

# Comunicaciones analógicas: señales paso banda

Una perspectiva matemática

Margarita Cabrera  
Francesc Tarrés Ruiz

Revisión a cargo de  
Francesc Rey Micolau  
Francesc Tarrés Ruiz

PID\_00184997



Los textos e imágenes publicados en esta obra están sujetos –excepto que se indique lo contrario– a una licencia de Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 España de Creative Commons. Podéis copiarlos, distribuirlos y transmitirlos públicamente siempre que citéis el autor y la fuente (FUOC. Fundació para la Universitat Oberta de Catalunya), no hagáis de ellos un uso comercial y ni obra derivada. La licencia completa se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.es>

# Índice

<b>Introducción</b> .....	5
<b>Objetivos</b> .....	10
<b>1. Modulaciones analógicas paso banda</b> .....	11
1.1. Componentes en fase y cuadratura .....	11
1.2. Equivalente paso bajo .....	12
1.3. Modulación en fase y cuadratura de dos señales paso bajo .....	15
1.4. Errores de fase en el demodulador .....	18
1.5. Resumen sobre modulaciones I&Q .....	19
<b>2. Calidad del sistema de comunicaciones: la relación señal a ruido (SNR)</b> .....	21
2.1. Potencia de las modulaciones paso banda .....	21
2.2. Sistema de comunicaciones paso banda .....	26
2.3. Ruido paso banda .....	28
2.4. Relación de potencias señal a ruido: SNR .....	32
2.5. SNR de la modulación AM .....	34
2.6. Comparación de la SNR de las modulaciones AM y DSB .....	36
<b>Resumen</b> .....	37
<b>Ejercicios de autoevaluación</b> .....	39
<b>Fórmulas matemáticas</b> .....	43



## Introducción

En este módulo se formalizan desde el punto de vista matemático las modulaciones analógicas paso banda, cuyos principios generales ya fueron introducidos en el módulo anterior. El objetivo ahora es generalizar la notación matemática, para que resulte común a diferentes tipos de modulaciones y estudiar el comportamiento de los sistemas frente a la presencia de ruido en el canal.

Tal y como ya hemos visto en el módulo anterior, se entiende por modulaciones paso banda las señales resultantes de trasladar una señal de contenido frecuencial bajo, hasta una frecuencia mucho mayor que su ancho de banda, a la que se denomina frecuencia portadora. Las modulaciones paso banda ocupan una banda frecuencial alrededor de la frecuencia portadora.

La ocupación del espectro es una cuestión básica en todo sistema de comunicaciones, dado que en general el espectro es un recurso limitado. Especialmente en comunicaciones radioeléctricas, la frecuencia que ocupa cada tipo de sistema de comunicaciones se halla totalmente reglada y estandarizada por diferentes organismos internacionales. En Europa, uno de los organismos de estandarización con autoridad sobre esta temática es la ETSI.

Tómese como ejemplo el estándar de radiodifusión analógica AM, que ya hemos considerado con cierto detalle en el módulo anterior. La señal proveniente de un locutor de radio es una señal paso bajo de ancho de banda 4,5 kHz. Es decir, la fuente de información genera una señal cuya ocupación espectral o frecuencial va de  $-4,5$  kHz a  $+4,5$  kHz. Para ser transmitida por el medio aéreo, su espectro es trasladado hasta, por ejemplo, una frecuencia portadora de 525 kHz, ocupando de este modo un ancho de banda de 9 kHz (de 520,5 a 529,5 kHz) alrededor de la frecuencia portadora. La ocupación espectral a frecuencias negativas es simétrica dado que la señal transmitida es real. Se realiza, por tanto, un traslado de la señal centrada en el dominio de frecuencias a 0 kHz hasta una frecuencia portadora de 525 kHz.

Otro ejemplo de sistema de comunicaciones estandarizado por la ETSI en la década de los noventa y muy extendido mundialmente es el sistema de telefonía móvil GSM. En los formatos de modulación utilizados por las redes ofrecidas por operadores para telefonía móvil: GSM 900, GSM 1800 y GSM 1900, los dígitos numéricos de estas siglas marcan las frecuencias alrededor de las que se distribuyen las frecuencias portadoras dadas en MHz, y GSM significa *Global System for Mobile communication*. Así por ejemplo, para el sistema GSM 1900, el espectro disponible va de 1.850 a 1.990 MHz. La separación entre dos frecuencias portadoras adyacentes es de 200 kHz. Es decir, en los sistemas de

comunicaciones de tipo GSM, se tiene una señal paso bajo que aproximadamente se extiende entre  $-100$  kHz y  $+100$  kHz. Una vez modulada, ocupa unos 200 kHz alrededor de la frecuencia portadora asignada.

En el modulo anterior hemos introducido diversos aspectos básicos sobre la modulación de señales que conviene tener muy claros y sobre los que queremos volver a insistir en la introducción de este módulo: el tamaño de las antenas necesarias y la atenuación que sufre la señal al ser propagada vía radio.

Tal y como se ha introducido en el modulo anterior, en los sistemas de comunicación radio, la frecuencia portadora influye directamente en el tamaño de las antenas transmisora y receptora, ya que la energía electromagnética se acopla al medio de propagación a través de las antenas, que actúan como radiador. El tamaño físico de las antenas y la distancia de separación entre antena transmisora y antena receptora dependen principalmente de la frecuencia portadora. Las radiaciones electromagnéticas se desplazan a la velocidad de la luz  $c = 300.000$  km/s, y esta está relacionada a su vez con la frecuencia portadora  $f$  a través de su longitud de onda  $\lambda$ , según la ecuación:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (1)$$

Para obtener una radiación eficiente, las dimensiones físicas de las antenas (básicamente su longitud), deben ser al menos del orden de un 10% de la longitud de onda. Así por ejemplo, para transmisión de radio comercial FM, con frecuencias portadoras alrededor de 100 MHz, la longitud de onda es de 3 m y la longitud mínima adecuada para las antenas es de 30 cm. Mediante cálculos análogos se obtiene que para el sistema GSM 1800 (frecuencias portadoras de 1800 MHz), la proporción queda dividida por 18, es decir, se obtienen unos requisitos mínimos de longitud de antena de 1,7 cm. En este sentido, puede decirse que con el incremento de la frecuencia portadora disminuye el tamaño requerido para las antenas, lo cual se considera tecnológicamente una ventaja.

El otro aspecto a destacar relacionado directamente con la frecuencia portadora consiste en que la señal transmitida sufre una atenuación (disminución de nivel o amplitud) que aumenta con la frecuencia de ocupación. Tómese como ejemplo una transmisión de señal en espacio libre en condiciones ideales (sin distorsión ni interferencias). La señal recibida se relaciona con la señal transmitida según la siguiente ecuación:

$$s_R(t) = \alpha s_T(t) + w(t) \quad (2)$$

donde cada elemento es:

- $s_T(t)$ : señal transmitida
- $s_R(t)$ : señal recibida
- $\alpha$ : atenuación

- $w(t)$ : señal de ruido

La atenuación ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) es inversamente proporcional a la distancia entre el transmisor y el receptor y a la frecuencia portadora ( $f$ ).

$$\alpha = \frac{k}{rf} \quad (3)$$

En (3)  $k$  es una constante de proporcionalidad. Se deduce que a mayor frecuencia portadora, menor es la constante  $\alpha$ , y por tanto la señal recibida se halla más atenuada respecto a la señal transmitida. La consecuencia inmediata es que cuanto mayor sea la frecuencia portadora, menor debe ser la distancia entre antenas transmisora y receptora para mantener el nivel de señal adecuado tal que no predomine la señal de ruido en la expresión (2).

Siguiendo los ejemplos de GSM y de FM, es de destacar que, para la cobertura del sistema GSM en un área urbana, se requiere gran cantidad de estaciones repetidoras, con mayor densidad espacial que cuando se ubican antenas para la cobertura de un territorio mediante emisoras de FM. Para la cobertura de GSM, se utilizan los tejados de muchos edificios para colocar plataformas de repetición, mientras que las emisoras de radio FM suelen estar mucho más dispersas y situadas en los puntos más altos de cada ciudad o cercanías.

En definitiva, se destaca que todo sistema de comunicaciones opera a una frecuencia portadora, alrededor de la cual se ocupa un ancho de banda. En general, el ancho de banda se reparte entre los diferentes usuarios del sistema. Cuanto mayor es la frecuencia portadora o frecuencia de operación del sistema:

- Las antenas de transmisión y de recepción son de menor tamaño.
- La distancia entre el transmisor y el receptor es menor para evitar que la señal transmitida se atenúe demasiado.

## Modulaciones paso banda analógicas y modulaciones paso banda digitales

Básicamente, modular consiste en trasladar la señal de información en frecuencia, desde baja frecuencia hasta la frecuencia portadora del correspondiente sistema. La señal trasladada espectralmente es una señal analógica, y por tanto se representa mediante una función real y continua en el tiempo. Sin embargo, tal como se presenta en el módulo de introducción, las modulaciones paso banda se clasifican en modulaciones analógicas y en modulaciones digitales.

En las modulaciones analógicas, la señal de información es producida directamente por una fuente de información analógica o continua. Tal es el caso de las señales de audio en los sistemas de radiodifusión de AM y en los sistemas de radiodifusión FM.

En las modulaciones digitales, la señal continua que se convierte a alta frecuencia proviene de codificar y conformar mediante pulsos una secuencia de bits, es decir, es una señal de naturaleza digital. Por tanto, en los sistemas de modulación digital, como paso previo a la conversión de frecuencia, se debe generar a partir de los bits una señal continua que físicamente soporte la información proporcionada por la secuencia de bits. El módulo 4 de esta asignatura se dedica íntegramente al estudio de estas estrategias.

El presente módulo se dedica fundamentalmente a formalizar las modulaciones analógicas paso banda introduciendo el concepto de modulación en fase y cuadratura. Esta modulación proporciona unos fundamentos matemáticos que permiten expresar cualquier otro tipo de modulación lineal o angular como un caso particular de la modulación en fase y cuadratura. Por ello, es sumamente importante comprender los detalles y características de estas herramientas. Además, se estudiará cómo pueden afectar los errores de frecuencia o fase de la réplica de la portadora en el receptor, degradando la recepción de las señales. También se analiza el efecto del ruido sobre la calidad final de la señal demodulada y se extraen fórmulas matemáticas para expresar la relación señal a ruido en el caso particular de las modulaciones lineales y las modulaciones en fase y en cuadratura.

### Ocupación espectral de los estándares radioeléctricos

En el módulo anterior se ha presentado la frecuencia portadora como la frecuencia alrededor de la cual la señal paso banda ocupa un ancho de banda determinado. En un sistemas de comunicaciones estandarizado y utilizado por diferentes usuarios, se asigna un ancho de banda a cada usuario dentro del margen disponible para el sistema en cuestión.

En la tabla 1 se muestran algunos de los estándares radioeléctricos actuales y sus características más significativas. Principalmente, aparecen estándares terrestres y mayoritariamente los utilizados en Europa.

Tabla 1. Reparto del espectro radioeléctrico

Denominación de la banda	Longitud de onda	Frecuencia	Standard	Ancho de banda asignado al standard	Formato de modulación	Ancho de banda por usuario
Low Frequency (LF)	10-100 km	3-30 kHz				

En las cuatro columnas de la derecha se presentan diferentes ejemplos de sistemas de comunicaciones analógicos y digitales. El reparto frecuencial es tanto una cuestión tecnológica como una cuestión legal y depende de los diferentes organismos de estandarización. Por ello, esta tabla no se puede considerar como completa.

(\*) En España se ha regulado la asignación de 8 MHz para un canal de TV, ya sea analógico o digital, y en general se reparten sin solapamiento.

(\*\*) Para comunicaciones alámbricas (cable), se tiene una división similar del espectro de ocupación, aunque con menores peligros de interferencias, debido a que los diferentes sistemas de comunicaciones no comparten físicamente el canal, ya que cada uno de ellos tiene sus propios cables o fibra óptica.



Denominación de la banda	Longitud de onda	Frecuencia	Standard	Ancho de banda asignado al standard	Formato de modulación	Ancho de banda por usuario
Very Low Frequency (VLF)	1-10 km	30-300kHz				
Medium Frequency (MF)	0,1-1 km	0,3-3MHz	AM broadcast	(520-1620 kHz)	AM (Analógica)	9 kHz
			DRM (broadcast)	(En proceso de estandarización)	COFDM (Digital)	9 kHz
High Frequency (HF)	10-100 m	3-30 MHz				
Very High Frequency (VHF)	1-10 m	30-300 MHz	FM broadcast	(87,5-108 MHz)	FM (Analógica)	150 kHz
			DAB broadcast	(174-240 MHz)	COFDM (Digital)	1,5 MHz
Ultra High Frequency (UHF)	0,01-1 m	0,3-3 GHz	DAB broadcast	(1452-1952 MHz)	COFDM (Digital)	1,5 MHz
			DVB-T (TDT) <sup>(*)</sup>	(471,25-855,25 MHz)	OFDM (Digital)	8 MHz
			TV analógica <sup>(**)</sup> (471,25-855,25 MHz)	(471,25-855,25 MHz)	VSB Imagen y FM Audio (Analógica)	8 MHz
			GSM (Teléfono móvil)	(890-915 MHz) (1850-1890 MHz)	GMSK (Digital)	200 kHz
			DECT (Teléfono fijo inalámbrico)	(1880-1900 MHz)	GMSK (Digital)	1728 kHz
			UMTS (Teléfono Móvil)	(1920-1980 MHz Up Link) (2110-2170 MHz Down Link)	CDMA (Digital)	5 MHz
			Wifi (802.11g)	2,4-2,483 GHz	OFDM (Digital)	20 MHz
Super High Frequency (UHF) Microondas	1-10 cm	3-30 GHz	Wifi (802.11a)	5,1-5,3 GHz	OFDM (Digital)	20 MHz
Infrarrojos	10E-6 m	10E14 Hz				

En las cuatro columnas de la derecha se presentan diferentes ejemplos de sistemas de comunicaciones analógicos y digitales. El reparto frecuencial es tanto una cuestión tecnológica como una cuestión legal y depende de los diferentes organismos de estandarización. Por ello, esta tabla no se puede considerar como completa.

(\*) En España se ha regulado la asignación de 8 MHz para un canal de TV, ya sea analógico o digital, y en general se reparten sin solapamiento.

(\*\*) Para comunicaciones alámbricas (cable), se tiene una división similar del espectro de ocupación, aunque con menores peligros de interferencias, debido a que los diferentes sistemas de comunicaciones no comparten físicamente el canal, ya que cada uno de ellos tiene sus propios cables o fibra óptica.

## Objetivos

Al acabar este módulo, habréis aprendido los siguientes conceptos y técnicas:

- 1.** Conocer el análisis de las modulaciones analógicas de forma genérica a las que se les denomina modulaciones de fase y cuadratura o de forma abreviada, modulaciones I&Q. Este tipo de modulaciones se forman a partir de una o dos señales analógicas paso bajo que constituyen la información a transmitir.
- 2.** Entender la clasificación de las modulaciones I&Q en modulaciones lineales y modulaciones no lineales. Identificación de frecuencia portadora, componentes en fase y cuadratura y ancho de banda principalmente.
- 3.** Conocer el análisis de los efectos en demodulación producidos por errores en el sincronismo de portadora.
- 4.** Conocer la caracterización de las señales que intervienen en un sistema de comunicaciones como procesos aleatorios y cálculo de la potencia de las mismas.
- 5.** Conocer el análisis de la señal de ruido que se suma a la señal recibida a la entrada del receptor.
- 6.** Conocer la medida de la calidad de estas modulaciones mediante el parámetro de relación señal a ruido (*signal to noise ratio: SNR*)

## 1. Modulaciones analógicas paso banda

En este apartado formalizamos la modulación paso banda de señales analógicas introduciendo los conceptos componentes en fase y cuadratura y de equivalente paso bajo. Veremos que las componentes en fase y cuadratura son una herramienta matemática útil para expresar cualquier tipo de modulación, ya sea lineal o angular. Las herramientas matemáticas que se proporcionan son pues válidas para todo tipo de aplicaciones.

El equivalente paso bajo es una representación compacta de las componentes en fase y cuadratura que resulta útil para simplificar muchas demostraciones matemáticas. En nuestro caso, introduciremos el concepto pero se usará poco en esta asignatura introductoria. En este apartado también estudiaremos los efectos que los errores de sincronismo de fase pueden causar en la demodulación de las señales.

### 1.1. Componentes en fase y cuadratura

Hemos visto que las modulaciones podían clasificarse en modulaciones lineales o angulares. En el primer caso la amplitud de la portadora se modifica teniendo en cuenta la información que hay que transmitir. En las modulaciones angulares, es la fase (o la frecuencia) de la portadora la que depende del mensaje. En general, una señal modulada podría representarse mediante la siguiente ecuación:

$$s(t) = A_c \cdot A(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi(t) + \varphi) \quad (4)$$

donde  $A(t)$  representa los cambios en la amplitud y  $\phi(t)$  los cambios en la fase. Los diferentes tipos de modulaciones se corresponderán con distintas expresiones que relacionen el mensaje original con la amplitud o la fase de esta portadora por lo que podemos decir que la expresión (4) representa de forma genérica cualquier tipo de modulación.

La expresión anterior puede descomponerse en dos términos utilizando la expresión trigonométrica del coseno de una suma:

$$s(t) = A(t) \cdot \cos(\phi(t)) \cdot A_c \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) - A(t) \cdot \sin(\phi(t)) \cdot A_c \cdot \sin(2\pi f_0 t + \varphi) \quad (5)$$

Esta expresión nos dice que cualquier modulación puede descomponerse en la suma de dos modulaciones de amplitud con portadoras en cuadratura. En efecto, podemos considerar que el primer término corresponde a una modulación de amplitud mediante el término  $A(t) \cdot \cos(\phi(t))$  a la portadora en coseno mientras que el segundo término también es una modulación en amplitud,

pero sobre una portadora desfasada  $90^\circ$  (en seno) respecto a la primera componente. La primera componente moduladora se denomina componente en fase, mientras que la segunda se conoce como componente en cuadratura. Es importante comentar que por cuadratura de fase entendemos que las dos componentes tienen un desfase de  $90^\circ$ .

La denominación habitual sería:

- Componente en fase:  $i_s(t) = A(t) \cdot \cos(\phi(t))$
- Componente en cuadratura:  $q_s(t) = A(t) \cdot \text{sen}(\phi(t))$

Cualquier señal o modulación paso banda se puede expresar según la siguiente fórmula:

$$s(t) = i_s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_s(t)A_c \text{sen}(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (6)$$

En (6), la señal  $i_s(t)$  es una señal paso bajo de ancho de banda  $B_i \ll f_c$  y se denomina componente en fase de la señal paso banda. La señal  $q_s(t)$  es una señal paso bajo de ancho de banda  $B_q \ll f_c$  y se denomina componente en cuadratura de la señal paso banda.

Las dos funciones seno y coseno se hallan en cuadratura de fase, es decir, son dos sinusoides de iguales amplitud y frecuencia, y con fases diferentes entre sí un ángulo de  $90^\circ$  ( $\cos(A + \frac{\pi}{2}) = -\text{sen}(A)$  radianes).

## 1.2. Equivalente paso bajo

El equivalente paso bajo es una pura definición matemática que pretende compactar la notación de la descomposición de una modulación en sus componentes en fase y cuadratura. Nótese que al descomponer la señal en sus términos en coseno y seno, la expresión queda bastante larga y resulta tedioso trabajar con ella. El equivalente paso bajo compacta la notación pasando a una nueva señal compleja, donde la parte real es la componente en fase y la parte imaginaria será la componente en cuadratura. Tomando este convenio resulta directo pasar de una notación a otra.

Es importante notar que la definición del equivalente paso bajo es puramente matemática y su objetivo es simplificar la notación. El equivalente paso bajo es una señal compleja totalmente artificial. En la práctica, las modulaciones son reales y deberemos entender el equivalente paso bajo como lo que es, una representación compacta de las señales reales mediante números complejos. Así, siempre que nos den un equivalente paso bajo, sabremos que su parte real es la componente en fase  $i_s(t)$  y que su parte imaginaria es la componente en cuadratura  $q_s(t)$ .

Formalizando estas definiciones:

- Equivalente paso bajo:  $b_s(t) = i_s(t) + jq_s(t)$
- Componente en fase:  $i_s(t) = \text{Re}\{b_s(t)\}$
- Componente en cuadratura:  $q_s(t) = \text{Im}\{b_s(t)\}$

La señal equivalente paso bajo complejo es de hecho una función compleja de la que no se dispone físicamente en ninguno de los puntos de un sistema real de comunicaciones. Se tiene por un lado la componente en fase y por otro lado la componente en cuadratura. Sin embargo, a nivel de análisis de las señales paso banda, es muy útil considerarla porque simplifica muchos desarrollos matemáticos.

La componente en cuadratura se puede identificar como la función que multiplica a la portadora seno con signo negativo y coincide con la parte imaginaria del equivalente paso bajo.

### Ejemplo 1. Equivalente paso bajo de una modulación DSB

Comparando la expresión genérica de una modulación paso banda dada en (6) con la de una modulación DSB definida por la ecuación:

$$s_{DSB}(t) = A_c \cdot x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad (7)$$

se deduce que para esta modulación obtenemos:

- Componente en fase (I):  $i_s(t) = x(t)$
- Componente en cuadratura (Q):  $q_s(t) = 0$
- Equivalente paso bajo:  $b_s(t) = i_s(t) = x(t)$

Resulta real, ya que para este ejemplo la parte imaginaria es igual a cero.

### Ejemplo 2. Equivalente paso bajo de una modulación AM

Comparando la expresión genérica de una modulación paso banda proporcionada en (6) con la de una modulación en AM definida por:

$$s_{AM}(t) = A_c \cdot (1 + mx(t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad (8)$$

se deduce que para esta modulación obtenemos:

- Componente en fase (I):  $i_s(t) = 1 + mx(t)$
- Componente en cuadratura (Q):  $q_s(t) = 0$
- Equivalente paso bajo:  $b_s(t) = i_s(t) = 1 + mx(t)$

Resulta real, ya que para este ejemplo la parte imaginaria es igual a cero.

Cuando de una señal paso banda se deban identificar las componentes en fase y en cuadratura (I&Q<sup>1</sup>), se debe especificar previamente la señal portadora mediante los parámetros de amplitud, frecuencia y fase de la portadora. Pues fijada la señal paso banda  $s(t)$ , las componentes I&Q dependen de la señal

<sup>(1)</sup>I&Q es una abreviatura de la expresión inglesa *in phase and quadrature*.

portadora en particular. Y viceversa, dadas las señales I&Q, se requiere una señal portadora para formar la señal paso banda y ésta depende a su vez de los parámetros de amplitud, frecuencia y fase que determinan la señal portadora.

### Ejercicio 1. Cambio de la referencia portadora.

Se define la modulación DSB según la expresión dada:

$$s(t) = x(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$$

Hallad las componentes en fase y en cuadratura de esta modulación en cada una de las tres siguientes situaciones:

a) Tomando como señal portadora:  $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$

b) Tomando como señal portadora:  $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$

c) Tomando como señal portadora:  $c(t) = A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c)$

**Solución:**

La componente en fase siempre es la que multiplica al coseno de la señal portadora, y la componente en cuadratura siempre es la que multiplica al seno con el signo cambiado. Por tanto:

a) Tomando como señal portadora  $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$ , se tiene directamente que:

- Componente en fase:  $i_s(t) = x(t)$
- Componente en fase:  $q_s(t) = 0$

b) Tomando como señal portadora  $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$ , se tiene descomponiendo, que:

$$s(t) = x(t)A_c \cos(\varphi_c) \cos(2\pi f_c t) - x(t)A_c \sin(\varphi_c) \sin(2\pi f_c t)$$

- Componente en fase:  $i_s(t) = x(t) \cos(\varphi_c)$
- Componente en fase:  $q_s(t) = x(t) \sin(\varphi_c)$

c) Tomando como señal portadora  $c(t) = A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c)$ , se tiene, rescribiendo la señal portadora y descomponiendo, que:

$$\begin{aligned} c(t) &= A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c - \frac{\pi}{2}) \\ s(t) &= x(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \\ &= x(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c - \frac{\pi}{2}) \cos(\frac{\pi}{2}) - x(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c - \frac{\pi}{2}) \sin(\frac{\pi}{2}) = \\ &= -x(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c - \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

- Componente en fase:  $i_s(t) = 0$
- Componente en fase:  $q_s(t) = x(t)$

### 1.3. Modulación en fase y cuadratura de dos señales paso bajo

En este apartado se plantea una modulación paso banda utilizada para transmitir dos señales moduladoras:  $x(t)$ ,  $y(t)$ . La modulación en fase y cuadratura (también denominada I&Q), se define haciendo coincidir una señal moduladora con la componente en fase de la señal modulada y la otra señal moduladora con la componente en cuadratura de la señal modulada:

$$\begin{aligned} i_s(t) &= x(t) \\ q_s(t) &= y(t) \end{aligned} \quad (9)$$

El ejemplo sirve para verificar que mediante la modulación I&Q se pueden modular dos señales diferentes, que ocupan la misma banda de frecuencias una vez moduladas y en recepción se pueden recuperar por separado. La señal modulada queda de este modo como la suma de dos modulaciones de doble banda lateral DSB, una de ellas tiene como señal portadora la función coseno y la otra tiene como señal portadora la función seno:

$$s(t) = A_c x(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - A_c y(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (10)$$

La expresión frecuencial de la señal modulada se obtiene aplicando la transformada de Fourier a la expresión dada en (10):

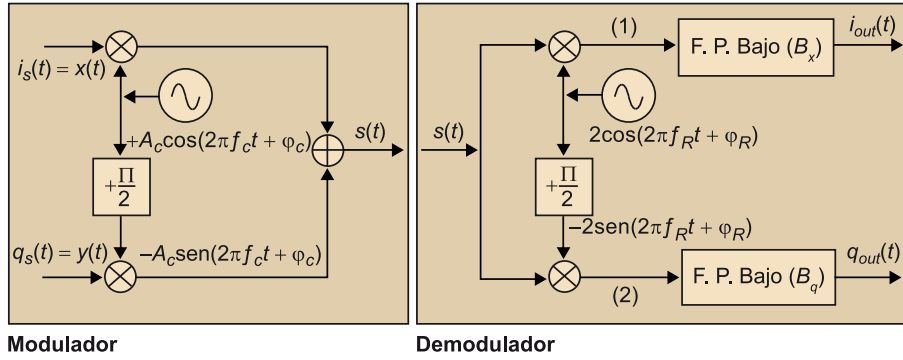
$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{1}{2} A_c (X(f - f_c) e^{j\varphi_c} + X(f + f_c) e^{-j\varphi_c}) \\ &\quad - \frac{1}{2j} A_c (Y(f - f_c) e^{j\varphi_c} - Y(f + f_c) e^{-j\varphi_c}) \end{aligned} \quad (11)$$

Por tanto, la modulación I&Q consiste en trasladar las señales de componente en fase y componente en cuadratura a la misma banda frecuencial de ocupación alrededor de la frecuencia portadora  $f_c$ .

Las dos señales moduladoras de la modulación I&Q ocupan la misma banda de frecuencias, una vez que se ha formado la señal modulada. En el demodulador se pueden separar gracias a que las dos señales portadoras, el seno y el coseno, se hallan en cuadratura de fase. La cuadratura de fase hace que las dos señales portadoras sean ortogonales, lo que permite la separación de las dos señales moduladoras.

A continuación se presentan los diagramas de bloques funcionales tanto del modulador como del demodulador, y se demuestra que dos señales diferentes se pueden transmitir conjuntamente mediante la modulación I&Q y separarse en el demodulador.

Figura 1. Diagrama de bloques funcional del modulador y del demodulador I&Q



Obsérvese que las dos señales sinusoidales "seno" y "coseno" proceden del mismo oscilador local. Para obtener la función "seno" a partir de la función "coseno" se utiliza un desfasador de fase.

Se asume que los anchos de banda de las dos señales moduladoras coinciden:  $B_i = B_x = B_b$ ;  $B_q = B_y = B_b$ ; En el resto del apartado a ambos anchos de banda se les denomina  $B_b$ .

La señal de salida del modulador de la figura 1,  $s(t)$ , corresponde a la modulación I&Q presentada en (10). Las señales de salida del demodulador se analizan a continuación.

Si el demodulador se halla perfectamente sincronizado en portadora con el modulador, se denomina demodulador síncrono o coherente y esta situación se produce en la figura 1, cuando existe sincronía perfecta de frecuencia y de fase entre la señal recibida y el oscilador local del receptor:

$$f_R = f_c \gg 2B_b \quad \varphi_R = \varphi_c \quad (12)$$

En las condiciones descritas, en el punto (1) de la figura 1 se tiene la siguiente señal:

$$\begin{aligned} s(t)2\cos(2\pi f_R t + \varphi_R) &= s(t)2\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) = \\ &= i_s(t)A_c 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c)\right) - q_s(t)A_c 2\frac{1}{2}\sin(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c) = \\ &= A_c i_s(t) + A_c i_s(t)\cos(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c) - A_c q_s(t)A_c \sin(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c) \end{aligned} \quad (13)$$

que en el dominio de la frecuencia se corresponde con:

$$\begin{aligned} A_c I_s(f) + \frac{1}{2} A_c (I_s(f - 2f_c) e^{j2\varphi_c} + I_s(f + 2f_c) e^{-j2\varphi_c}) \\ - \frac{1}{2j} A_c (Q_s(f - 2f_c) e^{j2\varphi_c} - Q_s(f + 2f_c) e^{-j2\varphi_c}) \end{aligned} \quad (14)$$

La señal anterior se procesa mediante filtro paso bajo, cuya función de transferencia es  $\Pi\left(\frac{f}{2B_b}\right)$ . En esta operación los términos que están centrados al doble de la frecuencia portadora ( $2f_c$ ) quedan rechazados por el propio filtro. La señal resultante a la salida se halla formada por el único término de la expresión (14) centrado a frecuencia cero:



$$i_{OUT}(t) = i_s(t)A_c = A_c x(t) \quad (15)$$

Y por tanto, se detecta en la rama superior de la figura 1 la señal mensaje  $x(t)$  amplificada por la constante  $A_c$ .

A continuación, se realiza un análisis similar para la obtención de la señal en la rama inferior.

En el punto (2) de la figura 1 se tiene la siguiente señal:

$$\begin{aligned} & -s(t)2\text{sen}(2\pi f_c t + \varphi_c) = \\ & = -i_s(t)A_c 2\frac{1}{2}\text{sen}(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c) + q_s(t)A_c 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c)\right) = \\ & = A_c q_s(t) - A_c i_s(t)\text{sen}(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c) - A_c q_s(t)\cos(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c) \end{aligned} \quad (16)$$

que en el dominio de la frecuencia se corresponde con:

$$\begin{aligned} & A_c Q_s(f) - \frac{1}{2j} A_c (I_s(f - 2f_c)e^{j2\varphi_c} - I_s(f + 2f_c)e^{-j2\varphi_c}) \\ & - \frac{1}{2} A_c (Q_s(f - 2f_c)e^{j2\varphi_c} + Q_s(f + 2f_c)e^{-j2\varphi_c}) \end{aligned} \quad (17)$$

y a la salida del correspondiente filtro paso bajo de función de transferencia  $\Pi\left(\frac{f}{2B_b}\right)$ , los términos centrados al doble de la frecuencia portadora desaparecen:

$$q_{OUT}(t) = q_s(t)A_c = A_c y(t) \quad (18)$$

Y por tanto, se detecta en la rama inferior de la figura 1 la señal mensaje  $y(t)$ .

En el desarrollo precedente, surge el concepto de sincronismo de portadora, tanto en fase como en frecuencia y al tipo de demodulador utilizado, se le denomina demodulador síncrono o coherente. Para que el demodulador sea síncrono, en el receptor se necesita disponer de una réplica de la señal portadora en cuanto a la frecuencia y la fase. La amplitud es irrelevante en esta operación.

Esta característica, que resulta imprescindible en el diseño de muchos sistemas de demodulación, es en general una propiedad que encarece el diseño del sistema receptor. La obtención de la frecuencia exacta de la señal portadora en recepción en principio se puede obtener mediante osciladores de alta precisión, sin embargo, la obtención de la fase exacta de la señal portadora es siempre una operación, que requiere tener en el receptor la presencia de la señal portadora generada por el modulador.

En los sistemas de comunicaciones, en los que es imprescindible la demodulación síncrona o coherente, se transmite algún tipo de información redundante con la propia señal, que puede ser la propia señal portadora sumada a la señal modulada o bien información redundante de otra naturaleza. Como contrapartida, en cualquiera de las dos opciones se debe incrementar la potencia gastada en transmisión, ya que se ha de invertir parte de la potencia transmitida en la transmisión de la señal redundante.

#### 1.4. Errores de fase en el demodulador

A continuación se presenta un ejemplo en el que el demodulador I&Q presenta un error de fase respecto a la portadora de la señal recibida. La consecuencia inmediata de esta desincronización entre el modulador y el demodulador se traduce en una interferencia mutua entre las señales demoduladas  $i_{OUT}(t)$ ,  $q_{OUT}(t)$  del esquema de la figura 1.

##### Ejemplo 3. Recepción de modulación I&Q con error de fase en la portadora

En este ejemplo se revisa la demodulación I&Q para el caso en que el demodulador no se halle en fase de portadora con el modulador. Se asume de este modo que la frecuencia del demodulador coincide con la frecuencia del modulador, mientras que las fases son diferentes entre sí:

$$f_R = f_c \gg 2B_b \quad \varphi_R = \varphi_c + \varepsilon_c \quad (19)$$

$\varepsilon_c$  simboliza el error de fase dado en *rad*. En el punto (1) de la figura 1 se tiene la siguiente señal:

$$\begin{aligned} s(t)2\cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \varepsilon_c) &= \\ A_c i_s(t)2\cos(2\pi f_c t + \varphi_c)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \varepsilon_c) & \\ - A_c q_s(t)2\sin(2\pi f_c t + \varphi_c)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \varepsilon_c) &= \quad (20) \\ = A_c i_s(t)(\cos(\varepsilon_c) + \cos(2\pi 2f_c t + 2\varphi_c + \varepsilon_c)) & \\ - A_c q_s(t)(\sin(-\varepsilon_c) + \sin(2\pi 2f_c t + \varphi_c + \varepsilon_c)) & \end{aligned}$$

A la salida del correspondiente filtro paso bajo, los términos centrados al doble de la frecuencia portadora desaparecen y permanecen las dos señales mensaje mezcladas entre sí en función del error de fase de portadora  $\epsilon_c$ :

$$i_{OUT}(t) = A_c i_s(t) \cos(\epsilon_c) + A_c q_s(t) \sin(\epsilon_c) = A_c x(t) \cos(\epsilon_c) + A_c y(t) \sin(\epsilon_c) \quad (21)$$

Análogamente, en el punto (2) de la de la figura 1 se tiene la siguiente señal:

$$\begin{aligned} & -s(t) 2 \sin(2\pi f_c t + \varphi_c + \epsilon_c) = \\ & -A_c i_s(t) 2 \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c + \epsilon_c) \\ & + A_c q_s(t) 2 \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c + \epsilon_c) = \quad (22) \\ & -A_c i_s(t) (\sin(\epsilon_c) + \sin(2\pi 2f_c t + \varphi_c + \epsilon_c)) \\ & + A_c q_s(t) (\cos(\epsilon_c) - \cos(2\pi 2f_c t + \varphi_c + \epsilon_c)) \end{aligned}$$

Mediante un análisis análogo al desarrollado para el caso del demodulador sin error de fase de portadora, a la salida del correspondiente filtro paso bajo, los términos centrados al doble de la frecuencia portadora son rechazados por el filtro paso bajo:

$$q_{OUT}(t) = -A_c i_s(t) \sin(\epsilon_c) + A_c q_s(t) \cos(\epsilon_c) = -A_c x(t) \sin(\epsilon_c) + A_c y(t) \cos(\epsilon_c) \quad (23)$$

El efecto producido sobre las señales demoduladas se interpreta como una interferencia mutua entre los dos canales (canal en fase y canal en cuadratura). Es obvio que si el error de fase es nulo ( $\epsilon_c = 0$ ) esta interferencia no se produce. Las señales resultantes en esta situación corresponden a las ecuaciones (21) y (23) particularizadas al error de fase ( $\epsilon_c = 0$ ).

Si se analiza el equivalente paso bajo complejo detectado, se interpreta que el error producido equivale a un cambio o giro de fase respecto al equivalente paso bajo de la señal modulada:

$$\begin{aligned} i_{OUT}(t) + j q_{OUT}(t) &= \\ A_c i_s(t) \cos(\epsilon_c) + A_c q_s(t) \sin(\epsilon_c) + j(-A_c i_s(t) \sin(\epsilon_c) + A_c q_s(t) \cos(\epsilon_c)) &= \quad (24) \\ = A_c (i_s(t) + j q_s(t)) e^{-j\epsilon_c} \end{aligned}$$

Se dice que la señal demodulada se halla girada un desfase de  $\epsilon_c$  rad respecto a la señal moduladora.

## 1.5. Resumen sobre modulaciones I&Q

Mediante una modulación de tipo I&Q, dos señales distintas,  $x(t)$ ,  $y(t)$ , se pueden transmitir simultáneamente compartiendo el mismo ancho de banda y admiten una separación perfecta en recepción, únicamente para el caso de tener una sincronía perfecta entre la señal portadora del modulador y la señal portadora del demodulador.

Para referenciar una aplicación real de este tipo de modulación, se describe a continuación, y de manera muy simplificada, su utilización dentro del sistema de telefonía móvil de tercera generación UMTS<sup>2</sup>. UMTS es el término que se introdujo desde ETSI para denominar a los sistemas de comunicación inalámbricos<sup>3</sup> de tercera generación (3G). Mediante tecnología UMTS se pueden transmitir ficheros de datos, señal de vídeo y otro tipo de servicios que mediante el sistema GSM (segunda generación o 2G) no es posible. Dentro

<sup>(2)</sup>UMTS es la sigla de la expresión inglesa *universal mobile telecommunications system*.

<sup>(3)</sup>En inglés, *wireless*.

<sup>(4)</sup>UTRA es acrónimo de la expresión inglesa *universal terrestrial radio access*.

de UMTS, los enlaces de radio terrestre (UTRA<sup>4</sup>) se presentan de forma muy descriptiva, en el siguiente ejemplo, para ilustrar un caso real de modulación I&Q con dos señales mensaje diferentes.

#### **Ejemplo 4. Modulación I&Q en UMTS**

En el sistema UTRA, las diferentes comunicaciones establecidas pueden ser de enlace ascendente o de enlace descendente. Son de enlace ascendente las que se transmiten desde terminales individuales, como por ejemplo teléfonos móviles, hacia estaciones base, como por ejemplo las instaladas en tejados de algunos edificios. Y son comunicaciones de enlace descendente las que se transmiten desde las estaciones base hasta los terminales individuales.

En el enlace ascendente, la componente en fase (I) de la modulación procede de la señal mensaje, mientras que la componente en cuadratura (Q) corresponde a la señal denominada de control y necesaria en recepción para diferentes operaciones, como por ejemplo, la demodulación síncrona o coherente. Cada una de ellas ocupa un ancho de banda de 2,5 MHz. La señal paso banda resultante presenta un ancho de banda de 5MHz y utiliza una frecuencia portadora del orden de 2GHz.

- Señal mensaje:  $i_s(t) = x(t)$
- Señal de control:  $q_s(t) = \gamma(t)$

En el enlace descendente, se transmite señal mensaje y señal de control por ambas componentes (I&Q), ello es debido a que la señal de control debe ser escuchada por varios usuarios simultáneamente, ya que esta señal transporta información, como por ejemplo la que hace referencia a la estación base en cuestión, y a estaciones base próximas.

## 2. Calidad del sistema de comunicaciones: la relación señal a ruido (SNR)

La SNR<sup>5</sup> es una medida de calidad que se utiliza para valorar el grado en que un sistema de comunicaciones analógicas funciona mejor o peor. Previamente a la definición, dentro de este apartado se analizan diferentes aspectos necesarios para la comprensión del significado de la SNR. Estos aspectos son entre otros el cálculo de la potencia de la señal transmitida, el modelado de los efectos del canal de comunicaciones sobre la señal transmitida y los efectos de la señal de ruido presente a la entrada del receptor sobre la señal recibida.

<sup>(5)</sup>SNR es la sigla de la expresión inglesa *signal to noise ratio*.

Al final del apartado se define la SNR como un cociente entre dos potencias. En el numerador se tiene la potencia de la señal útil demodulada y en el denominador se tiene la potencia de la señal de ruido que se ha procesado inevitablemente a través del demodulador. La SNR es una figura de mérito, ya que cuanto más elevado es su valor se obtiene mejor calidad porque el nivel de la señal útil predomina sobre el nivel de la señal de ruido.

### Señal útil

La señal transmitida se va procesando a través de los diferentes subsistemas que componen el sistema de comunicaciones completo. A esta señal se le denomina señal útil independientemente del punto físico del sistema al que se haga referencia. Así por ejemplo, se puede hablar de señal útil transmitida, señal útil a la salida del canal, señal útil demodulada, etc.

### 2.1. Potencia de las modulaciones paso banda

En el análisis precedente, la señal moduladora se trata como una señal determinista, caracterizada mediante una expresión temporal y su correspondiente transformada de Fourier. En la práctica, las modulaciones que se transmiten en los sistemas de comunicaciones se caracterizan como procesos aleatorios. Esto significa que la señal moduladora,  $x(t)$ , puede tener múltiples formas de materializarse, y que por tanto su comportamiento temporal debe estudiarse en promedio a través de su función de autocorrelación y de su potencia, y por otro lado su caracterización frecuencial también se ha de analizar en promedio mediante la función de densidad espectral o espectro de potencia. Para entender mejor este fenómeno se recomienda revisar el módulo de procesos aleatorios de asignaturas precedentes.

### Ejemplo 5. Señales de audio, diferentes funciones muestra de un mismo proceso aleatorio

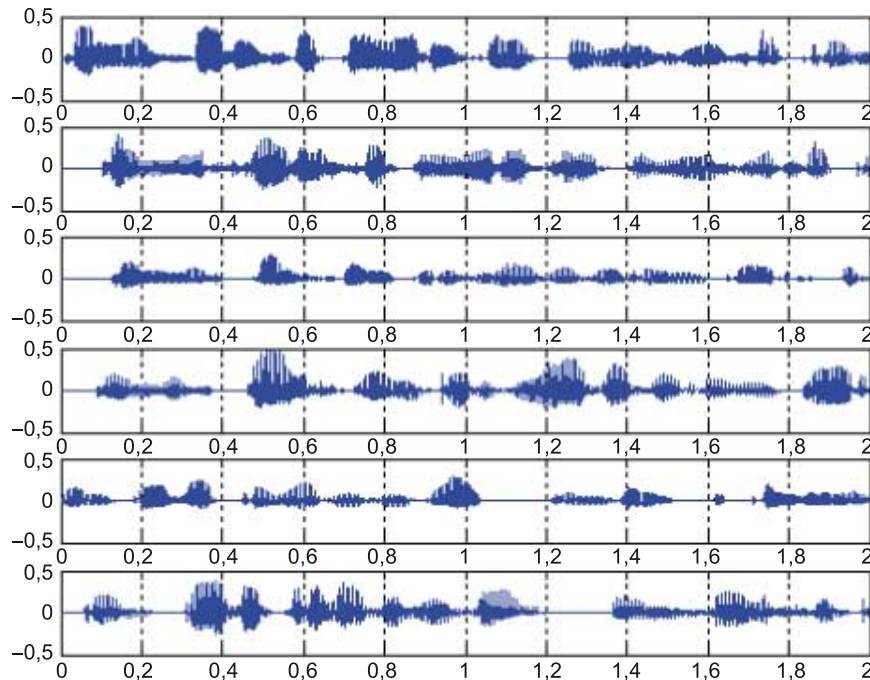
Sea como ejemplo el caso de la señal moduladora  $x(t)$  que es una señal de audio que corresponde a un tramo de dos segundos de tiempo de la información proporcionada por diferentes locutores de radio. Se muestran a continuación 6 posibles realizaciones de dicha señal, a las que se denomina  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ ,  $x_4(t)$ ,  $x_5(t)$ ,  $x_6(t)$ .

La función  $x_1(t)$ , corresponde a una voz femenina y la función  $x_2(t)$ , corresponde a una voz masculina. Para ambas la señal de audio representa las palabras: “con mejores o peores eufemismos”.

La función  $x_3(t)$ , corresponde a una voz femenina y la función  $x_4(t)$ , corresponde a una voz masculina. Para ambas la señal de audio representa las palabras: “con nostalgia enturbiada de rencor”.

La función  $x_5(t)$ , corresponde a una voz femenina y la función  $x_6(t)$ , corresponde a una voz masculina. Para ambas la señal de audio representa las palabras: “con toda probabilidad en Bélgica”.

Figura 2. Gráficas temporales de las 6 señales de audio correspondientes al ejemplo 5



El eje  $x$  representa un tramo de tiempo de 2 s.

La figura 2 muestra que cuando el mensaje a transmitir es de audio, como por ejemplo en un sistema de radio comercial, la señal de la fuente es impredecible a priori y presenta infinitud de posibilidades para su realización. Incluso para un mismo conjunto de palabras, emitido por diferentes locutores, el aspecto de estas señales es significativamente diferente, como ocurre entre las dos primeras gráficas de la figura 2.

Se dice, por tanto, que la señal moduladora es un proceso aleatorio y se caracteriza en media, tanto en el dominio temporal como en el dominio de la frecuencial. En general en el dominio de la frecuencia las señales de audio correspondientes a voz, sin música, ocupan un margen de frecuencias que va de de 200 Hz a 3,4 kHz.

Todas las señales que se transmiten o que de algún modo se hallan presentes en un sistema de comunicaciones presentan un carácter aleatorio, que hace necesario que se caractericen como procesos aleatorios. Además, suelen presentar la característica de estacionariedad.

Al tratar con señales correspondientes a procesos aleatorios estacionarios, se caracterizan mediante la función de autocorrelación, la potencia y la función de densidad espectral de potencia.

La función de autocorrelación para un proceso aleatorio estacionario y real,  $x(t)$ , se define utilizando el operador de esperanza estadística  $E$ .

$$R_x(\tau) = E[x(t + \tau)x(t)] \quad (25)$$

La propiedad de estacionariedad consiste precisamente en que la función de autocorrelación no depende del origen de tiempos  $t$ , y depende únicamente de la diferencia de tiempos  $\tau$ , de las dos señales que se promedian.

La potencia es un parámetro escalar y para un proceso aleatorio estacionario se define como la función de autocorrelación evaluada en el origen ( $\tau = 0$ ).

$$P_x = R_x(0) = E[x(t)]^2 \quad (26)$$

La caracterización en el dominio frecuencial de los procesos aleatorios estacionarios se realiza mediante la función de densidad espectral, definida como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación:

$$S_x(f) = TF[R_x(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad (27)$$

La función anterior es una densidad espectral de potencia, ya que haciendo la transformada de Fourier inversa de la función (27) y junto con la definición de potencia dada en (26) se obtiene:

$$P_x = \int S_x(f)df \quad (28)$$

Las definiciones de correlación, potencia y densidad espectral de un proceso aleatorio estacionario se requieren en un sistema de comunicaciones para poder diseñar los diferentes elementos que intervienen considerando que se pueda procesar cualquiera de las funciones muestra del proceso.

Por ejemplo, en el diseño de un filtro para procesar la señal transmitida, se considera el ancho de banda dado por la densidad espectral del proceso correspondiente a la señal transmitida. Si se consideraran las funciones muestra una a una, se podría llegar a tener un ancho de banda distinto para cada una de ellas. Al considerar únicamente el ancho de banda de la densidad espectral, equivale a caracterizar el ancho de banda medio al que más o menos se ajustan todas las funciones del proceso y de esta manera, sea cual sea la función procesada, el filtro a implementar es único.

### Ejemplo 6. Señal Generada por oscilador

La señal generada por un oscilador local, que se corresponde con la señal portadora, es una senoide de amplitud y frecuencia a determinar. La fase es una variable aleatoria de distribución uniforme en  $[-\pi, +\pi]$  rad. Por tanto, cada vez que se enciende el oscilador y se configuran amplitud y frecuencia, se obtiene una función muestra del proceso, como por ejemplo, la señal portadora de una modulación de tipo DSB. A continuación se analizan la función de autocorrelación, la potencia y la función densidad espectral o espectro de potencia para la señal generada por el oscilador.

El proceso definido se representa mediante la expresión siguiente:

$$c(t) = a \cos(2\pi f_c t + \varphi) \quad (29)$$

La amplitud se mide en volts o mvolts y la frecuencia  $f_c$  se mide en Hz, kHz, MHz, etc. La fase  $\varphi$  es una variable aleatoria, cuya función de densidad de probabilidad es uniforme:

$$f_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \Pi\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right) \quad (30)$$

La función de densidad de probabilidad proporcionada es para la fase medida en radianes.

Cálculo de la función de autocorrelación:

$$\begin{aligned} R_c(\tau) &= E[c(t+\tau)c^*(t)] = \\ &= \int a \cos(2\pi f_c(t+\tau) + \varphi) a \cos(2\pi f_c t + \varphi) f_\varphi(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{2} \int (\cos(2\pi f_c \tau) + \cos(2\pi f_c(2t+\tau) + 2\varphi)) f_\varphi(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(2\pi f_c \tau) + \cos(2\pi f_c(2t+\tau) + 2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) \end{aligned} \quad (31)$$

Cálculo de la potencia:

$$P_c = R_c(0) = \frac{a^2}{2} \quad (32)$$

Cálculo de la densidad espectral:

$$S_c(f) = TF[R_c(\tau)] = \frac{a^2}{4} (\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)) \quad (33)$$

Se concluye de este ejemplo que para este proceso toda la potencia se concentra en la frecuencia elegida  $f_c$ .

En el análisis de las señales paso banda a través de un sistema de comunicaciones interesa determinar su potencia. En este análisis, se tiene como dato de partida la potencia de la señal moduladora y se determina la potencia de la señal paso banda en función de la potencia de la señal moduladora. En los ejemplos que siguen se analiza la potencia de diferentes señales paso banda caracterizadas como procesos aleatorios.

### Ejemplo 7. Potencia de una modulación DSB

El proceso correspondiente a la señal modulada en DSB se define como:

$$s(t) = x(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (34)$$



Donde a su vez, la señal moduladora corresponde a un proceso aleatorio estacionario de potencia  $P_x = E[x^2(t)]$ . La fase del oscilador es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad es uniforme:

$$f_{\varphi_c}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \Pi\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right) \quad (35)$$

La potencia de este proceso se analiza a continuación utilizando el resultado obtenido en el ejemplo 6:

$$\begin{aligned} P_s &= E[s^2(t)] = E[x^2(t)A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t + \varphi_c)] = \\ &= E[x^2(t)]E[A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t + \varphi_c)] = P_x P_c = A_c^2 P_x / 2 \end{aligned} \quad (36)$$

### Ejemplo 8. Potencia de una modulación AM

El proceso correspondiente a la señal modulada en AM se define como:

$$s_{AM}(t) = A_c(1 + mx(t))\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (37)$$

Donde a su vez, la señal moduladora corresponde a un proceso aleatorio estacionario de potencia  $P_x = E[x^2(t)]$  y de media nula  $E[x(t)] = 0$ . La fase del oscilador es una variable aleatoria, cuya función de densidad de probabilidad es uniforme:  $f_{\varphi_c}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \Pi\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)$

La potencia de este proceso se analiza a continuación utilizando el resultado obtenido en el Ejemplo 6:

$$\begin{aligned} P_s &= E[s^2(t)] = E[(1 + mx(t))^2 A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t + \varphi_c)] = \\ &= E[1 + 2mx(t) + m^2 x^2(t)]E[A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t + \varphi_c)] = \\ &= P_c + P_c m^2 P_x = \frac{A_c^2(1 + m^2 P_x)}{2} \end{aligned} \quad (38)$$

Obsérvese en este caso, que la potencia total transmitida se puede descomponer en la suma de la potencia de la señal portadora más la potencia de la señal que se obtendría si sólo se transmitiera la parte correspondiente a la modulación DSB, según la expresión dada en (36) para la señal de modulación AM. Esta característica pone de manifiesto que la potencia de la modulación AM es siempre mayor que la de la modulación DSB para iguales señales moduladora y portadora.

### Ejemplo 9. Potencia de una modulación I&Q

Se consideran dos señales moduladoras  $x(t)$ ,  $y(t)$  correspondientes a dos procesos aleatorios estacionarios de potencias  $P_x = E[x^2(t)]$ ,  $P_y = E[y^2(t)]$  y tales que  $E[x(t)y(t)] = 0$ . La fase del oscilador es una variable aleatoria, cuya función de densidad de probabilidad es uniforme:

$$f_{\varphi_c}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \Pi\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right) \quad (39)$$

Se forma la modulación I&Q dada en (10).

La potencia de este proceso se facilita a continuación utilizando de nuevo el resultado obtenido en el ejemplo G. En la obtención del resultado se recomienda revisar todos los pasos que se han suprimido para no alargar demasiado el desarrollo:

$$\begin{aligned} P_s &= E[s^2(t)] = A_c^2 E[(x(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - y(t)\sin(2\pi f_c t + \varphi_c))^2] = \\ &= A_c^2 E[(x(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c))^2] + A_c^2 E[(y(t)\sin(2\pi f_c t + \varphi_c))^2] = A_c^2 / 2 (P_x + P_y) \end{aligned} \quad (40)$$

La potencia media del proceso es igual a la semisuma de las potencias de los dos procesos paso bajo, ponderada por la amplitud al cuadrado de la señal portadora:

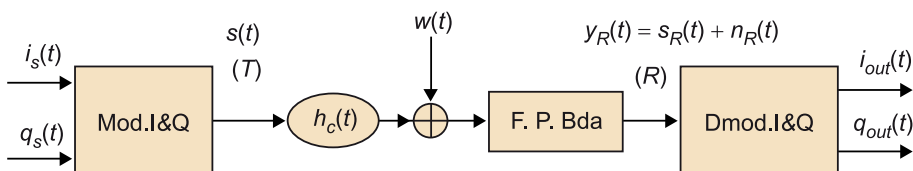
$$P_s = A_c^2 \frac{1}{2} (P_{i_s} + P_{q_s}) = A_c^2 \frac{1}{2} (P_x + P_y) \quad (41)$$

Los ejemplos 7, 8, y 9 representan tres casos en los que se obtiene la potencia del proceso correspondiente a la potencia de la señal modulada en función de la potencia de la señal moduladora y de la potencia de la señal portadora.

## 2.2. Sistema de comunicaciones paso banda

En este apartado se presenta un sistema de comunicaciones paso banda genérico. En el apartado anterior se ha realizado un análisis detallado de la potencia de la señal transmitida para diferentes sistemas de modulación. En todos los casos la señal transmitida se identifica con la señal útil a la salida del transmisor. En el sistema que se analiza en el presente apartado se considera la señal de ruido que se manifiesta a la entrada del receptor y como efecto no deseado, se suma a la señal útil y se procesa irremediabilmente en todos los subsistemas del receptor.

Figura 3. Sistema completo de comunicaciones



El punto (T) representa el punto de transmisión y punto (R) representa el punto de recepción.

En la figura 3 se muestra un diagrama de bloques simplificado de un sistema de comunicaciones paso banda. Se distinguen los siguientes elementos:

- El transmisor del que únicamente se destaca el modulador paso banda. La salida del transmisor se marca con el símbolo (T). En este punto se envía la señal transmitida al medio, con un nivel de potencia de señal útil transmitida  $S_T$ .
- El canal considerado lineal e invariante. Por ello se modela mediante la respuesta impulsional  $h_c(t)$ .
- El receptor, que a su vez se divide en tres subsistemas: suma de ruido térmico a la entrada:  $w(t)$ , filtro paso banda y demodulador paso banda.

El filtro paso banda del receptor debe permitir pasar en todo su ancho de banda a la señal útil recibida y eliminar el ruido aditivo fuera de la banda de la señal, así como posibles interferencias.

Al transmitir modulaciones paso banda I&Q a través de sistemas de comunicaciones modelados según el esquema de la figura 3, se mide la calidad de la transmisión total en el punto final de la cadena. Es decir, sobre las señales demoduladas. Idealmente, estas señales deberían ser idénticas a las proporcionadas por la fuente. Atendiendo al esquema del sistema interesa obtener:

$$\begin{aligned} i_{out}(t) &= i_s(t) \\ q_{out}(t) &= q_s(t) \end{aligned} \quad (42)$$

Sin embargo, en la práctica las señales difieren entre sí, debido principalmente a los siguientes efectos:

- 1) Distorsión lineal generada por el canal de comunicaciones.
- 2) Distorsión no lineal generada por sistemas amplificadores, especialmente en el transmisor.
- 3) Generación de interferencias superpuestas a la señal.
- 4) Ruido aditivo que se suma a la entrada del receptor.

Los efectos anteriores se comentan en la introducción. En el análisis de la relación SNR, al final de este apartado se considera únicamente un canal de comunicaciones ideal con ausencia de interferencias y presencia de ruido aditivo a la entrada del receptor:

$$h_c(t) = \delta(t) \quad (43)$$

Para un canal ideal sin interferencias y en el caso de que no hubiera ruido, se cumpliría con exactitud la ecuación (42) salvo en un factor de proporcionalidad.

La superposición de ruido aditivo es un efecto no deseado e inevitable. Mediante el filtro paso banda de la figura 3 y los filtros paso bajo que integran el demodulador I&Q de la figura 3, se elimina el ruido correspondiente a las frecuencias no ocupadas por la señal útil. Sin embargo, el ruido que ocupa la banda útil de la señal no se puede eliminar y queda superpuesto a la misma.

En el punto de recepción (R), se tiene como señal útil la señal transmitida a través del canal de comunicaciones modelado mediante la respuesta impulsionial  $h_c(t)$  y filtrada mediante el filtro paso banda receptor:

$$s_R(t) = s(t) * h_c(t) * h_R(t) \quad (44)$$

El filtro paso banda ha de permitir el paso de la señal útil sin distorsión. Idealmente presenta la función de transferencia:

$$H_R(f) = TF[h_R(t)] = \Pi\left(\frac{f-f_c}{B_S}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_c}{B_S}\right) \quad (45)$$

A continuación, se analiza el efecto de la señal de ruido a través del sistema receptor.

### 2.3. Ruido paso banda

A la entrada del receptor de un sistema de comunicaciones, se recoge la señal recibida mediante una tensión eléctrica. Sobre la corriente generada, se producen pequeñas desviaciones en la trayectoria de los electrones que, por tanto, provocan variaciones sobre la corriente eléctrica nominal. En general, este movimiento se modela como una señal de ruido superpuesta a la señal de comunicaciones recibida, se denomina ruido y se modela como un proceso aleatorio de media nula, estacionario, gaussiano, blanco y estadísticamente independiente a la señal útil (modulación) transmitida a través del sistema completo. Analizar con detalle cada uno de los calificativos de la definición anterior requiere el uso de las fórmulas adecuadas que se presentan a continuación.

#### Ruido en sistemas de comunicaciones

El proceso aleatorio ruido se simboliza mediante  $w(t)$ :

- Es de media estadística nula:  $E[w(t)] = 0$ .
- Es estacionario.
- Es gaussiano: Esta propiedad referida a la distribución estadística de cada una de las muestras del proceso  $w(t)$  se analiza con detalle en el módulo de modulaciones digitales.
- Es blanco: La densidad espectral del proceso de ruido  $w(t)$  es constante para todas las frecuencias de interés y es igual a  $\frac{N_0}{2}$ . Se utiliza el factor 1/2 para indicar que la potencia se reparte entre frecuencias positivas y frecuencias negativas:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \text{ Watts/Hz} \quad (46)$$

- Es estadísticamente independiente a la señal transmitida:

$$E[s(t)w(t)] = E[s(t)]E[w(t)] = 0 \quad (47)$$

El modelo descrito para el ruido de comunicaciones es el más habitual en la práctica y junto con la condición del canal dada en (43), se suele hablar de “canal ideal AWGN<sup>6</sup>” para referir al tipo de modelo de canal comunicaciones más sencillo que se utiliza en la práctica.

<sup>6</sup>AWGN es la sigla de la expresión inglesa *additive white gaussian noise*.

Se denomina *ruido paso banda* al ruido resultante en el denominado punto de recepción (R):

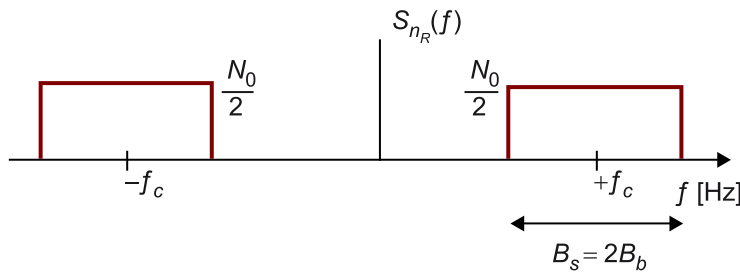
$$n_R(t) = w(t) * h_R(t) \quad (48)$$

El símbolo \* representa la operación de convolución.

Debido a que el ruido se filtra a través de un filtro paso banda, su densidad espectral se halla centrada alrededor de la frecuencia central del filtro, en este caso, coincidente con la frecuencia portadora de la modulación. La función de densidad espectral del ruido paso banda es la dada por (49) y se representa en la figura 4:

$$S_{n_R}(f) = S_w(f) |H_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f-f_c}{B_s}\right) + \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f+f_c}{B_s}\right) \quad (49)$$

Figura 10. Densidad espectral del ruido paso banda



La potencia del ruido paso banda en recepción resulta:

$$P_{n_R} = N_R = \int S_{n_R}(f) df = \frac{N_0}{2} 2B_s = N_0 B_s = 2N_0 B_b \quad (50)$$

Para caracterizar completamente el proceso paso banda, es necesario obtener también la densidad espectral y la potencia de sus componentes en fase y en cuadratura, debido a que ambas señales se detectan a la salida del sistema demodulador de la figura 3, superpuestas a la señal útil. Asumiendo que el proceso  $n_R(t)$  es una señal paso banda, como tal, se puede representar en función de sus componentes en fase y en cuadratura:

$$n_R(t) = i_n(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_n(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (51)$$

En el punto (R) se tiene la suma de dos señales paso banda: señal útil y ruido paso banda:

$$y_R(t) = s(t) + n_R(t) \quad (52)$$

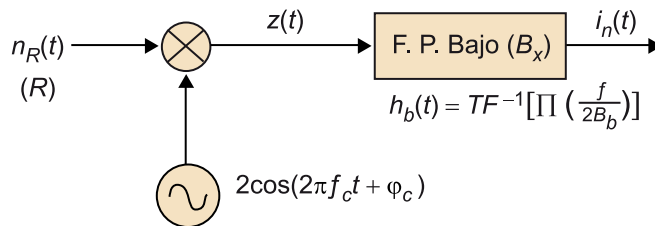
La señal detectada a la salida del sistema demodulador en la rama superior corresponde a la suma de las componentes en fase de las dos señales paso banda y en la rama inferior a la suma de las componentes en cuadratura de las dos señales paso banda:

$$\begin{aligned} i_{out}(t) &= A_c i_s(t) + i_n(t) \\ q_{out}(t) &= A_c q_s(t) + q_n(t) \end{aligned} \quad (53)$$

Las dos componentes de ruido,  $i_n(t)$ ,  $q_n(t)$ , resultan a su vez procesos aleatorios estacionarios, de media nula, y ambos son paso bajo. A continuación se calcula tanto la densidad espectral como la potencia para ambos procesos.

Para facilitar el análisis matemático, en la figura 5 se muestra un esquema con las transformaciones que experimenta la señal de ruido paso banda, a través del demodulador I&Q de la figura 3 en la rama superior, correspondiente a la componente en fase.

Figura 5. Obtención de la componente en fase de ruido



El proceso  $i_n(t)$  resulta:

$$i_n(t) = h_b(t) * (n_R(t) 2\cos(2\pi f_c t + \varphi_c)) = h_b(t) * z(t) \quad (54)$$

Modelando la fase  $\varphi_c$  como una variable aleatoria distribuida uniformemente en  $[-\pi, +\pi]$  el proceso a la entrada del filtro paso bajo ( $z(t)$ ), presenta la función de densidad espectral:

$$S_z(f) = S_{n_R}(f - f_c) + S_{n_R}(f + f_c) \quad (55)$$

Y dado que el proceso de ruido paso bajo correspondiente a la componente en fase se puede expresar como:

$$i_n(t) = h_b(t) * z(t) \quad (56)$$

se obtiene que su función de densidad espectral es:

$$S_{i_n}(f) = |H_b(f)|^2 S_z(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B_b}\right) \left( \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f-2f_c}{B_s}\right) + \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f}{B_s}\right) + \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f}{B_s}\right) + \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f+2f_c}{B_s}\right) \right) = N_0 \Pi\left(\frac{f}{2B_b}\right) \quad (57)$$

y su potencia:

$$P_{i_n} = \int S_{i_n}(f) df = N_0 2B_b \quad (58)$$

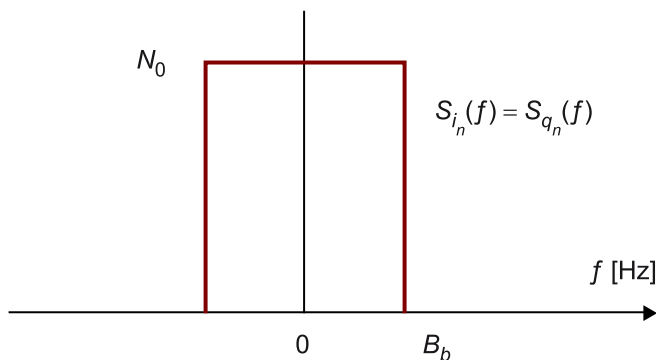
En (57) se muestra que el filtro paso bajo es necesario para eliminar componentes centrados a la frecuencia doble de la portadora. Mediante desarrollos análogos, se obtienen idénticas expresiones para la componente en cuadratura:

$$S_{q_n}(f) = N_0 \Pi\left(\frac{f}{2B_b}\right) \quad (59)$$

y para su potencia:

$$P_{q_n} = \int S_{q_n}(f) df = N_0 2B_b \quad (60)$$

Figura 6. Densidad espectral de las componentes en fase y en cuadratura del ruido paso bajo



El ruido térmico que se genera a la entrada del receptor de un sistema de comunicaciones se modela como un proceso aleatorio estacionario. Aparece por tanto sumado a la señal útil a la entrada del filtro receptor y se va transmitiendo por todos los puntos del receptor. Inicialmente, en el punto de recepción (R) es paso banda, pues se corresponde con la salida del filtro receptor paso banda y ocupa la misma banda espectral que la señal útil. A la salida del demodulador I&Q se obtienen las componentes I&Q de este ruido. Ambas presentan idénticas funciones de densidad espectral e iguales niveles de potencia. El nivel de potencia coincide además con el nivel de potencia del proceso de ruido paso banda en el punto (R).

## 2.4. Relación de potencias señal a ruido: SNR

Con el objeto de analizar la calidad del sistema de comunicaciones a partir de la influencia del ruido aditivo sobre la señal demodulada, se define la figura de SNR como el cociente de potencias entre la potencia de la señal útil demodulada a la salida del demodulador y la potencia de la señal de ruido también a la salida del demodulador. Es un factor de calidad, es decir, a mayor cociente mayor calidad. Se denomina a este cociente SNR (*signal to noise rate*) y sólo tiene sentido en ausencia de distorsión y de interferencias, tanto intrínsecas al sistema como externas.

### Potencia transmitida

La potencia transmitida  $S_T$  es el nivel de potencia que se invierte para transmitir la señal útil. Es por tanto la potencia de la señal en el punto (T) del esquema de la figura 3.

El cociente SNR se debe expresar en función de la potencia transmitida por el sistema transmisor, dado que este parámetro, al que se denomina  $S_T$ , es un factor de inversión. Ello significa que, a mayor potencia transmitida, mejor resulta el cociente SNR, debido a que la relación entre la SNR y la potencia transmitida siempre resulta lineal. Sin embargo, a mayor potencia transmitida, más costoso es el sistema transmisor, por el requisito de amplificadores de mayor ganancia. Por tanto, la potencia a transmitir es en general el resultado de una situación de compromiso entre costes a invertir y calidad mínima requerida en cuanto a SNR.

### SNR

La SNR es el cociente entre la potencia de la señal útil a la salida del demodulador y la señal de ruido a la salida del demodulador. El punto  $D$  representa la salida del sistema receptor y  $k$  la constante de proporcionalidad de la SNR respecto a la potencia transmitida:

$$SRN = \frac{P_{util\_D}}{P_{soroll\_D}} = \frac{S_D}{N_D} = kS_T \quad (61)$$

Por convenio se utiliza la letra mayúscula  $S$  para expresar la potencia de la señal útil y con el subíndice se indica el punto del sistema de comunicaciones en el que se calcula. Así, por ejemplo,  $S_T$  es la potencia de la señal útil en el punto (T),  $S_R$  es la potencia de la señal útil en el punto R y  $S_D$  es la potencia



de la señal útil en detección o salida del sistema. Análogamente se utiliza la letra mayúscula  $N$  para expresar la potencia de ruido en los distintos puntos del sistema de comunicaciones en el que se halle presente.

**Ejemplo 10. Cálculo de la SNR para una modulación en doble banda lateral (DSB)**

Sea la modulación en DSB centrada a la frecuencia  $f_c$ , transmitida invirtiendo una potencia de  $S_T$  watt. La señal moduladora  $x(t)$ , es de potencia  $P_x$  watt y presenta un ancho de banda de  $B_x$  Hz. El canal de transmisión presenta una respuesta impulsional ideal,  $h_c(t) = \alpha\delta(t)$  y el ruido aditivo  $w(t)$  es un proceso aleatorio blanco y gaussiano según el modelo AWGN. Su densidad espectral es:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \text{ watt/Hz} \quad (62)$$

El receptor se halla formado por (figura 7):

- Un filtro paso banda ideal de función de transferencia:

$$H_R(f) = \Pi\left(\frac{f-f_c}{2B_x}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_c}{2B_x}\right) \quad (63)$$

- Un demodulador coherente que detecta la componente en fase y que se halla perfectamente sincronizado con la portadora recibida.
- Un filtro paso bajo ideal de función de transferencia:

$$H_b(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right) \quad (64)$$

Se calcula a continuación el cociente SNR y se deja en función de la potencia transmitida. Considerando la señal modulada y transmitida:

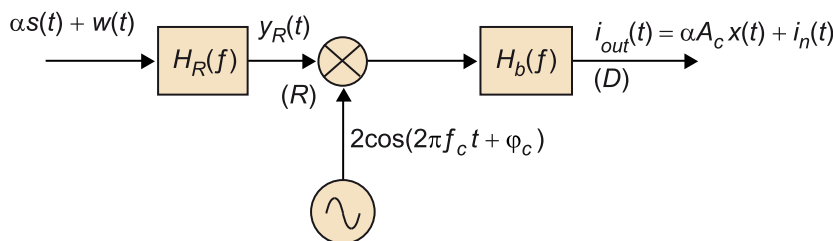
$$s(t) = x(t)c(t) = x(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (65)$$

cuya potencia coincide con la potencia transmitida, y expresada en función de parámetros tales como  $A_c$ .  $P_x$  resulta por lo visto:

$$S_T = P_s = \frac{1}{2} A_c^2 P_x \quad (66)$$

La señal transmitida se atenúa una constante  $\alpha$  a través del canal y se detecta a la entrada del filtro receptor, superpuesta al ruido dado  $w(t)$  según se muestra de forma esquemática en la figura 7:

Figura 7. Esquema receptor de la modulación DSB



A la salida del filtro receptor se obtiene:

$$\begin{aligned} y_R(t) &= (\alpha s(t) + w(t)) * h_R(t) = \alpha s(t) + n_R(t) = \\ &= \alpha x(t) A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) + i_n(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_n(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) = \\ &= (\alpha x(t) A_c + i_n(t)) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_n(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \end{aligned} \quad (67)$$

La señal total en el punto de detección ( $D$ ), suponiendo canal ideal con atenuación ( $h_c(t) = \alpha\delta(t)$ ), se expresa como:

$$i_{out}(t) = A_c \alpha i_s(t) + i_n(t) = A_c \alpha x(t) + i_n(t) \quad (68)$$

En (68) el primer sumando corresponde a la señal útil y el segundo sumando corresponde a la señal de ruido. Dado que la señal útil es proporcional al mensaje, se halla libre de distorsión y sí que tiene sentido medir la calidad de la transmisión a través del cociente SNR. La SNR sobre esta salida se calcula en función de los diferentes parámetros físicos como:

$$SNR = \frac{S_D}{N_D} = \frac{\alpha^2 A_c^2 P_x}{P_{i_n}} = \frac{\alpha^2 A_c^2 P_x}{2N_0 B_x} = \frac{\alpha^2 S_T}{N_0 B_x} \quad (69)$$

La expresión anterior se puede utilizar para calcular la mínima potencia  $S_T$ , que debe transmitirse en función de la mínima SNR exigida por criterios de calidad y en las condiciones propias del sistema. Mediante condiciones del sistema se entiende la atenuación del canal medida a través del parámetro  $\alpha$ , el nivel de ruido medido a través del parámetro  $N_0$  y el ancho de banda del mensaje  $B_b$ , como las más significativas.

Es de destacar que el cociente de potencias SNR no tiene unidades por ser un cociente entre dos potencias, que a su vez se miden en unidades de Watts. En la práctica este cociente se suele proporcionar en decibelios (dB):

$$SNR_{(dB)} = 10 \log_{10}(SNR) \quad (70)$$

Cuando se desea comparar dos relaciones SNR diferentes entre sí, se suele medir como la diferencia en dB. Si por ejemplo se tienen dos sistemas con  $SNR_1$  y  $SNR_2$ , tales que  $SNR_1 > SNR_2$ , se tiene que la ganancia del sistema 1 respecto al sistema 2 es:

$$10 \log_{10} \left( \frac{SNR_1}{SNR_2} \right) = SNR_{1(dB)} - SNR_{2(dB)} \quad (71)$$

y la pérdida del sistema 2 respecto al sistema 1 es:

$$10 \log_{10} \left( \frac{SNR_2}{SNR_1} \right) = SNR_{2(dB)} - SNR_{1(dB)} \quad (72)$$

## 2.5. SNR de la modulación AM

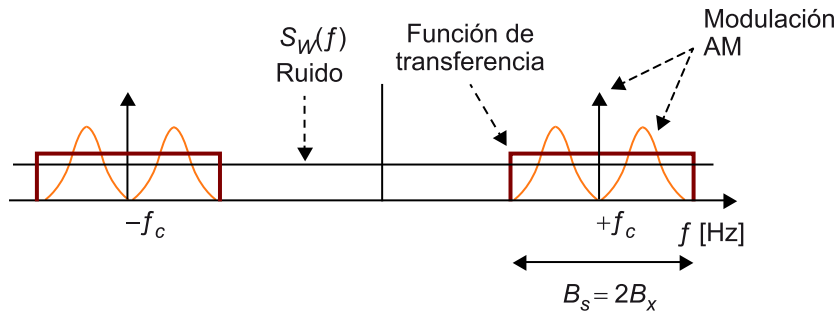
El esquema receptor clásico para este tipo de demodulación se simboliza en el diagrama de funciones de la figura 8.

Figura 8. Diagrama de Funciones del receptor de AM



Se asume que el primer bloque es un filtro paso banda ideal de función de transferencia  $H_R(f)$ , que permite el paso de la señal útil sin distorsión y elimina el ruido existente fuera de la banda de la señal útil. El efecto de filtrado se muestra en la figura 16.

Figura 9. Espectros de la señal modulada en AM, de la densidad espectral de ruido a la entrada del filtro receptor y función de transferencia del filtro paso banda receptor



La señal a la salida del filtro paso banda se expresa como la suma de la señal útil más el ruido paso banda. Considerando canal ideal con cierta atenuación  $(h_c(t)=\alpha\delta(t))$ :

$$y_R(t) = \alpha s(t) + n_R(t) = \alpha A_c(1 + mx(t))\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) + i_n(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_n(t)\sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (73)$$

El detector de envolvente calcula el módulo del equivalente paso bajo de la señal recibida:

$$e_{y_R}(t) = |b_{y_R}(t)| = \sqrt{i_{y_R}^2(t) + q_{y_R}^2(t)} = \sqrt{(\alpha A_c(1 + mx(t)) + i_n(t))^2 + q_n^2(t)} \quad (74)$$

La señal anterior en condiciones de elevada SNR se aproxima directamente por la componente en fase de la señal recibida:

$$SNR \gg 1 \Rightarrow \alpha A_c \gg |i_n(t)|, |q_n(t)| \Rightarrow e_{y_R}(t) \cong A_c \alpha (1 + mx(t)) + i_n(t) \quad (75)$$

En el punto de destino (D) del diagrama de la figura 8, la señal de salida se divide entre la señal útil y la señal de ruido. El bloque de eliminar la componente continua o DC es necesario para eliminar la constante que aparece en la expresión (75). Así, la señal resultante queda:

$$y_D(t) = e_{y_R}(t) - DC = A_c \alpha mx(t) + i_n(t) = s_D(t) + n_D(t) \quad (76)$$

La potencia de la señal útil  $s_D(t)$  es:

$$s_D = E[s_D^2(t)] = A_c^2 \alpha^2 m^2 P_x \quad (77)$$

La potencia de la señal de ruido en detección, dado que ésta coincide con la componente en fase del ruido paso banda,  $n_D(t) = i_n(t)$ , es, según (58):

$$N_D = E[n_D^2(t)] = P_{in} = N_0 2B_x \quad (78)$$

Por tanto, la relación SNR de las respectivas potencias coincide con el cociente entre ambas cantidades. Sin embargo, interesa expresar este cociente en función de la potencia transmitida ( $S_T = P_s$ ), que se puede ver en el Ejemplo 7. De este modo, la relación de potencias SNR queda:

$$SNR = \frac{A_c^2 \alpha^2 m^2 P_x}{N_0 2B_x} = \frac{m^2 P_x \alpha^2 S_T}{(1+m^2 P_x) N_0 B_x} \quad (79)$$

## 2.6. Comparación de la SNR de las modulaciones AM y DSB

Analizando el resultado obtenido en (79), es de destacar que la modulación AM respecto a la potencia transmitida, cuando se compara con la modulación DSB, cuya SNR se expresa en (68). Las pérdidas de la modulación AM respecto a la modulación DSB se obtienen en dB en igualdad de condiciones para los dos tipos de modulación. Al utilizar iguales potencia transmitida, ancho de banda de señal moduladora, canal de transmisión y nivel de ruido, la pérdida de AM respecto a DSB, coincidente con la ganancia de DSB respecto a AM:

$$\left( \frac{SNR_{DSB}}{SNR_{AM}} \right)_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{\frac{\alpha^2 S_T}{N_0 B_x}}{\frac{m^2 P_x \alpha^2 S_T}{(1+m^2 P_x) N_0 B_x}} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{1+m^2 P_x}{m^2 P_x} \right) > 0 \quad (80)$$

El resultado anterior es debido a que en la modulación AM la potencia transmitida se reparte entre la transmisión de la señal portadora y la modulación propiamente dicha, que precisamente corresponde a un formato DSB, tal como se muestra en la ecuación (36).

Se concluye que, invirtiendo la misma potencia transmitida en un sistema de modulaciones analógicas, el formato DSB presenta mejor calidad que el formato AM, atendiendo a criterios de SNR. En la práctica, el formato AM se utiliza para radiodifusión, situación en la que, a partir de un transmisor, la señal es escuchada por múltiples receptores. De ahí que el elevado consumo en potencia transmitida se considera bien aprovechado, especialmente considerando que los receptores no precisan estrictamente ser síncronos o coherentes.

## Resumen

Este módulo se dedica al estudio de las modulaciones paso banda en general analizando con detalle los sistemas de modulación con componentes en fase y cuadratura, particularizándolos en la práctica para algunos sistemas de modulación comerciales.

En la caracterización de las modulaciones paso banda, se tienen las componentes en fase y en cuadratura como las señales paso bajo sobre las que se transporta la información y que mediante una señal portadora son trasladadas a una frecuencia alta para ocupar un determinado ancho espectral en la transmisión. La señal portadora es una función sinusoidal que se caracteriza a su vez por los parámetros de amplitud, frecuencia y fase. Los parámetros de frecuencia y de fase deben recuperarse con precisión en recepción siempre que la demodulación se implemente de forma síncrona o coherente. En caso contrario, se producen pérdidas o atenuaciones de la señal útil e interferencias entre las componentes en fase y en cuadratura.

El mensaje a transmitir o señal moduladora es de naturaleza aleatoria, por lo que espectralmente se caracteriza mediante la función de densidad espectral. El ruido aditivo que se suma a la señal a la entrada del receptor es de naturaleza aleatoria y se caracteriza espectralmente como ruido blanco. La primera etapa de un receptor de un sistema de comunicaciones paso banda consiste en un filtro paso banda, que permite el paso de la señal útil o modulada y elimina las componentes espectrales de ruido fuera de la banda de la señal útil. El ruido que ocupa la misma banda de la señal útil no se puede eliminar y da lugar al ruido filtrado paso banda, que se demodula inevitablemente junto con la señal útil y aparece sumado a la señal mensaje demodulada. El efecto producido se mide mediante el cociente SNR de potencias en detección entre la señal útil y la señal de ruido.

En el módulo de modulaciones digitales paso banda se utilizan los conceptos de modulaciones analógicas paso banda, señal portadora y componentes en fase y en cuadratura presentados en este módulo. En las modulaciones digitales, las componentes I&Q son señales continuas en el tiempo, pero que a su vez transportan la información de un mensaje digital, consistente en una secuencia de bits, que llega al modulador a una determinada velocidad medida en bits/s. En definitiva, aun con la implantación de las modulaciones digitales en todos los sistemas de comunicaciones actuales, gran parte del contenido de este módulo continúa siendo materia fundamental para entender los conceptos de modulaciones digitales.



## Ejercicios de autoevaluación

La resolución de los siguientes ejercicios se propone como complemento al estudio del módulo. Se recomienda que se realicen mediante una estrategia sistemática. En general, es conveniente resolver los desarrollos planteados de forma general, trabajando con las variables y parámetros de forma genérica y sustituir por sus valores numéricos en particular al final de los apartados. De esta forma se facilita la propia corrección y seguimiento del ejercicio y se obtiene una visión más amplia que la del caso particular que se analice.

### 1. Cambio de frecuencia portadora

Se define la modulación DSB según la expresión dada en (5). Hallad las componentes en fase y en cuadratura de esta modulación en cada una de las tres siguientes situaciones:

a) Tomando como señal portadora:  $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$

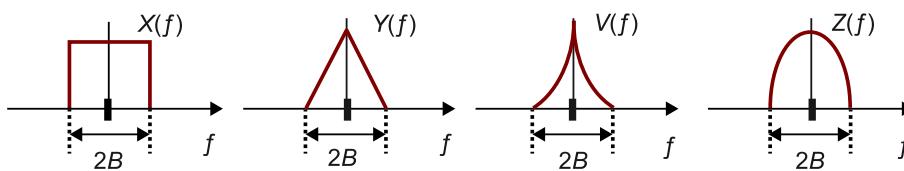
b) Tomando como señal portadora:  $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$

c) Tomando como señal portadora:  $c(t) = A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c)$

### 2. Doble modulación DSB

Se dispone de 4 señales moduladoras:  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $v(t)$ ,  $z(t)$ , toda ellas de ancho de banda  $B$  Hz y cada una de ellas presenta la transformada de Fourier de la figura 10.

Figura 10. Transformadas de Fourier



Se realiza el siguiente proceso de modulación:

$$\begin{aligned} a(t) &= x(t)\cos(2\pi f_1 t) - y(t)\sin(2\pi f_1 t) \\ d(t) &= v(t)\cos(2\pi f_1 t) - z(t)\sin(2\pi f_1 t) \\ s(t) &= a(t)\cos(2\pi f_c t) - d(t)\sin(2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (81)$$

Considerad:  $f_c = 4B$ ,  $f_1 = B$ . Se pide:

a) Dibuje la parte real de la transformada de Fourier de la señal  $s(t)$  y la parte imaginaria. ¿Qué ancho de banda tiene la señal  $s(t)$ ?

b) Calculad las componentes en fase y en cuadratura de la señal  $s(t)$  respecto a la portadora  $c(t) = \cos(2\pi f_c t)$ .

c) Proponed un esquema demodulador que, a partir de la señal de entrada  $s(t)$ , proporcione cuatro señales de salida correspondientes a las cuatro señales demoduladoras.

### 3. Demodulación I&Q con error de frecuencia portadora

Se dispone de 2 señales moduladoras:  $x(t)$ ,  $y(t)$ , ambas de ancho de banda  $B$  Hz. Se modulan en I&Q:

$$s(t) = A_c x(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - A_c y(t)\sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (82)$$

La señal anterior se demodula mediante el demodulador de la figura 1. Suponed los siguientes parámetros:

$$f_R = f_c + \Delta f \gg 2B_B; \varphi_R = \varphi_c + \varepsilon_c \quad (83)$$

Funciones de transferencia de los filtros paso bajo:  $\Pi\left(\frac{f}{2(B_B + \Delta f)}\right)$ .

- a) Hallad la expresión de las señales de salida en función de las señales de entrada  $x(t)$ ,  $y(t)$ .
- b) Demostrad que la envolvente del equivalente paso bajo demodulado coincide, salvo constante, con la envolvente del equivalente paso bajo de la señal modulada. (Considerad como función envolvente  $e_s(t) = |i_s(t) + jq_s(t)|$ ).

#### 4. SNR en DSB

Sea la modulación en DSB centrada a la frecuencia  $f_c$ , transmitida invirtiendo una potencia de  $S_T$  watts. La señal moduladora  $x(t)$ , es de potencia  $P_x$  watts y presenta un ancho de banda de  $B_x$  Hz. El canal de transmisión presenta una respuesta impulsional ideal,  $h_c(t) = \alpha\delta(t)$  y el ruido aditivo  $w(t)$  es un proceso aleatorio blanco y gaussiano según el modelo AWGN. Su densidad espectral es:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \text{ watt/Hz} \quad (84)$$

El receptor se halla formado por (figura 7):

- Un filtro paso banda de función de transferencia:  $H_R(f) = \Pi\left(\frac{f-f_c}{3B_x}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_c}{3B_x}\right)$ .
- Un demodulador coherente que detecta la componente en fase y que se halla perfectamente sincronizado con la portadora recibida.
- Un filtro paso bajo ideal de función de transferencia:  $H_b(f) = \Pi\left(\frac{f}{3B_x}\right)$ .

Observad que tanto el filtro paso banda como el filtro paso bajo presentan un ancho de banda mayor que el estrictamente necesario para demodular la señal útil.

- a) Dibujad la función de densidad espectral del ruido paso banda filtrado y calculad su potencia.
- b) Dibujad la función de densidad espectral del ruido resultante en el punto de detección y calculad su potencia (aplicad directamente la expresión (55)).
- c) Calculad la SNR resultante en función de la potencia transmitida  $S_T$ .
- d) Evaluad la degradación en dB de la SNR, que supone el hecho de utilizar filtros de ancho de banda mayores que los estrictamente necesarios.

#### 5. Cálculo de SNR al considerar diferentes defectos del sistema receptor

Sea la modulación en DSB centrada a la frecuencia  $f_c$ , definida en (5), transmitida invirtiendo una potencia de  $S_T$  watt. La señal moduladora  $x(t)$ , es de potencia  $P_x$  watt y presenta un ancho de banda de  $B_x$  Hz. El canal de transmisión presenta una respuesta impulsional ideal,  $h_c(t) = \alpha\delta(t)$  y el ruido aditivo  $w(t)$  es un proceso aleatorio blanco y gaussiano según el modelo presentado en el subapartado 2.2. Su densidad espectral es:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \text{ watt/Hz} \quad (85)$$

El receptor se halla formado por un filtro paso banda ideal de función de transferencia:

$$H_R(f) = \Pi\left(\frac{f-f_c}{2(B_x+B_e)}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_c}{2(B_x+B_e)}\right) \quad (86)$$

y por un filtro paso bajo ideal de función de transferencia:

$$H_b(f) = \Pi\left(\frac{f}{2(B_x+B_e)}\right) \quad (87)$$

El demodulador de componente en fase es como el de la figura 7, salvo que se halla incorrectamente sincronizado con la portadora recibida. La señal generada por el oscilador local es  $2\cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \varphi_e)$ .



a) Calculad la SNR en detección en función de la potencia transmitida  $S_T$  y de los parámetros  $\alpha$ ,  $N_0$ ,  $B_x$ ,  $B_e$ ,  $\varphi_e$ .

b) Evaluad la pérdida en dB de SNR para las siguientes situaciones respecto a la situación ideal  $B_e = 0$ ,  $\varphi_e = 0$  y comentad los resultados:

- $B_e = 0$ ,  $\varphi_e = 0,1\pi$
- $B_e = 0,1 B_x$ ,  $\varphi_e = 0$
- $B_e = 0,1 B_x$ ,  $\varphi_e = 0,1\pi$

## 6. Demodulación de AM

Considerando el esquema demodulador de AM basado en detección de envolvente tal como aparece en la figura 8:

a) Demostrad que en ausencia de ruido ( $w(t) = 0$ ), a la salida del sistema se tiene únicamente la señal útil sin distorsión.

b) Demostrad que si se utiliza un demodulador coherente para demodular la señal de AM según la figura 7 en ausencia de ruido y posteriormente se elimina la componente continua, se tiene únicamente la señal útil sin distorsión.

c) Para el esquema anterior, si se considera presencia de ruido aditivo  $w(t)$  blanco y gaussiano según el modelo AWGN y de densidad espectral  $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$  watt/Hz, obtened la SNR a la salida del demodulador en función de la potencia transmitida.

## 7. SNR en sistemas de modulaciones analógicas

Se requiere transmitir una señal de audio entre dos puntos. La señal moduladora  $x(t)$ , es de potencia  $P_x = 10^{-3}$  watt y presenta un ancho de banda de  $B_x = 5$  kHz. El canal de transmisión presenta una respuesta impulsional ideal,  $h_c(t) = \alpha\delta(t) = 0.8\delta(t)$  y el ruido aditivo  $w(t)$  es un proceso aleatorio blanco y gaussiano según el modelo presentado en el subapartado 2.2. Su densidad espectral es:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} = 10^{-6} \text{ watt/Hz} \quad (88)$$

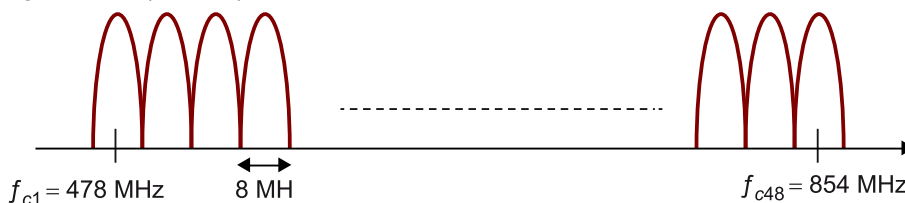
Se dispone de un amplificador en el extremo final del transmisor que proporciona una potencia transmitida  $S_T = 0,5$  watt. Calculad las expresiones de la señal modulada identificandó numéricamente los parámetros que intervienen en las expresiones y evaluad la calidad de la señal en detección mediante la SNR con cada una de las tres alternativas siguientes:

- Modulación DSB.
- Modulación AM con un índice de modulación  $m = 0,5$ .
- Modulación FM con desviación de frecuencia de  $f_d = 5B_x$  Hz/V.

## 8. Recepción heterodina de la señal de televisión

Las emisoras de televisión ocupan cada una de ellas un ancho de banda  $B_i = 8$  MHz. Considerad un grupo de  $N = 48$  emisoras dispuestas según el esquema de la figura 11.

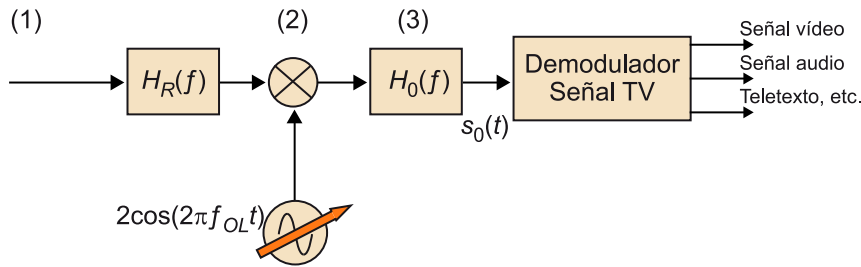
Figura 11. Ocupación espectral de emisoras de televisión en VHF



Se comprueba fácilmente que en el margen de interés (474 ... 858) MHz caben 48 portadoras de ocupación 8 MHz cada una de ellas. En la figura se han marcado la primera y la última frecuencia portadora de la banda considerada.

Se desea poder demodular cualquier emisora en la banda de 474 MHz a 858 MHz. Para poder sintonizar una determinada emisora, se propone un diagrama de bloques como el de la figura 12, en el que el único elemento variable es el oscilador local que genera un coseno a frecuencia variable  $f_{OL}$ . Con la elección de esta frecuencia se elige indirectamente una determinada emisora.

Figura 12. Diagrama de bloques funcional de la recepción heterodina de la señal de televisión



En la figura 12 los diferentes elementos representan:

- Filtrado receptor de todas las posibles emisoras a demodular a través de un filtro paso banda de banda de paso de 474 MHz a 858 MHz.
- Multiplicador de la señal a la salida del filtro receptor por la señal de salida del oscilador local de frecuencia variable  $f_{OL}$ .
- Filtrado a la frecuencia intermedia de  $f_0 = 360$  MHz con un ancho de banda de  $B_i = 8$  MHz.

Si en el punto (1) la señal presente es la suma de las  $N = 48$  emisoras, entonces  $y_{(1)}(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t)$ , donde  $s_i(t)$  representa la señal de una emisora en particular, se pide.

a) Proponed expresiones adecuadas para las funciones de transferencia de los dos filtros:  $H_R(f)$  y  $H_0(f)$ .

b) ¿Cuánto debe valer la frecuencia del oscilador local  $f_{OL}$  para sintonizar la emisora 1 de frecuencia portadora 478 MHz?

c) ¿Cuánto debe valer la frecuencia del oscilador local  $f_{OL}$  para sintonizar la emisora 48 de frecuencia portadora 854 MHz?

### 9. Efecto imagen en recepción heterodina

Considerad el esquema receptor heterodino de TV presentado en el ejercicio anterior. Suponed en este ejercicio que se ha eliminado el filtro receptor. Analizad la señal obtenida a la salida del filtro a frecuencia intermedia al sintonizar la emisora que ocupa el espectro en el extremo inferior (portadora  $f_{c1} = 478$  MHz), si a la entrada de todo el sistema se halla también presente la señal interferente  $z(t) = A_z b_z(t) \cos(2\pi f_z t)$ , con  $f_z = 2f_{c1} + f_0$  y  $f_0 = 360$  MHz igual a la frecuencia intermedia.

a) Justificad que  $f_z$  se denomine la frecuencia imagen de  $f_{c1}$ .

b) Calculad que frecuencia es la imagen de la señal centrada a  $f_{cN} = 854$  MHz.

## Fórmulas matemáticas

### Expresiones trigonométricas

$$\begin{aligned}\cos(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}\cos(A-B) + \frac{1}{2}\cos(A+B) \\ \sin(A)\sin(B) &= \frac{1}{2}\cos(A-B) - \frac{1}{2}\cos(A+B) \\ \sin(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}\sin(A-B) + \frac{1}{2}\sin(A+B) \\ \sin(A+B) &= \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B) \\ \cos(A+B) &= \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)\end{aligned}\tag{89}$$

