

# Comunicacions digitals en banda base

Margarita Cabrera  
Francesc Tarrés Ruiz

Revisió a càrrec de  
Francesc Rey Micolau  
Francesc Tarrés Ruiz

PID\_00184981



*Els textos i imatges publicats en aquesta obra estan subjectes –llevat que s'indiqui el contrari– a una llicència de Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 Espanya de Creative Commons. Podeu copiar-los, distribuir-los i transmetre'ls públicament sempre que en citeu l'autor i la font (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), no en feu un ús comercial i no en feu obra derivada. La llicència completa es pot consultar a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.ca>*

# Índex

<b>Introducció</b> .....	5
<b>Objectius</b> .....	7
<b>1. La modulació digital en banda base. Aspectes essencials</b> .....	9
<b>2. Aplicacions de les modulacions digitals en banda base</b> .....	13
2.1. Modulació NRZ i modulació RZ .....	13
2.2. Modulació NRZI .....	15
2.3. Modulació bipolar (AMI) .....	16
2.4. Modulació <i>M</i> -polar .....	20
2.5. Modulacions <i>M</i> -unipolars .....	23
<b>3. Modulacions d'impulsos d'amplitud (PAM)</b> .....	24
3.1. Modulador digital PAM .....	24
3.2. Paràmetres de configuració de les modulacions PAM .....	27
3.3. Energia mitjana de les modulacions M-PAM .....	29
3.4. Desmodulador M-PAM .....	30
<b>4. Probabilitat d'error</b> .....	35
4.1. Condicions de càlcul de la probabilitat d'error .....	35
4.2. Probabilitat d'error per a una modulació 2-PAM polar .....	37
4.3. Probabilitat d'error per a una modulació 2-PAM unipolar .....	39
4.4. Probabilitat d'error per a una modulació M-PAM polar .....	40
<b>5. Ocupació espectral de les modulacions de impulsos</b> .....	44
5.1. Densitat espectral amb impulsos rectangulars .....	45
5.2. Modulacions PAM amb impulsos <i>sinc</i> .....	46
5.3. Impulsos d'arrel de cosinus realçat .....	48
<b>6. Interferència intersimbòlica</b> .....	52
6.1. Interferència intersimbòlica ISI .....	52
6.2. Diagrama d'ull .....	56
<b>Resum</b> .....	59
<b>Exercicis d'autoavaluació</b> .....	61
<b>Fórmules matemàtiques</b> .....	64
<b>Bibliografia</b> .....	65



## Introducció

En aquest mòdul s'estudien els fonaments de les comunicacions digitals en banda base, mentre que en el mòdul següent s'analitzaran els sistemes digitals passabanda. És important distingir entre aquests dos tipus de sistemes de transmissió de dades. Els sistemes en banda solen usar-se en aplicacions en què la distància de la transmissió és curta i el senyal està ben protegit, normalment per mitjà de cables.

L'essència dels sistemes en banda base rau en el fet que cada bit o símbol lògic condiona la forma d'ona del senyal que transmetem mitjançant una regla ben definida. L'espectre d'aquest senyal està centrat en la baixa freqüència i la seva amplada de banda depèn de la velocitat a la qual es transmeten els bits, i augmenta quan la taxa de bits s'incrementa. El caràcter de baixa freqüència del senyal condiona que aquest mecanisme de transmissió es degradi de manera considerable en augmentar la distància i que només s'utilitzi en sistemes de curta distància. Els exemples més típics són les connexions sèrie RS-232 o els USB (*universal serial bus*).

Quan es vol transmetre el senyal digital a través d'un canal ràdio o a distàncies més grans, és recomanable usar freqüències més elevades per a les quals poden trobar-se antenes amb mides físiques realitzables. Parlem, en aquests casos, de *modulacions digitals passabanda*. Un dels avantatges de les modulacions passabanda és que ens permeten que diferents canals puguin compartir el mateix medi sense que es produeixin interferències. Els sistemes de comunicació digital passabanda solen partir d'un senyal digital passabaix que modulen mitjançant algun mecanisme de translació de freqüència per a optimitzar-ne la transmissió al medi.

En altres mòduls hem estudiat diferents sistemes de modulació passabanda per al cas de senyals analògics. En concret, els sistemes de modulació d'amplitud (AM), modulació de freqüència (FM), banda lateral vestigial (VSL), etc., són sistemes en els quals el senyal de banda base (normalment veu o àudio) es trasllada en freqüència, al voltant d'una freqüència portadora, per a facilitar-ne la transmissió al medi i permetre la multiplexació de diferents fonts de senyal. El senyal de veu o àudio sense modular, en banda base, tal com la captura un micròfon i l'amplificador corresponent, només pot ser enviat a distàncies curtes, generalment usant cables.

En comunicacions digitals la idea general és la mateixa. Els bits es representen mitjançant nivells de tensió o formes d'ona simples, ben especificades, construint un senyal de banda base (baixa freqüència) que suporta la informació de la font de dades digital. Aquest senyal pot ser transmès a distàncies curtes mitjançant cables però si volem optimitzar-ne la transmissió a grans distàncies caldrà modular-lo i traslladar-lo en freqüència. El receptor passabanda haurà de ser capaç de recompondre la forma d'ona del senyal banda base.

Així doncs, per a dissenyar un sistema de transmissió de dades digitals s'ha de tenir en compte tant la construcció del senyal en banda base (que analitzem en aquest mòdul) com les tècniques de modulació passabanda que en condicionen la transmissió a grans distàncies en funció del medi (que s'analitza en un altre mòdul). Veurem que moltes de les eines d'anàlisi que es presenten en ambdós tipus de sistemes són comunes i, per aquest motiu, els conceptes introduïts en aquest mòdul són essencials per a comprendre els principis de funcionament de qualsevol sistema de comunicacions digital.

El mòdul s'estructura de la manera següent:

- 1) En l'apartat 1 es presenten els aspectes essencials d'aquest mòdul.
- 2) L'apartat 2 es dedica a la definició de les modulacions digitals més simples i utilitzades per diferents sistemes de curta distància.
- 3) En l'apartat 3, es defineix una modulació digital en banda base genèrica, denominada *modulació d'impulsos per amplitud* o PAM. En aquest apartat es descriuen els paràmetres més determinants que es fan servir posteriorment per a avaluar la qualitat d'un sistema de comunicacions digitals i es presenta també l'estructura d'un desmodulador de senyals PAM.
- 4) En l'apartat següent, s'estudia la qualitat dels sistemes de comunicacions digitals mitjançant la figura de la probabilitat d'error en què es tenen en compte condicions de transmissió no ideals degudes a la presència de soroll. Aquest apartat és, sens dubte, el que té més importància de tot el mòdul, ja que és bàsic saber caracteritzar el comportament de les modulacions digitals en general a partir de la probabilitat d'error.
- 5) En l'apartat 5 es consideren les condicions de transmissió no ideals, fet que porta a estudiar, especialment, l'amplada de banda que ocupen les modulacions de tipus PAM.
- 6) Finalment, l'últim apartat es dedica a estudiar els efectes d'una transmissió en condicions no ideals sobre el senyal transmès.

#### Notació

Recordeu que en les seqüències o senyals discrets, la variable independent és un nombre natural i es representa entre clàudators  $[n]$  mentre que en els senyals continus o analògics la variable independent temps és real i es representa entre parèntesis  $(t)$ .

#### Vegeu també

Les tècniques de modelització passabanda s'estudien en el mòdul "Comunicacions digitals passabanda" d'aquesta assignatura.

## Objectius

Els objectius d'aprenentatge principals d'aquest mòdul es poden resumir en els conceptes i les tècniques d'anàlisi següents:

1. Caracteritzar els elements principals que intervenen en una modulació passabaix basada en la transmissió d'una seqüència d'impulsos.
2. Identificar els paràmetres principals que caracteritzen una modulació digital com la velocitat de bit o taxa de transmissió, diferenciar entre *símbol* i *bit*, *energia mitjana transmesa per bit* i *amplada de banda*.
3. Distingir entre *modulació polar* i *unipolar* i entre *modulació binària* i *modulació multinivell*.
4. Dissenyar el desmodulador digital basat en el filtre adaptat a l'impuls transmès i els llindars de detecció de símbols.
5. Analitzar la probabilitat d'error com a mesura de qualitat dels sistemes de modulacions digitals i estudi detallat per al cas particular de canals gaussianes. Analitzar la relació entre aquesta probabilitat d'error i l'energia mitjana transmesa per bit.
6. Estudiar els efectes produïts per la distorsió del canal, posant èmfasi en la interferència intersimbòlica i les repercussions que tenen en la degradació de la probabilitat d'error.
7. Estudiar els impulsos limitats en banda basats en l'impuls arrel cosinus realçat.





## 1. La modulació digital en banda base. Aspectes essencials

Des del punt de vista funcional, un **modulador digital** s'identifica amb un bloc que fa una transformació de senyals i que pot presentar-se de manera simplificada com es mostra en la figura 1. El senyal d'entrada és discret, de valors binaris i en aquest mòdul es denomina  $b[n]$ . La seva velocitat es mesura mitjançant la velocitat de bit,  $r_b$ , en bits per segon. El senyal de sortida  $s(t)$  és una forma d'ona contínua en el temps i transporta d'alguna manera la informació binària de la seqüència de bits.

Dins de l'esquema general d'un sistema de comunicacions, el **modulador digital** és el subsistema encarregat de construir la forma d'ona d'un senyal en funció dels bits que es volen representar.

Això és, a l'entrada d'aquest sistema es troba present una seqüència de bits que cal transmetre digitalment, és a dir, una forma d'ona física que representa la informació digital. La seqüència de bits és un conjunt de 0 i 1 ordenats i procedents d'un dispositiu d'emmagatzematge digital. El senyal modulat digitalment es representa amb una funció contínua en temps i en general es manifesta mitjançant una tensió elèctrica. Col·loquialment, pot afirmar-se que l'entrada al sistema modulador digital es processa "per programari" i la sortida es processa "per maquinari".

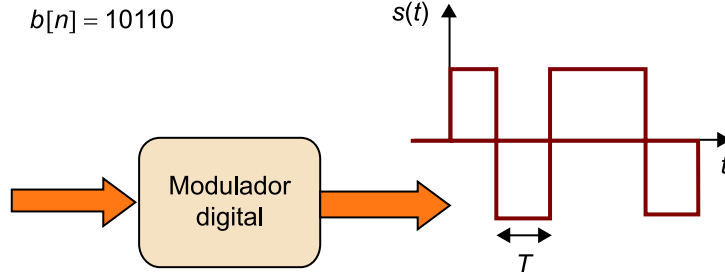
Dit d'una manera més formal, el modulador digital és la interfície que fa el mapatge de la informació digital (seqüència de bits) i les formes d'ona contínues o analògiques s'adapten a les característiques del canal. El mapatge en general es fa prenent conjunts de  $b$  bits, i associant a cada un d'aquests conjunts un senyal d'energia finita que es transmet en temps real.

El senyal modulat resultant ha d'adoptar la forma més adequada per a poder-se transmetre pel canal. És important determinar l'amplada de banda que ocupa i les característiques espectrals corresponents per tal de saber com el canal pot afectar el senyal.

Observeu en l'exemple representat en la figura 1 de transmissió d'una seqüència de 5 bits, que l'amplitud positiva del senyal modulat es correspon amb el bit 1 i l'amplitud negativa del senyal modulat es correspon amb el bit 0. En freqüència, l'amplada de banda que ocupa aquest senyal es relaciona amb la

velocitat binària de la seqüència d'entrada i es classifica com una modulació digital en banda base. El contingut freqüencial se centra al voltant de la freqüència zero.

Figura 1. Modulador digital



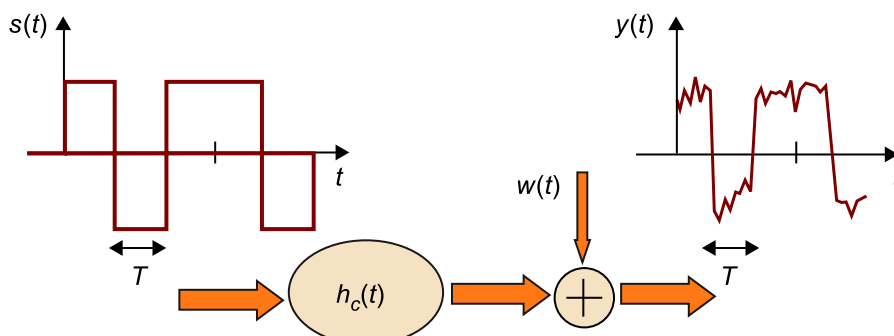
La funció base que suporta la informació digital en el senyal de sortida de la figura 1 és un impuls rectangular. En aquest exemple, el bit determina l'amplitud d'aquest impuls, i la forma temporal particular és:

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (1)$$

En aquesta expressió,  $T$  és el marge de temps dedicat a la transmissió de cada bit. Així, per exemple, la seqüència de bits s'ha de transmetre a una velocitat d'1 Mbps, això és, s'ha de transmetre un milió de bits cada segon. Del que s'ha dit, resulta que el temps que es dedica a la transmissió de cada bit és igual a 1 microsegon ( $\mu\text{s}$ ). Més endavant es formalitzen els dos paràmetres: velocitat de bit, també anomenada *velocitat de transmissió*, i *temps de bit*.

Un cop generat el senyal modulad, si aquest correspon a una transmissió en banda base i no requereix un trasllat a una banda superior, el senyal consistent en una seqüència d'impulsos s'envia directament al canal de transmissió, que en aquest mòdul es modelitza com un canal invariant i de soroll additiu blanc gaussià. Aquest mateix model s'utilitza també en el mòdul de senyals passabanda i queda simplificat de manera gràfica en la figura 2.

Figura 2. Model de canal invariant i de soroll additiu blanc gaussià



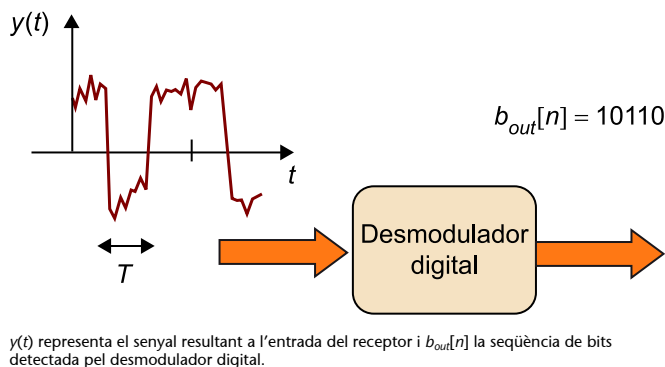
$s(t)$  representa el senyal modulad digitalment,  $h_c(t)$  la resposta impulsional del canal,  $w(t)$  el soroll del canal i  $y(t)$  el senyal resultant a l'entrada del receptor.

Observeu com el senyal que realment s'obté en l'extrem receptor és una versió degradada del senyal original. La degradació es deu, en part, al filtratge fet pel canal per la convolució amb  $h(t)$  i el soroll que se suma al resultat. Des d'un punt de vista matemàtic, el senyal a l'entrada del receptor pot escriure's de la manera següent:

$$y(t) = h_c(t) * s(t) + w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau)d\tau + w(t) \quad (2)$$

A més del modulador i el canal de transmissió, el tercer element clau en la cadena del sistema de transmissió és el desmodulador digital, que s'encarrega de fer les operacions inverses al modulador digital. És a dir, a partir del senyal rebut s'ha de generar, a la sortida del desmodulador digital, la seqüència de bits que coincideixi de la millor manera possible amb la seqüència de bits que s'hagi transmès. Formalment, es diu que el desmodulador digital ha de detectar els bits rebuts amb un mínim d'errors respecte als bits transmesos.

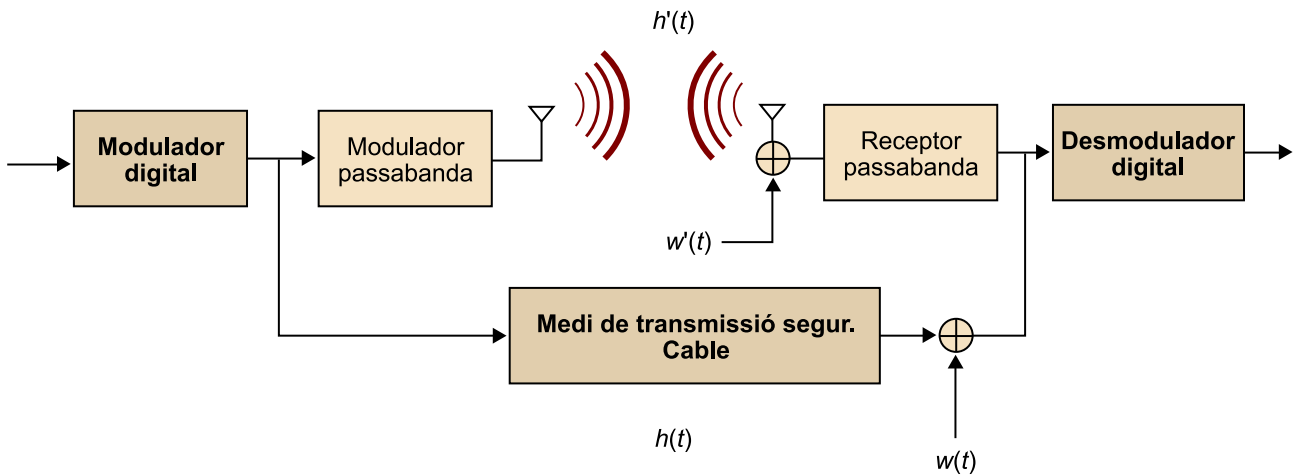
Figura 3. Desmodulador digital



Comparant la seqüència de bits d'entrada de la figura 1 amb la seqüència de bits de sortida de la figura 3, s'observa que per a aquest exemple en particular no s'ha produït cap error en la transmissió dels 5 bits representats.

Resulta interessant comparar des del punt de vista gràfic els sistemes de modulació digital en banda base amb els sistemes de modulació digital passabanda. La figura 4 mostra la integració entre els dos subsistemes i indica en negreta els blocs que s'estudien en aquest mòdul. És molt important insistir en el fet que la viabilitat d'usar un tipus de sistema de comunicacions o un altre depèn de l'aplicació.

Figura 4. Representació esquemàtica de la integració entre els sistemes de comunicacions en banda base i els sistemes passabanda



En negreta s'assenyalen els blocs corresponents a un sistema en banda base i que són analitzats amb detall en aquest mòdul.

Els sistemes de banda base només es poden utilitzar per a distàncies curtes en les quals hi ha poca degeneració del senyal banda base. Distàncies llargues comporten sempre la necessitat d'introduir algun tipus de modulació de la informació. Observeu també que encara que en el gràfic apareix representat un sistema de transmissió sense fil, a la pràctica es poden usar sistemes guiats. L'essència d'un sistema de passabanda és la presència d'una modulació que trasllada el senyal que s'ha de transmetre a regions de l'espectre amb millors característiques de propagació.

En definitiva, en el sistema de comunicacions genèric que s'estudia en aquest mòdul analitzem les característiques de senyals en els tres elements principals del sistema de comunicacions: el modulador, el canal i el desmodulador.

En concret, per als diferents tipus de formes d'ona o modulacions i diferents modes d'assignar les amplituds a cada tipus, s'analitza:

- La probabilitat que els bits es detectin amb errors en el desmodulador (apartat 4).
- L'amplada de banda que ocupen els senyals (apartat 5).
- La repercussió que tenen sobre la qualitat del sistema la resposta impulsionial del canal si aquesta no és ideal i genera distorsió sobre el senyal transmès (apartat 6).

## 2. Aplicacions de les modulacions digitals en banda base

Els sistemes de comunicacions en els quals es transmeten directament modulacions digitals en banda base solen denominar-se *codificadors de línia*.

Els **codificadors de línia** transmeten el senyal modulat digitalment a baixa freqüència, sense fer un trasllat en freqüència a una banda específica de l'espectre.

En general, els codificadors de línia s'utilitzen per a interconnectar equips de comunicacions directament entre ells o per a interconnectar sistemes pròxims que fan aplicacions de tractament digital de senyal. La forma del senyal modulat,  $s(t)$ , representa directament la tensió que està present en els cables que comuniquen els equips.

En general, sempre interessa transmetre senyals que no tinguin component contínua, especialment si el recorregut per cable és llarg. La raó principal per la qual s'intenta reduir la presència de component contínua és la millora en la propagació del senyal, tot i que també és important tenir en compte que l'existència de component contínua dificulta la recuperació de sincronismes. Els senyals constants es propaguen de manera deficient a través d'un cable. A més, si la tensió varia d'acord amb un determinat patró de forma constant, és més fàcil mantenir el relloige del receptor sincronitzat amb el del transmissor.

La sincronització entre el transmissor i el receptor és fonamental per a determinar l'inici i el final de cada bit, i també la durada. Si el senyal que es rep és constant, el receptor no disposa de prou informació en l'extrem receptor.

En aquest apartat es presenten els formats de modulació més comuns en els sistemes de transmissió que utilitzen codificadors de línia relacionant-los, en algun cas, amb estàndards de comunicació àmpliament coneguts.

### 2.1. Modulació NRZ i modulació RZ

Les modulacions de línia NRZ (sense retorn a zero<sup>1</sup>) i RZ (amb retorn a zero<sup>2</sup>) són considerades les modulacions més elementals per a la transmissió de la informació en banda base.

#### Reflexió

Fixeu-vos que per als codificadors de línia, el cable físic és el que en aquest apartat modelitzem com la resposta impulsional del canal de comunicacions de la figura 2.

<sup>(1)</sup>En anglès, *non-return zero*.

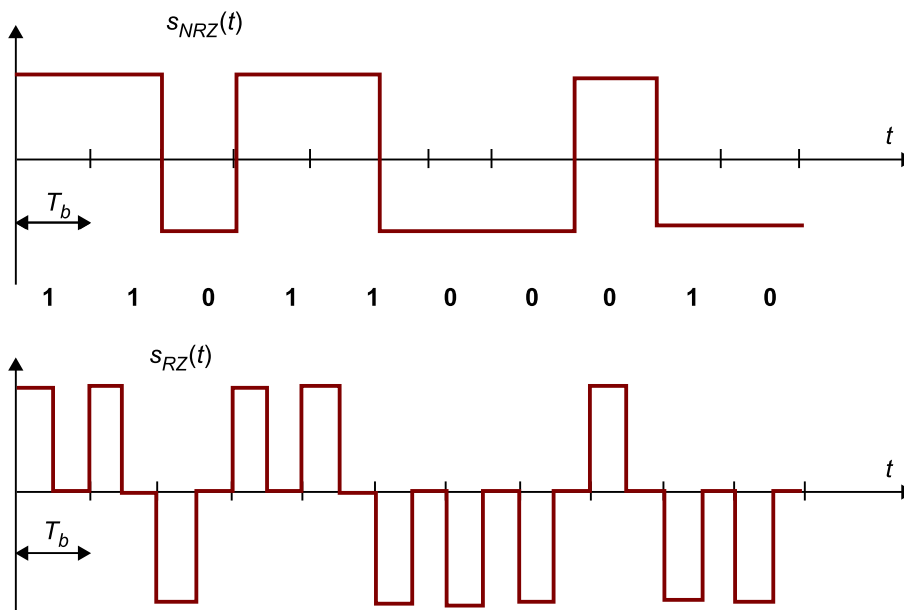
<sup>(2)</sup>En anglès, *return zero*.

La **modulació NRZ** consisteix simplement en la idea intuïtiva d'assignar un nivell de tensió positiu quan el bit que es vol transmetre és un 1 i un nivell de tensió negatiu quan volem transmetre un 0. El nom de *sense retorn a zero* es deu al fet que el senyal roman estable durant tot el temps de transmissió del bit.

L'alternativa directa a NRZ és la **modulació RZ**, en la qual també s'utilitza una tensió positiva per a indicar la presència d'un 1 i una tensió negativa per a la presència d'un 0. En aquest cas, però, quan s'ha transmès la informació, el senyal retorna al valor de tensió zero abans no es produeixi el bit següent.

Tenint en compte les definicions anteriors, veiem que quan en una seqüència de bits apareixen diversos 1 o 0 consecutius, el senyal NRZ es manté constant, no retorna a zero, mentre el senyal RZ sempre té variacions i retorna al valor zero després de la transmissió de cada bit. En la figura 5 es mostren les formes d'ona associades a cada una de les modulacions de línia per a una seqüència binària determinada.

Figura 5. Formes dels senyals modulats en funció del temps



A dalt: NRZ; a baix: RZ.

En comparar els dos formats de transmissió veiem que NRZ pot tenir una component contínua significativa, sobretot quan es produeixen diversos valors de 0 o 1 consecutius en la seqüència binària. A més, RZ ens proporciona la garantia que el senyal sempre té canvis constants, independentment dels valors dels bits de la seqüència binària. Això constitueix un avantatge important per a garantir una detecció correcta del sincronisme, atès que el receptor sap que en cada bit es produeix un retorn a zero. Això no obstant, l'amplada de banda del senyal RZ és més gran que la del senyal NRZ, com indica la major activitat

en els canvis de tensió. Aquest augment en l'amplada de banda no sempre és adequat, ja que les característiques del cable poden limitar la taxa màxima de bits que es poden transmetre.

EL format de senyal NRZ s'utilitza en l'estàndard RS-232, que és un protocol que determina com intercanviar dades binàries en sèrie entre diferents dispositius o plaques que processen digitalment el senyal. Tot i que s'utilitza en diferents aplicacions, la més popular segurament és el port sèrie de molts ordinadors, sobretot en aplicacions industrials.

Els exemples NRZ i RZ, de la manera com s'han presentat, són de tipus polar, perquè les amplituds dels impulsos són d'ambdues polaritats, positiva i negativa. Hi ha també les versions RZ i NRZ unipolar, i en aquest cas, quan es transmet el bit 1, es presenta la polaritat positiva i, quan es transmet el bit 0, es presenta la polaritat nul·la i el senyal val 0 volts. Les representacions gràfiques corresponents coincideixen amb les del cas polar de la figura 5, tret del fet que els senyals anirien de 0 a un valor positiu.

### Polaritat

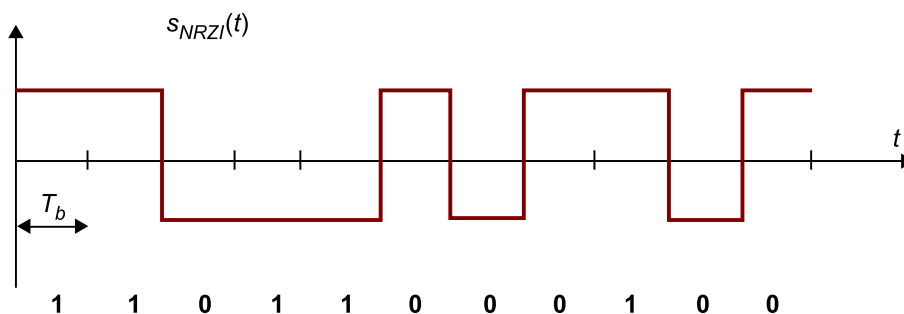
En esmentar la polaritat d'un senyal, s'ha d'interpretar com el signe positiu o negatiu de la tensió elèctrica mitjançant la qual es manifesta aquest senyal.

## 2.2. Modulació NRZI

NRZI significa NRZ invertit<sup>3</sup>. Per a aquest format de modulació, també binària, l'amplitud de l'impuls dedicat a la transmissió de cada bit coincideix amb l'amplitud de l'impuls que s'ha transmès anteriorment si el bit actual és un 1, i canvia de polaritat respecte de l'impuls anterior quan el bit actual és un 0. És a dir, quan es produeix un 0, canvia la polaritat del senyal i quan es transmet un 1, la polaritat es manté. En la figura 6 es representa esquemàticament aquest tipus de codi de línia en el qual es pot observar que els canvis de polaritat es produeixen quan s'ha de transmetre un bit igual a zero.

<sup>(3)</sup>En anglès, *non-return zero inversion*.

Figura 6. Exemple NRZI binària



Forma d'ona del senyal modulat per a una seqüència de bits determinada.

Aquest tipus de modulació és l'utilitzat en els ports d'ordinador estàndard USB<sup>4</sup>, els connectors dels quals s'han popularitzat avui dia per a interconnectar diferents tipus de perifèrics a l'ordinador, o fins i tot per a alimentar i carregar les bateries dels equips. Els connectors USB es troben actualment en gairebé tots els dispositius i terminals: telèfons, agendes electròniques, dispositius de memòria, càmeres fotogràfiques, teclats, ratolins, sistemes d'alimentació, etc. La seva popularitat és tan alta que pràcticament han desaparegut altres tipus de ports com els PS/2 (per a connectar teclats i ratolins), els ports sèrie tipus RS-232 o els ports paral·lels (que s'usaven principalment per a impressores i dispositius que demanaven una gran amplada de banda).

<sup>(4)</sup>USB és la sigla de l'expressió anglesa *universal serial bus*.

En aquest tipus de senyalització, a partir de les transicions provocades pels 0, es facilita l'obtenció del sincronisme del senyal. És a dir, en la recepció, a partir d'aquestes transmissions s'ajusta l'inici de cada símbol. Si arriben molts 1 seguits, aquest sincronisme es pot perdre. Per a evitar que això passi en la senyalització de l'estàndard USB, es fa el que s'anomena *farçiment de bits*<sup>5</sup>, que consisteix a afegir un 0 després d'un seguit de sis 1 consecutius, independentment del valor del bit posterior. Mitjançant aquesta tècnica, s'alenteix la transmissió del senyal; i, al mateix temps, no cal transmetre un senyal diferent per a obtenir el sincronisme de la modulació.

<sup>(5)</sup>En anglès, *bit stuffing*.

Les especificacions d'USB més ràpides són per a l'USB 3.0, que és compatible amb versions anteriors i assoleix velocitats d'1,5 Mbps, 12 Mbps, 480 Mbps (USB 2.0) i fins a 5 Gbps (USB 3.0).

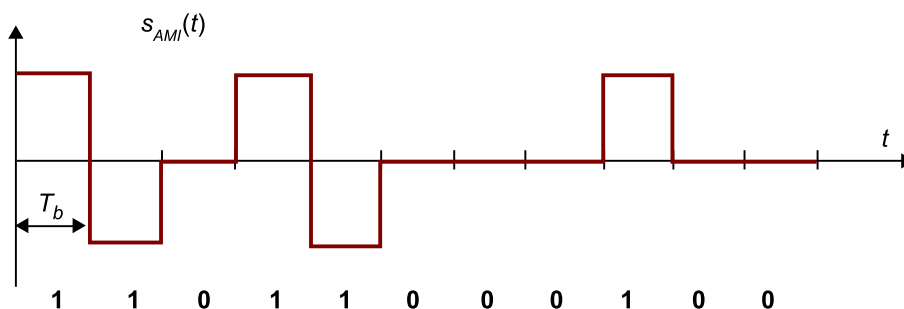
### 2.3. Modulació bipolar (AMI)

La modulació bipolar es denomina també AMI<sup>6</sup> o inversió de marca alternada i consisteix a assignar 0 volts al bit 0 i polaritat positiva i negativa de forma alternada quan es transmet un bit 1.

<sup>(6)</sup>AMI és la sigla de l'expressió anglesa *alternate mark inversion*.

En la figura 7 es pot observar la manera com el senyal és nul en els trams en els quals es transmet un bit 0 i quan es transmet un bit 1 és positiu si havia estat negatiu en transmetre l'últim bit 1 i a la inversa.

Figura 7. Exemple bipolar o AMI



Forma d'ona del senyal modulat en funció del temps per a una determinada seqüència de bits.



La modulació bipolar redueix la component contínua del senyal, ja que alterna constantment el signe del senyal transmès. D'aquesta manera podem garantir que no tenim component contínua, fet que facilita la transferència del senyal a través del medi. Tanmateix, aquesta estratègia de modulació no assegura cap temps màxim perquè es produeixin canvis de polaritat, fet pel qual el sincronisme del sistema pot ser difícil d'aconseguir en alguns casos. En efecte, si la seqüència de bits té un nombre de 0 molt llarg, el senyal de línia sempre estarà a zero volts, i serà complex mantenir el rellotge del receptor.

Hi ha diferents variants de la modulació bipolar que intentaran garantir que sempre es produeixen canvis de polaritat dins d'un temps límit. Una d'aquestes variants és el format HDB3 utilitzat en la xarxa digital de serveis integrats (XDSI<sup>7</sup>) per a interconnectar o multiplexar diferents senyals binaris entre ells. Això ocorre quan a través d'un cable telefònic es transmeten simultàniament diferents senyals i d'aquesta manera es poden oferir diferents serveis a través de la xarxa com ara videoconferències.

<sup>(7)</sup>XDSI és la sigla de l'expressió *xarxa digital de serveis integrats*.

#### Vegeu també

En l'exemple 2 (subapartat 2.5) es consideren amb una mica de detall algunes modulacions alternatives a la modulació AMI, que es poden interpretar com a generalitzacions d'aquesta.

### Exercici 1. Diferents tipus i variants de codificadors de línia

En aquest exercici es pretén aprofundir sobre algunes variants de modulacions de línia. En concret es consideren les modulacions:

- Biphase (també denominada *biphase mark code* - BMC)
- Manchester
- Manchester diferencial
- HDB3
- 8b10b

Per a cada una es demana:

- Descriu breument com es construeix el senyal de línia a partir d'una seqüència de bits genèrica.
- Quins avantatges/inconvenients té cada una? Esmenteu aplicacions en què s'utilitzi cada una de les modulacions anteriors.
- Determineu un senyal de línia corresponent a la seqüència de bits següent: 110101000000011.
- Calculeu l'energia mitjana per bit de cada modulació suposant que els nivells de tensió que utilitzem són de  $\pm 5$  volts i que volem transmetre una seqüència de bits equiprobable a una velocitat de 10 Mbps. (Nota: per al cas d'HDB3 o 8b10b suposeu que la probabilitat que es produeixin seqüències de 4 o més bits iguals és molt baixa i que per tant l'energia pot aproximar-se per la d'una modulació AMI convencional.)

#### Solució

- Per cada cas considerat, el senyal de línia es construeix de la manera següent:
  - **Biphase mark code:** a l'inici de cada bit es produeix un canvi de nivell. Si es tracta d'un 0, es manté el nivell durant tot el període però si es tracta d'un 1, es modifica en el centre del període de temps associat a aquest bit.
  - **Manchester:** la forma d'ona assignada a l'1 és un impuls de durada  $T$  que comença en un nivell positiu i a la meitat del període canvia a negatiu. La forma d'ona associada al 0 també té una durada  $T$  però comença en nivell negatiu i a la meitat del període canvia a positiu.
  - **Manchester diferencial:** si el bit actual és 1 es manté el nivell del bit anterior i es canvia de nivell a la meitat del període de símbol. Si el bit és 0 es canvia el nivell del bit anterior i es torna a canviar a la meitat del període del símbol.
  - **HDB3:** el codi HDB3 s'utilitza per a evitar el problema que representa que aparegui un nombre elevat de zeros consecutius, fet que dificultaria la sincronització del senyal

rebut, i consisteix en la utilització de l'impuls rectangular NRZ i la llei de codificació de símbols següent:

- Cada bit 1 es codifica amb polaritat invertida a l'últim impuls no nul transmès.
- Els bits 0 es codifiquen amb amplitud nul·la sempre que no excedeixin de tres bits 0 seguits.
- A partir del primer bit transmès es fa un recompte de polaritat del passat. Si el nombre d'impulsos coincideix amb el nombre d'impulsos negatius, la polaritat és nul·la. Si un grup supera l'altre en un impuls, la polaritat del passat és positiva o negativa.

Quan arriben 4 bits 0000 seguits al codificador, l'últim bit, en lloc de codificar-se mitjançant quatre amplituds nul·les com en el cas d'AMI, es codifica mitjançant un bit de violació de polaritat, igual polaritat a l'últim impuls transmès, i es denomina *V*, però sempre sense arribar al fet que la polaritat positiva o negativa excedeixi en més d'un impuls i, per aquest motiu també, quan convingui, el primer d'aquests quatre bits es codificarà amb polaritat no nul·la (*B*) però sense violar la polaritat (se'n pot trobar una descripció més detallada i amb una taula d'exemple en el problema 3 dels exercicis proposats en el llibre de text).

- **8b/10b.** Es tracta d'un codi de línia l'objectiu del qual és codificar la seqüència de bits d'entrada en una seqüència nova en la qual el nombre total de 0 i 1 estigui equilibrat. El codi final té la propietat que si es pren una seqüència de 20 bits la quantitat d'1 i la de 0 no difereixen en més de 2 bits. A més, és possible garantir que mai apareixen més de cinc 1 o 0 consecutius. Aquestes propietats asseguren que el senyal manté sempre una freqüència de canvis mínima que facilita la recuperació del rellotge en el receptor que limita la potència del senyal en la component contínua. El codi originalment va ser patentat per IBM tot i que se'n va fer un ús reduït en la indústria. Quan IBM va decidir alliberar la patent del codi, aquest es va passar a utilitzar en un gran nombre d'aplicacions pràctiques.

Taula 1

**3b/4b**

3b/4b code			
Input	RD = -1	RD = +1	
	HGF	fghj	
D.x.0	000	1011	0100
D.x.1	001	1001	
D.x.2	010	0101	
D.x.3	011	1100	0011
D.x.4	100	1101	0010
D.x.5	101	1010	
D.x.6	110	0110	
D.x.P7 †	111	1110	0001
D.x.A7 †	111	0111	1000

**5b/6b**

5b/6b code						
Input	RD = -1	RD = +1		Input	RD = -1	RD = +1
	EDCBA	abcdei			EDCBA	abcdei
D.00	00000	100111	011000	D.16	10000	011011 100100
D.01	00001	011101	100010	D.17	10001	100011
D.02	00010	101101	010010	D.18	10010	010011
D.03	00011	110001		D.19	10011	110010
D.04	00100	110101	001010	D.20	10100	001011
D.05	00101	101001		D.21	10101	101010
D.06	00110	011001		D.22	10110	011010
D.07	00111	111000	000111	D.23 †	10111	111010 000101
D.08	01000	111001	000110	D.24	11000	110011 001100
D.09	01001	100101		D.25	11001	100110
D.10	01010	010101		D.26	11010	010110
D.11	01011	110100		D.27 †	11011	110110 001001
D.12	01100	001101		D.28	11100	001110
D.13	01101	101100		D.29 †	11101	101110 010001
D.14	01110	011100		D.30 †	11110	011110 100001
D.15	01111	010111	101000	D.31	11111	101011 010100
				K.28	11100	001111 110000

Adaptada de wikipedia.org

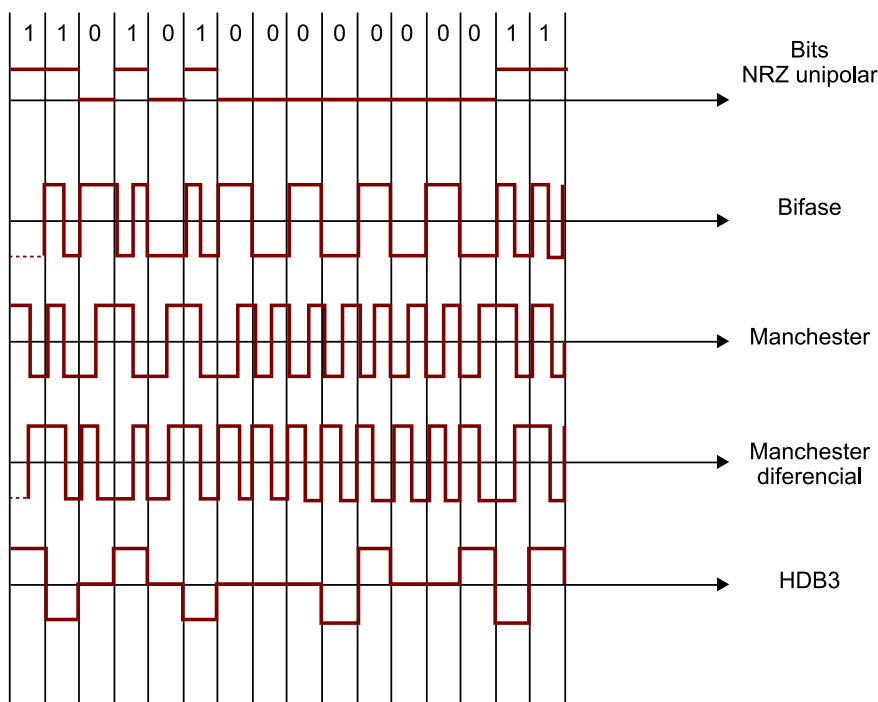
La codificació funciona essencialment a través de taules. Cada 8 bits es converteix a 10 bits. Per tant, de les 256 possibles paraules se seleccionen les 1.024 que ens proporcionen millors propietats pel que fa a equilibri i compensació de zeros i uns. Per tal de fer la codificació, la paraula de 8 bits es divideix en dues parts, una de 5 bits i una altra de 3 bits. A més, es genera una variable d'estat denominada *running disparity* que sempre s'inicialitza al valor -1. L'assignació del codi es fa

consultant taules que proporcionen el valor final en funció del grup de bits i el valor de *running disparity*. El valor de *running disparity* canvia de  $-1$  a  $+1$  i a l'inrevés sempre que la paraula final resultant tingui una quantitat de 0 i 1 no compensat (2 valors més d'un valor que de l'altre). Si el nombre de 0 i 1 de la paraula de 10 bits és igual, el valor de *running disparity* es manté. Les taules de codificació poden trobar-se en diferents fonts. En les taules següents es proporcionen els resultats que poden trobar-se en la wikipedia.org.

b) En tots els casos es tracta d'estratègies que intenten facilitar la recuperació de sincronismes, imposant que sempre apareguin transicions tot i que la seqüència de dades original tingui molts 1 o 0 consecutius. Bifase, Manchester i Manchester diferencial tenen formes d'ona que varien molt ràpidament (tal com es pot veure en l'apartat següent). En canvi, HDB3 té un nombre menor de canvis i, per tant, una amplada de banda més optimitzada. Els seus principals usos són:

- Bifase: estàndards de transmissió d'àudio digital AES/EBU (AES3) i SPDIF
- Manchester: Ethernet
- Manchester diferencial: IEEE 802.5 (Xarxes d'àrea local en anell de testimoni o *token ring*)
- HDB3: xarxa digital de serveis integrats. Multiplexació de diversos senyals
- 8b/10b: PCI Express, IEEE 1294b, USB 3.0, DVI, HDMI, Display Port, Serial ATA.

c) En la figura següent es proporcionen les formes d'ona de cada una de les modulacions de línia per a la seqüència de bits establerta en l'enunciat. No s'ha representat la modulació 8b/10b, ja que en augmentar el nombre de bits els eixos temporals dels bits no coincidirán amb la resta de modulacions. El resultat de la codificació 8b/10b es discuteix més endavant. Algunes de les solucions no són úniques perquè depenen de les condicions inicials en les quals es trobava el sistema. D'altra banda, alguna de les modulacions poden tenir definicions lleugerament diferents en funció del text consultat. La valoració de l'exercici tindrà en compte aquestes possibles variacions entre les respostes i la coherència del resultat amb els continguts que s'han exposat en el primer apartat.



En la codificació 8b/10b la seqüència es descompon en blocs de 8 bits, per a cada un dels quals s'obté una paraula de 10 bits que es codificarà en NRZ. Així, la nostra seqüència 11010100 00000011 es descompon en dues parts. Al seu torn, cada una de les parts es divideix en els 5 bits de més pes i els 3 de menys pes. Als primers se'ls assignarà un fragment de 6 bits i al segon un de 4 utilitzant les taules proporcionades en l'apartat anterior i tenint en compte l'estat del *running disparity* que suposem que originalment tenen el valor  $-1$ . D'acord amb això:

$$11010 = D.26 \rightarrow 010110$$

$$100 = D_x.4 \rightarrow 1101$$

Per tant, 11010100 es converteix en 0101101101 i el *running disparity* s'actualitza a +1.

Tenint en compte aquest resultat, el segon paquet de 8 bits es codificarà:

$$00000 = D.00 \rightarrow 011000$$

$$011 = D_x.3 \rightarrow 0011$$

Fet pel qual la seqüència final de 10 bits associada al segon byte serà 0110000011

**d)** En els tres primers casos, l'energia del 0 i de l'1 són  $A^2T$ , per la qual cosa la mitjana és  $A^2T$ . Per tal de justificar aquest resultat és necessari veure que per a calcular l'energia d'un bit, cal agafar la forma d'ona del senyal, elevar-la al quadrat i integrar. Els senyals que tenim tenen una amplitud  $A$  o  $-A$  durant el període de bit, i per aquest motiu quan s'eleva al quadrat l'amplitud esdevé  $A^2$ . En integrar  $A^2$  durant un període de temps  $T$  obtenim el resultat  $A^2T$ .

$$E_{\text{bifase, Manchester}} = A^2T$$

El cas del 8b/10b és semblant a l'anterior, atesa la codificació del senyal, que és NRZ. L'energia de cada bit és idèntica i igual a l'amplitud al quadrat multiplicada per la durada del bit. No obstant això, ara hem de tenir en compte que la durada del bit haurà de ser menor perquè s'ha dut a terme la conversió de 8 a 10 bits. El nou període de bit serà determinat per  $T' = 8T/10$ .

En el cas AMI (HDB3 sota la hipòtesi que la probabilitat que es produeixin 4 zeros consecutius és molt baixa) tenim que la probabilitat que el bit sigui zero serà de 0,5 (un 50 % dels casos). L'energia associada al bit 0 és nul·la, ja que el senyal té un nivell d'amplitud 0. A més, la probabilitat que el nivell prengui el valor  $+A$  o  $-A$  serà de 0,25 en cada un dels casos. En aquest, el nivell d'amplitud del senyal és  $A$ , i per tant l'energia serà  $A^2T$ . L'energia mitjana total serà, per tant:

$$E_{\text{AMI mitjana}} = 0,5 \times 0 + 0,25 \times A^2T + 0,25 \times A^2T = 0,5 A^2T$$

## 2.4. Modulació M-polar

La modulació *M*-polar és la modulació que presenta *M* nivells o amplituds diferents per a un mateix senyal. En els exemples anteriors poden veure's modulacions que són binàries, perquè només s'assigna un nivell a cada bit.

En la modulació *M*-polar es modulen els bits agrupant-los. S'assigna un nivell diferent a cada grup de bits. A continuació, es presenta un exemple que s'ha de considerar com un cas particular que posteriorment generalitzarem a un nombre de nivells qualsevol.

Per al cas de modulació polar de 4 nivells (4-polar), tenim que per a cada dos bits de la seqüència binària s'assigna una amplitud diferent als impulsos i, per tant, cada impuls dura dos bits. El temps de símbol ( $T$ ) és el doble de temps de bit ( $T_b$ ). Fixeu-vos que per a modulacions binàries els dos temps coincideixen. En el cas de la modulació polar de 4 nivells, es prenen les quatre amplituds equiespaiades o d'igual diferència d'amplitud entre cada dos nivells consecutius, segons es mostra en la taula 2.

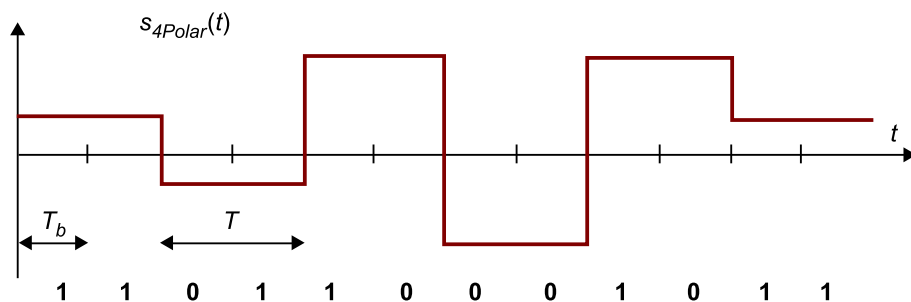
Observeu que entre dos codis consecutius, siguin els que siguin, les diferències de tensió són d'una amplitud igual a  $A$ . Això implica que el codi 01 i el codi 11 prenen els valors  $-A/2$  i  $A/2$  respectivament. També és important observar com s'han ordenat els codis. Entre dos codis consecutius només es produeix el canvi d'un bit, és a dir, el codi 01 té al darrere el codi 11, i per tant només canvia el primer bit entre aquestes dues paraules. Anàlogament, el codi 11 té com a amplitud següent el codi 10. Aquesta estratègia de codificació permet que entre dos nivells de tensió consecutius només es produeixi el canvi d'un bit. Aquesta propietat és molt important perquè la major part de sistemes pràctics estan construïts d'acord amb aquesta regla: "Dos nivells de tensió adjacents només difereixen en un bit". Els codis que compleixen aquesta propietat s'anomenen *codis de Gray*.

Taula 2. Codificació polar de 4 nivells (4-polar)

Bits	Amplitud (volts)
10	$+3A/2$
11	$+A/2$
01	$-A/2$
00	$-3A/2$

En la figura 8 es mostra el senyal temporal obtingut mitjançant la codificació 4-polar definida per la taula 2 per a una seqüència de bits determinada. És interessant observar la durada de cada un dels símbols i comparar-los amb la durada dels bits. En aquest cas concret, cada parell de bits constitueix un únic símbol. Aquesta estratègia de codificació permet que l'amplada de banda del senyal que ens representa la seqüència de bits sigui menor de l'esperada. En efecte, des d'un punt de vista purament intuïtiu, ara cada valor d'amplitud ens representa dos bits. Això significa que la cadència de canvis per a representar una seqüència binària és relativament més baixa que quan cada bit era representat per un únic valor d'amplitud.

Figura 8. Representació esquemàtica d'una modulació 4-polar prenent com a referència la taula 2 per a l'assignació de nivells de quantificació a cada parell de bits



Per a generalitzar l'exemple anterior a un altre nombre de nivells, es va augmentant el nombre de bits de cada grup que dóna lloc a una amplitud. Si els bits es prenen en grups de 3, s'obtenen  $M = 8$  possibles amplituds i s'assignen quatre valors positius i quatre valors negatius per tal que l'efecte sigui una mo-

dulació de tipus polar a la qual es denomina *8-polar*. En general, el nombre de nivells possibles és una potència de 2, ja que així resulta directe assignar a cada un dels nivells una paraula amb un nombre de bits fix. Si els grups es prenen de 4 bits, s'obtenen 16 combinacions diferents i donaria lloc a la modulació 16-polar, i així successivament.

Generalment, per a cada un dels nivells s'ha d'assignar una paraula de  $k$  bits, que pot ser escollida arbitràriament entre les  $2^k$  possibles paraules. La relació entre la paraula i el nivell d'amplitud es coneix amb el nom de *taula d'assignació*. La taula d'assignació pot ser arbitrària sempre que tant el transmissor com el receptor en coneguin la definició. Generalment, és convenient triar taules d'assignació basades en codis de Gray, de manera que les paraules associades a dos nivells adjacents només difereixin en un bit.

En l'exemple 1 es mostra una taula d'assignació de Gray per a una modulació 8-polar. Aquest tipus de modulació en banda base és comunament utilitzada en modulacions passabanda, en les quals tant la component en fase com la component en quadratura es correspon a una modulació d'impulsos i, en funció dels diferents nivells possibles per a cada impuls, es disposa de diferents formats de modulacions passabanda.

#### Vegeu també

La modulació 8-polar s'analitza amb detall en el mòdul "Comunicacions digitals passabanda" d'aquesta assignatura.

#### Exemple 1

Construcció d'una taula d'assignació 8-polar basada en codi de Gray. La taula d'assignació que es mostra a continuació té la propietat que la distància entre dos nivells adjacents és constant (i de valor igual a  $A$ ) i que les paraules binàries de 3 bits assignades a nivells adjacents només difereixen en un bit (codi de Gray). Observeu, per exemple, que entre els nivells associats a  $3A/2$  i  $5A/2$ , situats a una distància  $A$ , només es produeix el canvi en el segon bit de la paraula codi (de 001 a 011).

Taula 3. Taula d'assignació de nivells d'una modulació 8-polar utilitzant un codi de tipus Gray

Codi	Nivell
010	$7A/2$
011	$5A/2$
001	$3A/2$
000	$A/2$
100	$-A/2$
101	$-3A/2$
111	$-5A/2$
110	$-7A/2$

## 2.5. Modulacions $M$ -unipolars

Les modulacions  $M$ -polars que hem considerat tenen fins i tot nivells d'amplitud simètrics, situats al voltant del valor de tensió zero. També és possible definir les versions unipolars, en les quals tots els valors de tensió de cada nivell tenen el mateix signe (generalment el positiu). En l'exemple següent es mostra una modulació amb aquestes característiques.

### Exemple 2

En aquest exemple es mostra una taula d'assignació que correspon a un codi unipolar de 8 nivells (8-unipolar) els quals estan separats una distància constant  $A$  i en què les paraules codi només difereixen en un bit per als nivells consecutius:

Taula 4. Taula d'assignació de nivells d'una modulació 8-unipolar utilitzant un codi de tipus Gray

Codi	Nivell
010	7 A
011	6 A
001	5 A
000	4 A
100	3 A
101	2 A
111	A
110	0

### 3. Modulacions d'impulsos d'amplitud (PAM)

En l'apartat anterior s'han introduït alguns exemples i casos particulars de modulacions d'impulsos per amplitud, o PAM<sup>8</sup>. En aquest apartat intentarem presentar els mateixos conceptes però amb un estudi generalitzat a un nombre de nivells qualssevol  $M$ , essent  $M$  una potència de 2.

<sup>(8)</sup>PAM és la sigla de l'expressió anglesa *pulse amplitude modulation*.

En una modulació PAM, es transmet una seqüència d'impulsos l'amplitud dels quals es determina directament a partir de la seqüència de bits. En el cas general de més de dos nivells, que es coneix amb el nom de *modulacions multinivell*, cada grup  $b$  bits dóna lloc a una amplitud diferent segons la taula d'assignació de nivells que hem definit en els apartats anteriors.

Així, per a formar un senyal modulat es fan dues operacions de manera seqüencial a partir de cada grup de  $b$  bits:

- Obtenció de l'amplitud que s'assigna al grup de bits.
- Transmissió d'un impuls amb l'amplitud obtinguda.

En el subapartat següent es formalitzen els dos conceptes mitjançant el modulador digital.

#### 3.1. Modulador digital PAM

En aquest subapartat ens centrem en l'assignació dels nivells o amplituds a partir de la seqüència de bits i de la seva estadística.

Si els bits s'agrupen de  $b$  en  $b$ , el nombre de nivells necessaris per a donar cabuda a totes les possibles combinacions d'amplituds o nivells és de:

$$M = 2^b \text{ nivells} \quad (3)$$

Al nivell  $m$ -èssim, li correspon l'amplitud:  $a_m$ ;  $m = 1, \dots, M$ . A partir de la seqüència de bits d'entrada  $b[n]$  es forma una nova seqüència d'amplituds o símbols  $a[k]$ , segons una taula d'assignació de nivells.

La seqüència de bits és de naturalesa aleatòria i, per tant, també ho és la seqüència de símbols. Cada bit d'entrada al sistema és una variable aleatòria igual a 0 o a 1 amb una probabilitat determinada. Es diu que la seqüència de bits es caracteritza per la probabilitat que té cada bit de ser 0 o 1. La situació més freqüent consisteix en què els valors tinguin la mateixa probabilitat. En aquest cas es diu que els bits són equiprobables. Si a més els símbols es codi-

#### Amplituds, símbols o nivells

Parlarem indistintament d'*amplituds*, *símbols* o *nivells*. El més formal és parlar d'una seqüència de símbols per a referir-nos als diferents nivells que es van assignant a la seqüència de bits.



fiquen sense l'efecte memòria, és a dir, cada símbol depèn únicament dels  $b$  bits corresponents independentment dels símbols codificats amb anterioritat, aleshores els símbols també es produeixen amb la mateixa probabilitat (símbols equiprobables).

### Equiprobabilitat

Una seqüència de bits és equiprobable si cada bit és igual a 1 amb probabilitat 0,5 i és igual a 0 amb probabilitat 0,5. En definitiva, cada bit té la mateixa probabilitat de ser igual a 0 o igual a 1.

Una seqüència de símbols és equiprobable si cada valor possible es produeix amb igual probabilitat i es diu que cada símbol és una variable aleatòria discreta i uniforme.

$$P\{a[k] = a_m\} = \frac{1}{M} \quad (4)$$

En la definició anterior, és important interpretar la fórmula (4).  $a[k]$  representa la seqüència temporal de símbols que procedeix de codificar els bits. L'índex  $k$  és, per tant, temporal. El símbol que transmet en el temps  $k$  és qualsevol dels  $M$  disponibles en el conjunt dels símbols totals. L'índex  $m$  indica l'ordre de cada símbol de tots els disponibles.

La forma col·loquial d'expressar la fórmula (4) és, per tant: "En el temps  $k$ , es pot transmetre qualsevol símbol dels  $M$  disponibles. Els  $M$  símbols disponibles presenten idèntica probabilitat de ser transmesos en el temps  $k$ . Aquesta probabilitat és igual a  $1/M$ ."

### Exemple 3. Codificacions de símbol

A continuació es presenten com a exemple una taula d'assignació de nivells per a PAM 4-polar o directament 4-PAM polar (taula 5). A continuació es reproduïx aquesta taula. En la taula 6 es presenta un cas binari 2-PAM. En cada una d'aquestes es mostren les amplituds o símbols assignats en funció del bit o bits que es tinguin a l'entrada del modulador digital.

Taula 5

Bits	4-polar
	$a_m$
10	$+3A/2$
11	$+A/2$
01	$-A/2$
00	$-3A/2$

Taula 6

Bits	2polar	2-unipolar
	$a_m$	$a_m$
0	$-A/2$	0
1	$+A/2$	$+A$

Seguint amb les operacions que fa el modulador digital a partir de la seqüència d'amplituds  $a[k]$ , es forma el senyal modulat  $s(t)$ . Cada símbol multiplicat per l'impuls corresponent dóna lloc al senyal modulat, l'expressió general del qual es formula de la manera següent:

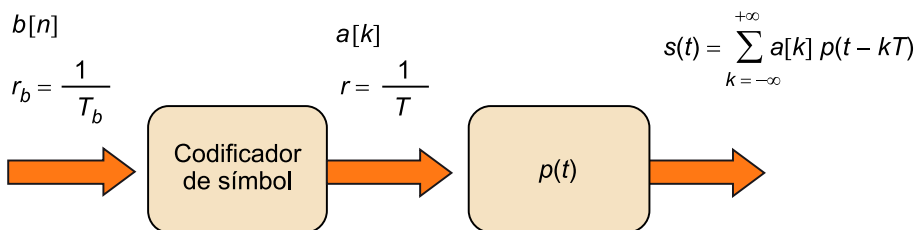
$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] p(t - kT) \quad (5)$$

A (5),  $p(t)$  és l'impuls o forma temporal que s'escull per a la transmissió de cada símbol i  $T$  representa el temps de símbol, és a dir, el temps que transcorre entre la transmissió de dos símbols consecutius.

En resum, una modulació PAM queda determinada mitjançant dos factors: el tipus de codificació utilitzat per a l'assignació d'amplituds o símbols (polar, unipolar, binari, multinivell, etc.) i l'impuls triat per a la seva conformació (NRZ, RZ, etc.). El modulador digital per a PAM es desglossa, per tant, en dues parts: el codificador de símbol i el conformador d'impuls.

Segons la idea anterior, l'esquema de la figura 1 que representa un modulador digital es desglossa en dues parts, tal com mostra la figura 9. En el primer bloc, la seqüència de bits  $b[n]$  es codifica per a donar lloc a la seqüència de símbols  $a[k]$ . En el segon bloc, es genera un impuls  $p(t)$  cada  $T$  segons d'amplitud igual al símbol corresponent  $a[k]$ . La resta de paràmetres que apareixen en la figura es defineixen detalladament en el subapartat següent.

Figura 9. Etapes d'un modulador digital: codificador de símbol i conformador d'impulsos



### 3.2. Paràmetres de configuració de les modulacions PAM

En qualsevol esquema de modulador digital és important definir els paràmetres següents:

- **Velocitat de bit o taxa de transmissió:**  $r_b$ . És el nombre de bits per segon que es transmeten pel sistema de transmissió. Les unitats són bits per segon, o abreviadament, bps.
- **Temps de bit:**  $T_b = \frac{1}{r_b}$ . És el temps transcorregut entre cada dos bits consecutius a l'entrada del modulador digital.
- **Velocitat de símbol:**  $r = \frac{r_b}{b}$ . És el nombre de símbols per segon que es transmeten pel sistema de transmissió. Atès que cada símbol transporta  $b$  bits, la velocitat de símbol és determinada per la velocitat de bit dividida pels bits associats a cada símbol, com s'indica en la definició anterior. A les unitats d'aquest paràmetre se les denomina *bauds*. Un baud equival a un símbol per segon.
- **Temps de símbol:**  $T = \frac{1}{r} = bT_b$ . És el temps transcorregut entre cada dos símbols consecutius a l'entrada del conformador d'impuls.
- **Energia mitjana de símbol:**  $E_s$ . És l'energia mitjana del senyal modulat  $s(t)$  que es transmet en el temps d'un símbol.  $E[.]$  representa la mitjana o esperança estadística.

$$E_s = E \left[ \int_0^T s^2(t) dt \right] \quad (6)$$

- **Energia mitjana de bit:**  $E_b = \frac{E_s}{b}$ . És l'energia mitjana del senyal modulat  $s(t)$  que es transmet per cada bit. Atès que cada símbol transporta  $b$  bits, es relaciona amb l'energia mitjana de símbol segons l'expressió anterior.

Segons el que acabem de dir, l'energia mitjana de símbol es pot calcular separant l'energia pròpia de la forma d'ona de l'impuls, que és una variable determinística de la component estadística del nivell d'amplitud corresponent a la combinació binària, que en aquest cas és una variable aleatòria. Tenint en compte aquests resultats obtenim la descomposició següent:

$$E_s = E \left[ a_m^2 \right] \int_0^T p^2(t) dt = E \left[ a_m^2 \right] E_p \quad (7)$$

De l'expressió (5) es dedueix que l'energia del senyal modulad PAM és igual al producte entre la mitjana estadística del quadrat dels símbols,  $E[a_m^2]$ , i l'energia de l'impuls,  $E_p$ .

Recordeu, de l'estudi de variables aleatòries que, en general, el valor de  $E[a_m^2]$  es pot obtenir com la variància de la variable aleatòria  $\{a_m\}$  més la mitjana d'aquesta variable elevada al quadrat. En el cas en què la mitjana de la variable aleatòria sigui zero, el resultat d'aquesta component de l'energia coincideix amb la variància de  $\{a_m\}$ . Resumint:

$$\begin{aligned} E[a_m^2] &= \sigma_a^2 + (E[a_m])^2 \\ E[a_m] &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M a_m = 0 \Rightarrow E[a_m^2] = \sigma_a^2 \end{aligned} \quad (8)$$

#### Exemple 4. Càlcul de l'energia mitjana en modulació polar i impulsos rectangulars NRZ

En les modulacions polars, els símbols es codifiquen amb el mateix nombre de nivells positius que negatius. Considerarem les modulacions 2-polar de l'estàndard RS-232 i la 4-polar dibuixades en la figura 5 i en la figura 8, respectivament. Per a transmetre una seqüència de bits equiprobables a una taxa de transmissió de  $r_b = 20$  kbps, es calcula a continuació l'energia mitjana de bit per a cada un dels casos, suposant que la separació entre símbols sigui  $A = 5$  volts.

#### Solució:

La mitjana estadística s'ha de fer sobre les amplituds del senyal modulad, ja que l'impuls és una funció determinista i es fixa per a tots els símbols. Si s'usa l'impuls rectangular NRZ, s'obté que l'energia de l'impuls és igual a:

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (9)$$

$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t) dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) dt = T \quad (10)$$

on hem suposat que l'amplitud de l'impuls conformador és igual a la unitat i que la durada és  $T$  (igual a la durada d'un símbol).

La potència dels símbols per al cas 2-polar, suposant que els dos símbols són equiprobables pot obtenir-se com a:

$$E[a_m^2] = \frac{1}{2} \left( \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(-\frac{A}{2}\right)^2 \right) = \frac{A^2}{4} \quad (11)$$

i per al cas 4-polar, suposant també que els 4 valors són equiprobables, s'obté:

$$E[a_m^2] = \frac{1}{4} \left( \left(\frac{3A}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(-\frac{A}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3A}{2}\right)^2 \right) = \frac{5A^2}{4} \quad (12)$$

Per al cas 2-polar tindrem que la durada de cada impuls serà  $T = \frac{1}{20.000} = 50 \cdot 10^{-6}$  s. El valor de l'energia serà, per tant:

$$E_s \text{ } 2PAM = E_b \text{ } 2PAM = \frac{A^2}{4} T = \frac{25}{4 \cdot 20.000} = 0,312 \text{ mJ} \quad (13)$$

Anàlogament, per al cas 4-polar la durada de l'impuls serà el doble ( $T = 100 \cdot 10^{-6}$ ), ja que en cada símbol es transmeten 2 bits. L'energia per símbol la donarà:

$$E_{s\ 4PAM} = \frac{5A^2}{4} T = \frac{5 \cdot 25}{4 \cdot 10.000} = 3,125 \text{ mJ} \quad (14)$$

Atès que cada símbol es correspon a 2 bits, l'energia per bit serà la meitat que l'energia per símbol. I per tant:

$$E_{b\ 4PAM} = 1,6 \text{ mJ} \quad (15)$$

Si es comparen les energies de bit per als dos tipus de modulació, es conclou que, en mantenir la distància entre símbols, totes dues modulacions tindran el mateix grau de protecció davant d'errors produïts pel soroll; tanmateix, la modulació 2-polar requereix un menor consum d'energia. Com a contrapartida, necessita una amplada de banda més gran, ja que aquesta és proporcional a la velocitat de símbol (20 kbauds en el cas binari i 10 kbauds en el cas multinivell).

### 3.3. Energia mitjana de les modulacions M-PAM

En l'exemple 1 s'obtenen expressions per a l'energia mitjana de bit de les modulacions PAM 2-polar i 4-polar en funció del paràmetre de separació entre nivells  $A$ , i del temps de bit  $T_b$ . Més endavant es mostra que l'energia de bit influeix directament en la probabilitat d'error dels bits, i per aquest motiu és interessant obtenir una expressió general que ens relacioni energia mitjana de bit d'una modulació  $M$ -polar amb el nombre de nivells de la modulació. Aquesta relació es podrà utilitzar per a fer diversos tipus d'anàlisis de la probabilitat d'error.

En els paràgrafs següents s'obté una expressió generalitzada que relaciona l'energia de bit d'una modulació multinivell  $M$ -PAM amb el nombre de bits que es transmeten a cada símbol. Per aconseguir-ho, s'assumeixen els supòsits següents:

- La modulació és polar, cosa que significa que s'utilitzen tants nivells negatius com positius de manera simètrica al voltant del 0.
- Tots els nivells tenen la mateixa probabilitat (equiprobables).

Suposem que la modulació té  $M$  nivells que es corresponen amb una codificació de  $b$  bits per símbol. D'aquesta manera, obtenim que:

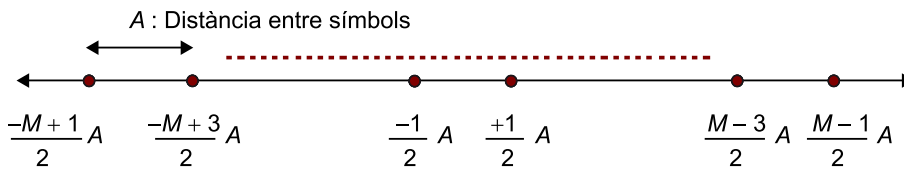
$$M = 2^b \quad (16)$$

Els  $M$  nivells estan distribuïts simètricament al voltant de la tensió 0 i separats per una distància  $A$ . La disposició dels nivells es mostra en la figura 10. Podem obtenir una fórmula general de la tensió que correspon a cada nivell  $m$  a partir de l'equació següent:

$$a_m = -\frac{M-1}{2} \cdot A + mA; \quad 1 \leq m \leq M \quad (17)$$

En aquesta equació, en donar valors a la variable  $m$ , anirem obtenint totes les amplituds de la modulació  $M$ -polar que es representen en la figura 10.

Figura 10. Representació gràfica dels nivells de tensió d'una modulació  $M$ -polar



Es té un total de  $M$  nivells disposats simètricament al voltant de la tensió 0 i tots separats una distància  $A$ .

Per a determinar l'energia per símbol de la modulació podem utilitzar la fórmula general obtinguda en l'apartat anterior:

$$E_s = E[a_m^2]E_p = \frac{E_p}{M} \sum_{m=1}^M a_m^2 = \frac{E_p}{M} \sum_{m=1}^M \left( \frac{-M+1}{2} A + mA \right)^2 = \frac{M^2-1}{12} A^2 E_p \quad (18)$$

Per a arribar a aquest resultat final és necessari desenvolupar el quadrat dins del sumatori i aplicar dues fórmules genèriques de progressions finites. Les fórmules que s'haurien d'aplicar són:

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2} \quad \sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \quad (19)$$

A partir de l'energia mitjana de símbol, l'energia mitjana de bit queda expressada com a:

$$E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{M^2-1}{12b} A^2 E_p \quad \text{amb } M = 2^b \quad (20)$$

### 3.4. Desmodulador M-PAM

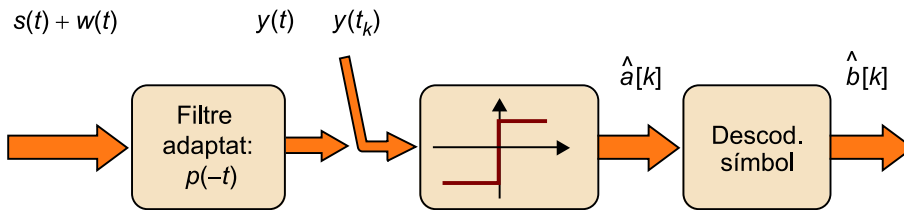
En aquest apartat estudiarem el desmodulador M-PAM. El desmodulador digital presentat en la figura 3 ha de fer per al cas de modulacions M-PAM les operacions inverses a les representades en el modulador de la figura 9. Les funcions del desmodulador es mostren en el diagrama de blocs de la figura 10 i són les següents:

- Filtre adaptat o FA: és un sistema lineal i invariant de resposta impulsional  $p(-t)$  i es diu que està adaptat a l'impuls  $p(t)$ .
- Mostreig del senyal:  $y(t_k) = y(t)|_{t=t_k}$
- Estimació de la seqüència de símbols a partir de les mostres obtingudes.

- Descodificació dels símbols per donar lloc a la seqüència de bits descodificada.

En la resta de l'apartat es descriu amb detall l'efecte que aquestes operacions tenen sobre el senyal.

Figura 11. Etapes d'un desmodulador digital M-PAM



Filtre adaptat a l'impuls, mostreig, estimador de símbol i descodificador de símbol.

Per a l'anàlisi del senyal, s'assumeix que l'únic efecte produït sobre el senyal transmès és la suma de soroll. La resposta impulsional del canal representada en la figura 2 es considera ideal.

$$h_c(t) = \delta(t) \quad (21)$$

El model assumit per al soroll es descriu en el mòdul "Comunicacions analògiques: modulacions AM i FM". El soroll de canal  $w(t)$  és un procés aleatori de mitjana nul·la i de densitat espectral:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \quad (22)$$

En definitiva, es té un canal de tipus AWGN.

### Canal AWGN

El model de senyal de soroll comunament assumit en els sistemes de comunicacions consisteix en un procés aleatori estacionari i blanc. Cada una de les mostres en temps del senyal de soroll es caracteritza com una variable aleatòria gaussiana. En aquestes condicions, es parla d'un canal de soroll additiu blanc i gaussià (AWGN). Els canals AWGN es classifiquen en canals AWGN ideals i canals AWGN amb distorsió. Els primers corresponen al cas en què la resposta impulsional únicament atenua i/o endarrereix el senyal ( $h_c(t) = \alpha\delta(t - t_d)$ ) i els segons presenten una resposta impulsional que no es poden modelitzar segons la fórmula anterior.

El filtre receptor adaptat a l'impuls transmès és òptim des de la perspectiva de maximitzar les mostres de senyal a la sortida respecte del nivell de soroll. Tot i que *a priori* podria prescindir-se'n en aplicacions en què la transmissió és molt directa i el soroll gairebé no deteriora el senyal, es considera en aquest

apartat per facilitar més endavant el càlcul de la probabilitat d'error en les millors condicions possibles. Es formula a continuació la resposta impulsional del filtre i la forma obtinguda per al senyal resultant a la sortida d'aquest filtre.

Considerant la resposta impulsional del filtre adaptat:

$$h_{FA}(t) = p(-t) \quad (23)$$

La resposta al mateix impuls es pot expressar en funció de la funció d'autocorrelació de l'impuls.

$$p(t) * p(-t) = R_p(t) \quad (24)$$

El senyal a la sortida del filtre adaptat queda com la convolució entre el senyal d'entrada al filtre adaptat i la resposta impulsional del filtre adaptat:

$$y(t) = (s(t) + w(t)) * p(-t) \quad (25)$$

On el senyal PAM és igual a:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k]p(t - kT) \quad (26)$$

Substituint (26) i (24) a l'expressió (25), s'arriba a:

$$y(t) = s(t) * p(-t) + w(t) * p(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k]R_p(t - kT) + n(t) \quad (27)$$

En l'expressió (27), el primer sumand es refereix a la modulació de impulsos PAM i el segon al terme de soroll resultant a la sortida del filtre adaptat. En la figura 12 es representa l'efecte per al cas que l'impuls  $p(t)$  sigui rectangular i NRZ. En l'esquema superior de la figura, es pot observar la forma del senyal a la sortida del filtre adaptat a l'impuls, quan l'entrada és el mateix impuls. En l'esquema inferior es representa que el senyal a l'entrada del filtre adaptat és una seqüència de cinc impulsos amb amplituds positives o negatives segons el símbol corresponent que es transmet:  $a[k]$ . El senyal de sortida s'interpreta com la superposició o suma de la resposta a cada un dels impulsos individuals.

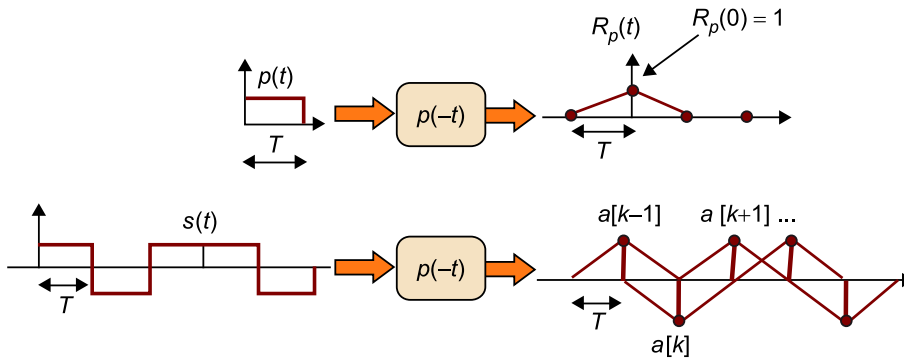
Cada una de les mostres del senyal de sortida preses a raó d'una per temps de símbol es correspon amb un dels símbols transmesos. A la sortida del filtre adaptat, l'impuls resultant s'estén en temps al llarg de dos períodes de símbol, de tal manera que, quan es pren la mostra corresponent al símbol  $a[k]$ , el nivell de senyal no es veu afectat ni pel impuls anterior corresponent al símbol  $a[k-1]$ , ni pel impuls posterior corresponent al símbol  $a[k+1]$ .

#### L'impuls $p(t)$

L'impuls  $p(t)$  és una funció d'energia finita i, com a tal, la seva funció d'autocorrelació coincideix amb la convolució de la fórmula (24).



Figura 12. Senyals resultants a la sortida del filtre adaptat



La definició següent es facilita com a recordatori de senyals deterministes d'energia finita i per ajudar a caracteritzar la influència de l'impuls sobre les mostres de senyal a la sortida del filtre adaptat.

### Densitat espectral de l'impuls

L'impuls  $p(t)$  que suporta una modulació digital és una funció determinada i d'energia finita. La seva funció d'autocorrelació és:

$$R_p(\tau) = p(\tau) * p(-\tau) = \int p(t+\tau)p(t)dt \quad (28)$$

La seva funció de densitat espectral d'energia és:

$$S_p(f) = |P(f)|^2 \quad (29)$$

I la seva energia és:

$$E_p = R_p(0) = \int S_p(f)df \quad (30)$$

Amb l'objectiu de simplificar la notació, i sense pèrdua de generalitat, es considera a partir d'aquest punt que l'impuls original està normalitzat pel fet que és d'energia igual a la unitat.

$$E_p = R_p(0) = \int p^2(t)dt = 1 \quad (31)$$

Si per exemple es considera l'impuls rectangular NRZ per tal que compleixi l'especificació d'energia igual a la unitat donada a (31), s'ha de normalitzar com a:

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (32)$$

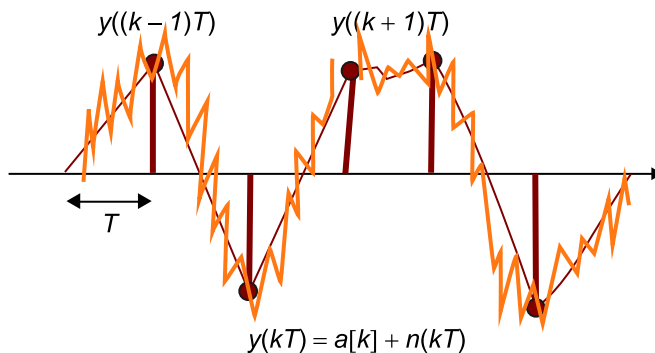
D'aquesta manera, el nivell dels símbols a la sortida del filtre adaptat coincideix amb els de la mateixa seqüència de símbols a l'entrada del modulador, i les mostres del senyal (27), preses al temps de símbol  $T$ , són igual a:

$$y(kT) = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} a[k']R_p(kT - k'T) + n(kT) = a[k] + n[k] = y[k] \quad (33)$$

Cada una de les mostres obtingudes a la sortida del filtre adaptat i especificades a (33) coincideixen amb el símbol que s'ha de detectar més una pertorbació aleatòria provocada pel soroll del canal. En l'apartat 3, les mostres de soroll es modelen i caracteritzen estadísticament per obtenir la probabilitat d'error del sistema.

En la figura 13 es representa el senyal de sortida de la figura 12 per al cas de cinc símbols 2-PAM, havent sumat les formes d'ona dels diferents impulsos i el senyal de soroll, és a dir, com es veuria aproximadament si es representés el senyal en un oscil·loscopi. Observeu que en la figura 12 es considera únicament el senyal útil PAM, però no el senyal de soroll que se suma a la modulació PAM:

Figura 13. Senyal real resultant a la sortida del filtre adaptat



Seguint l'esquema de la figura 10, les mostres obtingudes a la sortida del filtre adaptat es comparen amb un llindar (cas binari) o diversos llindars (cas multinivell) per obtenir la seqüència de símbols detectada. Per exemple, en la modulació 2-PAM polar, el llindar de comparació és el nivell de 0 volts fent l'operació següent per a cada una de les mostres.

$$\begin{aligned} y(kT) > 0 &\Rightarrow \hat{d}[k] = \frac{+A}{2} \\ y(kT) < 0 &\Rightarrow \hat{d}[k] = \frac{-A}{2} \end{aligned} \quad (34)$$

Finalment, el descodificador de símbols produeix  $b$  bits per a cada símbol detectat. En el cas binari i polar, es tindria la situació més immediata, ja que el nivell positiu produeix bit detectat igual a 1 i el nivell negatiu produeix bit detectat igual a 0.

## 4. Probabilitat d'error

En els apartats precedents, es fa la descripció genèrica de les modulacions PAM, així com dels diagrames de blocs del modulador i desmodulador per a aquest tipus de senyal. En aquest apartat es presenta la mesura de la probabilitat d'error com una estratègia d'anàlisi de la qualitat de les modulacions digitals i s'aplica al cas de modulacions PAM.

Es planteja el càlcul de les dues probabilitats d'error següents.

### Probabilitats d'error

**Probabilitat d'error de símbol o SER<sup>9</sup>:**  $P_e$  és real, positiva i delimitada al marge  $0 < P_e < 1$  i representa el tant per u de símbols que de mitjana es detecten erròniament. Per exemple  $P_e = 0,01$  significa que, de mitjana, de cada 100 símbols se'n detecten 99 correctament i 1, erròniament.

**Probabilitat d'error de bit o BER<sup>10</sup>:**  $P_b$  és real, positiva i delimitada al marge  $0 < P_b < 1$  i representa el tant per u de bits que de mitjana es detecten erròniament.

Per a les modulacions binàries, cada símbol representa un bit, per la qual cosa ambdues probabilitats coincideixen. Per a les modulacions multinivell, cada símbol representa més d'un bit, per la qual cosa en aquestes situacions la probabilitat d'error de bit és sempre menor que la probabilitat d'error de símbol.

<sup>(9)</sup>SER és la sigla de l'expressió anglesa *symbol error rate*.

<sup>(10)</sup>BER és la sigla de l'expressió anglesa *bit error rate*.

En general, interessa obtenir les expressions d'ambdues probabilitats d'error en funció de l'energia mitjana transmesa per bit ( $E_b$ ). La probabilitat d'error és decreixent amb l'energia mitjana transmesa per bit. En un sistema de comunicacions digitals, s'augmenta la qualitat de la transmissió gastant més energia per bit, i així reduna en una disminució de la probabilitat d'error (tant de bit com de símbol).

### 4.1. Condicions de càlcul de la probabilitat d'error

A continuació s'enumeren les condicions assumides per al càlcul de la probabilitat d'error:

1) l'impuls transmès es normalitza per tenir energia igual a la unitat  $E_p = 1$  segons la definició donada a (31). En definitiva, aquesta propietat significa que el nivell de tensió resultant es fixa com les amplituds dels símbols.

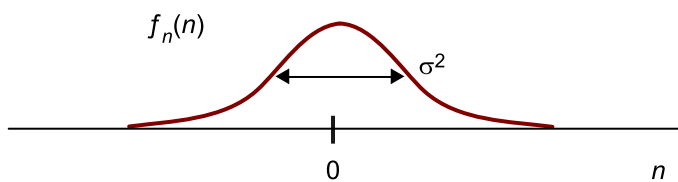
2) Els diferents símbols o amplituds són equiprobables. És a dir,  $a[kT]$  pot ser qualsevol dels  $M$  valors possibles amb igual probabilitat.

3) Les mostres obtingudes a la sortida del filtre adaptat únicament estan contaminades per les mostres corresponents del soroll resultant a la sortida de l'esmentat filtre, tal com s'expressa a la fórmula (33).

4) Els llindars de detecció s'assignen com els punts mitjans entre cada dos símbols. Prenent com a exemple l'assignació multinivell dels símbols de la figura 10, els llindars se situen a  $0, \pm A, \pm 2A$ , etc.

5) El soroll del canal  $w(t)$  és un procés aleatori d'estadística gaussiana, per la qual cosa el soroll resultant a la sortida del filtre adaptat  $n(t) = w(t) * p(-t)$  també és d'estadística gaussiana. Cada mostra de soroll  $n(kT)$  és una variable aleatòria gaussiana de mitjana nul·la i variància donada per la potència del mateix senyal de soroll  $P_n = \sigma^2$ . La seva funció de densitat de probabilitat es mostra en la figura 14.

Figura 14. Funció de densitat de probabilitat de les mostres de soroll a la sortida del filtre adaptat a l'impuls



El càlcul d'aquesta potència es fa assumint la densitat espectral de soroll de canal blanc donada a (22) i aplicant les propietats de soroll filtrat. La potència del senyal de soroll és igual a la integral de la funció de densitat espectral del senyal de soroll.

$$P_n = \sigma^2 = \int S_w(f) |P(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} E_p = \frac{N_0}{2} \quad (35)$$

La funció de densitat de probabilitat de les mostres de soroll, de mitjana nul·la i de variància  $\sigma^2$  s'expressa segons la fórmula donada i es representa en la figura 14.

$$n(kT): N(0, \sigma^2) \Rightarrow f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} \quad (36)$$

#### Figura 14

En expressar la funció de densitat de probabilitat, es prescindeix de la dependència temporal de les mostres de soroll, atès que per a totes les mostres s'obté idèntica funció de densitat de probabilitat, qualsevol que sigui l'índex temporal  $k$ . Sempre que es compleixi aquesta propietat, es diu que tant el soroll de canal com el soroll filtrat són processos aleatoris estacionaris.

#### La densitat espectral del soroll

El senyal del soroll és un procés aleatori estacionari. La densitat espectral del soroll filtrat és igual a la densitat espectral del soroll a l'entrada del filtre multiplicada per la funció de transferència del sistema en mòdul i al quadrat.

## 4.2. Probabilitat d'error per a una modulació 2-PAM polar

Havent analitzat l'estadística de les mostres de soroll, en aquest apartat es calcula l'expressió exacta de la probabilitat d'error per a la modulació 2-polar i sempre assumint les condicions donades en el subapartat anterior. S'opera de manera molt detallada per posteriorment extrapolar el resultat als altres casos de modulacions PAM.

Els símbols d'una modulació polar binària són  $(-\frac{A}{2}, \frac{A}{2})$  associats als bits (0,1) respectivament. Sota la hipòtesi que s'ha transmès un símbol positiu es té la mostra de senyal rebuda condicionada a  $+\frac{A}{2}$ :

$$y(kT) = +\frac{A}{2} + n[k] \quad (37)$$

o bé, prescindint en aquest càlcul de la dependència temporal per simplificar:

$$y = +\frac{A}{2} + n \quad (38)$$

La mostra o variable a partir de la qual s'ha de decidir si el bit transmès és un 1 o un 0 s'anomena *variable de decisió* i és al seu torn una variable aleatòria també gaussiana de mitjana  $+\frac{A}{2}$  i de la mateixa variància que la mostra de soroll.

$$y: N(+\frac{A}{2}, \sigma^2) \Rightarrow f(y|\frac{A}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\frac{A}{2})^2}{2\sigma^2}} \quad (39)$$

Anàlogament, si s'ha transmès el símbol negatiu, la funció de densitat de probabilitat de les mostres corresponents és igual a:

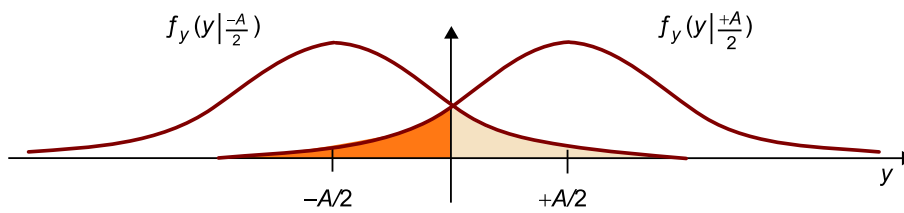
$$y: N(-\frac{A}{2}, \sigma^2) \Rightarrow f(y|-\frac{A}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y+\frac{A}{2})^2}{2\sigma^2}} \quad (40)$$

Ambdues funcions de densitat de probabilitat es representen respecte de la mateixa variable de decisió en la figura 15. En el cas que s'hagi transmès el símbol positiu, si es rep una mostra negativa es produirà un error, per la qual cosa la probabilitat de cometre un error és l'àrea de la corresponent funció de densitat de probabilitat (o f.d.p.) per sota del llindar de detecció, àrea de color gris fosc de la figura. En el cas que s'hagi transmès el símbol negatiu, si es rep una mostra positiva es produirà un error, per la qual cosa la probabilitat de cometre un error és l'àrea de la corresponent f.d.p. per sobre del llindar de detecció (àrea d'ombregat clar de la figura).

### Notació

La notació  $f(y|\frac{A}{2})$  significa la funció de densitat de probabilitat de la mostra  $y = y[k]$ , condicionada al fet que el símbol transmès en el temps  $k$ ,  $a[k]$ , sigui igual a  $+\frac{A}{2}$ .

Figura 15. Funcions de densitat de probabilitat de les mostres detectades, modulació 2-PAM polar



La probabilitat d'error total és la mitjana ponderada de les dues probabilitats d'error condicionades. És a dir, és la probabilitat de cometre un error quan s'ha transmès el símbol  $+\frac{A}{2}$  multiplicada per la probabilitat de transmetre el símbol  $+\frac{A}{2}$ , més la probabilitat de cometre un error quan s'ha transmès el símbol  $-\frac{A}{2}$  multiplicada per la probabilitat de transmetre el símbol  $-\frac{A}{2}$ .

$$P_e = \Pr\left(\frac{+A}{2}\right)\Pr(y < 0 \mid \frac{+A}{2}) + \Pr\left(\frac{-A}{2}\right)\Pr(y > 0 \mid \frac{-A}{2}) \quad (41)$$

I, per al cas de símbols equiprobables, es detalla a continuació, on la funció  $Q(\cdot)$  és l'àrea de la funció gaussiana centrada en l'origen i de variància igual a  $u$ .

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 f_y(y \mid +A/2) dy + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f_y(y \mid -A/2) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y-A/2)^2}{2\sigma^2}\right) dy + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y+A/2)^2}{2\sigma^2}\right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{A}{2\sigma}}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda + \frac{1}{2} \int_{\frac{+A}{2\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) \end{aligned} \quad (42)$$

En el cas de 2PAM polar, es conclou que la probabilitat d'error és l'àrea de la gaussiana amb argument igual al quocient entre la distància de cada símbol al llindar de decisió ( $\frac{A}{2}$ ) i la desviació del soroll. Aquest resultat és generalitzable a altres tipus de modulació. Es pot aplicar sempre que els llindars de detecció estiguin en els punts mitjans entre cada dos símbols.

En resum, la probabilitat d'error de símbol coincideix amb la probabilitat d'error de bit per a la modulació 2-PAM polar i és igual a:

$$P_b = P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) \quad (43)$$

#### El resultat final

El resultat final del càlcul de la probabilitat d'error és una integral únicament resoluble per mètodes numèrics, per la qual cosa es deixa en funció de  $Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda$ ,

que és l'àrea de la gaussiana. Aquesta funció està directament relacionada amb la funció d'error complementari  $erfc$ ,

ja que  $erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda$

i per tant es compleix que  $Q(x) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)$ . Aquesta expressió és útil, ja que la funció  $erfc$  acostuma a estar implementada en moltes aplicacions matemàtiques o bé tabulada en molts llibres de probabilitat, i es pot consultar com a pas intermediari per a obtenir la probabilitat d'error numèrica. En l'apartat 1 de fórmules matemàtiques es presenta una gràfica de la funció  $Q(x)$ .

Atès que l'energia mitjana de bit per a una modulació 2polar en les condicions donades és  $E_b = \frac{A^2}{4}$  i la potència de les mostres de soroll és  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ , la probabilitat a (43) s'expressa en funció del quocient d'energies  $\frac{E_b}{N_0}$ , també denominat *SNR per bit*.

$$P_b = P_e = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (44)$$

### 4.3. Probabilitat d'error per a una modulació 2-PAM unipolar

En la modulació binària unipolar es transmeten els símbols  $(0, +A)$  que corresponen respectivament als bits  $(0, 1)$ . Les dues f.d.p. condicionades de les mostres rebudes són similars a les de la figura 15, amb la diferència que ara estan centrades a  $(0, +A)$ , per la qual cosa, en les condicions descrites en l'apartat 3.1, se situa el llindar en el punt mitjà entre els dos símbols,  $\frac{+A}{2}$ , i la probabilitat d'error obtinguda coincideix amb la donada a (43). Aquest resultat podria induir a pensar que les modulacions polars i unipolars presenten el mateix comportament quant a probabilitat d'error; tanmateix, els dos resultats solament són comparables quan s'expressa l'argument de la funció  $Q(\cdot)$  en funció del quocient d'energies  $\frac{E_b}{N_0}$ .

Per a la modulació 2-PAM unipolar de símbols equiprobables i impulsos d'energia unitat, l'energia mitjana del senyal modulat transmès per bits és:

$$E_b = E_s = E[a_m^2] = \frac{1}{2}(0 + A^2) = \frac{A^2}{2} \quad (45)$$

Per la qual cosa, substituint  $A$  i  $\sigma$  a (43) s'obté:

$$P_b = P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (46)$$

La probabilitat d'error obtinguda per a 2-PAM unipolar (46) és pitjor que l'obtinguda per a 2-PAM polar (44), ja que, si en ambdues es requereix idèntica probabilitat d'error i en igualtat de condicions quant al soroll del canal, en el cas de la unipolar s'ha de transmetre el doble d'energia mitjana per bit. En l'exemple 5 es demostra numèricament aquest resultat.

#### Exemple 5. Càlcul de probabilitat d'error

En un sistema de transmissió binari, s'inverteix una energia mitjana per bit igual a  $E_b = 5N_0$ , essent  $N_0$  la constant de la densitat espectral del soroll del canal ideal AWGN segons (22). Es calcula la probabilitat d'error per a la modulació polar i per a la modulació unipolar.

Per a ambdues modulacions, el quocient d'energies és:

$$\frac{E_b}{N_0} = 5$$

Amb l'ajut de la gràfica que mostra la funció  $Q(\cdot)$  i que es presenta en l'annex de "Fórmules matemàtiques", s'obtenen les probabilitats:

$$P_b(\text{Polar}) = Q(\sqrt{10}) = Q(3,16) \cong 7,82 \cdot 10^{-4}$$

$$P_b(\text{Unipolar}) = Q(\sqrt{5}) = Q(2,24) \cong 1,27 \cdot 10^{-2}$$

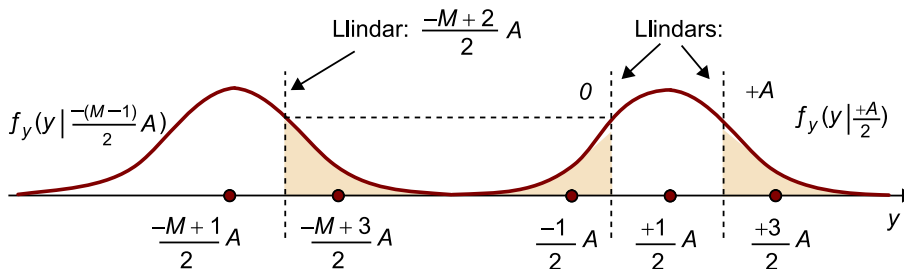
S'observa, per tant, la superioritat quant a comportament del sistema de la modulació polar. Si es desitgés equiparar la qualitat de la modulació unipolar a la de la modulació polar, s'hauria de doblar l'energia mitjana per bit per al unipolar o, dit d'una altra manera, augmentar en 3 dB l'energia invertida per bit.

#### 4.4. Probabilitat d'error per a una modulació M-PAM polar

En els subapartats 3.2 i 3.3 es calculen les probabilitats d'error per a dos casos binaris, i per tant per a dues situacions en què no es distingeix entre probabilitat d'error de símbol (SER) i probabilitat d'error de bit (BER).

En el cas multinivell, es calcula prèviament la probabilitat d'error de símbol i posteriorment la probabilitat d'error de bit. Assumint les condicions donades en l'apartat 3.1, les mostres rebudes a la sortida del filtre adaptat de la figura 10 condicionades a cada un dels possibles símbols transmesos presenten una f.d.p. de gaussianes centrades en el símbol corresponent.

Figura 16. Funcions de densitat de probabilitat de les mostres detectades, modulació M-PAM polar



En la figura 16 es representen únicament les f.d.p. corresponents a dos símbols d'un cas genèric. El primer símbol  $(-\frac{M-1}{2}A)$  és un símbol situat en un extrem, per la qual cosa la probabilitat d'error que hi està condicionada és l'àrea representada en blanc de la seva f.d.p. a partir del llindar  $-\frac{M+2}{2}A$ , i equival a  $Q(\frac{A}{2\sigma})$ . El segon símbol per al qual s'ha representat la seva f.d.p.,  $+\frac{A}{2}$ , és interior i està delimitat per dos llindars: 0, +A. La probabilitat d'error condicionada és la probabilitat que la mostra de senyal rebuda quan s'ha transmès el símbol estigui fora del marge delimitat pels dos llindars. Com cada un dels dos llindars dista  $\frac{A}{2}$  del símbol en qüestió, l'àrea total composta per les dues zones representades en blanc és el doble que l'obtinguda per a un símbol extrem i és igual a  $2Q(\frac{A}{2\sigma})$ . En calcular la probabilitat d'error total amb equiprobabilitat de



símbols i tenint en compte que es tenen dos símbols extrems i  $(M - 2)$  símbols interns, s'ha de calcular la suma de les probabilitats d'error condicionades a cada un dels possibles símbols transmesos  $Pr(error|a_m)$ , i multiplicada per la corresponent probabilitat de símbol  $Pr(a_m)$ :

$$P_e = \sum_{m=1}^M Pr(a_m)Pr(error|a_m) = \frac{1}{M}(2Q(\frac{A}{2\sigma}) + (M - 2)2Q(\frac{A}{2\sigma})) = \frac{2(M-1)}{M}Q(\frac{A}{2\sigma}) \quad (47)$$

La distància entre símbols  $A$  es relaciona amb l'energia mitjana per bit obtinguda a (20) i la desviació de soroll  $\sigma$  es relaciona amb la densitat espectral de soroll segons (35), amb la qual cosa es té:

$$P_e = \frac{2(M-1)}{M}Q\left(\sqrt{\frac{6b}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (48)$$

La BER en el millor dels casos s'obté a partir de la SER amb les consideracions següents:

- Els errors de símbols solament es produeixen entre símbols veïns o límits. Si el nivell de senyal predomina sobre el nivell de soroll ( $\frac{E_b}{N_0} > 1$ ), la probabilitat que la mostra de senyal rebuda estigui distanciada dos llindars més enllà del nivell realment transmès és molt baixa i es considera nul·la a tots els efectes.
- Dos símbols límits corresponen a agrupacions de  $b$  bits que únicament es diferencien en un d'ells. Aquest tipus de codificació es denomina *codificació de Gray*. Si, per exemple, per a un cas de  $M = 8$  símbols el tercer símbol representa la terna de bits 000, l'anterior podria representar la terna 100 i el posterior la terna 010.

Assumint ambdues consideracions, i seguint amb l'exemple de 8-PAM, si per cada cent símbols transmesos es produeix un únic error de mitjana, la SER del sistema és  $P_e = \frac{1}{100} = 0,01$ . En descodificar cada símbol correcte, s'obtenen tres bits correctes. En descodificar cada símbol erroni, s'obtenen dos bits correctes i un bit erroni, per tant de cada 300 bits transmesos, de mitjana es detecta un únic bit erroni i la BER és  $P_b = \frac{1}{300} = \frac{P_e}{3}$ . En el cas general, la BER de les modulacions M-PAM és igual a la SER dividida pel nombre de bits que es transmeten per cada símbol.

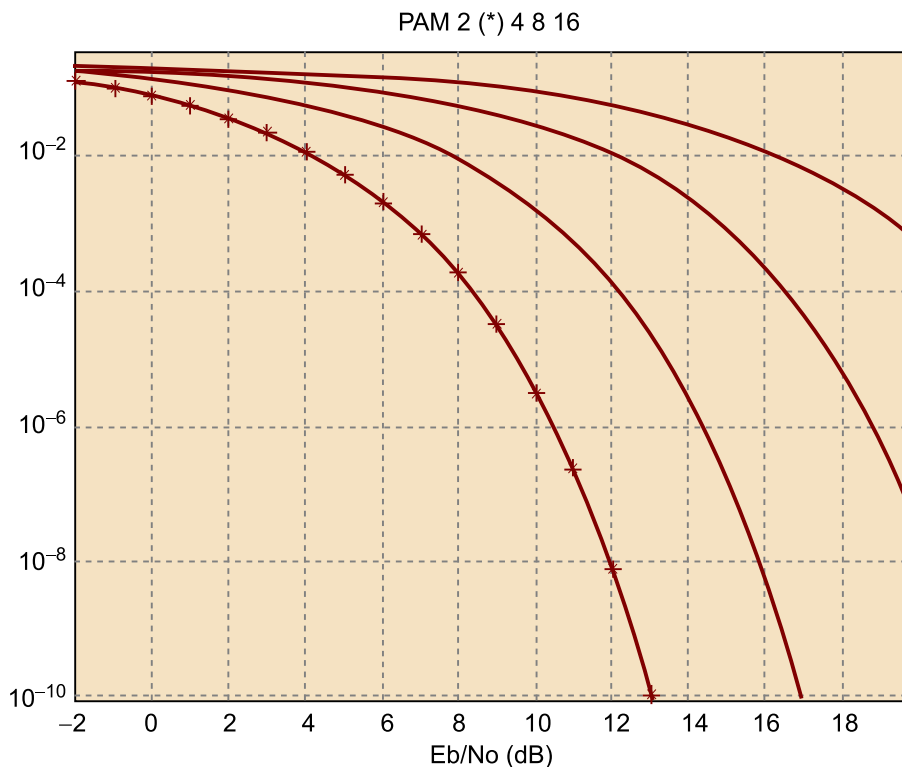
$$P_b = \frac{1}{b}P_e = \frac{2(M-1)}{bM}Q\left(\sqrt{\frac{6b}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (49)$$

L'expressió donada per a la BER a (49) és útil per a comparar modulacions de impulsos M-PAM entre ells. És interessant obtenir valors per a la BER quan es transmet una seqüència de bits a una velocitat de bit fixada i invertint una energia per bit també fixada. Dels diferents possibles formats de modulació PAM ( $M = 2, 4, 8, 16$ , etc.), el que presenta una BER menor és el resulta de millor qualitat.

La figura 16 mostra les diferents BER per a modulacions multinivell. Si es fixa el quocient d'energies  $\frac{E_b}{N_0}$  i la velocitat de bit del sistema, el nombre de nivells  $M$  més convenient s'obté com la resolució de la situació de compromís següent:

- En augmentar el nombre de nivells, es degrada la BER (inconvenient).
- En augmentar el nombre de nivells, disminueix la velocitat de símbol  $r = \frac{r_b}{b}$  i, per a aquest tipus de modulació (M-PAM polar), això repercuteix en un decrement de l'amplada de banda necessària (avantatge).

Figura 17. BER en funció del quocient d'energies per a M-PAM polar,  $M = 2(*), 4, 8, 16$



### Exemple 6. Modulació M-PAM sobre canal telefònic

Un sistema de comunicacions digitals transmet informació mitjançant una modulació M-PAM sobre un canal telefònic l'amplada de banda màxim del qual permet la transmissió d'una velocitat de símbol de  $r = 2.400$  símbols/s. El canal és ideal i AWGN. Es requereix una BER de l'ordre de  $10^{-5}$ . A continuació es calcula el quocient d'energies necessari  $\frac{E_b}{N_0}$  per a cada una de les dues velocitats de bit ( $r_b$ ) següents: 4.800 i 9.600 bits/s.

En cada una de les dues situacions, la velocitat de bit requerida determina el nombre de nivells de la modulació. El quocient de velocitats  $\frac{r_b}{r}$  és el nombre de bits que ha

de transportar cada símbol. La modulació elegida en cada cas és 4PAM (2 bits/símbol) i 16PAM (4 bits/símbol).

El quocient d'energies  $\frac{E_b}{N_0}$  es calcula invertint la fórmula de la BER obtinguda a (49)

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{M^2-1}{6b} \left( Q^{-1} \left( \frac{bM}{2(M-1)} P_b \right) \right)^2 \quad (50)$$

Per a la modulació 4-PAM ( $b = 2$ ,  $M = 4$ ):

$$\begin{aligned} \frac{E_b}{N_0} &= \frac{15}{12} \left( Q^{-1} \left( \frac{8}{6} 10^{-5} \right) \right)^2 = \frac{5}{4} \left( Q^{-1} \left( \frac{4}{3} 10^{-5} \right) \right)^2 \cong \frac{5}{4} (4,3)^2 = 23,1 \Rightarrow \\ \left( \frac{E_b}{N_0} \right)_{dB} &= 10 \log_{10}(23,1) = 13,6 \text{ dB} \end{aligned} \quad (51)$$

Per a la modulació 16-PAM ( $b = 4$ ,  $M = 16$ ):

$$\begin{aligned} \frac{E_b}{N_0} &= \frac{255}{24} \left( Q^{-1} \left( \frac{64}{30} 10^{-5} \right) \right)^2 = \frac{255}{24} \left( Q^{-1} \left( 2,1 10^{-5} \right) \right)^2 \cong \frac{255}{24} (4,1)^2 = 178 \Rightarrow \\ \left( \frac{E_b}{N_0} \right)_{dB} &= 10 \log_{10}(178) = 22,5 \text{ dB} \end{aligned} \quad (52)$$

En el cas 16-PAM, la demanda d'energia transmesa per bit augmenta considerablement respecte al cas 4-PAM. Això és degut al fet que, mitjançant 16-PAM, es transmet amb una major taxa de bit que amb 4-PAM i els requisits de BER són idèntics en ambdós casos.

## 5. Ocupació espectral de les modulacions de impulsos

En l'apartat anterior, s'ha presentat l'estratègia necessària per al càlcul de les probabilitats d'error de símbol (SER) i de bit (BER) considerant un canal de transmissió ideal. És a dir, el canal no distorsionava la forma del senyal transmès i, per tant, cada un dels impulsos rebuts a l'entrada del filtre adaptat del desmodulador PAM (figura 11) coincideix amb el corresponent impuls transmès  $p(t)$ , tret constant o endarreriment temporal. Implícitament, s'ha assumit que l'amplada de banda en què el canal presenta una funció de transferència constant és més gran que l'amplada de banda necessària per a poder transmetre l'impuls sense que quedi distorsionat pel canal.

Recordeu que la forma de l'impuls rebut es relaciona amb la forma de l'impuls transmès mitjançant la resposta impulsional del canal (domini del temps) o de la funció de transferència del canal (domini de la freqüència).

$$\begin{aligned} p_R(t) &= p(t) * h_c(t) \\ P_R(f) &= P(f)H_c(f) \end{aligned} \quad (53)$$

Si l'amplada de banda sense distorsió del canal és  $B_c$ , això significa que, en el marge de freqüències comprès en aquesta amplada de banda, la funció de transferència presenta el comportament següent:

$$H_c(f) = \begin{cases} \alpha e^{-j2\pi f t_d} & |f| \leq B_c \\ \text{Irrellevant} & |f| > B_c \end{cases} \quad (54)$$

En altres ocasions, col·loquialment parlant, es diu que l'amplada de banda es reparteix entre diferents senyals modulats. En qualsevol cas, en aquest apartat designem mitjançant  $B_c$  l'amplada que pot ocupar la transmissió de la modulació digital que s'estigui analitzant.

Si l'amplada de banda de l'impuls és menor que l'amplada de banda del canal, la forma de l'impuls rebuda coincideix amb la tramesa.

$$B_p \leq B_c \Rightarrow p_R(t) = \alpha p(t - t_d) \quad (55)$$

Per tant, en la majoria dels sistemes de comunicacions, l'amplada de banda de canal disponible és limitat. Com a conseqüència, el dissenyador del sistema ha de considerar les restriccions imposades per l'amplada de banda disponible per triar el format de modulació. En el cas de les modulacions de impulsos, la forma temporal de l'impuls és la que influeix directament en la forma final de la densitat espectral del senyal transmès. I més concretament, es pot afirmar que l'amplada de banda de l'impuls coincideix amb l'amplada de banda de

la modulació. L'objectiu d'aquest apartat se centra en el càlcul de la densitat espectral de l'impuls que suporta la modulació, definida en el subapartat 2.3, com a pas previ a determinar l'amplada de banda del senyal modulad.

### 5.1. Densitat espectral amb impulsos rectangulars

Per a una modulació de impulsos rectangulars NRZ, la transformada de Fourier de l'impuls ( $TF$ ) és:

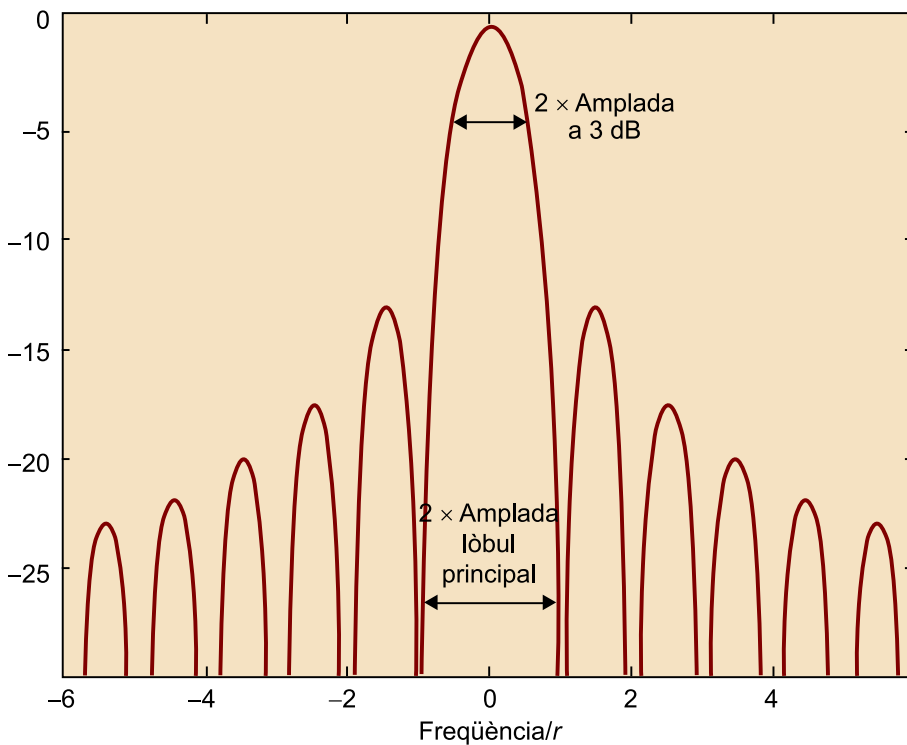
$$P(f) = TF\left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \quad (56)$$

La densitat espectral del senyal modulad és proporcional al mòdul de la transformada de Fourier de la funció impuls elevat al quadrat. Estrictament, en considerar l'impuls rectangular, l'ocupació espectral és infinita, ja que la forma freqüencial (56) s'estén de menys infinit a més infinit. En tractar amb impulsos limitats temporalment al temps de símbol, o de menor durada com en el cas RZ, la propietat anterior és inevitable. Una funció de durada temporal limitada presenta una ocupació espectral il·limitada.

La representació espectral sol fer-se en dB, com a  $20\log_{10}(|P(f)|)$

- Es defineix l'amplada de banda a 3 dB com l'amplada de banda en què la representació espectral de l'impuls cau 3 dB respecte al seu màxim.
- Es defineix l'amplada de banda entre zeros com l'amplada de banda del lòbul principal.

Figura 18. Funció de densitat espectral de l'impuls NRZ en dB (eix vertical)



L'eix freqüencial està normalitzat a la velocitat de símbol  $r$ , és a dir, està dividit per la velocitat de símbol  $r$ .

A la pràctica, quan es treballa amb modulacions els impulsos de les quals són de durada temporal limitada, s'ha de fer en condicions tals que els lòbuls secundaris no interfereixin altres senyals. En les denominades *modulacions de codis de línia*, els senyals transmesos pel cable no se solen multiplexar, és a dir, no solen compartir el canal amb altres senyals, per la qual cosa l'ocupació espectral no representa un problema, més enllà del fet que el mateix cable atenuï les freqüències altes.

En altre tipus de transmissions, com per exemple en aplicacions electromagnètiques, molts senyals comparteixen simultàniament el medi, i es multiplexen en freqüència, per la qual cosa l'amplada de banda assignada a cada senyal o usuari s'ha de respectar en la mesura del possible. En aquest tipus d'aplicació s'acostuma a regularitzar no tan sols l'amplada de banda, sinó també les exigències de caiguda en dB per als lòbuls secundaris que sobrepassen més enllà de la banda assignada. Per exemple, l'estàndard de televisió digital terrestre (DVB) presenta una plantilla per a cada emissora de 8 MHz d'amplada de banda. Més enllà de l'amplada de banda, cada emissora ha de presentar una atenuació superior a 40 dB i decaure al voltant de 13 dB/octava.

## 5.2. Modulacions PAM amb impulsos *sinc*

En aquest subapartat s'estudia l'impuls dual al rectangular NRZ. L'impuls dual significa que és el que té intercanviades les formes freqüencial i temporal i, per tant, el dual a l'impuls rectangular, en temps és una funció de tipus *sinc* i en

freqüències és de tipus rectangular. A la sortida del filtre adaptat de la figura 10 i també de la figura 11, l'impuls que interessa tenir és una funció *sinc* que presenta zeros cada  $T$  segons, essent  $T$  el temps de símbol.

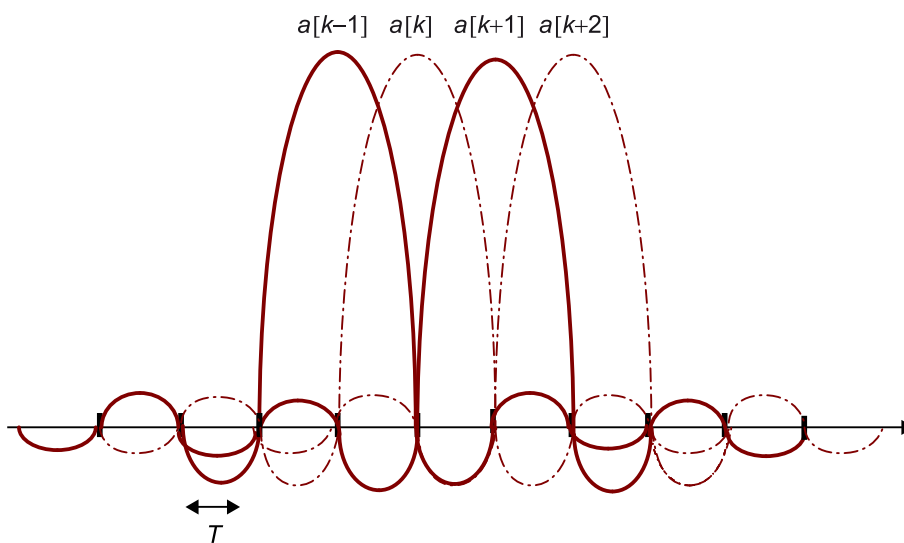
$$R_p(t) = \text{sinc}(rt) = \frac{\sin(\pi rt)}{\pi rt} = \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\frac{t}{T}} \quad (57)$$

La condició de presentar zeros es requereix per a evitar l'ISI<sup>11</sup> o interferència intersimbòlica, concepte que es defineix formalment en el subapartat 6.1. Si arriben impulsos *sinc* consecutius i espaciats cada  $T$  segons en mostrejar un impuls en un instant de temps corresponent al seu màxim, la resta dels impulsos que són de durada il·limitada presenten un zero per al mateix instant de temps, de manera que s'evita que es produeixi interferència d'uns símbols a uns altres. En la figura 19 es mostra una seqüència de quatre impulsos de tipus *sinc* i cal destacar que, en l'instant de temps en què cada una de les funcions presenta un màxim, la resta de les funcions presenten un zero.

<sup>(11)</sup>ISI és l'abreviatura d'*InterSymbol Interference*.

Per a obtenir aquest tipus de impuls a la sortida del filtre adaptat, la forma donada a (57) coincideix amb l'autocorrelació de l'impuls que s'ha de transmetre, la funció del qual és un impuls *sinc*, com es demostra a continuació.

Figura 19. Impulsos *sinc* espaciats a temps de símbol



Cada impuls transporta un símbol.

Per a forçar que la forma de l'impuls equivalent a la sortida del filtre adaptat sigui la funció *sinc*, quan l'impuls que es rep és  $p(t)$  i es convoluciona amb la resposta impulsional del filtre adaptat  $p(-t)$ , s'ha de complir:

$$p(t) * p(-t) = R_p(t) = \text{sinc}(rt) \quad (58)$$

En el domini de la freqüència s'obté quina ha de ser la forma freqüencial o transformada de Fourier de l'impuls que s'ha de transmetre perquè es compleixi l'equació (58):

$$|P(f)|^2 = \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{f}{T}\right) \Rightarrow P(f) = \sqrt{\frac{1}{T}} \Pi\left(\frac{f}{T}\right) \quad (59)$$

I, finalment, tornant al domini temporal:

$$p(t) = \sqrt{r} \operatorname{sinc}(rt) \quad (60)$$

L'última expressió és l'impuls que s'ha de transmetre. La seva energia és igual a 1. La resposta impulsional del filtre adaptat coincideix amb la mateixa funció impuls.

Estrictament, en considerar l'impuls *sinc*, la durada temporal és infinita, ja que la funció s'estén de menys infinit a més infinit i la seva transformada de Fourier és d'amplada de banda limitada. En particular, l'amplada de banda és de  $\frac{r}{2}$  Hz, atès que l'ocupació freqüencial és igual a  $r$  Hz considerant freqüències positives i negatives. L'amplada de banda de les modulacions PAM suportades per funcions *sinc* és també  $\frac{r}{2}$  Hz, ja que coincideix amb l'amplada de banda de l'impuls.

L'amplada de banda que presenta la funció *sinc*,  $\frac{r}{2}$ , resulta el menor amplada de banda que es pot utilitzar per a obtenir una modulació PAM a  $r$  símbols/seg sense interferència entre símbols consecutius. Dit d'una altra manera, no hi ha cap altre tipus de impuls l'amplada de banda del qual sigui menor al de la funció *sinc* i que presenti ISI igual a zero.

L'impuls *sinc* és un impuls ideal, ja que amb aquest impuls s'aconsegueix la mínima amplada de banda, i és molt interessant a escala acadèmica, ateses les propietats de dualitat respecte de l'impuls rectangular NRZ.

A la pràctica, en canvi, és un impuls difícilment implementable. La seva característica freqüencial tan abrupta, com una banda de transmissió nul·la, fa que sigui difícil d'aconseguir. Un altre inconvenient el proporciona l'atenuació dels lòbuls secundaris en el domini del temps. Els lòbuls secundaris decauen de manera inversament proporcional a l'eix temporal. Aquesta propietat no és gaire desitjable, perquè en situacions de sincronisme imperfecte de rellotge es pot produir un nivell elevat d'interferència entre els símbols (ISI).

### 5.3. Impulsos d'arrel de cosinus realçat

Els impulsos d'arrel de cosinus realçat, que són anomenats RRC<sup>12</sup> a la resta del document, consisteixen en una generalització de l'impuls *sinc* i són útils per a suavitzar els problemes d'implementació que presenta l'impuls *sinc*. Els impulsos RRC es formen estenent l'amplada de banda de l'impuls *sinc* a la vegada que es mantenen les condicions d'ISI nul·la, o de presentar zeros en temps de símbol. Per a generalitzar els impulsos *sinc* s'utilitza una parametrització

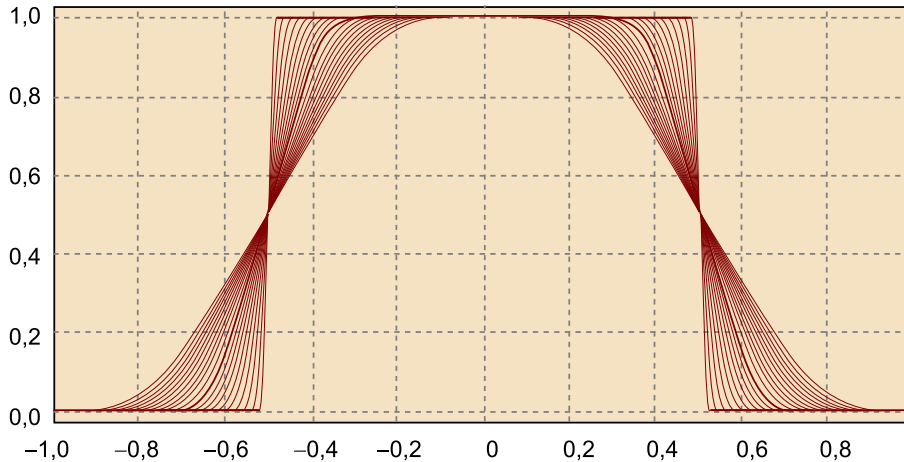
<sup>(12)</sup>RRC és la sigla de l'expressió anglesa *root raised cosinus*.



que ve donada per l'excés d'amplada de banda respecte a l'impuls *sinc*. L'excés màxim pot arribar a ser del 100%, és a dir, en el cas extrem s'arriba a doblar l'amplada de banda i a tenir impulsos d'amplada de banda  $r$  Hz.

Si  $\alpha$  representa el paràmetre que indica l'excés d'amplada de banda respecte a l'impuls *sinc*,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , l'amplada de banda de l'impuls RRC corresponent és de  $\frac{r}{2}(1+\alpha)$  Hz i la banda de transició ocupa  $\alpha r$ . El paràmetre  $\alpha$  es denomina *factor de caiguda* o *factor de rolloff*. El cas particular de  $\alpha = 0$  correspon a l'impuls *sinc*.

Figura 20. Densitat espectral dels impulsos RRC



S'han representat per a diferents valors del factor de rolloff des de 0 (impuls *sinc*) fins a 1. Amb el traç més gruixut s'ha representat la forma corresponent al factor de rolloff 0,5. L'eix freqüencial està normalitzat a la velocitat de símbol  $r$ .

La forma freqüencial representada en la figura 20 és la densitat espectral dels impulsos RRC i la seva expressió exacta és:

$$S_{P_{RRC}}(f) = \begin{cases} \frac{1}{r} & |f| < \frac{r}{2}(1-\alpha) \\ \frac{1}{2r} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{\alpha r} \left(|f| - \frac{r}{2}(1-\alpha)\right)\right)\right) & \frac{r}{2}(1-\alpha) < |f| < \frac{r}{2}(1+\alpha) \\ 0 & \frac{r}{2}(1+\alpha) < |f| \end{cases} \quad (61)$$

On  $r$  representa la velocitat de símbol i  $\alpha$  el factor de *rolloff*.

L'amplada de banda resultant, tant per a l'impuls com per al senyal modulat, és igual a:

$$B_p = B_s = \frac{r}{2}(1+\alpha) \quad (62)$$

Per a obtenir aquesta forma a la sortida del filtre adaptat, la transformada de Fourier de l'impuls que s'ha de transmetre, així com la funció de transferència del filtre adaptat corresponen a l'arrel quadrada de la funció (61), d'aquí el nom dels impulsos: *arrel de cosinus realçat*.

$$P_{RRC}(f) = \sqrt{S_{P_{RRC}}(f)} \quad (63)$$

En el domini del temps, l'impuls resultant a la sortida del filtre adaptat està lliure d'ISI.

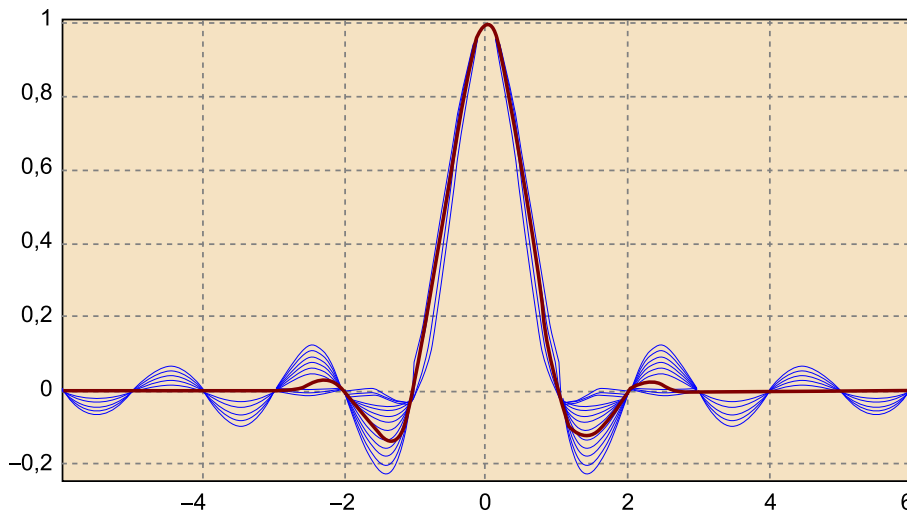
$$p_{RRC}(t) * p_{RRC}(-t) = R p_{RRC}(t) = \text{sinc}(rt) \frac{\cos(\pi \alpha r t)}{1 - (2\alpha r t)^2} \quad (64)$$

L'equació (64) correspon a l'impuls resultant a la sortida del filtre adaptat. Es pot observar que en el cas particular que el paràmetre de *rolloff* sigui nul  $\alpha = 0$ , la forma obtinguda coincideix amb la funció *sinc*.

En la transmissió d'una modulació PAM, en mostrejar el senyal resultant a temps de símbol, cada impuls presenta un màxim igual a 1 i zeros cada  $T$  segons, de manera anàloga al que s'ha obtingut a l'equació (57) per a l'impuls *sinc*. La caiguda dels lòbuls secundaris temporals és més ràpida com més gran és el factor de *rolloff*, per la qual cosa s'han suavitzat els dos inconvenients pràctics que presenten els impulsos *sinc*: caiguda lenta de lòbuls secundaris temporals i forma freqüencial abrupta en el domini de la freqüència.

En la figura 21 es mostren diferents formes temporals de impulsos resultants a la sortida del filtre adaptat per diferents factors de *rolloff*.

Figura 21. Autocorrelació dels impulsos RRC



S'han representat per a diferents valors del factor de *rolloff* des de 0 (impuls *sinc*) fins a 1. Amb un traç més gruixut s'ha representat la forma corresponent al factor de *rolloff* 0,5. L'eix temporal està normalitzat al temps de símbol  $T$ .

Els impulsos RRC són útils en aplicacions en què l'amplada de banda que s'ha de repartir entre diferents usuaris o senyals és limitat.

Hi ha molts estàndards de comunicacions les modulacions dels quals són suportades per impulsos RRC. En la majoria el factor de *rolloff* triat oscil·la entre 0,2 i 0,35 aproximadament. Un cas pràctic d'utilització de impulsos RRC és l'estàndard de telefonia sense fil de tercera generació UMTS.

### Exemple 7. Elecció de *rolloff*

Es disposa d'una amplada de banda de 3 MHz per a la transmissió d'una seqüència de bits a la velocitat de 10 Mbps. Es planteja la modulació quaternària, a quatre nivells ( $M$

= 4) i es requereix calcular el màxim factor de *rolloff* que s'ha d'implementar en modular mitjançant impulsos RRC.

La modulació a quatre nivells origina una modulació de símbols a la velocitat de:

$$r = \frac{r_b}{2} = 5 \text{ Msímbols/s} \quad (65)$$

Si es transmetés amb un impuls *sinc*, l'amplada de banda necessària seria de

$$B_{\text{sinc}} = \frac{r}{2} = 2,5 \text{ MHz} \quad (66)$$

Atès que es té disponible una amplada de banda de 3 MHz, l'excés màxim utilitzable és de 0,5 MHz i, segons la fórmula d'amplada de banda (62), es calcula el factor de *rolloff* com a

$$\alpha \frac{r}{2} = 0,5 \text{ MHz} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} = 0,2 \quad (67)$$

Per la qual cosa la solució més adequada consisteix a escollir un impuls RRC amb aquest factor de *rolloff*.

## 6. Interferència intersimbòlica

El terme d'*interferència intersimbòlica* o *ISI* apareix en apartats precedents, i els seus efectes sobre el comportament del sistema s'estudien de manera detallada en aquest apartat.

Hi ha molts fenòmens, en general no desitjats, que produeixen ISI sobre el senyal. El més important és el produït per canals no ideals. Si, en fer la detecció dels símbols, les mostres a l'entrada del detector presenten ISI, la probabilitat d'error es degrada i augmenta considerablement respecte a un cas lliure d'ISI.

En l'apartat dedicat al desmodulador M-PAM, es defineix canal ideal quan el canal físic pot modelar-se com un sistema lineal i invariant en temps, la resposta impulsional del qual presenta únicament atenuació i endarreriment. De fet, la fórmula (21) correspon a la resposta impulsional d'un canal ideal que ni tan sols atenua ni endarrerix el senyal.

En aquest apartat, es planteja la situació que el canal no sigui ideal i per tant produeixi ISI sobre el senyal mostrejat.

### 6.1. Interferència intersimbòlica ISI

#### ISI

Es produeix ISI quan, en mostrejar el senyal a la sortida del filtre adaptat a una mostra per símbol, la mostra obtinguda, a més del símbol que s'ha de detectar i de la component de soroll, presenta de manera superposada additivament contribució de símbols precedents i/o de símbols posteriors. Aquest fenomen es formula com a:

$$y(nT) = a[n]c[0] + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{+\infty} a[k]c[n-k] + n(nT) \quad (68)$$

El segon sumand corresponent al sumatori representa el terme d'ISI i provoca una degradació sobre la probabilitat d'error. Els termes representats com a  $c[n]$  són les mostres de l'impuls resultant a la sortida del filtre adaptat.

L'exemple 8 il·lustra una situació típica en què les reflexions múltiples del senyal transmès en una transmissió sense fil poden provocar ISI.

### Exemple 8. ISI produïda per canal no ideal

Es considera la transmissió d'una modulació 2-PAM polar basada en impulsos NRZ per un canal no ideal. La resposta impulsional del canal presenta un enllaç o camí principal i una ressonància o camí secundari. L'exemple constitueix un cas particular de canal multicamí o multipath.

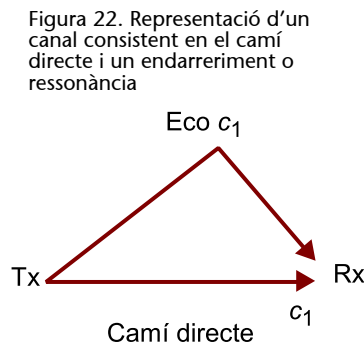
Es considera el senyal modulats PAM de símbols binaris i equiprobables:  $d[k] = \pm \frac{A}{2}$  i de impulsos NRZ normalitzats de tal manera que la seva energia és igual a 1

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (69)$$

Senyal modulats 2-PAM polar

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d[k] p(t - kT) \quad (70)$$

Es transmet per un canal de comunicacions. La resposta impulsional del canal està formada per l'enllaç principal o directe entre el transmissor i el receptor i una reflexió o ressonància, segons es mostra a la figura 22.



La resposta impulsional corresponent al camí directe i una ressonància d'endarreriment igual al temps de símbol  $T$  es modela com a:

$$h(t) = c_0 \delta(t) + c_1 \delta(t - T) \quad (71)$$

El soroll additiu s'acostuma a modelar com un procés aleatori estacionari de mida nul·la, blanc i gaussià de densitat espectral.

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \quad (72)$$

Per tant, el senyal a l'entrada del receptor es formula com a:

$$\begin{aligned} r(t) &= s(t) * h_c(t) + w(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d[k] p(t - kT) * (c_0 \delta(t) + c_1 \delta(t - T)) + w(t) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d[k] (c_0 p(t - kT) + c_1 p(t - kT - T)) + w(t) \end{aligned} \quad (73)$$

Si el receptor es dissenya mitjançant un filtre adaptat a l'impuls transmès tal com es modela en la figura 11, el senyal a la sortida del filtre adaptat és igual a:

$$y(t) = r(t) * p(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d[k] (c_0 R p(t - kT) + c_1 R p(t - kT - T)) + n(t) \quad (74)$$

El sumatori de l'expressió anterior s'interpreta com una modulació PAM, també binària i polar i amb impulsos equivalent igual a:

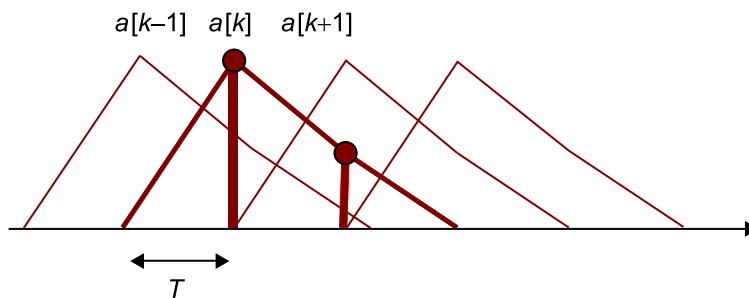
$$p_{FA}(t) = p(t) * h_c(t) * p(t-T) = c_0 R p(t) + c_1 R p(t-T) = c_0 A \left( \frac{t}{T} \right) + c_1 A \left( \frac{t-T}{T} \right) \quad (75)$$

Una forma de reescriure l'expressió donada a (74) és mitjançant la forma de l'impuls definida a (75):

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d[k] p_{FA}(t - kT) + n(t) \quad (76)$$

L'impuls resultant  $p_{FA}(t)$  es mostra en la figura 23 i és un impuls de durada igual a tres períodes de símbol i que presenta dues mostres no nul·les quan es mostreja a temps de símbol.

Figura 23. Impulsos resultants amb ISI a la sortida del filtre adaptat



El senyal  $y(t)$  de l'expressió (76) és mostrejada a temps de símbol per prendre la decisió dels símbols i queda com a:

$$y(nT) = c_0 a[n] + c_1 a[n-1] + n(nT) \quad (77)$$

De (77) es conclou que la ressonància del canal produeix directament ISI sobre les mostres de senyal. Idealment, s'hauria d'obtenir únicament el terme corresponent al símbol que es vol detectar, en aquest cas  $a[n]$ , però per un costat es té el terme de soroll  $n[nT]$  i a més en aquest cas la mostra d'ISI:  $c_1 a[n-1]$ .

Noteu que, en l'expressió anterior, l'ISI sobre les mostres disponibles per a la detecció està provocada únicament pel símbol anterior a l'actual. Aquest és un cas particular del cas general formulat a (68), en què cada mostra pateix interferència de tots els símbols transmesos. A la pràctica, se solen tenir situacions intermèdies a aquests dos casos extrems. En comunicacions mòbils, l'ISI acostuma a contenir termes corresponents a 3, 4 o 5 símbols aproximadament. Quan hi ha diversos símbols que provoquen ISI, la degradació sobre la BER s'analitza com l'efecte provocat per un increment de potència total de soroll més que com una reducció de distància als llindars de detecció que s'explica a continuació.

La degradació que pateix la probabilitat d'error deguda a l'ISI es mesura a partir de la reducció de la distància mínima dels símbols en recepció respecte als llindars de detecció. Es presenta l'exemple 9, que és la continuació de l'exemple 8 i en què s'analitza l'expressió obtinguda per a la probabilitat d'error per al cas del canal amb ressonància.

### Exemple 9. Degradació de la probabilitat d'error produïda per l'ISI

Per a avaluar aquesta degradació en aquest exemple, s'avaluen a continuació les mostres rebudes amb els valors següents per als camins representats en el model de canal de l'expressió (71):

$$C_0 = 1; c_1 = 0,5$$

Substituint en les mostres del senyal detectat de l'equació (77), es té:

$$y(nT) = a[n] + 0,5a[n-1] + n(kT) \quad (78)$$

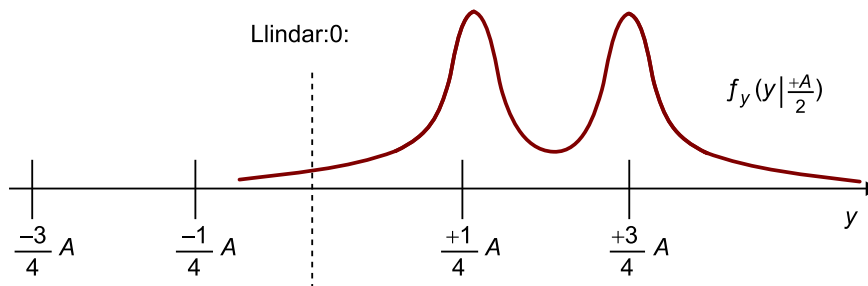
I la regla de decisió que s'ha d'aplicar és la presentada a l'equació (34), és a dir, el llindar de detecció és igual a zero.

Si el símbol transmès en el temps  $n$  és el de nivell positiu:  $+\frac{A}{2}$  i el transmès en el temps  $n-1$  és el de nivell negatiu:  $-\frac{A}{2}$ , la mostra de senyal rebut  $y[n]$  s'acosta al llindar de decisió (0) i per tant està menys protegida davant la mostra del soroll. Dit d'una altra manera, si el nivell de soroll arriba a ser negatiu i menor que  $-\frac{A}{4}$ , aquesta mostra  $y[n]$  serà negativa i per tant es detectarà erròniament. En resum, les dues pitjors situacions es produeixen quan:

$$\begin{aligned} a[n] = +\frac{A}{2}; a[n-1] = -\frac{A}{2} &\Rightarrow y[n] = +\frac{1}{2}\frac{A}{2} + n[n] \\ a[n] = -\frac{A}{2}; a[n-1] = +\frac{A}{2} &\Rightarrow y[n] = -\frac{1}{2}\frac{A}{2} + n[n] \end{aligned} \quad (79)$$

En ambdues situacions, la distància del símbol detectat sense considerar la mostra de soroll respecte al llindar de detecció s'ha reduït en un 50%. La probabilitat d'error o BER es pot aproximar per la probabilitat que, en aquests casos, les mostres de soroll modelades segons l'equació (36) provoquin el salt de les mostres detectades respecte del llindar.

Figura 24. Funció de densitat de probabilitat de les mostres rebudes condicionada al símbol transmès  $+\frac{A}{2}$



En la figura 24 es mostra la funció de densitat de probabilitat de les mostres rebudes condicionada al símbol transmès  $+\frac{A}{2}$ . La distribució de les mostres és igual a la semisuma de dues gaussianes, ja que per probabilitat el 50% de les vegades el símbol anterior és positiu  $a[n-1] = +\frac{A}{2}$ , i el 50% de les vegades el símbol anterior és negatiu  $a[n-1] = -\frac{A}{2}$ .

La probabilitat de detectar un símbol negatiu quan s'ha transmès un símbol positiu  $a[n] = +\frac{A}{2}$  és l'àrea de la f.d.p. de la figura 23 de menys infinit al llindar i, com en el cas sense ISI, s'expressa en funció de l'àrea de la gaussiana  $Q(\cdot)$ :

$$P_b = P_e = \frac{1}{2}Q\left(\frac{A}{4\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{3A}{4\sigma}\right) \approx \frac{1}{2}Q\left(\frac{A}{4\sigma}\right) \quad (80)$$

Els termes no significatius corresponen a àrees de gaussiana  $Q(\cdot)$  d'arguments més grans que el representat en l'expressió anterior. Atès el caràcter decreixent a ritme exponencial de l'àrea de la gaussiana, en general són termes de 2 o 3 ordres de magnitud menors que el principal, per la qual cosa acostumen a depreciar-se en l'avaluació de la probabilitat de l'error. La constant  $\frac{1}{2}$  és deguda al fet que el 50% dels símbols rebuts, tret del soroll, estan a la mínima distància respecte del llindar.

Donades l'energia mitjana de bit  $E_b = \frac{A^2}{4}$  i la potència de soroll  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ , la probabilitat d'error a (80) s'expressa en funció del quocient  $\frac{E_b}{N_0}$  o SNR per bit.

$$P_b = P_e \cong \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (81)$$

En comparar la probabilitat d'error a (81) amb el resultat obtingut amb canal ideal de l'equació (44), es dedueix que, atesa l'ISI present en aquest exemple, per a mantenir la probabilitat d'error respecte al cas ideal s'haurien de transmetre 6 dB més d'energia mitjana transmesa per bit. Aquesta quantitat s'obté en comparar els arguments de les dues funcions  $Q(\cdot)$ , fórmules (44) i (81).

$$6 = 10 \log_{10} \left( \frac{2 \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{cas ideal}}}{\frac{1}{2} \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{cas amb ISI}}} \right) \quad (82)$$

L'ISI provoca en detecció una degradació de la probabilitat d'error respecte de l'energia mitjana transmesa per bit. Per a avaluar la degradació respecte a la situació sense ISI, s'han de fer els passos següents:

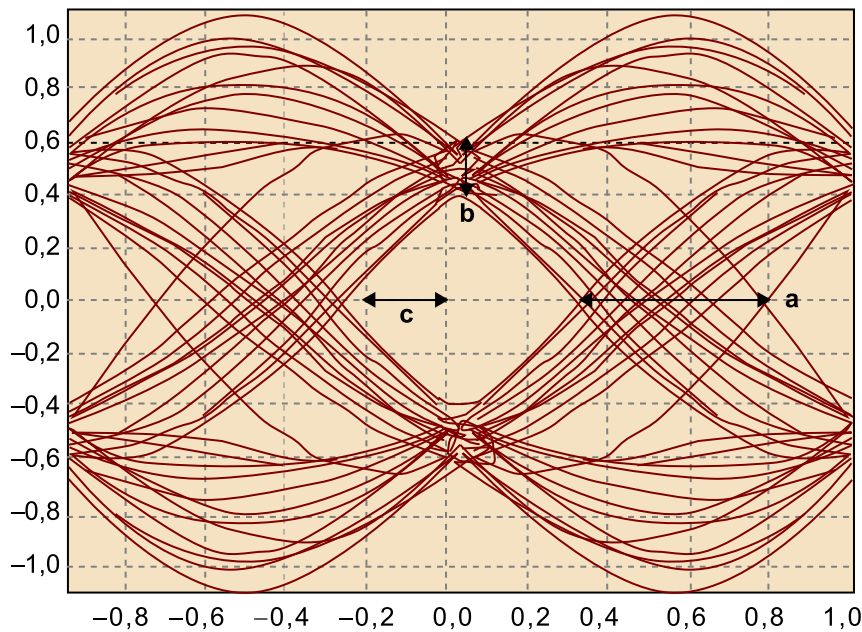
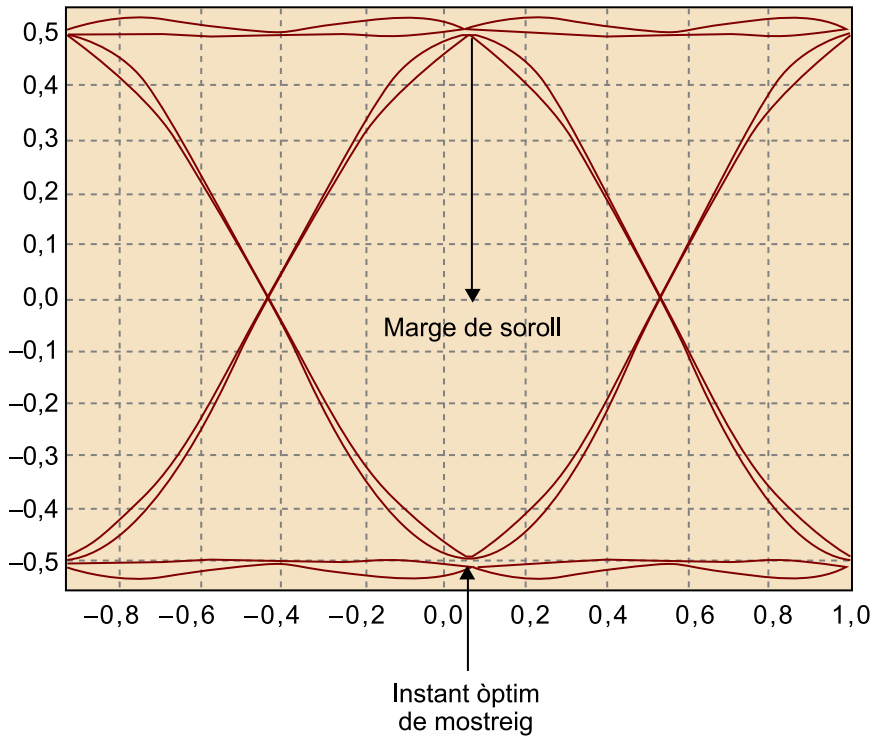
- Analitzar la reducció de la distància de les mostres rebudes respecte al llindar (o llindars en el cas multinivell).
- Calcular la probabilitat d'error a partir de les distàncies anteriors.
- Expressar la probabilitat d'error en funció del quocient  $\frac{E_b}{N_0}$ .

## 6.2. Diagrama d'ull

La quantitat d'ISI i el nivell de soroll màxim que es pot acceptar en un sistema de comunicacions es poden mesurar en un oscil·loscopi mitjançant el denominat *diagrama d'ull*. Per a modulacions PAM, consisteix a representar el senyal en un dels canals de l'oscil·loscopi forçant a fer que el temps d'exploració horitzontal sigui igual al temps de símbol o a un múltiple d'aquest temps. Per a modulacions PAM binàries, el resultat s'assembla a un ull humà, d'aquí el nom que rep. Per poder interpretar bé els anomenats marge de soroll, nivell d'ISI, instant òptim de mostreig, distorsió de creuaments per zero i sensibilitat a l'error de mostreig, la visualització s'ha de fer, en la mesura que sigui possible, amb el senyal lliure de soroll.



Figura 25. Diagrames d'ull a la sortida del filtre adaptat de modulació 2-PAM polar



En el diagrama de dalt s'ha utilitzat un impuls RRC 100% rolloff lliure d'ISI. En el diagrama de baix, s'ha utilitzat un impuls sinc retallat en temps, i el canal presenta dues ressonàncies o camins secundaris.

- a. Distorsió d'encreuament per zero
- b. Nivell d'ISI
- c. Sensibilitat a l'error de mostreig

En la figura 25 es mostren dos diagrames d'ull. Com es pot apreciar, per al diagrama superior, el marge de soroll ha disminuït respecte del diagrama inferior, per la qual cosa a igual nivell de soroll es produirà un percentatge d'errors més gran. El fenomen és degut a l'augment d'ISI. A més, el segon diagrama és més sensible a petits errors de mostreig.

En definitiva, el diagrama d'ull és una mesura empírica que es pot utilitzar per observar com afecta el canal al senyal transmès i per predir les prestacions que potencialment pot oferir el senyal rebut a tècniques de sincronisme de bit, és a dir, a tècniques orientades a calcular els instants de mostreig òptims per als quals els impulsos rebuts presenten al seu valor màxim.

## Resum

Aquest mòdul es dedica a l'estudi de les modulacions digitals en banda base, i particularment a la major part dels desenvolupaments en les modulacions de impulsos per amplitud (PAM).

En els primers apartats del mòdul, es prioritza la definició dels principals paràmetres que resulten fonamentals en el disseny d'una modulació M-PAM. Especialment es tracta de l'energia mitjana transmesa per bit i de la velocitat o taxa de bit a què es transmet la seqüència de bits. Es consideren, en gran part dels apartats, impulsos d'energia igual a  $u$ , cosa que facilita l'anàlisi de les prestacions de tot el sistema quant a probabilitat d'error.

El modulador digital està format pel codificador de símbols i pel conformador de impulsos. El primer s'implementa mitjançant programari, atès que es tracta de processament de seqüències discretes, mentre que el segon, en principi, es fa mitjançant maquinari, ja que a la sortida proporciona un senyal continu en temps.

El filtre adaptat a l'impuls que suporta una modulació PAM és l'element *front-end* del sistema desmodulador. En condicions de canal ideal, a la sortida del filtre adaptat s'obté una nova modulació PAM els impulsos de la qual coincideixen amb la funció d'autocorrelació dels impulsos transmesos més el soroll generat a l'entrada del desmodulador. És desitjable que aquesta funció d'autocorrelació compleixi les condicions d'ISI nul·la. Per tal que compleixin aquestes condicions quan l'impuls és limitat en banda, s'utilitzen els impulsos RRC que estan parametritzats pel factor de *roll-off*, essent aquest l'excés d'amplada de banda dels impulsos RRC respecte a l'impuls *sinc*.

L'impuls *sinc* representa un referent quant al fet que és l'impuls amb menor amplada de banda i amb condicions d'ISI nul·la.

El senyal a la sortida del filtre adaptat és mostrejat a raó d'una mostra per símbol. Els instants de mostreig han de coincidir amb els màxims dels impulsos resultants, és a dir, amb l'instant de màxima obertura del diagrama d'ull.

Després del filtratge adaptat, en el desmodulador es fa la detecció dels símbols. En condicions d'equiprobabilitat, els llindars que s'han d'utilitzar són els punts mitjans entre cada dos símbols limítrofs. La probabilitat de cometre errors en la detecció, en modelar el canal com a AWGN, es calcula mitjançant la funció  $Q$ , que és l'àrea de la funció gaussiana. Per a avaluar el comportament dels sistemes és convenient formular la probabilitat d'error en funció

### La conformació de l'impuls

En molts mòdems digitals la conformació de l'impuls es fa abans de la conversió dels senyals a continus. És a dir, es fa la conformació d'un impuls discretitzat amb raó suficient de mostres per símbol perquè es compleixi el criteri de Nyquist i posteriorment es fa la conversió D/A.

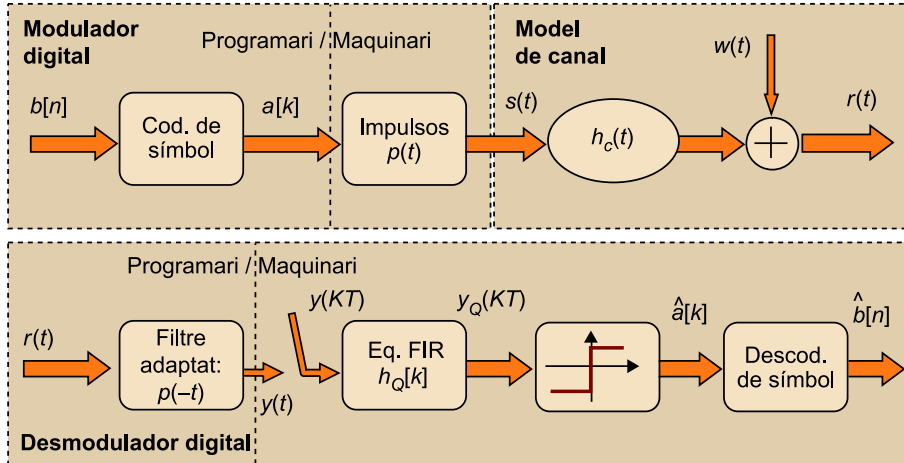
### El filtre adaptat

De la mateixa manera que succeeix amb la conformació de l'impuls, a la pràctica acostuma a implementar-se el filtre adaptat com la convolució discreta amb un impuls discretitzat. El senyal es converteix a discret (CA/D) prèviament i a raó suficient de mostres per símbol perquè es compleixi el criteri de Nyquist. Les operacions del procés resultant són, per tant, CA/D, filtre adaptat discret i mermat per tal d'obtenir una mostra per símbol que es processa mitjançant el detector de símbols.

de l'energia mitjana transmesa per bit. En les modulacions multinivell s'ha de distingir entre probabilitat d'error de bit (BER) i probabilitat d'error de símbol (SER).

En la figura 27 es mostra un diagrama de blocs funcional amb les parts principals d'un sistema de comunicacions digitals en banda base.

Figura 27. Esquema complet d'un sistema de comunicacions digitals en banda base (PAM)



## Exercicis d'autoavaluació

La resolució dels exercicis següents es proposa com a complement a l'estudi del mòdul. Es recomana que es facin seguint una estratègia sistemàtica. En general, és convenient resoldre els plantejaments de manera general, treballant amb les variables i paràmetres de manera genèrica, i substituir-los pels seus valors numèrics en particular al final dels apartats. D'aquesta manera, es facilita la correcció pròpia i el seguiment de l'exercici, i s'obté una visió més àmplia que la del cas particular que s'estigui analitzant.

### 1. Càlcul d'energia mitjana de bit en 4-PAM polar

Es presenta una seqüència de bits no equiprobables.

$$\begin{aligned}Pr[b[n] = 1] &= 0,3 \\Pr[b[n] = 0] &= 0,7\end{aligned}$$

Es modulen en 4-PAM polar amb una separació de nivells d'A volts. Se us demana el següent:

- Trobar la probabilitat de cada un dels quatre símbols de la modulació.
- Calcular l'energia mitjana de símbol de la modulació en funció del paràmetre A.
- Calcular l'energia mitjana de bit de la modulació en funció del paràmetre A.

### 2. Càlcul d'energia mitjana de bit en 4-PAM unipolar

Es presenta una seqüència de bits no equiprobables.

$$\begin{aligned}Pr[b[n] = 1] &= 0,4 \\Pr[b[n] = 0] &= 0,6\end{aligned}$$

Es modulen en 4-PAM unipolar amb una separació de nivells d'A volts. Se us demana el següent:

- Trobar la probabilitat de cada un dels quatre símbols de la modulació.
- Calcular l'energia mitjana de símbol de la modulació en funció del paràmetre A.
- Calcular l'energia mitjana de bit de la modulació en funció del paràmetre A.

### 3. Implementació de codi HDB3

En l'apartat 1.3 es presenta la modulació bipolar o AMI com un codi de línia que s'utilitza per a ajudar a recuperar el sincronisme de símbol, en el receptor o descodificador. Si a la trama de bits es generen diversos 1 seguits, les transicions del senyal ajuden a reparar el rellogge que marca tant la freqüència com l'inici de cada un dels símbols. En canvi, si arriben molts 0 seguits, la falta de transicions sobre el senyal pot provocar pèrdua de sincronisme. El codi HDB3 s'utilitza per a evitar aquest problema i consisteix a utilitzar l'impuls rectangular NRZ i la llei següent de codificació de símbols:

- Cada bit 1 es codifica amb polaritat invertida en l'últim impuls no nul transmès.
- Els bits 0 es codifiquen amb amplitud nul·la sempre que no excedeixin de tres bits 0 seguits.
- A partir del primer bit transmès es fa un recompte de polaritat del passat. Si el nombre de impulsos positius coincideix amb el nombre de impulsos negatius, la polaritat és nul·la. Si un grup d'aquests impulsos excedeix l'altre grup en un impuls, la polaritat de l'anterior és positiva o negativa.
- Quan arriben 4 bits 0000 seguits al codificador, el darrer bit, en lloc de codificar-se mitjançant quatre amplituds nul·les com en el cas d'AMI, es codifica mitjançant un bit de violació de polaritat, igual polaritat de l'últim impuls transmès, i s'anomena V, però sempre sense arribar al fet que la polaritat positiva o negativa excedeixi en més d'un impuls, per la qual cosa, quan sigui convenient, el primer d'aquests quatre bits també es codifica amb polaritat no nul·la (B), però sense violar la polaritat.

Es resumeix a continuació en la taula 7:

Taula 7. Codificació HDB3

Recompte polaritat	Polaritat últim 1	Polaritat quatre 0000	Nomenclatura
0	+	000+	000V

Recompte polaritat	Polaritat últim 1	Polaritat quatre 0000	Nomenclatura
0	-	000-	000V
+	+	-00-	B00V
-	-	+00+	B00V

Suposant que arriba al codificador la seqüència de bits següent, 101100000100000000, se us demana el següent:

- Dibuixeu la forma del senyal codificat tant en AMI com en HDB3.
- Calculeu l'energia mitjana de bits si la polaritat és de 5 volts i la velocitat de bit d'1 Mbps.
- Programeu una subrutina en el llenguatge de programació que vulgueu que faci la codificació HDB3. El senyal d'entrada ha de ser la seqüència de bits i el senyal de sortida, la seqüència d'amplituds 0, +1 o -1. Verifiqueu el funcionament correcte tant amb la seqüència exemple com amb les altres seqüències que genereu.

#### 4. Transmissió binària sobre cable telefònic

Es vol transmetre una modulació binària sobre un cable telefònic que atenua el senyal 0.01 dB per cada metre de cable. Es tracta de seleccionar la modulació binària polar o la modulació binària unipolar. El transmissor proporciona un quocient d'energies:

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = 10 \text{ dB} \quad (83)$$

Calculeu per a una estesa de 10 m de cable la BER que s'obtindrà amb cada un dels dos sistemes de modulació.

#### 5. Amplada de banda en modulacions PPM

La modulació PPM consisteix en una modulació de impulsos per posició. És comunament usada en molts tipus de comunicacions òptiques. Per al cas binari, quan el bit és igual a zero, el senyal que es transmet correspon a un impuls rectangular de durada igual a la meitat del símbol i centrat en la primera meitat del període de símbol i, quan el bit és igual a 1, l'impuls també de durada meitat ocupa la segona meitat del període de símbol. El senyal modulat que resulta s'expressa a continuació:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A \Pi\left(\frac{t - a\frac{T}{2} - kT}{\frac{T}{2}}\right) \quad (84)$$

On  $a = 0,1$  en funció del bit que es transmet. La modulació es generalitza en el cas d' $M$  nivells. Si  $M = 2b$ , amb  $b$  el nombre de bits per símbol, se seleccionen  $M$  posicions diferents de impulsos de durada  $\frac{T}{M}$ , dins del període assignat a la durada de cada símbol. L'expressió del senyal modulat queda per al cas general i amb  $a = 0,1,\dots,M-1$ :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A \Pi\left(\frac{t - a\frac{T}{M} - kT}{\frac{T}{M}}\right) \quad (85)$$

Se us demana avaluar l'amplada de banda resultant (únicament l'amplada del lòbul principal entre zeros) per a la modulació quan es volen transmetre bits a la velocitat d'1 Gbit/seg i en cada una de les dues situacions següents:

- Modulació 2 PPM
- Modulació 16 OPPM

Per al cas 2 PPM, dibuixeu la forma temporal d'ona obtinguda en transmetre la seqüència de bits 10110100.

## 6. Amplada de banda sense distorsió i impulsos RRC

Es vol fer una transmissió PAM per enviar una seqüència de bits a una velocitat de 5 Mbps. Es proposen dues estratègies diferents: modulació 4-PAM polar i modulació 8-PAM polar. En tots dos casos s'utilitza un impuls RRC de 35% de factor de *rolloff*. Se us demana el següent:

- Calculeu quina amplada de banda sense distorsió ha de presentar el canal per a cada un dels dos tipus de modulacions.
- Calculeu el quocient d'energies  $\frac{E_b}{N_0}$  necessari en cada cas per a obtenir una probabilitat d'error de bit (BER) de l'ordre de 0,01.

## 7. Modulació 2-PAM a través de canal amb ISI

Suposeu una modulació 2-PAM polar de impulsos *sinc* d'energia unitat. Es transmet per un canal la resposta impulsional del qual es pot modelar com una transmissió multicamí:

$$h_c(t) = \alpha\delta(t) - 0,25\alpha\delta(t - T) + 0,25\alpha\delta(t - 2T)$$

i en què el soroll és AWGN i el receptor consisteix en el filtre adaptat a l'impuls transmès, CA/D i detector de símbols.

- Avalueu la probabilitat d'error aproximant-la pel pitjor cas d'ISI que es pot produir en el sistema.
- Si el quocient  $\frac{E_b}{N_0} = 10$  i  $\alpha = 1$ , avalueu la probabilitat d'error obtinguda.
- Compareu la probabilitat obtinguda en l'apartat anterior amb la que s'obtingria amb un sistema de canal ideal.

## 8. Modulació 2-PAM detectada amb errors al llindar

Suposeu una modulació 2-PAM polar de impulsos NRZ d'energia unitat. Es transmet per un canal ideal i en el qual el soroll és AWGN. Per error, el llindar de detecció darrere del filtre adaptat a l'impuls, i el CA/D, se situa a  $0,05 \frac{A}{2}$ , essent  $\frac{A}{2}$  el nivell de tensió dels símbols binaris.

- Avalueu la probabilitat d'error aproximant-la pel pitjor cas d'ISI que es pot donar en el sistema.
- Avalueu la degradació en dB d'energia mitjana transmesa per bit respecte al cas d'umbral correcte i igual a zero.

## 9. Equalització d'una modulació 2-PAM unipolar

Considereu l'esquema donat en la figura 27 per a un sistema de comunicacions digitals en banda base. Suposeu una modulació 2-PAM unipolar de impulsos NRZ d'energia unitat. Es transmet per un canal no ideal i en què el soroll és AWGN. La resposta impulsional del canal és igual a:

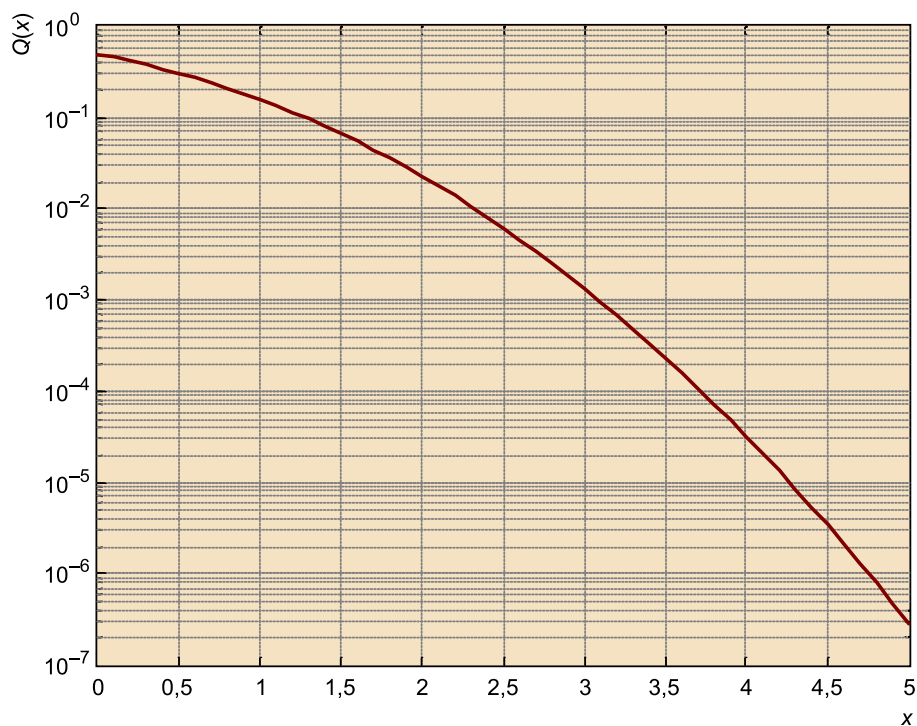
$$h_c(t) = -0,1\delta(t) + \delta(t - T) - 0,1\delta(t - 2T)$$

- Calculeu i dibuixeu l'impuls equivalent resultant a la sortida del filtre adaptat.
- Mesureu el nivell d'ISI segons el criteri de distorsió de pic resultant a la sortida del filtre adaptat.
- Dissenyeu un equalitzador transversal FIR de tres coeficients aplicant el criteri de forçador de zeros.
- Avalueu les millores obtingudes mitjançant l'equalitzador per a l'ISI i per a la potència de soroll.
- Si  $\frac{E_b}{N_0} = 10$ , obteniu aproximadament la probabilitat d'error obtinguda amb l'equalització i sense. Compareu ambdues magnituds.

## Fórmules matemàtiques

### Àrea de la gaussiana

La figura següent mostra els valors de  $Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda$  per a  $0 \leq x \leq +5$





## Bibliografia

**Benedetto S.; Biglieri, E.** (1999). *Principles of Digital Transmission*. Kluwer Academic Press / Plenum publishers.

**Carlson, A. B.** (2001). *Communication Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication* (4a. ed.). McGraw-Hill.

**Peebles, P. Z.** (2006). *Principios de probabilidad, variables aleatorias y señales aleatorias*. McGraw-Hill.

**Proakis, J. G.** (2003). *Digital Communications* (4a. ed.). McGraw-Hill.

**Proakis, J. G.; Salehi, M.** (2002). *Communication Systems Engineering* (2a. ed.). Prentice Hall. [www.etsi.org/](http://www.etsi.org/)

