluso puede provocar ineficiencias de estas unidades por pérdida de tiempo útil. En cambio, los clientes estarán perfectamente servidos y prácticamente no tendrán que esperar para los servicios.

b) Por el contrario, un número reducido de ventanillas provoca una serie de costes asociados a la insatisfacción del cliente, y que pueden ir desde el simple descontento hasta la pérdida del cliente e, incluso, según el contexto en que nos movamos, a la pérdida de vidas humanas, a un deterioro importante del material, etc.

Si bien los primeros costes suelen ser difíciles de evaluar, los segundos presentan inconvenientes tan grandes que a veces las valoraciones que se hacen de los mismos resultan subjetivas.

El **problema tipo de las colas** se puede definir en términos más formales del siguiente modo: determinadas unidades iguales o diferentes, originarias de un depósito finito o infinito, llegan a un lugar para recibir un servicio determinado de duración finita, pero desigual en cada caso, generalmente aleatoria o que sigue una distribución de probabilidad concreta. El lugar para recibir el servicio está compuesto por un punto de servicio o más que lo prestan y por una zona donde las unidades esperan que les llegue el turno, es decir, esperan hasta que un punto de servicio quede vacío.

Ejemplos de problemas de colas

Podemos encontrar problemas de colas en infinidad de situaciones, por ejemplo: los aviones que llegan a un aeropuerto y salen del mismo, los servicios de urgencias (o de consultas) de un hospital, las ventanillas de la Administración, los sistemas de mantenimiento y reparación de maquinaria, las peticiones de conexión a un servidor de Internet, etc.

La teoría matemática de colas, como parte de la teoría de procesos estocásticos, está muy desarrollada, sobre todo en lo que concierne a los aspectos estructurales del sistema, aunque prevalecen ciertos problemas económicos centrados mayoritariamente en la valoración de los costes asociados a la insatisfacción del cliente. En todo caso, la teoría de colas hace un uso muy intenso de los métodos de simulación.

1.2.4. Problemas de secuencias

Los problemas de secuencias surgen fundamentalmente en la planificación y el control de proyectos. Todo **problema de secuencias o problema de ordenación** debe presentar las características siguientes:

1) Hay que conocer el proyecto que se tiene que desarrollar, es decir, los aspectos tecnológicos y de investigación y desarrollo deben estar resueltos.

2) Se debe tener la posibilidad de descomponer el proyecto en tareas elementales. Los tres tipos de características que mostramos a continuación definirán las **tareas elementales** o **actividades**:

a) Denominativas: permiten diferenciar una tarea respecto de las demás.

b) Temporales: hay que conocer la duración de una tarea, ya sea de manera absoluta o relativa.

c) Necesidades: conviene saber las cantidades y los tipos de recursos que consume una tarea.

3) Las tareas elementales están sometidas a unas restricciones o unos vínculos impuestos por la tecnología. Las **restricciones**, o **vínculos**, pueden ser de los tipos que presentamos a continuación:

Un vínculo impuesto por la tecnología...

... se da, por ejemplo, cuando hay trabajos que se tienen que llevar a cabo obligatoriamente antes que otros.

a) Potenciales: consisten en situar una tarea en el tiempo, bien de manera absoluta (se tiene que hacer el día dd/mm/aa), bien de manera relativa (A se tiene que hacer antes que B).

b) Acumulativas: comportan la imposibilidad de utilizar en un momento determinado más recursos de aquéllos de los que se dispone.

c) Disyuntivas: implican que el cumplimiento simultáneo de dos tareas diferentes no tenga ninguna parte en común.

Ejemplo de restricción disyuntiva

Si las actividades A y B utilizan la misma máquina, no se pueden llevar a cabo al mismo tiempo: o bien A precede a B, o bien B precede a A.

La solución del problema de secuencias consiste en facilitar un calendario de realización de las actividades que incluya la afectación de los recursos disponibles. Para encontrar esta solución, si el problema únicamente presenta vínculos potenciales, se puede utilizar el diagrama de Gantt o los métodos PERT, ROY o CPM, basados en la teoría de grafos.

Si se dan, además, otros tipos de vínculos, el problema se complica bastante, de manera que se suelen utilizar métodos heurísticos, es decir, métodos que buscan una buena solución, pero que no pueden garantizar que ésta sea la mejor entre todas las soluciones posibles.

1.2.5. Problemas de renovación

Las máquinas, igual que las personas, envejecen y llega un punto en que se tienen que renovar o sustituir por otras. Entonces aparece el problema de la renovación de equipos.

> El **problema de la renovación de equipos** se puede subdividir en dos casos generales: cuando las máquinas (o instrumentos, piezas, etc.) envejecen de forma lenta y cuando sencillamente dejan de funcionar.

A continuación explicamos con más detalle cada uno de estos casos:

1) En el primer caso, encontramos elementos de un valor relativamente elevado*, a los cuales, a fin de que se conserven en un buen estado de funcionamiento, se debe aplicar un cierto tipo de mantenimiento. Por otra parte, a lo largo del tiempo salen modelos nuevos más avanzados tecnológicamente que hacen que el valor de los modelos anteriores en el mercado baje. En este caso, el problema consiste en fijar el plazo idóneo de sustitución, de manera que, teniendo en cuenta el coste de utilización (mantenimiento más depreciación más amortización) y el coste de sustitución, el plazo sea el óptimo.

* Por ejemplo, máquinas propiamente dichas, vehículos o instalaciones.

2) En el segundo caso, encontramos elementos de poco valor por unidad, pero, generalmente, se utiliza un número elevado* de éstos. Entonces, el problema reside en encontrar el plazo óptimo de recambio, y se tiene que plantear de dos maneras posibles, que mencionamos a continuación:

* Como bombillas o herramientas pequeñas.

a) Cambiar los elementos averiados por elementos nuevos poco después de que se estropeen.

b) Cambiar todos los elementos de este tipo de manera periódica (tanto si todavía funcionan como si no lo hacen).

Hay una amplia serie de técnicas que pueden utilizarse según las características del problema, aunque predominan los modelos de análisis matemático y los de optimización dinámica, y también los de simulación.

1.2.6. Problemas de itinerarios

El "problema del viajante de comercio"...

... se conoce con el nombre inglés *Travelling Salesman Problem*, y a menudo se denota con la sigla TSP, o, si hay varios vehículos, *Multitravelling Salesman Problem*, y se denota con la sigla MTSP.

> Los problemas de itinerarios se asocian con el enunciado clásico del "problema del viajante de comercio". El planteamiento de este problema es el siguiente: un viajante de comercio tiene que visitar las ciudades A_1, A_2, ..., A_n. Sale de A_1 y vuelve a A_1. Se conoce el coste (en horas,

unidades monetarias, km, etc.) entre cada trayecto elemental ($A_1 \rightarrow A_2$, $A_1 \rightarrow A_3$, $A_2 \rightarrow A_3$, etc.) y se quiere determinar el itinerario que debe seguir el viajante para pasar por todas las ciudades con el coste más bajo posible.

Pese a que el enunciado es sencillo y bastante elemental, es muy difícil resolver el problema. El gran volumen de información que comporta un problema de este tipo, aunque tenga un número reducido de variables (por ejemplo, si tenemos diez ciudades relacionadas todas entre sí, tenemos 362.880 itinerarios posibles), implica descartar los métodos de enumeración.

Ejemplo de la complejidad de un problema de itinerarios

A modo de ejemplo del gran volumen de información que comporta un problema de itinerarios, podemos citar que el reparto normal de un bien de consumo corriente (electrodomésticos, alimentación, tabaco, etc.) puede representar un grafo de unos ochocientos puntos, con un reparto diario de un centenar de clientes y una flota de entre diez y doce vehículos.

Hasta hace pocos años se trataba de un problema irresoluble de manera exacta, y por este motivo se utilizaban métodos heurísticos. A partir de los años setenta se han desarrollado varias técnicas basadas en determinados perfeccionamientos de la teoría de grafos, que permiten encontrar la solución exacta con ciertas condiciones. En cualquier caso, a causa del gran volumen de cálculo que representan, a menudo se continúan aplicando métodos heurísticos.

1.2.7. Problemas de teoría de juegos

Los problemas de la teoría de juegos corresponden a situaciones en las cuales decisiones que debe tomar un agente económico entran en oposición con las de otros agentes.

La teoría de juegos

En 1937 Johannes von Neumann, matemático, crea los fundamentos de la teoría de juegos. Unos años más tarde, en 1944, publica, junto con Oskar Morgenstern, la obra *Theory of games and economic behaviour*, un modelo de comportamiento económico basado en la teoría de juegos.

En este caso podemos dividir los problemas en tres clases, según el grado de conocimiento de las acciones de la competencia:

- La acción de la competencia se puede predecir con exactitud.
- La acción de la competencia se puede predecir de manera aproximada representándola mediante probabilidades.
- Se desconocen totalmente las acciones que puede emprender la competencia.

La teoría de juegos ha permitido que se produjeran grandes avances en la comprensión de situaciones competitivas y ha dado lugar a un cuerpo teórico que ha experimentado un fuerte desarrollo en los últimos años.

1.2.8. Problemas de búsqueda

Los problemas de búsqueda están relacionados con la mejor manera de obtener información.

Ciertamente, en la realidad a menudo, cuando afrontamos un problema, nos damos cuenta de que no disponemos de toda la información necesaria para tomar una decisión sobre el problema en cuestión.

Ejemplos de problemas de búsqueda

Podemos encontrar ejemplos de problemas de búsqueda en un gran número de campos. En el ámbito económico, por ejemplo: una verificación contable es una búsqueda de errores; los problemas de previsión son, en esencia, problemas de búsqueda, etc.

En lo que concierne a otros campos, también podemos incluir en esta categoría procesos muy distintos: las estrategias de búsqueda de yacimientos (petrolíferos, de carbón, de minerales e, incluso, arqueológicos); el control de calidad (búsqueda de defectos); la clasificación y localización de información en una base de datos, el almacenamiento y la recuperación de información bibliotecaria; la localización de objetivos en el campo militar, y un largo etcétera.

La solución de estos problemas está intrínsecamente relacionada con la teoría de la decisión estadística, y, también, en otros casos, con el análisis efectuado mediante la simulación o el uso de técnicas basadas en grafos.

1.2.9. Problemas mixtos

Realmente, como ya habíamos anticipado, con frecuencia encontramos problemas que no podemos encuadrar en ninguna de las categorías anteriores porque tienen componentes típicos de dos de estas categorías o de más.

Los **problemas mixtos** son problemas que tienen varios componentes típicos de las categorías anteriores, es decir, son una combinación de varios tipos de problemas.

Ejemplos de problemas mixtos

Podemos citar como ejemplos de problemas mixtos la búsqueda de un itinerario de menor coste que cumpla una serie de restricciones, problemas de colas con componentes de competencia (el nivel de insatisfacción del cliente, que está en función del servicio ofrecido por la competencia, etc.).

La solución de los problemas mixtos puede venir de dos vertientes:

1) Si el problema se puede descomponer en partes que actúen de manera independiente y que contengan problemas puros (es el caso menos frecuente), es necesario solucionar estos problemas de la manera que hemos indicado para cada caso.

2) Si el problema es indivisible o si hay partes que todavía contienen problemas mixtos, es preciso adaptar los algoritmos existentes a las nuevas situaciones o crear nuevas maneras de resolverlos: incluso, si la situación lo requiere, creando grupos interdisciplinarios a este efecto.

2. Problemas lineales

En este apartado presentamos varios aspectos relacionados con los problemas lineales. Estudiaremos la manera de pasar de un problema no lineal a uno lineal en algunos casos particulares; veremos los fundamentos matemáticos en que se basa el tratamiento de este tipo de problemas e introduciremos algunos de los algoritmos más frecuentes asociados a éstos.

2.1. Optimización matemática: conceptos elementales

En este subapartado ofrecemos una serie de resultados e ideas básicas de la teoría de la optimización matemática clásica. Con eso queremos sustentar con un cierto grado de rigor los diferentes aspectos referentes a la programación lineal que presentamos.

1) Problema de optimización matemática

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y f una función real con dominio en A, es decir: $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$. Llamamos **problema de optimización matemática** a todo problema que responda a la formulación siguiente:

$$\underset{\mathbf{X}}{[\text{OPT}]}\ f(\mathbf{X}) \tag{1}$$

s.a

$$\mathbf{X} \in B,\ B \subseteq A.$$

La expresión s.a quiere decir 'sujeto a:'.

El conjunto B se suele denominar **conjunto de restricciones del problema**, mientras que el vector X se llama **óptimo del problema** o, sencillamente, **punto óptimo**, donde tenemos que:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

La condición anterior, a efectos operativos, se suele formular mediante un conjunto de restricciones, algunas de las cuales se presentarán en forma de igualdad y otras en forma de desigualdad, según la naturaleza del problema. Así pues, tendremos:

$$\underset{\mathbf{X}}{[\text{OPT}]}\ f(\mathbf{X}) \qquad\qquad \underset{x_1,x_2,\ldots,x_n}{[\text{OPT}]}\ f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

s.a   s.a

$$\begin{array}{ll} h_i(\mathbf{X}) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, m_1\}, & h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, m_1\}, \\ g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, m_2\}, & g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, m_2\}, \\ k_s(\mathbf{X}) \geq 0 \quad \forall s \in \{1, \ldots, m_3\}, & k_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \quad \forall s \in \{1, \ldots, m_3\}, \end{array}$$

Nota

De ahora en adelante no identificaremos las variables sobre las que optimizamos porque en esta asignatura optimizamos siempre sobre todas las variables del problema. Conviene darse cuenta, sin embargo, de que puede haber situaciones en las cuales no optimicemos sobre todas las variables.

que significa que se busca el vector X que optimiza una función de n variables sujeta a m_1 restricciones de igualdad (=), m_2 restricciones de desigualdad menor o igual (≤) y m_3 restricciones de desigualdad superior o igual (≥).

Tipos de restricciones

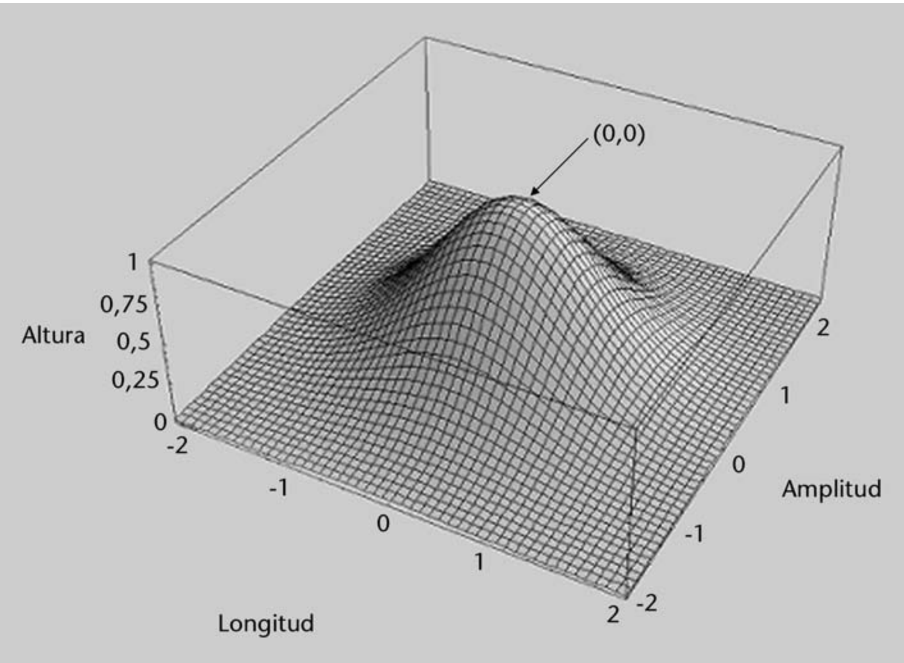
Las restricciones de un problema de optimización se pueden dar en forma de igualdad y/o de desigualdad.

2) Puntos óptimos

Los puntos óptimos se clasifican de la manera siguiente:

a) Óptimos globales: diremos que $X^* \in B$ es un **máximo (mínimo) global del problema de optimización** si $\forall X \in B$, $f(X^*) \geq f(X)$ ($f(X^*) \leq f(X)$ Si la desigualdad es estricta hablaremos de **óptimo global estricto** (máximo o mínimo), y, en caso contrario, de **óptimo global relativo** (máximo o mínimo).

Ilustramos el concepto de óptimo global mediante el gráfico siguiente, correspondiente a la función $f(x,y) = \exp[-(x^2 + y^2)]$, que alcanza un máximo global estricto no restringido (si la función no está sometida a ninguna restricción) en el punto (0,0):



b) Óptimos locales: diremos que X* es un **máximo (mínimo) local de un problema de optimización** si $\exists \varepsilon > 0$, $\forall X \in B$, $\|X^* - X\| < \varepsilon$, $X^* - X \neq 0$, se tiene $f(X^*) \geq f(X)$ ($f(X^*) \leq f(X)$ (en caso de mínimo) siendo $\| \;\; \|$ la norma euclidiana. Si la desigualdad es estricta, hablaremos de **óptimo local estricto** (máximo o mínimo), y, en caso contrario, de **óptimo local relativo** (máximo o mínimo).

Norma euclidiana

Recordad de otros cursos de matemáticas que sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se define la norma euclidiana de la manera siguiente:

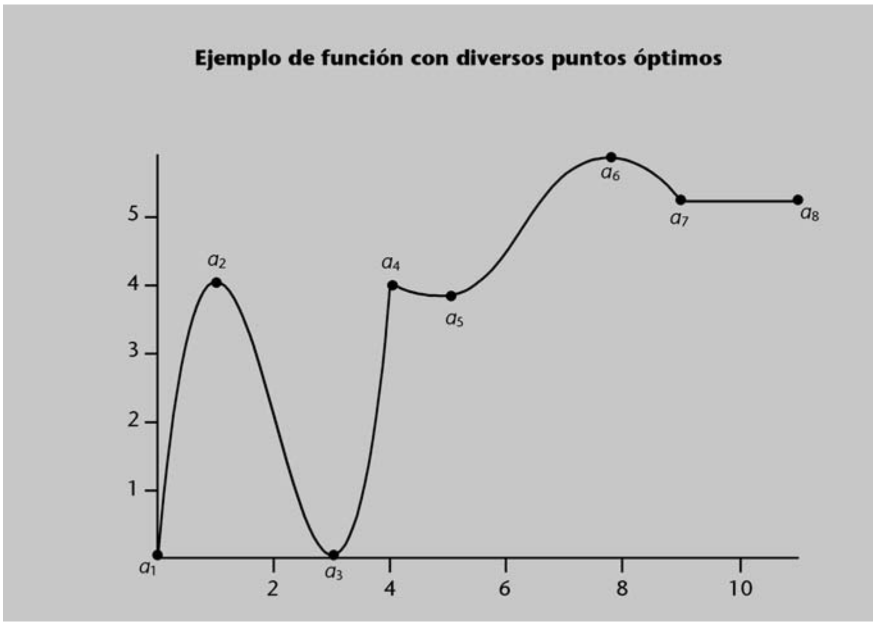
$$\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^n, \| \mathbf{A} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Ejemplo de puntos óptimos de una función

Consideremos la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x(x-3)^2 & \text{si } x \leq 4 \\ \sin(x) - \sin(4) + 4 & \text{si } 4 \leq x \leq 9 \\ \sin(9) - \sin(4) + 4 & \text{si } x \geq 9 \end{cases}$$

Si representamos gráficamente esta función en el intervalo [0,11], podemos observar que tiene diferentes puntos óptimos:



Los tipos de puntos óptimos que se observan son los siguientes:

- Mínimos globales referentes a a_1 y a_3 (a_1 es relativo, ya que hay otro punto, en este caso a_3, para el cual la función alcanza el mismo valor, y viceversa).
- Máximos locales referentes a a_2 y a_4 (son locales porque la función, en otros puntos del intervalo considerado, alcanza valores superiores).
- Mínimo local estricto en a a_5.
- Máximo global estricto en a_6 (dado que es el punto donde, a lo largo del intervalo considerado, la función alcanza un valor más alto).
- Mínimos locales referentes al intervalo $[a_7,a_8]$ (observad que también es correcto afirmar que los puntos del intervalo $[a_7,a_8]$ corresponden a máximos locales relativos).

3) Puntos estacionarios

Sea $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, con $f(\mathrm{X})$ continua y con derivadas parciales también continuas (es decir, de clase C^1); en este caso diremos que X^0 es un **punto estacionario** (también conocido como **punto crítico**) si pertenece al interior de A y su gradiente verifica $\nabla f(\mathrm{X}^0) = 0$, es decir, se verifica la relación que presentamos a continuación:

$$\left.\frac{\partial f(\mathrm{X})}{\partial x_i}\right|_{\mathrm{X}=\mathrm{X}^0} = 0; \quad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Puntos estacionarios

Recordad que los puntos estacionarios son aquellos para los cuales las derivadas parciales de la función se anulan, es decir, satisfacen las denominadas *condiciones de primer orden* o C^1.

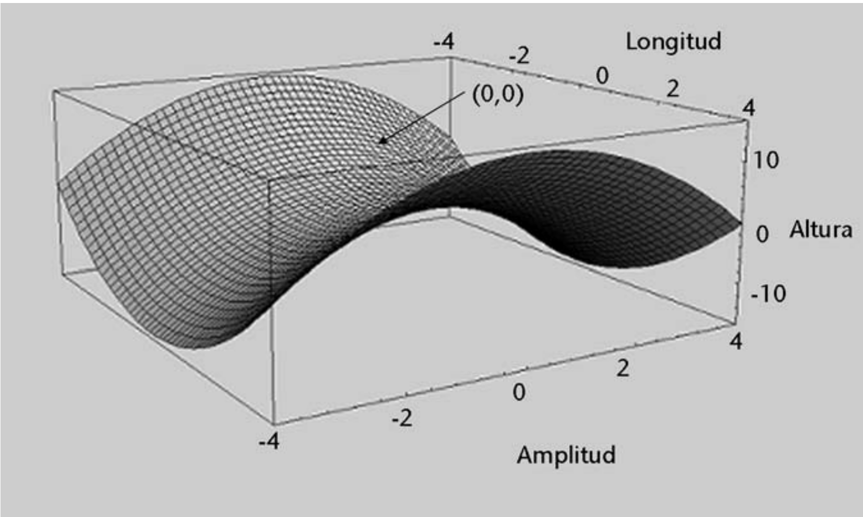
Teorema: sea $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, con $f(\mathrm{X})$ de clase C^1; entonces, si X^* es un óptimo local de esta función y pertenece al interior de este conjunto, también será un punto estacionario.

Este teorema tiene una especial relevancia para la caracterización analítica de los óptimos locales de funciones de clase C^1 (muy frecuentes en las aplicaciones económicas), aunque presenta los inconvenientes que mencionamos a continuación:

- No aporta ninguna información sobre la globalidad de este óptimo (que se puede encontrar tanto en los puntos interiores de A que son estacionarios como en los puntos que forman parte de la frontera de A).

- Una función puede no tener puntos estacionarios (por el hecho de que no sea diferenciable) y, sin embargo, tener un óptimo global.

- Puede haber puntos estacionarios que no sean óptimos locales (conocidos como **puntos de silla**, en un entorno cualquiera de los mismos hay puntos en los que la función toma valores superiores y otros en los cuales toma valores inferiores), tal como lo ilustra el gráfico de la función $f(x,y) = x^2 - y^2$, con un punto de silla en (0,0):



A pesar de las dificultades anteriores, se pueden derivar condiciones de existencia del óptimo global de una función en ciertas condiciones, como lo ponen de relieve el teorema de Weierstrass y el teorema fundamental de la convexidad, que analizamos a continuación:

a) Teorema de Weierstrass: sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(\mathbf{X})$ continua sobre A, y A un conjunto compacto. En este caso la función tiene un máximo y un mínimo globales en A.

Conjunto compacto

Recordad de las asignaturas de matemáticas que los conjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$ son conjuntos cerrados y acotados.

Como veremos más adelante, en el caso de la programación lineal, el conjunto de restricciones siempre será un conjunto cerrado.

Si además se da el caso de que es acotado, la existencia de óptimos globales está garantizada por aplicación directa del teorema anterior. Y todavía más, si no es acotado, será muy sencillo discernir si está el óptimo global o no lo está.

Consultad el subapartado 4.6 de este módulo didáctico.

Finalmente, si tenemos en cuenta la equivalencia siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}[\text{OPT}]\ f(X)\\ \quad X\\ \text{s.a}\\ X \in B,\ B \subseteq A\end{array}\right] \blacktriangleright \equiv \underset{X}{[\text{OPT}]}\ f(X),\ f: B \to \mathbb{R},$$

la aplicación del teorema de Weierstrass a problemas de optimización clásica con restricciones, como el que se ha descrito al principio de este subapartado, es inmediata.

b) Teorema fundamental de la convexidad: sea $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ y considerad el problema de optimización (1) que aparece al inicio del subapartado. En este caso, si el problema es de maximización (minimización), la función es cóncava (convexa) y el conjunto de restricciones es un conjunto convexo; entonces se tienen los resultados siguientes:

Repasad los conceptos de *conjunto convexo* y de *función cóncava* y *función convexa* en los materiales de los cursos de matemáticas.

- El conjunto de los máximos (mínimos) locales de la función en el conjunto de restricciones es un conjunto convexo.

- Todo máximo (mínimo) local es un máximo (mínimo) global sobre este conjunto de restricciones.

Del teorema resulta de especial interés la segunda aserción, dado que permite, cuando menos en el caso de las funciones de clase C^1, restringir la búsqueda de los candidatos a óptimo global en aquellos puntos que sean estacionarios. En cuanto a la convexidad del conjunto de máximos (mínimos) locales, eso asegura que, en el caso de que haya puntos óptimos, su combinación lineal convexa también lo será.

Problemas convexos

Los problemas de optimización que satisfacen las condiciones del teorema fundamental de la convexidad se denominan *problemas convexos*.

En el caso de la programación lineal, la aplicabilidad del teorema también es inmediata, ya que, como veremos, el conjunto de restricciones define siempre un conjunto que, además de ser cerrado, es convexo y la función lineal $f(X)$, por el hecho de ser lineal, de forma simultánea, es cóncava y convexa.

Consultad el subapartado 4.6 de este módulo didáctico.

Teorema: sea $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, f: $A \to \mathbb{R}$ y el problema de optimización (1) que aparece al inicio del subapartado. En este caso, será un conjunto convexo si el conjunto de restricciones se formula en forma de igualdad y desigualdad y satisface las condiciones siguientes:

- Las funciones que definen las restricciones en forma de $\leq$ son convexas.

- Las funciones que definen las restricciones en forma de $\geq$ son cóncavas.

- Las funciones que definen las restricciones en forma de $=$ son lineales.

Este teorema es interesante porque, a efectos operativos, facilita la determinación de la convexidad del conjunto de restricciones.

Especialmente, notad que todo problema lineal en forma estándar es un problema convexo.

2.2. Concepto de problema lineal

Un problema lineal tiene las características siguientes:

1) Una **función objetivo**, $f(X)$, que presenta lo que se quiere minimizar o maximizar. La función objetivo debe ser lineal.

2) Un **conjunto de restricciones**, $g_j(X)$, que representan las limitaciones existentes. Todas las restricciones también deben ser lineales.

3) Todas las variables deben ser **variables no negativas**.

Un **problema lineal**, desde un punto de vista matemático, debe tener la forma siguiente:

$$
\begin{aligned}
&[\text{OPT}]\ f(\mathbf{X}) \\
&\text{s.a} \\
&g_j(\mathrm{X}) = 0; \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \\
&\mathbf{X} \geq \mathbf{0},
\end{aligned}
$$

donde **X** es un vector de variables y el operador [OPT] se tiene que sustituir por maximizar ([MAX]) o minimizar ([MIN]), según el caso.

Fijaos en que hemos utilizado el signo = en las restricciones, aunque también podemos encontrar restricciones del tipo ≤ o del tipo ≥, o combinaciones de las tres.

La condición de que la función objetivo y las restricciones sean lineales supone que éstas sean una suma de variables multiplicadas por parámetros, tal como se describe formalmente a continuación. Si alguna restricción y/o la función objetivo no son lineales, hablaremos de **problemas no lineales**.

La condición de no-negatividad de las variables impide que éstas puedan adoptar valores negativos. De todos modos, esta condición no reviste una especial trascendencia en la práctica, visto que no tiene sentido que la mayoría de las magnitudes económicas* adopte valores negativos. Adicionalmente, en algunas ocasiones podemos encontrar variables libres de signo (pueden tomar valores positivos y negativos) o que deben ser menores o iguales a cero.

Algunas de las restricciones...

... que nos podemos encontrar son, por ejemplo, que no se pueden utilizar más recursos de los disponibles, que se tienen que satisfacer unas cantidades mínimas, que se tienen que cumplir unos porcentajes mínimos, etc.

*** Por ejemplo, cantidades de productos, número de personas, cantidades en litros, toneladas, metros, etc.**

Pese a todo, si fuera necesario trabajar con variables negativas o libres de signo, éstos siempre se podrán expresar como variables no negativas, tal como se describe más adelante.

Podéis consultar la manera de expresar variables negativas o libres de signo como variables no negativas en el subapartado 2.3.1 de este módulo didáctico.

Si adoptamos una forma más explícita, podemos plantear un problema lineal tal como indicamos a continuación:

$$
\begin{array}{l}
[\mathrm{OPT}]\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{s.a} \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\
x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},
\end{array}
$$

Con el fin de agilizar la notación nos referiremos a la función objetivo como *z*.

que, representado en notación matricial, sería:

$$
\begin{array}{l}
[\mathrm{OPT}]\ z = \mathbf{c}'\mathrm{X} \\
\text{s.a} \\
\mathrm{AX} = \mathbf{b}, \\
\mathrm{X} \geq \mathbf{0},
\end{array}
$$

donde **c** es el vector de coeficientes de la función objetivo, **b** es el vector de los términos independientes de las restricciones, A es la matriz de coeficientes técnicos y X es el vector de las variables:

$$\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ejemplo de planteamiento matricial de un problema lineal

Tenemos el problema lineal siguiente:

$$
\begin{array}{l}
[\mathrm{MAX}]\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
\text{s.a} \\
8x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 22, \\
3x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leq 30, \\
x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.
\end{array}
$$

Entonces, los vectores y las matrices asociados a este problema son los siguientes:

$$\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 22 \\ 30 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

2.3. Problemas lineales y no lineales

Como ya hemos avanzado, cualquier problema de optimización matemática que no cumpla las condiciones de linealidad se deberá considerar como un problema no lineal; en este caso, los algoritmos que se pueden utilizar para resolverlo son diferentes.

Si se quieren resolver problemas numéricamente, más que analíticamente, los **algoritmos de programación no lineal** son mucho más complejos que los de programación lineal; aún más: en muchos casos (según las características del problema) será difícil aplicar un algoritmo que garantice que la solución obtenida sea la óptima (la mejor), sino que sencillamente nos dará una "buena solución". Estos algoritmos se denominan *algoritmos heurísticos*, y se justifica su uso por el hecho de que a veces no hay un algoritmo de búsqueda de óptimo, o bien (si hay uno) porque es tan complejo que no vale la pena utilizarlo. En cambio, los **algoritmos de programación lineal**, y en concreto el algoritmo simplex, son comparativamente fáciles de aplicar y proporcionan soluciones óptimas.

Resolución analítica y resolución numérica

La resolución numérica de un problema hace referencia al hecho de que utilizando datos concretos se pueda obtener una solución específica. De forma contraria, la resolución analítica está más orientada a obtener la solución de manera genérica y a derivar las relaciones de optimidad entre las variables susceptibles de ser interpretadas económicamente y, aunque es fundamental para desarrollos teóricos, suele ser poco práctica para tomar decisiones concretas.

2.3.1. Linealización de problemas no lineales

A veces podemos encontrar problemas que no sean lineales únicamente porque no cumplen las condiciones de no-negatividad de las variables. En estos casos los podemos convertir en problemas lineales, y beneficiarnos así de las facilidades de solución, introduciendo en los mismos pequeños cambios. A continuación presentamos la manera de hacer alguno de estos cambios.

Variables negativas

Si una o más variables del problema debe adoptar valores únicamente negativos o cero, podemos hacer la sustitución que explicamos a continuación. Sea x_k una variable tal que $x_k \leq 0$; entonces la sustituimos por $x'_k = -x_k$, y ahora ya se puede resolver como problema lineal.

Obviamente, cuando facilitemos la solución tendremos que deshacer el cambio para no perder el significado original de la variable.

Ejemplo de linealización de un problema con variables negativas

En el ejemplo de planteamiento matricial de un problema lineal, supongamos que x_2 debe ser negativa o cero. En este caso, procedemos a sustituirla y el problema lineal sería el siguiente:

Vea el "Ejemplo de planteamiento matricial de un problema lineal" en el subapartado 2.2 de este módulo didáctico.

$$\left.\begin{array}{l} [\text{MAX}]\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} \\ 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 22, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leq 30, \\ x_1, x_3 \geq 0,\ x_2 \leq 0. \end{array}\right] \quad \overset{x_2 = -x'_2}{\Rightarrow} \quad \left[\begin{array}{l} [\text{MAX}]\ z = 2x_1 - 3x'_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} \\ 8x_1 - 2x'_2 + 5x_3 \leq 22, \\ 3x_1 - 7x'_2 + 4x_3 \leq 30, \\ x_1, x'_2, x_3 \geq 0. \end{array}\right.$$

Ahora ya lo podemos resolver como problema lineal en donde:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}; \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2' \\ x_3 \end{bmatrix}; \qquad C' = [2\ -3\ 4].$$

y el vector **b** no cambia.

Variables libres de signo

> Si una o más variables del problema pueden adoptar cualquier valor (positivo, negativo o cero), podemos hacer la sustitución que presentamos a continuación. Sea x_k una variable tal que $x_k \in \mathbb{R}$; entonces la sustituimos por $x_k = x_k' - x_k''$, donde definimos ambas variables como positivas.

Igual que en el caso anterior, una vez que hayamos obtenido la solución, tendremos que deshacer el cambio para no perder el significado real de las variables.

Ejemplo de linealización de un problema con variables libres de signo

Consideremos el "Ejemplo de planteamiento matricial de un problema lineal" y supongamos que la variable x_2 puede tomar cualquier valor. La manera de linealizar el problema es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} [\text{MAX}]\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} \\ 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 22, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 \le 30, \\ x_1, x_3 \ge 0. \end{array}\right] \blacktriangleright \quad \begin{array}{c} x_2 = x_2' - x_2'' \\ \Rightarrow \end{array} \quad \blacktriangleleft \left[\begin{array}{l} [\text{MAX}]\ z = 2x_1 + 3x_2' - 3x_2'' + 4x_3 \\ \text{s.a} \\ 8x_1 + 2x_2' - 2x_2'' + 5x_3 \le 22, \\ 3x_1 + 7x_2' - 7x_2'' + 4x_3 \le 30, \\ x_1, x_2', x_2'', x_3 \ge 0. \end{array}\right.$$

En forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 7 & -7 & 4 \end{bmatrix}; \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2' \\ x_2'' \\ x_3 \end{bmatrix}; \qquad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

y el vector b continúa siendo el mismo.

Esta sustitución implica tener que cambiar una variable por dos (habrá, por tanto, una variable adicional), con la particularidad de que las columnas correspondientes a la matriz A son las mismas, pero cambiadas de signo.

A modo de resumen,...

... podemos linealizar fácilmente los casos no lineales siguientes:

- Si tenemos una variable negativa, la sustituiremos por otra cambiada de signo, que será positiva $x_k' = -x_k$.
- Si tenemos una variable libre de signo, la reemplazamos por la diferencia de dos variables positivas $x_k = x_k' - x_k''$.

2.4. Tipos de problemas lineales y algoritmos existentes

Según las características de las variables, podemos clasificar los problemas lineales en los tipos siguientes:

1) Problemas lineales continuos (PLC): problemas como los que hemos visto hasta ahora, en los cuales las variables pueden adoptar cualquier valor real, es decir, $x_i \in \mathbb{R}$. La resolución generalmente se basa en las dos vías siguientes:

a) El **algoritmo simplex**, construido por George Dantzig en 1947.

b) El **algoritmo de Karmarkar** (1984), más reciente y más complejo, que se enmarca dentro de los algoritmos de carácter polinómico, y que proporciona mejores resultados que el algoritmo simplex cuando la estructura del problema presenta ciertas particularidades. Básicamente, es más eficiente que el algoritmo del simplex para problemas lineales de gran tamaño.

2) Problemas lineales enteros (PLE): problemas en los cuales todas las variables o parte de éstas tienen que adoptar valores enteros (por ejemplo, si el significado de una variable es un número de personas, no se pueden tener en cuenta valores que no sean enteros). Este tipo de problemas lineales se puede subdividir en dos categorías:

a) Problemas lineales enteros puros (PLEP): problemas lineales enteros en los cuales todas las variables tienen que ser enteras.

b) Problemas lineales enteros mixtos (PLEM): problemas lineales enteros en los cuales sólo una parte de las variables es entera y el resto no lo tiene que ser necesariamente (pero, obviamente, sí que debe ser real).

Hay que subrayar que la utilización de un algoritmo de PLC en un PLE sólo dará el óptimo en el caso de que la solución que se obtenga proporcione valores enteros para las variables que lo tienen que ser. En caso contrario, incluso redondeando los resultados al entero más próximo, estos resultados no nos servirán. Hay un elevado número de algoritmos específicos según las características particulares de cada problema, aunque debe destacarse el uso generalizado de los **algoritmos de ramificación y de acotación** (en inglés, *Branch and Bound*). Estos problemas, como los siguientes, no se considerarán en el desarrollo de la asignatura.

3) Problemas lineales binarios (PLB): problemas lineales en los cuales todas las variables de que constan (**problemas lineales binarios puros, PLBP**) o parte de éstas (**problemas lineales binarios mixtos, PLBM**) son binarias. Las variables binarias se pueden considerar como un subconjunto de las variables enteras con la particularidad de que sólo pueden adoptar los valores 1 y 0. Son muy útiles para modelizar situaciones que impliquen una toma de decisión cualitativa, como colocar (1) o no colocar (0) un semáforo en un cruce, abrir (1) o no (0) un almacén determinado, comprar (1) o no comprar (0) un determinado componente, y un largo etcétera. Por norma general, se resuelven como un PLE añadiéndoles restricciones del tipo $x_i \leq 1$ para todas las variables que tengan que ser binarias. Si tenemos un PLBP, sin embargo, también se puede aplicar el **algoritmo de Balas.**

Recordad

Las siglas que presentamos a continuación hacen referencia a los diferentes tipos de problemas lineales que nos podemos encontrar:

- **PLC**: problema lineal continuo.
- **PLE**: problema lineal entero.
- **PLEP**: problema lineal entero puro.
- **PLEM**: problema lineal entero mixto.
- **PLB**: problema lineal binario.
- **PLBP**: problema lineal binario puro.
- **PLBM**: problema lineal binario mixto.

Variables enteras

Una variable entera adopta valores enteros. La existencia de una sola variable entera ya implica que el problema lineal sea entero y, por lo tanto, tendremos que recurrir a algoritmos diferentes de los PLC.

Variables binàries

Una variable es binaria si adopta únicamente los valores 0 ó 1. Un PLB puede ser tratado como un PLE con la restricción de que las variables binarias sean enteras e inferiores a 1 o iguales a 1.

Problemas particulares de la programación lineal entera

Como casos particulares dentro de la programación lineal entera podemos destacar dos problemas muy característicos:

- El **problema del transporte**, que de hecho es un PLEP con una estructura muy particular que permite la aplicación del algoritmo conocido con el nombre de *stepping stone*.

- El **problema de la asignación** o **problema de la afectación**, que es un PLBP también con una estructura muy particular. Para resolverlo se aplica el algoritmo húngaro, o algoritmo de Köning y Egervary.

Lectura complementaria

El desarrollo de los algoritmos de acotación y de ramificación, así como otros algoritmos específicos, por ejemplo el de Balas, se puede encontrar, por ejemplo, en la obra siguiente:
S. Ríos Insua (1996). *Investigación operativa* (3.ª ed.). Madrid: Centro de Estudios Ramón Areces.

3. Formulación de problemas lineales

Aunque, como ya hemos comentado, la investigación operativa aplica el método científico, hay una parte de éste que se aleja de la ciencia y se acerca al arte: es la **modelización**. Esta conversión de una situación real en fórmulas matemáticas nunca la podemos considerar una cuestión banal, todavía más, le tendremos que dedicar la máxima concentración posible, dado que, si el modelo especificado es inadecuado, la resolución será superflua. El hecho de intentar aplicar una metodología, sin dar ningún otro paso, al caso que nos ocupa, la modelización de problemas lineales, no es suficiente. Hay aspectos muy importantes en este proceso, ajenos a concepciones científicas, de los cuales destacaremos dos, la creatividad y la experiencia:

El arte de la modelización

La práctica de modelizar problemas lineales correctamente tiene una vertiente de arte por el hecho de que requiere creatividad y experiencia.

a) En lo que respecta a la **creatividad**, queremos destacar el hecho de que para proceder a modelizar problemas lineales es preciso desprenderse de las ideas preconcebidas y de los procedimientos mecanicistas. Cada situación real es un problema completamente diferente de cualquier otro que se haya visto con anterioridad; por lo tanto, el hecho de aplicar un estándar dará sin duda unos resultados no deseados. En definitiva, se trata de conseguir el equilibrio entre la lógica y la inventiva.

b) La **experiencia** es, como en todo arte, una de las maneras de perfeccionarse. Esta idea, aplicada a nuestro contexto, implica la realización de una serie de planteamientos, los cuales constituyen buena parte de este apartado.

3.1. Metodología de formulación de problemas lineales

En este subapartado se desgranan las diferentes etapas que, a grandes rasgos, representa el proceso de modelización en problemas lineales. Hay que tener en cuenta, sin embargo, que el procedimiento que describimos sólo constituye un intento de sistematización con fines pedagógicos de un conjunto de operaciones mucho más complejas y específicas en las cuales la creatividad y la intuición personal tienen, como ya hemos dicho, un papel fundamental.

Identificación del problema (o comprensión)

La primera fase es crucial. De ésta depende que cualquier cosa que hagamos con posterioridad sea útil o sea meramente un despilfarro de tiempo y recursos. Nos tenemos que situar mentalmente dentro del problema, comprenderlo, ver sus ramificaciones principales, conocer el entorno en que se mueve, sopesar los diferentes puntos de vista, elegir los datos que sean útiles, decidir cuáles se podrán adaptar y cuáles no podremos conocer. Se deben conocer los objetivos que se persiguen y, en definitiva, hay que tener muy claro qué se quiere hacer o a dónde se quiere llegar. Si nos situamos en la esfera en que nos moveremos a lo largo del apartado (y, más adelante, en los otros módulos), nos encontraremos unas situaciones adaptadas, muy simplificadas, en las que generalmente toda la información que se facilita es relevante. En definitiva, son situaciones que podríamos definir como ejemplos de laboratorio, cuyo objetivo único es introducir al estudiante en el proceso de aprendizaje.

Identificación de variables

El paso siguiente para la formulación de un problema lineal es la identificación de las variables y de los parámetros del problema.

Construcción de restricciones

Las restricciones consistirán en la formulación matemática de los acondicionamientos y las limitaciones a que nos enfrentamos. Si no conseguimos expresar las restricciones, lo más probable es que no hayamos identificado correctamente las variables, y habrá que volver atrás, a la fase de identificación de variables. El solo hecho de que no se recoja en una restricción una limitación invalidará, con respecto a la práctica, toda la resolución.

Construcción de la función objetivo

Una vez que se hayan construido las restricciones determinaremos la función objetivo, cuyo valor tenemos que optimizar. Si no conseguimos construir esta función, normalmente es porque no hemos identificado correctamente las variables, de manera que tendremos que volver atrás.

Comprobación de la coherencia interna

Una vez formulado el problema, es recomendable estudiarlo de manera global, comprobar que se cumplen todas las restricciones, que la función objetivo representa realmente el objetivo perseguido, que la estructura matemática, a primera vista, es correcta (no hay restricciones redundantes evidentes, todas las variables están enlazadas entre sí, etc.) y, en definitiva, verificar cualquier cosa que nos haga dudar de su corrección. Esta faceta, como es previsible, mejora con el tiempo, es decir, a medida que se adquiere más experiencia.

Recordad

Los pasos que hay que seguir a la hora de formular problemas lineales son los siguientes:

- Comprensión del problema.
- Identificación de las variables.
- Construcción de las restricciones.
- Construcción de la función objetivo.
- Comprobación de la coherencia interna.

3.2. Aplicación de la metodología: caso Metales del Ter

Para ver de manera práctica la metodología de problemas lineales que acabamos de explicar, en este subapartado desarrollamos un caso concreto.

Metales del Ter es una pequeña empresa metalúrgica que principalmente produce la taladradora de los chasis de aire condicionado como subcontratista de una gran empresa. El proceso de producción es el siguiente: se recogen los chasis de la fundición, se hacen en éstos unos agujeros y acto seguido se pulen. Para hacerlo se utilizan tres tipos de máquinas: una taladradora, una pulidora y una embaladora. Las disponibilidades para mañana de estas máquinas son de 720, 840 y 350 minutos, respectivamente. Mañana se pueden hacer dos modelos de chasis: uno grande y uno pequeño. Un chasis grande requiere cuatro minutos de taladradora, diez de aseado y cinco de embalaje, mientras uno pequeño necesita seis minutos de taladradora, seis de aseado y dos de embalaje.

Sabiendo que el beneficio que reporta un chasis grande es de 500 u.m. y que uno pequeño proporciona un beneficio de 300 u.m., ¿qué cantidad se tiene que producir de cada uno para que el beneficio total sea el máximo?

La manera de proceder es la siguiente:

1) En primer lugar definiremos las **variables**. Para descubrirlas es útil preguntarse: ¿qué podemos variar (decidir) para conseguir el objetivo? La respuesta es: la cantidad de chasis grandes y pequeños que hay que producir. Las variables serán, pues, las siguientes:

- x_1: número de chasis grandes a fabricar.
- x_2: número de chasis pequeños a fabricar.

2) Una vez definidas las variables, pasaremos a las **restricciones**. Lo que nos tenemos que preguntar es: ¿hay alguna limitación que no nos permita fabricar todo lo que queramos? En este caso tendremos tres restricciones de un mismo tipo: no podemos utilizar más recursos que aquellos de los que disponemos.

Así pues, si x_1 es el número de chasis grandes y cada uno requiere unos cuatro minutos, $4x_1$ será el tiempo total de taladradora que se utilizará con chasis grandes, y si le sumamos el de los pequeños ($6x_2$) obtendremos el tiempo total de taladradora que necesitaremos, que debe ser menor que el tiempo disponible (720 minutos). Expresado en forma de inecuación:

$$4x_1 + 6x_2 \leq 720.$$

Procederemos de la misma manera con las limitaciones de tiempo de la pulidora y de la embaladora:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 6x_2 &\leq 840, \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 350. \end{aligned}$$

Formalmente, también debemos explicitar que las variables no pueden adoptar valores negativos (no tiene sentido que haya cantidades negativas de productos):

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

y con eso ya tendremos todas las restricciones.

3) A continuación pasamos a la **función objetivo**. En este caso se trata de maximizar el beneficio añadido de los productos, de manera que será:

$$[\text{MAX}]\ z = 500x_1 + 300x_2.$$

Ahora ya tenemos planteado el problema, que, en conjunto y expresado con una estructura más formal, es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
&[\text{MAX}]\ z = 500x_1 + 300x_2\\
&\text{s.a}\\
&4x_1 + 6x_2 \leq 720,\\
&10x_1 + 6x_2 \leq 840,\\
&5x_1 + 2x_2 \leq 350,\\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Antes de continuar la lectura de este módulo es conveniente que hagáis los ejercicios de autoevaluación 1 a 6 para asimilar bien el tema de la modelización.

4. Resolución gráfica de problemas lineales continuos

La resolución gráfica de problemas lineales no es en absoluto una manera eficiente de solucionarlos, como veremos a continuación, pero sí que es un método muy pedagógico, por el hecho de que nos permitirá identificar visualmente la estructura y las particularidades de un problema lineal. En definitiva se trata de representar el problema en un espacio determinado por las variables. Aunque es factible trabajar con tres variables que representen el problema en $\mathbb{R}^3$, nos limitaremos al caso de dos variables porque es mucho más sencillo.

Para resolver un problema lineal de manera gráfica, en primer lugar tenemos que buscar el conjunto de soluciones posibles.

El **conjunto de soluciones posibles** es el conjunto de valores de X que cumplan las restricciones y las condiciones de no-negatividad.

A continuación resolveremos un problema lineal de manera gráfica mediante un ejemplo, que planteamos a continuación:

$$[\text{MAX}]\ z = 5x_1 + 10x_2$$

s.a

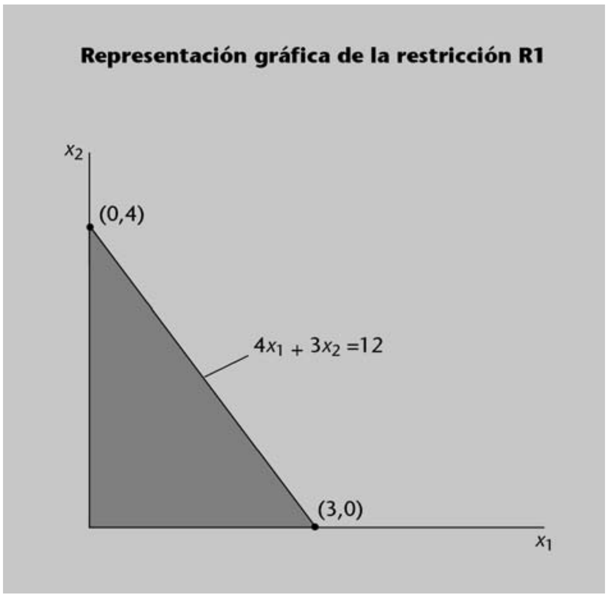
$$\text{R1: } 4x_1 + 3x_2 \leq 12,$$
$$\text{R2: } 2x_1 + 5x_2 \leq 10,$$
$$x_i \geq 0.$$

4.1. Construcción del conjunto de soluciones posibles

Para construir el conjunto de soluciones posibles, primero situaremos los ejes correspondientes a cada una de las variables y nos centraremos en el cuadrante positivo del plan, visto que las condiciones de no-negatividad implican la imposibilidad de adoptar valores de fuera de este cuadrante. Una vez dibujados los ejes, representaremos la primera restricción (R1) y, para representarla, en primer lugar buscaremos la recta que resultaría si en lugar de ser una inecuación fuera una ecuación:

$$4x_1 + 3x_2 = 12.$$

Puesto que se trata de una inecuación (tenemos una desigualdad $\leq$), los puntos que cumplen esta restricción son los del semiplano inferior, incluyendo esta recta (observad el gráfico de la página siguiente).

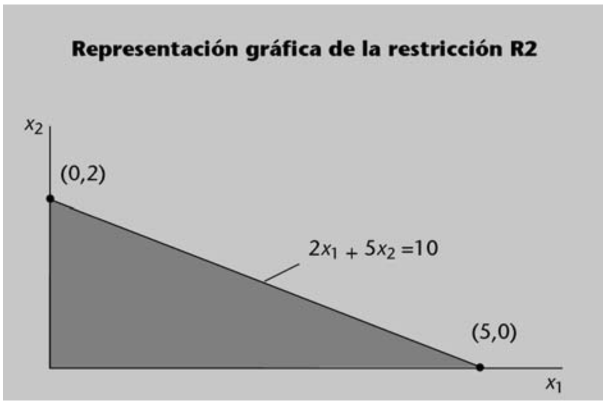


Representación gráfica de una restricción

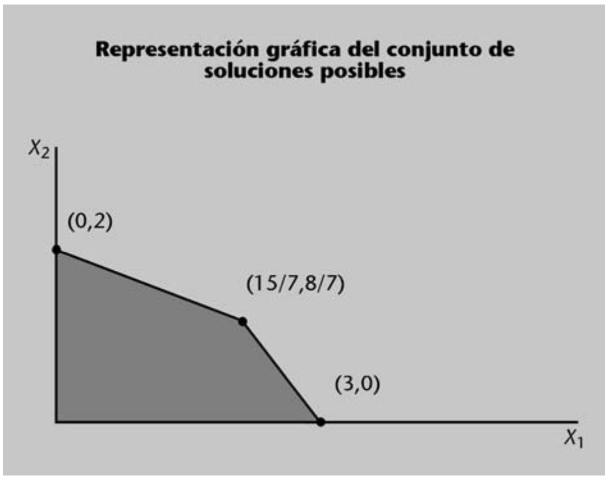
Para representar gráficamente una restricción buscaremos dos puntos que pertenezcan a la recta: si hacemos que $x_1 = 0$, tendremos que $3x_2 = 12$ y, por lo tanto, $x_2 = 4$. Es decir, el punto (0,4) pertenece a esta recta. Procedemos de la misma manera a buscar otro punto de esta recta: (3,0). Y la dibujamos.

Para encontrar la zona del plan correspondiente a la restricción buscamos un punto que no esté en esta recta, por ejemplo el (0,0) y vemos que cumple esta restricción ($0 \leq 12$), de manera que el semiplano definido por la ecuación es el que vemos sombreado en la figura.

Haremos lo mismo con la segunda restricción, cuya recta pasa por los puntos (0,2) y (5,0), y la dibujamos tal como se muestra en la figura siguiente:



La intersección de las dos áreas que hemos obtenido representará, por tanto, todos los puntos que cumplen al mismo tiempo las dos restricciones del problema y las condiciones de no-negatividad, es decir, el conjunto de soluciones posibles que se representa en la figura siguiente:



El punto de intersección

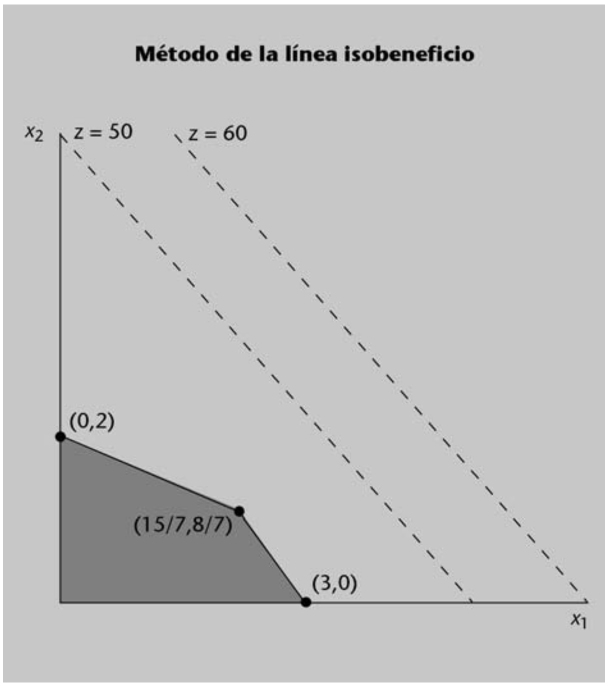
El punto de intersección de ambas rectas se puede obtener resolviendo fácilmente el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones (=) de las restricciones que se cortan.

4.2. Método de la línea isobeneficio

Una vez que hemos construido el conjunto de soluciones posibles, necesitamos saber cuál o cuáles de estos puntos del conjunto proporciona un valor más alto de la función objetivo. Para averiguarlo aplicaremos el método de la **línea isobeneficio***. La línea isobeneficio es la recta que adopta la función objetivo para un valor de z determinado en un problema de maximización.

*** En el caso de que tengamos un problema de minimización hablaremos del método de la línea isocoste.**

En el gráfico siguiente mostramos las rectas isobeneficio de nuestro ejemplo para $z = 60$ y para $z = 50$:



Para dibujar las rectas isobeneficio...

... empezaremos tomando un valor arbitrario de z, por ejemplo $z = 60$. La recta será $5x_1 + 10x_2 = 60$, y pasa por los puntos (12,0) y (0,6). Además, dibujaremos la recta isobeneficio para un valor de $z = 50$, que pasa por los puntos (10,0) y (0,5) y que, obviamente, es paralela a la anterior pero desplazada hacia abajo porque la pendiente de la recta no se ha modificado.

Vemos que si desplazamos paralelamente una de estas rectas isobeneficio hacia arriba, el valor de z es superior, mientras que si la desplazamos hacia abajo, el valor es inferior. Si observamos el gráfico anterior podemos observar que el punto del conjunto de soluciones que proporciona una z de más valor es el vértice (ángulo) resultado del cruce de ambas restricciones, de manera que la solución sería la siguiente:

$$x_1 = 15/7,\ x_2 = 8/7 \text{ con un valor de } z = 155/7 \approx 22{,}14.$$

En este caso la solución es única, dado que hay una y sólo una combinación de valores (propios) de las variables que proporciona el valor máximo de z.

Así pues, el método de la línea isobeneficio (isocoste) consiste en localizar la solución óptima desplazando la línea isobeneficio (isocoste) hasta que se encuentre el valor z mayor (menor).

4.3. Método de los vértices

Hemos visto que en el óptimo la línea isobeneficio siempre será tangente a uno o más vértices (ángulos) del conjunto de soluciones posibles. Así pues, en lugar de dibujar la línea isobeneficio podríamos utilizar otro método para encontrar la solución: el método de los vértices.

> El **método de los vértices consiste** en identificar y evaluar todos los vértices del conjunto de soluciones posibles y quedarnos con el mejor (es decir, el valor de z más alto en el caso de máximo, o el más bajo, en el caso de mínimo).

Apliquemos este método a nuestro ejemplo. Los vértices del conjunto de soluciones posibles son (0,0), (0,2), (15/7,8/7) y (3,0); pasemos, pues, a sustituir estos valores en la función objetivo con los resultados siguientes:

Método de los vértices		
x_1	x_2	z
0	0	0
0	2	20
15/7	8/7	155/7
3	0	15

Como vemos, el valor de z más alto es 155/7 (≈ 22,14); por lo tanto, la solución es la siguiente:

Antes de pasar al subapartado siguiente es conveniente que hagáis los ejercicios de autoevaluación 7 y 8.

$$x_1 = 15/7,\ x_2 = 8/7.$$

4.4. Caso de conjuntos no acotados de soluciones posibles

El ejemplo sobre el cual hemos explicado los métodos de la línea de isobeneficio y el de los vértices proporciona un conjunto acotado de soluciones posibles. Cuando eso no pasa se pueden producir ciertas diferencias que comentaremos en el ejemplo siguiente. Consideremos el problema lineal que planteamos a continuación:

$$[\text{MIN}]\ z = x_1 + 2x_2$$

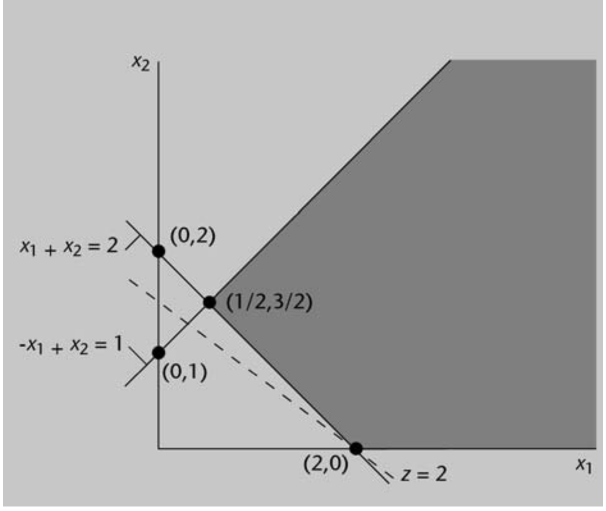
s.a

$$x_1 + x_2 \geq 2,$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1,$$
$$x_i \geq 0.$$

Como vemos, en la figura siguiente, el conjunto de soluciones posibles no es un conjunto acotado, de manera que las variables podrían llegar a adoptar un valor infinito, sin dejar de ser soluciones posibles. En este ejemplo, no obstante, la solución también es única, ya que el valor mínimo que se puede obtener de z es de 2, valor que es proporcionado por el vértice (2,0).

Si el conjunto de soluciones posibles no es acotado, la solución puede adoptar el valor infinito.

Representación gráfica del conjunto no acotado de soluciones posibles



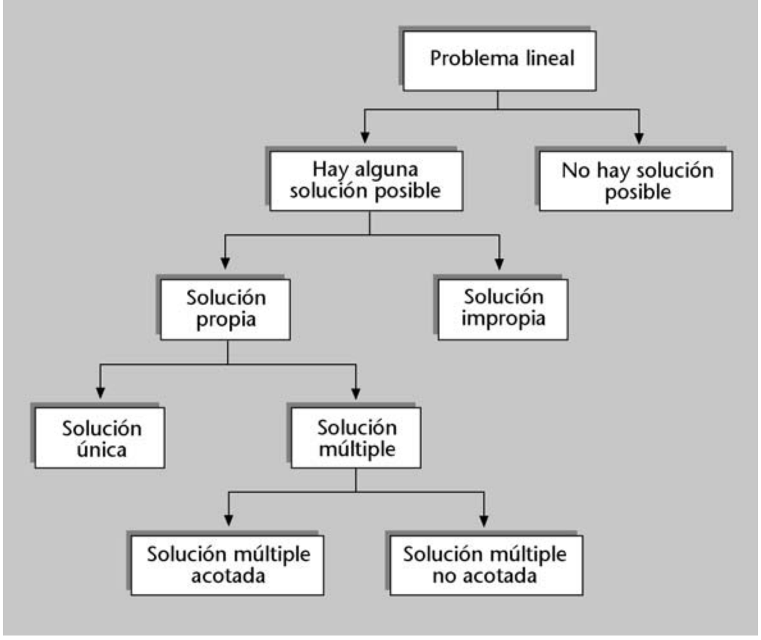
Llegados a este punto, es conveniente que hagáis los ejercicios de autoevaluación 9 a 12 antes de continuar, con el fin de ver las diferentes situaciones que podemos encontrar.

4.5. Tipología de soluciones

Una vez vistos los ejemplos y los ejercicios que hemos propuesto, estamos en condiciones de estructurar la tipología de soluciones que nos podemos encontrar en la resolución de problemas lineales (no sólo en el plano gráfico). La **estructura de la tipología de soluciones posibles** se muestra en la figura siguiente:

Podéis consultar los ejemplos y ejercicios propuestos a lo largo de todo el apartado 4 de este módulo didáctico.

Tipología de soluciones



En primer lugar, podemos encontrar los problemas sin solución y los problemas con solución. La cuestión es si el conjunto de soluciones posibles, formado por la intersección de las regiones definidas por las restricciones, está vacío o no. La **inexistencia de solución** en un problema lineal queda perfectamente definida desde el punto de vista matemático. No obstante, desde un punto de vista de la aplicación real, la primera interpretación que le tenemos que dar es que el planteamiento del problema no se ha hecho de manera correcta. Antes de dar por buena esta situación (es decir, aceptar que no hay solución) es muy aconsejable repasar de nuevo la modelización y preguntarnos si todas las restricciones que figuran en ésta son realmente necesarias.

Si es un **problema con solución**, el paso siguiente de la clasificación hace referencia a si el valor de la función objetivo en el óptimo puede adoptar el valor infinito o no, es decir, si es una solución impropia o una solución propia:

1) Será una **solución impropia** si el valor de z en el óptimo (z^*) tiende a ∞ o a $-\infty$ y, por lo tanto, algunas variables adoptan el valor infinito.

En la misma línea del comentario sobre la inexistencia de solución, la existencia de soluciones impropias (perfectamente definidas desde el punto de vista matemático) también nos lleva a dudar del planteamiento inicial en la medida en que no es muy habitual tener soluciones que expresen, por ejemplo, que el máximo beneficio es infinito. Por lo tanto, antes de dar por buena esta solución, es muy aconsejable repasar el planteamiento inicial de la búsqueda de limitaciones existentes (explícita o implícitamente) no expresadas en las restricciones.

2) En el caso de tener **solución propia**, puede ser de dos tipos:

a) Única: sólo un vértice proporciona el mejor valor de *z* y, por lo tanto, sólo una combinación de valores de las variables nos aporta un resultado óptimo.

b) Múltiple: puede haber más de un punto (vértice o no) implicado en la solución y, por lo tanto, puede ser que se obtenga el mismo valor de *z* para todos estos puntos. Dentro de las soluciones múltiples podemos encontrar dos casos, según si el conjunto de las soluciones óptimas es acotado o no lo es:

El conjunto de soluciones óptimas...

... es el subconjunto de soluciones posibles, formado por todos los puntos que proporcionan un valor mejor de *z* (el menor posible en el caso de minimizar, y el mayor, en el caso de maximizar). Si se tiene una solución única, sólo un punto pertenecerá a este conjunto. En cambio, si tenemos una solución múltiple (más de un punto es solución), siempre tendrá infinitos componentes, es decir, habrá infinitas combinaciones de valores de las *x* que proporcionarán un mejor valor de *z*.

- En el caso más sencillo, supongamos que el óptimo se alcanza en dos vértices y en la combinación lineal convexa de éstos (el segmento que los une): el conjunto de soluciones óptimas sería acotado, de manera que tendríamos una **solución múltiple acotada**. Este caso es extensible a cualquier otro en el que intervengan varios vértices y en el que la combinación lineal convexa entre éstos forme un conjunto acotado.

- En otros casos, y siempre teniendo un conjunto no acotado de soluciones posibles, encontramos que el óptimo se puede alcanzar en uno o más vértices y también en la combinación lineal convexa de éstos y, además, en puntos que no pertenecen a esta combinación lineal convexa. Entonces, los valores de las variables podrán adoptar valores infinitos (pero el valor de z en el óptimo no será infinito), ya que el conjunto de soluciones óptimas será no acotado. Esta solución recibe el nombre de **solución múltiple no acotada**.

Cabe remarcar que algunos autores, por el hecho de que las variables pueden alcanzar valores infinitos, catalogan las soluciones múltiples no acotadas como impropias. No obstante, consideramos que el hecho diferencial y que proporciona realmente unas implicaciones económicas importantes reside en el valor de z y no en el de las variables. Por ejemplo, es muy diferente alcanzar beneficios infinitos que tener infinitas maneras de alcanzar un beneficio determinado.

Conceptualmente podemos establecer una serie de equivalencias entre esta nomenclatura propia de la programación lineal y la nomenclatura propia de la optimización matemática que ya hemos visto antes, hecho que reflejamos en la tabla siguiente:

Consultad la nomenclatura típica de la optimización matemática en el subapartado 2.1 de este módulo didáctico.

Equivalencia de nomenclatura	
Programación lineal	**Optimización matemática**
Solución única	Óptimo global estricto
Solución múltiple	Óptimo global relativo
Solución impropia	Inexistencia de óptimo global
Inexistencia de solución posible	El problema de la optimización matemática no tiene sentido

4.6. Consideraciones sobre la resolución de problemas lineales

Una vez vistas las soluciones posibles que podemos encontrar en la resolución de un problema lineal es conveniente remarcar algunos aspectos que han surgido al resolver los ejemplos y los ejercicios planteados.

Fijémonos en que el conjunto de soluciones posibles, si existe, puede ser acotado o no acotado. En cualquiera de los dos casos podemos encontrar soluciones propias, pero sólo puede haber soluciones impropias si el conjunto es no acotado.

Recordemos que un conjunto es convexo si, para cualquier par de puntos del conjunto, la combinación lineal convexa (el segmento que los une) pertenece en la totalidad al conjunto. Hay que recordar igualmente el teorema fundamental de la convexidad. Entonces, el conjunto de soluciones posibles o bien está vacío o bien es convexo.

Consultad el teorema fundamental de la convexidad en el subapartado 2.1 de este módulo didáctico.

Como hemos indicado en la explicación del método de los vértices, siempre encontramos la solución en la frontera del conjunto de soluciones posibles (es decir, en el margen exterior) y, salvo el caso de la solución impropia, siempre interviene en el mismo al menos un vértice. Puesto que habrá un número finito de vértices, podemos limitar la exploración a un número finito de puntos. Ésta es la base del algoritmo simplex, que desarrollaremos en otros módulos.

Consultad el método de los vértices en el subapartado 4.3 de este módulo didáctico.

Consultad el algoritmo simplex en el módulo "El algoritmo simplex" de esta asignatura.

De hecho, el **método simplex** en esencia trabaja de la misma manera que el método de los vértices, pero en lugar de analizar de manera exhaustiva todos los vértices del conjunto de soluciones posibles, lleva a cabo un análisis de manera ordenada.

Resumen

En este módulo hemos introducido la investigación operativa como herramienta de ayuda para resolver problemas propios de una organización. Hemos hecho un repaso de su historia con el fin de entender mejor sus campos de aplicación y la metodología que utiliza. Por otro lado, mediante la presentación de una clasificación de problemas tipo, hemos situado el papel de la programación lineal como una de las herramientas de que se vale la investigación operativa para resolver problemas, aspecto que constituirá la parte central de la asignatura.

Entrando de lleno en la programación lineal, en primer lugar, hemos presentado el aspecto formal de los problemas lineales y sus variantes principales. A continuación hemos introducido una metodología de formulación de problemas lineales acompañada de ejemplos y ejercicios enfocada a formular problemas lineales continuos.

La última parte de este módulo se ha dedicado a establecer las bases que permitirán comprender el funcionamiento del algoritmo simplex. Para hacerlo, hemos resuelto problemas lineales de manera gráfica, lo que nos ha permitido ver componentes como el conjunto de soluciones posibles y los vértices. La resolución de ejemplos ha servido para presentar las diferentes soluciones que se pueden plantear y ha permitido efectuar algunas consideraciones que permitirán entender mejor los métodos que aplicaremos en otros módulos.

Ejercicios de autoevaluación

1. En este ejercicio de autoevaluación planteamos un problema de limitación de recursos.
La empresa química Industrias Ripoll, S.A. (INRI) elabora un plan de producción de tres productos químicos para el mes siguiente, denominados RJ-1423, QC-1269 y XT-2541. Para elaborarlos utiliza tres componentes básicos que, con el fin de ahorrarnos los complicados nombres químicos, identificaremos con las referencias C1, C2 y C3, y de los cuales dispone de 800, 750 y 850 toneladas, respectivamente. Estos componentes, para que se conviertan en los productos finales, tienen que pasar por tres procesos productivos: P1, P2 y P3.
En la tabla siguiente mostramos las toneladas necesarias de cada componente para obtener una tonelada de producto final, el tiempo en horas que tarda cada tonelada de producto final en superar cada proceso productivo y los costes respectivos por tonelada o por hora, según el caso.

Tabla de costes						
Producto	**Componentes básicos por Tm (en Tm)**			**Horas de procesamiento**		
	C1	**C2**	**C3**	**P1**	**P2**	**P3**
RJ-1423	10	8	7	3	4	5
QC-1269	9	6	12	5	4	1
XT-2541	7	12	6	2	2	4
Coste (u.m./unidad)	5.000	6.000	4.000	40.000	30.000	50.000

El precio de venta de estos productos es de 750.000, 600.000 y 550.000 u.m./Tm. La empresa trabaja durante 20 días al mes y 16 horas al día.
Formulad el problema lineal que maximiza el beneficio total.
Tened en cuenta que para calcular el beneficio por unidad de cada producto tendremos que sumar los diferentes costes por unidad y restarlos del precio de venta.

2. Este ejercicio también trata de un problema de limitación de recursos.
Tropicfruit Inc. está especializada en la elaboración de combinados de fruta tropicales sin alcohol. En la planta que esta empresa tiene en Tampa se fabrican tres productos: Katxumbo, Kimbombo y Angaua, que se venden a un precio de venta al distribuidor (pvd) de 29,26 €/litro, 25,54 €/litro y 28,31 €/litro, respectivamente. Para elaborar 100 litros de cada uno de estos productos se necesitan los ingredientes siguientes:

Tabla de materias primas*					
	Aguacate	**Kiwi**	**Mango**	**Azúcar**	**Agua**
Katxumbo	100	200	–	50	150
Kimbombo	–	100	100	105	250
Angaua	200	–	200	60	100

* Todas las cantidades están expresadas en kilogramos, excepto el agua, que se expresa en litros.

Para el próximo mes los proveedores han garantizado el suministro de materias primas hasta un máximo de 3.000 kg de aguacates a un precio de 5 euros/kg, 4.000 kg de kiwis a 6 euros/kg y 5.000 kg de mangos a 4 euros/kg. El azúcar se compra a Brazil Sugar Co., que facilita cualquier cantidad que se quiera a 0,5 euros/kg. El agua utilizada para elaborar los combinados se transporta con camiones cisterna propios desde una fuente que tienen cerca. Al municipio (que es propietario de la fuente) se le paga un canon de 1 euro/m^3, mientras que el coste del transporte sube a 4 euros/m^3. Finalmente, los productos químicos que se utilizan (conservantes, colorantes y antioxidantes) representan un coste de 2 euros/litro para Katxumbo, 3 euros/litro para Kimbombo y 1 euro/litro para Angaua.
¿Cuál es el plan óptimo de producción de los combinados fabricados por Tropicfruit Inc. para el próximo mes de manera que se maximice el beneficio?

3. El problema siguiente podríamos llamarlo *problema de la dieta*. El enunciado se plantea a continuación.
El sargento Arensívia es el encargado de organizar los menús del cuartel. Puesto que el sargento encuentra muy complicado tener que comprar más de dos tipos de alimentos, ha decidido que este mes la tropa del cuartel sólo comerá menús a base de carne de cerdo y patatas, productos que abundan en el pueblo de al lado y que puede llegar a comprar al precio de 50 y 25 u.m./kg, respectivamente.

Según la circular médica distribuida recientemente por el Ministerio de Defensa, los soldados tienen que ingerir al día un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, 19 de vitaminas y 7 de proteínas, de manera que el sargento ha ido al teniente médico del cuartel, el cual, después de grandes esfuerzos, le ha proporcionado los contenidos en hidratos de carbono, vitaminas y proteínas por kilogramo de carne y de patatas según se muestra en la tabla siguiente:

Datos médicos		
	Carne	**Patatas**
Hidratos de carbono	1	3
Vitaminas	3	4
Proteinas	3	1

Plantead el problema lineal que proporcione la cantidad de carne de cerdo y de patatas que hay que comprar por soldado y día y que resulte más barata.

4. En este ejercicio de autoevaluación planteamos un problema de mezclas.
Destilerías del Llobregat, S.L. importa güisqui a granel de diferentes calidades que utiliza para elaborar sus productos: los conocidos güisquis de garrafa tan apreciados por los locales *afterhours* y por sus clientes.
Para el mes siguiente dispone de los productos, cantidades y precios siguientes:

- Tennesse Old: 50 bidones de 70 litros, a 35.000 u.m. el bidón.
- Scottish Red: 100 garrafas de 25 litros a 7.500 u.m. la garrafa.
- Montsec Bru: una cisterna de 1.500 litros a 300.000 u.m.

Mezcla estos componentes y elabora sus tres productos más preciados: garrafa De Luxe, garrafa Medium y garrafa Extreme. No obstante, para mantener sus productos dentro del sector de la alimentación, y no en el de detergentes, tiene que respetar ciertas normas a la hora de hacer las mezclas. Estas normas son las que se especifican a continuación para cada uno de los tres productos:

1) Garrafa De Luxe:

- Debe garantizar que su composición tiene al menos un 30% de Tennesse Old.
- No hay limitaciones sobre la cantidad de Scottish Red.
- No puede tener más del 50% de Montsec Bru.

2) Garrafa Medium:

- No puede tener menos del 15% de Tennesse Old.
- No puede tener menos del 20% de Scottish Red.
- No hay limitaciones de Montsec Bru, aunque, obviamente, no puede tener más del 65%.

3) Garrafa Extreme:

- No puede tener menos del 5% de Tennesse Old.
- Debe tener al menos un 20% de Scottish Red.
- No puede tener más del 70% de Montsec Bru.

Los precios de venta de los productos son de 500 u.m./l para De Luxe, 400 para Medium y 300 para Extreme.

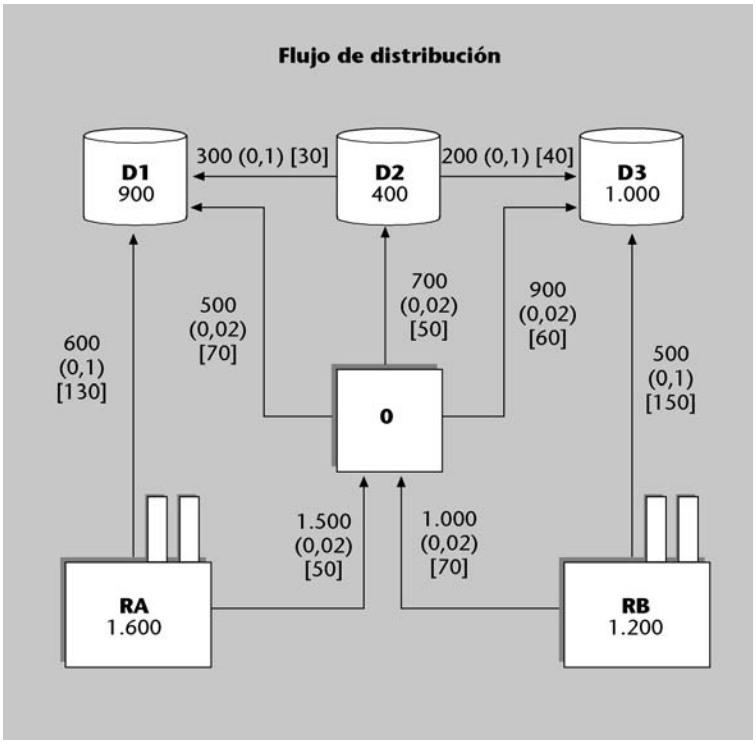
Calculad las mezclas que producen el beneficio máximo al importador.

5. En este ejercicio plantearemos un problema de asignación horaria.
El parque natural del Hayedo de Miquel, ante el alto riesgo de incendios, ha decidido reorganizar a los vigilantes que actúan en defensa de la integridad de este paraje tan extenso. Para el mes de agosto se han determinado las necesidades que se presentan en la tabla siguiente:

Necesidades horarias		
Periodo	**Franja horaria**	**Número mínimo de vigilantes**
1	2-6	10
2	6-10	45
3	10-14	80
4	14-18	120
5	18-22	75
6	22-2	15

Considerando que el periodo 1 es inmediatamente posterior al periodo 6 y teniendo en cuenta que el horario de trabajo de un vigilante es de 8 horas consecutivas, se quiere obtener una asignación diaria de vigilantes en cada periodo de manera que cumpla las necesidades anteriores y que ocupe el menor número de éstos, teniendo presente que las horas de entrada de los turnos son las 2, 6, 10, 14, 18 y 22 horas.

6. Este ejercicio presenta un problema de flujos.
Petróleos del Francolí dispone de dos refinerías (RA y RB) que producen combustible para tres centros de distribución (D1, D2 y D3), los cuales están conectados mediante una red de oleoductos, como se muestra en la figura siguiente:



Para cada refinería y centro de distribución se indican la capacidad productiva y la demanda, respectivamente, y para cada conducción se indica la capacidad máxima de transporte en toneladas, entre paréntesis la pérdida que se produce (es decir, una pérdida de 0,1 significa que si se envían 100 toneladas, en realidad sólo se reciben 90); y finalmente, entre corchetes, está la distancia en kilómetros.
Como se aprecia en la figura, hay una plataforma central de distribución (0) que no tiene ninguna capacidad de almacenamiento.
Los costes de producción asociados son de 18.000 u.m./Tm para RA y de 21.000 u.m./Tm para RB, mientras que los costes de transporte son de 100 u.m./km · Tm.
Plantead el problema lineal que permita determinar la política de producción y distribución de coste mínimo y que satisfaga exactamente la demanda solicitada.

7. En este ejercicio se ilustra un caso de problema en el que hay restricciones redundantes. Resolved gráficamente el problema lineal siguiente:

$$[\text{MAX}]\ z = 5x_1 + 10x_2$$

s.a

$$\begin{aligned}
&\text{R1: } 4x_1 + 3x_2 \leq 12,\\
&\text{R2: } 2x_1 + 5x_2 \leq 10,\\
&\text{R3: } 4x_1 + 5x_2 \leq 20,\\
&x_i \geq 0.
\end{aligned}$$

8. En este ejercicio de autoevaluación veremos el caso de existencia de una solución impropia. Resolved gráficamente el problema lineal siguiente:

Antes de resolver el ejercicio de autoevaluación 8, consultad el problema planteado en el subapartado 4.4 de este módulo didáctico.

$$[\text{MAX}]\ z = x_1 + 2x_2$$

s.a

$$\begin{aligned}
&\text{R1: } x_1 + x_2 \geq 2,\\
&\text{R2: } -x_1 + x_2 \leq 1,\\
&x_i \geq 0.
\end{aligned}$$

Antes de resolver el ejercicio de autoevaluación 9, consultad el problema planteado en el inicio del apartado 4 de este módulo didáctico.

9. Este ejercicio de autoevaluación presenta el caso de una solución múltiple en un conjunto de soluciones posibles acotado.

Resolved gráficamente el problema lineal siguiente:

$$[\text{MAX}]\ z = 4x_1 + 10x_2$$

s.a

$$\begin{aligned} &\text{R1: } 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ &\text{R2: } 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

10. En este ejercicio de autoevaluación se presenta un caso de solución múltiple no acotada. Resolved gráficamente el problema lineal siguiente:

Antes de resolver el ejercicio de autoevaluación 10, consultad el problema planteado en el subapartado 4.4 de este módulo didáctico.

$$[\text{MAX}]\ z = -x_1 + x_2$$

s.a

$$\begin{aligned} &\text{R1: } x_1 + x_2 \geq 2, \\ &\text{R2: } -x_1 + x_2 \leq 1, \\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

11. Este ejercicio de autoevaluación ilustra un caso de solución múltiple acotada en un conjunto no acotado.
Resolved gráficamente el problema lineal siguiente:

Antes de resolver el ejercicio de autoevaluación 11, consultad el problema planteado en el subapartado 4.4 de este módulo didáctico.

$$[\text{MIN}]\ z = 2x_1 + 2x_2$$

s.a

$$\begin{aligned} &\text{R1: } x_1 + x_2 \geq 2, \\ &\text{R2: } -x_1 + x_2 \leq 1, \\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

12. Hay casos, como el que presentamos en este ejercicio de autoevaluación, en los que se tiene inexistencia de solución.
Resolved gráficamente el problema lineal siguiente:

$$[\text{MAX}]\ z = x_1 + x_2$$

s.a

$$\begin{aligned} &\text{R1: } x_1 + x_2 \leq 1, \\ &\text{R2: } x_1 + x_2 \geq 2, \\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

Solucionario

Ejercicios de autoevaluación

1. Para resolver el problema de limitación de recursos que hemos planteado tenemos que proceder de la manera siguiente:

1) Definición de las variables

- x_1: cantidad en toneladas que se debe producir de RJ-1423.
- x_2: cantidad en toneladas que se debe producir de QC-1269.
- x_3: cantidad en toneladas que se debe producir de XT-2541.

2) Restricciones

a) Para la limitación de componentes:

$$10x_1 + 9x_2 + 7x_3 \le 800,$$
$$8x_1 + 6x_2 + 12x_3 \le 750,$$
$$7x_1 + 12x_2 + 6x_3 \le 850.$$

b) Para la limitación de tiempo de procesamiento (se trabaja 16 · 20 = 320 horas al mes):

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 320,$$
$$4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 320,$$
$$5x_1 + x_2 + 4x_3 \le 320.$$

c) Además, las variables no pueden adoptar valores negativos:

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

3) Función objetivo

Para expresar la función objetivo, en primer lugar tenemos que calcular los márgenes unitarios de cada producto. Estos márgenes se pueden obtener con la configuración de una tabla como la que mostramos a continuación:

Tabla de costes							
Costes		**Producto**					
		RJ-1423 (x_1)		**QC-1269 (x_2)**		**XT–2541 (x_3)**	
Componente	**Componente por unidad**	**Cantidad**	**Total**	**Cantidad**	**Total**	**Cantidad**	**Total**
C1	5.000	10	50.000	9	45.000	7	35.000
C2	6.000	8	48.000	6	36.000	12	72.000
C3	4.000	7	28.000	12	48.000	6	24.000
P1	40.000	3	120.000	5	200.000	2	80.000
P2	30.000	4	120.000	4	120.000	2	60.000
P3	50.000	5	250.000	1	50.000	4	200.000
Total de costes			616.000		499.000		471.000
Precio de venta al público			750.000		600.000		550.000
Beneficio			**134.000**		**101.000**		**79.000**

Si para abreviar trabajamos con miles de unidades monetarias, la función objetivo será la siguiente:

$$[\text{MAX}]\ z = 134x_1 + 101x_2 + 79x_3,$$

donde z está expresado en miles de unidades monetarias. Por lo tanto, el planteamiento resultante será el siguiente:

$$[\text{MAX}]\ z = 134x_1 + 101x_2 + 79x_3$$

s.a

$$10x_1 + 9x_2 + 7x_3 \le 800,$$
$$8x_1 + 6x_2 + 12x_3 \le 750,$$
$$7x_1 + 12x_2 + 6x_3 \le 850,$$
$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 320,$$
$$4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 320,$$
$$5x_1 + x_2 + 4x_3 \le 320,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

2. Para establecer el plan óptimo del problema de limitación de recursos de la producción de los combinados de manera que se maximice el beneficio para el próximo mes, tenemos que proceder de la manera siguiente:
1) Definición de las variables
- x_1: centenares de litros de Katxumbo que se tienen que elaborar.
- x_2: centenares de litros de Katxumbo que se tienen que elaborar.
- x_3: centenares de litros de Angaua que se tienen que elaborar.

2) Cálculo de costes para 100 litros de cada uno de los productos:

Tabla de costes							
Costes		Producto					
		Katxumbo		Kimbombo		Angaua	
Componente	Componente por unidad	Cantidad	Total	Cantidad	Total	Cantidad	Total
Aguacates	5	100	500	0	0	200	1.000
Kiwis	6	200	1.200	100	600	0	0
Mangos	4	0	0	100	400	200	800
Azúcar	0,5	50	25	105	52,5	60	30
Agua	0,005	150	0,75	250	1,25	100	0,50
Productos químicos	–	–	200	–	300	–	100
Total de costes			1.925,75		1.353,75		1.930,50
Precio de venta al público			2.925,75		2.553,75		2.830,50
Beneficio			**1.000**		**1.200**		**900**

Por lo tanto, el planteamiento queda de la manera siguiente:

$$[\text{MAX}]\ z = 10x_1 + 12x_2 + 9x_3$$

s.a

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_3 \leq 30,\\ &2x_1 + x_2 \leq 40,\\ &x_2 + 2x_3 \leq 50,\\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

donde z se expresa en centenares de euros.

3. Para resolver el problema de la dieta de los soldados seguiremos el procedimiento habitual.
1) Definición de las variables
Sea x_1 los kilogramos de carne y x_2 los kilogramos de patatas.
2) Restricciones

$$\begin{aligned} &x_1 + 3x_2 \geq 8,\\ &3x_1 + 4x_2 \geq 19,\\ &3x_1 + x_2 \geq 7,\\ &xi \geq 0. \end{aligned}$$

3)

$$[\text{MIN}]\ z = 50x_1 + 25x_2.$$

4. Para resolver el problema de mezclas procedemos según los pasos que señalamos a continuación.
1) Definición de las variables
x_{ij} representará la cantidad de güisqui importado i que se utiliza para elaborar el producto j. Tanto i como j pueden valer de 1 a 3 con relación a los productos por el mismo orden que en el enunciado. Por consiguiente, $x_{1j} + x_{2j} + x_{3j}$ indicará la cantidad total producida de la mezcla j y $x_{i1} + x_{i2} + x_{i3}$ la cantidad total utilizada del producto importado i, y no hará falta utilizar variables nuevas.
2) Función objetivo
Para facilitar su comprensión presentaremos el planteamiento sin simplificar. Todas las cifras especificadas hacen referencia a litros.

$$\begin{aligned}[\text{MAX}]\ z = {} & 500(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 400(x_{12} + x_{22} + x_{32}) +\\ & + 300(x_{13} + x_{23} + x_{33}) - 500(x_{11} + x_{12} + x_{13}) -\\ & - 300(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 200(x_{31} + x_{32} + x_{33}).\end{aligned}$$

3) Restricciones
a) Cantidad máxima que se puede utilizar de la materia prima en cada mezcla:

$$(x_{11} + x_{12} + x_{13}) \leq 3.500,$$
$$(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \leq 2.500,$$
$$(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \leq 1.500.$$

b) Limitaciones de la composición de las mezclas:

$$x_{11} \geq 0{,}3(x_{11} + x_{21} + x_{31}),$$
$$x_{31} \leq 0{,}5(x_{11} + x_{21} + x_{31}),$$
$$x_{12} \geq 0{,}15(x_{12} + x_{22} + x_{32}),$$
$$x_{22} \geq 0{,}2(x_{12} + x_{22} + x_{32}),$$
$$x_{13} \geq 0{,}05(x_{13} + x_{23} + x_{33}),$$
$$x_{23} \geq 0{,}2(x_{13} + x_{23} + x_{33}),$$
$$x_{33} \leq 0{,}7(x_{13} + x_{23} + x_{33}).$$

c) $x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j.$

5. Este problema de asignación horaria se puede resolver de la manera siguiente:
1) Definición de las variables
Sea x_i el número de vigilantes que empiezan a trabajar al inicio del periodo i.
2) Planteamiento
La jornada de un vigilante cubre dos periodos. Así pues, los vigilantes que cubren el intervalo 1 son los que han entrado a trabajar en este horario (x_1) y los que han entrado a trabajar en el inmediatamente anterior (x_6). Por lo tanto, el planteamiento matemático del problema es el que vemos a continuación:

$$[\text{MIN}]\ z = \sum_{i=1}^{6} x_i$$

s.a

$$x_1 + x_6 \geq 10,$$
$$x_1 + x_2 \geq 45,$$
$$x_2 + x_3 \geq 80,$$
$$x_3 + x_4 \geq 120,$$
$$x_4 + x_5 \geq 75,$$
$$x_5 + x_6 \geq 15,$$
$$x_i \geq 0.$$

6. Para resolver el problema de flujos planteado seguiremos los pasos siguientes:
1) Definición de las variables
Sea x_{ij} la cantidad que se envía desde i hasta j, donde $i, j \in \{A, B, 0, 1, 2, 3\}$.
Con respecto a las variables de este problema deberemos tener en cuenta las observaciones siguientes:
- Las variables se definen como la cantidad que sale, que será diferente de la que llega porque siempre se producen pérdidas.
- No habrá que definir una variable tipo x_A que signifique la cantidad producida en RA, dado que podemos obtener esta cantidad de la operación siguiente: $x_A = x_{A1} + x_{A0}$.

2) Función objetivo
La función objetivo asociada al planteamiento de este problema es la que presentamos a continuación:

$$[\text{MIN}]\ z = 18.000\,(x_{A1} + x_{A0}) + 21.000\,(x_{B0} + x_{B3}) + 13.000x_{A1} + 5.000x_{A0} + \\ + 7.000x_{B0} + 15.000x_{B3} + 7.000x_{01} + 5.000x_{02} + \\ + 6.000x_{03} + 3.000x_{21} + 4.000x_{23}.$$

3) Restricciones
Debemos tener en cuenta las restricciones que plantea el problema, y que se formalizan de la manera siguiente:
- Restricciones de producción de las refinerías:

$$\text{RA: } x_{A1} + x_{A0} \leq 1.600.$$
$$\text{RB: } x_{B0} + x_{B3} \leq 1.200.$$

- Entradas y salidas de los centros de distribución:

$$0\text{: } 0{,}98x_{A0} + 0{,}98x_{B0} = x_{01} + x_{02} + x_{03}.$$
$$\text{D1: } 0{,}9x_{A1} + 0{,}98x_{01} + 0{,}9x_{21} = 900.$$
$$\text{D2: } 0{,}98x_{02} - x_{21} - x_{23} = 400.$$
$$\text{D3: } 0{,}9x_{23} + 0{,}98x_{03} + 0{,}9x_{B3} = 1.000.$$

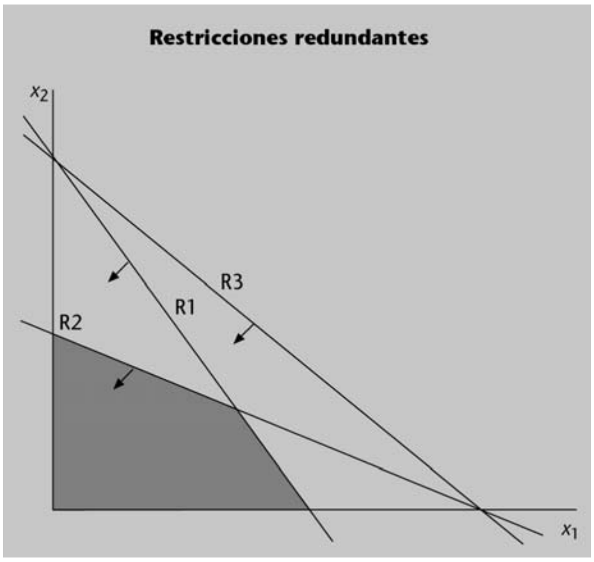
- Capacidades máximas de transporte:

$$x_{A0} \leq 1.500,$$
$$x_{A1} \leq 600,$$
$$x_{B0} \leq 1.000,$$
$$x_{B3} \leq 500,$$
$$x_{01} \leq 500,$$
$$x_{02} \leq 700,$$
$$x_{03} \leq 900,$$
$$x_{21} \leq 300,$$
$$x_{23} \leq 200.$$

- Además,

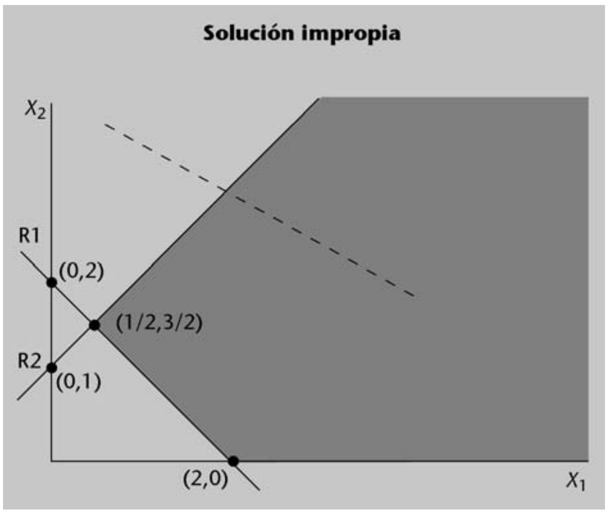
$$x_{ij} \geq 0.$$

7. La solución del problema con restricciones redundantes que hemos planteado se presenta en el gráfico siguiente:



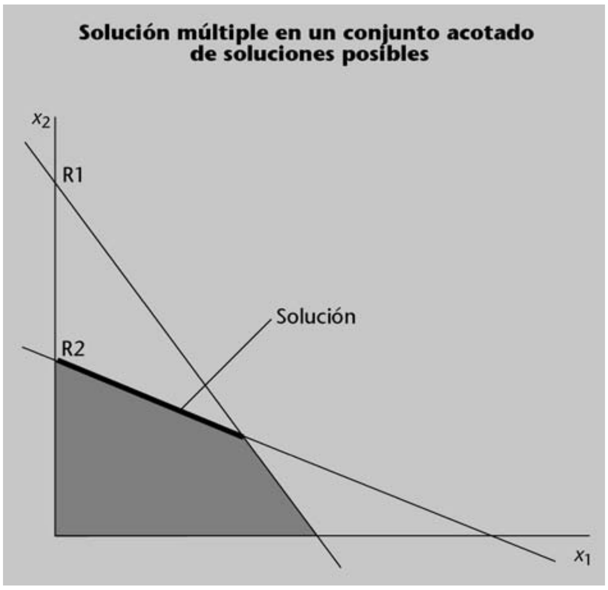
Como vemos en el gráfico, el hecho de añadir una restricción nueva de estas características no afecta al conjunto de soluciones posibles, de manera que la solución es la misma. Se trata de una restricción redundante, es decir, no afecta al problema. Analíticamente, lo podríamos ver mediante el rango de la matriz A: si Rang(A) < m (m = número de restricciones), entonces hay restricciones redundantes.
Notad que el hecho de añadir restricciones a un problema lineal afecta únicamente al conjunto de soluciones posibles: si el conjunto se queda igual, la solución no varía; si se reduce, la solución puede ser la misma (si el óptimo anterior continúa perteneciendo al conjunto de soluciones posibles), o una peor (menor si es MAX o mayor si es MIN) si éste ya no pertenece al conjunto.

8. En el gráfico que vemos a continuación podemos observar la solución del problema:



En este caso, si utilizamos el método de la línea isobeneficio vemos que a medida que esta línea se desplaza hacia arriba, mejora el valor de z y siempre hay algún punto del conjunto de soluciones posibles que toca a la recta, de manera que el valor más alto de z podrá ser el infinito. A este tipo de solución se le da el nombre de **solución impropia en sentido estricto** y se expresa únicamente indicando que el valor de z puede alcanzar el infinito: $z^* = +\infty$.
Como vemos en el gráfico, las soluciones impropias sólo se pueden dar en conjuntos de soluciones posibles no acotados. Sin embargo, hay que tener presente que si el conjunto de soluciones posibles es no acotado, eso no quiere decir que la solución sea necesariamente impropia, sino que podemos encontrar cualquier tipo de solución.

9. El caso que hemos planteado en el enunciado es un caso con solución múltiple en un conjunto de soluciones posibles acotado. En este caso, si utilizamos el método de la línea isobeneficio podemos ver en la figura siguiente que la tangencia no se produce en un vértice del conjunto de soluciones posibles, sino que tiene lugar en todo un lado, es decir, que hay dos vértices que son solución óptima del problema.

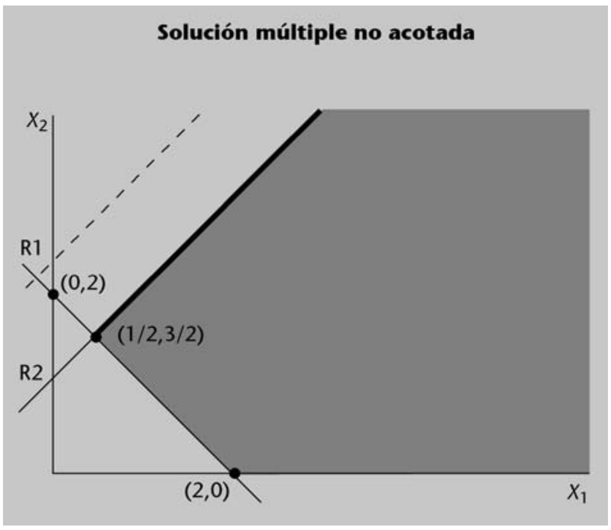


Este tipo de solución (cuando interviene en el mismo más de un vértice) recibe el nombre de **solución múltiple** y se expresa como la combinación lineal convexa de los vértices:

$$\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*)' = \lambda(0,2)' + (1 - \lambda)(15/7, 8/7)'; \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

con un valor de $z^* = 20$.
En este caso particular, el conjunto de soluciones óptimas es acotado (si el conjunto de soluciones posibles es acotado, el conjunto de soluciones óptimas, puesto que es subconjunto del primero, obviamente también será acotado), de manera que se trata de una solución múltiple acotada.

10. La solución de este caso se presenta en la figura siguiente:

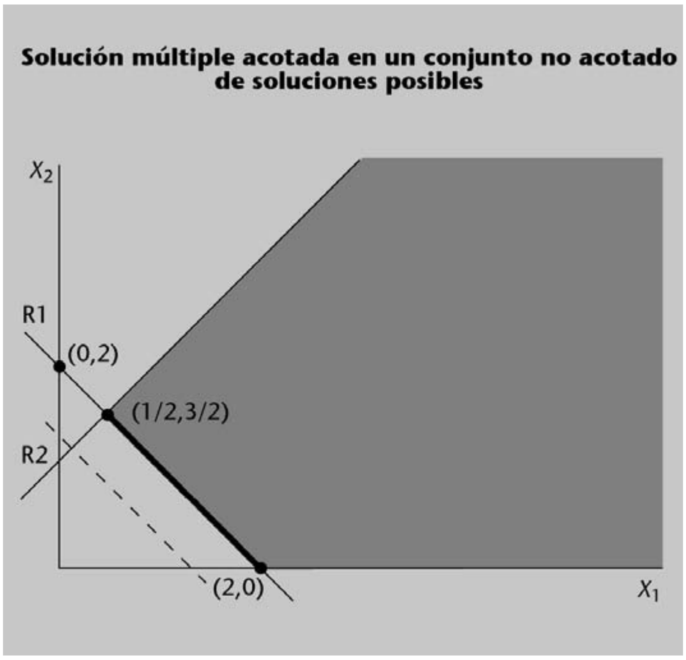


Esta solución es múltiple, igual que en el caso del ejercicio precedente, dado que hay múltiples combinaciones de las variables que alcanzan el valor óptimo de z ($z^* = 1$), pero el conjunto de soluciones óptimas es no acotado, y por lo tanto, las variables sí que pueden llegar a adoptar valores infinitos. Se trata de una **solución múltiple no acotada**.
Por este motivo, si utilizamos el método de los vértices, veremos que el mejor vértice es (1/2,3/2), pero tenemos que analizar qué sucede si nos desplazamos por la recta de la segunda restricción. Para hacerlo, tomamos un punto de esta recta, a la derecha del vértice (x1 > 1/2), por ejemplo el (2,3), y lo evaluamos en la función objetivo (z = 1), que es el mismo valor que el que proporciona el vértice (1/2,2/3). Por consiguiente, podemos concluir que son solución del problema todos los puntos siguientes:

$$\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*)' \text{ tal que } x_1^* \geq 1/2 \text{ y } x_2^* = x_1^* + 1,$$

con un valor de $z^* = 1$.

11. La solución del problema planteado en este ejercicio se muestra en la figura que vemos a continuación:



El hecho de que un conjunto de soluciones posibles sea abierto no excluye la posibilidad de tener una solución múltiple acotada, que es el caso que nos ocupa.
La solución serán los dos vértices implicados (2,0) y (1/2,3/2) o cualquier combinación lineal convexa de éstos:

$$\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*)' = \lambda(2,0)' + (1 - \lambda)(1/2,3/2)'; \; 0 \leq \lambda \leq 1,$$

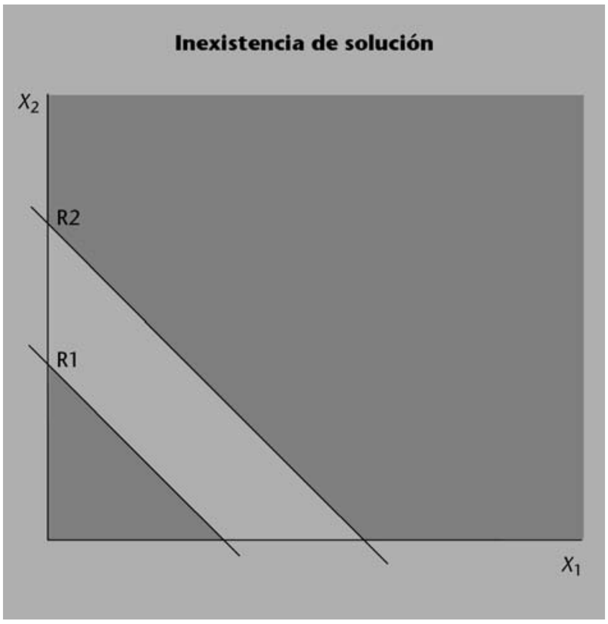
con un valor de $z^* = 4$.
Llegados a este punto, es conveniente puntualizar que para tener una solución múltiple no acotada es necesario que el conjunto de soluciones posibles sea no acotado, pero el hecho de que el conjunto de soluciones posibles sea no acotado no implica en absoluto que tengamos una solución múltiple no acotada, como podemos ver en este ejercicio.

Consultad la solución del ejercicio de autoevaluación 9.

Observad que...

... en los casos de solución múltiple (ejercicios 9, 10 y 11), la pendiente de la curva isobeneficio es igual a la pendiente de alguna de las restricciones.

12. El caso planteado en el enunciado de este ejercicio de autoevaluación es un caso de inexistencia de solución. La solución gráfica se muestra en la figura de la página siguiente.
En este caso, la intersección de las áreas definidas por las rectas está vacía. Por lo tanto, el conjunto de soluciones posibles está vacío, es decir, no hay ningún punto que cumpla las restricciones del problema. Por consiguiente, para el problema planteado no hay ninguna solución posible.
La inexistencia de soluciones puede estar provocada tanto por el hecho de que las restricciones son paralelas (y no están superpuestas) y generan regiones opuestas, que es el caso que nos ocupa, como porque aunque no sean paralelas, la intersección de las regiones se produce fuera del cuadrante positivo de $\mathbb{R}^2$, o porque la región definida por cualquiera de las restricciones se sitúa fuera de este cuadrante.



Bibliografía

Bibliografía básica

Ackoff, R. L. (1979). *El arte de resolver problemas*. México: Limusa.

Bazaraa, M.; Jarvis, J.; Sherali, H. (1990). *Linear Programming and Network Flows* (2.ª ed.). John Wiley & Sons. Hay traducción al castellano con la referencia siguiente: (1998). *Programación lineal y flujo de redes* (2.ª ed.). México: Limusa.

Hillier, F.; Lieberman, G. (2001). *Introducción a la investigación de operaciones* (7.ª ed.). México: McGraw-Hill.

Prawda, J. (1980). *Métodos y modelos de investigación de operaciones* (vol. I). México: Limusa.

Ríos Insua, S. (1996). *Investigación operativa* (3.ª ed.). Madrid: Centro de Estudios Ramón Areces.

Bibliografía complementaria

Balbas, A.; Gil, J. A. (1990). *Programación Matemática*. Madrid: AC.

Borrell, J. (1989). *Métodos matemáticos para la economía* (vol. II). Madrid: Pirámide.

Karmanov, V. (1989). *Mathematical Programming*. Moscú: Mir.

Luenberger, D. (1989). *Programación lineal y no lineal*, (traducción de la 2.ª edición en inglés). Argentina: Addison-Wesley.

Schrijver, A. (1986). *Theory of Linear and Integer Programming*. Chichester: John Wiley.