

Comunicacions analògiques: senyals passabanda

Una perspectiva matemàtica

Margarita Cabrera
Francesc Tarrés Ruiz

Revisió a càrrec de
Francesc Rey Micolau
Francesc Tarrés Ruiz

PID_00184979



Els textos i imatges publicats en aquesta obra estan subjectes –llevat que s'indiqui el contrari– a una llicència de Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 Espanya de Creative Commons. Podeu copiar-los, distribuir-los i transmetre'ls públicament sempre que en citeu l'autor i la font (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), no en feu un ús comercial i no en feu obra derivada. La llicència completa es pot consultar a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.ca>

Índex

Introducció	5
Objectius	10
1. Modulacions analògiques passabanda	11
1.1. Components en fase i quadratura	11
1.2. Equivalent passabaix	12
1.3. Modulació en fase i quadratura de dos senyals passabaix	14
1.4. Errors de fase en el desmodulador	18
1.5. Resum sobre modulacions I&Q	19
2. Qualitat del sistema de comunicacions: la relació senyal a soroll (SNR)	21
2.1. Potència de les modulacions passabanda	21
2.2. Sistema de comunicacions passabanda	26
2.3. Soroll passabanda	28
2.4. Relació de potències senyal a soroll: SNR	31
2.5. SNR de la modulació AM	34
2.6. Comparació de l'SNR de les modulacions AM i DSB	36
Resum	37
Exercicis d'autoavaluació	39
Fórmules matemàtiques	43

Introducció

En aquest mòdul es formalitzen des d'un punt de vista matemàtic les modulacions analògiques passabanda, els principis generals de les quals ja s'han introduït en el mòdul anterior. Ara l'objectiu és generalitzar la notació matemàtica, per tal que resulti comuna a diferents tipus de modulacions i estudiar el comportament dels sistemes davant de la presència de soroll en el canal.

Com ja hem vist en el mòdul anterior, s'entén per *modulacions passabanda* els senyals que resulten de traslladar un senyal de contingut freqüencial baix fins a una freqüència major que la seva amplada de banda, que s'anomena *freqüència portadora*. Les modulacions passabanda ocupen una banda freqüencial al voltant de la freqüència portadora.

L'ocupació de l'espectre és una qüestió bàsica en qualsevol sistema de comunicacions, atès que en general l'espectre és un recurs limitat. En especial en comunicacions radioelèctriques, la freqüència que ocupa cada tipus de sistema de comunicacions es troba totalment reglada i estandarditzada per diferents organismes internacionals. A Europa, un dels organismes d'estandardització amb autoritat sobre aquesta temàtica és l'ETSI.

Vegeu com a exemple l'estàndard de radiodifusió analògica AM, que ja hem considerat amb un cert detall en el mòdul anterior. El senyal que prové d'un locutor de ràdio és un senyal de passabaix d'amplada de banda 4,5 kHz. És a dir, la font d'informació genera un senyal que presenta una ocupació espectral o freqüencial que va de $-4,5$ kHz a $+4,5$ kHz. Per a ser transmès pel medi aeri, el seu espectre es trasllada, per exemple, fins a una freqüència portadora de 525 kHz, i d'aquesta manera ocupa una amplada de banda de 9 kHz (de 520,5 a 529,5 kHz) al voltant de la freqüència portadora. L'ocupació espectral a freqüències negatives és simètrica atès que el senyal transmès és real. Es duu a terme, per tant, un trasllat del senyal centrat en el domini de freqüències a 0 kHz, fins a una freqüència portadora de 525 kHz.

Un altre exemple de sistema de comunicacions estandarditzat per l'ETSI en la dècada dels anys noranta del segle passat i molt estès mundialment és el sistema de telefonia mòbil GSM. En els formats de modulació usats per les xarxes ofertes pels operadors per a telefonia mòbil (GSM 900, GSM 1800 i GSM 1900), els dígit numèrics d'aquestes sigles marquen les freqüències a l'entorn de les quals es distribueixen les freqüències portadores indicades en MHz, i GSM significa *global system for mobile communication*. Així, per exemple, per al sistema GSM 1900, l'espectre disponible va de 1.850 a 1.990 MHz. La separació entre dues freqüències portadores adjacents és de 200 kHz. És a dir, en els

sistemes de comunicacions de tipus GSM, es disposa d'un senyal passabaix que s'estén aproximadament entre -100 kHz i $+100$ kHz. Un cop modulad, ocupa uns 200 kHz al voltant de la freqüència portadora assignada.

En el mòdul anterior hem introduït diversos aspectes bàsics sobre la modulació de senyals que convé tenir molt clars i sobre els quals volem tornar a insistir en la introducció d'aquest mòdul: la mida de les antenes necessàries i l'atenuació que pateix el senyal quan es propaga per ràdio.

Tal com s'ha introduït en el mòdul anterior, en els sistemes de comunicació ràdio, la freqüència portadora influeix directament en la mida de les antenes transmissora i receptora, ja que l'energia electromagnètica s'acobla al medi de propagació a través de les antenes, que actuen com a radiador. La mida física de les antenes i la distància de separació entre l'antena transmissora i la receptora depenen principalment de la freqüència portadora. Les radiacions electromagnètiques es desplacen a la velocitat de la llum $c = 300.000$ km/s, i aquesta velocitat està relacionada al seu torn amb la freqüència portadora f a través de la seva longitud d'ona λ , segons l'equació:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (1)$$

Per a obtenir una radiació eficient, les mides físiques de les antenes (bàsicament la seva longitud) han de ser almenys d'un 10% de la longitud d'ona. Així, per exemple, per a la transmissió de ràdio comercial FM, amb freqüències portadores entorn de 100 MHz, la longitud d'ona és de 3 m i la longitud mínima adequada per a les antenes és de 30 cm. Mitjançant càlculs semblants s'obté que, per al sistema GSM 1800 (freqüències portadores de 1.800 MHz), la proporció queda dividida entre 18, és a dir, s'obtenen uns requeriments mínims de longitud d'antena d'1,7 cm. En aquest sentit, podem afirmar que amb l'increment de la freqüència portadora disminueix la mida requerida per a les antenes, la qual cosa es considera tecnològicament un avantatge.

L'altre aspecte que cal destacar relacionat directament amb la freqüència portadora és que el senyal transmès té una atenuació (disminució de nivell o amplitada) que augmenta amb la freqüència d'ocupació. Prenguem com a exemple una transmissió de senyal en espai lliure en condicions ideals (sense distorsió ni interferències). El senyal rebut es relaciona amb el senyal transmès segons l'equació següent:

$$s_R(t) = \alpha s_T(t) + w(t) \quad (2)$$

en què cada element és:

- $s_T(t)$: senyal transmès
- $s_R(t)$: senyal rebut
- α : atenuació

- $w(t)$: senyal de soroll

L'atenuació ($0 \leq \alpha \leq 1$) és inversament proporcional a la distància (r) entre el transmissor i el receptor i a la freqüència portadora (f).

$$\alpha = \frac{k}{rf} \quad (3)$$

A (3) k és una constant de proporcionalitat. Es dedueix que amb una freqüència portadora més gran, la constant α és més petita, i per tant el senyal rebut es troba més atenuat respecte del senyal transmès. La conseqüència immediata és que, com més gran sigui la freqüència portadora, més petita ha de ser la distància entre antenes transmissora i receptora per a mantenir el nivell de senyal adequat, de tal manera que no predomini el senyal de soroll en l'expressió (2).

Seguint els exemples de GSM i d'FM, cal destacar que, per a la cobertura del sistema GSM en una àrea urbana, es requereix una gran quantitat d'estacions repetidores, amb una densitat espacial més gran que quan s'ubiquen antenes per a la cobertura d'un territori mitjançant emissores d'FM. Per a la cobertura de GSM, s'utilitzen els sostres de molts edificis per a col·locar plataformes de repetició, mentre que les emissores de ràdio FM solen estar molt més disperses i situades en els punts més alts de cada ciutat o rodalies.

En definitiva, es destaca que qualsevol sistema de comunicacions opera a una freqüència portadora, entorn de la qual s'ocupa una amplada de banda. En general, l'amplada de banda es reparteix entre els diversos usuaris del sistema. Com més gran és la freqüència portadora o freqüència d'operació del sistema:

- 1) Les antenes de transmissió i de recepció són de mida més petita.
- 2) La distància entre el transmissor i el receptor és més petita per a evitar que el senyal transmès s'atenuï massa.

Modulacions passabanda analògiques i modulacions passabanda digitals

Bàsicament, modular consisteix a traslladar el senyal d'informació en freqüència, des de baixa freqüència fins a la freqüència portadora del corresponent sistema. El senyal traslladat espectralment és un senyal analògic, i per tant es representa mitjançant una funció real i contínua en el temps. Tanmateix, tal com es presenta en el mòdul d'introducció, les modulacions passabanda es classifiquen en modulacions analògiques i en modulacions digitals.

En les modulacions analògiques, el senyal d'informació el produeix directament una font d'informació analògica o contínua. Aquest és el cas dels senyals d'àudio en els sistemes de radiodifusió d'AM i en els sistemes de radiodifusió FM.

En les modulacions digitals, el senyal continu que es converteix a alta freqüència prové de codificar i conformar mitjançant pulsos una seqüència de bits, és a dir, és un senyal de naturalesa digital. Per tant, en els sistemes de modulació digital, com a pas previ a la conversió de freqüència, s'ha de generar a partir dels bits un senyal continu que físicament suporti la informació proporcionada per la seqüència de bits. El mòdul 4 d'aquesta assignatura es dedica íntegrament a l'estudi d'aquestes estratègies.

Aquest mòdul està dedicat fonamentalment a formalitzar les modulacions analògiques passabanda, introduint el concepte de *modulació en fase i quadratura*. Aquesta modulació proporciona uns fonaments matemàtics que permeten expressar qualsevol altre tipus de modulació lineal o angular com un cas particular de la modulació en fase i quadratura. Per aquest motiu és molt important comprendre els detalls i les característiques d'aquestes eines. A més, s'estudiarà la manera com poden afectar els errors de freqüència o fase de la rèplica de la portadora en el receptor, degradant la recepció dels senyals. També s'analitza l'efecte del soroll sobre la qualitat final del senyal desmodulat i s'extreuen fórmules matemàtiques per a expressar la relació senyal a soroll en el cas particular de les modulacions lineals i les modulacions en fase i en quadratura.

Ocupació espectral dels estàndards radioelèctrics

En el mòdul anterior s'ha presentat la freqüència portadora com la freqüència a l'entorn de la qual el senyal passabanda ocupa una amplada de banda determinat. En un sistema de comunicacions estandarditzat i usat per diferents usuaris, s'assigna una amplada de banda a cada usuari dins del marge disponible per al sistema en qüestió.

En la taula 1 es mostren alguns dels estàndards radioelèctrics actuals i les característiques més significatives. Principalment, apareixen estàndards terrestres i majoritàriament els usats a Europa.

Taula 1. Repartiment de l'espectre radioelèctric

Denominació de la banda	Longitud d'ona	Freqüència	Estàndard	Amplada de banda assignada a l'estàndard	Format de modulació	Amplada de banda per usuari
<i>Low frequency</i> (LF)	10-100 km	3-30 kHz				
<i>Very low frequency</i> (VLF)	1-10 km	30-300 kHz				

En les quatre columnes de la dreta es presenten diferents exemples de sistemes de comunicacions analògics i digitals. El repartiment freqüencial és una qüestió tecnològica i també una qüestió legal, i depèn dels diferents organismes d'estandardització. Per aquest motiu, aquesta taula no es pot considerar completa.

^(*) A Espanya s'ha regulat l'assignació de 8 MHz per a un canal de televisió, sigui analògic o digital, i en general es reparteixen sense encavalcaments.

Denominació de la banda	Longitud d'ona	Freqüència	Estàndard	Amplada de banda assignada a l'estàndard	Format de modulació	Amplada de banda per usuari
<i>Medium frequency</i> (MF)	0,1-1 km	0,3-3 MHz	AM <i>broad-cast</i>	(520-1620 kHz)	AM (analògica)	9 kHz
			DRM (<i>broad-cast</i>)	(en procés d'estandarditz.)	COFDM (digital)	9 kHz
<i>High frequency</i> (HF)	10-100 m	3-30 MHz				
<i>Very high frequency</i> (VHF)	1-10 m	30-300 MHz	FM <i>broad-cast</i>	(87,5-108 MHz)	FM (analògica)	150 kHz
			DAB <i>broad-cast</i>	(174-240 MHz)	COFDM (digital)	1,5 MHz
<i>Ultra high frequency</i> (UHF)	0,01-1 m	0,3-3 GHz	DAB <i>broad-cast</i>	(1452-1952 MHz)	COFDM (digital)	1,5 MHz
			DVB-T (TDT) ^(*)	(471,25-855,25 MHz)	OFDM (digital)	8 MHz
			TV analògica ^(*) (471,25-855,25 MHz)	(471,25-855,25 MHz)	VSB imatge i FM àudio (analògica)	8 MHz
			GSM (telèfon mòbil) (890-915 MHz)	(1850-1890 MHz)	GMSK (digital)	200 kHz
			DECT (telèfon sense fil)	(1.880-1.900 MHz)	GMSK (digital)	1.728 kHz
			UMTS (telèfon mòbil)	(1.920-1.980 MHz up link) (2.110-2.170 MHz down link)	CDMA (digital)	5 MHz
			Wifi (802.11g)	2,4-2,483 GHz	OFDM (digital)	20 MHz
<i>Super high frequency</i> (UHF) Microones	1-10 cm	3-30 GHz	Wifi (802.11a)	5,1-5,3 GHz	OFDM (digital)	20 MHz
Infra-rojos	10E-6 m	10E14 Hz				

En les quatre columnes de la dreta es presenten diferents exemples de sistemes de comunicacions analògics i digitals. El repartiment freqüencial és una qüestió tecnològica i també una qüestió legal, i depèn dels diferents organismes d'estandardització. Per aquest motiu, aquesta taula no es pot considerar completa.

^(*) A Espanya s'ha regulat l'assignació de 8 MHz per a un canal de televisió, sigui analògic o digital, i en general es reparteixen sense encavalcaments.

Per a comunicacions amb cable, es disposa d'una divisió semblant de l'espectre d'ocupació, però amb menys perills d'interferències ja que els diferents sistemes de comunicacions no comparteixen físicament el canal perquè cada un d'aquests sistemes té els seus cables o fibra òptica.

Objectius

En acabar l'estudi d'aquest mòdul, hauren assolit els conceptes i les tècniques següents:

- 1.** Conèixer l'anàlisi de les modulacions analògiques de manera genèrica, les quals reben el nom de *modulacions de fase i quadratura*, o abreviadament *modulacions I&Q*. Aquest tipus de modulacions es formen a partir d'un o dos senyals analògics passabaix que constitueixen la informació que s'ha de transmetre.
- 2.** Entendre la classificació de les modulacions I&Q en modulacions lineals i modulacions no lineals. Identificació de freqüència portadora, components en fase i quadratura i amplada de banda, principalment.
- 3.** Conèixer l'anàlisi dels efectes en desmodulació produïts per errors en el sincronisme de la portadora.
- 4.** Conèixer la caracterització dels senyals que intervenen en un sistema de comunicacions com a processos aleatoris i calcular-ne la potència.
- 5.** Conèixer l'anàlisi del senyal de soroll que se suma al senyal rebut a l'entrada del receptor.
- 6.** Conèixer la mesura de la qualitat d'aquestes modulacions mitjançant el paràmetre de relació senyal a soroll (*signal to noise ratio*: SNR).

1. Modulacions analògiques passabanda

En aquest apartat formalitzem la modulació passabanda de senyals analògics introduint els conceptes de *components en fase i quadratura* i *equivalent passa-baix*. Veurem que les components en fase i quadratura són una eina matemàtica útil per a expressar qualsevol tipus de modulació, ja sia lineal o angular. Les eines matemàtiques que es proporcionen són vàlides, doncs, per a tot tipus d'aplicacions.

L'equivalent passabaix és una representació compacta de les components en fase i quadratura que resulta útil per a simplificar moltes demostracions matemàtiques. En el nostre cas, esmentarem el concepte però s'utilitzarà poc en aquesta assignatura introductòria. En aquest apartat també estudiarem els efectes que poden tenir els errors de sincronisme de fase en la desmodulació dels senyals.

1.1. Components en fase i quadratura

Hem vist que les modulacions podien classificar-se en modulacions lineals o angulars. En el primer cas l'amplitud de la portadora es modifica tenint en compte la informació que s'ha de transmetre. En les modulacions angulars, és la fase (o la freqüència) de la portadora la que depèn del missatge. En general, un senyal modulad podria representar-se mitjançant l'equació següent:

$$s(t) = A_c \cdot A(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi(t) + \varphi) \quad (4)$$

on $A(t)$ representa els canvis en l'amplitud i $\phi(t)$ els canvis en la fase. Els diferents tipus de modulacions es correspondran amb diferents expressions que relacionin el missatge original amb l'amplitud o la fase d'aquesta portadora, fet pel qual podem dir que l'expressió (4) representa de forma genèrica qualsevol tipus de modulació.

L'expressió anterior pot descompondre's en dos termes utilitzant l'expressió trigonomètrica del cosinus d'una suma:

$$s(t) = A(t) \cdot \cos(\phi(t)) \cdot A_c \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) - A(t) \cdot \sin(\phi(t)) \cdot A_c \cdot \sin(2\pi f_0 t + \varphi) \quad (5)$$

Aquesta expressió ens diu que qualsevol modulació pot descompondre's en la suma de dues modulacions d'amplitud amb portadores en quadratura. En efecte, podem considerar que el primer terme correspon a una modulació d'amplitud mitjançant el terme $A(t) \cdot \cos(\phi(t))$ a la portadora en cosinus, mentre que el segon terme també és una modulació en amplitud però sobre una portadora desfasada 90° (en sinus) respecte de la primera component. La primera

component moduladora es denomina *component en fase* i la segona es coneix com a *component en quadratura*. És important comentar que per *quadratura de fase* entenem que les dues components tenen un desfasament de 90° . Recordeu de trigonometria que $\cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(A)$ i que $\sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(A)$.

La denominació habitual és:

- Component en fase: $i_s(t) = A(t) \cdot \cos(\phi(t))$
- Component en quadratura: $q_s(t) = A(t) \cdot \sin(\phi(t))$

Qualsevol senyal o modulació passabanda es pot expressar segons la fórmula següent:

$$s(t) = i_s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_s(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (6)$$

A (6), el senyal $i_s(t)$ és un senyal passabaix d'amplada de banda $B_i \ll f_c$ i s'anomena *component en fase del senyal passabanda*. El senyal $q_s(t)$ és un senyal passabaix d'amplada de banda $B_q \ll f_c$ i s'anomena *component en quadratura del senyal passabanda*.

Les dues funcions sinus i cosinus es troben en quadratura de fase, és a dir, són dos sinusoides amb la mateixa amplitud i freqüència, i amb fases diferents entre ells amb un angle de 90° ($\frac{\pi}{2}$ radians).

1.2. Equivalent passabaix

L'equivalent passabaix és una pura definició matemàtica que pretén compactar la notació de la descomposició d'una modulació en les seves components en fase i quadratura. Tingueu en compte que en descompondre el senyal en els seus termes en cosinus i sinus, l'expressió d'aquest és força llarga i resulta feixuga per a treballar-hi. L'equivalent passabaix compacta la notació perquè passa a un nou senyal complex en què la part real és la component en fase i la part imaginària serà la component en quadratura. Amb aquest acord, resulta directe passar d'una notació a una altra.

És important destacar que la definició de l'equivalent passabaix és purament matemàtica i té l'objectiu de simplificar la notació. L'equivalent passabaix és un senyal complex totalment artificial. A la pràctica, les modulacions són reals i hem d'entendre l'equivalent passabaix com el que és, una representació compacta dels senyals reals mitjançant nombres complexos. Així, sempre que ens donin un equivalent passabaix, sabrem que la part real és la component en fase $i_s(t)$ i que la part imaginària és la component en quadratura $q_s(t)$.

Si formalitzem aquestes definicions:

- Equivalent passabaix: $b_s(t) = i_s(t) + jq_s(t)$
- Component en fase: $i_s(t) = \text{Re}\{b_s(t)\}$
- Component en quadratura: $q_s(t) = \text{Im}\{b_s(t)\}$

El senyal equivalent passabaix complex és de fet una funció complexa de la qual no es disposa físicament en cap dels punts d'un sistema real de comunicacions. Per una banda, tenim el component en fase i, per l'altra, el component en quadratura. Tanmateix, per a analitzar els senyals passabanda, és molt útil tenir-lo en compte perquè simplifica molts desenvolupaments matemàtics. El component en quadratura es pot identificar com la funció que multiplica la portadora sinus amb signe negatiu i coincideix amb la part imaginària de l'equivalent passabaix.

Exemple 1. Equivalent passabaix d'una modulació DSB

Si comparem l'expressió genèrica d'una modulació passabanda donada a (6) amb la d'una modulació DSB definida per l'equació:

$$s_{DSB}(t) = A_c \cdot x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad (7)$$

es dedueix que per a aquesta modulació obtenim:

- Component en fase (I): $i_s(t) = x(t)$
- Component en quadratura (Q): $q_s(t) = 0$
- Equivalent passabaix: $b_s(t) = i_s(t) = x(t)$

Resulta real, atès que per a aquest exemple, la part imaginària és zero.

Exemple 2. Equivalent passabaix d'una modulació AM

Si comparem l'expressió genèrica d'una modulació passabanda proporcionada a (6) amb la d'una modulació en AM definida per:

$$s_{AM}(t) = A_c \cdot (1 + mx(t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad (8)$$

es dedueix que per a aquesta modulació obtenim:

- Component en fase (I): $i_s(t) = 1 + mx(t)$
- Component en quadratura (Q): $q_s(t) = 0$
- Equivalent passabaix: $b_s(t) = i_s(t) = 1 + mx(t)$

Resulta real, atès que per a aquest exemple, la part imaginària és zero.

Quan s'hagin d'identificar els components en fase i en quadratura (I&Q¹) d'un senyal passabanda, s'ha d'especificar prèviament el senyal portador mitjançant els paràmetres d'amplitud, freqüència i fase de la portadora, ja que, un cop fixat el senyal passabanda $s(t)$, els components I&Q depenen del senyal portador en particular. I a l'inrevés, donats els senyals I&Q, es requereix un senyal portador per a formar el senyal passabanda, i aquest depèn, al mateix temps, dels paràmetres d'amplitud, freqüència i fase, que determinen el senyal portador.

⁽¹⁾I&Q és una abreviatura de l'expressió anglesa *in phase and quadrature*.

Exercici 1. Canvi de la referència portadora

Es defineix la modulació DSB segons l'expressió donada:

$$s(t) = x(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$$

Trobeu les components en fase i en quadratura d'aquesta modulació en cada una de les tres situacions següents:

a) Prenent com a senyal portador: $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$

b) Prenent com a senyal portador: $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$

c) Prenent com a senyal portador: $c(t) = A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c)$

Solució:

La component en fase sempre és la que multiplica el cosinus del senyal portador, i la component en quadratura sempre és la que multiplica el sinus amb el signe canviat. Per tant:

a) Prenent com a senyal portador $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$, s'obté directament que:

- Component en fase: $i_s(t) = x(t)$
- Component en fase: $q_s(t) = 0$

b) Prenent com a senyal portador $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$, s'obté per descomposició que:

$$s(t) = x(t)A_c \cos(\varphi_c) \cos(2\pi f_c t) - x(t)A_c \sin(\varphi_c) \sin(2\pi f_c t)$$

- Component en fase: $i_s(t) = x(t) \cos(\varphi_c)$
- Component en fase: $q_s(t) = x(t) \sin(\varphi_c)$

c) Prenent com a senyal portador $c(t) = A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c)$, s'obté, reescrivint el senyal portador i descomponent, que:

$$\begin{aligned} c(t) &= A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c - \frac{\pi}{2}) \\ s(t) &= x(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \\ &= x(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c - \frac{\pi}{2}) \cos(\frac{\pi}{2}) - x(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c - \frac{\pi}{2}) \sin(\frac{\pi}{2}) = \\ &= -x(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c - \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

- Component en fase: $i_s(t) = 0$
- Component en fase: $q_s(t) = x(t)$

1.3. Modulació en fase i quadratura de dos senyals passabaix

En aquest apartat es planteja una modulació passabanda utilitzada per a transmetre dos senyals moduladors: $x(t)$, $y(t)$. La modulació en fase i quadratura (també anomenada I&Q) es defineix fent coincidir un senyal modulador amb el component en fase del senyal modulad, i l'altre senyal modulador amb el component en quadratura del senyal modulad:

$$\begin{aligned} i_s(t) &= x(t) \\ q_s(t) &= y(t) \end{aligned} \quad (9)$$

L'exemple serveix per a verificar que, mitjançant la modulació I&Q, es poden modular dos senyals diferents que ocupen la mateixa banda de freqüències un cop modulats, i es poden recuperar per separat en recepció. El senyal modulats queda d'aquesta manera com la suma de dues modulacions de doble banda lateral DSB; una d'elles té com a senyal portador la funció cosinus i l'altra té com a senyal portador la funció sinus:

$$s(t) = A_c x(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - A_c y(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (10)$$

L'expressió freqüencial del senyal modulats s'obté aplicant la transformada de Fourier a l'expressió donada a (10):

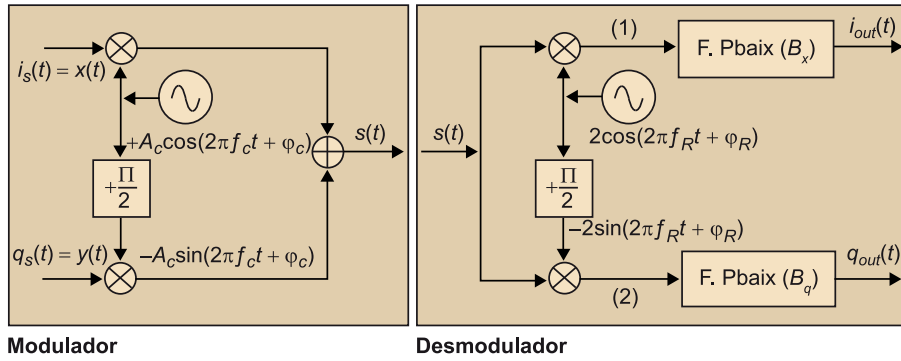
$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{1}{2} A_c (X(f - f_c) e^{j\varphi_c} + X(f + f_c) e^{-j\varphi_c}) \\ &\quad - \frac{1}{2j} A_c (Y(f - f_c) e^{j\varphi_c} - Y(f + f_c) e^{-j\varphi_c}) \end{aligned} \quad (11)$$

Per tant, la modulació I&Q consisteix a traslladar els senyals de component en fase i component en quadratura a la mateixa banda freqüencial d'ocupació entorn de la freqüència portadora f_c .

Els dos senyals moduladors de la modulació I&Q ocupen la mateixa banda de freqüències, un cop s'ha format el senyal modulats. En el desmodulador es poden separar gràcies al fet que els dos senyals portadors, el sinus i el cosinus, es troben en quadratura de fase. La quadratura de fase fa que els dos senyals portadors siguin ortogonals, la qual cosa permet la separació dels dos senyals moduladors.

A continuació presentem els diagrames de bloc funcionals, tant del modulador com del desmodulador, i es demostra que dos senyals diferents es poden transmetre conjuntament mitjançant la modulació I&Q i separar-se en el desmodulador.

Figura 1. Diagrama de blocs funcional del modulador i del desmodulador I&Q



Observeu que els dos senyals sinusoidals sinus i cosinus procedeixen del mateix oscil·lador local. Per a obtenir la funció sinus a partir de la funció cosinus, s'utilitza un desfasador de fase.

S'assumeix que les amplades de banda dels dos senyals moduladors coincideixen: $B_i = B_x = B_b$; $B_q = B_y = B_b$; en la resta de l'apartat a les dues amplades de banda se les anomena B_b .

El senyal de sortida del modulador de la figura 1, $s(t)$, correspon a la modulació I&Q presentada a (10). Els senyals de sortida del desmodulador s'analitzen a continuació.

Si el desmodulador està perfectament sincronitzat en portadora amb el modulador, s'anomena *desmodulador síncron* o *coherent*, situació que es produeix en la figura 1. Quan hi ha sincronia perfecta de freqüència i de fase entre el senyal rebut i l'oscil·lador local del receptor:

$$f_R = f_c \gg 2B_b; \varphi_R = \varphi_c \quad (12)$$

En les condicions esmentades, al punt (1) de la figura 1 es té el senyal següent:

$$\begin{aligned} s(t)2\cos(2\pi f_R t + \varphi_R) &= s(t)2\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) = \\ &= i_s(t)A_c 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c)\right) - q_s(t)A_c 2\frac{1}{2}\sin(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c) = \\ &= A_c i_s(t) + A_c i_s(t)\cos(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c) - A_c q_s(t)A_c \sin(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c) \end{aligned} \quad (13)$$

que en el domini de la freqüència es correspon amb:

$$\begin{aligned} A_c I_s(f) + \frac{1}{2} A_c (I_s(f - 2f_c) e^{j2\varphi_c} + I_s(f + 2f_c) e^{-j2\varphi_c}) \\ - \frac{1}{2j} A_c (Q_s(f - 2f_c) e^{j2\varphi_c} - Q_s(f + 2f_c) e^{-j2\varphi_c}) \end{aligned} \quad (14)$$

El senyal anterior es processa mitjançant filtre passabaix, la funció de transferència del qual és $\Pi\left(\frac{f}{2B_b}\right)$. En aquesta operació, els termes que estan centrats en el doble de la freqüència portadora ($2f_c$) són rebutjats pel mateix filtre. El senyal resultant a la sortida està format per l'únic terme de l'expressió (14) centrat en freqüència zero:

$$i_{OUT}(t) = i_s(t)A_c = A_c x(t) \quad (15)$$

I per tant, es detecta a la branca superior de la figura 1 el senyal missatge $x(t)$ amplificat per la constant A_c .

A continuació, es fa una anàlisi semblant per a l'obtenció del senyal a la branca inferior.

Al punt (2) de la figura 1 es té el senyal següent:

$$\begin{aligned} & -s(t)2\sin(2\pi f_c t + \varphi_c) = \\ & = -i_s(t)A_c 2\frac{1}{2}\sin(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c) + q_s(t)A_c 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c)\right) = \\ & = A_c q_s(t) - A_c i_s(t)\sin(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c) - A_c q_s(t)\cos(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c) \end{aligned} \quad (16)$$

que en el domini de la freqüència es correspon amb:

$$\begin{aligned} & A_c Q_s(f) - \frac{1}{2j} A_c (I_s(f - 2f_c)e^{j2\varphi_c} - I_s(f + 2f_c)e^{-j2\varphi_c}) \\ & - \frac{1}{2} A_c (Q_s(f - 2f_c)e^{j2\varphi_c} + Q_s(f + 2f_c)e^{-j2\varphi_c}) \end{aligned} \quad (17)$$

i a la sortida del corresponent filtre passabaix de funció de transferència $\Pi\left(\frac{f}{2B_b}\right)$, els termes centrats en el doble de la freqüència portadora desapareixen:

$$q_{OUT}(t) = q_s(t)A_c = A_c y(t) \quad (18)$$

I per tant, es detecta a la branca inferior de la figura 1 el senyal missatge $y(t)$.

En el desenvolupament precedent, sorgeix el concepte de sincronisme de portadora, tant en fase com en freqüència, i el tipus de desmodulador utilitzat s'anomena *desmodulador síncron* o *coherent*. Perquè el desmodulador sigui síncron, el receptor cal que tingui una rèplica del senyal portador pel que fa a la freqüència i la fase. L'amplitud és irrellevant en aquesta operació.

Aquesta característica, que és imprescindible en el disseny de molts sistemes de desmodulació, és en general una propietat que encareix el disseny del sistema receptor. L'obtenció de la freqüència exacta del senyal portador en recepció en principi es pot obtenir mitjançant oscil·ladors d'alta precisió. Tanmateix, per a obtenir la fase exacta del senyal portador, sempre hi ha d'haver el senyal portador generat pel modulador al receptor.

En els sistemes de comunicacions, en els quals és imprescindible la desmodulació síncrona o coherent, es transmet algun tipus d'informació redundant amb el mateix senyal, que pot ser el mateix senyal portador sumat al senyal modulad o informació redundant d'una altra classe. Com a contrapartida, en qualsevol de les dues opcions s'ha d'incrementar la potència gastada en la transmissió, ja que s'ha d'invertir part de la potència transmesa en la transmissió del senyal redundant.

1.4. Errors de fase en el desmodulador

A continuació es presenta un exemple en el qual el desmodulador I&Q presenta un error de fase respecte de la portadora del senyal rebut. La conseqüència immediata d'aquesta dessincronització entre el modulador i el desmodulador es tradueix en una interferència mútua entre els senyals desmodulats $i_{OUT}(t)$, $q_{OUT}(t)$ de l'esquema de la figura 1.

Exemple 3. Recepció de modulació I&Q amb error de fase en la portadora

En aquest exemple es revisa la desmodulació I&Q per al cas en què el desmodulador no es trobi en fase de portadora amb el modulador. Es conclou d'aquesta manera que la freqüència del desmodulador coincideix amb la freqüència del modulador, mentre que les fases són diferents entre elles:

$$f_R = f_c \gg 2B_b \quad \varphi_R = \varphi_c + \varepsilon_c \quad (19)$$

ε_c simbolitza l'error de fase donat en *rad*. Al punt (1) de la figura 1 es té el senyal següent:

$$\begin{aligned} s(t)2\cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \varepsilon_c) = \\ A_c i_s(t)2\cos(2\pi f_c t + \varphi_c)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \varepsilon_c) \\ - A_c q_s(t)2\sin(2\pi f_c t + \varphi_c)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \varepsilon_c) = \\ = A_c i_s(t)(\cos(\varepsilon_c) + \cos(2\pi f_c t + 2\varphi_c + \varepsilon_c)) \\ - A_c q_s(t)(\sin(-\varepsilon_c) + \sin(2\pi f_c t + \varphi_c + \varepsilon_c)) \end{aligned} \quad (20)$$

A la sortida del corresponent filtre passabaix, els termes centrats en el doble de la freqüència portadora desapareixen i queden els dos senyals missatge barrejats entre ells en funció de l'error de fase de portadora ϵ_c :

$$i_{OUT}(t) = A_c i_s(t) \cos(\epsilon_c) + A_c q_s(t) \sin(\epsilon_c) = A_c x(t) \cos(\epsilon_c) + A_c y(t) \sin(\epsilon_c) \quad (21)$$

Anàlogament, al punt (2) de la de la figura 1 es té el senyal següent:

$$\begin{aligned} & -s(t)2\sin(2\pi f_c t + \varphi_c + \epsilon_c) = \\ & -A_c i_s(t)2\cos(2\pi f_c t + \varphi_c)\sin(2\pi f_c t + \varphi_c + \epsilon_c) \\ & + A_c q_s(t)2\sin(2\pi f_c t + \varphi_c)\sin(2\pi f_c t + \varphi_c + \epsilon_c) = \quad (22) \\ & -A_c i_s(t)(\sin(\epsilon_c) + \sin(2\pi 2f_c t + \varphi_c + \epsilon_c)) \\ & + A_c q_s(t)(\cos(\epsilon_c) - \cos(2\pi 2f_c t + \varphi_c + \epsilon_c)) \end{aligned}$$

Mitjançant una anàlisi igual a la desenvolupada per al cas del desmodulador sense error de fase de portadora, a la sortida del corresponent filtre passabaix, els termes centrats en el doble de la freqüència portadora són rebutjats pel filtre passabaix:

$$q_{OUT}(t) = -A_c i_s(t) \sin(\epsilon_c) + A_c q_s(t) \cos(\epsilon_c) = -A_c x(t) \sin(\epsilon_c) + A_c y(t) \cos(\epsilon_c) \quad (23)$$

L'efecte produït sobre els senyals desmodulats s'interpreta com una interferència mútua entre els dos canals (canal en fase i canal en quadratura). És obvi que si l'error de fase és nul ($\epsilon_c = 0$) aquesta interferència no es produeix. Els senyals que resulten d'aquesta situació corresponen a les equacions (21) i (23) particularitzades a l'error de fase ($\epsilon_c = 0$).

Si s'analitza l'equivalent passabaix complex detectat, s'interpreta que l'error produït equival a un canvi o gir de fase respecte a l'equivalent passabaix del senyal modulad:

$$\begin{aligned} i_{OUT}(t) + jq_{OUT}(t) &= \\ A_c i_s(t) \cos(\epsilon_c) + A_c q_s(t) \sin(\epsilon_c) + j(-A_c i_s(t) \sin(\epsilon_c) + A_c q_s(t) \cos(\epsilon_c)) &= \quad (24) \\ = A_c (i_s(t) + jq_s(t)) e^{-j\epsilon_c} \end{aligned}$$

Es diu que el senyal desmodulat es troba girat un desfasament de ϵ_c rad respecte al senyal modulador.

1.5. Resum sobre modulacions I&Q

Mitjançant una modulació de tipus I&Q, dos senyals diferents, $x(t)$, $y(t)$, es poden transmetre simultàniament compartint la mateixa amplada de banda, i admeten una separació perfecta en recepció, únicament en cas que hi hagi una sincronia perfecta entre el senyal portador del modulador i el senyal portador del desmodulador.

Per a referenciar una aplicació real d'aquest tipus de modulació, es descriu a continuació, i de manera molt simplificada, el seu ús dins del sistema de telefonia mòbil de tercera generació UMTS². UMTS és el terme que es va introduir des d'ETSI per a anomenar els sistemes de comunicació sense fil³ de tercera generació (3G). Mitjançant tecnologia UMTS, es poden transmetre fitxers de dades, senyal de vídeo i altre tipus de serveis, que per mitjà del sistema GSM

⁽²⁾UMTS és la sigla de l'expressió anglesa *universal mobile telecommunications system*.

⁽³⁾En anglès, *wireless*.

⁽⁴⁾UTRA és acrònim de l'expressió anglesa *universal terrestrial radio access*.

(segona generació o 2G) no és possible. En UMTS, els enllaços de ràdio terrestre (UTRA⁴) es presenten de manera molt descriptiva en l'exemple següent per reflectir un cas real de modulació I&Q amb dos senyals missatge diferents.

Exemple 4. Modulació I&Q en UMTS

En el sistema UTRA, les diverses comunicacions establertes poden ser d'enllaç ascendent o d'enllaç descendent. Són d'enllaç ascendent les que es transmeten des de terminals individuals –com per exemple telèfons mòbils– fins a estacions base –com per exemple les instal·lades a les teulades d'alguns edificis–, i són comunicacions d'enllaç descendent les que es transmeten des de les estacions base fins a les terminals individuals.

En l'enllaç ascendent, el component en fase (*I*) de la modulació prové del senyal missatge, mentre que el component en quadratura (*Q*) correspon al senyal anomenat de control i necessari en recepció per a diverses operacions, com per exemple, la desmodulació síncrona o coherent. Cada un d'ells ocupa una amplada de banda de 2,5 MHz. El senyal passabanda resultant presenta una amplada de banda de 5 MHz i utilitza una freqüència portadora d'uns 2 GHz.

- senyal missatge: $i_s(t) = x(t)$
- senyal de control: $q_s(t) = y(t)$

L'enllaç descendent es transmet com a senyal missatge i senyal de control per ambdós components (I&Q). Això es deu al fet que el senyal de control ha de ser escoltat per diversos usuaris simultàniament, ja que aquest senyal transporta informació, com per exemple la que fa referència a l'estació base en qüestió, i a estacions base properes.

2. Qualitat del sistema de comunicacions: la relació senyal a soroll (SNR)

L'SNR⁵ és una mesura de qualitat que s'utilitza per a valorar el grau en què un sistema de comunicacions analògiques funciona millor o pitjor. Abans de definir-lo, en aquest apartat s'analitzen diversos aspectes necessaris per a comprendre'n el significat. Aquests aspectes són, entre d'altres, el càlcul de la potència del senyal transmès, el modelatge dels efectes del canal de comunicacions sobre el senyal transmès i els efectes del senyal de soroll que hi ha a l'entrada del receptor sobre el senyal rebut.

⁽⁵⁾SNR és la sigla de l'expressió anglesa *signal to noise ratio*.

Al final de l'apartat, es defineix l'SNR com a quocient entre dues potències. Al numerador hi ha la potència del senyal útil desmodulat, i al denominador hi ha la potència del senyal de soroll que s'ha processat inevitablement mitjançant el desmodulador. L'SNR és una figura de mèrit, ja que, com més elevat és el seu valor, s'obté més bona qualitat, perquè el nivell del senyal útil predomina sobre el nivell del senyal de soroll.

Senyal útil

El senyal transmès es va processant mitjançant els diversos subsistemes que componen el sistema de comunicacions sencer. Aquest senyal l'anomenem *senyal útil*, independentment del punt físic del sistema a què es faci referència. Així, per exemple, es pot parlar de senyal útil transmès, senyal útil a la sortida del canal, senyal útil desmodulat, etc.

2.1. Potència de les modulacions passabanda

En l'anàlisi precedent, el senyal modulador es tracta com un senyal determinista, caracteritzat mitjançant una expressió temporal i la seva transformada de Fourier corresponent. A la pràctica, les modulacions que es transmeten en els sistemes de comunicacions es caracteritzen com a processos aleatoris. Això vol dir que el senyal modulador, $x(t)$, pot tenir moltes formes de materialitzar-se, i per aquesta raó el seu comportament temporal s'ha d'estudiar en mitjana a través de la seva funció d'autocorrelació i de la seva potència; i d'altra banda, la seva caracterització freqüencial també s'ha d'analitzar en mitjana a través de la funció de densitat espectral o espectre de potència. Per a entendre més bé aquest fenomen, recomanem revisar el mòdul de processos aleatoris d'assignatures precedents.

Exemple 5. Senyals d'àudio, diverses funcions mostra d'un mateix procés aleatori

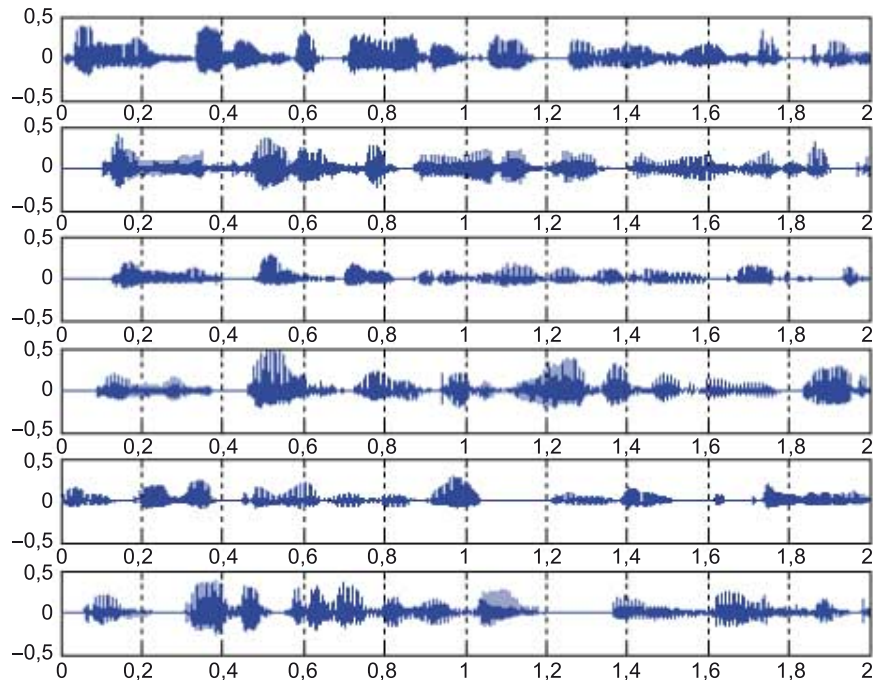
Com a exemple, posem el cas del senyal modulador $x(t)$, que és un senyal d'àudio que correspon a un tram de dos segons de temps de la informació proporcionada per diversos locutors de ràdio. A continuació, es mostren sis possibles realitzacions d'aquest senyal, que anomenem: $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$, $x_6(t)$.

La funció $x_1(t)$ correspon a una veu femenina i la funció $x_2(t)$ correspon a una veu masculina. Per a ambdues, el senyal d'àudio representa les paraules: "amb millors o pitjors eufemismes".

La funció $x_3(t)$ correspon a una veu femenina i la funció $x_4(t)$ correspon a una veu masculina. Per a ambdues, el senyal d'àudio representa les paraules: "amb nostàlgia enterbolida de rancúnia".

La funció $x_5(t)$ correspon a una veu femenina i la funció $x_6(t)$ correspon a una veu masculina. Per a ambdues, el senyal d'àudio representa les paraules: "amb tota probabilitat a Bèlgica".

Figura 2. Gràfiques temporals dels sis senyals d'àudio corresponents a l'exemple 5



L'eix x representa un tram de temps de 2 s.

La figura 2 mostra que, quan el missatge que es vol transmetre és d'àudio, com per exemple en un sistema de ràdio comercial, el senyal de la font és impredecible *a priori* i presenta infinitat de possibilitats per a la seva realització. Fins i tot per a un mateix conjunt de paraules, emès per diversos locutors, l'aspecte d'aquests senyals és significativament diferent, com passa entre les dues primeres gràfiques de la figura 2.

Per tant, es diu que el senyal modulador és un procés aleatori i es caracteritza en mitjana, tant en el domini temporal com en el domini de la freqüencial. En general, en el domini de la freqüència els senyals d'àudio corresponents a veu, sense música, ocupen un marge de freqüències que va des de 200 Hz a 3,4 kHz.

Tots els senyals que es transmeten o que d'alguna manera es troben en un sistema de comunicacions presenten un caràcter aleatori, que fa necessari que es caracteritzin com a processos aleatoris. A més, solen presentar la característica d'estacionarietat.

En tractar amb senyals corresponents a processos aleatoris estacionaris, es caracteritzen mitjançant la funció d'autocorrelació, la potència i la funció de densitat espectral de potència.

La funció d'autocorrelació per a un procés aleatori estacionari i real, $x(t)$, es defineix utilitzant l'operador d'esperança estadística E .

$$R_x(\tau) = E[x(t + \tau)x(t)] \quad (25)$$

La propietat d'estacionarietat consisteix precisament en el fet que la funció d'autocorrelació no depèn de l'origen de temps t , sinó que depèn únicament de la diferència de temps τ , dels dos senyals dels quals es fa la mitjana.

La potència és un paràmetre escalar que per a un procés aleatori estacionari es defineix com la funció d'autocorrelació avaluada a l'origen ($\tau = 0$).

$$P_x = R_x(0) = E[|x(t)|^2] \quad (26)$$

La caracterització en el domini freqüencial dels processos aleatoris estacionaris es realitza mitjançant la funció de densitat espectral, definida com la transformada de Fourier de la funció d'autocorrelació:

$$S_x(f) = TF[R_x(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad (27)$$

La funció anterior és una densitat espectral de potència, ja que fent la transformada de Fourier inversa de la funció (27) i juntament amb la definició de potència donada a (26) s'obté:

$$P_x = \int S_x(f)df \quad (28)$$

Les definicions de correlació, potència i densitat espectral d'un procés aleatori estacionari es requereixen en un sistema de comunicacions per a poder dissenyar els diversos elements que intervenen, sempre que es pugui processar qualssevol de les funcions mostra del procés.

Per exemple, en el disseny d'un filtre per a processar el senyal transmès, es considera l'amplada de banda donada per la densitat espectral del procés corresponent al senyal transmès. Si es tractessin les funcions mostra una a una, es podria arribar a tenir una amplada de banda diferent per a cada una d'elles. El fet de tenir en compte únicament l'amplada de banda de la densitat espectral equival a caracteritzar l'amplada de banda mitjana a la qual més o menys s'ajusten totes les funcions del procés i d'aquesta manera, sigui quina sigui la funció processada, el filtre que s'ha d'implementar és únic.

Exemple 6. Senyal generat per un oscil·lador

El senyal generat per un oscil·lador local, que es correspon amb el senyal portador, és una sinusoide d'amplitud i freqüència que cal determinar. La fase és una variable aleatòria de distribució uniforme a $[-\pi, +\pi)$ rad. Per tant, cada vegada que s'encén l'oscil·lador i es configuren amplitud i freqüència, s'obté una funció mostra del procés, com per exemple el senyal portador d'una modulació de tipus DSB. A continuació, s'analitzen la funció d'autocorrelació, la potència i la funció densitat espectral o espectre de potència per al senyal generat per l'oscil·lador.

El procés definit es representa mitjançant l'expressió següent:

$$c(t) = a \cos(2\pi f_c t + \varphi) \quad (29)$$

L'amplitud es mesura en volts o mvolts i la freqüència f_c es mesura en Hz, kHz, MHz, etc. La fase φ és una variable aleatòria, la funció de densitat de probabilitat de la qual és uniforme:

$$f_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \Pi\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right) \quad (30)$$

La funció de densitat de probabilitat proporcionada és per a la fase mesurada en radiants.

Càlcul de la funció d'autocorrelació:

$$\begin{aligned} R_c(\tau) &= E[c(t+\tau)c^*(t)] = \\ &= \int a \cos(2\pi f_c(t+\tau) + \varphi) a \cos(2\pi f_c t + \varphi) f_\varphi(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{2} \int (\cos(2\pi f_c \tau) + \cos(2\pi f_c(2t+\tau) + 2\varphi)) f_\varphi(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(2\pi f_c \tau) + \cos(2\pi f_c(2t+\tau) + 2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) \end{aligned} \quad (31)$$

Càlcul de la potència:

$$P_c = R_c(0) = \frac{a^2}{2} \quad (32)$$

Càlcul de la densitat espectral:

$$S_c(f) = TF[R_c(\tau)] = \frac{a^2}{4} (\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)) \quad (33)$$

Es dedueix d'aquest exemple que per a aquest procés tota la potència es concentra en la freqüència triada f_c .

En l'anàlisi dels senyals passabanda mitjançant un sistema de comunicacions, interessa determinar-ne la potència. En aquesta anàlisi, es té com a dada de partida la potència del senyal modulador i es determina la potència del senyal passabanda en funció de la potència del senyal modulador. En els exemples que segueixen, s'analitza la potència de diversos senyals passabanda caracteritzats com a processos aleatoris.

Exemple 7. Potència d'una modulació DSB

El procés corresponent al senyal modulador en DSB es defineix com:

$$s(t) = x(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (34)$$

On, al mateix temps, el senyal modulador correspon a un procés aleatori estacionari de potència $P_x = E[x^2(t)]$. La fase de l'oscil·lador és una variable aleatòria, la funció de densitat de probabilitat de la qual és uniforme:

$$f_{\varphi_c}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \Pi\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)$$

La potència d'aquest procés s'analitza a continuació utilitzant el resultat obtingut en l'exemple 6:

$$\begin{aligned} P_s &= E[s^2(t)] = E[x^2(t)A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t + \varphi_c)] = \\ &= E[x^2(t)]E[A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t + \varphi_c)] = P_x P_c = A_c^2 P_x / 2 \end{aligned} \quad (36)$$

Exemple 8. Potència d'una modulació AM

El procés corresponent al senyal modulador en AM es defineix com a:

$$s_{AM}(t) = A_c(1 + mx(t))\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (37)$$

On, al mateix temps, el senyal modulador correspon a un procés aleatori estacionari de potència $P_x = E[x^2(t)]$ i de mitjana nul·la $E[x(t)] = 0$. La fase de l'oscil·lador és una variable aleatòria, la funció de densitat de probabilitat de la qual és uniforme: $f_{\varphi_c}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \Pi\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)$.

La potència d'aquest procés s'analitza a continuació utilitzant el resultat obtingut en l'exemple 6:

$$\begin{aligned} P_s &= E[s^2(t)] = E[(1 + mx(t))^2 A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t + \varphi_c)] = \\ &= E[1 + 2mx(t) + m^2 x^2(t)]E[A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t + \varphi_c)] = \\ &= P_c + P_c m^2 P_x = \frac{A_c^2(1 + m^2 P_x)}{2} \end{aligned} \quad (38)$$

Observeu en aquest cas que la potència total transmesa es pot descompondre en la suma de la potència del senyal portador més la potència del senyal que s'obtingria si només es transmetés la part corresponent a la modulació DSB, segons l'expressió donada a (36) per al senyal de modulació AM. Aquesta característica origina que la potència de la modulació AM sempre és més gran que la de la modulació DSB per a senyals moduladors i portadors iguals.

Exemple 9. Potència d'una modulació I&Q

Tenim dos senyals moduladors $x(t)$, $y(t)$ corresponents a dos processos aleatoris estacionaris de potències $P_x = E[x^2(t)]$, $P_y = E[y^2(t)]$ i que $E[x(t)y(t)] = 0$. La fase de l'oscil·lador és una variable aleatòria, la funció de densitat de probabilitat de la qual és uniforme:

$$f_{\varphi_c}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \Pi\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right) \quad (39)$$

Es forma la modulació I&Q donada a (10).

La potència d'aquest procés es facilita a continuació utilitzant de nou el resultat obtingut en l'exemple 6. En l'obtenció del resultat es recomana revisar tots els passos que s'han suprimit per a no allargar-ne massa el desenvolupament:

$$\begin{aligned} P_s &= E[s^2(t)] = A_c^2 E[(x(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - y(t)\sin(2\pi f_c t + \varphi_c))^2] = \\ &= A_c^2 E[(x(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c))^2] + A_c^2 E[(y(t)\sin(2\pi f_c t + \varphi_c))^2] = A_c^2 / 2 (P_x + P_y) \end{aligned} \quad (40)$$

La potència mitjana del procés és igual a la semisuma de les potències dels dos processos passabaix, ponderada per l'amplitud al quadrat del senyal portador:

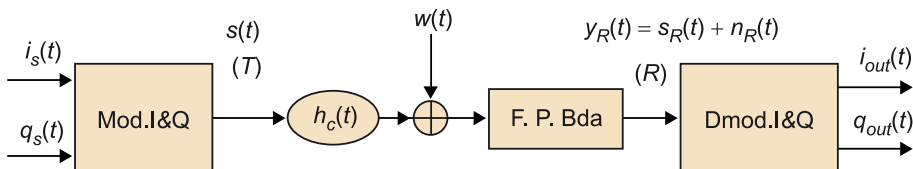
$$P_s = A_c^2 / 2 (P_{i_s} + P_{q_s}) = A_c^2 / 2 (P_x + P_y) \quad (41)$$

Els exemples 7, 8, i 9 representen tres casos en els quals s'obté la potència del procés corresponent al senyal modulad, en funció de la potència del senyal modulador i de la potència del senyal portador.

2.2. Sistema de comunicacions passabanda

En aquest apartat es presenta un sistema de comunicacions passabanda genèric. En l'apartat anterior s'ha fet una anàlisi detallada de la potència del senyal transmès per a diversos sistemes de modulació. En tots els casos el senyal transmès s'identifica amb el senyal útil a la sortida del transmissor. En el sistema que s'analiza en aquest apartat es considera el senyal de soroll que es manifesta a l'entrada del receptor, i com a efecte no desitjat se suma al senyal útil i es processa irremediablment a tots els subsistemes del receptor.

Figura 3. Sistema sencer de comunicacions



El punt (T) representa el punt de transmissió i el punt (R) representa el punt de recepció.

En la figura 3 es mostra un diagrama de blocs simplificat d'un sistema de comunicacions passabanda. Se'n distingeixen els elements següents:

- El transmissor del qual únicament es destaca el modulador passabanda. La sortida del transmissor es marca amb el símbol (T). En aquest punt s'envia el senyal transmès al medi, amb un nivell de potència de senyal útil transmès S_T .
- El canal es considera lineal i invariant. Per aquesta raó es modelitza mitjançant la resposta impulsional $h_c(t)$.
- El receptor, que al mateix temps es divideix en tres subsistemes: suma de soroll tèrmic a l'entrada, $w(t)$, filtre passabanda i desmodulador passabanda.

El filtre passabanda del receptor ha de permetre passar en tota la seva amplada de banda el senyal útil rebut i eliminar el soroll additiu fora de la banda del senyal, així com possibles interferències.

En transmetre modulacions passabanda I&Q mitjançant sistemes de comunicacions modelitzats segons l'esquema de la figura 3, es mesura la qualitat de la transmissió total al punt final de la cadena. És a dir, sobre els senyals desmodulats. Idealment, aquests senyals haurien de ser idèntics als proporcionats per la font. Atès l'esquema del sistema, interessa obtenir:

$$\begin{aligned} i_{out}(t) &= i_s(t) \\ q_{out}(t) &= q_s(t) \end{aligned} \quad (42)$$

Tanmateix, a la pràctica els senyals es diferencien entre ells principalment pels efectes següents:

- 1) Distorsió lineal generada pel canal de comunicacions.
- 2) Distorsió no lineal generada per sistemes amplificadors, especialment al transmissor.
- 3) Generació d'interferències sobreposades al senyal.
- 4) Soroll additiu que se suma a l'entrada del receptor.

Els efectes anteriors es comenten en la introducció. En l'anàlisi de la relació SNR, al final d'aquest apartat es considera únicament un canal de comunicacions ideal amb absència d'interferències i presència de soroll additiu a l'entrada del receptor:

$$h_c(t) = \delta(t) \quad (43)$$

Per a un canal ideal sense interferències i en cas que no hi hagués soroll, es compliria amb exactitud l'equació (42), excepte en un factor de proporcionalitat.

La superposició de soroll additiu és un efecte no desitjat i inevitable. Mitjançant el filtre passabanda de la figura 3 i els filtres passabaix que integren el desmodulador I&Q de la figura 3, s'elimina el soroll corresponent a les freqüències no ocupades pel senyal útil. Tanmateix, el soroll que ocupa la banda útil del senyal no es pot eliminar i queda sobreposat a aquest.

Al punt de recepció (R), es té com a senyal útil el senyal transmès mitjançant el canal de comunicacions modelitzat per mitjà de la resposta impulsional $h_c(t)$ i filtrada pel filtre passabanda receptor:

$$s_R(t) = s(t) * h_c(t) * h_R(t) \quad (44)$$

El filtre passabanda ha de permetre el pas del senyal útil sense distorsió. Idealment presenta la funció de transferència:

$$H_R(f) = TF[h_R(t)] = \Pi\left(\frac{f-f_c}{B_S}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_c}{B_S}\right) \quad (45)$$

A continuació, analitzem l'efecte del senyal de soroll mitjançant el sistema receptor.

2.3. Soroll passabanda

A l'entrada del receptor d'un sistema de comunicacions, es recull el senyal rebut mitjançant una tensió elèctrica. Sobre el corrent generat, es produeixen petites desviacions en la trajectòria dels electrons que, per això, provoquen variacions sobre el corrent elèctric nominal. En general, aquest moviment es modelitza com un senyal de soroll sobreposat al senyal de comunicacions rebut, s'anomena *soroll* i es modelitza com un procés aleatori de mitjana nul·la, estacionari, gaussià, blanc i estadísticament independent del senyal útil (modulació) transmès pel sistema sencer. Analitzar amb detall cadascun dels qualificatius de la definició anterior requereix l'ús de les fórmules adequades que es presenten tot seguit.

Soroll en sistemes de comunicacions

El procés aleatori soroll se simbolitza mitjançant $w(t)$:

- És de mitjana estadística nul·la: $E[w(t)] = 0$.
- És estacionari.
- És gaussià: aquesta propietat referida a la distribució estadística de cada una de les mostres del procés $w(t)$ s'analitza amb detall en el mòdul de modulacions digitals.
- És blanc: la densitat espectral del procés de soroll $w(t)$ és constant per a totes les freqüències d'interès i és igual a $\frac{N_0}{2}$. S'utilitza el factor 1/2 per a indicar que la potència es reparteix entre freqüències positives i freqüències negatives:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \text{ Watt/Hz} \quad (46)$$

- És estadísticament independent del senyal transmès:

$$E[s(t)w(t)] = E[s(t)]E[w(t)] = 0 \quad (47)$$

El model descrit per al soroll de comunicacions és el més habitual a la pràctica i juntament amb la condició del canal donat a (43), se sol parlar de "canal ideal AWGN⁶" per a referir-se al tipus de model de canal de comunicacions més senzill que s'utilitza a la pràctica. S'anomena *soroll passabanda* el soroll que resulta en l'anomenat *punt de recepció (R)*:

$$n_R(t) = w(t) * h_R(t) \quad (48)$$

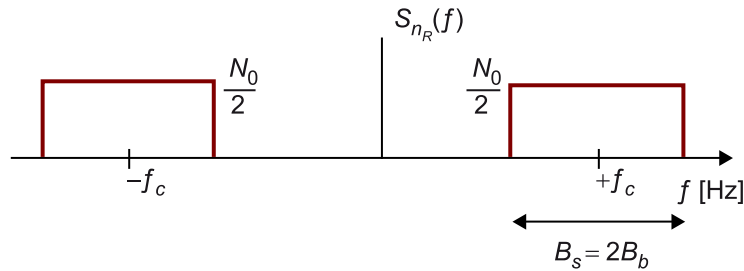
El símbol * representa l'operació de convolució.

⁽⁶⁾AWGN és la sigla de l'expressió anglesa *additive white gaussian noise*.

A causa que el soroll es filtra a través d'un filtre passabanda, la seva densitat espectral es troba centrada entorn de la freqüència central del filtre que, en aquest cas, coincideix amb la freqüència portadora de la modulació. La funció de densitat espectral del soroll passabanda és la donada per (49) i es representa en la figura 4:

$$S_{n_R}(f) = S_w(f) |H_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f-f_c}{B_s}\right) + \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f+f_c}{B_s}\right) \quad (49)$$

Figura 4. Densitat espectral del soroll passabanda



La potència del soroll passabanda en recepció resulta:

$$P_{n_R} = N_R = \int S_{n_R}(f) df = \frac{N_0}{2} 2B_s = N_0 B_s = 2N_0 B_b \quad (50)$$

Per a caracteritzar completament el procés passabanda, és necessari obtenir també la densitat espectral i la potència dels seus components en fase i en quadratura, ja que ambdós senyals es detecten a la sortida del sistema desmodulador de la figura 3, sobreposats al senyal útil. Assumint que el procés $n_R(t)$ és un senyal passabanda, como a tal senyal, es pot representar en funció dels seus components en fase i en quadratura:

$$n_R(t) = i_n(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_n(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (51)$$

Al punt (R) es té la suma de dos senyals passabanda, senyal útil i soroll passabanda:

$$y_R(t) = s(t) + n_R(t) \quad (52)$$

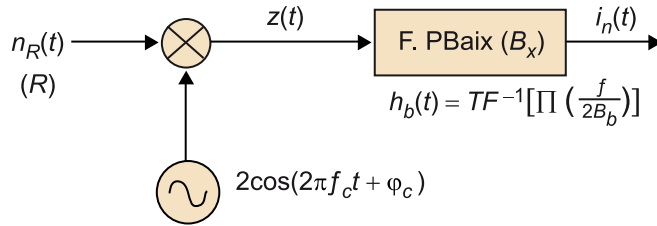
El senyal detectat a la sortida del sistema desmodulador a la branca superior correspon a la suma dels components en fase dels dos senyals passabanda, i a la branca inferior, a la suma dels components en quadratura dels dos senyals passabanda:

$$\begin{aligned} i_{out}(t) &= A_c i_s(t) + i_n(t) \\ q_{out}(t) &= A_c q_s(t) + q_n(t) \end{aligned} \quad (53)$$

Els dos components de soroll, $i_n(t)$, $q_n(t)$, resulten al mateix temps processos aleatoris estacionaris, de mitjana nul·la, i ambdós són passabaix. Tot seguit es calcula tant la densitat espectral com la potència per a ambdós processos.

Per a facilitar l'anàlisi matemàtica, en la figura 5 es mostra un esquema amb les transformacions que experimenta el senyal de soroll passabanda, mitjançant el desmodulador I&Q de la figura 3 a la branca superior, corresponent al component en fase.

Figura 5. Obtenció del component en fase de soroll



El procés $i_n(t)$ resulta:

$$i_n(t) = h_b(t) * (n_R(t) 2\cos(2\pi f_c t + \varphi_c)) = h_b(t) * z(t) \quad (54)$$

Modelitzant la fase φ_c com una variable aleatòria distribuïda uniformement a $[-\pi, +\pi]$, el procés a l'entrada del filtre passabaix ($z(t)$) presenta la funció de densitat espectral:

$$S_z(f) = S_{n_R}(f - f_c) + S_{n_R}(f + f_c) \quad (55)$$

I atès que el procés de soroll passabaix corresponent al component en fase es pot expressar com a:

$$i_n(t) = h_b(t) * z(t) \quad (56)$$

s'obté que la seva funció de densitat espectral és:

$$\begin{aligned} S_{i_n}(f) &= |H_b(f)|^2 S_z(f) = \\ &= \Pi\left(\frac{f}{2B_b}\right) \left(\frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f-2f_c}{B_s}\right) + \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f}{B_s}\right) + \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f}{B_s}\right) + \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f+2f_c}{B_s}\right) \right) = \\ &= N_0 \Pi\left(\frac{f}{2B_b}\right) \end{aligned} \quad (57)$$

i la seva potència:

$$P_{i_n} = \int S_{i_n}(f) df = N_0 2B_b \quad (58)$$

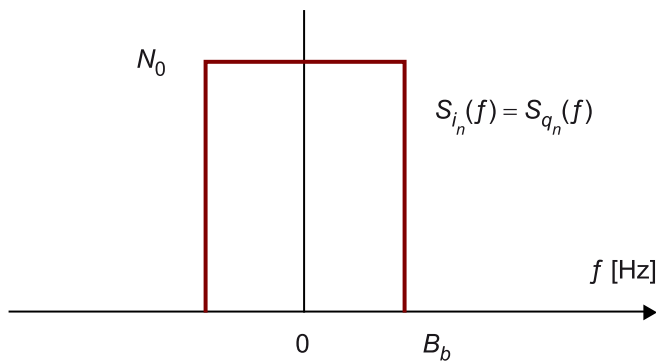
A (57) es mostra que el filtre passabaix és necessari per a eliminar components centrats en la freqüència doble de la portadora. Mitjançant desenvolupaments semblants, s'obtenen idèntiques expressions per al component en quadratura:

$$S_{q_n}(f) = N_0 \Pi\left(\frac{f}{2B_b}\right) \quad (59)$$

i per a la seva potència:

$$P_{q_n} = \int S_{q_n}(f) df = N_0 2B_b \quad (60)$$

Figura 6. Densitat espectral dels components en fase i en quadratura del soroll passabaix



El soroll tèrmic que es genera a l'entrada del receptor d'un sistema de comunicacions es modelitza com un procés aleatori estacionari. Apareix, per tant, sumat al senyal útil a l'entrada del filtre receptor i es va transmetent per tots els punts del receptor. Inicialment, el punt de recepció (R) és passabanda, ja que es correspon amb la sortida del filtre receptor passabanda i ocupa la mateixa banda espectral que el senyal útil. A la sortida del desmodulador I&Q, s'obtenen els components I&Q d'aquest soroll. Ambdós presenten idèntiques funcions de densitat espectral i els mateixos nivells de potència. El nivell de potència coincideix, a més, amb el nivell de potència del procés de soroll passabanda al punt (R).

2.4. Relació de potències senyal a soroll: SNR

A fi d'analitzar la qualitat del sistema de comunicacions a partir de la influència del soroll additiu sobre el senyal desmodulat, es defineix la figura d'SNR com el quocient de potències entre la potència del senyal útil desmodulat a la sortida del desmodulador i la potència del senyal de soroll també a la sortida del desmodulador. És un factor de qualitat, és a dir, com més gran és el quocient, més qualitat. S'anomena aquest quocient SNR (*signal to noise rate*) i només té sentit en absència de distorsió i d'interferències, tant intrínseques al sistema com externes.

Potència transmesa

La potència transmesa S_T és el nivell de potència que s'inverteix per a transmetre el senyal útil. És, per tant, la potència del senyal al punt (T) de l'esquema de la figura 3.

El quocient SNR s'ha d'expressar en funció de la potència transmesa pel sistema transmissor, atès que aquest paràmetre, que s'anomena S_T , és un factor d'inversió. Això significa que, com més potència transmesa, millor resulta el quocient SNR, perquè la relació entre l'SNR i la potència transmesa sempre resulti lineal. Tanmateix, com més gran és la potència transmesa, més costos és el sistema transmissor, pel requeriment d'amplificadors de més guany. Per tant, la potència que es vol transmetre és en general el resultat d'una situació de compromís entre costos que s'han d'invertir i qualitat mínima requerida pel que fa a SNR.

SNR

L'SNR és el quocient entre la potència del senyal útil a la sortida del desmodulador i el senyal de soroll a la sortida del desmodulador. El punt D representa la sortida del sistema receptor i k la constant de proporcionalitat de l'SNR respecte a la potència transmesa:

$$SRN = \frac{P_{util_D}}{P_{soroll_D}} = \frac{S_D}{N_D} = kS_T \quad (61)$$

Per conveni, s'utilitza la lletra majúscula S per a expressar la potència del senyal útil i amb el subíndex s'indica el punt del sistema de comunicacions en el qual es calcula. Així, per exemple, S_T és la potència del senyal útil en el punt (T), S_R és la potència del senyal útil en el punt R i S_D és la potència del senyal útil en la detecció o sortida del sistema. Anàlogament, s'utilitza la lletra majúscula N per a expressar la potència de soroll en els diferents punts del sistema de comunicacions en el qual es trobi present.

Exemple 10. Càlcul de l'SNR per a una modulació en doble banda lateral (DSB)

Sigui la modulació en DSB centrada en la freqüència f_c , transmesa invertint una potència de S_T watts. El senyal modulador $x(t)$ és de potència P_x watts i presenta una amplada de banda de B_x Hz. El canal de transmissió presenta una resposta impulsional ideal $h_c(t) = \alpha\delta(t)$ i el soroll additiu $w(t)$ és un procés aleatori blanc i gaussià segons el model AWGN. La seva densitat espectral és:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \text{ watts/Hz} \quad (62)$$

El receptor està format per (figura 7):

- Un filtre passabanda ideal de funció de transferència:

$$H_R(f) = \Pi\left(\frac{f-f_c}{2B_x}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_c}{2B_x}\right) \quad (63)$$

- Un desmodulador coherent que detecta el component en fase i que està perfectament sincronitzat amb la portadora rebuda.
- Un filtre passabaix ideal de funció de transferència:

$$H_b(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right) \quad (64)$$

Es calcula tot seguit el quocient SNR i es deixa en funció de la potència transmesa. Considerant el senyal modulat i transmès:

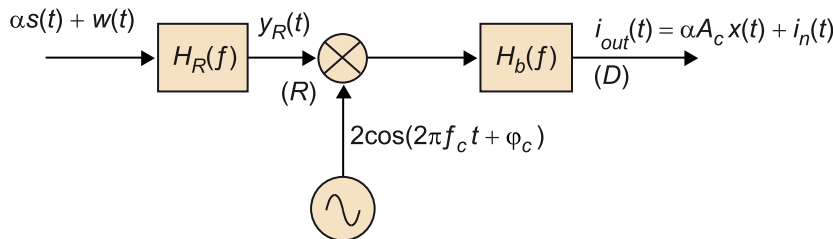
$$s(t) = x(t)c(t) = x(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (65)$$

la potència del qual coincideix amb la potència transmesa, i expressada en funció de paràmetres com A_c , P_x resulta, pel que s'ha vist:

$$S_T = P_s = \frac{1}{2} A_c^2 P_x \quad (66)$$

El senyal transmès s'atenua una constant α a través del canal i es detecta a l'entrada del filtre receptor, sobreposat al soroll donat $w(t)$ segons es mostra de manera esquemàtica en la figura 7.

Figura 7. Esquema receptor de la modulació DSB



A la sortida del filtre receptor s'obté:

$$\begin{aligned} y_R(t) &= (\alpha s(t) + w(t)) * h_R(t) = \alpha s(t) + n_R(t) = \\ &= \alpha x(t) A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) + i_n(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_n(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) = \\ &= (\alpha x(t) A_c + i_n(t)) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_n(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \end{aligned} \quad (67)$$

El senyal total al punt de detecció (D), suposant un canal ideal amb atenuació ($h_c(t) = \alpha \delta(t)$), s'expressa com a:

$$i_{out}(t) = A_c \alpha i_s(t) + i_n(t) = A_c \alpha x(t) + i_n(t) \quad (68)$$

A (68) el primer sumand correspon al senyal útil i el segon sumand correspon al senyal de soroll. Atès que el senyal útil és proporcional al missatge, es troba lliure de distorsió i sí que té sentit mesurar la qualitat de la transmissió mitjançant el quocient SNR. L'SNR sobre aquesta sortida es calcula en funció dels diversos paràmetres físics com a:

$$SNR = \frac{S_D}{N_D} = \frac{\alpha^2 A_c^2 P_x}{P_{i_n}} = \frac{\alpha^2 A_c^2 P_x}{2N_0 B_x} = \frac{\alpha^2 S_T}{N_0 B_x} \quad (69)$$

L'expressió anterior es pot utilitzar per a calcular la mínima potència S_T , que s'ha de transmetre en funció de la mínima SNR exigida per criteris de qualitat i en les condicions pròpies del sistema. Mitjançant condicions del sistema s'entén l'atenuació del canal mesurada a través del paràmetre α , el nivell de soroll mesurat a través del paràmetre N_0 i l'amplada de banda del missatge B_b , com les més significatives.

Cal destacar que el quocient de potències SNR no té unitats en ser un quocient entre dues potències, que al mateix temps es mesuren en unitats de watts. A la pràctica, aquest quocient se sol donar en decibels (dB):

$$SNR_{(dB)} = 10 \log_{10}(SNR) \quad (70)$$

Quan es volen comparar dues relacions SNR diferents entre elles, se sol mesurar com la diferència en dB. Si per exemple tenim dos sistemes amb SNR_1 i SNR_2 , de manera que $SNR_1 > SNR_2$, tenim que el guany del sistema 1 respecte del sistema 2 és:

$$10 \log_{10} \left(\frac{SNR_1}{SNR_2} \right) = SNR_{1(dB)} - SNR_{2(dB)} \quad (71)$$

i la pèrdua del sistema 2 respecte del sistema 1 és:

$$10 \log_{10} \left(\frac{SNR_2}{SNR_1} \right) = SNR_{2(dB)} - SNR_{1(dB)} \quad (72)$$

2.5. SNR de la modulació AM

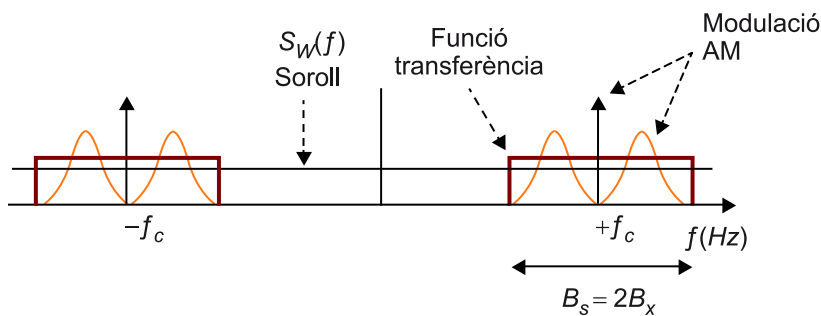
L'esquema receptor clàssic per a aquest tipus de desmodulació se simbolitza en el diagrama de funcions de la figura 8.

Figura 8. Diagrama de funcions del receptor d'AM



S'assumeix que el primer bloc és un filtre passabanda ideal de funció de transferència $H_R(f)$ que permet el pas del senyal útil sense distorsió i elimina el soroll existent fora de la banda del senyal útil. L'efecte de filtratge es mostra en la figura 9.

Figura 9. Espectres del senyal modulad en AM, de la densitat espectral de soroll a l'entrada del filtre receptor i funció de transferència del filtre passabanda receptor



El senyal a la sortida del filtre passabanda s'expressa com la suma del senyal útil més el soroll passabanda. Considerant com a canal ideal amb certa atenuació ($h_c(t) = (\alpha\delta(t))$):

$$\begin{aligned} y_R(t) &= \alpha s(t) + n_R(t) = \\ &= \alpha A_c (1 + mx(t)) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) + i_n(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_n(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \end{aligned} \quad (73)$$

El detector d'envolupant calcula el mòdul de l'equivalent passabaix del senyal rebut:

$$e_{y_R}(t) = |b_{y_R}(t)| = \sqrt{i_{y_R}^2(t) + q_{y_R}^2(t)} = \sqrt{(\alpha A_c (1 + mx(t)) + i_n(t))^2 + q_n^2(t)} \quad (74)$$

El senyal anterior en condicions d'elevada SNR s'aproxima directament pel component en fase del senyal rebut:

$$SNR \gg 1 \Rightarrow \alpha A_c \gg |i_n(t)|, |q_n(t)| \Rightarrow e_{y_R}(t) \cong A_c \alpha (1 + mx(t)) + i_n(t) \quad (75)$$

Al punt de destinació (D) del diagrama de la figura 8, el senyal de sortida es divideix entre el senyal útil i el senyal de soroll. El bloc d'eliminar el component continu o DC és necessari per a eliminar la constant que apareix a l'expressió (75). Així, el senyal resultant queda:

$$y_D(t) = e_{y_R}(t) - DC = A_c \alpha mx(t) + i_n(t) = s_D(t) + n_D(t) \quad (76)$$

La potència del senyal útil $s_D(t)$ és:

$$s_D = E[s_D^2(t)] = A_c^2 \alpha^2 m^2 P_x \quad (77)$$

La potència del senyal de soroll en detecció, atès que aquest coincideix amb el component en fase del soroll passabanda, $n_D(t) = i_n(t)$, és, segons (58):

$$N_D = E[n_D^2(t)] = P_{in} = N_0 2B_x \quad (78)$$

Per tant, la relació SNR de les respectives potències coincideix amb el quocient entre ambdues quantitats. Tanmateix, interessa expressar aquest quocient en funció de la potència transmesa ($S_T = P_S$), que es pot veure en l'exemple 7. D'aquesta manera, la relació de potències SNR queda:

$$SNR = \frac{A_c^2 \alpha^2 m^2 P_x}{N_0 2B_x} = \frac{m^2 P_x \alpha^2 S_T}{(1 + m^2 P_x) N_0 B_x} \quad (79)$$

2.6. Comparació de l'SNR de les modulacions AM i DSB

Analizant el resultat obtingut a (79), cal destacar que la modulació AM respecte de la potència transmesa, quan es compara amb la modulació DSB, l'SNR de la qual s'expressa a (68). Les pèrdues de la modulació AM respecte de la modulació DSB s'obtenen en dB amb les mateixes condicions per als dos tipus de modulació. En utilitzar igual potència transmesa, amplada de banda de senyal modulador, canal de transmissió i nivell de soroll, la pèrdua d'AM respecte de DSB, coincidint amb el guany de DSB respecte d'AM:

$$\left(\frac{SNR_{DSB}}{SNR_{AM}}\right)_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{\frac{\alpha^2 S_T}{N_0 B_x}}{\frac{m^2 P_x \alpha^2 S_T}{(1+m^2 P_x) N_0 B_x}}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{1+m^2 P_x}{m^2 P_x}\right) > 0 \quad (80)$$

El resultat anterior es deu al fet que en la modulació AM, la potència transmesa es reparteix entre la transmissió del senyal portador i la modulació pròpiament dita, que precisament correspon a un format DSB, tal com es mostra en l'equació (36).

Es conclou que, invertint la mateixa potència transmesa en un sistema de modulacions analògiques, el format DSB presenta més qualitat que el format AM, atenent criteris d'SNR. A la pràctica, el format AM s'utilitza per a radiodifusió, situació en la qual, a partir d'un transmissor, el senyal s'escolta a través de diversos receptors. Per aquesta raó, l'elevat consum en potència transmesa es té com a ben aprofitat, especialment tenint en compte que els receptors no necessiten estrictament ser síncrons o coherents.

Resum

Aquest mòdul està dedicat a l'estudi de les modulacions passabanda en general. S'hi analitzen amb detall els sistemes de modulació amb components en fase i quadratura, i hi són particularment tractats de manera pràctica per a alguns sistemes de modulació comercials.

En la caracterització de les modulacions passabanda, els components en fase i en quadratura són els senyals passabaix sobre els quals es transporta la informació i mitjançant un senyal portador són traslladats a una freqüència alta per a ocupar una determinada amplada espectral en la transmissió. El senyal portador és una funció sinusoidal que es caracteritza al mateix temps pels paràmetres d'amplitud, freqüència i fase. Els paràmetres de freqüència i de fase s'han de recuperar amb precisió en recepció, sempre que la desmodulació s'implementi de manera síncrona o coherent. En cas contrari, es produeixen pèrdues o atenuacions del senyal útil i interferències entre els components en fase i en quadratura.

El missatge que s'ha de transmetre o senyal modulador és de naturalesa aleatòria, per la qual cosa espectralment es caracteritza mitjançant la funció de densitat espectral. El soroll additiu que se suma al senyal a l'entrada del receptor és de naturalesa aleatòria i es caracteritza espectralment com a soroll blanc. La primera etapa d'un receptor d'un sistema de comunicacions passabanda consisteix en un filtre passabanda, que permet el pas del senyal útil o modulats i elimina els components espectrals de soroll fora de la banda del senyal útil. El soroll que ocupa la mateixa banda del senyal útil no es pot eliminar i dona lloc al soroll filtrat passabanda, que es desmodula inevitablement juntament amb el senyal útil, i apareix sumat al senyal missatge desmodulat. L'efecte produït es mesura mitjançant el quocient SNR de potències en detecció entre el senyal útil i el senyal de soroll.

En el mòdul de modulacions digitals passabanda s'utilitzen els conceptes de *modulacions analògiques passabanda*, *senyal portador* i *components en fase i en quadratura* presentats en aquest mòdul. En les modulacions digitals, les components I&Q són senyals continus en el temps, però que al seu torn transporten la informació d'un missatge digital, que consisteix en una seqüència de bits per segon. En definitiva, tot i la implantació de les modulacions digitals en tots els sistemes de comunicacions actuals, gran part del contingut d'aquest mòdul continua essent matèria fonamental per a entendre els conceptes de modulacions digitals.

Exercicis d'autoavaluació

La resolució dels següents exercicis es proposa com a complement de l'estudi del mòdul. Es recomana que es facin mitjançant una estratègia sistemàtica. En general, és convenient resoldre els desenvolupaments plantejats de manera general, treballant amb les variables i paràmetres de manera genèrica i substituir-los pels seus valors numèrics en particular al final dels apartats. D'aquesta manera es facilita la mateixa correcció i seguiment de l'exercici i s'obté una visió més àmplia que la del cas particular que s'analitzi.

1. Canvi de freqüència portadora

Es defineix la modulació DSB segons l'expressió donada a (5). Trobeu els components en fase i en quadratura d'aquesta modulació en cada una de les tres situacions següents:

a) Prenent com a senyal portador: $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$

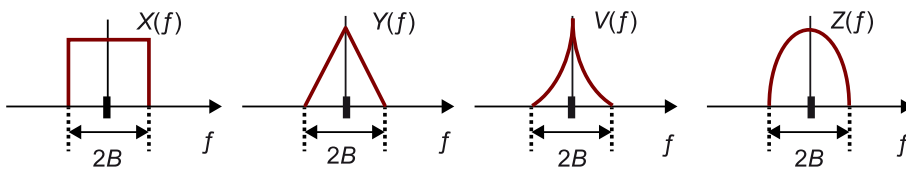
b) Prenent com a senyal portador: $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$

c) Prenent com a senyal portador: $c(t) = A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c)$

2. Doble modulació DSB

Disposem de quatre senyals moduladors: $x(t)$, $y(t)$, $v(t)$, $z(t)$, tots ells d'amplada de banda B Hz i cadascun d'ells presenta la transformada de Fourier de la figura 10.

Figura 10. Transformades de Fourier



Es fa el següent procés de modulació:

$$\begin{aligned} a(t) &= x(t)\cos(2\pi f_1 t) - y(t)\sin(2\pi f_1 t) \\ d(t) &= v(t)\cos(2\pi f_1 t) - z(t)\sin(2\pi f_1 t) \\ s(t) &= a(t)\cos(2\pi f_c t) - d(t)\sin(2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (81)$$

Considerem: $f_c = 4B$, $f_1 = B$. Es demana:

a) Dibuixeu la part real de la transformada de Fourier del senyal $s(t)$ i la part imaginària. ¿Quina amplada de banda té el senyal $s(t)$?

b) Calculeu els components en fase i en quadratura del senyal $s(t)$ respecte de la portadora $c(t) = \cos(2\pi f_c t)$.

c) Proposeu un esquema desmodulador que, a partir del senyal d'entrada $s(t)$, proporcioni quatre senyals de sortida corresponents als quatre senyals desmoduladors.

3. Desmodulació I&Q amb error de freqüència portadora

Disposem de dos senyals moduladors: $x(t)$, $y(t)$, tots dos d'amplada de banda B Hz. Es modulen en I&Q:

$$s(t) = A_c x(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - A_c y(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (82)$$

El senyal anterior es desmodula mitjançant el desmodulador de la figura 1. Suposeu els paràmetres següents:

$$f_R = f_c + \Delta f \gg 2B; \quad \varphi_R = \varphi_c + \varepsilon_c \quad (83)$$

Funcions de transferència dels filtres passabaix: $\Pi\left(\frac{f}{2(B+\Delta f)}\right)$.

- a) Trobeu l'expressió dels senyals de sortida en funció dels senyals d'entrada $x(t)$, $y(t)$.
- b) Demostreu que l'envolupant de l'equivalent passabaix desmodulat coincideix, excepte constant, amb l'envolupant de l'equivalent passabaix del senyal modulad (preneu com a funció envolupant $e_s(t) = |i_s(t) + jq_s(t)|$).

4. SNR en DSB

Considereu la modulació en DSB centrada en la freqüència f_c , transmesa invertint una potència de S_T watts. El senyal modulador $x(t)$ és de potència P_x watts i presenta una amplada de banda de B_x Hz. El canal de transmissió presenta una resposta impulsional ideal, $h_c(t) = \alpha\delta(t)$ i el soroll additiu $w(t)$ és un procés aleatori blanc i gaussià segons el model AWGN. La seva densitat espectral és:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \text{ watts/Hz} \quad (84)$$

El receptor està format per (figura 7):

- Un filtre passabanda de funció de transferència: $H_R(f) = \Pi\left(\frac{f-f_c}{3B_x}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_c}{3B_x}\right)$.
- Un desmodulador coherent que detecta el component en fase i que està perfectament sincronitzat amb la portadora rebuda.
- Un filtre passabaix ideal de funció de transferència: $H_b(f) = \Pi\left(\frac{f}{3B_x}\right)$.

Observeu que tant el filtre passabanda com el filtre passabaix presenten una amplada de banda més gran que l'estrictament necessària per a desmodular el senyal útil.

- a) Dibuixeu la funció de densitat espectral del soroll passabanda filtrat i calculeu-ne la potència.
- b) Dibuixeu la funció de densitat espectral del soroll resultant al punt de detecció i calculeu-ne la potència (apliqueu directament l'expressió (55)).
- c) Calculeu l'SNR resultant en funció de la potència transmesa S_T .
- d) Avalueu la degradació en dB de l'SNR que suposa el fet d'utilitzar filtres d'amplada de banda més grans que els estrictament necessaris.

5. Càlcul de l'SNR en considerar diferents defectes del sistema receptor

Considereu la modulació en DSB centrada en la freqüència f_c , definida en (5), transmesa invertint una potència de S_T watts. El senyal modulador $x(t)$ és de potència P_x watts i presenta una amplada de banda de B_x Hz. El canal de transmissió presenta una resposta impulsional ideal, $h_c(t) = \alpha\delta(t)$ i el soroll additiu $w(t)$ és un procés aleatori blanc i gaussià segons el model presentat en el subapartat 2.2. La seva densitat espectral és:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \text{ Watt/Hz} \quad (85)$$

El receptor està format per un filtre passabanda ideal de funció de transferència:

$$H_R(f) = \Pi\left(\frac{f-f_c}{2(B_x+B_\epsilon)}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_c}{2(B_x+B_\epsilon)}\right) \quad (86)$$

i per un filtre passabaix ideal de funció de transferència:

$$H_b(f) = \Pi\left(\frac{f}{2(B_x+B_\epsilon)}\right) \quad (87)$$

El desmodulador de component en fase és com el de la figura 7, tret que està sincronitzat incorrectament amb la portadora rebuda. El senyal generat per l'oscil·lador local és $2\cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \varphi_\epsilon)$.

a) Calculeu l'SNR en detecció en funció de la potència transmesa S_T i dels paràmetres α , N_0 , B_x , B_e , φ_e .

b) Avalueu la pèrdua en dB d'SNR per a les següents situacions respecte de la situació ideal ($B_e = 0$, $\varphi_e = 0$) i comenteu els resultats:

- $B_e = 0$, $\varphi_e = 0,1\pi$
- $B_e = 0,1 B_x$, $\varphi_e = 0$
- $B_e = 0,1 B_x$, $\varphi_e = 0,1\pi$

6. Desmodulació d'AM

Tenint en compte l'esquema desmodulador d'AM basat en detecció d'envolupant tal com apareix en la figura 8:

a) Demostreu que, en absència de soroll ($w(t) = 0$), a la sortida del sistema es té únicament el senyal útil sense distorsió.

b) Demostreu que si s'utilitza un desmodulador coherent per a desmodular el senyal d'AM segons la figura 7 en absència de soroll i posteriorment s'elimina el component continu, es té únicament el senyal útil sense distorsió.

c) Per a l'esquema anterior, si considerem la presència de soroll additiu $w(t)$ blanc i gaussià segons el model AWGN i de densitat espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$ watt/Hz, obtingueu l'SNR a la sortida del desmodulador en funció de la potència transmesa.

7. SNR en sistemes de modulacions analògiques

S'ha de transmetre un senyal d'àudio entre dos punts. El senyal modulador $x(t)$ és de potència $P_x = 10^{-3}$ watts i presenta una amplada de banda de $B_x = 5$ kHz. El canal de transmissió presenta una resposta impulsional ideal, $h_c(t) = \alpha\delta(t) = 0,88(t)$ i el soroll additiu $w(t)$ és un procés aleatori blanc i gaussià segons el model presentat en el subapartat 2.2. La seva densitat espectral és:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} = 10^{-6} \text{ watt/Hz} \quad (88)$$

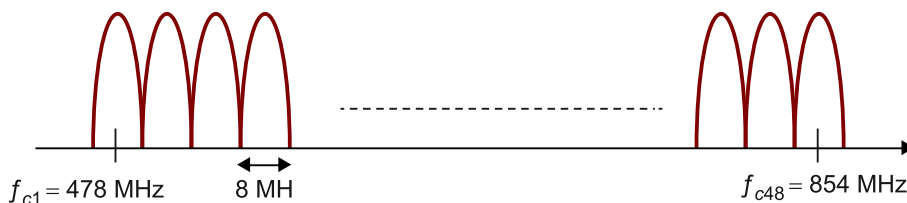
Disposem d'un amplificador a l'extrem final del transmissor que proporciona una potència transmesa $S_T = 0,5$ watt. Calculeu les expressions del senyal modulad identificant numèricament els paràmetres que intervenen en les expressions i avalueu la qualitat del senyal en detecció mitjançant l'SNR amb cadascuna de les tres alternatives següents:

- Modulació DSB.
- Modulació AM amb un índex de modulació $m = 0,5$.
- Modulació FM amb desviació de freqüència de $f_d = 5B_x$ Hz/V.

8. Recepció heterodina del senyal de televisió

Cada una de les emissores de televisió ocupen una amplada de banda $B_i = 8$ MHz. Tingueu en compte un grup de $N = 48$ emissores disposades segons l'esquema de la figura 11.

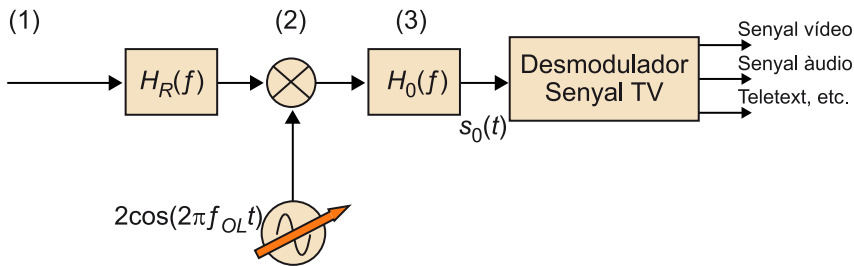
Figura 11. Ocupació espectral d'emissores de televisió en VHF



Es comprova fàcilment que en el marge d'interès (474 ... 858) MHz hi caben 48 portadores, cada una de les qual ocupa 8 MHz. En la figura s'han marcat la primera i l'última freqüència portadora de la banda considerada.

Es vol poder desmodular qualsevol emissora en la banda de 474 MHz a 858 MHz. Per a poder sintonitzar una determinada emissora, es proposa un diagrama de blocs com el de la figura 12, en el qual l'únic element variable és l'oscil·lador local que genera un cosinus a freqüència variable f_{OL} . Amb l'elecció d'aquesta freqüència es tria indirectament una determinada emissora.

Figura 12. Diagrama de blocs funcional de la recepció heterodina del senyal de televisió



En la figura 12 els diversos elements representen:

- Filtratge receptor de totes les possibles emissores que volen desmodular per mitjà d'un filtre passabanda de 474 MHz a 858 MHz.
- Multiplicador del senyal a la sortida del filtre receptor pel senyal de sortida de l'oscil·lador local de freqüència variable f_{OL} .
- Filtratge a la freqüència intermèdia de $f_o = 360$ MHz amb una amplada de banda de $B_i = 8$ MHz.

Si al punt (1) el senyal present és la suma de les $N = 48$ emissores, aleshores $y_{(1)}(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t)$, on $s_i(t)$ representa el senyal d'una emissora en particular.

Es demana:

- Proposeu expressions adequades per a les funcions de transferència dels dos filtres: $H_R(f)$ i $H_o(f)$.
- Quant ha de valer la freqüència de l'oscil·lador local f_{OL} per a sintonitzar l'emissora 1 de freqüència portadora 478 MHz?
- Quant ha de valer la freqüència de l'oscil·lador local f_{OL} per a sintonitzar l'emissora 48 de freqüència portadora 854 MHz?

9. Efecte imatge en recepció heterodina

Considerem l'esquema receptor heterodí de televisió presentat en l'exercici anterior. Suposeu en aquest exercici que s'ha eliminat el filtre receptor. Analitzeu el senyal obtingut a la sortida del filtre a freqüència intermèdia en sintonitzar l'emissora que ocupa l'espectre a l'extrem inferior (portadora $f_{c1} = 478$ MHz), si a l'entrada de tot el sistema es troba també present el senyal interferent $z(t) = A_z b_z(t) \cos(2\pi f_z t)$, amb $f_z = 2f_{c1} + f_o$ i $f_o = 360$ MHz igual a la freqüència intermèdia.

- Justifiqueu que f_z s'anomeni la freqüència imatge de f_{c1} .
- Calculeu quina freqüència és la imatge del senyal centrat a $f_{cN} = 854$ MHz.

Fórmules matemàtiques

Expressions trigonomètriques

$$\begin{aligned}\cos(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}\cos(A-B) + \frac{1}{2}\cos(A+B) \\ \sin(A)\sin(B) &= \frac{1}{2}\cos(A-B) - \frac{1}{2}\cos(A+B) \\ \sin(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}\sin(A-B) + \frac{1}{2}\sin(A+B) \\ \sin(A+B) &= \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B) \\ \cos(A+B) &= \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)\end{aligned}\tag{89}$$

