Las funciones de varias variables

Ricard Torres Bargalló

Ejercicios a cargo de
Margarida Corominas Bosch
Anna Espinal Berenguer

PID_00186449

Universitat Oberta de Catalunya

Índice

Introducción

Las funciones univariantes son una idealización conveniente de muchas situaciones, pero si queremos pensar en ejemplos de funciones que estén relacionadas con fenómenos económicos, estaremos tentados de ampliar este concepto de modo que incluya magnitudes que dependan de más de un factor.

Por ejemplo, si quisiéramos especificar una función que nos dijese cómo ha sido la demanda de coches en Europa durante un periodo determinado, diríamos que depende del precio de los coches, pero también de la existencia y del precio de otros productos sustitutorios, como el nivel de los ingresos familiares (los fabricantes de automóviles siempre se quejan de que, en épocas de crisis, los consumidores compran menos coches, y por ello estos fabricantes piden al gobierno que tome cartas en el asunto con acciones como por ejemplo el Plan Renove).

Nuestro objetivo en los apartados que aparecen a continuación es llegar a una definición formal de las funciones con múltiples variables y estudiar la extensión en este contexto más general de conceptos como la continuidad y la diferenciación, que son herramientas esenciales para el análisis de funciones univariantes.

En la primera parte damos unos cuantos ejemplos sencillos de funciones multivariantes, que más adelante usaremos en la presentación del material.

Objetivos

Los objetivos que podréis alcanzar en este módulo didáctico son:

1. Acercaros al concepto de funciones con varias variables.

2. Saber generar gráficas de funciones con programas informáticos.

3. Reconocer las curvas de nivel y las secciones verticales en gráficas de funciones.

4. Entender la extensión de los conceptos de continuidad y diferenciación para funciones multivariantes.

5. Conocer los conceptos de derivada parcial, derivada direccional, vector gradiente, plano tangente y matriz hessiana.

6. Utilizar la regla de la cadena para diferenciar funciones compuestas.

7. Diferenciar funciones definidas implícitamente.

1. Una primera aproximación a funciones multivariantes

A continuación introduciremos, mediante el uso de ejemplos, el concepto de funciones multivariantes y la relevancia que tiene para el estudiante de economía.

1.1. Ejemplos de funciones multivariantes

Después de entender el concepto de función univariante, generalizarla a múltiples variables no presenta problemas desde el punto de vista conceptual, pero introduce un grado más de complejidad; por ello, en este módulo desarrollaremos herramientas y conceptos que nos permitirán usar al máximo nuestros conocimientos sobre funciones univariantes, y de este modo comprender mejor las funciones con más de una variable.

Ejemplo 1.1. Consumo de la carne de bovino

La tabla siguiente (basada en datos de Estados Unidos) expresa el consumo de carne de bovino en libras a la semana por familia, en función del precio de la carne y teniendo en cuenta los ingresos anuales de la familia.

Nota

Estos datos han sido extraídos de la Introducción a la economía positiva de Richard G. Lipsey. Nosotros hemos consultado la tercera edición inglesa, publicada en 1971 por Weidenfield and Licolson en Londres, pero también existe la edición en castellano.

Observaréis que aquí seguiremos la convención anglosajona de separar con un punto la parte entera de la decimal. Por un lado, esto evita ambigüedades en la notación de funciones: si no fuera así, f(3,2) podría ser tanto una función univariante que tiene '3.2' como argumento, como una función de dos variables que tiene '3' y '2' como argumentos; en este texto siempre tendrá el segundo significado. También es conveniente que nos acostumbremos a usar esta notación si tenemos que trabajar con programas de ordenador como por ejemplo Gnuplot.

		Precio ($ por libra)			
		3.00	**3.50**	**4.00**	**4.50**
Ingresos anuales (Miles de libras)	20	2.65	2.59	2.51	2.43
	40	4.14	4.05	3.94	3.88
	60	5.11	5.00	4.97	4.84
	80	5.35	5.29	5.19	5.07
	100	5.79	5.77	5.60	5.53

Si denominamos i la variable ingresos anuales por familia, p la variable precio de la carne de bovino, y c quiere decir consumo semanal de carne de bovino, la tabla expresa c como función de i y de p. Si expresamos esta relación funcional con $c = f(i, p)$, tendremos que, por ejemplo, $f(60, 3.5) = 5$ y $f(80, 4) = 5.19$.

Ejemplo 1.2. Platalonia is a flattened nation

Platalonia es un país situado en una meseta considerable: no sólo es completamente plana, sino que forma un cuadrado perfecto que tiene exactamente 10 kilómetros de lado.

La localización geográfica en Platalonia está rigurosamente legislada, y se hace en relación con lo que se denomina la *platitud* y la *plongitud* de cada punto. La platitud de un punto es la distancia vertical a la base del cuadrado y la *plongitud,* la distancia horizontal al lado izquierdo del cuadrado, tal y como se indica en la gráfica adjunta.

Los habitantes de Platalonia son muy patrióticos, y lo que más les preocupa es saber la distancia que los separa de su capital en cada momento. La capital, Banonona, está situada "en la mitad exacta del plano", es decir, en el punto con *platitud* 5 y *plongitud* 5. La distancia que separa a un habitante de la capital, medida en kilómetros, podemos expresarla como una función D de la *plongitud*, x, y de la *platitud,* y, donde se encuentra el buen hombre en cuestión. Por ejemplo, tenemos que

$$D(0, 0) = D(10, 10) = \sqrt{50} \text{ ,y también } D(0, 5) = D(5,0) = 5.$$

Ejemplo 1.3. La función de producción Cobb-Douglas

El premio Nobel de economía Robert Solow, en un famoso artículo publicado en los años cincuenta, trató de describir la evolución de la capacidad productiva de Estados Unidos mediante el cálculo de una **función de producción** por el agregado de la economía norteamericana. Los argumentos de esta función son el capital (K) y el trabajo (L), y el valor de la función se correspondería con el producto interior bruto. La función de producción presenta la forma siguiente:

Robert Merton Solow

Economista norteamericano, autor de varios estudios sobre el crecimiento económico, por los cuales recibió el premio Nobel de economía en 1987.

$$F\,(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

donde K y L son las variables, y A y α son **parámetros** (es decir, cantidades fijas). La productividad relativa del factor capital frente al factor trabajo en un momento dado del tiempo viene determinada por el parámetro α, mientras que la variación del parámetro A a lo largo del tiempo adquiere un incremento en la productividad de la economía en su conjunto.

Nota

El artículo de Solow ha tenido una gran influencia en la teoría del crecimiento económico, una de las áreas más estudiadas por los economistas en los últimos años, y que ha centrado sus trabajos en tratar de entender qué es lo que determina el desarrollo económico de los países

Partiendo de los datos disponibles, Solow hizo un cálculo de los valores de los parámetros A y α a lo largo del tiempo, y su conclusión fue que α se mantiene básicamente constante, mientras que A crece con el tiempo y adquiere, de este modo, una mayor capacidad productiva de la economía en su conjunto a causa del avance tecnológico. Notamos que un aumento de A significa que, con las mismas cantidades de capital y trabajo, la economía obtiene una mayor cantidad de producto.

La función de producción postulada por Solow es del tipo Cobb-Douglas y es ampliamente usada en numerosos estudios, tanto teóricos como aplicados, en la economía.

Ejemplo 1.4. La media aritmética

Dados dos números cualesquiera x e y, su media aritmética es el número intermedio entre los dos, es decir:

$$\frac{x+y}{2}$$

En general, dados n números , $x_1, x_2 \dots x_n$, su media aritmética es el número

$$M(x_1, x_2 \dots x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

La media aritmética es, de este modo, una función $M(x_1, x_2 \dots x_n)$ de n variables.

Ejemplo 1.5. La media geométrica

Dados dos números positivos x e y, su media geométrica viene dada por

$$g(x, y) = \sqrt{xy}.$$

En general, dados n números positivos $x_1, x_2 \dots x_n$, su media geométrica se define como

$$G(x_1 x_2 \dots x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}$$

1.2. Algunas definiciones

Del mismo modo que una función de una variable es una regla que asigna un nuevo número a cada número de un cierto dominio, una función de dos variables tiene como dominio parejas de números, y asigna un nuevo número a cada pareja. En general, el dominio de una función con n variables ($n \geq 1$) está formado por vectores con n componentes, y la función asocia a cada vector un número real determinado.

Una función con n variables es una regla f que asocia a cada vector $(x_1,x_2...x_n)$ dentro de un cierto conjunto D un número real $f(x_1,x_2...x_n)$. El *dominio D* es un subconjunto de R^n, es decir, está formado por vectores con n componentes. Representaremos esta función escribiendo

$$f{:}D \to R \text{ o bien } D \xrightarrow{f} R$$

Cuando queramos indicar la acción de la función sobre un vector, escribiremos

$$(x_1,x_2\ldots x_n) \overset{f}{\mapsto} f(x_1,x_2\ldots x_n).$$

Recuerdas...

... cómo se define una función univariante? Repasad la información.

Por ejemplo, si representamos por M la función **media aritmética**, su dominio es $D = R^n$, y su acción sobre un vector de R^n es descrita por

$$(x_1,x_2\ldots x_n) \overset{\text{M}}{\mapsto} \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

Por otro lado, el dominio de la función **media geométrica** es el conjunto de vectores:

$$D = \{(x_1,x_2\ldots x_n) \in R^n{:}x_1 > 0,\, x_2 > 0\ldots x_n > 0\},$$

es decir, el conjunto de todos los vectores de dimensión n que tienen todos los componentes estrictamente positivos. Si representamos con G esta función, entonces podemos describirla con la siguiente expresión:

$$(x_1x_2\ldots x_n) \overset{b}{\mapsto} \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

1.3. Ejercicios

1.1. Este ejercicio se basa en el ejemplo 1.1., referente al consumo de carne de bovino.

a) Encontrad los valores de $f(20,3)$, $f(40, 3.5)$, $f(60,4)$ y $f(80, 4.5)$.

b) Suponed que trabajáis en el departamento de ventas de una empresa y que os acaban de dar esta tabla. El jefe os pregunta cuál será el consumo de cada uno de los 5 segmentos de ingresos, si el precio que ponen es de 3.75 dólares por libra. El jefe quiere cifras, no historias. ¿Qué le diréis?

c) Suponed que vuestro jefe tiene otra tabla que le indica exactamente cómo se distribuyen los ingresos familiares en vuestro *county*. Las familias con menos ingresos reciben 20 000 $ anuales, y las más ricas, 100 000 $ anuales. Sin embargo, también hay familias que ganan 27 512 $ al año y, de hecho, cualquier otro número comprendido entre 20 000 y 100 000 aparece dentro de la distribución. El jefe quiere un cálculo de lo que venderá la empresa si fija el precio en 4 $ por libra, y por ello necesita saber lo que consumirá cada grupo de ingresos. ¿Qué le diréis, ahora? (Sed tan precisos como podáis. Una gráfica os puede ayudar a encontrar la mejor solución. Es conveniente que os fijéis también en vuestra respuesta a la cuestión anterior.)

1.2. Este ejercicio se basa en el ejemplo 1.2., sobre el país de Platalonia.

a) Dibujad en el mapa los puntos con la plongitud y la platitud siguientes: (10, 5), (5, 10), (5, 6), (4, 4) y (7, 3), y encontrad la distancia que los separa de la capital.

b) ¿Cuál será la distancia a la capital de un punto que tenga la misma plongitud y platitud? Dibujad sobre el mapa todos los puntos que tienen esta propiedad.

c) Dado un número a tal que $0 \leq a \leq 10$, encontrad *D(a, a)*. Para $0 \leq a \leq 10$ definid la función de una variable *g (a) = D(a,a)* y dibujad su gráfica.

d) Encontrad la distancia a la capital de un punto que tiene por platitud el doble de su plongitud. Dibujad sobre el mapa todos los puntos que tienen esta propiedad.

e) Dado un número a tal que $0 \leq a \leq 5$, encontrad *D (a, 2a)*. (*Nota*: 2 a quiere decir 2 multiplicado por a.) Para $0 \leq a \leq 5$, definid la función de una variable *h(a)= D(a, 2a)* y dibujad su gráfica.

f) Encontrad la distancia a la capital de un punto cuya suma de la platitud y la plongitud sea igual a 10. Dibujad sobre el mapa todos los puntos que tienen esta propiedad.

g) Dado un número a tal que $0 \leq a \leq 10$, encontrad *D(a, 10 - a).* Para $0 \leq a \leq 10$ definid la función de una variable *j(a) = D(a, 10-a)* y dibujad su gráfica.

h) Dado un punto con una plongitud *x,* y platitud *y*, encontrad su distancia a la capital.

i)¿ A qué es igual *D(x,y)* para x e y cualesquiera?

1.3. Ahora utilizaremos Gnuplot para visualizar lo que hemos hecho en el ejercicio anterior. Entrad en el programa y definid la función D:

```
gnuplot > D(x,y) = sqrt ((x–5) **2 + (y-5) **2)
```

Las otras funciones de las que hemos hablado pueden ser definidas a partir de D; por ejemplo, la función g la definimos como

```
gnuplot > g(a)= D(a,a)
```

a)Introducid en el Gnuplot las definiciones de las funciones h y j, tal como lo acabamos de hacer con la función g.

Ahora podemos construir una gráfica de las funciones univariantes que hemos definido. Debemos tener cuidado con los dominios de definición, así como con el hecho de que la letra 'a' no es la variable ficticia por defecto en un plot

```
gnuplot > plot[ a = 0 : 10 ] g (a)
```

b)Usando la instrucción plot de Gnuplot, confeccionad la gráfica de las funciones *h* y *j*, procurando en cada caso especificar el dominio de definición.

Nota

Es importante remarcar aquí que las letras que usamos como variables en el momento de definir una función son ficticias. La función p(x)= x**2 - 2*x y la función q(s)= s**2 - 2*s son una y la misma función. Un programa de matemáticas bien diseñado, como por ejemplo Gnuplot, se adecua a esta convención.

c)La función *g* tiene tramos sospechosamente lineales. Desarrollad su expresión algebraica hasta encontrar la razón para ello.

d)Las gráficas de las funciones *g* y *j* se parecen mucho. Justificad que se trata de la misma función y explicad el porqué.

1.4. Dados dos números cualesquiera *a* y *b*, representad por m(a, b) su media aritmética.

a) Encontrad la media aritmética de cada uno de las siguientes pares de números: (1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7) y (1, 9).

b) Dado un número *x* cualquiera, encontrad la media aritmética de los números 1 y *x*. Definid la gráfica de la función de una variable $f(x) = m(1,x)$, representadla y determinad la derivada $f'(x)$.

c) Calculad la media aritmética de cada uno de los pares de números siguientes: (1, 3), (2, 6), (3, 9) y (4, 12).

d) Dado un número *x* cualquiera, calculad la media aritmética de los números *x* y *3x*. Definid la gráfica de la función de una variable $g(x) = m(x,3x)$, representadla y determinad su derivada $g'(x)$.

Dados tres números cualesquiera *a, b* y *c*, representaremos por n*(a, b, c)* su media aritmética.

e) Calculad la media aritmética de cada una de las ternas de números siguientes: (1, 0, 5), (1, 3, 5), (1, 6, 5) y (1, 9, 5).

f) Dado un número x cualquiera, calculad la media aritmética de los tres números 1, *x* y 5. Definid la gráfica de la función de una variable $h(x) = n(1, x, 5)$, representadla y determinad la derivada $h'(x)$.

g) Calculad la media aritmética de cada una de las ternas de números siguientes: (1, 2, 3), (2, 4, 6), (3, 6, 9) y (4, 8, 12).

h) Dado un número *x* cualquiera, calculad la media aritmética de los tres números: *x, 2x y 3x*. Definid la gráfica de la función de una variable $j(x)=n(x, 2x, 3x)$, representadla y determinad su derivada.

1.5. Dados dos números positivos *a* y *b*, representaremos por $g(a, b)$ la media geométrica.

a) Calculad la media geométrica de cada uno de los pares de números siguientes: (2, 2), (2, 8), (2, 18), (2, 32) y (2, 50).

b) Dado un número positivo x cualquiera, calculad la media aritmética de los números 2 y *x*. Definid la función de una variable $f(x)=g(2,x)$ y determinad la derivada $g'(x)$. Elaborad la gráfica de la función f y su derivada usando Gnuplot.

c) Calculad la media geométrica de cada uno de los pares de números siguientes: (2, 8), (3, 27), (4, 64) y (5, 125). Para hacer las operaciones, podéis usar cualquier calculadora, o mejor, el programa Gnuplot (con la instrucción print).

d) Dado un número *x* cualquiera, calculad la media geométrica de los números x y x^3. Definid la función de una variable $h(x) = g(x,\ x^3)$ y determinad la derivada $h'(x)$. Haced la gráfica de la función h y su derivada usando Gnuplot.

1.4. Solucionario

1.1.
a) $f(20, 3) = 2.65$, $f(40, 3.5) = 4.05$, $f(60, 4) = 4.97$ y $f(80, 4.5) = 5.07$.

b) Al no disponer de información más detallada, dado que 3.75 está situado exactamente en el punto intermedio entre 3.5 y 4, podemos interpolar también el consumo tomando los valores medios que corresponden a estos dos precios. Por ejemplo, usando Gnuplot haríamos:

```
gnuplot> m(x, y) = 0.5*x + 0.5*y

gnuplot> print m(2.59, 2.51)

print m(4.05, 3.94)

2.55

3.995

gnuplot> print m(5, 4.97) ;
print

m (5.29, 5.19)

4.985

5.24
```

```
gnuplot> print m(5.77, 5.6)

5.685
```

c) Lo que pretendemos ahora es aplicar la técnica de **interpolación lineal** del apartado anterior. En términos de una gráfica, esto se traduce en la unión con líneas rectas de los puntos que corresponden a los niveles de ingresos indicados en la tabla. Volveremos a utilizar **Gnuplot** para llevar a cabo esta tarea.

Por ejemplo...

... puede crearse con Notebook, desde Windows, o con Edit, desde DOS. También se puede hacer con Word y guardar el documento resultante como archivo de texto.

Empezaremos haciendo una gráfica de los datos que nos muestra la tabla cuando el precio es de 4$ por libra. Para ello, lo que necesitaremos es crear un archivo que contenga estos datos. Con un editor de textos crearemos un archivo que llamaremos "ing-cons.dat" y que contendrá los datos de ingresos frente a consumo cuando el precio está fijado en 4$ por libra:

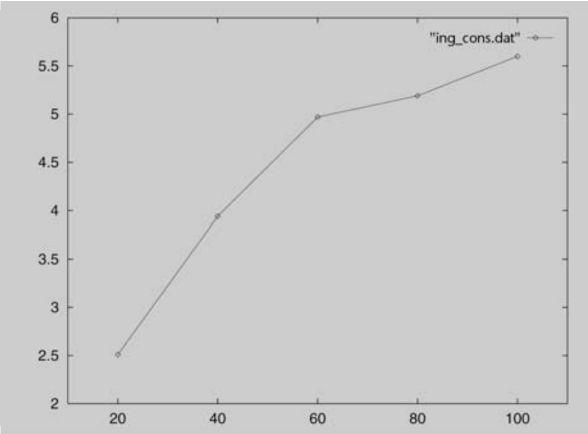
Más adelante...

... hablaremos con mucho más detalle sobre cómo se pueden generar gráficas de datos con Gnuplot.

```
20     2.51

40     3.94

60     4.97

80     5.19

100    5.60
```

A continuación, entramos en Gnuplot y creamos la gráfica de estos datos. Es necesario definir un poco de margen en los recorridos de las variables, para ver bien lo que hay.

```
gnuplot > plot [10:110] [2:6]"ing- cons.dat"
```



Esto nos muestra sólo los 5 puntos que corresponden a cada nivel de renta que aparecen en la tabla. Si queremos ver lo que correspondería a los niveles de renta intermedios, podemos pedir al programa que una los puntos adyacentes con líneas rectas.

```
gnuplot > plot [10:110] [2:6] “ing - cons.dat”withlinespoints
```

Ahora nuestro objetivo es encontrar la fórmula matemática que corresponde a esta gráfica, es decir, la fórmula que en cada nivel de renta entre 20 000 y 100 000 asocia el resultado de interpolar linealmente los valores del consumo en los dos puntos adyacentes.

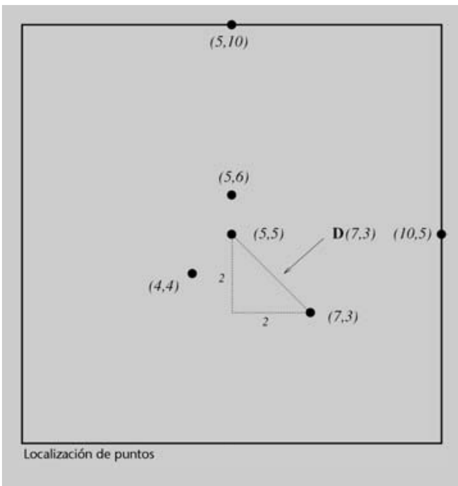
Por ejemplo, si tenemos un nivel de renta de 30 000, tendríamos que encontrar el punto medio entre 2.51 y 3.94; si el nivel de renta *i* está entre 20 000 y 40 000, pero no es el punto medio, entonces el nivel de consumo que asociaremos a éste será el que le corresponde proporcionalmente:

$$\frac{c-2.51}{i-20}=\frac{3.94-2{,}51}{40-20} \Rightarrow c= 2{,}51+(i-20)\frac{3.94-2{,}51}{40-20}$$

De este modo, obtenemos la función siguiente, que es la que corresponde a la gráfica que hemos visto con Gnuplot:

$$c(i)=\begin{cases} 2{,}51+(i-20)\dfrac{3.94-2{,}51}{40-20} & \text{si } 20 \le i \le 40 \\ 3{,}94+(i-40)\dfrac{4.97-3.94}{60-40} & \text{si } 40 \le i \le 60 \\ 4{,}97+(i-60)\dfrac{5{,}19-4{,}97}{80-60} & \text{si } 60 \le i \le 80 \\ 5{,}19+(i-20)\dfrac{5.60-5{,}19}{100-80} & \text{si } 80 \le i \le 100 \end{cases}$$

1.2. y **1.3.** Hemos reunido aquí las soluciones a los ejercicios 1.2. y 1.3., porque como veremos están muy relacionadas.



Para encontrar la distancia de un punto a la capital, tenemos que aplicar el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, en el mapa hemos indicado cómo se puede calcular la distancia del punto (7, 3) en la capital

$$D\ \ (7,3)= \sqrt{(7-5)^2+(5-3)^2}= \sqrt{8}$$

De este modo, encontramos que $D(10, 5) = 5$, $D\ (5, 10) = 5$, $D\ (5, 6) = 1$ y $D\ (4, 4) = \sqrt{2}$.

Observad que, en la función de distancia, no es necesario que nos preocupemos sobre si la plongitud es mayor que 5 o no, ya que al elevar la diferencia al cuadrado, el resultado es siempre el mismo:

$$(7-5)^2= (5-7)^2= 2^2 = 4 .$$

así, dado cualquier (x, y), la función de distancia es:

$$D(x,y) = \sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2} .$$

Usaremos Gnuplot para construir las gráficas, como se indica en el ejercicio 1.3. Primero definiremos las funciones:

```
gnuplot> D(x,y) = sqrt ( (x-5)**2 + (y-5)**2 )
gnuplot> g(a) = D(a,a)
gnuplot> h(a) = D(a, 2*a)
gnuplot> j(a) = D(a, 10-a)
```

A continuación, hacemos las gráficas. Notad que, dentro de la especificación del dominio de definición, también debemos indicar cuál es la letra con la que designamos nuestra variable ficticia (en este caso, una a), ya que el Gnuplot supone por defecto que usamos una x con este objetivo.

```
gnuplot> plot [a=0:10] g(a)
gnuplot> plot [a=0:5] h(a)
gnuplot> plot [a=0:10] j(a)
```

Para ver que la gráfica de g tiene tramos lineales, es necesario desarrollar la expresión algebraica de esta función.

$$g(a)= D(a,a)= \sqrt{(a-5)^2+(a-5)^2}= \sqrt{2(a-5)^2}=$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{(a-5)^2}= \sqrt{2}|a-5| .$$

Observamos que $\sqrt{(a-5)^2}= |a-5|$, ya que a puede tomar valores inferiores o superiores a 5. Cuando a < 5, tenemos el tramo lineal decreciente de la gráfica de g, y cuando a > 5 nos encontramos con el tramo lineal creciente.

También vemos que, de hecho, las funciones g y j son iguales, aunque las dos corresponden a puntos diferentes sobre el mapa. Si desarrollamos la expresión de j, encontramos:

$$f(a)= \sqrt{(a-5)^2+(10-a-5)^2}= \sqrt{(a-5)^2+(5-a)^2}=$$

$$= \sqrt{(a-5)^2+(a-5)^2}= g(a) .$$

Por lo tanto, no es casualidad el parecido entre las gráficas de las dos funciones.

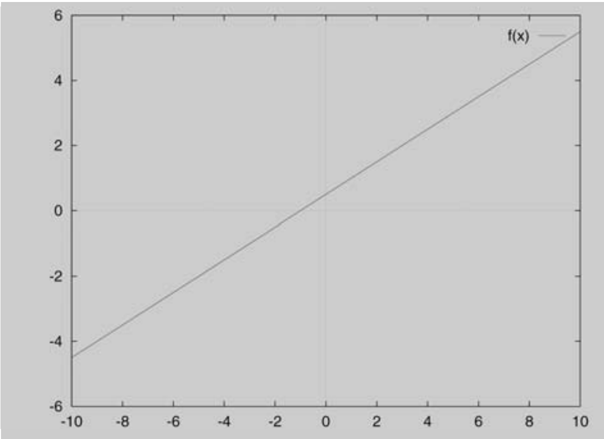
1.4.

a) Si definimos $m(x, y)= \frac{x+y}{2}$, entonces tenemos $m(1,1) = 1$, $m(1, 3) = 2$, $m\ (1, 5) = 3$, $m\ (1, 7) = 4$ y $m\ (1, 9) = 5$.

b) $f(x)= m(1, x)= \frac{1+x}{2}= \frac{1}{2}+\frac{x}{2}$ es una función lineal de x. Su derivada es, por lo tanto, una constante:

$$f'(x)= \frac{1}{2}$$

Para realizar la gráfica de la función, usaremos el programa Gnuplot. El dominio de la variable x es irrelevante, ya que sabemos que la función es lineal. Nosotros aquí tomamos el intervalo [–10, 10], pero habríamos podido tomar cualquier otro (o dejar que Gnuplot tomase el xrange que tiene por defecto).



Introducimos en Gnuplot las definiciones de las funciones

```
gnuplot> m(x, y) = (x+y)/ 2

gnuplot> f(x) = m(1,x)

gnuplot> plot [-10:10] f(x)
```

Notad nuevamente el hecho de que las letras que usamos para las variables son irrelevantes. Cuando definimos la función m, usamos la letra x para la primera variable, pero dentro de la definición de la función f, la x la hemos puesto como segunda variable de m.

c) $m(1, 3) = 2$, $m\ (2, 6) = 4$, $m(3, 9) = 6$ y $m(4, 12) = 8$.

e) $g(x)= m(x, 3x)= \frac{x+3x}{2}= \frac{4x}{2}= 2x$ es una función lineal de x. Su derivada es, por lo tanto, una constante:

$$g'(x) = 2.$$

Gnuplot nos presentará la gráfica de la función haciendo:

```
gnuplot> g(x) = m(x, 3*x)
gnuplot> plot [-10:10] g(x)
```

d)Dados tres números (x_1, x_2, x_3) , definiremos la media aritmética con el número:

$$n(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

por lo que tenemos,

$n(1, 0, 5) = 2$, $n(1, 3, 5) = 3$, $n(1, 6, 5) = 4$ y n $(1, 9, 5) = 5$.

f) $h(x) = m(1, x, 5) = \frac{1 + x + 5}{3} = \frac{6 + x}{3} = 2 + \frac{x}{3}$ es una función lineal de x. Su derivada es, por lo tanto, una constante

$$h'(x) = \frac{1}{3}.$$

Con Gnuplot definiremos la función y el programa nos presentará la gráfica haciendo:

```
gnuplot> n(x, y, z) = (x+y+z) /3
gnuplot> h(x)=n(1, x, 5)
gnuplot> plot [-10:10] h(x)
```

Reflexionemos

Si queremos ser un poco pedantes, diremos que es una función afín, que es el resultado de sumar una constante (en este caso 2) a una función lineal; las funciones lineales tienen la propiedad de que siempre valen 0 cuando las evaluamos en 0. (¿Sabríais decir por qué?)

g) $n(1, 2, 3) = 2$, $n(2, 4, 6) = 4$, $n(3, 6, 9) = 6$ y $n(4, 8, 12) = 8$.

h) $j(x) = n(x, 2x, 3x) = \frac{x + 2x + 3x}{3} = \frac{6x}{3} = 2x$ es una función lineal de x. Su derivada es, por lo tanto, una constante

$$j'(x) = 2.$$

Gnuplot nos presentará la gráfica de la función haciendo:

```
gnuplot> j(x)=n (x, 2*x, 3*x)
gnuplot> plot [-10:10] j(x)
```

1.5. Usamos Gnuplot para resolver este ejercicio. Entramos y empezamos definiendo la media geométrica:

```
gnuplot> g(x, y) = sqrt (x*y)
```

a)Para encontrar las medias geométricas hacemos:

```
gnuplot> print g(2, 2); print g(2, 8); print g(2, 18)

2.0
4.0
6.0

gnuplot>print g(2, 32); print g(2, 50)

8.0
10.0
```

a) $f(x) = g(2, x) = \sqrt{2x}$. Si repasamos un poco las reglas de derivación de raíces cuadradas y de funciones compuestas, veremos que la derivada de la función es:

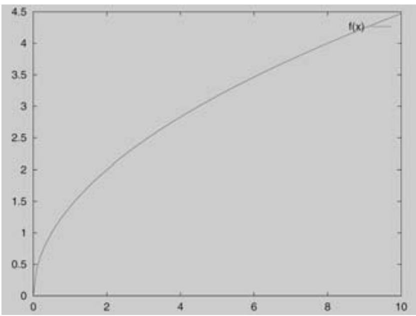
$$f(x) = \sqrt{2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

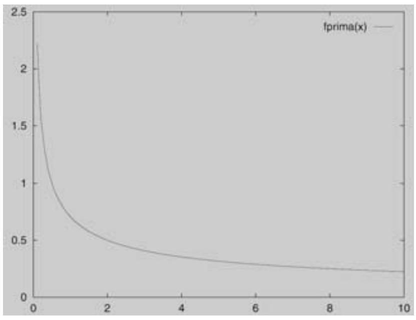
Introducimos todo esto en Gnuplot (recordemos que Gnuplot sabe construir gráficas y calcular los valores de las funciones, pero nosotros debemos hacer las derivadas).

```
gnuplot> f(x) = g(2, x)
gnuplot> fprima(x) = 1/sqrt(2*x)
```

Cuando hacemos las gráficas, debemos procurar especificar los dominios, ya que las funciones no están definidas por valores negativos de la variable x. Sin embargo, nos damos cuenta de que no representa ningún problema el hecho de que la función fprima no esté definida en uno de los extremos del intervalo que especificamos, en este caso cuando x = 0.

```
gnuplot> plot [0:10] f(x)
gnuplot> plot [0:10] fprima(x)
```





La media geométrica entre 2 y x y su derivada

1.5. Sumario

Los ejemplos que hemos presentado de funciones con múltiples variables ilustran el hecho de que en la práctica de la economía nos encontramos más bien con este tipo de funciones y no con las que son univariantes.

Los ejemplos nos tendrían que ayudar a entender el porqué de la definición formal de funciones multivariantes como funciones que asocian números reales a vectores de números reales.

2. Un viaje con Gnuplot por las funciones de dos variables

2.1. Presentación

Las funciones con múltiples variables son, en muchos aspectos, bastante más complicadas que las de una sola variable. Por ejemplo, para hacer la gráfica de una función f de una variable, tenemos suficiente con dos ejes cartesianos sobre los cuales dibujamos una serie de puntos con coordenadas $(x, f(x))$, que finalmente unimos con líneas. Pero si tenemos una función con dos variables, los puntos que tendríamos que dibujar tendrán tres coordenadas $(x, y, f(x, y))$, por lo que si quisiéramos representar esto con ejes cartesianos lo tendríamos que hacer en una gráfica tridimensional. Y, a menos que seamos Salvador Dalí, nos será muy difícil trabajar con gráficas de funciones con tres variables.

Salvador Dalí...

... dibujó el hipercubo, que sería la proyección en tres dimensiones de un cubo cuatridimensional. Y, por supuesto, el dibujo lo hizo sobre una tela bidimensional...

De todos modos, prácticamente todos los recursos que utilizamos para tratar funciones con varias variables no son más que generalizaciones inmediatas de los que empleamos cuando sólo hay dos variables.

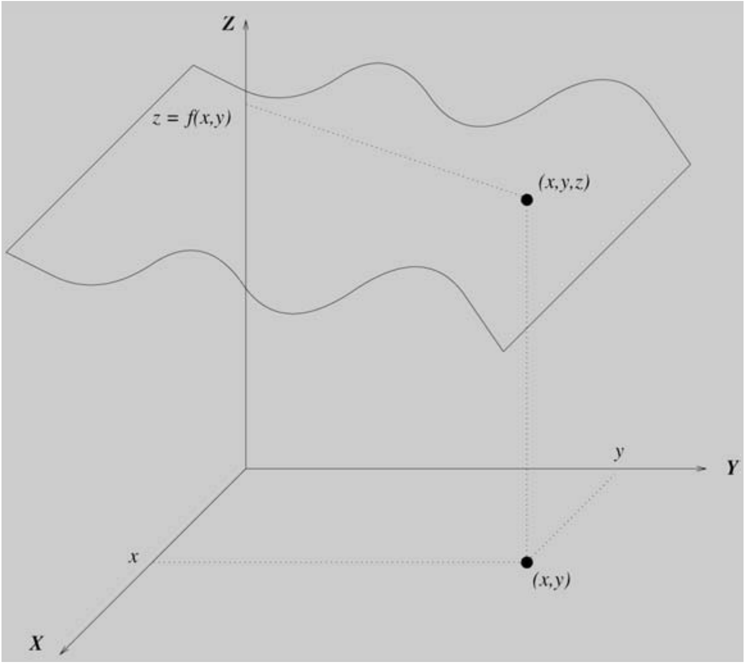
La gran ventaja de las funciones que sólo tienen dos variables es que las podemos representar gráficamente, plasmando en las dos dimensiones de una hoja de papel o de la pantalla de un ordenador la representación de su gráfica tridimensional. Y tampoco es necesario que seamos Salvador Dalí para hacerlo, porque otras personas se han preocupado de escribir programas de ordenador que lo hacen, e incluso hay quienes consideran que esto es un servicio a la sociedad y, por ello, han hecho programas disponibles de forma gratuita para todo el mundo, como ocurre en el caso de los autores de Gnuplot.

Nuestro objetivo...

... en este apartado es analizar con un cierto detalle las funciones de dos variables, sin fijarnos demasiado en los aspectos formales. En el apartado siguiente nos encargaremos de generalizar a varias variables lo que hacemos aquí, y presentaremos de modo formal las definiciones y los resultados.

2.2. Gráficas, montañas y pasteles

La gráfica de una función h de una sola variable es la representación de un conjunto de puntos de la forma (x, y), tales que $y = h(x)$. Cuando tenemos una función f de dos variables, la gráfica tiene que representar conjuntos de puntos de la forma (x, y, z), tales que $z= f(x, y)$. Por este motivo, para representar la gráfica de una función de dos variables necesitamos tres dimensiones. Para hacer la gráfica tridimensional, partimos de tres ejes perpendiculares entre sí: en los dos ejes horizontales representamos las variables, x e y, y en el eje vertical representamos los valores z que toma la función.



Hemos denominado los ejes con las letras **X**, **Y** y **Z**, respectivamente. A cada valor de las variables x e y le corresponde un punto (x, y) del plano que consta en la base. Finalmente, la función f asocia un valor $z = f(x, y)$ al punto (x, y). De este modo construimos el **grafo** de la función, que es esta especie de sábana que aparece.

Según apreciamos en la gráfica que acabamos de mostrar, parece que podemos imaginarnos el grafo de una función de dos variables como si se tratase de una sábana que está por encima (o por debajo, si la función toma valores negativos) del plano donde están los puntos (x, y). Otra manera útil de imaginarnos el grafo es como la superficie de una montaña, de modo que para describir el comportamiento de la función nos interesará saber si la pendiente es muy fuerte o no en una cierta dirección, y también dónde se encuentran las cimas y los valles. Una última forma, que nos resultará intuitiva para otros propósitos, como veremos más adelante, es considerar el grafo de la función como si se tratase de la superficie de un pastel que hemos colocado sobre el plano donde están las variables x e y (de ahora en adelante lo denominaremos **plano XY**).

Veamos ahora cómo podemos usar Gnuplot para generar las gráficas de las funciones de dos variables que hemos visto en algunos ejemplos de la sesión anterior.

Ejemplo 2.1. Consideremos la media geométrica de dos números positivos, definida como función de dos variables

$$g(x, y) = \sqrt{xy}$$

con dominio

$$D= \{(x, y) \in R^2 : x > 0 \;\; \text{e} \;\; y > 0\}$$

Entraremos en Gnuplot para hacer la gráfica de esta función. La instrucción de Gnuplot para hacer gráficas tridimensionales es splot (que viene de surface plot). Sus opciones son una extensión de las que aparecen para la instrucción plot.

Empezamos introduciendo la definición de la función

```
gnuplot>g(x,y) = sqrt(x*y)
```

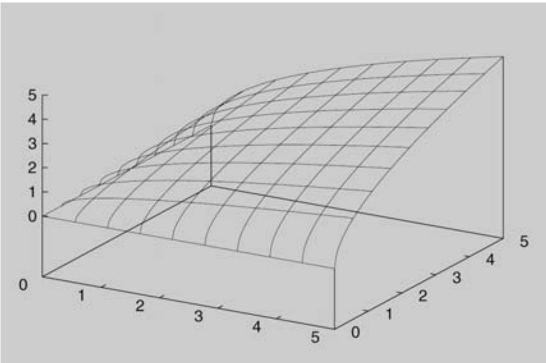
Tanto la variable x como la y sólo deben tomar valores estrictamente positivos, por lo que nos evitaremos problemas si lo indicamos de entrada

```
gnuplot> set xrange[0:5]; set yrange[0:5]
```

Para ordenar la gráfica, tenemos que hacer:

```
Gnuplot>splotg(x, y)
```

Y obtendremos el resultado que vemos aqui



Resultado...

... de un splot

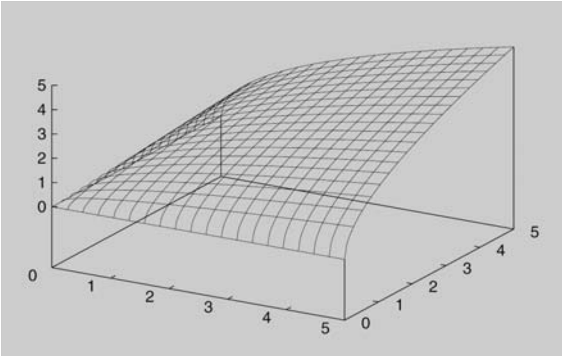
El **grafo** de la función correspondería al conjunto de todos los puntos (x, y, z) en los que $z = \mathbf{g}(x, y)$. En la gráfica que nos da Gnuplot, se trata de la superficie coloreada que parece un enrejado doblado. De hecho, las líneas que forman el enrejado (en las dos direcciones) son todo lo que el programa ha usado para representar la superficie. En el ámbito del programa Gnuplot, estas líneas reciben el nombre de *isosamples*. Por defecto, el programa calcula diez de éstas en cada dirección (las direcciones de la x y de la y). Si queremos que el programa calcule más líneas, podemos modificar el valor por defecto de este parámetro.

Nota

La gráfica aparecerá en color. siempre que no tengais un monitor de blanco y negro, claro!

Un splot...

... con más líneas

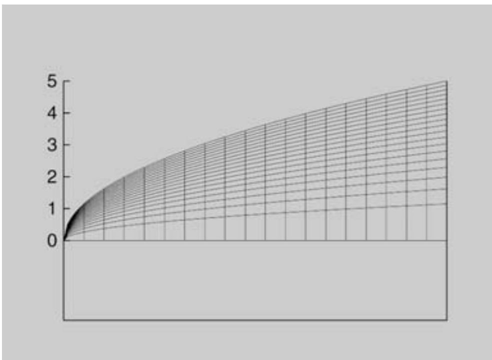


Indicando:

```
gnuplot> set isosamples 20

gnuplot> splot g(x,y)
```

tenemos veinte líneas en cada dirección. El enrejado es ahora más fino, pero el programa tarda más en mostrarnos la gráfica.

Fijémonos en que el programa nos muestra la gráfica tridimensional con una cierta perspectiva. Si queremos, podemos modificar esta perspectiva con la instrucción `set view`. Esta instrucción especifica dos ángulos, que sirven para girar la gráfica longitudinal y transversalmente. Por defecto, los ángulos que nos muestra son 60 y 30; si pidiésemos unos ángulos de 0 y 0, lo veríamos todo exactamente desde arriba, por lo que no podríamos determinar la forma del grafo en el espacio.



Un splot

... visto de lado.

Para ver la gráfica de lado, de modo que obtengamos una idea detallada de su subida, debemos llevar a cabo

```
gnuplot> set view 90,0
gnuplot> replot
```

Nota

También podemos usar set view para modificar las escalas. Introducid el comando `help set view` si queréis saber más sobre ello.

La instrucción replot, que acabamos de usar, la utilizamos cuando queremos continuar trabajando con una gráfica que ya hemos definido.

Replot

Para entender el porqué de la instrucción `replot`, veremos que **Gnuplot** construye las gráficas que le encargamos. Cuando damos una instrucción `plot` o `splot`, el programa calcula una serie de puntos de muestra (cuyo número nosotros podemos aumentar o disminuir usando las instrucciones `set samples` y `set isosamples`), y después une estos puntos mediante líneas, que son las que nos muestra y las que nos permiten hacernos una idea de cómo es la gráfica de la función. Si usamos replot, el programa utiliza los puntos de muestra que ya ha calculado; con otro `plot` o `splot` conseguiríamos que los volviese a calcular.

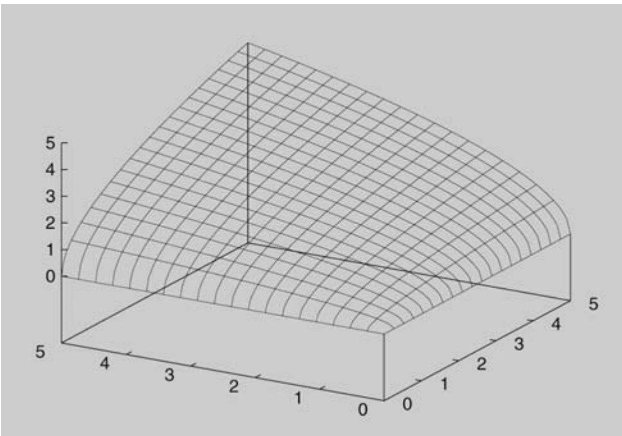
Otra forma de apreciar la subida que hace la gráfica es cambiando la perspectiva, de forma que lo veamos todo desde el origen de coordenadas. Para justificar esto debemos entender qué es lo que representan los dos números que escribimos cuando hacemos un `set view`:

– El primer número nos proporciona la perspectiva **vertical** de la gráfica. Cuando este número es 0, estamos mirando la gráfica exactamente desde arriba (por lo que no vemos qué forma tiene). Si en lugar de 0 consignamos el número 90, como antes, estaremos contemplando la gráfica exactamente desde el lado, de modo que veremos el plano que configuran todos los puntos de la forma (x, y) con una línea. Finalmente, si diésemos un valor de 180, veríamos la gráfica desde abajo (y tampoco podríamos distinguir su forma). El valor por defecto de este ángulo es de 60 grados, y le podemos dar cualquier valor entre 0 y 180 grados.

– El segundo número da la perspectiva **horizontal**. Imaginemos que el primer número está fijado en un cierto valor, por ejemplo 60 grados. Entonces, cambiando el segundo número entre 0 y 360 iríamos girando horizontalmente la gráfica. Cuando el ángulo es 0, tenemos el eje de las x justo delante, y el eje de las y lo vemos colapsado en un solo punto. Si vamos aumentando el ángulo, giramos también al mismo tiempo la figura en el sentido de las agujas del reloj. El valor por defecto es de 30 grados.

Mirándolo...

... desde el origen.



Queremos hacer girar la gráfica transversalmente y, por lo tanto, tenemos que hacer:

```
gnuplot> set view 60,300
gnuplot> replot
```

Ejercicio

2.1. Considerad la función

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - x^4 - y^4)e^{-x^2 - y^2}.$$

Para introducirla en Gnuplot, es necesario hacer:

```
gnuplot> f(x, y) = (x**2+y**2-x**4-y**4)*exp(-x**2-y**2)
```

Utilizad las instrucciones: `set xrange`, `set yrange`, `set isosamples` y `set view` para analizar a fondo la gráfica de esta función. En particular, id cambiando los ángulos usando `set view`, hasta que veáis exactamente cómo podéis conseguir la perspectiva que queréis con esta instrucción.

Nota

Este ejercicio no tiene ninguna solución, sino que lo que debéis hacer es jugar con las instrucciones de manipulación de gráficas hasta que os familiaricéis con éstas y apreciéis las posibilidades que ofrecen.

2.2.1. Superficies y curvas parametrizadas

La representación gráfica de funciones es una herramienta útil para visualizar en ésta numerosas propiedades. Una función de una sola variable, de la forma $y = f(x)$, da lugar a un conjunto de puntos de la forma (x, y), que, al unirlos, forman una curva dentro de un plano. Del mismo modo, una función de dos variables de la forma $z = f(x, y)$ da lugar a un conjunto de puntos de la forma $z = f(x, y)$, que cuando los unimos forman una superficie dentro de un espacio tridimensional. Sin embargo, también hay otra forma de generar curvas y superficies, que es lo que llamamos una **parametrización**.

Como la discusión de superficies parametrizadas puede parecer un poco compleja al principio, lo que haremos será empezar echando un vistazo al caso de dos dimensiones y después daremos el salto a las tres dimensiones.

2.2.2. Dos dimensiones

Cuando representamos una función como por ejemplo $y = f(x) = x^2$, estamos tratando con una función dada en forma **explícita**. Esto es así porque dado cualquier valor de x (siempre que esté dentro del dominio de la función), la función f es una regla que nos indica la altura que le corresponde.

Para representar una función explícita, Gnuplot selecciona unos cuantos puntos de muestra para los valores de x (por defecto selecciona 100), observa qué valor de y corresponde a cada punto de muestra y, finalmente, une todos los puntos (x, y). Lo que resulta de unir estos puntos, la gráfica de la función, es una curva dentro del plano XY.

Un tipo diferente de curva dentro del plano XY es lo que denominamos una **curva parametrizada**. En este caso, tanto la variable x como la y dependen de otra variable, t, que toma valores dentro de un cierto intervalo real.

Ejemplo 2.2. En la comarca de la Jungla, los estudios estadísticos han mostrado que el nivel de gastos de la gente en raquetas de tenis depende de su nivel de ingresos; cuando los ingresos son de t millones de pesetas anuales, el gasto anual en raquetas de tenis es de log(t) (donde log significa la función logarítmica). Por otro lado, el gasto telefónico de los habitantes también depende de sus ingresos, correspondiendo $\sqrt{t}$ de gasto a unos ingresos t, todo medido en millones de pesetas. Lo que querríamos es ver una gráfica de la relación que se establece entre el gasto en raquetas de tenis y el gasto telefónico.

Podemos conseguir este efecto de dos modos. Llamamos x el gasto en raquetas, y denominamos y el gasto en teléfono, medidos ambos en millones de pesetas. El primer modo consistiría en operar algebraicamente con la información que tenemos hasta obtener la relación de dependencia entre x e y. En este caso, haríamos:

$$x = \log(t) \Rightarrow t = e^x$$

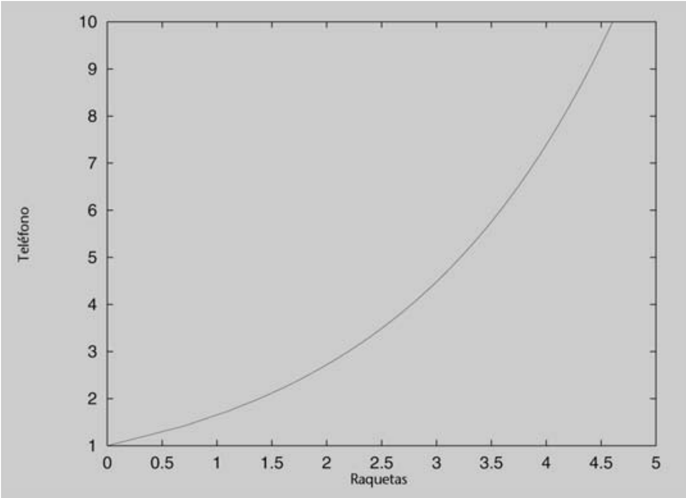
y, por lo tanto,

$$y = \sqrt{t} \text{ y } t = e^x \Rightarrow y = \sqrt{e^x} = e^{x/2}$$

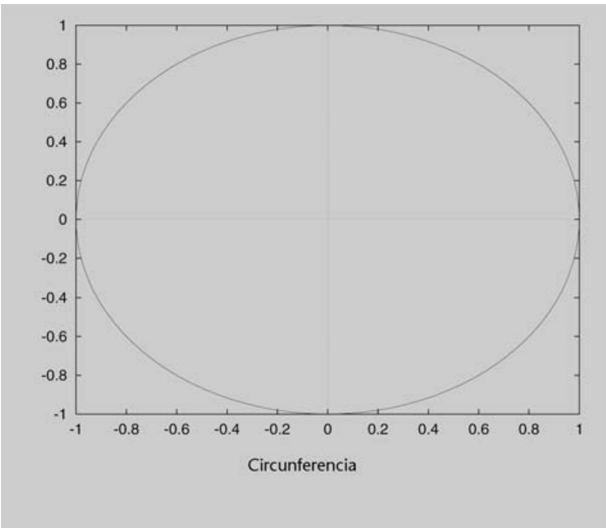
Después de hacer esto, ya podríamos representar la función que relaciona x e y.

Sin embargo, hay una forma mucho más sencilla de generar esta gráfica. Consiste en indicar al programa Gnuplot que en el eje de las x ponga los valores de log (t) y en el eje de las y ponga los valores de $\sqrt{t}$, y que después dibuje la curva que resulta de ello. Esto es lo que se denomina una **curva parametrizada**. En este caso, el **parámetro** es la variable t. Si suponemos que los ingresos varían entre 1y 100 millones de pesetas al año, el modo de conseguir que Gnuplot nos dibuje la curva parametrizada es:

```
gnuplot> set parametric

gnuplot> set xlabel "Raquetas"

gnuplot> set ylabel "Telefono"

gnuplot> plot [t=1:100] log(t), sqrt(t)
```



Como vemos, una curva parametrizada consiste en realidad en dos funciones, que en la gráfica aparecen una contra otra. Lo que conseguimos con esta operación, que puede parecer un poco artificiosa, es bastante importante. Recordemos que una función de la forma $y = f(x)$ es una relación que, para cada valor de x, da un valor, y sólo uno, a la variable y. Esto pone una limitación muy clara a las curvas que podemos obtener con el gráfico de una función. Por ejemplo, algo tan sencillo como una circunferencia no puede ser nunca la gráfica de una función, porque siempre hay valores de x a los cuales tendrían que corresponder dos valores de la variable y. En cambio, cualquier curva que dibujemos en el plano puede aparecer como el resultado de una parametrización.



Por ejemplo, si t está comprendida entre $-\pi$ y π, y hacemos $x = \text{sen}(t)$ e $y = \cos(t)$, obtendremos una circunferencia. En el ámbito de Gnuplot, esto lo escribiremos de la siguiente forma

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set trange [-pi:pi]
gnuplot> plot sin(t), cos(t)
```

Naturalmente, cualquier función, como por ejemplo $y = x^2$, también se puede representar como curva parametrizada si hacemos $x = t$ e $y = t^2$. Lo que exponemos a continuación son dos modos alternativos de obtener la misma gráfica:

```
gnuplot> set parametric

gnuplot> set trange [-1:1]

gnuplot> plot t, t**2

gnuplot> set noparametric

gnuplot> plot [-1:1] [0:1] x**2
```

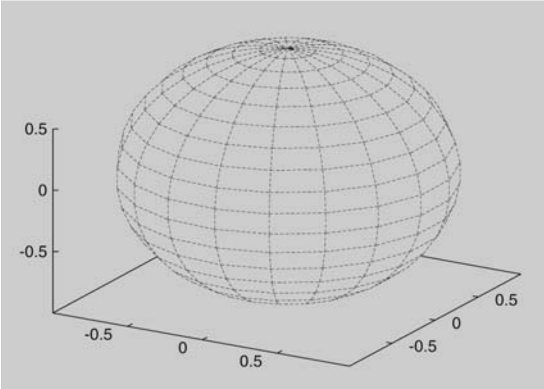
2.2.3. Tres dimensiones

Todo lo que hemos dicho antes para dos dimensiones se generaliza cuando consideramos más variables.

Una función explícita con dos variables tiene la forma $z = f(x, y)$, y hemos visto que la representación gráfica da lugar a una cierta superficie dentro de un espacio tridimensional, más o menos como una sábana deformada.

Una **superficie parametrizada** dentro de un espacio tridimensional tiene dos dimensiones (también podría ser algo así como una sábana a la que damos una cierta forma geométrica), y por ello depende de dos parámetros, que en Gnuplot se indican con las letras *u* y *v*. Por ejemplo, la esfera no se puede representar como la gráfica de una función explícita, pero la podemos obtener como superficie parametrizada haciendo:

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set urange [-pi:pi]
gnuplot> set vrange [0:pi]
gnuplot> set isosamples 20
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> splot cos(u)*sin(v),sin(u)*sin(v),cos(v)
```



Un ejemplo ilustrativo

No os preocupéis si las funciones trigonométricas os parecen un poco esotéricas; lo que hacemos aquí tiene un carácter meramente ilustrativo. De hecho, esta representación no sería demasiado difícil de justificar, pero esto nos desviaría un poco del tema y no vale la pena perder el tiempo en ello. Si veis la esfera muy aplanada, podéis cambiar su aspecto haciendo `set view ,,,2;` replot (podéis probar algún otro número entre 1 y 2). Finalmente, la instrucción `set hidden3d` permite que veamos la esfera como un cuerpo sólido no transparente; después de mirar la gráfica, podéis hacer

```
set nohidden3d; replot
```

y apreciaréis la diferencia

Las superficies parametrizadas son una entidad más compleja que las curvas parametrizadas; nosotros no las usaremos en este curso como un fin en sí mismas, sino que sólo nos servirán para entender la representación tridimensional de datos. Todo lo que necesitaremos entender con relación a representaciones parametrizadas es:

> en una curva definida en forma no paramétrica, nosotros damos los valores de la variable dependiente, pero no los de las variables independientes.

en cambio,

> en una curva definida en forma paramétrica, nosotros decimos cómo son todas las variables, tanto si se trata de la variable dependiente como de las variables independientes..

Recordemos que...

... cuando tenemos una función de la forma $y = f(x)$, decimos que x es la variable **independiente** e y es la variable **dependiente**, porque el valor de esta última viene determinado por la función después de dar a x un valor determinado.

2.3. Representación gráfica de datos

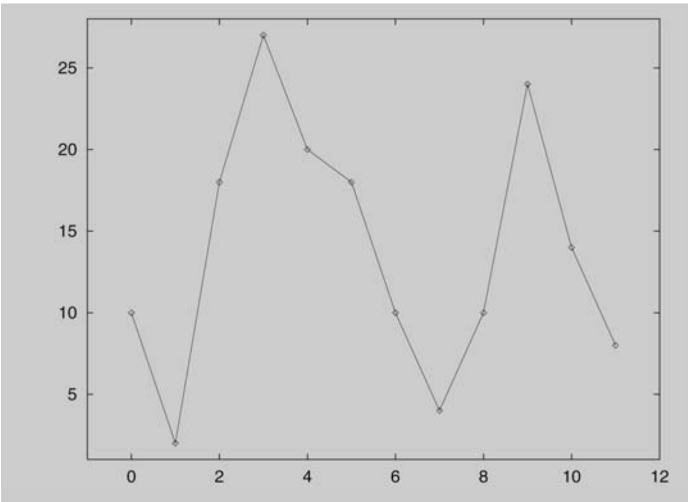
Hasta ahora hemos visto como usar Gnuplot para generar gráficas basándonos en funciones definidas analíticamente (es decir, mediante fórmulas). A continuación estudiaremos cómo se pueden generar las gráficas a partir de tablas de valores, es decir, a partir de series de datos. Ilustraremos con unos cuantos ejemplos las diferentes situaciones que se pueden presentar.

Ejemplo 2.3. Los datos siguientes representan la cantidad de lluvia caída en Sant Pedrós de Riussec en los doce meses del año 1995:

```
10
2
18
27
20
18
10
4
10
24
14
8
```

Si guardamos estos datos tal y como aquí aparecen en un archivo llamado `pedros.dat`, entonces los podemos visualizar con Gnuplot, haciendo

```
gnuplot>plot 'pedros.dat'
```



Nota

No escribáis el acento y os ahorraréis problemas.

Esto da lugar a puntos aislados, que tienen por coordenadas cada uno de los pares que tenía nuestro archivo de datos. Pero los puntos por sí mismos resultan difíciles de ver. Se ven mucho mejor si unimos los puntos con líneas y si, además, dejamos un poco de margen alrededor de los datos extremos:

```
gnuplot > plot [-1:12] [1:28] 'pedros.dat' w linesp
```

En las instrucciones anteriores hemos abreviado `with linespoints` escribiendo sólo `w linesp.` Muchas instrucciones de Gnuplot se pueden abreviar de una forma similar, siempre que no den lugar a ambigüedades.

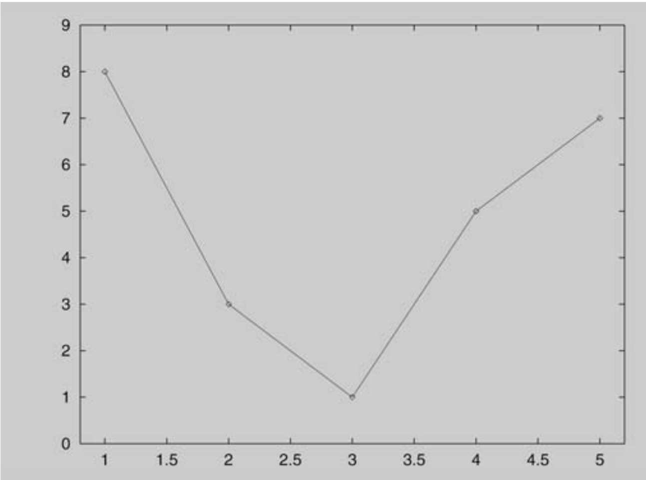
Fijémonos en que, dado que nuestro archivo sólo contiene una serie de valores, en la representación gráfica el programa ha asociado automáticamente el primer valor al 0, el segundo al 1, etc., lo cual está bien, porque nos da una idea suficientemente detallada de cómo evoluciona la lluvia a lo largo del año.

Ejemplo 2.4. Queremos representar los datos que tenemos a continuación:

1	8
2	3
3	1
4	5
5	7

Para ello, primero tendremos que crear un archivo con los datos y después darle un nombre adecuado, por ejemplo datos0.dat. A continuación hay que hacer:

```
gnuplot> plot [0.8:5.2] [0:9]'datos0.dat' w linesp
```



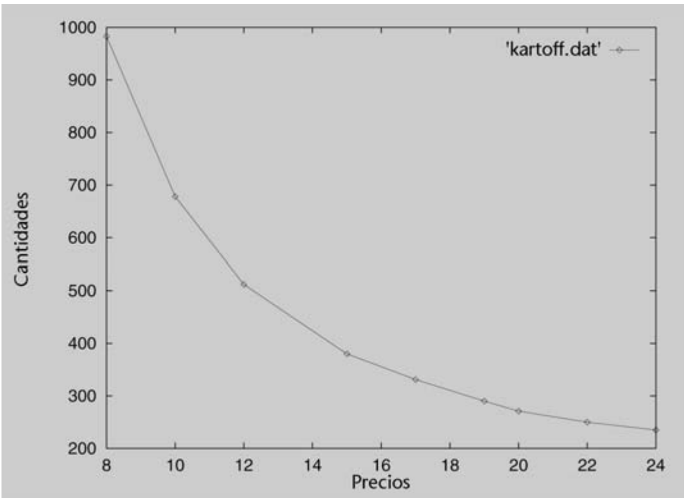
Más o menos, ya habíamos visto todos estos conceptos anteriormente, pero es importante remarcar un detalle. Si únicamente representamos puntos solos, la gráfica no cambia si alteramos el orden de los datos dentro del archivo; por ejemplo, poniendo la primera línea en último lugar. En cambio, cuando usamos la instrucción `with linespoints`, lo que hacemos es unir los puntos en el orden en que nosotros los hemos escrito en el archivo de datos. Por lo tanto, si ponemos la primera línea al final del archivo, la gráfica cambia completamente. (y ¡Hacedlo!)

Ejemplo 2.5. Consideremos ahora los datos siguientes, que corresponden a observaciones de cantidades y precios de intercambio en el mercado de lapatata de Kartoffelburg (la primera cifra corresponde al precio y la segunda, a la cantidad):

```
08   983
10   678
12   512
15   380
17   331
19   290
20   271
22   250
24   235
```

Para visualizar estos datos, nos irá bien una gráfica que tenga en uno de los ejes los precios y en el otro, las cantidades. Una gráfica como ésta representará una entidad bastante familiar para el economista: una curva de demanda. La curva de **demanda** expresa las cantidades compradas en tanto que función de los precios existentes. Cuando el economista ve unos datos como los que acabamos de representar, rápidamente los asocia a una relación de la forma $q = D(p)$, donde q representa las cantidades, p representa los precios y D es la **función de demanda,** que relaciona ambas magnitudes. Esta función de demanda se representa haciendo:

```
gnuplot> set xlabel "Precios"

gnuplot> set ylabel "Cantidades"

gnuplot> plot "kartoff.dat" w linesp
```

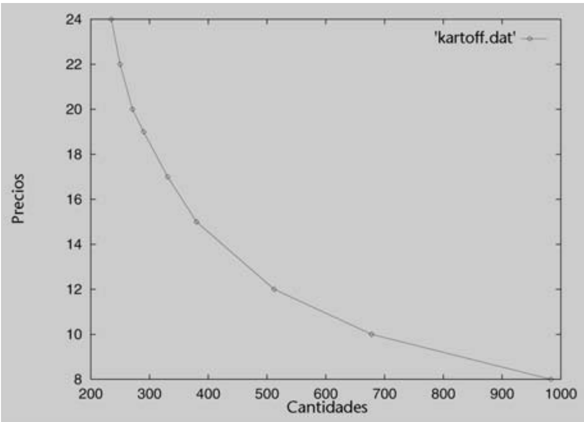


Observamos que, dado que la primera serie correspondía a los precios y la segunda, a las cantidades, la gráfica nos muestra los precios en el eje de las abscisas y las cantidades en el eje de ordenadas. Si os fijáis bien en vuestros textos de economía, veréis que los economistas suelen representar siempre los elementos con los ejes cambiados: precios en las ordenadas y cantidades en las abscisas. Esto no es así porque consideren que los precios dependen de las cantidades, sino por una tradición que se remonta a Alfred Marshall y que nadie se ha molestado en cambiar. Si quisiéramos representar los datos de Kartoffelburg siguiendo la tradición marshalliana, con Gnuplot no nos costaría demasiado.

Alfred Marshall

(Londres 1842-Cambridge 1924), economista inglés considerado uno de los fundadores de la escuela neoclásica, ha sido uno de los economistas más influyentes de todos los tiempos. Muchos de los elementos básicos del instrumental anaîltico del economista moderno, como por ejemplo el análisis de equilibrio parcial, son aportación suya.

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set xlabel "Cantidades"
gnuplot> set ylabel "Precios"
gnuplot> plot "kartoof.dat" using 2:1 w linesp
```



Con la instrucción `using 2:1`, hemos indicado a Gnuplot que construya una gráfica de la segunda serie contra la primera. Esta instrucción también sirve cuando tenemos más de dos series de datos. Por ejemplo, si tenemos un archivo con cinco series de datos y queremos representar la cuarta contra la segunda, lo haremos con una instrucción como por ejemplo:

```
gnuplot> plot "datos.dat" using 4:2 with linespoints
```

Ejemplo 2.6. Representación tridimensional de datos

Queremos representar los datos proporcionados para la tabla siguiente:

	10	**20**	**30**
1	11	21	31
2	8	14	20
3	19	29	30

Lo primero que debemos hacer es crear un archivo que contenga los datos, con una línea para cada correspondencia; por ejemplo, una línea tendría que decir que a 3 y 10 les corresponde 19. Esto lo haríamos escribiendo

```
3   10    19
```

Sólo debemos procurar dejar uno o más espacios en blanco entre cada dos números.

Sin embargo, la forma como escribimos las líneas dentro del archivo de datos puede ser muy importante, en este caso, para obtener la representación gráfica que deseamos. Sólo hay una excepción: si sólo queremos representar un punto para cada correspondencia, entonces no importa cómo introduzcamos los datos. En cambio, si queremos ver los datos interconectados mediante líneas, sí es importante el modo como los escribimos dentro del archivo. Tenemos que conseguir que Gnuplot dibuje una línea para cada columna y otra línea para cada una de las filas. Mirando las gráficas que hemos hecho hasta ahora, se puede observar que la combinación de líneas en las dos direcciones aparece en la superficie que vemos cuando representamos funciones de dos variables.

Hay más de una forma de leer los datos de una tabla como la que tenemos. Una de éstas consiste en empezar por la primera fila, leyendo sucesivamente las tres columnas que hay; después pasaríamos a la segunda fila, y así sucesivamente. Para entendernos, diremos que esto es leer los datos **por filas.** Para dar los datos así a Gnuplot, sólo tenemos que señalar el momento en que pasamos a una fila nueva, algo que hacemos dejando una línea en blanco. En nuestro ejemplo, crearíamos un archivo haciendo:

```
1   10   11
1   20   21
1   30   31

2   10    8
2   20   14
2   30   20

3   10   19
3   20   29
3   30   39
```

Llamamos este archivo `datos1.dat.` Para representar este archivo, debemos tener en cuenta cómo está estructurado Gnuplot. Cuando queremos hacer un splot con series de datos, disponemos de varias elecciones, según si queremos que alguno de los ejes sea seleccionado automáticamente (como en el ejemplo 2.3 de la lluvia en Sant Pedrós), o bien si queremos ser nosotros quienes lo especifiquemos. En el caso de una gráfica bidimensional, el programa puede inferirlo con facilidad: si sólo hay una serie, seleccionará el eje de las *X* automáticamente, y si hay dos, representará una contra otra.

En el caso de las gráficas tridimensionales, se dan más posibilidades de ambigüedad, por lo que los autores de Gnuplot han hecho que, si nosotros especificamos más de una de las variables, lo tengamos que señalar diciendo que se trata de una gráfica **paramétrica.** Hay que fijarse en el hecho de que esto es más bien un problema de comunicación entre el programa y el usuario, y no ninguna cuestión filosófica profunda que nos deba quitar el sueño. De este modo, para representar el archivo que hemos creado con Gnuplot, tendremos que hacer:

```
gnuplot> set parametric

gnuplot> splot ‘datos1.dat’ with linespoints
```

Gráficos no paramétricos

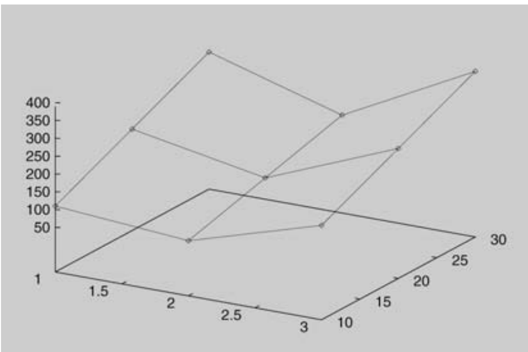
Para que apreciemos bien la diferencia, más adelante aparece un ejemplo de gráfico en tres dimensiones no **paramétrico**.

Mediante Gnuplot también podemos leer **por columnas** en lugar de hacerlo por filas. Para verlo, podemos crear un archivo llamado `datos2.dat,` con el siguiente contenido:

```
1   10 11
2   10  8
3   10 10

1   20 21
2   20 14
3   20 29

1   30 31
2   30 20
3   30 39
```

Ahora podéis comprobar que obtenemos la misma gráfica que antes si hacemos:

```
gnuplot> set parametric

gnuplot> splot “datos2.dat” with linespoints
```



Ejemplo 2.7. Datos cualitativos

Supongamos que estamos llevando a cabo un estudio estadístico, para lo que hemos agrupado a la población en dos tipos de categorías: inclinaciones políticas y aficiones deportivas. Hemos determinado para cada categoría la media de ingresos de la gente a la que hemos encuestado. Los resultados son los que presentamos a continuación, en los cuales, para mantener la confidencialidad, indicamos las diferentes categorías con letras (mayúsculas para los deportes, minúsculas para los partidos políticos).

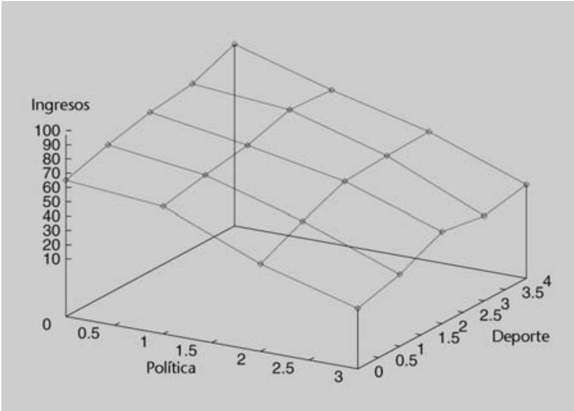
Para representar estos datos, creamos un archivo llamado politica.dat, con el contenido siguiente:

```
65
59
31
12

74
65
45
20

81
70
57
34

85
79
59
29

97
77
60
35
```

		Política			
		a	**b**	**c**	**d**
	A	65	59	31	12
Deporte	**B**	74	65	45	20
	C	81	70	57	34
	D	85	79	59	29
	E	97	77	60	35

Notemos que, con el carácter cualitativo de las categorías, para visualizar los datos nos interesará ahora usar una representación no paramétrica. De este modo, lo que hacemos es:

```
gnuplot> set noparam

gnuplot> splot 'politica.dat' w linesp
```



2.4. Vayamos por partes

Lo que hemos visto hasta ahora de las funciones de dos variables no se parece demasiado a lo que ya sabemos hacer con funciones de una sola variable. Lo que sí queda claro es que con dos variables las cosas se complican bastante más. Sin embargo, muchos de los aspectos que nos interesará saber sobre funciones de dos variables los podemos deducir de lo que sabemos de funciones univariantes. La estrategia es sencilla: si fijamos arbitrariamente el valor de una de las dos variables y dejamos que la otra vaya cambiando, habremos obtenido una función univariante. Para ver ejemplos de esto, es necesario que os fijéis en los ejercicios 1.2, 1.4 y 1.5.

Ejemplo 2.8. En el último ejercicio mencionado, definimos una función f(x) como el resultado de encontrar la media geométrica entre los números 2 y x:

$$g(x,y)= \sqrt{xy} \text{ y } f(x)= g(x,2)= \sqrt{2x}$$

Nos podríamos preguntar si esto nos sirve de algo. Una de las cosas que más interesan a los economistas es saber si una función tiene valores máximos o mínimos (pensemos en ganancias y en costes); pues bien, el ejemplo que estamos viendo nos permite hacer la inferencia de que la función g, la de dos variables, no tiene ningún valor máximo. Y el motivo es muy sencillo: la función f, que es la función g cuando fijamos el valor de una de las variables en 2, no tiene ningún valor máximo, ya que la raíz cuadrada de $2x$ crece sin límites cuando x aumenta.

Hagamos una inferencia negativa...

... en el sentido de que algo no puede suceder. De hecho, cuando estudiéis sistemáticamente cómo se pueden encontrar máximos y mínimos, veréis que el tipo de técnicas que usamos siempre se basan en inferencias negativas.

Antes hemos visto la gráfica de la función g, y en la resolución del ejercicio 1.5. construimos la gráfica de la función f. Nos podríamos preguntar cómo se relacionan las dos gráficas. Aquí nos será de una gran ayuda imaginarnos la gráfica de la función de dos variables *g* como un pastel. La función f resulta de fijar el valor de la variable *y* en 2. Así pues, según esta suposición, tomaremos un cuchillo matemático, haremos un corte en el pastel a lo largo de la recta dada por $y = 2$ y observaremos el perfil que queda a lo largo del corte que hemos hecho: este perfil corresponde exactamente a la gráfica de la función *f*.

Esto puede resultar un poco confuso si se explica con palabras; volveremos a hacer el proceso con Gnuplot, paso a paso. Empezamos introduciendo las definiciones y fijando el recorrido de las variables:

```
gnuplot> g(x, y) = sqrt(x*y)

gnuplot> f(x) = g(x,2)

gnuplot> set xrange [0:5]

gnuplot> set yrange [0:5]
```

Para visualizar el perfil que queda cuando cortamos la función a lo largo de $y = 2$, definimos una nueva función, que es sencillamente el resultado de descartar todo lo que hay para valores de *y* inferiores a 2:

```
gnuplot>h(x, y) = (y<2)?0: g(x,y)
```

Lo que acabamos de escribir significa que la función h vale 0 si $y<2$, y coincide con g cuando $y \geq 2$. Para resaltar más los perfiles, hacemos:

```
gnuplot> set isosamples 20
```

Ahora ya estamos listos para comprobar la afirmación que hemos hecho de que la gráfica de la función *f* coincide con el perfil que queda después de cortar la función *g* por $y = 2$.

```
gnuplot> plot f(x)

gnuplot> splot h(x,y)
```

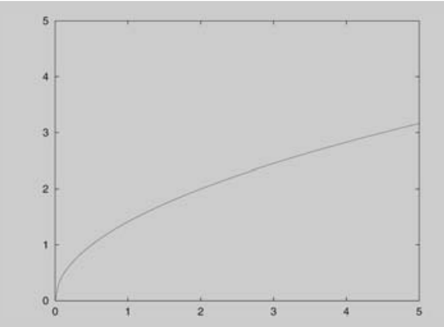


Gráfico de $\sqrt{2\omega}$

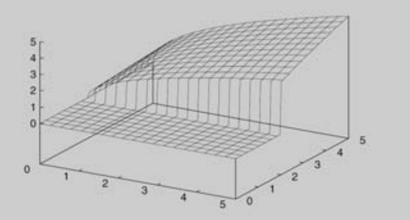


Gráfico de $\sqrt{\omega y}$ tallado a $y = 2$

Un corte como el que acabamos de hacer en la función g se denomina, en lenguaje formal, una **sección vertical**. Nosotros usaremos las secciones verticales, que no son más que funciones de una variable, para hacer inferencias en relación con la función de dos variables. Por ejemplo, antes ya hemos mencionado que el hecho de que exista una sección vertical que no tiene un valor máximo implica inmediatamente que la función de dos variables tampoco pueda tener ningún valor máximo. Las secciones verticales o, mejor dicho, sus derivadas, también tienen un papel fundamental en el cómputo de las derivadas de funciones de dos variables.

Cortes más sofisticados

En los ejemplos 1.2., 1.4. y 1.9. nos hemos encontrado con cortes más sofisticados que el que se obtiene cuando mantenemos fijo el valor de una de las variables.

Ejemplo 2.9. Recordemos que en Platalonia la distancia a la capital de un punto con coordenadas (x,y) es

$$D(x, y)= \sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}$$

En uno de los ejercicios se nos pedía computar la función de una variable

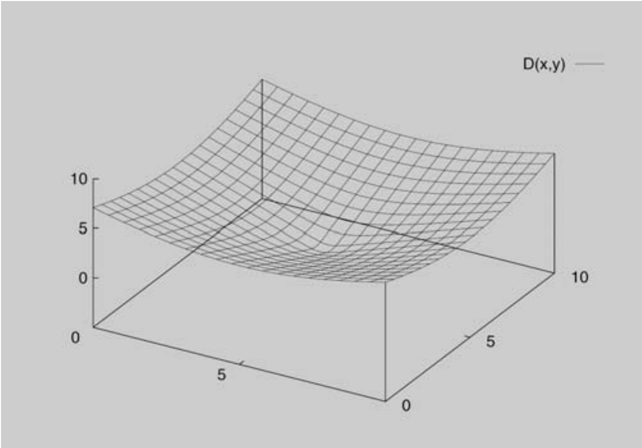
$$d(a)= D(a, a)= \sqrt{(a-5)^2+(a-5)^2}= \sqrt{2}|a-5|$$

Esta nueva función corresponde a una sección vertical a lo largo de la diagonal de Platalonia. Podemos apreciar todos estos aspectos usando Gnuplot.

Gráfico de...

... la distancia en Platalonia

```
gnuplot> set xrange [0:10]

gnuplot> set yrange [0:10]

gnuplot> set zrange [0:10]

gnuplot> set isosamples 20

gnuplot> D(x,y)= sqrt((x-5)**2+(y-5)**2)

gnuplot> d(x) = D(x,x)
```



Ante todo, construimos la gráfica D y notamos que estamos tratando con una función no lineal. Para ver mejor el gráfico hemos cambiado un poco su perspectiva:

```
gnuplot> set view 45
```

Finalmente, definimos la función que nos permitirá visualizar la sección vertical a lo largo de la diagonal, y hacemos las gráficas.

```
gnuplot> h(x,y) = (x>y) 0 : D(x,y)
gnuplot> plot d(x)
gnuplot> splot h(x,y)
```

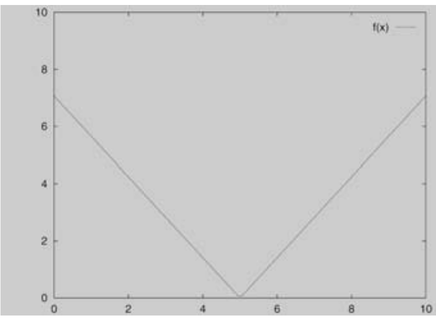
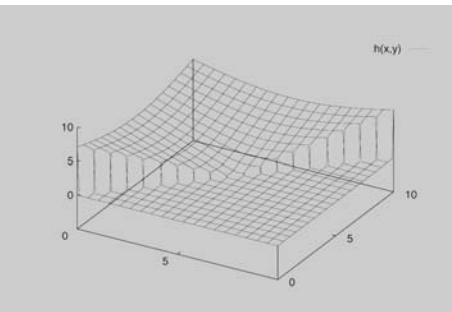


Gráfico $\sqrt{2}|x-5|$



Un tallo a lo largo de la diagonal

Para sistematizar la descripción de cualquier posible corte vertical que hagamos, resulta adecuado introducir un poco de lenguaje. Lo que nos interesa es expresar lo que sería una **dirección** determinada a partir de un punto cualquiera del dominio (es decir, de un punto del plano R^2). La idea puede parecer un poco artificiosa, pero en el fondo es muy sencilla; consiste en dos pasos:

1) En primer lugar, definimos lo que significa una **dirección desde el origen de coordenadas.** Lo tenemos que hacer de la forma más sencilla posible: cualquier vector nos señala una dirección desde el origen de coordenadas. Es conveniente que os fijéis en que, aquí, tanto el módulo del vector como su sentido son irrelevantes: la dirección viene dada por la recta que une el origen con el vector en cuestión y, por lo tanto, dos vectores cualesquiera situados sobre la misma recta que pasa por el origen motivan la misma dirección (es por ello que se suele definir la dirección tomando sólo vectores unitarios; nosotros aquí no lo haremos, para simplificar la exposición). Formalmente, dado un vector (a, b) del plano, la dirección desde el origen a este vector es la recta formada por todos aquellos (x, y) tales que $x = at$ e $y = bt$, por algún número real t.

2) En segundo término, definimos una dirección desde un vector cualquiera del plano, como la translación a este vector de una dirección desde el origen. Formalmente, si partimos de un vector $(x_0 y_0)$, la dirección del vector (a,b) es la recta formada por todos aquellos (x,y) tales que $x = x_0 + at$ e $\mathbf{y} = y_0 + bt$.

Notad que...

... t tiene que ser lo mismo para x y para y, porque de otro modo la cuestión no tiene ninguna gracia.

Todo esto puede parecer un poco confuso, y por lo tanto, lo ilustraremos con un ejemplo.

Ejemplo 2.10. Direcciones en el plano

Queremos ver en una gráfica la dirección desde el origen del vector (2,–3), y después la misma dirección, pero desde el vector (1,2).

Para dibujar con Gnuplot la dirección desde el origen del vector $(a, b) = (2,-3)$, debemos especificar la recta formada por todos los puntos (x, y) tales que, para algún número t, sean $x = 2t$ e $y = -3t$. Esto es precisamente lo que habíamos definido antes como una curva parametrizada dentro del plano. ¡Exacto! Hacer la gráfica de esta dirección es lo más sencillo del mundo para unos expertos en Gnuplot como somos nosotros.

Empezamos por decir que queremos una curva parametrizada y qué parte del plano queremos ver:

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set xrange [-5:5]
gnuplot> set yrange [-5:5]
```

Ahora haremos que Gnuplot marque todos los números enteros en los ejes:

```
gnuplot> set xtics -5, 1, 5
gnuplot> set ytics -5, 1, 5
```

La secuencia de instrucciones...

... es “límite inferior, incremento, límite superior”, para cada eje.

Primero haremos que nos dibuje el vector (2, –3). Le indicaremos que no nos ponga señales, ya que ya sabemos de qué va el asunto.

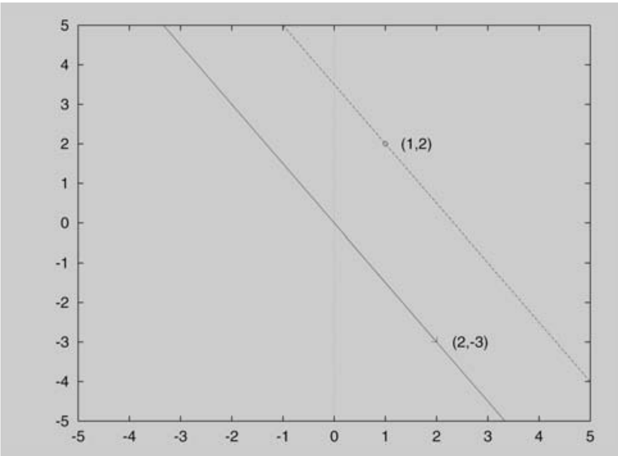
```
gnuplot> set nokey
gnuplot> set arrow to 2,-3
gnuplot> plot 2,-3
```

Bien, ahora ya podemos dibujar la recta que marca la dirección desde el origen dada por el vector (2, –3).

```
gnuplot> plot2*t,-3*t
```

Para ver la misma dirección, pero desde el vector (1,2), lo que haremos será dibujar en la propia gráfica la recta paramétrica de $x = 1 + 2t$ e $y = 2 - 3t$, además de la recta que ya habíamos dibujado. También pondremos un punto sobre el vector (1,2) y una indicación en cada uno de los dos vectores. Observad que, si una línea es demasiado larga, siempre la podemos cortar e indicar a Gnuplot que todavía no hemos acabado poniendo una \ al final de la línea:

```
gnuplot> set label "(1,2)" at 1.3,2

gnuplot> set label "(2,-3)" at 2.3, -3

gnuplot> plot 2*t, -3*t,\

> 1+2*t, 2-3*t,\

> 1, 2 with points
```



Esta es la gráfica que se obtiene finalmente. Fijaos en que la dirección desde el vector (1,2) es un desplazamiento paralelo de la dirección desde el origen.

Gráfico

Direcciones en el plano

Una pequeña observación antes de concluir el ejemplo. Cuando hemos estado indicando a Gnuplot que realice una gran cantidad de acciones que lo desvían de su comportamiento habitual (modo paramétrico, flechas, letras en el medio del gráfico, etc.), resulta adecuado acabar volviéndole a poner todos sus valores por defecto, si es que queremos continuar trabajando con el programa. En este caso, haríamos

```
gnuplot> set noparam
gnuplot> set noxtics; set xtics
gnuplot> set noytics; set ytics
gnuplot> set noarrow
gnuplot> set nolabel
gnuplot> set autoscale
gnuplot> set view 60,30,1,1
```

Si alguna vez...

... os habéis encontrado cosas raras en Gnuplot, las instrucciones anteriores vuelven a ponerlo (prácticamente) todo tal como está cuando se pone en marcha el programa.

Después de saber cómo se trabaja con direcciones en el plano, podemos definir cualquier tipo de corte vertical en una función con dos variables.

Ejemplo 2.11. Sea $f(x,y) = 50 - x^2 - y^2$. Para definir un corte vertical cualquiera, tenemos suficiente con señalar:

– un punto por donde debe pasar el corte, por ejemplo, el punto (1,2);

– la dirección del corte, por ejemplo, la del vector (2,–3).

Formalmente, la función que resultaría de este corte es la función univariante:

$$g(t) = f(1+2t, -3t) = 3-(1+2t)^2 - (2-3t)^2$$

Nosotros dejaremos que sea Gnuplot quien efectúe los cómputos:

```
gnuplot> f(x,y) = 3 -x**2 -y**2

gnuplot> g(t) = f(1+2*t, 2-3*t)
```

Para hacer la gráfica de la función univariante (el corte) podemos hacer (valores de t entre –1 y 2 dan como resultado que x e y se sitúen entre –5 y 5):

```
gnuplot> plot[t=-1:2]g(t)
```

Para ver el corte en la gráfica tridimensional, debemos actuar como en los ejemplos anteriores: definir el valor de la función como cero en uno de los lados. Y para hacer esto es necesario expresar la recta que nos da la dirección en forma de ecuación, en lugar de hacerlo en forma paramétrica como la teníamos hasta ahora. Observamos que:

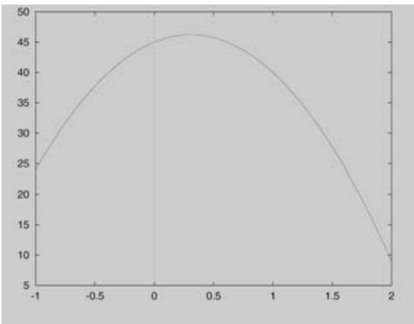
$$x = 1 + 2t \rightarrow t = \frac{x-1}{2}$$

Por lo tanto,

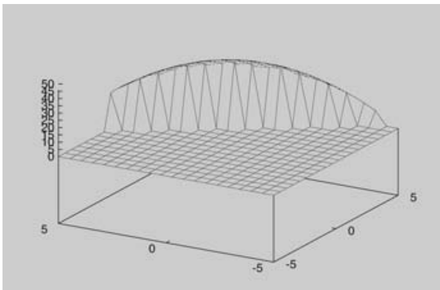
$$y = 2 - 3t = \frac{-3x+7}{2} \rightarrow 3x + 2y = 7$$

Bien, ahora ya podemos definir la función *f* cortada a lo largo de la recta que nos interesa. También indicamos los otros parámetros, para que se entienda bien.

```
gnuplot> h(x,y) = (3*x+2*y<7) ø 0 : f(x, y)
gnuplot> set isosamples 20
gnuplot> set view 60,300
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> splot [-5:5] [-5:5] h(x, y)
```



Tallo en dos dimensiones



Tallo en tres dimensiones

Los cortes o las secciones verticales son los que más nos interesarán en el futuro. Si quisiéramos complicar las cosas, podríamos definir cortes todavía más sofisticados; por ejemplo, el que resultaría de definir, a partir de una función f de dos variables, la función univariante $u(t) = f(t^2, t^3)$, y otras por el estilo. Nosotros lo ignoraremos, pero es bueno mencionarlo para que os deis cuenta de que es posible definir cortes (es decir, funciones univariantes) de muchas clases a partir de una función de dos variables.

2.5. Mapas de alturas y curvas de nivel

Los aficionados al excursionismo posiblemente están familiarizados con **mapas topográficos**, que son mapas con indicación de las alturas de los puntos mediante una serie de curvas que conectan puntos que se encuentran en la misma altitud. Estas curvas reciben el nombre de **curvas de nivel**, porque repasando una es posible mantenerse en el mismo nivel. Hemos visto que una de las formas posibles de imaginar la gráfica de una función de dos variables es como si se tratase de una montaña (o más bien, de una región con accidentes geográficos: montañas y valles). De este modo, no debe extrañarnos que el recurso de las curvas de nivel empleado en los mapas topográficos también nos sirva a nosotros para simplificar la representación de funciones de dos variables.

Observamos que las curvas de nivel no las representamos en tres dimensiones, sino en dos. Las curvas de nivel son precisamente un modo de tener información sobre la tercera dimensión (la altitud) sin necesidad de dibujarla.

Para determinar una curva de nivel, debemos fijar una cierta altitud, es decir, un cierto valor de la z, y entonces unir todos los puntos (x, y) que tienen la propiedad de que $f(x, y) = z$.

Ejemplo 2.12. Sea $g(x, y) = \sqrt{xy}$ la media geométrica de los números x e y. La curva de nivel 4 está formada por todos aquellos pares (x, y) cuya media geométrica es 4. Por ejemplo (4, 4), (2, 8) y (8, 2) están todos sobre esta curva de nivel.

Veamos cómo podemos usar Gnuplot para hacer gráficas de curvas de nivel. Normalmente, este programa dibuja las curvas de nivel en la misma gráfica tridimensional.

Empezamos introduciendo los datos y preparándolos:

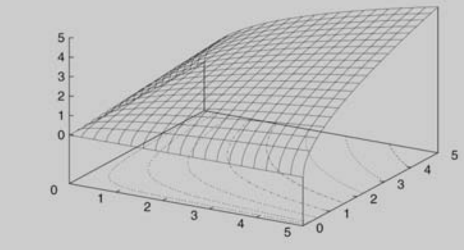
```
gnuplot> set isosamples 20

gnuplot> set autoscale

gnuplot> g(x,y) = sqrt(x*y)
```

Lo que permite dibujar las curvas de nivel es la instrucción

```
gnuplot> setcontour
```

Ahora pedimos que nos dibuje ocho curvas de nivel

```
gnuplot> set cntrparam levels auto8
```



$\sqrt{xy}$ con curvas de nivel

Ahora podemos apreciar que al hacer:

```
gnuplot> splot g(x,y)
```

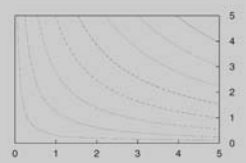
la gráfica que resulta presenta las curvas de nivel dibujadas sobre el plano XY

Normalmente, los mapas de curvas de nivel no se dibujan dentro de una gráfica tridimensional como el que aparece aquí, sino que se representan en una gráfica bidimensional. Para obligar a Gnuplot a realizar esta acción debemos usar un poco de "fuerza bruta". Primero tenemos que poner la perspectiva justo en perpendicular sobre la gráfica:

```
gnuplot> set view 0,0
```

A continuación indicamos que no muestre nada de la gráfica:

```
gnuplot> set nosurface
```



Curvas de nivel de $\sqrt{xy}$.

Curvas de nivel $\sqrt{xy}$

Finalmente ya podemos ver el mapa de curvas de nivel, todas sobre el plano
`gnplot > replot`

Ejemplo 2.13. Consideremos ahora la función $f(x,y)= (x^2+y^2)$ La curva de nivel 4 está formada por todos aquellos pares (x,y) que cumplen

$$f(x,y)= x^2+y^2= 4$$

Tal vez algunos de vosotros habéis visto anteriormente que la ecuación describe la circunferencia de radio $2 = \sqrt{4}$ centrada en el origen de coordenadas. En cualquier caso, nosotros no tenemos que preocuparnos de ello, ya que Gnuplot nos mostrará la gráfica de las curvas de nivel:

```
gnuplot> f(x,y)= x**2+y**2
gnuplot> set contour
```

Ahora debemos especificar exactamente que queremos las curvas que corresponden a los niveles 4, 16, 32, 64 y 128:

```
gnuplot> set xrange [-10:10]
gnuplot> set yrange [-10:10]
gnuplot> set cntrparam levels discrete 4, 16, 32, 64, 128
```

Para obtener la gráfica de la función en tres dimensiones, hacemos:

```
gnuplot> set view 60,30
gnuplot> set surface
gnuplot> splot f(x, y)
```

La gráfica con las curvas de nivel solas sale de:

```
gnuplot> set view 0,0
gnuplot> set nosurface
gnuplot> replot
```

Y, de este modo, obtendremos el resultado que presentamos a continuación:

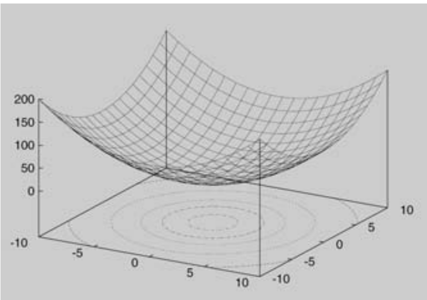
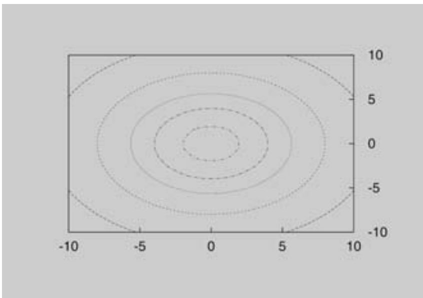


Gráfico de $\omega^2 + y^2$



Curvas de nivel $\omega^2 + y^2$

2.6. Derivemos, pero sólo parcialmente

Cuando se estudian las funciones univariantes, se pasa una gran parte del tiempo hablando de la derivación. Recordemos que la derivada de una función univariante en un punto x_0, se define como el límite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

que también se puede escribir como

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En la última expresión, h significa el incremento de la variable x. Si indicamos con y los valores que toma la función, es decir, si hacemos $y = f(x)$, entonces el incremento de la variable y en el punto $y_0 = f(x_0)$ viene dado por $\Delta y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0)$, y el incremento de la variable x es $\Delta x_0 = h$, por lo que vemos que la derivada es el límite del cociente Fórmula $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$ entre el incremento de la función y el incremento de la variable.

Sin embargo, con dos variables nos encontramos, de entrada, con el hecho de que no tiene por qué haber un solo incremento para las dos, sino que puede haber uno para cada variable. En este caso, ¿cuál de los dos incrementos debemos indicar en el cociente? De entrada, la cuestión no parece obvia, y más si tenemos en cuenta que la importancia de la derivada en el cálculo univariante viene dada por el papel que tiene en tanto que aproximación a la función alrededor del punto en cuestión.

Antes de aventurarnos en terrenos nuevos, lo que haremos será intentar extraer el máximo partido de todo lo que ya conocemos. Supongamos que nuestro objetivo es analizar una función bivariante g(*x*,*y*). Dado que estamos hablando de derivadas y lo que sí sabemos con certeza es cómo pueden encontrarse derivadas de funciones univariantes, observaremos cómo son las derivadas de las secciones verticales de *g*, ya que sabemos que no son más que funciones univariantes.

> Llamamos **derivadas parciales** a las derivadas de las secciones verticales que resultan cuando fijamos el valor de alguna de las variables.

Jacques Beroulli y Nicolaus Bernouilli...

... utilizaron por primera vez las derivadas parciales en diferentes estudios, pero fueron A. Fontaine des Bertins, Euler, Clairut y D'Alembert quienes crearon la teoría de derivadas parciales.

Ejemplo 2.14. Sea

$$g(x, y) = 4x^3 + 3x^2 y - 2xy^2 - 5x + y^3 + 7 .$$

Si mantenemos el valor de y fijo en el nivel 0, obtendremos la sección vertical:

$$g_0(x) = g(x, 0)4x^3 + 5x + 7 .$$

La derivada de esta función en un punto x_0 es

$$g'_0(x_0) = 12{x_0}^2 + 5$$

Esta última derivada recibe el nombre de **derivada parcial** de g respecto de x en el punto $(x_0, 0)$, y lo anotamos como

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, 0)= 12x_0^2 + 5$$

Por otro lado, cuando fijamos y=1, tenemos

$$g_1(x)= g(x, 1)= 4x^3 + 3x^2 + 3x + 7.$$

Y la derivada parcial correspondiente es

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, 1)= 12x_0^2 + 6x_0 + 3$$

En general, si fijamos el valor de y en un cierto valor y_0, y hacemos una sección vertical a lo largo de este valor, la derivada parcial de g respecto de x en el punto (x_0, y_0) viene dada por

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)= g'_{y0}(x_0) = 12{x_0}^2 + 6x_0y_0 - 2y_0^2 + 5$$

Del mismo modo, definimos la derivada parcial de g respecto de y en el punto (x_0, y_0)

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)= 3x_0^2 + 4x_0y_0 + 3y_0^2$$

Más adelante veremos que las derivadas parciales nos permiten encontrar sin dificultades la derivada, en el sentido más general, de una función multivariante.

Derivadas direccionales

Las derivadas parciales son las derivadas de las secciones verticales que obtenemos al cortar la función a lo largo de las direcciones de los ejes. Ya puestos a derivar secciones verticales, también podríamos encontrar las derivadas de las secciones que obtenemos a lo largo de cualquier dirección. Esto es lo que conocemos como **derivadas direccionales.**

Ejemplo 2.15. Consideremos la función que hemos visto antes:

$$g(x, y)= 4x^3 + 3x^2y - 2xy^2 - 5x + y^3 + 7.$$

Consideremos la sección vertical que pasa por el punto (0, 0) y tiene la dirección del vector (1, –1). Definimos la derivada direccional de g en el punto (0, 0) y en la dirección del vector (1, -1) como la derivada de la función de una variable, cuando $t = 0$:

$$u(t) = g(t, -t) = -2t^3 - 5t + 7.$$

Por lo tanto,

$$u'(t) = -6t^2 - 5 \rightarrow u'(0) = -5$$

La derivada direccional es –5, lo que nos indica que el corte vertical (y, por lo tanto, la función g) decrece a partir de (0, 0) si nos movemos en la dirección del vector (1, –1). (Recordemos que una derivada negativa indica que la función es decreciente.)

Por ejemplo,...

... para que un punto sea un máximo local, la derivada direccional en aquel punto debe ser ≤ 0, cualquiera que sea la dirección que consideremos. Es decir, la función no puede crecer en ninguna dirección.

Como hemos visto, la derivada direccional nos permite saber si una función crece o decrece en una cierta dirección.

Una de las peculiaridades que se presentan en funciones de dos variables en relación con las funciones univariantes es que, teniendo en cuenta que a partir de un cierto punto se dan muchas direcciones posibles, nos podemos encontrar con puntos donde la función tiene un mínimo a lo largo de una cierta dirección, pero también tiene un máximo a lo largo de otra dirección. Un punto con estas características recibe el nombre de **punto de silla.** Veamos un ejemplo típico de esta situación.

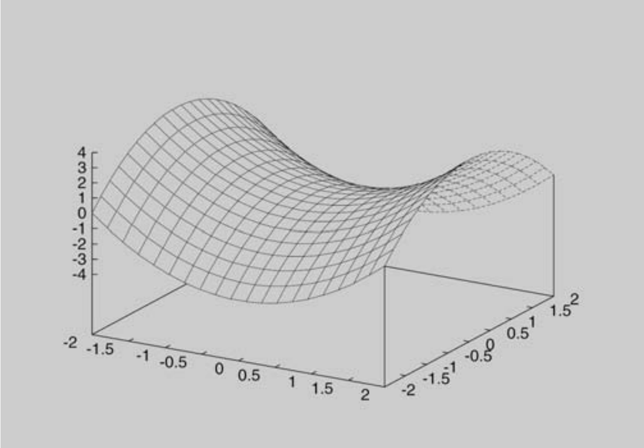
Ejemplo 2.16. Consideremos la función

$$f(x,y) = x^2 - y^2.$$

Mostraremos ahora, con la ayuda de Gnuplot, que el origen de coordenadas es un punto de silla de *f*.

Antes que nada, demos una ojeada sobre la gráfica de la función alrededor del origen:

```
gnuplot> f(x,y) = x**2 - y**2

gnuplot> set isosamples 20

gnuplot> set hidden3d

gnuplot> splot [-2:2] [-2:2] f(x,y)
```



Apreciamos que la gráfica guarda un cierto parecido con una silla de montar a caballo, que es de donde viene su nombre.

Tal vez se puede comprobar que, vista desde el origen, la función crece en el eje de las *X* y decrece en el de las *Y*. Verifiquémoslo con Gnuplot. Para ver la gráfica en la dirección de las *X*, hacemos:

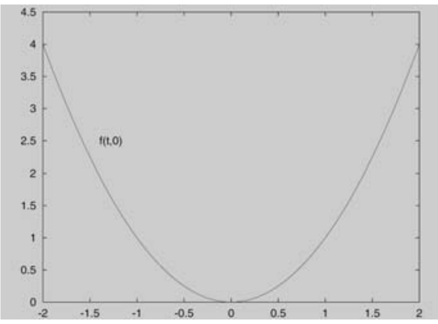
Punto de silla...

... de $x^2 - y^2$

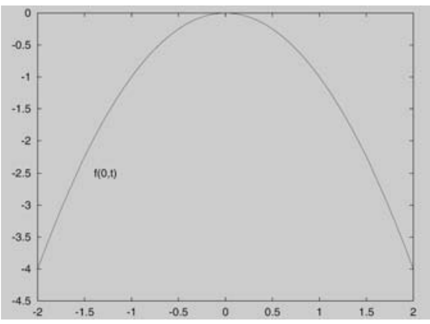
```
gnuplot> set nokey

gnuplot> set label "f(t,0)" at -1.4,2.5

gnuplot> plot [-2:2] f(t,0)
```

Y para obtener la gráfica en la dirección de las *Y*, hacemos:

```
gnuplot> set nolabel

gnuplot> set label "f(0,t)" at -1.4, -2.5

gnuplot> plot [-2:2] f(0,t)
```



En la dirección de las *x*



En la dirección de las *Y*

Las gráficas permiten observar que en la dirección de las *X* hay un mínimo en (0, 0), y en la dirección de las *Y* hay un máximo en el mismo punto. En particular, las dos derivadas direccionales en las direcciones de los ejes (es decir, las dos derivadas parciales) son cero en el punto (0, 0).

2.7. Funciones lineales

Nuestro viaje por funciones de dos variables ya está llegando a su fin. De hecho, lo único que nos queda por hacer es definir la diferenciación. Antes, sin embargo, nos detendremos un momento para recordar aspectos que ya hemos visto al estudiar el álgebra lineal. Nos referimos a las funciones lineales. La definición formal de una función lineal como aquella que satisface la propiedad aditiva y de homogeneidad podéis repasarla en los apuntes de álgebra lineal. Lo que nos interesa aquí es observéis que una función de dos variables $f:\mathrm{R}^2 \to R$ es lineal sólo si hay dos **números fijos** *a* y *b* que, para cada posible vector (*x*, *y*), dan como resultado

$$f(x, y) = ax + by.$$

Lo que sigue son ejemplos de funciones lineales:

– $f(x, y) = 2x + 3y$, ya que $a = 2$ *y* $b = 3$

– $f(x, y) = x$, ya que $a = 1$ *y* $b = 0$

– $f(x, y) = x - y$, ya que $a = 1$ *y* $b = -1$

– $f(x, y) = 0$, ya que $a = 0$ *y* $b = 0$

Por otro lado, ninguna de estas funciones es lineal:

– $f(x, y) = x^2 + y^2$

– $f(x, y) = \log(x) + \mathrm{sen}(y)$

– $f(x, y) = x - 2y^3$

– $f(x, y) = xy$

– $f(x, y) = (x + y)^2$

– $f(x, y) = y^4$

Dada una función lineal como por ejemplo $f(x, y) = 2x + 3y$, fijémonos en que podemos expresar la imagen de cualquier vector (x, y) de la forma siguiente:

$$f(x, y) = 2x + 3y = (2, 3) \cdot (x, y)$$

donde el punto centrado · denota el producto escalar entre vectores. Por tanto, para describir la función lineal que hemos dado, tenemos suficiente con especificar el vector (2, 3).

Consideremos ahora una propiedad muy interesante: el crecimiento de la función f es máximo en la dirección marcada por el vector (2, 3). Por ejemplo, situémonos en el punto (0, 0). Tenemos que f(0, 0) = 2 · 0 + 3 · 0 = 0. El crecimiento de la función será nulo si nos movemos perpendicularmente al vector (2, 3), ya que, si (x, y) es perpendicular a (2, 3), entonces:

Nota

Recordad que el producto escalar tiene la propiedad de que dos vectores v y w son perpendiculares si su producto escalar es 0, y sólo en este caso.

$$0 = (2, 3) \cdot (x, y) = f(x, y).$$

En consecuencia, la función se mantiene constante a lo largo de los vectores perpendiculares a (2, 3). Esto sugiere que el crecimiento máximo (y también el decrecimiento máximo) se obtiene cuando nos movemos en las direcciones más alejadas de aquellas que hacen constante la función; de hecho, la dirección de máximo crecimiento es la que viene dada por (2, 3), y la de máximo decrecimiento es la dirección opuesta. Podemos resumir todo esto diciendo:

Una función $f\colon R^2 \to R$ es lineal sólo si es el resultado de aplicar el producto escalar entre un vector fijo y un vector de R^2. A este vector fijo lo llamamos el vector gradiente de la función lineal. El vector gradiente indica, desde cualquier punto, la dirección de máximo crecimiento de la función.

Lo que también nos interesa de las funciones lineales son los hechos siguientes:

el gráfico de una función lineal de dos variables consiste en un plano dentro del espacio tridimensional.

En consecuencia,

las curvas de nivel de una función lineal de dos variables siempre son líneas rectas.

Recordad que toda función lineal satisface la propiedad de que $f(0, 0) = 0$. En términos de la gráfica, esto significa que la gráfica de una función lineal siempre contiene el origen de coordenadas, es decir, el punto (0, 0, 0). Si tomamos una función lineal y sumamos una constante a cada uno de sus valores, entonces ya no pasa por el origen, pero su gráfica continúa siendo un plano y sus curvas de nivel, líneas rectas. Una función obtenida de este modo recibe el nombre de **función afín**.

Formalmente, f es una **función afín** si existen tres números **fijos**, *a, b* y *c*, tales que, para cada posible vector (*x,y*), tenemos que

$$f(x, y) = ax + by + c.$$

Lo que viene a continuación son ejemplos de funciones afines:

– $f(x, y) = 2x + 3y + 7$, ya que $a = 2$, $b = 3$ y $c = 7$

– $f(x, y) = x - 1$, ya que $a = 1$, $b = 0$ y $c = -1$

– $f(x, y) = x - y$, ya que $a = 1$, $b = -1$ y $c = 0$

– $f(x, y) = 99$, ya que $a = 0$, $b = 0$ y $c = 99$

Ejemplo 2.17. Ilustraremos a continuación el hecho de que el grafo de una función lineal siempre es un plano, y usaremos Gnuplot para ver la gráfica de la función $f(x, y) = -2x + 3y$. Obtenemos la gráfica de f haciendo:

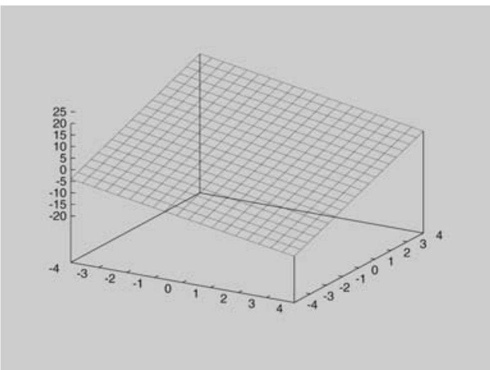
```
gnuplot> f(x, y) = -2*x+3*y
gnuplot> set isosamples 20
gnuplot> splot [-4, 4] [-4, 4] f(x, y)
```

Notad que,...

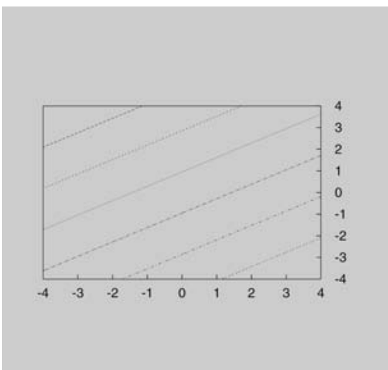
... en particular, toda función lineal siempre es una función afln (haciendo $c = 0$). A menos que nos interese ser muy formales, en general usamos la denominación "función lineal" cuando queremos designar tanto una función lineal propiamente dicha como una función afín.

Para ver sus curvas de nivel, tendremos que hacer:

```
gnuplot> set contour

gnuplot> set cntrparam levels auto 6

gnuplot> set view 0,0

gnuplot> set nosurface

gnuplot> splot f(x,y)
```



Gráfica de una función lineal



Algunas curvas de nivel

2.8. Planos tangentes y diferenciación

Nos podemos preguntar por qué nos hemos puesto a hablar de funciones lineales cuando lo que queremos es hablar de derivadas. El motivo está claro para quien haya entendido bien el cálculo univariante: en el fundamento de la derivación se encuentra la idea de aproximar una función cualquiera por medio de una función lineal (o afín). Mediante la derivación aproximamos una función con su recta tangente, y esto nos permite tener información muy importante sobre esta función sin necesidad de tener que esforzarnos demasiado en ello. Por ejemplo, prácticamente siempre podemos saber con la derivada si una función está creciendo o decreciendo y, por lo tanto, podemos saber si la gráfica de la función tiene algún pico o un valle, es decir, si la función tiene un máximo o un mínimo local. Para generalizar la derivación a funciones multivariantes, nos basaremos en el concepto de **aproximación lineal**. La idea esencial es la siguiente:

> la diferenciación de una función de dos variables se basa en la aproximación mediante el plano tangente a la gráfica de la función en un punto.

Ejemplo 2.18. Empezaremos mostrando con un ejemplo cómo podemos generar el plano tangente en el gráfico a partir de las derivadas parciales. Consideremos la función

$$f(x, y) = x^2 + 2x - y^2 3y.$$

Sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x + 2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y + 3$$

Evaluándolas en el punto (0, 0) tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2 \ \text{ y } \ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 3$$

Como ya sabemos por los apuntes de cálculo univariante, cada una de estas derivadas origina una aproximación lineal a la sección vertical respectiva. Las gráficas de estas aproximaciones lineales son rectas tangentes a cada sección vertical, en el punto (0, 0). Nosotros podemos ver estas rectas tangentes con Gnuplot. Primero observemos la gráfica de la función:

```
gnuplot> set nokey

gnuplot> set isosamples 8

gnuplot> splot [-3:3] [-3:3] -x**2+2*x-y**2+3*y
```

Y ahora veamos las dos rectas tangentes. La derivada parcial respecto de x es la derivada en el punto 0 de la sección vertical $g(x) = f(x, 0) = -x^2 + 2x$. La ecuación de la recta tangente en esta sección vertical es

$$g(0) + g'(0)(x - 0) = 0 + 2x$$

Todo esto, recordémoslo, lo hemos obtenido fijando el valor de la variable y en 0. En tres dimensiones, esto significa que esta recta tangente está formada por todos aquellos puntos (x, y, z) en los que $y = 0$ y $z = 2x$. En particular, la recta tangente contiene los puntos (–4, 0, –8) y (3, 0, 6).

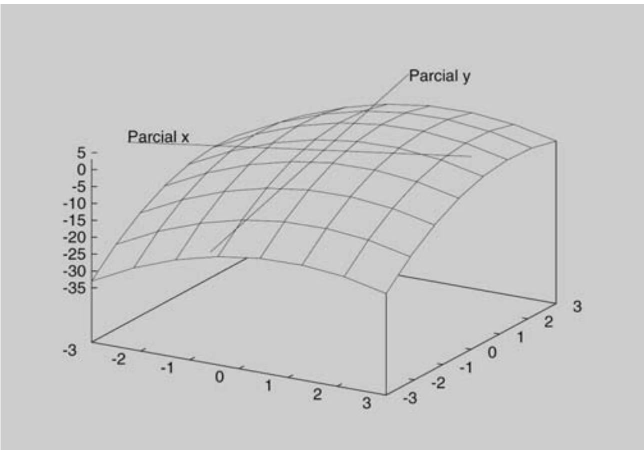
La derivada parcial respecto de y es la derivada en el punto 0 de la sección vertical $h(y) = f(0, y) = -y^2 + 3y$. La ecuación de la recta tangente en esta sección vertical es

$$h(0) + h'(0)(y - 0) = 0 + 3y\,.$$

Todo esto se ha obtenido fijando el valor de la variable x en 0. Por lo tanto, la recta tangente en tres dimensiones está formada por todos aquellos puntos (x, y, z) en los que $x = 0$ y $z = 3y$. En particular, la recta tangente contiene los puntos (0, –4, –12) y (0, 3, 9).

En definitiva:

```
gnuplot> set arrow 1 from 0, -4,-12 to 0,3,9 nohead

gnuplot> set arrow 2 from -4,0,-8 to 3,0,6 nohead

gnuplot> set label "Parcial x" at -4,0,-6.5

gnuplot> set label "Parcial y" at 0,3,8.5

gnuplot> replot
```



Podemos apreciar que las dos rectas tangentes se sitúan sobre lo que sería el plano tangente en la gráfica en el punto (0, 0, 0).

El ejemplo anterior nos muestra algo muy comprensible:

el **plano tangent**e en la gráfica de la función en un punto contiene las rectas tangentes en todas las secciones verticales que pasan por aquel punto.

Dicho de otro modo, todas las derivadas direccionales originan rectas que están contenidas en el plano tangente.

Ahora nuestro objetivo es averiguar cómo podemos encontrar analíticamente el plano tangente. Pero si admitimos lo que acabamos de escribir en el recuadro, la tarea que nos hemos propuesto es muy sencilla. La razón es la siguiente: para especificar un plano sólo hace falta dar dos rectas (diferentes) que estén contenidas en éste. En nuestro caso, estas dos rectas están a nuestro alcance. Dado que las rectas tangentes que obtenemos a partir de las derivadas parciales son perpendiculares (una va en la dirección del eje de las *X* y la otra, en la del eje de las *Y*), estas rectas tangentes son todo lo que necesitamos para describir completamente el plano tangente. ❗

La ecuación general del plano tangente puede obtenerse de la forma siguiente: supongamos que tenemos una función de dos variables f(x, y), que queremos aproximar alrededor del punto (x_0, y_0). Llamamos z_0 el valor de la función en este punto $z_0 = f(x_0, y_0)$. La gráfica de la función *f* pasa, de este modo, por el punto (x_0, y_0, z_0) dentro del espacio tridimensional. Queremos encontrar el plano tangente a la gráfica de f en este punto. Si fijamos el valor de $y = y_0$, la recta tangente a la sección vertical así generada está formada por todos los puntos (*x, y, z*), en los que

$$y = y_0, \quad \text{y} \quad z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)$$

De forma análoga, si fijamos el valor de $x = x_0$, la recta tangente a la sección vertical así generada está formada por todos los puntos (*x, y, x*) en los que

$$x = x_0, \quad \text{y} \quad z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Como los puntos de las dos rectas tangentes están contenidos en el plano tangente, el único plano que contiene estas dos rectas está formado por todos aquellos puntos (*x, y, z*) que satisfacen

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Esta fórmula nos interesa de forma muy especial porque expresa precisamente la aproximación lineal a la función f alrededor del punto (x_0, y_0).

La aproximación lineal a la función f(x, y) alrededor de un cierto punto (x_0, y_0) viene dada por la expresión siguiente

Fórmula $f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$

(donde $\approx$ se lee aproximadamente igual a).

Con la afirmación anterior sólo hemos querido decir que el plano tangente es una buena aproximación a la función *f*, por lo menos alrededor del punto (x_0, y_0). Por este motivo, fijémonos en que lo que aparece a la derecha del signo $\approx$ es la altura del plano tangente, si recordamos que $z_0 = f(x_0, y_0)$. La parte lineal (es decir, lo que resulta de eliminar términos no constantes) de la aproximación lineal es la derivada de la función f en el punto (x_0, y_0).

Recordad que,...

... dados dos vectores (*a, b*) y (*c, d*), su **producto escalar** lo definimos como el número (a, b) · (c, d) = ac + bd.

2.9. El vector gradiente y el plano tangente

En la sección anterior hemos visto que la expresión analítica del plano tangente en la gráfica de la función f en un punto (x_0, y_0) es

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Es necesario tener presente que esto lo podemos expresar con notación vectorial como:

$$z = z_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

donde $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ y $(x - x_0, y - y_0)$ son vectores, y el punto centrado □ denota el producto escalar entre vectores.

El vector de derivadas parciales es un instrumento muy útil para analizar el comportamiento de la función, y veremos que tiene un papel muy importante dentro de la teoría de la optimización. Le damos el nombre de **vector gradiente.**

El **vector gradiente** de la función *f(x, y)*, que indicamos con el símbolo $\nabla f(x, y)$, es el vector que tiene por componentes las derivadas parciales de *f*.

Notad que...

... de hecho, es el vector gradiente de la aplicación lineal generada, de acuerdo con la definición que hemos dado en el apartado sobre aplicaciones lineales

Usando el vector gradiente, el plano tangente a la gráfica de *f* en el punto (x_0,y_0) viene dado por

$$z= z_0 + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

Ejemplo 2.19. En el ejemplo 2.18, nos hemos encontrado con la función

$$f(x, y)= -x^2 + 2x - y^2 + 3y$$

que tiene como derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)= -2x + 2 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)= -2y + 3$$

Por lo tanto, su vector gradiente es

$$\nabla f(x, y) = (-2x + 2, -2y + 3).$$

En particular,

$$\nabla f(0, 0) = (2, 3) \text{ y' } \nabla f(1, 2) = (0, -1).$$

Tenemos que f(0, 0) = 0, por lo que el plano tangente en la gráfica de f en el punto (0, 0) viene dado por todos aquellos (*x, y, z*) que satisfacen la ecuación

$$z = \nabla f(0, 0) \cdot (x, y) \Rightarrow z = 2x + 3y$$

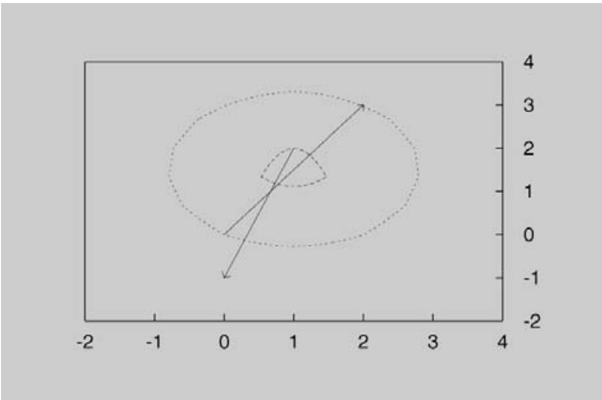
En el punto (1, 2), tenemos que f(1, 2) = 3, y el plano tangente es

$$z = \nabla f(1, 2) \cdot (x - 1, y - 2) \Rightarrow z = -y + 2$$

Para visualizar el vector gradiente con Gnuplot, lo primero que debemos tener en cuenta es que el vector gradiente pertenece al **dominio de la función**. Es decir, hay que representar el vector gradiente en la misma gráfica donde vemos las curvas de nivel.

Introducimos en Gnuplot los datos sobre la función:

```
gnuplot> f(x,y)=-x**2+2*x-y**2+3*y

gnuplot> set view 0,0

gnuplot> set contour

gnuplot> set cntrparam levels discrete 0,3

gnuplot> set nosurface

gnuplot> set arrow from 0,0,0 to 2,3,0

gnuplot> set arrow from 1,2,0 to 0,-1,0

gnuplot> set xrange [-2:4]

gnuplot> set yrange [-2:4]

gnuplot> splot f(x,y)
```



Una propiedad muy importante es que los gradientes son perpendiculares a sus curvas de nivel, aunque la representación gráfica distorsione un poco las cosas.

Gráfico

Curvas de nivel y gradientes

2.10. Ejercicios

2.2. Utilizad Gnuplot para representar gráficamente los datos con relación al consumo de carne de bovino del ejemplo 1.1. Cread un archivo con los datos escritos por columnas, de modo que el programa interprete correctamente las relaciones cruzadas. Haced rotaciones de la gráfica que permitan distinguir mejor el comportamiento de los datos.

2.3. Realizad las mismas operaciones que antes, pero ahora cread un archivo diferente donde los datos estén escritos por filas, y comprobad que las gráficas que obtenéis en ambos casos coinciden.

2.4. Recordad los datos sobre los ingresos clasificados por inclinaciones políticas y por aficiones deportivas, que hemos presentado en el ejemplo 2.8. En este ejemplo hemos escrito con estod datos un archivo leyéndolos por filas. Si escribís un archivo leyéndolos por columnas: ¿obtendríamos la misma gráfica? ¿Por qué? Comprobad vuestra respuesta haciéndolo con Gnuplot.

2.5. Una función sinuosa

Considerad la función f(x, y) = sen(3x) sen(y), donde 'sen' designa la función trigonométrica seno (no os preocupéis demasiado por esta función, Gnuplot la reconoce bien). Usando el programa Gnuplot, haced una gráfica de la función *f* que muestre ocho curvas de nivel de la función dentro de la misma gráfica (si veis que la gráfica está muy liada, utilizad la instrucción hidden3d, que ya hemos comentado antes). Después, confeccionad un mapa de curvas de nivel donde aparezcan los mismos ocho niveles. Para evitar quebraderos de cabeza con tantas rayas, restringid el recorrido de las variables x e y al intervalo $[-3,3]$. Para elaborar la gráfica, usad veinte líneas en cada dirección.

2.11. Solucionario

2.1. Nuestro objetivo aquí es representar los datos que hemos mostrado en el ejemplo **1.1.** Lo primero que haremos será generar, mediante un editor de textos, un archivo que contenga los datos que aparecen en la tabla. Debemos procurar escribir ahí los datos, de modo que Gnuplot los interprete correctamente como correspondientes a una función de dos variables. Hemos visto antes que esto lo conseguimos escribiendo la tabla, ya sea por filas o por columnas, pero dejando una línea en blanco para señalar cada ruptura. Por ejemplo, si lo quisiéramos hacer por columnas, crearíamos un archivo llamado "bovi.dat" con la siguiente información:

```
20   3.0   2.65
40   3.0   4.14
60   3.0   5.11
80   3.0   5.35
100  3.0   5.79

20   3.5   2.59
40   3.5   4.05
60   3.5   5.00
80   3.5   5.29

100  3.5   5.77
20   4.0   2.51
40   4.0   3.94
60   4.0   4.97
80   4.0   5.19

100  4.0   5.60
20   4.5   2.43
40   4.5   3.88
60   4.5   4.84
80   4.5   5.07
100  4.5   5.53
```

Una vez hayamos escrito este archivo, ya podemos entrar en el programa para elaborar la gráfica. Es importante que recordemos especificar que se trata de una gráfica **paramétrica:**

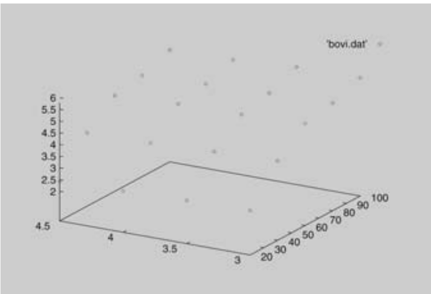
```
gnuplot> set parametric
```

Ahora ya estamos listos y podemos generarla. Con este objetivo, indicamos a Gnuplot que lea los datos del archivo que hemos creado.

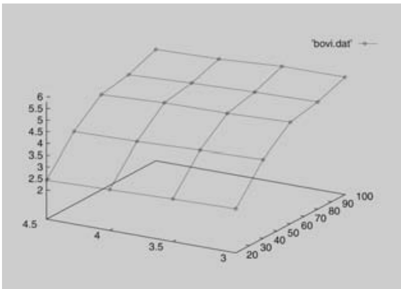
```
gnuplot> splot 'bovi.dat' with linespoints
```

Todo en conjunto parece un poco liado: todos los puntos se juntan en un extremo. Para que quede bonito, lo que hacemos es cambiar la perspectiva para verlo todo desde su origen, del mismo modo que hemos visto en el ejemplo 2.2. Después podemos volver a generar las gráficas:

```
gnuplot> set view 60,300

gnuplot> splot 'bovi. dat'

gnuplot> splot 'bovi.dat' with linespoints
```



Consumo de bovino: solo puntos



Consumo de bovino: puntos y líneas

2.2. Los datos leídos por filas son los siguientes:

```
20 3.0 2.65
20 3.5 2.59
20 4.0 2.51
20 4.5 2.43

40 3.0 4.14
40 3.5 4.05
40 4.0 3.94
40 4.5 3.88

60 3.0 5.11
60 3.5 5.00
60 4.0 4.97
60 4.5 4.84
```

```
80 3.0 5.35
80 3.5 5.29
80 4.0 5.19
80 4.5 5.07

100 3.0 5.79
100 3.5 5.77
100 4.0 5.60
100 4.5 5.53
```

Si ponemos estos datos en un archivo llamado `bovifil.dat`, entonces lo podremos representar haciendo:

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set view 60,300
gnuplot> splot 'bovifil.dat' with linespoints
```

La representación debería ser la misma que cuando hemos escrito los datos por columnas.

2.4 En este caso, todo cambia según si leemos por filas o por columnas. Leyendo por filas, el eje de las X es asignado a la política y el eje de las Y, al deporte. Si lo hacemos por columnas, sucede al revés, ya que el programa no tiene suficiente información para discriminar. Es conveniente que os fijéis en que cuando la gráfica es paramétrica, el programa sí dispone de la información adicional para saber qué variable va en cada eje: la primera columna corresponde al eje de las X y la segunda, al eje de las Y.

2.5 Tenemos $f(x, y) = \text{sen}(3x)\,\text{sen}(y)$. Introducimos los datos en Gnuplot:

```
gnuplot> f(x,y) = sin(3*x)*sin(y)
gnuplot> set contour
gnuplot> set isosamples 20
gnuplot> set xrange [-3:3]
gnuplot> set yrange [-3:3]
gnuplot> set cntrparam levels auto 8
```

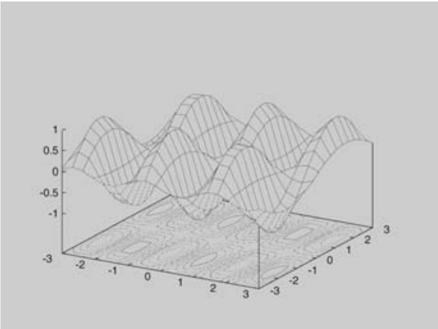
La gráfica tridimensional se obtiene haciendo:

```
gnuplot> set view 60,30
gnuplot> set surface
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> splot f(x,y)
```

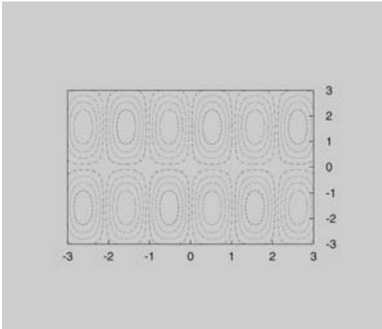
Y el mapa de curvas de nivel haciendo

```
gnuplot> set view 0,0

gnuplot> set nosurface

gnuplot> replot
```

Como se puede ver, se trata de un paisaje sinuoso, tal como indica su nombre.



La función sin(3ω) sin(y)



y sus curvas de nivel

2.12. Sumario

Hasta este momento hemos revisado por encima, de un modo más bien informal, toda una serie de aspectos de las funciones de dos variables. Hemos visto cómo son las gráficas de funciones de dos variables, y cómo las podemos generar con Gnuplot, ya sea a partir de funciones definidas de forma analítica o a partir de archivos de datos. En particular, hemos pensado en la gráfica de una función como si se tratase de un pastel y hemos visto qué es lo que sale cuando cortamos este pastel de formas diferentes; sobre todo, nos hemos concentrado en lo que sucede cuando hacemos cortes a lo largo de una línea recta. Todo esto nos ha permitido utilizar los conocimientos que ya tenemos de funciones univariantes para exponer conceptos de interés sobre funciones de dos variables.

Hemos definido las derivadas parciales y las derivadas direccionales como las derivadas de los cortes lineales que podemos hacer en la gráfica de una función de dos variables.

Finalmente, hemos visto que podemos expresar el plano tangente a la gráfica partiendo de las derivadas parciales. Todo esto lo estudiaremos a partir de ahora desde un punto de vista más formal.

3. Funciones multivariantes: definiciones y resultados

3.1. Presentación

En esta sección prepararemos de un modo más formal los conceptos básicos y los resultados importantes sobre funciones multivariantes. Extenderemos al caso de muchas variables lo que hemos indicado anteriormente sobre funciones de dos variables, y también discutiremos algunos conceptos nuevos que tienen bastante importancia para aplicar los conocimiento adquiridos en este curso.

Comencemos por recordar la definición que dimos en la parte introductoria.

Una función con n variables es una regla f que asocia a cada vector $(x_1, x_2 ... x_n)$ dentro de un conjunto D determinado un número real $f(x_1, x_2 ... x_n)$. El dominio D es un subconjunto de R^n, es decir, está formado por vectores con n componentes. Representaremos esta función escribiendo: $f: D \rightarrow R$ o bien $D \xrightarrow{f} R$

Cuando queramos indicar la acción de la función sobre un vector, escribiremos

$$(x_1, x_2 \ldots x_n) \xrightarrow{f} f(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

Lagrange,...

... en su obra *Théorie des fonctions analytiques* (1797), define una función de una o varias variables como cualquier expresión útil para el cálculo en que estas variables intervienen de cualquier manera.

Al igual que en el caso de funciones univariantes, cuando escribimos una función multivariante, como por ejemplo $f(x, y) = \sqrt{x - y}$, se sobreentiende que el dominio de definición de f es el mayor subconjunto dentro del cual la fórmula tiene sentido. Por ejemplo, en el caso de la función que acabamos de escribir, el dominio sería el semiplano: $\{(x, y) \in R^2 : x \geq y\}$.

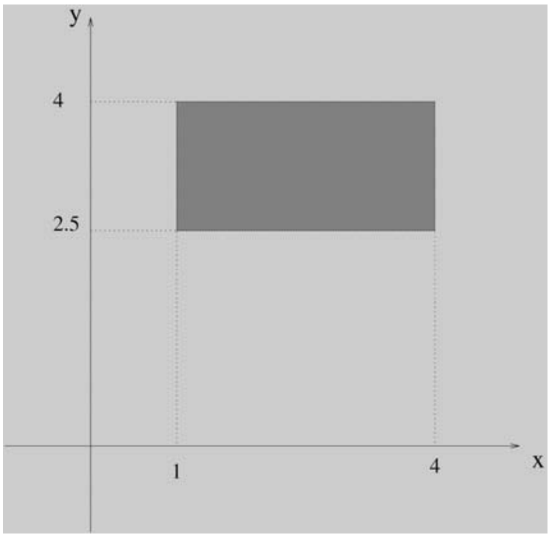
Un apunte sobre la notación que será relevante es el que sigue. Dado que trabajaremos con funciones con varias variables, nos interesará usar notación vectorial de vez en cuando, con el objetivo de simplificar la notación. Para evitar confusiones, aunque no tendría que existir la posibilidad de ambigüedades, usaremos las letras *v* y *w* siempre que nos refiramos a vectores, y letras como por ejemplo *x*, *y* y *z* para referirnos a componentes de vectores o a números. De vez en cuando, también recurriremos al uso de subíndices para referirnos a componentes de un vector. Los subíndices también los usaremos para referirnos a un vector determinado, y no a cualquiera; la diferencia tendría que quedar perfectamente clara por el contexto.

3.2. Conjuntos abiertos y cerrados. Entornos

Antes de entrar en materia, estará bien considerar brevemente cómo se extienden las definiciones de conjuntos abiertos y cerrados a subconjuntos de R^n. El concepto fundamental es, como en el caso de R, el de un entorno. Recordemos que un intervalo abierto es un conjunto de números que no tiene agujeros en medio y que no incluye sus extremos.

Supongamos que, para cada uno de los *n* componentes de R^n, tomamos un intervalo abierto determinado, y después consideramos todos los vectores que se pueden formar que tengan los componentes dentro de los respectivos intervalos abiertos. El conjunto que obtenemos de este modo lo llamaremos un rectángulo abierto de R^n.

Ejemplo 3.1. Consideremos el conjunto R^2. Dentro del primer componente, tomamos el intervalo abierto (1, 4), y dentro del segundo componente tomamos el intervalo abierto (2.5, 4). El rectángulo resultante es el que podemos ver en el dibujo.



Un rectángulo abierto R^2

Fijémonos como en el caso de R^2 los rectángulos abiertos de nuestra definición son rectángulos en el sentido geométrico, pero incluyendo el interior y sin incluir aquí los lados.

Notemos, finalmente, que los rectángulos abiertos en R^3 serían cubos, y los de R^4, hipercubos, en el sentido daliniano del término.

Decimos que un subconjunto *O* de R^n es un **conjunto abierto**, si cada punto de *O* está rodeado por un rectángulo abierto que está enteramente contenido en *O*.

La idea de un conjunto abierto...

... es que cada punto del conjunto está rodeado de otros puntos que también pertenecen al conjunto.

Ejercicio

3.1. Demostrad que todo rectángulo abierto es un conjunto abierto. Tratad de expresar vuestro argumento con la máxima precisión.

En general, incluso en los casos más sencillos, como por ejemplo el del ejercicio anterior, comprobar si un conjunto es abierto es un ejercicio bastante entretenido. Sin embargo, con un par de resultados será suficiente prácticamente para todo lo que nosotros necesitamos.

Si partimos de un número cualquiera (finito) de conjuntos abiertos y hacemos uniones y/o intersecciones entre ellos, el resultado es un nuevo conjunto abierto.

Si $f: R^n \to R$ es una función continua y c es un número real cualquiera, entonces los dos conjuntos

$$\{v \in R^n : f(v) > c\}$$

$$\{v \in R^n : f(v) < c\}$$

son abiertos.

Ejercicio

3.2. Usando los dos resultados anteriores, demostrad que si $f: R^n \to R$ es una función continua, y a y b números reales cualesquiera, entonces el conjunto

$$\{v \in R^2 : a < f(v) < b\}$$

es abierto.

Los siguientes son todos los conjuntos abiertos de R^2.

– $\{(x,y)$: $0<x<1$, y $0<y<1\}$

– $\{(x,y)$: $0<x+y<1\}$

– $\{(x,y)$: $x^2+y^2<1\}$

– R^2

– $\{(x,y)$: $x<y\}$

Ejercicio

3.3. En cada uno de los ejemplos anteriores, dibujad el conjunto y justificad que se trata de un conjunto abierto.

Decimos que un subconjunto T de R^n es un **conjunto cerrado**, si su complementario (es decir, el conjunto de todos los vectores que **no** están en *T*) es un conjunto abierto.

Si partimos de un número cualquiera (finito) de conjuntos cerrados y hacemos uniones e/o intersecciones entre ellos, el resultado es un nuevo conjunto cerrado.

Si $f: R^n \to R$ es una función continua y c es un número real cualquiera, entonces los dos conjuntos

$$\{v \in R^n : f(v) \geq c)\}$$

$$\{v \in R^n : f(v) \leq c)\}$$

son cerrados.

Observad la diferencia fundamental de los resultados que relacionan funciones continuas con conjuntos abiertos y cerrados: desigualdades estrictas originan conjuntos abiertos, y desigualdades **débile**s originan conjuntos cerrados.

3.4. Usando los dos resultados anteriores, mostrad que si f : $R^n \to R$ es una función continua, y a y b números reales cualesquiera, entonces el conjunto

$$v \in R^2 : (a \leq f((v) \leq b))$$

es cerrado.

Los siguientes son todos conjuntos cerrados de R^2.

$-\{(x, y) 0 \leq x \leq 1, \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq 1\}$

$-\{(x, y):\ 0 \leq x + y \leq 1\ \}$

$-\ \{(x, y):\ x^2 + y^2 \leq 1\ \}$

$-\ \{(x, y): x + y = 1\}$

Ejercicio

3.5. En cada uno de los ejemplos anteriores, dibujad el conjunto y justificad que se trata de un conjunto cerrado.

No nos dejemos confundir por la terminología: no es necesario que un conjunto pertenezca a una de las dos categorías que acabamos de ver. Es muy fácil escribir conjuntos que no son abiertos ni cerrados. He aquí algunos ejemplos:

- $\{(x, y): 1 < x < 1, \text{ y } 0 \leq y \leq 1\}$
- $\{(x, y): 1 < x + y \leq 2\}$
- $\{(x, y): 0 \leq x < y\}$

Para definir los conceptos de continuidad y diferenciación, es útil formalizar la concepción de entorno.

> Un **entorno** de un cierto vector v es cualquier conjunto abierto que contiene v.

Todos estos conceptos que hemos visto pueden parecer un poco esotéricos, pero están muy relacionados con otros más familiares, como el concepto de límite.

Sin embargo, hay una categoría de conjuntos que es especialmente importante para el economista, ya que tiene la suficiente relevancia en problemas de optimización. Se trata de los **conjuntos compactos**. Para definirlos, hay que extender a R^n un concepto familiar en recta real.

> Un subconjunto de R^n es **acotado** si lo podemos incluir dentro de un rectángulo determinado que tiene por componentes intervalos acotados.

Por ejemplo, una recta dentro del plano no es nunca un conjunto acotado, porque siempre se extiende más allá de cualquier rectángulo acotado. Por otro lado, una circunferencia es un conjunto acotado, porque siempre la podemos inscribir dentro de un cierto rectángulo.

> Decimos que un subconjunto de R^n es compacto, si es al mismo tiempo acotado y cerrado.

Los siguientes conjuntos son todos compactos de R^2.

– $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,$ y $0 \leq y \leq 1\}$

– $(x, y) : x + y \leq 1, x \geq 0,$ y $y \geq 0$

– $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

– $\{(x, y) : x + y = 1, x \geq 0,$ y $y \geq 0\}$

Y ninguno de los siguientes conjuntos de R^2 es compacto.

– $\{(x, y) : x \leq 1,$ i $y \leq 1\}$

– $\{(x, y) : 0 \leq x + y \leq 1\}$

– $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

– $\{(x, y) : x + y = 1\}$

Ejercicio

3.6. En cada uno de los ejemplos anteriores, dibujad el conjunto y justificad por qué se trata de un conjunto compacto o no.

3.3. Continuidad

Ahora nuestro objetivo es definir la continuidad de una función multivariante. De hecho, la definición es exactamente la misma que ya habíamos visto en el caso univariante.

> Sea D un subconjunto de R^n y $f : D \to R$ una función definida en D. Decimos que f es **continua en el vector** $v_0 \in D$ si el límite $\lim_{v \to v_0} f(v)$ existe y, además, coincide con $f(v_0)$.

La definición es intuitivamente clara: todos entendemos suficientemente bien que el concepto de continuidad significa que la función no tiene saltos bruscos. Cuando tratamos con subconjuntos de R, sólo hay dos direcciones mediante las cuales un punto puede ser aproximado: desde arriba o desde abajo. Cuando hay más variables, la situación cambia, ya que hay muchas trayectorias posibles de aproximación; esto, por un lado, marca una diferencia no trivial respecto al caso univariante y, por otro, hace que la definición de límite sea más restrictiva, ya que el límite está bien definido sólo si existe para todas y cada una de las trayectorias posibles de aproximación. El ejemplo siguiente ilustra este punto.

Ejemplo 3.2. Consideremos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Queremos mostrar que esta función no es continua en el punto (0, 0), aunque cualquier sección vertical que pase por (0, 0) es una función continua. Éste es un fenómeno que no aparece, como es lógico, cuando estudiamos funciones univariantes, y que nos muestra que el concepto de continuidad de funciones multivariantes es bastante restrictivo. Una sección vertical que pase por (0, 0) viene dada por la ecuación

$$ax + by = 0$$

donde a y b son números fijos. Consideraremos dos casos. En primer lugar, si $b = 0$, entonces la sección vertical es $x = 0$, es decir, estamos observando la función a lo largo del eje de las Y. En este caso, tenemos que $f(0, y) = 0$, para toda y, por lo que la sección vertical es claramente una función continua (ya que es constante). Por otro lado, si $b \neq 0$, tenemos que $y = -(a/b)x$. Definimos $c = -(a/b)$, de modo que $y = cx$, lo cual implica que cualquier sección vertical de este tipo es de la forma

$$f(x, cy) = \begin{cases} \dfrac{c^2x^3}{x^2 + c^4x^4} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Simplificando, vemos que:

$$f(x, cx) = \frac{c^2x}{1 + c^4x^2}$$

Y ésta es una función continua, dado un determinado c que se mantiene fijo.

Por otro lado, para ver que f no es continua en el (0, 0), consideremos la sección (no vertical, claro) obtenida al aproximarnos a (0, 0) a lo largo de la trayectoria (parabólica) dada por $x = y^2$. En este caso, la función univariante que resulta de ello es:

$$f(y^2, y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{y^4 + y^4} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

es decir,

$$f(y^2, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

que es claramente una función discontinua cuando $y = 0$. Esto implica, en particular, que la función $f(x,y)$ no puede ser continua en el punto (0, 0).

De hecho, sin embargo, la continuidad es un aspecto de las funciones que a nosotros no nos preocupará demasiado en este curso, porque todas las funciones con las que trabajaremos no serán sólo continuas, sino también diferenciables, a excepción de algunos ejemplo construidos expresamente (por ejemplo, el que hemos comentado). El resultado positivo que podemos tener en cuenta es el siguiente:

si partimos de funciones continuas y vamos construyendo otras mediante las operaciones de adición/sustracción, multiplicación/división y composición de funciones, llegaremos nuevamente a funciones continuas (sobre sus dominios de definición).

Karl Weiertrass...

... (Westlia 1815-Berlín 1897), en la obra Werke, de 1890, presenta su método para desarrollar la teoría de funciones.

Por ejemplo, una aplicación de este principio en el ejemplo que hemos visto antes nos diría que la función:

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

es continua sobre su dominio. Fijémonos, sin embargo, en que esta función no está definida en el punto (0, 0). Antes hemos provocado la discontinuidad precisamente al querer definirla también en este punto.

Hay un resultado muy importante en lo que respecta a optimización que guarda relación con el apartado anterior, en el que hemos hablado de conjuntos compactos, y con éste, en el que hablamos de continuidad.

Teorema de Weiertrass

Sea C un subconjunto compacto de R^n y $f: C \to R$, una función continua. Entonces f alcanza tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto en *C*; es decir, hay vectores $M \in C$ y $m \in C$ tales, que para cada $v \in C$ se cumple que ${}^{c}(m) \leq f(v) \leq f(M)$).

Cuando tratemos sobre temas de optimización tendremos oportunidad de volver a hablar de este teorema.

3.4. Gráficas, curvas de nivel

En la sección anterior hemos visto cómo podíamos obtener la gráfica de una función de dos variables usando Gnuplot. Para funciones de más de dos variables, ¡esto ya no parece tan sencillo! Sin embargo, los conceptos se generalizan. Por ejemplo, para funciones con n variables también nos interesa hablar del grafo de la función, que sería el conjunto de vectores de n + 1 componentes formados al asociar a cada vector del dominio el valor que toma la función.

Una herramienta muy usada también en economía son las **curvas de nivel.**

> Dada una función f con dominio dentro de R^n y un número cualquiera c, **la curva de nivel** c **de la función** f está formada por el conjunto de puntos que satisfacen $f(x_1, x_2 \ldots x_n) = c$.

Notemos que la definición no excluye el hecho de que haya algún c en el que la curva de nivel c de f no tenga ningún punto, aunque éste es un caso muy poco interesante. Por ejemplo, si $f(x, y) = x^2 + y^2$, la curva de nivel –1 no tiene ningún punto, porque la función f asocia un número no negativo a cada vector de R^2.

Ejemplo 3.3. Dada la función $f(x,y) = 2 \log(x) + \log(y)$, su curva de nivel 2 está formada por aquellos pares (x,y) que son solución de la ecuación

$$2 \log(x) + \log(y) = 2 \Rightarrow \log(x^2 y) = 2 \Rightarrow x^2 \; y = e^2,$$

es decir,

$$x^2 y = e^2 \Rightarrow y = \left(\frac{e}{x}\right)^2$$

Ejemplo 3.4. En la economía moderna, el comportamiento individual se analiza partiendo del supuesto de que los individuos actúan movidos por su propio interés. Una forma de expresar esto matemáticamente es postular que los individuos comparan diferentes alternativas de acuerdo con una **función de utilidad**, que es un índice de deseabilidad, de modo que las alternativas con una mayor utilidad son las preferidas. En las aplicaciones que los economistas hacen de las funciones de utilidad, las curvas de nivel de la función de utilidad, que los economistas denominan **curvas de indiferencia,** se han mostrado como una herramienta fundamental.

3.5. Diferenciación

Empezamos con un concepto familiar.

La **derivada parcial de una función** $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ respecto de la *i*-ésima componente es la derivada de la función univariante obtenida al fijar los valores de todos los componentes excepto la i-ésima. Indicamos esta derivada parcial como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

o bien

$$D_i f(x_1, x_2 \ldots x_n).$$

Ejemplo 3.5. Sea $f(x, y, z) = x^2y + xz^3 - y^2z^2$. Las derivadas parciales de esta función son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2yz^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3xz^2 - 2y^2z$$

La diferenciación también es, en el caso multivariante, una aproximación lineal a una función, alrededor de un cierto punto. A continuación exponemos una definición formal de este concepto.

Decimos que *f* es **diferenciable** en un vector *w* determinado, si hay una cierta función lineal, que denominamos T_w, de modo que, cuando v se acerca a *w*, la diferencia entre *f(v)* y la función *f(w)* + $T_w(v - w)$ disminuye más rápidamente que la distancia entre *v* y *w*.

Aunque esté expresado en un lenguaje un poco críptico, el significado de la definición anterior tendría que ser suficientemente claro. La función *f*(*w*) + $T_w(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ tiene por grafo el plano tangente al grafo de *f* en el punto *w*. Lo que estamos diciendo en la definición es que el plano tangente es una buena aproximación al grafo de la función alrededor de *w*. De hecho, es fácil mostrar que, si *f* es diferenciable, la función lineal T_w es única, por lo que tenemos suficiente con el hecho de encontrar una función lineal que tenga por grafo el plano tangente. Pero antes hemos observado que siempre podemos definir el plano tangente a partir de las derivadas parciales, y es por ello que nos será muy fácil caracterizar la derivada de *f*. Habéis visto, cuando estudiabais álgebra lineal, que una función lineal tiene asignada una matriz, que es simplemente el resultado de aplicar la función a los vectores de la base.

La matriz que representa la función lineal T_w que hemos mencionado en la definición de diferenciabilidad, tiene como componentes las derivadas parciales de *f*, evaluadas en el vector *w*.

Ejemplo 3.6. En el ejemplo 3.5. hemos encontrado las derivadas parciales de la función $f(x, y, z)= x^2y + xz^3 - y^2z^2$. En el punto (1, -1, 0), estas derivadas parciales valen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1,0) = -2 \; \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1,0) = 1 \; \frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,0)= 0$$

Dado que f(1, –1, 0) = –1, el plano tangente viene dado por

$$-1 + (-2 \;\; 1 \;\; 0)(x-1, y+1, z) = 2 - 2x + y$$

donde $(x - 1, y + 1, z) = (x, y, z) - (1, -1, 0)$. Por lo tanto, la derivada de f en el punto (1, -1, 0) es la función lineal:

$$T(x, y, z) = -2x + y.$$

En general, la derivada de una función $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ es la función lineal que viene dada por la matriz:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \; \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Esto comporta una nueva definición, a la que volveremos con frecuencia en este curso.

El **vector gradiente** de la función $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ en el punto $(\overline{x_1}, \overline{x_2} \ldots \overline{x_n})$ es el vector que tiene por componentes las derivadas parciales de f en este punto. Designamos el vector gradiente con $\nabla f\,(\overline{x_1}, \overline{x_2} \ldots \overline{x_n})$. Si damos por sobreentendido que estamos evaluándolo en el punto $(\overline{x_1}, \overline{x_2} \ldots \overline{x_n})$, tenemos:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Es importante remarcar que el gradiente es un vector, no una matriz.

En particular, si indicamos el producto escalar entre dos vectores con un punto centrado $\cdot$, nos será posible calcular el plano tangente a una función $f(v)$ en el vector $\bar{v}$ haciendo por.

$$f(\bar{v}) + \nabla f(\bar{v}) \cdot (v - \bar{v}).$$

Notad...

... que hemos escrito de forma diferente el plano tangente aquí y en el ejemplo 3.6. En el ejemplo 3.6. aplicábamos la matriz (–2 1 0) al vector (x-1,y+1,z); aquí, en cambio, hemos buscado el producto escalar entre los vectores (–2,1,0) y (x-1,y+1,z). El resultado es el mismo, obviamente, pero conceptualmente estamos haciendo cosas distintas.

Ejemplo 3.7. El gradiente de $f(x, y, z)= x^2y + xz^3 - y^2x^2$ viene dado por

$$\nabla f(x, y, z)= 2xy + z^3, x^2 + -2yz^2, 3xz^2 - 2y^2z$$

En el punto (1, -1, 0), el gradiente es el vector

$$\nabla f(1, -1, 0)= (-2, 1, 0).$$

Dado que f(1,-1,0) =-1, el plano tangente viene dado por

$$-1+(-2, 1, 0) \cdot (x - 1, y + 1, z) = 2 - 2x + y.$$

Lo que nos interesa remarcar, ya que se trata de la expresión que se utiliza con mayor frecuencia, es:

Podemos escribir en términos del gradiente la aproximación lineal a una función diferenciable f en torno a un vector $\bar{v}$ como

$$f(v) \approx f(\bar{v}) + \nabla f(\bar{v}) \cdot (v - \bar{v})$$

Por lo que respecta a los cálculos, fijémonos en que:

$$\nabla f(\bar{v}) \cdot (v - \bar{v})= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial v_i}(v_i - \bar{v}_i)$$

Otro resultado importante es que

si $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ es diferenciable en un cierto punto, entonces f es continua en el mismo punto. Dicho en otras palabras, diferenciabilidad implica continuidad.

Para garantizar la diferenciabilidad a partir de las derivadas parciales, necesitamos verificar lo siguiente.

Condición suficiente para la diferenciabilidad

Si las derivadas parciales existen y son funciones continuas dentro de un cierto conjunto abierto *O* incluido en el dominio de *f*, entonces *f* es diferenciable en todos los puntos de *O*.

3.6. Derivadas de orden superior

Dada una función f de n variables, si mantenemos todas las variables menos una fijas en un cierto valor, lo que resulta de ello es una función univariante (una sección vertical). La derivada de esta función recibe el nombre de derivada parcial. Si derivamos esta función univariante dos veces obtendremos una **derivada parcial de segundo orden**. Del mismo modo, con derivaciones sucesivas podemos definir derivadas parciales de cualquier orden.

Ejemplo 3.8. La función $f(x,y) = x^4 - x^2 + xy + y^2 - y^4$ tiene como derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 4y^3$$

Toda derivada parcial es función tanto de x como de y. De este modo, tenemos cuatro posibles derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial_y \partial_x} = 1\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 - 12y^2$$

Fijémonos en que, con n variables, hay n^2 posibles derivadas parciales de segundo orden, que corresponden a todas los posibles pares (ordenados) que podemos formar con las n variables.

Dada una función $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$, definimos su **matriz hessiana** como aquella matriz cuyos componentes son las derivadas parciales de segundo orden, dispuestas del modo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Designamos la matriz hessiana de f evaluada en el vector $(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n)$ por $D^2 f(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n)$.

Ejemplo 3.9. En el ejemplo 3.8. hemos encontrado las derivadas parciales de segundo orden de la función $f(x,y) = x^4 - x^2 + xy + y^2 - y^4$. La matriz hessiana de esta función es

$$\begin{bmatrix} 12x^2 - 2 & 1 \\ 1 & 2 - 12y^2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.10. En este ejemplo usaremos una notación alternativa que también aparece en muchos libros de texto. Sea $f(x,y,z)=xyz$. Entonces,

$$D_1 f(x,y,z)=yz,\ D_2 f(x,y,x) = xz,\ D_3 f(x,y,z)=xy$$

y dado el punto $(x,y,z) = (1,2,3)$, las derivadas parciales en este punto son

$$D_1 f(1,2,3)=6,\ D_2 f(1,2,3)=3 \text{ y } D_3 f(1,2,3)=2.$$

Las derivadas parciales segundas son

$$D_{11} f(x,y,z) = D_{22} \mathrm{f}(x,y,z)=D_{33} \mathrm{f}(x,y,z)=0$$

$$D_{12} f(x,y,z)=D_{21} f(x,y,z)=z$$

$$D_{13} f(x,y,z)=D_{31} f(x,y,z)=y$$

$$D_{23} f(x,y,z)=D_{32} f(x,y,z)=x.$$

Por lo que la matriz hessiana es

$$D^2f(x,y,z)=\begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D^2f(1,2,3)=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Un resultado útil que hay que considerar es el siguiente:

Teorema de Young

Siempre que las derivadas parciales de segundo orden sean funciones continuas, las derivadas cruzadas coincidirán:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

cualesquiera que sean los índices ***i*** y ***j***.

A efectos prácticos para nosotros, dado que siempre trabajaremos con funciones que tienen derivadas continuas de cualquier orden, el resultado que acabamos de ver significa que, de todas las n^2 posibles derivadas de segundo orden, tenemos que calcular bastantes menos (¿cuántas?).

3.7. La regla de la cadena

Hay una serie de funciones con las que nos encontramos frecuentemente, ya desde la escuela elemental: suma y resta, multiplicación y división, potenciación y radicación. Hay otras que hemos tenido ocasión de ver, de forma más o menos profunda, posteriormente, como por ejemplo logaritmos, exponenciales o funciones trigonométricas. Todas estas funciones son continuas y diferenciables, y de hecho, prácticamente todos los ejemplos de funciones que encontraréis en este texto de cálculo diferencial (o en cualquier otro de un nivel similar) no son más que el resultado de hacer “mezclas” con estas funciones. Estas mezclas son lo que, en un lenguaje más formal, se denomina la composición de funciones. Por ejemplo, la función $f(x)=\log[\text{sen}^2(x)]$ es el resultado del proceso de composiciones siguiente:

$$x \to \text{sen}(x) \to \text{sen}^2(x) \to \log[\text{sen}^2(x)]\ .$$

Es decir, hemos compuesto el seno con el cuadrado y, después, todo esto con el logaritmo.

Lo que facilita mucho el trabajo con estas funciones es lo que denominamos **regla de la cadena**, que implica que para encontrar las derivadas de funciones compuestas tenemos suficiente conociendo las derivadas de las funciones elementales.

En el caso del cálculo univariante, la regla de la cadena nos dice que

$$\frac{dg[h(x)]}{dx} = g'[h(x)h'(x)]$$

Es decir, que lo que tenemos que hacer es ir multiplicando las sucesivas derivadas de las funciones componentes.

En el caso de distintas variables, el asunto se complica más, aunque si se usa una notación adecuada todo resulta muy parecido a lo que acabamos de ver. Lo que haremos aquí no será ver el caso más general posible, sino sólo dos casos particulares, que son los de mayor interés para las aplicaciones económicas. Para simplificar la presentación, sólo escribiremos el caso de dos variables. Cuando hay más variables el problema es exactamente igual.

Por ejemplo,...

.. en el caso de la función que hemos escrito antes tendríamos:

$$f'(x) =$$
$$= \frac{1}{\text{sen}^2(x)}(2\text{sen}(x))\cos(x)$$

El primer término corresponde a la derivada del logaritmo; el segundo, a la derivada del cuadrado y el tercero, a la derivada del seno.

Supongamos que tenemos una cierta función de dos variables $z = f(x, y)$. Esto quiere decir que a cada vector (x, y) asociamos un número z. Un tipo de composición muy frecuente es aplicar en este momento una función univariante h a z. La función compuesta resultante es $h(z) = h[f(x,y)]$, una nueva función de dos variables. Veamos un par de ejemplos:

Si $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $h(z) = \sqrt{z}$, entonces la función compuesta es $h[f(x, y)] = \sqrt{x^2 + y^2}$, la norma del vector (x,y).

Si $f(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$ y $h(z) = \log(z)$, entonces la función compuesta es $h[f(x, y)] = \log[x^{2/3}y^{1/3}] = \frac{2}{3}\log(x) + \frac{1}{3}\log(y)$. Ésta es una transformación típica en economía, que se usa para mostrar que todas estas funciones pertenecen a la clase de funciones Cobb-Douglas.

Ejercicio

3.7 Justificad que $\log[x^{2/3}y^{1/3}] = \frac{2}{3}\log(x) + \frac{1}{3}\log(y)$

Regla de la cadena I

Supongamos que tenemos una función compuesta de la forma $g(x,y) = h[f(x,y)]$. La regla de la cadena dice que sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = h'[f(x,y)]\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = h'[f(x,y)]\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Esquemáticamente, si $z = f(x,y)$, podemos escribir

$$\frac{\partial g}{\partial x} = h'(z)\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = h'(z)\frac{\partial f}{\partial y}$$

Ejemplo 3.11. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$, $h(z) = \sqrt{z}$ y $g(x,y) = h[f(x,y)] = \sqrt{x^2+y^2}$. Entonces tenemos que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2y)$$

Ejercicio

3.8. Aplicando la regla de la cadena, encontrad las derivadas parciales de la función compuesta $g(x,y) = h[f(x,y)] = \log[x^{2/3}y^{1/3}]$.

Otro caso típico en economía tiene lugar cuando partimos de una función de dos variables *f*(*x*,*y*), en las que tanto *x* como *y* dependen de otra variable p. Si suponemos que hay dos funciones univariantes *u* y *v*, en las que $x = u(p)$ e $y= v(p)$, entonces la función compuesta es $g(p) = f[u(p), v(p)]$.

Ejemplo 3.12. Supongamos que $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x = u(p) = \sqrt{p}$ e $y = v(p) = p^2$

Entonces la función compuesta es

$$g(p) = (\sqrt{p})^2 + (p^2)^2 = p + p^4$$

Regla de cadena II

Supongamos que tenemos una función compuesta de la forma g(p)= f(x,y) = f[u(p),v(p)]. La regla de la cadena dice que su derivada es:

$$g'(p)= \frac{\partial f}{\partial x}u'(p)+\frac{\partial f}{\partial y}v'(p)$$

Supongamos que

$$f(x,y)= x^2+y^2, x= u(p)= \sqrt{p} \text{ e } y= v(p)= p^2$$

Entonces podemos encontrar la derivada de la función compuesta aplicando la regla de la cadena:

$$g'(p)= (2x)\frac{1}{2\sqrt{p}}+(2y)(2p)= (2\sqrt{p})\frac{1}{2\sqrt{p}}+(2p^2)(2p)= 1+4p^3$$

Podemos ver que esta derivada coincide con la que habríamos encontrado si primero hubiésemos operado algebraicamente hasta simplificar la función compuesta a $g(p)= p+p^4$.

Ejercicio

3.9. Aplicando la regla de la cadena, encontrad la derivada de $g(p)$, obtenida a partir de $f(x,y)$ = log(x) + 2 log(y), donde x = p^2 e y = p^4 . Después, operad algebraicamente hasta simplificar la función compuesta y determinad su derivada directamente para comprobar que con los dos métodos se obtiene el mismo resultado.

3.8. Derivación de funciones implícitas

En los modelos económicos, las relaciones de equilibrio se acaban reduciendo prácticamente siempre a sistemas de ecuaciones que describen las relaciones entre las diferentes variables que intervienen. En general, algunas de las variables son **endógenas**, es decir, que han sido generadas dentro del modelo económico, mientras que otras son **exógenas**, lo cual significa que su valor se toma como un dato dentro del modelo. El sistema de ecuaciones que describe el equilibrio expresa en forma **implícita** la relación de dependencia de las variables endógenas respecto de las variables exógenas. Éste es el motivo por el que, en economía, las funciones definidas implícitamente tienen un papel muy relevante.

La teoría del cálculo diferencial también nos facilita mucho las cosas, ya que nos enseña cómo podemos diferenciar funciones definidas implícitamente sin necesidad de hacer explícitas estas relaciones de dependencia.

Ejemplos de relaciones entre dos variables x e y definidas implícitamente serían los siguientes:

- $x^2 \log(y) = 1$

- $x + e^{-x} + y + \log(y) = 0$

Supongamos que la relación entre las variables x e y es descrita por la ecuación $f(x,y) = 0$. Supongamos también que y es la variable endógena y x la variable exógena, es decir, x es la variable independiente e y, la variable dependiente.

Ilustremos cómo podemos encontrar la derivada de esta relación sin necesidad de hacerla explícita primero. La idea es muy sencilla, y se basa en el hecho de aproximar linealmente los elementos. Las soluciones de la ecuación que hemos escrito no expresan nada más que la curva de nivel 0 de la función f. Supongamos que partimos de un cierto punto que está por encima de esta curva de nivel (es decir, partimos de una cierta solución en la ecuación). Queremos considerar qué sucede cuando hacemos variar x en un cierto valor Δx, y hacemos variar y en un cierto valor Δy, pero de tal modo que los nuevos valores $x + \Delta x$ e $y + \Delta y$ estén todavía sobre la curva de nivel (es decir, que satisfagan también la ecuación anterior). La fórmula de la aproximación lineal en la función dice que

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Pero dado que $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y)$, tendremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \approx 0$$

Fijémonos en que esta expresión es lineal en los incrementos, por lo que podemos reordenarla y obtener:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Tomando límites cuando los incrementos tienden a cero, obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial x}{\partial y}}$$

Este procedimiento que hemos utilizado será válido siempre que podamos despejar el cociente $\Delta y / \Delta x$, y esto es posible si la división por $\frac{\partial f}{\partial y}$ tiene sentido, es decir, si $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. **El teorema de la función implícita** nos asegura que el razonamiento que acabamos de hacer está bien fundamentado: siempre que podamos despejar el cociente de incrementos, la función implícita que estamos considerando está bien definida matemáticamente.

De este modo obtendremos las derivadas en los dos ejemplos que hemos visto anteriormente.

Ejemplo 3.14. Sea $f(x,y) = x^2 \log(y) - 1 = 0$. Entonces tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = -\frac{x^2/y}{2x\log(y)} = -\frac{x}{2y\log(y)}$$

Si no hacemos explícita la relación $y = g(x)$, entonces tampoco podemos expresar $\frac{dy}{dx}$ sólo en términos de x. Para apreciar la diferencia que hay entre esto y tener la relación explícita, podemos resolver la ecuación de partida en términos de y, y escribir:

$$y = g(x) = e^{x^{-2}},$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = -2x^{-3}e^{x^{-2}}$$

(Observad, por cierto, la aplicación de la regla de la cadena para encontrar esta derivada.) La derivada explícita no se parece demasiado a la implícita, pero podemos pasar de la segunda a la primera si, en su expresión, ponemos $e^{x^{-2}}$ en lugar de y.

Ejercicio

3.10. Suponed que la ecuación $x + e^{-x} + y^2 + \log(y) = 0$ define una relación implícita entre x e y. Encontrad la derivada de y respecto de x aplicando la regla de derivación implícita.

Lo que hemos hecho más arriba con una ecuación y dos variables, lo podemos hacer con múltiples ecuaciones y variables (siempre que sea superior el número de variables al de ecuaciones, claro). Lo que aparece a continuación lo damos más bien a modo de ilustración para ver cómo se puede generalizar lo hecho más arriba cuando hay más variables y/o más ecuaciones. La idea básica es que, en este caso, el asunto no varía sustancialmente, sino que sólo aparecen los elementos que debemos esperar con el crecimiento de la dimensionalidad. Por ejemplo, supongamos que las dos ecuaciones

$$f(x,y,z) = 0 \qquad \text{y} \qquad g(x,y,z) = 0$$

definen una relación entre las tres variables *x, y* y *z*, en la que *y* y *z* son las variables dependientes y *x* es la variable independiente. Notad que, si tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas, los valores de dos de las incógnitas están determinados por las ecuaciones, después de fijar el valor de la tercera. Si consideramos, como antes, incrementos de las variables, encontraremos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\approx 0\\ \frac{\partial g}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial g}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial g}{\partial z}\Delta z\approx 0\end{aligned}$$

Dividiendo las dos ecuaciones por Δx, tendremos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta x}\approx 0\\ \frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta x}\approx 0\end{aligned}$$

Podemos expresar esta ecuación en forma matricial:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\ \frac{\Delta z}{\Delta x}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial g}{\partial x}\end{bmatrix}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{bmatrix}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\ \frac{\Delta z}{\Delta x}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial g}{\partial x}\end{bmatrix}$$

Tomando límites cuando $\Delta x\to 0$, tendremos

$$\begin{bmatrix}\frac{dy}{dx}\\ \frac{dz}{dx}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial g}{\partial x}\end{bmatrix}$$

De todos modos, no parece demasiado conveniente tratar de memorizar esta fórmula, sino que lo más razonable sería intentar seguir los mismos pasos para obtener el resultado.

Observad que para llegar a despejar los cocientes de los incrementos, hemos tenido que invertir una matriz. Si esta matriz es efectivamente invertible, el **teorema de la función implícita** nos asegura que las funciones implícitas con las que estamos trabajando están bien definidas matemáticamente.

3.9. Solucionario

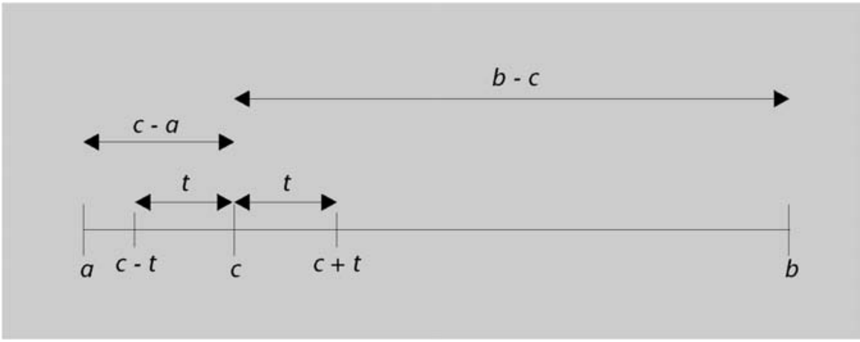
3.1. Esto presenta un poco de tautología: todo punto de un rectángulo abierto está rodeado por el mismo rectángulo; por lo tanto, un rectángulo abierto es un conjunto abierto.

De hecho, lo que aquí tendríamos que precisar más es el significado de "estar rodeado". En el texto hemos tomado el intervalo abierto de números reales como concepto primitivo; por lo tanto, podemos admitir como definición que cualquier punto de un intervalo abierto está rodeado por el mismo intervalo y, en consecuencia, cualquier punto de un rectángulo abierto está rodeado por el mismo rectángulo.

Incluso podríamos ir más allá y demostrar que todo punto de un rectángulo abierto está rodeado por otro rectángulo abierto centrado en aquel punto. Ahora la cosa cambia, pero no es demasiado difícil hacerlo si entendemos cómo hay que actuar con un intervalo abierto de números reales. Por ejemplo, supongamos que $c \in (a, b)$, es decir $a < c < b$. Queremos demostrar que hay un intervalo abierto centrado en c y contenido en (a, b). Un intervalo centrado en c es de la forma $(c - t, c + t)$, donde t es un cierto número positivo. Es sencillo ver que cualquier número t que sea menor que los dos números $b - c$ y $c - a$ da lugar a un intervalo centrado en c y contenido en (a, b). Un dibujo puede ayudar a verlo.

Intervalo abierto

El punto c está contenido en otro intervalo abierto en él.



En general, dado cualquier punto $c = (c_1, c_2 ... c_n)$ de un rectángulo abierto R, siempre hay otro rectángulo abierto que está centrado en c y está enteramente contenido en R. Para encontrarlo, efectuamos la operación que acabamos de ver para cada uno de los componentes, y el resultado es el rectángulo centrado en c que buscamos.

3.2. El conjunto

$$\{v \in R^n : a < f(v) < b\}$$

es la intersección de los conjuntos abiertos

$$\{v \in R^n : a < f(v)\} \text{ y } \{v \in R^n : f(v) < b\}$$

3.3. Los dibujos son sencillos y los dejamos para vosotros.

– Si $f(x, y) = x$ y $g(x, y) = y$, entonces el conjunto es la intersección de los conjuntos abiertos

$$\{(x, y) : 0 < f(x, y) < 1\} \; y \; \{(x, y) : 0 < g(x, y) < 1\}$$

– Si $f(x, y) = x + y$, el conjunto es $\{(x, y) : 0 < f(x, y) < 1\}$.

– Si $f(x, y) = x^2 + y^2$, el conjunto es $\{(x, y) : f(x, y) < 1\}$.

– R^2 es abierto, ya que cualquier punto está rodeado por un rectángulo abierto contenido en R^2.

– Si $f(x, y) = x - y$, el conjunto es $\{(x, y) : f(x, y) < 0\}$

3.4. El conjunto

$$\{v \in R^n : a \leq f(v) \leq b\}$$

es la intersección de los conjuntos cerrados

$$\{v \in R^n : a \leq f(v)\} \text{ y } \{v \in R^n : f(v) \leq b\}\}$$

3.5. Los dibujos son sencillos y los dejamos para el estudiante.

– Si $f(x, y) = x$ y $g(x, y) = y$, entonces el conjunto es la intersección de los conjuntos cerrados

$$\{(x, y) : 0 \leq f(x, y) \leq 1\} \text{ y } \{(x, y) : 0 \leq g(x, y) \leq 1\}$$

– Si $f(x, y) = x+y$, el conjunto es $\{(x,y) : 0 \leq f(x,y) \leq 1\}$

– Si $f(x, y) = x^2 + y^2$, el conjunto es $\{(x,y):f(x,y) \leq 1\}$

– Si $f(x, y) = x + y$, el conjunto es la intersección de los conjuntos cerrados

$$\{(x, y) : f(x, y) \leq 1\} \text{ y } \{(x, y) : f(x, y) \geq 1\}$$

3.6. Como hemos hecho antes, dejamos los dibujos para vosotros.

Los conjuntos compactos son:

– El conjunto $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \text{ y } 0 \leq y \leq 1\}$. Según hemos visto antes, es cerrado. Está claro que es acotado, ya que se trata de un rectángulo acotado.

– El conjunto $\{(x, y) : x + y \leq 1, x \geq 0, \text{ e } y \geq 0\}$. Es cerrado, ya que es la intersección de los dos cerrados:

$$\{(x, y) : f(x, y) \leq 1\}, \{(x, y) : g(x, y) \geq 0\}$$

donde $f(x, y) = x + y$ y $g(x, y) = \min\{x, y\}$. Que es acotado lo demuestra el hecho de que está incluido dentro del rectángulo acotado

$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \text{ y } 0 \leq y \leq 1\}$$

– Ya hemos visto antes que es el conjunto $\{(x ,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ cerrado. Que es acotado lo demuestra el hecho de que está incluido dentro del rectángulo acotado $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \text{ y } 0 \leq y \leq 1\}$.

– El conjunto $\{(x, y) : x + y = 1, x \geq 0, \text{ e } y \geq 0\}$ es cerrado, ya que es la intersección de los tres cerrados:

$$\{(x, y) : f(x, y) \leq 1\},$$

$$\{(x, y) : f(x, y) \geq 1\}, \text{ y}$$

$$\{(x, y) : f(x, y) \geq 1\},$$

donde $f(x, y) = x + y$ y $g(x, y) = \min \{x, y\}$. Que es acotado lo demuestra el hecho de que está incluido dentro del rectángulo acotado

$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \text{ y } 0 \leq y \leq 1\}$$

Los conjuntos no compactos son:

– El conjunto $\{(x, y) : x \leq 1 \text{ e } y \leq 1\}$ no es acotado, ya que cada uno de los dos componentes pertenece al intervalo no acotado $(-\infty ,1]$.

– El conjunto $\{(x, y) : 0 \leq x + y \leq 1\}$ no es acotado: dado un número M tan grande como queramos, siempre podemos encontrar x e y que sean mayores que M en valor absoluto. Por ejemplo, $x = M + 1$ e $y = -(M + 1)$ pertenecen al conjunto.

– El conjunto $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, no es cerrado, ya que su complementario es el conjunto $\{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1\}$, que no es abierto.

– El conjunto $\{(x, y) : x + y = 1\}$, no es acotado: dado un número M tan grande como queramos, siempre podemos encontrar x e y que sean mayores que M en valor absoluto. Por ejemplo, $x = M + 2$ e $y = -(M + 1)$ pertenecen al conjunto.

3.7.Se deduce inmediatamente de las relaciones $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ y $\log(a^b) = b\log(a)$.

3.8. Tenemos $g(x,y) = h[f(x,y)] = \log[x^{2/3}y^{1/3}]$. Entonces:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{x^{2/3}y^{1/3}}\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3} = \frac{2}{3}x^{-1}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{x^{2/3}y^{1/3}}\frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3} = \frac{1}{3}y^{-1}$$

3.9.Obtenemos $g(p)$ a partir de $f(x,y) = \log(x) + 2\log(y)$, tomando $x = p^2$ e $y = p^4$ Por lo tanto,

$$g'(p) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dp} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dp} = \frac{1}{x}2p + \frac{2}{y}4p^3 = \frac{1}{p^2}2p + \frac{2}{p^4}4p^3 = \frac{2}{p} + \frac{8}{p} = \frac{10}{p}$$

Ahora encontramos $g(p)$ primero:

$g(p) = \log(p^2) + 2\log(p^4) = 2\log(p) + 8\log(p) = 10\log(p)$

Por tanto,

$$g'(p) = \frac{10}{p}$$

3.10. Definimos $f(x,y) = x + e^{-x} + y^2 + \log(y) = 0$. Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - e^{-x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + \frac{1}{y}$$

Por lo tanto,

$$(1 - e^{-x})\Delta x + \left(2y + \frac{1}{y}\right)\Delta y \approx 0$$

De donde despejamos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{-1 + e^{-x}}{2y + \frac{1}{y}}$$

Tomando límites obtenemos la derivada de la función implícita

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 + e^{-x}}{2y + \frac{1}{y}}$$

3.10. Sumario

Esta sección ha sido más formal que las precedentes. Hemos visto las definiciones de continuidad y diferenciación para funciones multivariantes.

Hemos aprendido a aplicar la regla de la cadena, que es la herramienta que permite diferenciar funciones arbitrarias obtenidas mediante la composición de funciones elementales conocidas.

Finalmente, hemos visto cómo podemos diferenciar funciones definidas implícitamente, una herramienta muy útil para lo que los economistas denominan *análisis de estática comparativa*.

Ejercicios de autoevaluación

1. Dada la función $f(x, y) = xy$, ¿qué representa la curva de ecuación $xy = 9$?
a) Los puntos que están en una misma altura igual a 9.
b) Los puntos que definen los máximos de la función.
c) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

2. ¿Cómo se definiría la sección de una función $f(x, y)$ en el punto $(x_0 y_0)$ siguiendo la dirección del vector (v, w)?
a) $(x_0 y_0)+f(v, w)$
b) $f((x_0 y_0)+t(v, w))$
c) $f(x_0 y_0)+f(tv, tw)$

3. La sección de la función $f(x, y) = xy$ en el punto (2, 3) y siguiendo la dirección (1, 0) es
a) $3(2 + t)$
b) $2(3 + t)$
c) $t^2 + 2t - 3$

4. Las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x^{y^2}$ son

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}; \frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^2} 2y \text{ Ln} y^2$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}; \frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^2} 2y \text{ Ln} x$

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1} 2y; \frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^2} 2y \text{ Ln} x$

5. Si existe $\lim_{(x, y) \to (1, 2)} f(x, y) = 3$, entonces

a) el $\lim_{x \to 1} (\lim_{y \to 2} (x, y))=3$

b) el $(\lim_{y \to 2} f(x, y))$ no necesariamente debe valer 3.

c) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

6. El dominio de la función z=ln(xy+1) es
a) dom$z = \{(x, y) | xy \geq -1\}$
b) dom$z = \{(x, y) \ | xy > -1\}$
c) dom$z = \{(x, y) \ | x > 0 \text{ y } y > 0\}$

7. La derivada de la función implícita de x definida por la ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ es

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{-9x}{4y}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{9y}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{-3x}{2y}$

8. El conjunto dado por los puntos (x, y), en el que $x^2 + y^2 < 1$ es
a) compacto.
b) acotado pero no cerrado.
c) cerrado.

9. La intersección de dos conjuntos cerrados siempre es un conjunto cerrado. Si S es cerrado y T es compacto, entonces podemos asegurar que
a) $S \cap T$ es compacto.
b) $S \cup T$ es compacto.
c) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

10. El vector gradiente de $f(x, y) = x^2 y^2 \text{In}(x^2 + y^2)$ en el punto (0,1) es
a) (1, 0)
b) (1, 1)
c) (0, 0)

11. La aproximación lineal a la función $e^{x^2+y^2}$ es

a) $2e^{x^2+y^2}(x\Delta x + y\Delta y)$

c) $2e^{x^2+y^2}(\Delta x + \Delta y)$

d) $2xe^{x^2}\Delta x + 2ye^{y^2}\Delta y$

Solucionario

Ejercicios de autoevaluación

1. a, **2.** b, **3.** a, **4.** b, **5.** a, **6.** b, **7.** a, **8.** b, **9.** a, **10.** c, **11.** a.

Glosario

conjunto compacto
Conjunto que es cerrado y acotado al mismo tiempo.

conjunto acotado
Conjunto que está contenido dentro de un rectángulo abierto y que tiene por componentes intervalos acotados

conjunto abierto
O es un conjunto abierto si cada punto de O está incluido en un rectángulo abierto que está contenido enteramente en O.

conjunto cerrado
Conjunto complementario de un conjunto abierto.

curva de nivel
La curva de nivel c –dada una función f y un número real c– es el conjunto de todos los vectores v, en donde f(v) = c .

derivada
Función lineal que aproxima una función dada alrededor de un punto. La gráfica de la derivada es el plano tangente, en el punto a cuyo alrededor hacemos la aproximación al gráfico de la función.

derivada direccional
Derivada de la función univariante que se obtiene cuando evaluamos una función multivariante a lo largo de una recta.

derivada parcial
Derivada de la función univariante que se obtiene cuando mantenemos fijos los valores de todas las variables excepto una.

función implícita
Relación de dependencia entre dos variables o más, definida a partir de una ecuación o de un sistema de ecuaciones.

gradiente
Vector que tiene como componentes las derivadas parciales de la función. Siempre apunta hacia la dirección de crecimiento máximo de la función.

multivariante
Función con dos o más variables.

rectángulo abierto
Subconjunto de R^n que resulta cuando tomamos un intervalo abierto en cada eje y después encontramos todos los vectores que tiene cada componente dentro de sus intervalos.

regla de la cadena
Norma para encontrar la derivada de una función compuesta a partir de las derivadas de las funciones componentes.

Bibliografía

Buenas obras de consulta sobre cálculo diferencial e integral, con un enfoque más formal que el que nosotros hemos utilizado en este curso, son:

Apostol, Tom (1967). Cálculus. Reverté.

Salas, S.; Hilee, Einar. Cálculus. Reverté.

Podéis encontrar numerosos problemas resueltos en el libro:

Sanz, Paloma; Vázquez, Francisco, J. (1995). *Cuestiones de cálculo*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Una obra muy buena dirigida a economistas, pero todavía no traducida al castellano ni al catalán, es:

Sydsaeter, Knut; Hammond, Peter (1995). *Mathematics for Economic Analysis. Englewood cliffs*, N.J.: Prentice-Hall International.