Anàlisi de circuits de microones

Albert-Miquel Sánchez Delgado

PID_00193541

UOC
Universitat Oberta de Catalunya

Els textos i imatges publicats en aquesta obra estan subjectes –llevat que s'indiqui el contrari– a una llicència de Reconeixement-Compartir igual (BY-SA) v.3.0 Espanya de Creative Commons. Podeu modificar l'obra, reproduirla, distribuir-la o comunicar-la públicament sempre que en citeu l'autor i la font (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), i sempre que l'obra derivada quedi subjecta a la mateixa llicència que el material original. La llicència completa es pot consultar a http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/es/legalcode.ca

Índex

Introducció 5

Objectius 6

1. Els paràmetres *Z* i *Y*, i les seves limitacions 7

2. Paràmetres *S* d'una xarxa de microones 13
- 2.1. Justificació de la caracterització d'una xarxa a partir d'ones de tensió 13
- 2.2. Definició de les ones *a* i *b* 16
- 2.3. Sentit físic de *a* i *b* 20
- 2.4. Coeficient de reflexió generalitzat 21
- 2.5. Paràmetres *S* generalitzats 23
- 2.6. Xarxes passives i sense pèrdues 27
- 2.7. Xarxes recíproques 31
- 2.8. Canvi del pla de referència 32
- 2.9. Punts clau 34

3. Càlcul dels paràmetres *S* 36
- 3.1. Càlcul dels paràmetres *S* a partir de tensions i corrents 36
- 3.2. Càlcul dels paràmetres *S* a partir de la descomposició en mode parell i mode senar 39

4. Relacions entre els paràmetres *S*, *Z*, *Y*, *T* i *ABCD* 47
- 4.1. Paràmetres *T* 47
- 4.2. Paràmetres *ABCD* 49
- 4.3. Relació entre matrius de paràmetres *S*, *Z* i *Y* per a una xarxa de *N* ports 50
- 4.4. Relació entre paràmetres *S*, *T*, i *ABCD* per a una xarxa de dos ports 51

5. Analitzadors de xarxes 57

Resum 60

Exercicis d'autoavaluació 61

Solucionari 63

Glossari 64

Bibliografia..... 65

Introducció

En els circuits en què les mides de les pistes, components i integrats són petites en relació amb la longitud d'ona de treball, s'acostumen a utilitzar els paràmetres *Z* o *Y* (impedància i admitància, respectivament) per a modelitzar-ne el comportament. No obstant això, a les freqüències de microones (entre 300 MHz i 300 GHz), la longitud dels circuits comença a ser comparable a les longituds d'ona de treball i apareixen els efectes de propagació. Les pistes es converteixen en línies de transmissió (d'ara en endavant, LT) i, en conseqüència, la mesura d'aquest tipus de paràmetres esdevé complicada. El motiu principal és que per a mesurar-los amb precisió es necessita utilitzar curtcircuits o circuits oberts perfectes, però els efectes de propagació fan que un curtcircuit deixi de ser un curtcircuit i un circuit obert deixi de ser un circuit obert. Amb aquestes condicions són de més utilitat un altre tipus de paràmetres, els paràmetres *S*, els quals, en comptes de relacionar tensions amb corrents, relacionen ones de tensió incidents amb ones de tensió reflectides o transmeses. El seu avantatge principal és que per a mesurar-los només es necessiten impedàncies d'un cert valor (que dependrà de la impedància característica de la línia de transmissió de cada port de la xarxa), molt més fàcils d'obtenir que els curtcircuits i els circuits oberts. A més, atès que aquestes xarxes tenen LT connectades als seus ports, els paràmetres *S* resulten idonis per a caracteritzar-los, ja que permeten treballar directament amb les ones de tensió que es propaguen pel seu interior i faciliten així l'anàlisi completa dels circuits.

Per tal d'introduir aquests nous paràmetres, aquest mòdul s'ha organitzat de la manera següent. Primer de tot es presenten els objectius que cal assolir. En l'apartat "Els paràmetres *Z* i *Y*, i les seves limitacions" es revisen els paràmetres *Z* i *Y*, i es descriuen les limitacions que aquests presenten quan es treballa a freqüències de microones. En l'apartat "Paràmetres *S* d'una xarxa de microones" s'introdueixen els paràmetres *S* i se n'exposen els avantatges, a més d'altres característiques importants. En l'apartat "Càlcul dels paràmetres *S*" es mostren dues tècniques per a calcular els paràmetres *S* d'un circuit, el mètode de les tensions i els corrents, i el mètode de la descomposició en mode parell i mode senar. En l'apartat "Relacions entre els paràmetres *S*, *Z*, *Y*, *T* i *ABCD*" s'estableixen les relacions entre els diferents paràmetres. Finalment, en l'apartat "Analitzadors de xarxes" es descriu el funcionament de l'instrument utilitzat per a mesurar els paràmetres *S*: l'analitzador de xarxes.

Objectius

Amb l'estudi d'aquest mòdul es persegueixen els objectius següents:

1. Conèixer els paràmetres *S* i els seus avantatges en la caracterització de xarxes.

2. Entendre el concepte i la utilitat de les ones *a* i *b*.

3. Entendre el concepte de *coeficient de reflexió*.

4. Entendre el concepte de *xarxes passives*, *recíproques* i *sense pèrdues*.

5. Saber calcular els paràmetres *S* d'una xarxa amb els dos mètodes exposats.

6. Saber trobar els paràmetres *S* si es modifica el pla de referència.

7. Saber relacionar els paràmetres *S* amb els paràmetres *T*, *Z*, *Y* i *ABCD*.

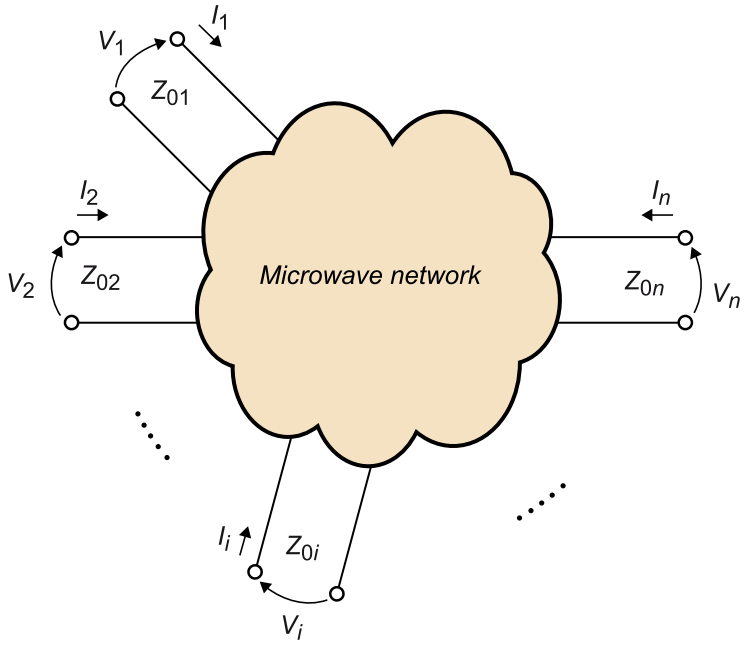
8. Entendre el funcionament d'un analitzador de xarxes.

1. Els paràmetres *Z* i *Y*, i les seves limitacions

Una **xarxa de microones** es defineix com un circuit d'elements discrets (bobines, condensadors, resistències, etc.) i distribuïts (LT) accessible per mitjà dels seus ports.

Els ports s'acostumen a realitzar també sobre LT d'una certa impedància característica, Z_{0i}, per a $i = 1, 2, ..., n$, tal com es mostra en la figura 1.

Figura 1. Xarxa de microones genèrica de *n* ports



La caracterització del comportament d'una xarxa de microones és important a l'hora de dissenyar aquesta mateixa xarxa i/o xarxes adjacents en un circuit complex. Hi ha un munt d'exemples en aquest sentit, com pot ser la necessitat d'adaptar dos circuits per a maximitzar la transferència de potència entre tots dos. Si en coneixem la impedància o admitància d'entrada, es pot construir la xarxa d'adaptació adequada. Per tant, qualsevol circuit es pot descriure a partir dels **paràmetres d'impedància** (matriu de paràmetres *Z*) o **d'admitància** (matriu de paràmetres *Y*), en mesurar la representació fasorial de les tensions i els corrents en els seus ports. Aquestes relacions s'estableixen respectivament com:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \cdots + Z_{1n}I_n \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \cdots + Z_{2n}I_n \\ &\vdots \\ V_n &= Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + \cdots + Z_{nn}I_n \end{aligned} \qquad 2.1$$

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + \cdots + Y_{1n}V_n \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + \cdots + Y_{2n}V_n \\ &\vdots \\ I_n &= Y_{n1}V_1 + Y_{n2}V_2 + \cdots + Y_{nn}V_n \end{aligned} \qquad 2.2$$

Aquestes expressions les podem representar també de manera senzilla amb una notació matricial:

$$[V] = [Z][I] \qquad 2.3$$

$$[I] = [Y][V] \qquad 2.4$$

en què $[V]$ i $[I]$ són els vectors de tensions i corrents, respectivament, i $[Z]$ i $[Y]$ les matrius d'impedàncies i admitàncies, respectivament:

$$[V] = [V_1 \;\; V_2 \;\; \cdots \;\; V_n] \qquad 2.5$$

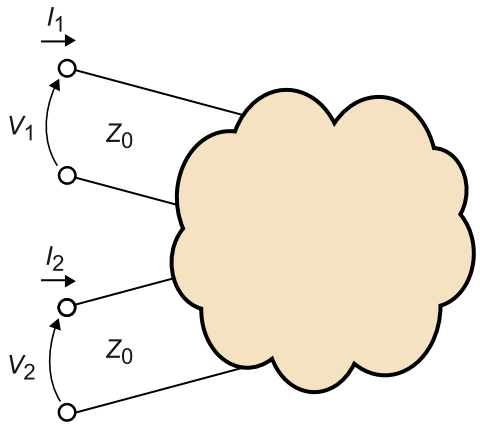
$$[I] = [I_1 \;\; I_2 \;\; \cdots \;\; I_n] \qquad 2.6$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ Z_{n1} & & & Z_{nn} \end{bmatrix} \qquad 2.7$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ Y_{n1} & & & Y_{nn} \end{bmatrix} \qquad 2.8$$

A freqüències en les quals les longituds d'ona són comparables a les mides del circuit, però, la mesura de les tensions i els corrents als ports de la xarxa esdevé un problema, a causa dels efectes de propagació del senyal. Per a exposar-ho amb claredat, escenificarem l'exemple d'una xarxa de només dos ports amb la mateixa impedància característica, Z_0, com la de la figura 2.

Figura 2. Xarxa de microones genèrica de dos ports

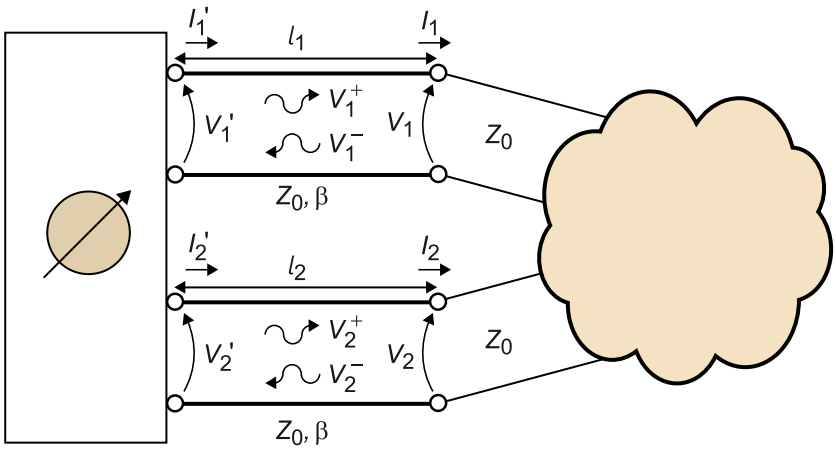


En aquest cas, la relació de tensions i corrents als seus ports la podem trobar amb els paràmetres Z com:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \qquad 2.9$$

Per a mesurar aquests paràmetres connectem un mesurador als dos ports de la xarxa per mitjà de dues LT (una per port) d'impedància característica també Z_0, tal com s'observa en la figura 3 (aquestes LT són els cables que ens permetran interconnectar la xarxa amb el mesurador; per exemple, cables coaxials).

Figura 3. Mesura de la impedància d'una xarxa de microones



Z_0 és la impedància característica de cada un dels ports de la xarxa de microones i de les LT que interconnecten aquesta amb el mesurador.

A més, per a mesurar els paràmetres Z de la xarxa cal tenir en compte que:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}; \; Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \\ Z_{21} &= \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}; \; Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} \end{aligned} \qquad 2.10$$

Això implica que el mesurador ha d'implementar un circuit obert al port 2 per a mesurar els paràmetres Z_{11} i Z_{21} (per tal que $I_2 = 0$), tal com mostra la figura 4; i un circuit obert al port 1 per a mesurar els paràmetres Z_{12} i Z_{22} (per tal que $I_1 = 0$), tal com mostra la figura 5.

Figura 4. Mesura dels paràmetres Z_{11} i Z_{21} d'una xarxa de dos ports, en la qual el port 2 presenta un circuit obert

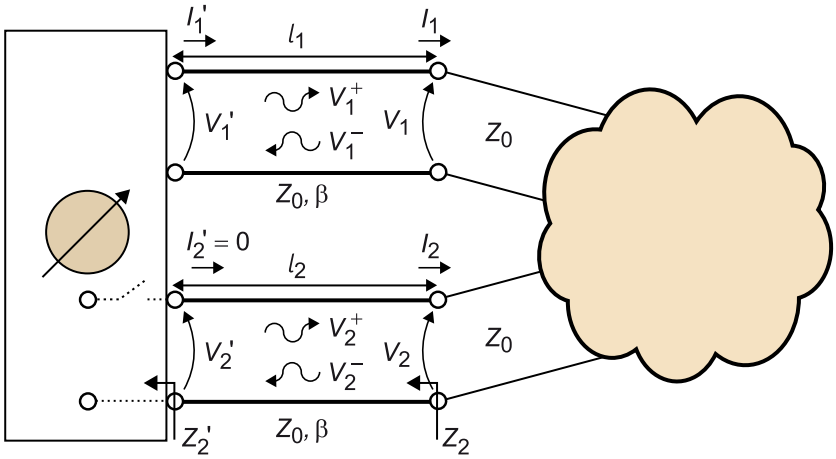
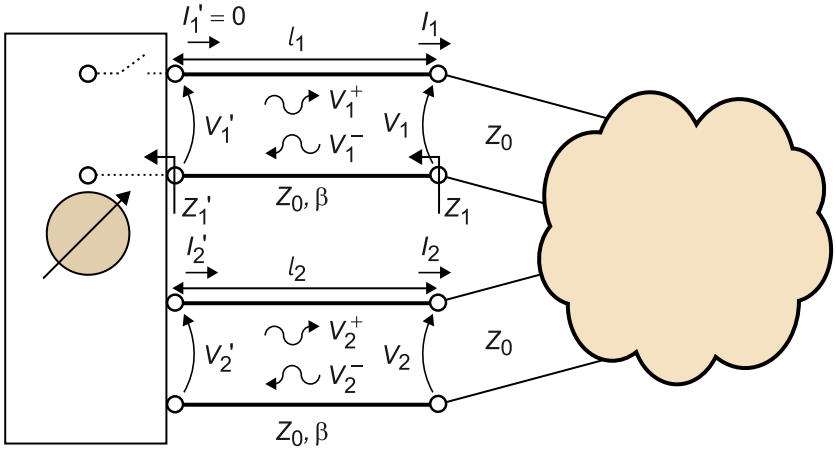


Figura 5. Mesura dels paràmetres Z_{12} i Z_{22} d'una xarxa de dos ports, en la qual el port 1 presenta un circuit obert



El problema és que els efectes de propagació causats per les LT poden comportar que als ports de la xarxa no hi hagi un circuit obert, sinó qualsevol altra impedància imaginària en funció de les longituds d'aquestes LT ($Z_1 \neq Z_1$' i $Z_2 \neq Z_2$'). A més, les tensions i els corrents que mesura el mesurador no són V_1,V_2, I_1, I_2, respectivament, sinó V_1',V_2', I_1', I_2', també modificades pels efectes de propagació. Per a trobar els valors de V_1,V_2, I_1 i I_2 s'hauria de descompondre V_1',V_2', I_1' i I_2' en ones de tensió progressives i regressives, i analitzar les LT.

Anàlogament, per als paràmetres Y tindríem:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{aligned} \qquad 2.11$$

I podem mesurar-los tenint en compte que:

$$Y_{11}=\frac{I_1}{V_1}\bigg|_{V_2=0};\ Y_{12}=\frac{I_1}{V_2}\bigg|_{V_1=0}$$
$$Y_{21}=\frac{I_2}{V_1}\bigg|_{V_2=0};\ Y_{22}=\frac{I_2}{V_2}\bigg|_{V_1=0} \qquad 2.12$$

En aquest cas, el mesurador ha d'implementar un curtcircuit al port 2 per a mesurar els paràmetres Y_{11} i Y_{21} (per tal que $V_2 = 0$), tal com mostra la figura 6; i un curtcircuit al port 1 per a mesurar els paràmetres Y_{12} i Y_{22} (per tal que $V_1 = 0$), tal com mostra la figura 7.

Figura 6. Mesura dels paràmetres Y_{11} i Y_{21} d'una xarxa de dos ports, en la qual el port 2 presenta un curtcircuit

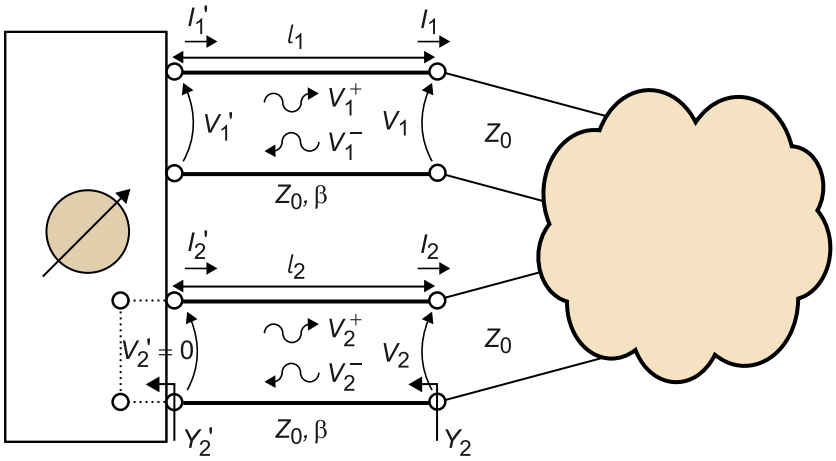
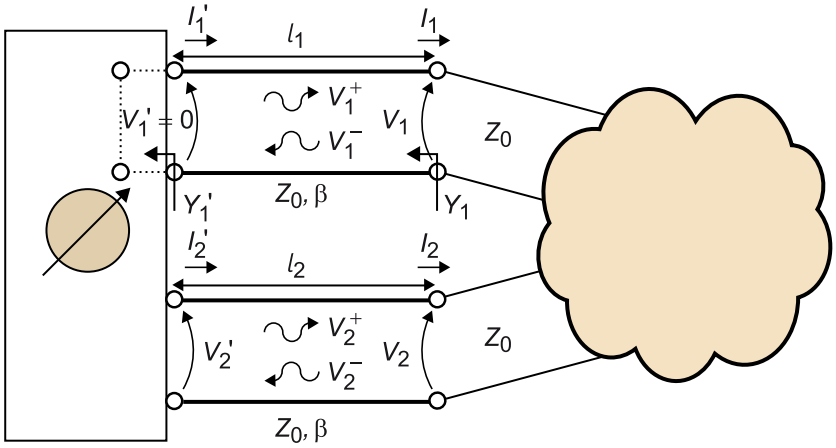


Figura 7. Mesura dels paràmetres Y_{12} i Y_{22} d'una xarxa de dos ports, en la qual el port 1 presenta un curtcircuit



Per tant, tenim els mateixos problemes que en la mesura dels paràmetres Z. Als ports de la xarxa no hi haurà un curtcircuit, sinó una impedància imaginària que dependrà de la longitud de l'LT ($Y_1 \neq Y_1$' i $Y_2 \neq Y_2$'), i els valors de tensió i corrent mesurats V_1',V_2', I_1' i I_2', en comptes de V_1,V_2, I_1 i I_2.

Una manera d'evitar aquests problemes és utilitzar dispositius de sintonització que s'han d'ajustar per a cada freqüència perquè la xarxa vegi als seus ports un circuit obert o un curtcircuit (en funció de la mesura que vulguen realitzar, Z o Y, respectivament), fet que representa una feina incòmoda, tediosa i no gaire

pràctica. Queda patent, doncs, la limitació d'aquests paràmetres quan s'han de caracteritzar xarxes a freqüències de microones i, en conseqüència, la necessitat d'un nou tipus de caracterització de dispositius més adequada. A més, en molts elements guiats de microones és problemàtic definir les impedàncies i, també, les tensions i els corrents (per exemple, en una guia d'ones rectangular). El que sí que es pot definir són els coeficients de reflexió i transmissió sobre els camps elèctrics del seu interior. Per tant, caracteritzar aquests circuits a partir de tensions, corrents i impedàncies sembla menys adequat que fer-ho a partir d'ones i coeficients de reflexió.

2. Paràmetres *S* d'una xarxa de microones

Ja s'han vist les limitacions que presenta una mesura de paràmetres Z o Y a freqüències de microones, ja que els efectes de propagació causats per les LT utilitzades en la mesura dificulten l'obtenció d'un resultat acurat. Per a millorar la caracterització de dispositius a aquestes freqüències cal un sistema de mesura diferent que no es basi en tensions i corrents. Com que sabem que en les LT del mesurador es propaguen ones progressives i regressives de tensió (aquestes últimes originades per la reflexió de l'ona progressiva al final de l'LT en funció de la impedància d'entrada que presenti la xarxa de microones), podríem mirar d'utilitzar-les per a caracteritzar la xarxa. Els paràmetres que relacionen les ones de tensió als diferents ports de la xarxa s'anomenen ***paràmetres S***[1], i en aquest apartat s'analitzaran amb detall.

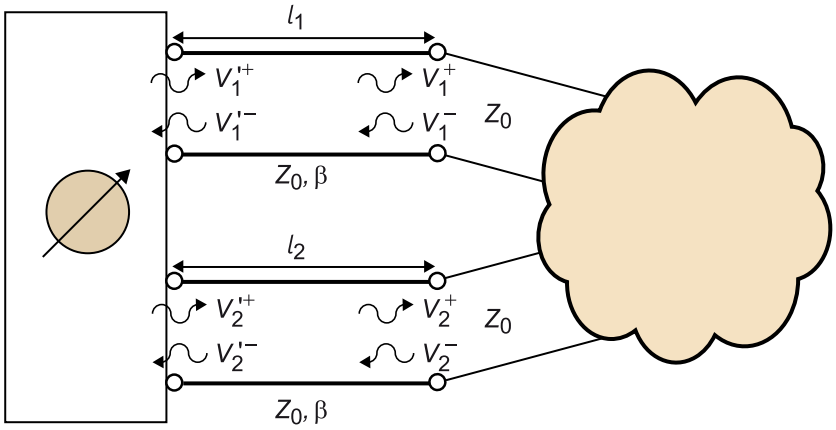
(1)Nomenclatura que prové d'*scattering parameters*, és a dir, 'paràmetres de dispersió'.

Per a presentar les característiques d'aquests nous paràmetres de manera estructurada, aquest apartat s'ha organitzat tal com s'explica a continuació. En el subapartat "Justificació de la caracterització d'una xarxa a partir d'ones de tensió" s'introdueixen els paràmetres S i se'n justifica l'ús. Per a considerar també la propagació de potència en la xarxa de microones, usarem les ones de tensió normalitzades a i b, definides en els subapartats "Definició de les ones a i b" i "Sentit físic de a i b", en comptes de les ones de tensió tradicionals V^+ i V^-. La relació d'aquestes ones ens la dóna el coeficient de reflexió generalitzat en el cas d'una xarxa d'un sol port (subapartat "Coeficient de reflexió generalitzat") o els paràmetres S generalitzats en el cas d'una xarxa de n ports (subapartat "Paràmetres S generalitzats"). Les propietats de la matriu de paràmetres S que caracteritzen xarxes recíproques, passives i sense pèrdues es descriuen en els subapartats "Xarxes passives i sense pèrdues" i "Xarxes recíproques". En el subapartat "Canvi del pla de referència" es presenta el càlcul per a modificar el pla de referència d'una matriu de paràmetres S que descrigui el comportament d'una xarxa de microones. I, finalment, en el subapartat "Punts clau" es fa referència als punts més importants que cal tenir ben clars d'aquest apartat.

2.1. Justificació de la caracterització d'una xarxa a partir d'ones de tensió

Per a comprovar si la caracterització a partir d'ones de tensió progressives i regressives ens comporta algun avantatge respecte dels paràmetres Z o Y, mirarem d'aplicar-ho a la xarxa de dos ports de la figura 2, en la qual els dos ports presenten la mateixa impedància característica Z_0. El sistema de mesura es mostra en la figura 8.

Figura 8. Sistema de mesura d'ones de tensió progressives i regressives



En aquest cas haurem de relacionar les ones de tensió incidents amb les ones de tensió reflectides en un port i les ones de tensió incidents amb les ones de tensió transmeses a l'altre port. Els paràmetres que relacionen aquestes ones de tensió els anomenem *paràmetres S*, i per al cas particular de la xarxa de la figura 8, aquesta relació queda reflectida en la equació següent:

$$\begin{bmatrix} V_1^- \\ V_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \end{bmatrix} \qquad 2.13$$

Per a mesurar cada un dels diferents paràmetres s'ha de complir que:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \left.\frac{V_1^-}{V_1^+}\right|_{V_2^+=0} ; \; S_{12} = \left.\frac{V_1^-}{V_2^+}\right|_{V_1^+=0} \\ S_{21} &= \left.\frac{V_2^-}{V_1^+}\right|_{V_2^+=0} ; \; S_{22} = \left.\frac{V_2^-}{V_2^+}\right|_{V_1^+=0} \end{aligned} \qquad 2.14$$

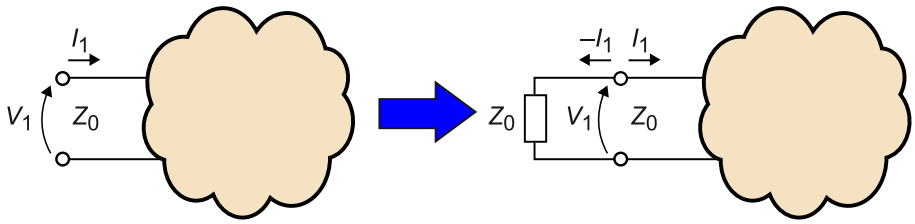
Per a aconseguir que $V_1^+ = 0$ i $V_2^+ = 0$, només cal connectar una impedància igual al valor de la impedància característica de l'LT del port 1 o 2, respectivament.

Vegeu també

Vegeu l'equació 2.44 de l'apartat "Concepte d'adaptació d'impedàncies" del mòdul "Línies de transmissió" d'aquest material didàctic.

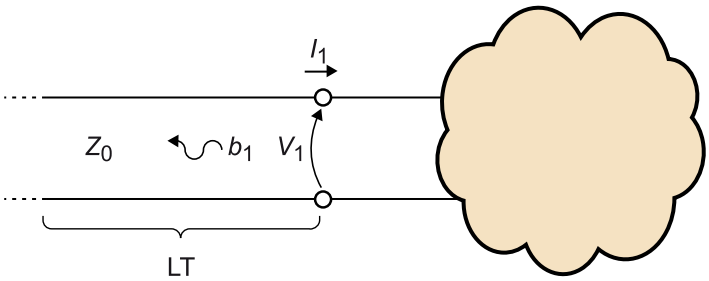
La figura 9 ho mostra gràficament en el cas d'una xarxa d'un port.

Figura 9. Adaptació del port d'una xarxa de microones



Així, per tal que $V^+ = 0$, cal connectar al port la impedància de referència del port. Físicament, això equival a connectar una línia semiinfinita d'impedància característica Z_0.

Figura 10. Circuit equivalent de la figura 9. Al port hi ha connectada una LT semiinfinita



Aquesta situació es coneix com a ***adaptació***, i la impedància utilitzada per a adaptar l'LT és la ***impedància de referència*** de la mesura.

Tot això implica que el nostre mesurador ha de presentar aquesta impedància al port 2 per a mesurar els paràmetres S_{11} i S_{21}, tal com es mostra en la figura 11. I al port 1 per a mesurar els paràmetres S_{12} i S_{22}, tal com es mostra en la figura 12.

Figura 11. Mesura dels paràmetres S_{11} i S_{21} d'una xarxa de dos ports

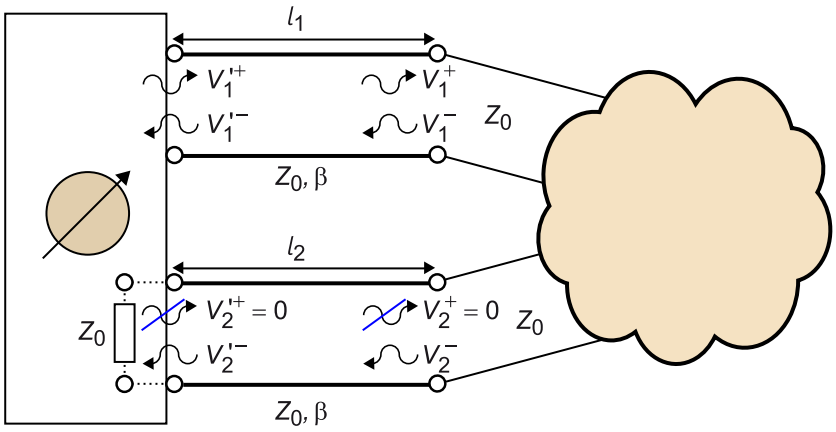
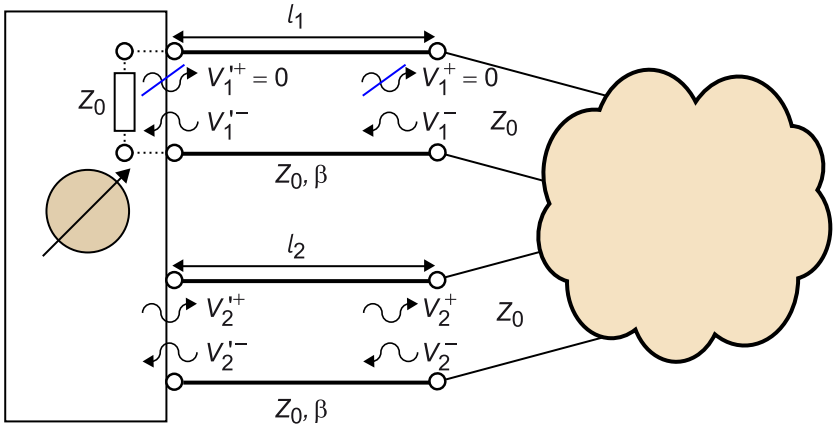


Figura 12. Mesura dels paràmetres S_{12} i S_{22} d'una xarxa de dos ports



L'avantatge principal és que és més fàcil implementar una impedància que presenti un valor constant en un cert marge de freqüències que un curtcircuit o un circuit obert, cosa que simplifica molt la mesura. A més, el valor d'aquesta impedància es reflecteix directament al port de la xarxa, ja que l'ona progressiva de l'LT adaptada és zero en qualsevol punt d'aquesta, sigui quina sigui la seva longitud. Tanmateix, es manté l'inconvenient que el mesurador mesura els senyals $V_1'^-$ i $V_2'^-$ en comptes de V_1^- i V_2^- (que són els que realment caracteritzen la xarxa). Però en el cas de les ones de tensió, aquest problema es resol fàcilment en considerar la longitud de les LT en la fase dels fasors de les ones de tensió, per la qual cosa la fase del coeficient de reflexió a l'inici (ρ') i al final (ρ) de les LT varia de manera:

$$\varphi_{\rho'} = \varphi_{\rho} - 2\beta l \qquad 2.15$$

Per tant, la caracterització a partir d'ones de tensió sembla molt més adequada que a partir de tensions i corrents, ja que els efectes de propagació introduïts per les LT que interconnecten la xarxa de microones amb el mesurador queden compensats de manera senzilla. A més, aquests paràmetres continuen modelitzant completament el comportament de la xarxa igual que feien els paràmetres *Z* o els paràmetres *Y*. És per aquest motiu que a freqüències de microones els paràmetres *S* són més adequats per a caracteritzar qualsevol tipus de xarxa o dispositiu.

2.2. Definició de les ones *a* i *b*

Acabem de veure com a partir dels paràmetres *S* podem relacionar les ones de tensió als diferents ports d'una xarxa de dos ports. Concretament, els paràmetres de transmissió s'havien definit com:

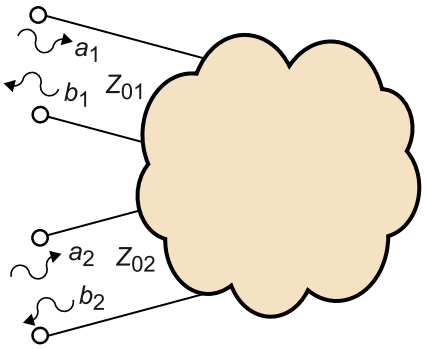
$$S_{12} = \left.\frac{V_1^-}{V_2^+}\right|_{V_1^+=0} \; ; \; S_{21} = \left.\frac{V_2^-}{V_1^+}\right|_{V_2^+=0} \qquad 2.16$$

Tenim, per tant, una relació en termes d'ones de tensió. Això, però, no ens dóna informació directa sobre la propagació de potència en el circuit, sovint molt més interessant, ja que no es reflecteix la impedància característica de l'LT per on viatja l'ona. Aquest fet és especialment important si les LT dels dos ports de la xarxa presenten impedàncies característiques diferents. Per a trobar una relació més adequada, en termes de potència, es defineix un nou conjunt d'ones que anomenarem ***ones normalitzades de tensió***:

$$a_i = \frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{0i}}} \qquad b_i = \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{0i}}} \qquad 2.17$$

en què a_i representa l'ona incident (normalitzada) al port i i b_i representa l'ona reflectida (normalitzada) del port i. En el cas de la xarxa de dos ports, aquest cop amb diferents impedàncies característiques a cada port, aquestes ones normalitzades quedarien reflectides tal com es mostra en la figura 13.

Figura 13. Definició de les ones normalitzades de tensió



I l'equació 2.16 queda modificada com:

$$S_{12} = \left.\frac{b_1}{a_2}\right|_{a_1=0} ; \; S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0} \qquad 2.18$$

que seria equivalent a:

$$S_{12} = \left.\frac{V_1^-\sqrt{Z_{02}}}{V_2^+\sqrt{Z_{01}}}\right|_{V_1^+=0} ; \; S_{21} = \left.\frac{V_2^-\sqrt{Z_{01}}}{V_1^+\sqrt{Z_{02}}}\right|_{V_2^+=0} \qquad 2.19$$

En conseqüència, els paràmetres de reflexió resten com:

$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} ; \; S_{22} = \left.\frac{b_2}{a_2}\right|_{a_1=0} \qquad 2.20$$

Les relacions establertes entre les ones normalitzades de tensió i tensió i corrent són:

$$V_i = V_i^+ + V_i^- = \sqrt{Z_{0i}}\left(a_i + b_i\right)$$
$$I_i = I_i^+ - I_i^- = \frac{1}{\sqrt{Z_{0i}}}\left(a_i - b_i\right) \qquad 2.21$$

en què *i* és la referència al port *i*. Si invertim les dependències:

$$a_i = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}}\left(V_i + Z_{0i}I_i\right)$$
$$b_i = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}}\left(V_i - Z_{0i}I_i\right) \qquad 2.22$$

Fixeu-vos que si volem conèixer la potència mitjana al port de la xarxa, la podem calcular directament com:

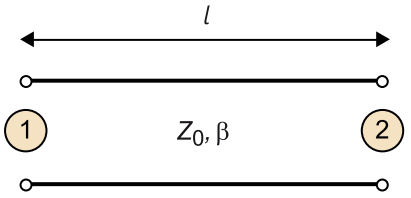
$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{V_i I_i^*\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{|a_i|^2 - |b_i|^2 + \left(b_i a_i^* - b_i^* a_i\right)\right\} = \frac{1}{2}|a_i|^2 - \frac{1}{2}|b_i|^2 \qquad 2.23$$

Aquest resultat ens indica que la potència mitjana entregada al port *i* és igual a la potència de l'ona incident menys la potència de l'ona reflectida. És per aquest motiu que les ones normalitzades *a* i *b* també s'anomenen *ones de potència*, ja que elevant-les al quadrat podem calcular fàcilment la potència mitjana. Si expresséssim aquest resultat en termes d'ones de tensió V_i^+ i V_i^-, el resultat ens quedaria en funció de la impedància característica del port *i*.

Per a començar a practicar amb aquests paràmetres calcularem els paràmetres *S* d'una LT en l'exemple següent.

A partir una LT sense pèrdues de longitud *l* i constant de fase β, com la de la figura 14,

Figura 14. LT de longitud *l*



calculeu-ne els paràmetres *S*.

Solució

Aquesta LT la podem veure com una xarxa de microones de dos ports i, en conseqüència, la podem caracteritzar amb una matriu de paràmetres *S* de 2 × 2:

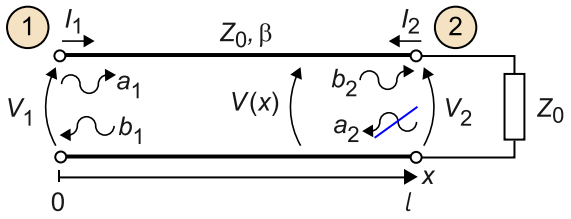
$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \qquad 2.24$$

Comencem calculant els paràmetres S_{11} i S_{21}, atès que tots dos comparteixen $a_2 = 0$, amb:

$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} ;\ S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0} \qquad 2.25$$

Per tant, adaptem el port 2 de l'LT. El subíndex de cada ona es defineix segons el port, tal com es mostra en la figura 15.

Figura 15. Adaptem el port 2 per a calcular els paràmetres S_{11} i S_{21}



De 2.21 sabem que:

$$V_1 = V(0) = V_1^+ e^{-j\beta 0} + V_1^- e^{j\beta 0} = V_1^+ + V_1^- = \sqrt{Z_0}\left(a_1 + b_1\right) \qquad 2.26$$

$$V_2 = V(l) = V_1^+ e^{-j\beta l} + V_1^- e^{j\beta l} = V_2^+ + V_2^- = \sqrt{Z_0}\left(a_2 + b_2\right) \qquad 2.27$$

Com que tenim el port 2 adaptat, per força:

$$V_1^-(x) = 0\big|_{x\in[0,l]} \rightarrow b_1 = \frac{V_1^-}{\sqrt{Z_0}} = 0 \rightarrow S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = 0 \qquad 2.28$$

Per a trobar b_2, utilitzem V_2:

$$V_2 = V(l) = V_1^+ e^{-j\beta l} + V_1^- e^{j\beta l} = V_1^+ e^{-j\beta l} = \sqrt{Z_0}\, a_1 e^{-j\beta l} = \sqrt{Z_0}\, b_2 \rightarrow b_2 = a_1 e^{-j\beta l} \qquad 2.29$$

Per tant:

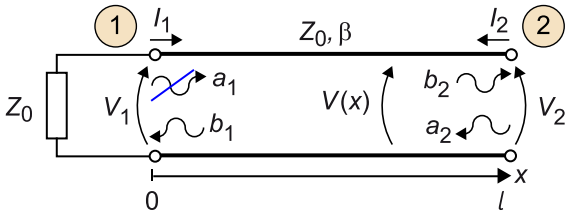
$$S_{21} = e^{-j\beta l} \qquad 2.30$$

Procedim ara amb el càlcul dels dos paràmetres restants, S_{12} i S_{22}, amb:

$$S_{12} = \left.\frac{b_1}{a_2}\right|_{a_1=0} ;\ S_{22} = \left.\frac{b_2}{a_2}\right|_{a_1=0} \qquad 2.31$$

Per tal que $a_1 = 0$, cal adaptar el port 1. El circuit restant i la definició d'ones es mostra en la figura 16.

Figura 16. Adaptem el port 1 per a calcular els paràmetres S_{21} i S_{22}



Es pot observar que el circuit és simètric al de la figura 15. Per tant, el càlcul dels paràmetres és anàleg al de les equacions 2.26-2.31. En aquest cas obtindríem que:

$$S_{22} = 0 \qquad 2.32$$

$$S_{12} = e^{-j\beta l} \qquad 2.33$$

Unificant els resultats en una única matriu obtenim:

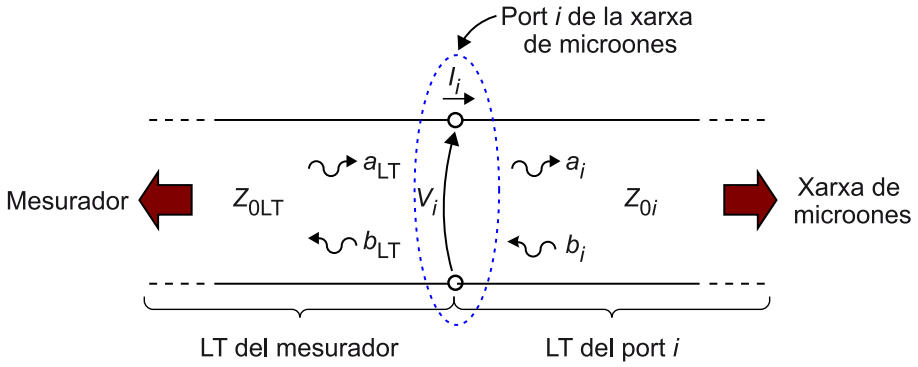
$$[S] = e^{-j\beta l}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad 2.34$$

Aquest resultat ens diu que una LT desfasa les ones que hi circulen del port 1 al 2 o del 2 a l'1, un valor de -β*l* radians.

2.3. Sentit físic de *a* i *b*

Les ones *a* i *b* en qualsevol port d'una xarxa només tindran sentit físic si al port de la xarxa hi connectem una LT (LT del mesurador) amb la mateixa impedància característica que l'LT que constitueix el port (LT del port). Per exemple, en el cas del port *i* d'una xarxa de microones qualsevol, com es mostra en la figura 17, la impedància característica de l'LT hauria de ser Z_{0i} ($Z_{0LT} = Z_{0i}$).

Figura 17. LT connectada a una xarxa d'un sol port



a_i i b_i són les ones normalitzades de tensió presents al port *i* de la xarxa de microones, i a_{LT} i b_{LT} les ones normalitzades de tensió presents a l'LT del mesurador. Utilitzant les equacions 2.17 i 2.22, el valor d'aquestes ones just al port és:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}}\left(V_i + Z_{0i}I_i\right) = \frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{0i}}} \\ b_i &= \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}}\left(V_i - Z_{0i}I_i\right) = \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{0i}}} \end{aligned} \qquad 2.35$$

Fixeu-vos que els valors que mesura el mesurador són els proporcionats per la seva LT, és a dir, a_{LT} i b_{LT}, i, un cop es compensa de manera adequada aquesta LT (és a dir, es considera el desfasament introduït per l'LT), obtenim el valor de les ones a_i i b_i, ja que just abans i just després del port $a_{LT} = a_i$ i $b_{LT} = b_i$ (si i només si $Z_{0LT} = Z_{0i}$). Però si al port de la xarxa no hi ha una LT (el port *i* no està constituït per una LT) o la impedància característica de l'LT del port *i* no és la mateixa que la del port (en aquest cas, $Z_{0LT} \neq Z_{0i}$), llavors $a_{LT} \neq a_i$ i $b_{LT} \neq b_i$, i les ones que nosaltres estarem interpretant com a a_i i b_i no tindran sentit físic,

només matemàtic. Sí que continuaran tenint significat físic, però, els valors de la tensió V_i i del corrent I_i, que, coneixent els valors matemàtics de a_i i b_i, podem recuperar a partir de la transformació lineal de:

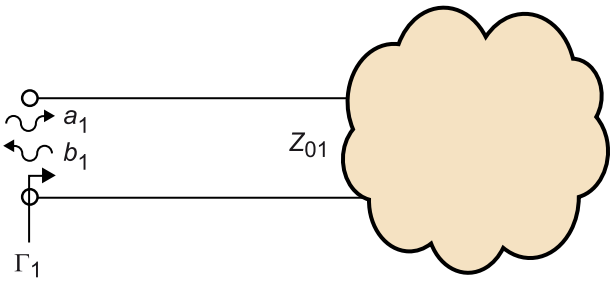
$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} \begin{bmatrix} 1 & Z_{0i} \\ 1 & -Z_{0i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ I_i \end{bmatrix} \qquad 2.36$$

Si, a més, es tracta d'una LT amb $Z_{0LT} \neq Z_{0i}$, llavors també tenim ones progressives i regressives, tot i que aquestes no tenen res a veure amb a_i i b_i.

2.4. Coeficient de reflexió generalitzat

Prenem com a partida la figura 18.

Figura 18. Coeficient de reflexió generalitzat en una xarxa de microones genèrica d'un sol port



Un cop definides les ones a i b, i observant la figura 18, podem definir el **coeficient de reflexió generalitzat** Γ com:

$$\Gamma_1 = \frac{\text{ona normalitzada que es propaga en el sentit contrari al qual mirem}}{\text{ona normalitzada que es propaga en el maiteix sentit que mirem}} = \frac{b_1}{a_1} \qquad 2.37$$

Si ens trobem en una situació en què el punt on considerem que comença el nostre port és una LT i desenvolupem aquesta definició, podem veure que:

$$\Gamma = \frac{b_1}{a_1} = \frac{\frac{V_1^-}{\sqrt{Z_{01}}}}{\frac{V_1^+}{\sqrt{Z_{01}}}} = \frac{V_1^-}{V_1^+} = \rho \equiv \text{coeficient de reflexió del port} \qquad 2.38$$

En un cas més general, a i b poden també no tenir sentit físic, sinó només matemàtic. En aquest cas no tenim clarament cap V^+ i V^- físiques. En qualsevol cas, sempre es compleix que:

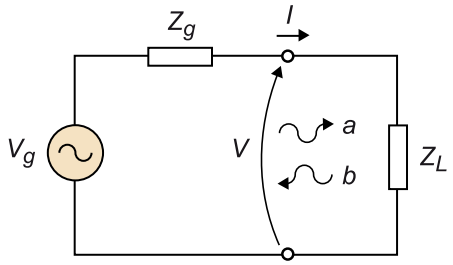
$$\Gamma = \frac{b_1}{a_1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{Z_{01}}}(V_1 - Z_{01}I_1)}{\frac{1}{2\sqrt{Z_{01}}}(V_1 + Z_{01}I_1)} = \frac{V_1 - Z_{01}I_1}{V_1 + Z_{01}I_1} = \frac{V_1/I_1 - Z_{01}}{V_1/I_1 + Z_{01}} = \frac{Z_1 - Z_{01}}{Z_1 + Z_{01}} = \frac{Y_{01} - Y_1}{Y_{01} + Y_1} \qquad 2.39$$

$$Z_1 = Z_{01}\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$$

A continuació es presenta un exemple d'una situació molt habitual: un generador i una impedància de generador (que poden representar el model de Thévenin d'un dispositiu generador qualsevol) carregat amb una impedància (que pot representar la impedància d'entrada d'una altra xarxa de microones).

Considerem el circuit de la figura 19, format per un generador i una càrrega qualsevol:

Figura 19. Circuit genèric format per l'equivalent de Thévenin d'un generador i d'una càrrega



Calculeu el valor de les ones a i b a partir de la definició de coeficient de reflexió generalitzat.

Solució

Si analitzem el circuit, obtenim:

$$V = V_g - Z_g I \qquad 2.40$$

Si substituïm les definicions de V i I en funció de les ones a i b de l'equació 2.21, obtenim:

$$\sqrt{Z_0}(a+b) = V_g - \frac{Z_g}{\sqrt{Z_0}}(a-b) \qquad 2.41$$

Aïllant a en funció de b:

$$a = \underbrace{\frac{V_g}{\sqrt{Z_0}}\frac{Z_0}{Z_g+Z_0}}_{b_s} + b\underbrace{\frac{Z_g - Z_0}{Z_g+Z_0}}_{\Gamma_g} = b_s + b\Gamma_g \qquad 2.42$$

Per altra banda, la càrrega ens fixa la relació:

$$b = \Gamma_L a \qquad 2.43$$

Tenim, per tant, un sistema de dues equacions i dues incògnites. Si el solucionem obtenim:

$$a = b_s\frac{1}{1-\Gamma_g\Gamma_L} \qquad b = b_s\frac{\Gamma_L}{1-\Gamma_g\Gamma_L} \qquad 2.44$$

en què:

$$b_s = \frac{V_g}{\sqrt{Z_0}} \frac{Z_0}{Z_g + Z_0}$$
$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} \qquad 2.45$$
$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Si la càrrega conté una LT d'impedància característica Z_0, b_s és l'ona progressiva que el generador entregaria a la càrrega en l'instant inicial. Per al cas en què $\Gamma_g = 0$, llavors:

$$a = b_s = \frac{1}{2} \frac{V_g}{\sqrt{Z_0}} \qquad 2.46$$

Això implica que el generador és capaç de generar *a* independentment de la càrrega que hi hagi connectada. És el que s'anomena ***generador canònic***.

Dos casos més que es poden donar són:

1) Que no tinguem ona reflectida ($\Gamma_L = 0$). En aquest cas:

$$a = b_s = \frac{1}{2} \frac{V_g}{\sqrt{Z_0}} (1 - \Gamma_g) \qquad 2.47$$
$$b = 0$$

2) Que tinguem màxima transferència de potència ($Z_L = Z_g^*$). En aquest cas:

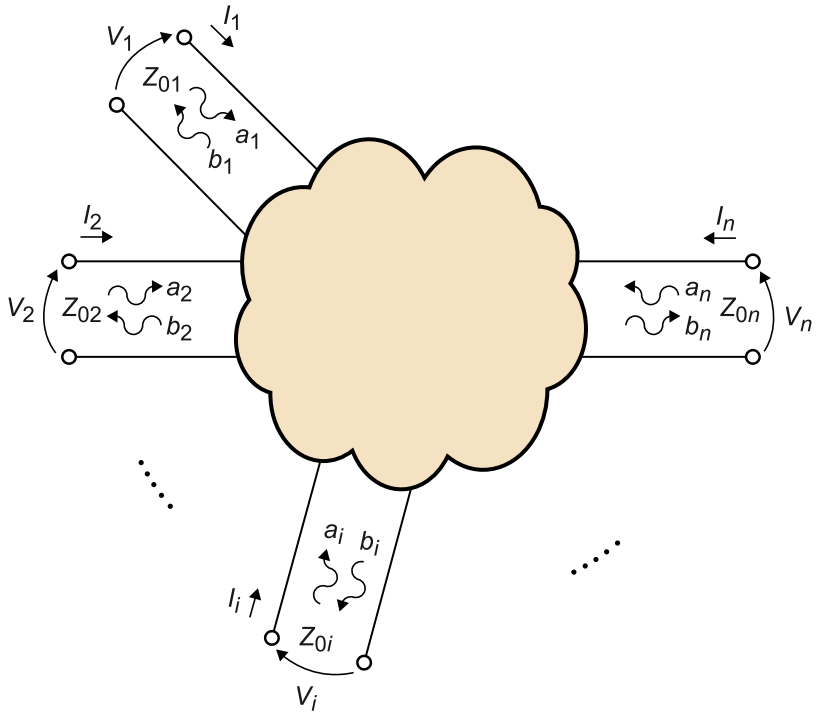
$$a = b_s \frac{1}{1 - |\Gamma_g|^2}$$
$$b = b_s \frac{\Gamma_g^*}{1 - |\Gamma_g|^2} \qquad 2.48$$

Per tant, màxima transferència de potència i adaptació són, en general, fenòmens diferents.

2.5. Paràmetres *S* generalitzats

El coeficient de reflexió generalitzat ens relaciona l'ona incident *a* amb l'ona reflectida *b* en una xarxa d'un port. En una situació més general com la de la figura 20, en la qual tenim una xarxa de *n* ports, utilitzarem també la relació d'ones normalitzades de tensió *a* i *b* per a caracteritzar-la.

Figura 20. Xarxa de microones genèrica de *n* ports



Definirem $\boldsymbol{a_i}$ **sempre** com l'ona **entrant** al port *i*, i $\boldsymbol{b_i}$ com l'ona **sortint** del port *i*, tal com s'observa en la figura 20.

Es continua complint que:

$$a_i = \frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{0i}}} \qquad b_i = \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{0i}}} \qquad 2.49$$

I la relació d'ones incidents i reflectides entre qualsevol port és determinada pels paràmetres *S*. La seva matriu queda definida com:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ S_{n1} & \cdots & & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad 2.50$$

o, de manera matricial:

$$[b] = [S][a] \qquad 2.51$$

A més, en la majoria dels casos $Z_{0i} = Z_0$, és a dir, hi ha una impedància característica igual en tots els ports. En aquest cas, si introduïm l'equació 2.49 en l'equació 2.51 es compleix que la relació d'ones de tensió queda determinada per la mateixa matriu de paràmetres *S*, és a dir:

$$[V^-]=[S][V^+] \qquad 2.52$$

en què $[V^+]$ és el vector d'ones de tensió incidents i $[V^-]$ el vector d'ones de tensió reflectides o transmeses.

Els paràmetres *S* indiquen, per tant, els diferents camins que segueixen les ones *a* per a arribar a una sortida. De l'equació 2.50 s'extreu que:

- Els paràmetres S_{ii} són paràmetres de reflexió al port *i*, que es poden calcular amb:

$$S_{ii}=\left.\frac{b_i}{a_i}\right|_{a_k=0 \text{ per } k\neq i} \qquad 2.53$$

  Aquest paràmetre també es pot representar amb $S_{ii} = \Gamma_i$, si i només si la resta de ports estan adaptats.

- Els paràmetres S_{ij} són paràmetres de transmissió del port *j* al port *i*, que es poden calcular amb:

$$S_{ij}=\left.\frac{b_i}{a_j}\right|_{a_k=0 \text{ per } k\neq j} \qquad 2.54$$

Per a aconseguir $a_k = 0$ necessitarem connectar alguna terminació al port *k*:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\sqrt{Z_{0k}}}\left(V_k+Z_{0k}I_k\right)=0 \\ V_k &= -Z_{0k}I_k \\ \frac{V_k}{-I_k} &= Z_{0k} \end{aligned} \qquad 2.55$$

Per tant, igual que quan parlàvem d'ones de tensió, només cal connectar una impedància igual a la impedància característica de l'LT, és a dir, només cal adaptar-la.

Un punt important que cal entendre dels paràmetres *S* és que en una situació real (en la qual els ports de la xarxa de microones estan connectats a altres circuits), el coeficient de reflexió del port *i* no ha de ser necessàriament igual a S_{ii}. De fet, només coincidiran si la resta de ports estan adaptats. Anàlogament, el coeficient de transmissió del port *j* al port *i* només coincidirà en el paràmetre S_{ij} si la resta de ports estan adaptats. Els paràmetres *S* d'una xarxa només estan definits per a una impedància de referència única a cada port. Si aquesta varia en un o

més ports, els paràmetres *S* no varien, però sí que ho fan els coeficients de reflexió i de transmissió.

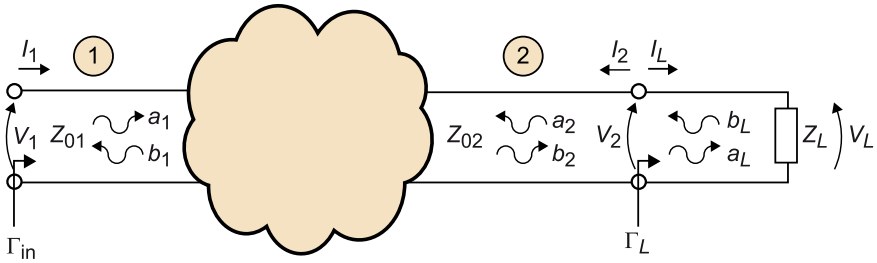
Comprovem-ho amb un exemple pràctic.

Per al cas senzill d'una xarxa de dos ports carregada amb impedàncies als dos ports, calculeu els coeficients de reflexió de cada port amb aquestes condicions.

Solució

Considerem la xarxa de la figura 21, carregada amb una impedància de valor Z_L al port 2. Aquesta impedància podria modelitzar, per exemple, la impedància d'entrada d'una altra xarxa de dos ports, una antena o qualsevol altre tipus de circuit.

Figura 21. Xarxa de dos ports carregada al port 2



Segons l'equació 2.50, la xarxa quedaria caracteritzada amb:

$$b_1 = a_1 S_{11} + a_2 S_{12} \qquad 2.56$$

$$b_2 = a_1 S_{21} + a_2 S_{22} \qquad 2.57$$

La xarxa, juntament amb la càrrega Z_L, es comporta com una nova càrrega que podem modelitzar a partir del seu coeficient de reflexió:

$$\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1} \qquad 2.58$$

Per altra banda, tenim que:

$$\Gamma_L = \frac{b_L}{a_L} = \frac{Z_L - Z_{02}}{Z_L + Z_{02}} \qquad 2.59$$

Observant la figura 21 veiem que aquesta equació la podem reescriure com:

$$\Gamma_L = \frac{b_L}{a_L} = \frac{a_2}{b_2} \rightarrow a_2 = \Gamma_L b_2 \qquad 2.60$$

Ara podem treballar una mica les equacions 2.56 i 2.57, de manera que:

$$b_1 = a_1 S_{11} + a_2 S_{12} = a_1 S_{11} + \Gamma_L b_2 S_{12} \qquad 2.61$$

$$b_2 = a_1 S_{21} + a_2 S_{22} = a_1 S_{21} + \Gamma_L b_2 S_{22} \qquad 2.62$$

Si aïllem b_2 en l'equació 2.62 i ho introduïm a l'equació 2.61, obtenim:

$$b_2 = \frac{a_1 S_{21}}{1 - \Gamma_L S_{22}} \qquad 2.63$$

$$b_1 = a_1 S_{11} + \Gamma_L S_{12} \frac{a_1 S_{21}}{1 - \Gamma_L S_{22}} \qquad 2.64$$

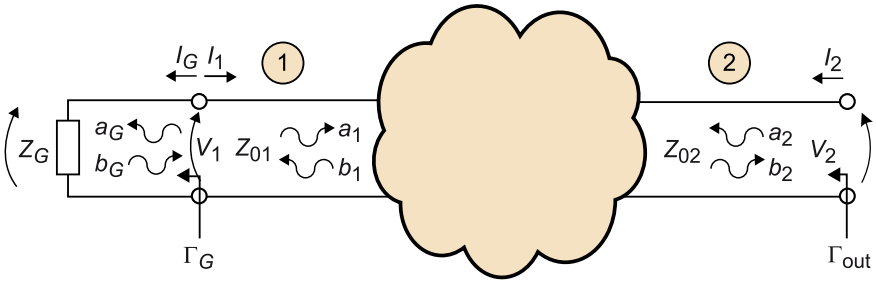
Ara podem aïllar el coeficient de reflexió com:

$$\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - \Gamma_L S_{22}} \qquad 2.65$$

Per tant, es demostra que el coeficient de reflexió només serà igual al paràmetre S_{11} quan el port 2 estigui adaptat, és a dir, quan $\Gamma_L = 0$. Alternativament, també seria equivalent a S_{11} si $S_{12} = 0$ o $S_{21} = 0$. Aquest cas es donarà quan no hi hagi pas de senyal d'un port a l'altre. Podria ser el cas d'un filtre fora de la banda de pas. Per a la resta de casos, $\Gamma_{in} \neq S_{11}$.

Anàlogament, podríem seguir el mateix procediment per al port 2, començant per carregar el port 1, tal com es mostra en la figura 22.

Figura 22. Xarxa de dos ports carregada al port 1



Definint:

$$\Gamma_G = \frac{b_G}{a_G} = \frac{Z_G - Z_{01}}{Z_G + Z_{01}} \qquad 2.66$$

obtenim que:

$$\Gamma_{out} = \frac{b_2}{a_2} = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_G}{1 - \Gamma_G S_{11}} \qquad 2.67$$

Es torna a demostrar que el coeficient de reflexió al port 2 depèn de Γ_G i, en conseqüència, de Z_G. Per als casos en què $S_{12} \neq 0$ i $S_{21} \neq 0$, el coeficient de reflexió només serà igual a S_{22} quan $Z_G = Z_{01}$.

2.6. Xarxes passives i sense pèrdues

Una xarxa de microones com la de la figura 20 es considera **passiva** si no amplifica la potència del senyal incident, i **sense pèrdues** si tampoc no l'atenua. Amb aquestes condicions, la matriu $[S]$ és unitària:

$$[S][S]^H = [S]^H [S] = [Id] \qquad 2.68$$

en què $[\boldsymbol{S}]^{\boldsymbol{H}}$ és la **matriu hermítica de *S*** (transposada conjugada de S, $[S]^H = ([S]^t)^*$) i $[\boldsymbol{Id}]$ és la **matriu identitat**.

Aquesta igualtat es deriva de la demostració següent. En una xarxa passiva i sense pèrdues, tota la potència incident es reflecteix o es transmet a un altre port, cosa que implica:

$$P_{\text{in}} = P_{\text{out}} \qquad 2.69$$

Sigui:

$$P_{\text{in}} = \sum_{i=1}^{n} P_i^+ = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}|a_i|^2 \qquad 2.70$$

i

$$P_{\text{out}} = \sum_{i=1}^{n} P_i^- = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}|b_i|^2 \qquad 2.71$$

Llavors:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}|a_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}|b_i|^2 \qquad 2.72$$

$|a_i|^2$ el podem descompondre com el producte de $a_i^* \cdot a_i$, en què a_i^* és l'hermític de a_i. I podem fer el mateix amb $|b_i|^2$, com el producte de $b_i^* \cdot b_i$, en què b_i^* és l'hermític de b_i. Per tant:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}|a_i|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} a_i^* \cdot a_i \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}|b_i|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} b_i^* \cdot b_i \end{aligned} \qquad 2.73$$

Si introduïm les igualtats de l'equació 2.73 a l'equació 2.72, llavors:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} a_i^* \cdot a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} b_i^* \cdot b_i \qquad 2.74$$

Aquesta equació la podem expressar en format vectorial com:

$$[a]^H [a] = [b]\,[b]^H \qquad 2.75$$

Tenint en compte que:

$$[b] = [S]\,[a] \qquad 2.76$$

i que:

$$(A \cdot B)^H = B^H \cdot A^H \qquad 2.77$$

es compleix que:

$$[b]^H = [a]^H [S]^H \qquad 2.78$$

Per tant:

$$[a]^H [a] = [b]\,[b]^H = [a]^H [S]^H [S]\,[a] \qquad 2.79$$

Aquesta igualtat només pot ser certa si:

$$[S]\,[S]^H = [S]^H [S] = [Id] \qquad 2.80$$

Com es volia demostrar, si multipliquem una matriu de paràmetres S, $[S]$, passiva i sense pèrdues per la seva matriu hermítica, $[S]^H$, obtenim la matriu identitat. Per tant, $[S]$ és unitària. Si desenvolupem el contingut de les matrius de l'expressió 2.80 obtenim:

$$[S]\,[S]^H = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \cdots \\ \vdots & \ddots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11}^* & \cdots \\ S_{12}^* & \ddots \\ S_{13}^* & \\ \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \qquad 2.81$$

I, per tant, es desprèn que:

$$\sum_{j=1}^{n} S_{ij} S_{ij}^* = \sum_{j=1}^{n} |S_{ij}|^2 = 1 \qquad \forall\, i = 1 \cdots n \qquad 2.82$$

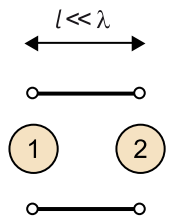
Si us hi fixeu, aquesta última equació ens torna a dir que en una xarxa passiva i sense pèrdues tota la potencia incident o bé es reflecteix (expressat amb el terme $|S_{ii}|^2$), o bé es transmet (expressat amb els termes $|S_{ij}|^2_{\text{per } j \neq i}$). En cas que la xarxa fos passiva i presentés pèrdues, el resultat del sumatori seria inferior a 1. En cas que fos activa i sense pèrdues, el resultat seria superior a 1.

Un gran avantatge dels paràmetres S que caracteritzen una xarxa passiva és que aquests tenen un mòdul acotat entre 0 i 1, i sempre es poden calcular i mesurar. A més, els paràmetres Z i Y no estan acotats (la part real estarà compresa entre 0 i ∞, i la part imaginària entre -∞ i ∞), i per tant en alguns circuits les matrius d'aquests paràmetres poden ser singulars o estar mal condicionades.

En l'exemple següent calcularem els paràmetres *Z* i *S* d'un circuit. Veurem com en aquest cas el circuit no té matriu de paràmetres *Z*, però sí de paràmetres *S*.

Moltes vegades no tenim un circuit únic per analitzar, sinó diversos circuits interconnectats entre ells i amb connectors que formen una xarxa de circuits. Per a analitzar el comportament d'aquesta xarxa ens pot interessar caracteritzar-ne el connector d'alguna manera. A continuació caracteritzarem el cas senzill d'un connector de dos ports elèctricament petit, és a dir, un connector per al qual no considerarem els efectes de propagació, com el de la figura 23.

Figura 23. Connector de dos ports elèctricament petit



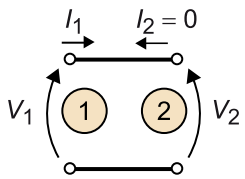
Solució

Comencem caracteritzant-lo amb la matriu de paràmetres *Z*. Els primers paràmetres que calculem són:

$$Z_{11}=\left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0};\ Z_{21}=\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \qquad 2.83$$

Per a fer que $I_2 = 0$ hem de deixar el port 2 en circuit obert:

Figura 24. El port 2 el deixem en circuit obert per a calcular els paràmetres Z_{11} i Z_{21}



Fixeu-vos, però, que si $I_2 = 0$, llavors també $I_1 = 0$. Això implica que els paràmetres de l'equació 2.83 queden:

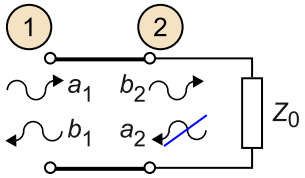
$$\begin{aligned} Z_{11}&=\left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}=\infty \\ Z_{21}&=\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}=\infty \end{aligned} \qquad 2.84$$

Anàlogament, obtenim el mateix resultat per als paràmetres Z_{12} i Z_{22}, i una matriu:

$$Z=\begin{bmatrix}\infty & \infty \\ \infty & \infty\end{bmatrix} \qquad 2.85$$

Per tant, aquest circuit no el podem caracteritzar amb els paràmetres *Z*. Mirem que passa amb els paràmetres *S*. Comencem carregant el port 2 amb una impedància de referència Z_0:

Figura 25. Carreguem el port 2 amb una impedància de referència Z_0

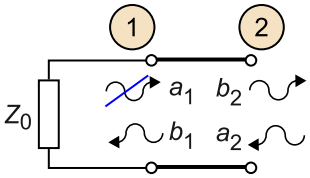


En aquest cas:

$$S_{11}=\frac{b_1}{a_1}\bigg|_{a_2=0}=\frac{a_2}{a_1}=0$$
$$S_{21}=\frac{b_2}{a_1}\bigg|_{a_2=0}=\frac{a_1}{a_1}=1 \qquad 2.86$$

I, si carreguem el port 1:

Figura 26. Carreguem el port 1 amb una impedància de referència Z_0



Obtenim:

$$S_{12}=\frac{b_1}{a_2}\bigg|_{a_1=0}=\frac{a_2}{a_2}=1$$
$$S_{22}=\frac{b_2}{a_2}\bigg|_{a_1=0}=\frac{a_1}{a_2}=0 \qquad 2.87$$

I la matriu total de paràmetres S ens queda:

$$S=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \qquad 2.88$$

Hem pogut calcular, per tant, els paràmetres S d'un circuit que no té matriu de paràmetres Z. Aquests paràmetres els podem calcular i mesurar amb qualsevol tipologia de circuit, ja que sempre obtindrem un resultat acotat entre 0 i 1, mentre que els paràmetres Z o Y no es poden trobar en tots els casos.

2.7. Xarxes recíproques

Una xarxa de microones serà **recíproca** si la seva matriu de paràmetres S, $[S]$, és una matriu simètrica: $S_{ij} = S_{ji}$ ($\forall\ i \neq j$).

La xarxa de la figura 20 pot ser recíproca si no conté elements com transistors, ferrites o díodes en funcionament no lineal.

Ja hem vist com podem determinar algunes característiques de la matriu de paràmetres *S* d'un circuit, com ara conèixer si aquesta és passiva, sense pèrdues o recíproca. Ara ho aplicarem a un exemple.

Una xarxa de dos ports té la matriu de paràmetres *S* següent:

$$[S]=\begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}85e^{-j\frac{\pi}{4}} \\ 0{,}85e^{j\frac{\pi}{4}} & 0{,}2 \end{bmatrix} \qquad 2.89$$

Determineu si aquesta matriu és recíproca, passiva i sense pèrdues.

Solució

Atès que [*S*] no és simètrica ($S_{12} \neq S_{21}$), la xarxa no és recíproca. Per a ser una xarxa passiva i sense pèrdues, la matriu de paràmetres *S* hauria de complir l'equació 2.82. Si l'apliquem a aquest cas:

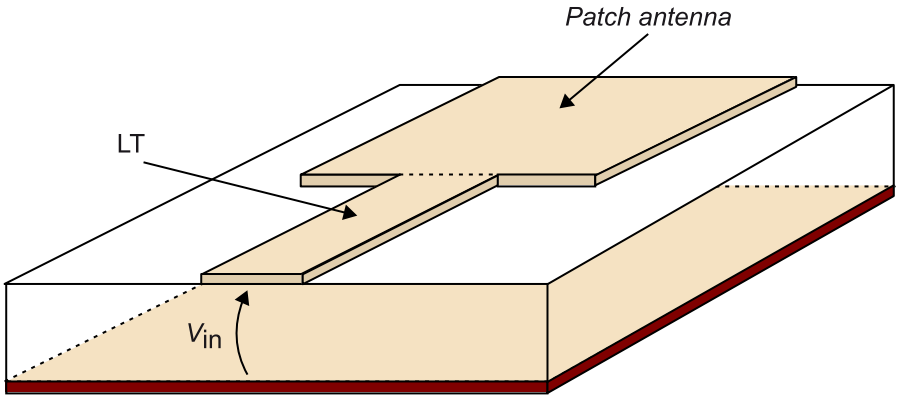
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |S_{1j}|^2 &= |0{,}15|^2 + |0{,}85|^2 = 0{,}74 < 1 \\ \sum_{j=1}^{n} |S_{2j}|^2 &= |0{,}85|^2 + |0{,}2|^2 = 0{,}76 < 1 \end{aligned} \qquad 2.90$$

Atès que la suma de la potència reflectida i transmesa en tots dos casos és inferior a la potència incident (ja que la relació és inferior a la unitat), es tracta d'una xarxa passiva amb pèrdues, cosa que implica que algun element de la xarxa que modelitza aquesta matriu o bé té pèrdues o bé radia energia.

2.8. Canvi del pla de referència

Sovint pot succeir que la xarxa de microones no sigui directament accessible i calgui fer un canvi del pla de referència (punt a partir del qual es mesuren els paràmetres *S*). Per exemple, imagineu el cas d'una antena *microstrip* com la que es mostra en la figura 27.

Figura 27. Antena *microstrip* amb línia de transmissió d'entrada

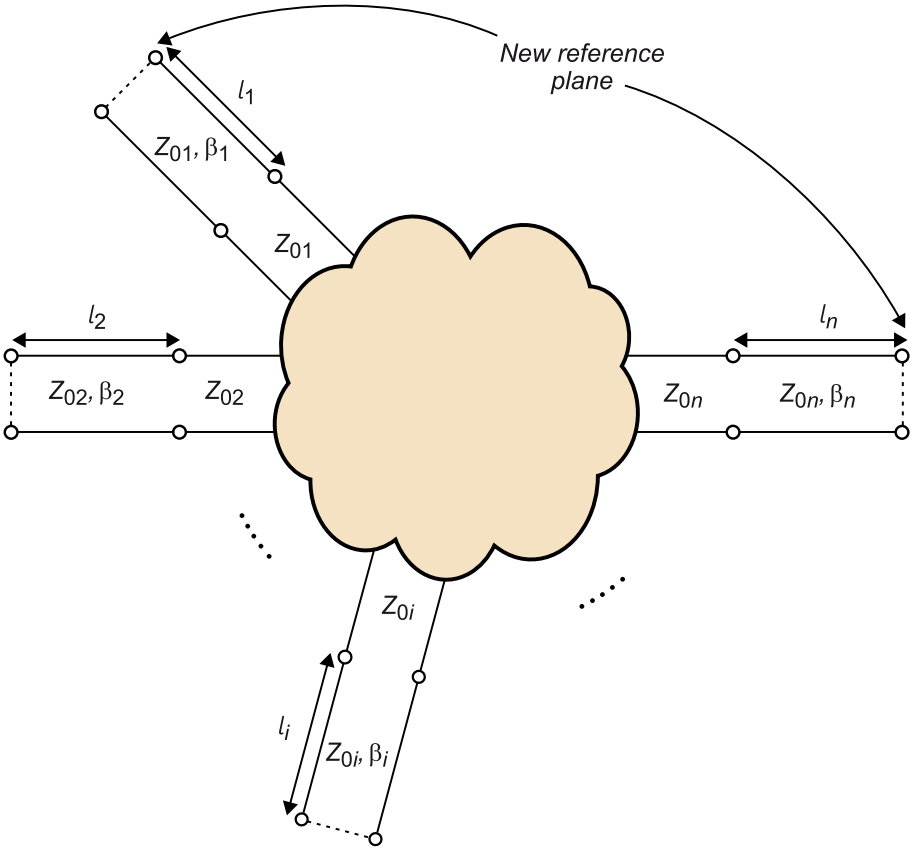


Aquesta antena està alimentada per una línia de transmissió (també *microstrip*) que de cap manera no es pot desconnectar de l'antena, ja que en realitza l'adaptació. Atès que no podem connectar físicament el mesurador de paràmetres *S* directament a l'antena, aquesta línia de transmissió introduirà un efecte

sobre la mesura (principalment sobre la fase dels paràmetres *S*, si considerem que no té pèrdues). Per tant, hem de tenir en compte aquest efecte a l'hora de considerar els paràmetres obtinguts.

Un cas més general és el que es mostra en la figura 28, en la qual tenim una xarxa de microones de *n* ports, tots connectats a una línia de transmissió d'impedància característica Z_{0i} igual a la de referència del port *i*.

Figura 28. Canvi de pla de referència d'una xarxa de *n* ports



Els nous ports, situats al nou pla de referència (figura 28), tenen també una impedància de referència Z_{0i}. Si representem l'antiga matriu de paràmetres *S* (sense línies de transmissió) com [*S*], i la nova matriu de paràmetres *S* (amb línies de transmissió) com [*S*'], es compleix la relació següent:

$$S'_{ij} = S_{ij} e^{-j(\beta_i l_i + \beta_j l_j)}$$
$$S'_{ii} = S_{ii} e^{-j2\beta_i l_i} \qquad 2.91$$

Apliquem aquest resultat a un exemple.

Un mesurador de paràmetres *S* sense calibrar ens dóna una matriu d'un dispositiu de dos ports com ara:

$$[S'] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-j\frac{4\pi}{3}} & e^{-j\frac{5\pi}{3}} \\ e^{-j\frac{5\pi}{3}} & e^{-j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \qquad 2.92$$

Si per a la mesura hem utilitzat dos cables coaxials de longitud λ/3 exactament iguals, trobeu la matriu de paràmetres *S* real del dispositiu.

Solució

Per a resoldre el problema utilitzarem l'equació 3.79, però haurem d'invertir les dependències. Fixeu-vos que els paràmetres *S* de l'enunciat estan mesurats als extrems dels cables de l/3, i ens demana extreure l'efecte d'aquests cables, és a dir, moure el pla de referència als ports de la xarxa (el que tenim són els paràmetres *S'* i volem trobar els paràmetres *S*). Podem començar, per exemple, amb el paràmetre S_{12}:

$$\frac{e-j\frac{5\pi}{3}}{\sqrt{2}} = S_{12}e-j\left(\beta_1 l_1+\beta_2 l_2\right) = S_{12}e-j\beta\left(l_1+l_2\right) = S_{12}e-j2\beta l \rightarrow$$
$$\rightarrow S_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}e-j\frac{5\pi}{3}ej2\beta l = \frac{1}{\sqrt{2}}e-j\frac{5\pi}{3}ej2\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}e-j\frac{5\pi}{3}ej\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}ej\frac{\pi}{3} \qquad 2.93$$

I podem seguir el mateix procediment amb el paràmetre S_{11}:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e-j\frac{4\pi}{3} = S_{11}e-j2\beta l_1 \rightarrow$$
$$\rightarrow S_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}e-j\frac{4\pi}{3}ej2\beta l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e-j\frac{4\pi}{3}ej2\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad 2.94$$

Com que la matriu és simètrica, obtindrem els mateixos resultats per als paràmetres S_{21} i S_{22}, respectivament. Per tant, la matriu del dispositiu sense l'efecte dels cables és:

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & ej\frac{\pi}{3} \\ ej\frac{5\pi}{3} & 1 \end{bmatrix} \qquad 2.95$$

2.9. Punts clau

En aquest apartat s'han introduït els paràmetres *S*. Els punts més destacats que cal tenir ben clars són:

- Els paràmetres *S* estableixen relacions d'ones de tensió normalitzades incidents (*a*) amb ones de tensió normalitzades sortints (*b*).

- Aquests paràmetres caracteritzen completament el comportament d'una xarxa de microones i són més fàcils de mesurar quan treballem a freqüències de microones.

- Les ones *a* i *b* ens donen informació directa sobre la propagació de potència si les elevem al quadrat, i només tenen sentit físic si al port *i* de la xarxa tenim una LT d'impedància característica Z_{0i}.

- El terme **adaptació** implica carregar una LT amb una impedància igual a la seva impedància característica.

- El coeficient de reflexió del port *i* només coincidirà amb el paràmetre S_{ii} si tenim la resta de ports adaptats.

- Una xarxa es considera passiva si no amplifica la potència del senyal incident, i sense pèrdues si tampoc no l'atenua. Una xarxa és recíproca si la seva matriu de paràmetres S és una matriu simètrica.

3. Càlcul dels paràmetres *S*

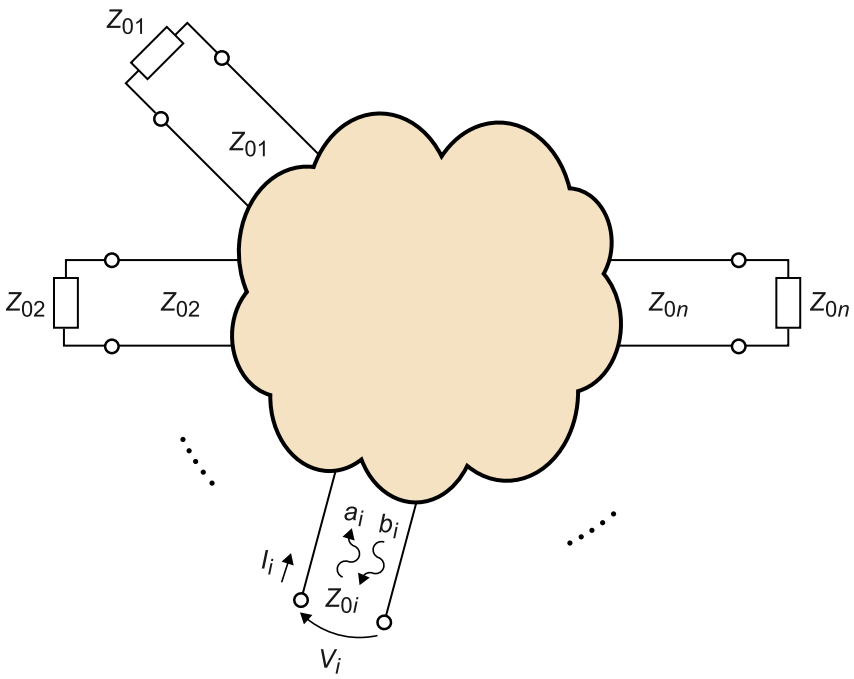
Ja s'han presentat els paràmetres *S*, s'ha demostrat la seva utilitat a l'hora de caracteritzar qualsevol xarxa de microones i també s'han descrit algunes de les seves propietats. Tanmateix, quan les xarxes estan formades per circuits més o menys complexos, el càlcul d'aquests paràmetres es pot complicar. Per aquest motiu, en aquest apartat es descriuen dos mètodes per a calcular els paràmetres *S* de xarxes amb un nombre de ports qualsevol.

En el subapartat "Càlcul dels paràmetres *S* a partir de tensions i corrents" es presenta el mètode de les tensions i els corrents. Aquest és un mètode general i es pot aplicar a qualsevol tipus de circuit o xarxa. En el subapartat "Càlcul dels paràmetres *S* a partir de la descomposició en mode parell i mode senar" s'introdueix el mètode de la descomposició en mode parell i mode senar. Aquest mètode simplifica molt el càlcul de la matriu de paràmetres *S*, però només es pot aplicar a xarxes simètriques, i per això no es pot usar en tots els casos.

3.1. Càlcul dels paràmetres *S* a partir de tensions i corrents

Sigui una xarxa de microones genèrica de *n* ports, com la de la figura 29, de la qual volem obtenir els paràmetres *S*.

Figura 29. Xarxa de microones genèrica de *n* ports



El procediment d'anàlisi és el següent:

1) Analitzem el port *i* (en què *i* pot ser qualsevol port de la xarxa) per a calcular Γ_i. Amb aquesta finalitat hem de carregar tots els ports, menys el port *i*, amb la seva impedància de referència (tal com s'observa en la figura) i calculem:

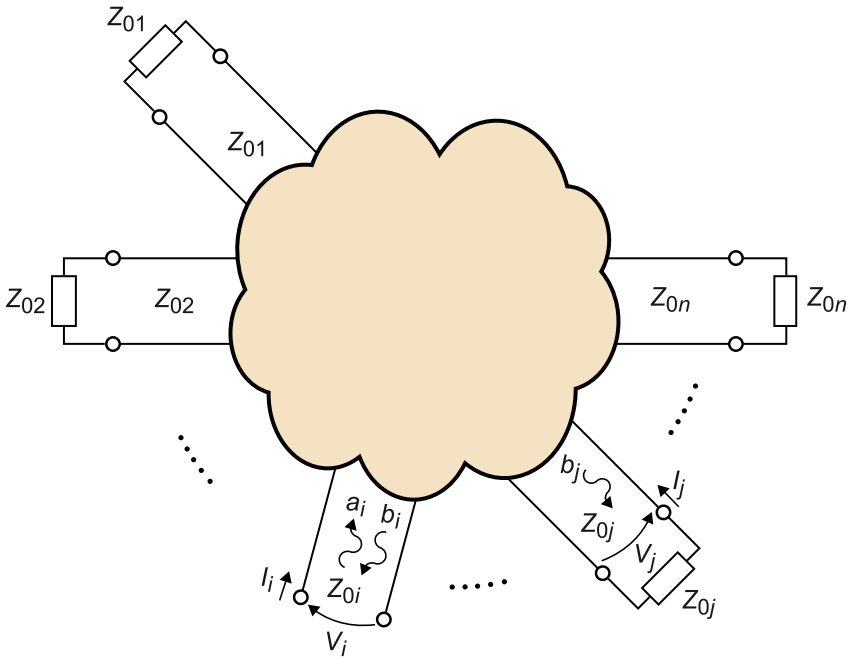
$$\Gamma_i = S_{ii} = \left.\frac{b_i}{a_i}\right|_{a_k=0 \text{ per } k\neq i} \qquad 2.96$$

Alternativament, podem calcular primer Z_i i utilitzar:

$$\Gamma_i = \frac{Z_i - Z_{0i}}{Z_i + Z_{0i}} \qquad 2.97$$

2) Ara podem trobar tots els paràmetres S_{ji} (en què *j* pot ser qualsevol port de la xarxa diferent de *i*). Amb aquesta finalitat tornem a carregar tots els ports amb la seva impedància de referència, excepte el port *i*, com s'observa en la figura 30.

Figura 30. Ones normalitzades als ports *i* i *j* d'una xarxa de *n* ports carregats amb la seva impedància de referència



Podríem calcular el paràmetre S_{ji} amb:

$$S_{ji} = \left.\frac{b_j}{a_i}\right|_{a_k=0 \text{ per } k\neq i} \qquad 2.98$$

però acostuma a ser complicat calcular-ho directament. Alternativament, podem trobar els paràmetres de transmissió a partir del càlcul de tensions. La tensió al port *i* és:

$$V_i = \sqrt{Z_{0i}}\left(a_i + b_i\right) \qquad 2.99$$

I la tensió al port *j* és:

$$V_j = \sqrt{Z_{0j}}\left(a_j + b_j\right) = \sqrt{Z_{0j}}\left(b_j\right) \qquad 2.100$$

(atès que l'hem carregat amb una impedància igual Z_{0j}). La relació de tensions d'aquests dos ports és:

$$\frac{V_j}{V_i} = \frac{\sqrt{Z_{0j}}\left(b_j\right)}{\sqrt{Z_{0i}}\left(a_i + b_i\right)} = \frac{\sqrt{Z_{0j}}\left(b_j/a_i\right)}{\sqrt{Z_{0i}}\left(1 + b_i/a_i\right)} = \frac{\sqrt{Z_{0j}}}{\sqrt{Z_{0i}}}\frac{S_{ji}}{1+S_{ii}} \qquad 2.101$$

Si aïllem S_{ji} ens queda:

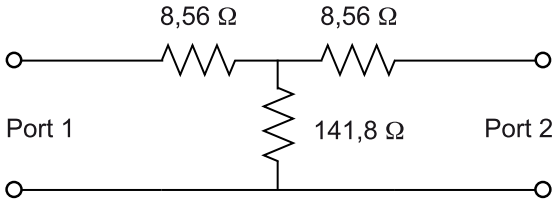
$$S_{ji} = \frac{V_j}{V_i}\frac{\sqrt{Z_{0i}}}{\sqrt{Z_{0j}}}\left(1 + S_{ii}\right)\Bigg|_{a_k=0 \text{ per } k\neq i} \qquad 2.102$$

en què S_{ii} és el mateix paràmetre calculat en el pas 1.

A continuació, apliquem aquest mètode a un circuit real.

Ens demanen trobar els paràmetres *S* de la xarxa de dos ports de la figura 31, un atenuador de potencia de 3 dB.

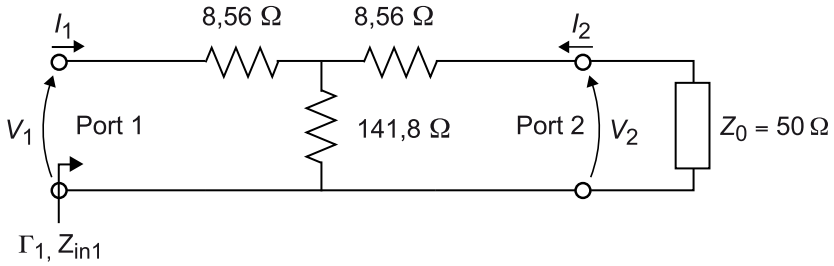
Figura 31. Atenuador de 3 dB adaptat a una impedància característica de 50 Ω



Solució

Començarem analitzant el port 1. A aquest efecte, hem d'adaptar el port 2 amb la seva impedància característica (en aquest cas, Z_0 = 50 Ω), com s'observa en la figura 32.

Figura 32. Atenuador de 3 dB amb el port 2 adaptat



Amb el port 2 adaptat, seguim el procediment explicat anteriorment:

1) Calculem la reflexió al port 1:

$$S_{11}=\Gamma_1=\frac{Z_{in1}-Z_0}{Z_{in1}+Z_0} \qquad 2.103$$

en què:

$$Z_{in1}=8{,}56+141{,}8\,\|\,(8{,}56+50)\,\Omega=50\,\Omega \qquad 2.104$$

Per tant, el paràmetre S_{11} queda:

$$S_{11}=\Gamma_1=\frac{Z_{in1}-Z_0}{Z_{in1}+Z_0}=\frac{50-50}{50+50}=0 \qquad 2.105$$

2) Podem calcular ara el paràmetre S_{21} amb:

$$S_{21}=\frac{V_2}{V_1}\frac{\sqrt{Z_0}}{\sqrt{Z_0}}(1+S_{11})=\frac{V_2}{V_1}=\frac{V_1\frac{141{,}8\,\|\,(8{,}56+50)}{8{,}56+141{,}8\,\|\,(8{,}56+50)}\cdot\frac{50}{50+8{,}56}}{V_1}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad 2.106$$

Un cop analitzat el port 1, podríem procedir a analitzar el port 2. Per altra banda, es pot observar la simetria del circuit, i podem assegurar que l'anàlisi del port 2 ens donarà com a resultat que S_{22} = 0 i S_{12} = 0,707. Per tant, la matriu de paràmetres S del circuit resulta:

$$[S]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \qquad 2.107$$

Fixeu-vos que la potència al port 1 és:

$$P_1=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{V_1I_1^*\}=\frac{1}{2}|a_1|^2 \qquad 2.108$$

I, al port 2, tenim:

$$P_2=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{V_2I_2^*\}=\frac{1}{2}|b_2|^2=\frac{1}{2}|S_{21}a_1|^2=\frac{1}{4}|a_1|^2 \qquad 2.109$$

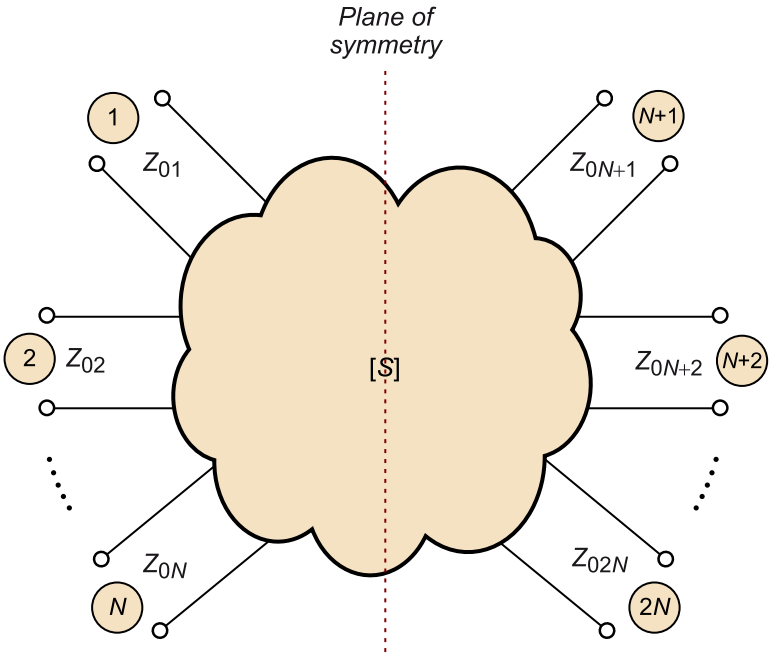
Per tant, hem dividit la potència a la meitat (com calia esperar).

3.2. Càlcul dels paràmetres *S* a partir de la descomposició en mode parell i mode senar

La descomposició en mode parell i mode senar és un mètode aplicable només a **xarxes de microones simètriques** (xarxa que es pot dividir físicament o elèctricament en dues xarxes exactament iguals) que permet calcular els paràmetres *S* d'un circuit amb una reducció considerable del nombre de càlculs.

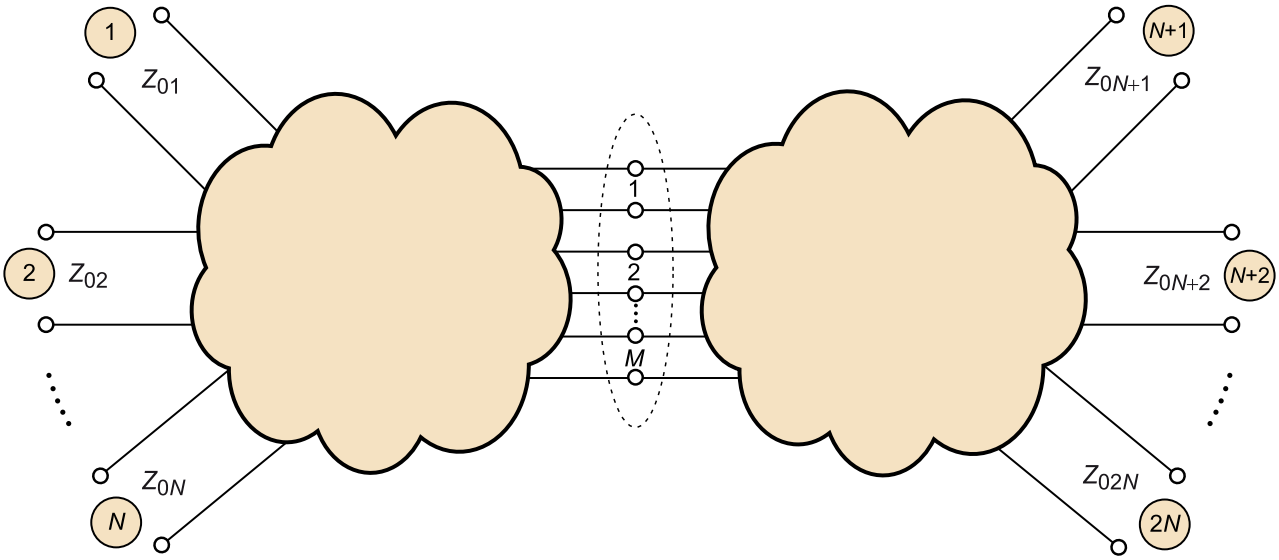
Tenim una xarxa de microones simètrica amb la numeració de ports com la que es veu en la figura 33.

Figura 33. Xarxa de microones simètrica



Com que la xarxa és simètrica, la podem descompondre en un circuit equivalent format per dues xarxes unides per una sèrie de connexions internes (M connexions), com es mostra en la figura 34.

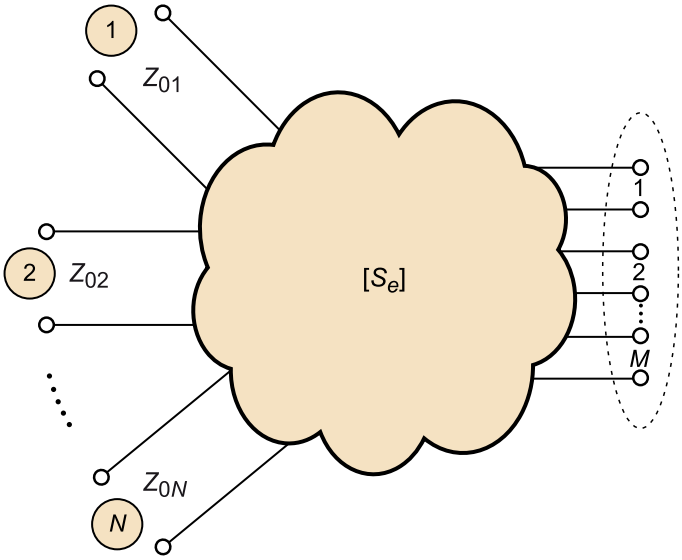
Figura 34. Circuit equivalent format per dues xarxes unides per M connexions internes. No són ports perquè no hi accedim des de l'exterior.



Podem calcular la matriu de paràmetres S total de la xarxa amb el mètode anterior o, amb aquestes condicions, utilitzant la descomposició en mode parell i mode senar. Amb aquest nou mètode es pot trobar la matriu de paràmetres S seguint els passos següents:

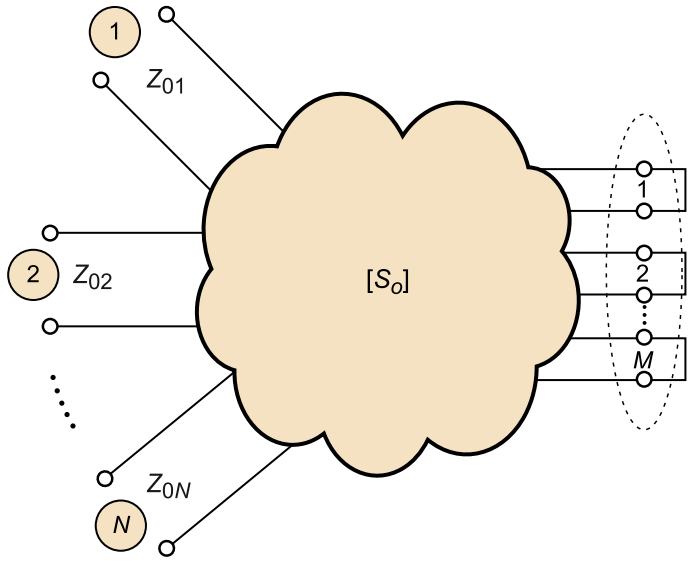
1) Anàlisi del mode parell: calculem la matriu de paràmetres *S* de la primera meitat de la xarxa (ports 1 a *N*), amb les *M* connexions internes en circuit obert. La matriu obtinguda l'anomenem $[S_e]$ (figura 35).

Figura 35. Descomposició en mode parell del circuit original



2) Anàlisi del mode senar: calculem la matriu de paràmetres *S* de la primera meitat de la xarxa (ports 1 a *N*), amb les *M* connexions internes en curtcircuit. La matriu obtinguda l'anomenem $[S_o]$ (figura 36).

Figura 36. Descomposició en mode senar del circuit original



3) Recuperem la matriu de paràmetres *S* del circuit complet amb:

$$[S]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}[S_e]+[S_o] & [S_e]-[S_o]\\ [S_e]-[S_o] & [S_e]+[S_o]\end{bmatrix} \qquad 2.110$$

Es pot observar que s'ha reduït el càlcul de la matriu $2N \times 2N$ original al de dos matrius $N \times N$.

L'equació 2.110 es pot demostrar amb el raonament que s'exposa a continuació. Suposem una xarxa simètrica com la de la figura 33, amb $2N$ ports. La matriu de paràmetres S d'aquesta xarxa la podem dividir en un conjunt de quatre submatrius, de la manera següent:

$$[S]=\begin{bmatrix}[S_1] & [S_2]\\ [S_3] & [S_4]\end{bmatrix} \qquad 2.111$$

en què $[S_1]$, $[S_2]$, $[S_3]$ i $[S_4]$ són matrius quadrades d'ordre N (N files per N columnes). Atès que la xarxa és simètrica, per força:

$$\begin{aligned}[S_1]&=[S_4]\\ [S_2]&=[S_3]\end{aligned} \qquad 2.112$$

Si ho introduïm a 2.111 obtenim:

$$[S]=\begin{bmatrix}[S_1] & [S_2]\\ [S_2] & [S_1]\end{bmatrix} \qquad 2.113$$

Anomenem ara el vector d'ones incidents per als ports 1 a N com $[a_1]$ i el vector d'ones incidents per als ports $N + 1$ a $2N$ com $[a_2]$. Anàlogament, per a les ones sortints, tenim $[b_1]$ com a vector per als ports 1 a N i $[b_2]$ per als ports $N + 1$ a $2N$. D'aquesta manera podem completar l'expressió 2.113 com:

$$\begin{bmatrix}[b_1]\\ [b_2]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[S_1] & [S_2]\\ [S_2] & [S_1]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[a_1]\\ [a_2]\end{bmatrix} \qquad 2.114$$

Suposem que excitem els dos costats de la xarxa amb el mateix vector d'ones incidents, és a dir:

$$[a_1]=[a_2] \qquad 2.115$$

La simetria de la xarxa ens tornarà:

$$[b_1]=[b_2] \qquad 2.116$$

I, per tant:

$$\begin{bmatrix}[b_1]\\ [b_1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[S_1] & [S_2]\\ [S_2] & [S_1]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[a_1]\\ [a_1]\end{bmatrix}\rightarrow[b_1]=[S_1]\ [a_1]+[S_2]\ [a_1]=([S_1]+[S_2])\ [a_1] \qquad 2.117$$

La suma d'aquestes dues matrius l'anomenem ***matriu del mode parell***, i la representem amb el subíndex *e* (de l'anglès *even*):

$$[S_e]=[S_1]+[S_2] \qquad 2.118$$

Tornem a començar el mateix procés i ara excitem cada meitat simètrica de la xarxa amb un vector d'ones desfasat 180°, és a dir:

$$[a_1]=-[a_2] \qquad 2.119$$

Novament, la simetria de la xarxa ens tornarà:

$$[b_1]=-[b_2] \qquad 2.120$$

I, per tant:

$$\begin{bmatrix} [b_1] \\ -[b_1] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [S_1] & [S_2] \\ [S_2] & [S_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [a_1] \\ -[a_1] \end{bmatrix} \rightarrow [b_1]=[S_1]\ [a_1]-[S_2]\ [a_1]=([S_1]-[S_2])\ [a_1] \qquad 2.121$$

La resta d'aquestes dues matrius l'anomenem ***matriu del mode senar***, i la representem amb el subíndex *o* (de l'anglès *odd*):

$$[S_o]=[S_1]-[S_2] \qquad 2.122$$

Si invertim les dependències a les equacions 2.129 i 2.134, obtenim:

$$\begin{aligned} [S_1]&=\tfrac{1}{2}([S_e]+[S_o]) \\ [S_2]&=\tfrac{1}{2}([S_e]-[S_o]) \end{aligned} \qquad 2.123$$

I, llavors:

$$[S]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} [S_e]+[S_o] & [S_e]-[S_o] \\ [S_e]-[S_o] & [S_e]+[S_o] \end{bmatrix} \qquad 2.124$$

Hem demostrat que les submatrius de la matriu de paràmetres *S* les podem trobar com una suma o resta de dues matrius, la del mode parell i la del mode senar. La primera l'obtenim quan excitem cada meitat de la xarxa amb el mateix vector d'ones incidents. Fixeu-vos que, atès que les dues meitats són exactament iguals, en les *M* connexions internes tindrem exactament la mateixa excitació (mateixa amplitud i mateixa fase) provinent dels ports externs de cada meitat. És a dir, l'energia aportada per l'ona a_1 a qualsevol de les *M* connexions internes just al pla de simetria serà la mateixa que aporti l'ona a_{N+1} (figura 34), o el que és el mateix, el doble de l'excitació d'una sola meitat. I això ho podem aconseguir deixant les connexions internes d'una meitat en circuit obert (ja que l'excitació d'aquesta meitat es reflectirà en aquesta discontinuïtat

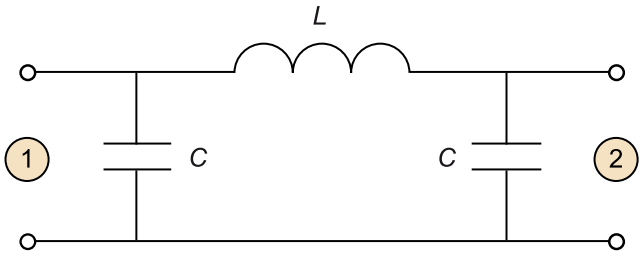
i donarà una nova ona que es propagarà en sentit contrari i, al pla de simetria, tindrà la mateixa amplitud i la mateixa fase, justament el mateix efecte que tenir l'altra meitat simètrica connectada). Precisament això és el que estem fent en el primer pas del mètode, mostrat també en la figura 35.

La matriu del mode senar, en canvi, l'obtenim quan excitem cada meitat de la xarxa amb un vector d'ones incident desfasat 180°. Això implica que a les M connexions internes tindrem la mateixa excitació en amplitud, però amb un desfasament també de 180°. És a dir, l'energia aportada per l'ona a_1 a qualsevol de les M connexions internes just al pla de simetria serà la mateixa que aporti l'ona a_{N+1} amb una diferència de fase de 180° (figura 34), ben bé el mateix que si curtcircuitéssim les M connexions internes just al pla de simetria. I precisament això és el que fem al segon pas del mètode, mostrat també en la figura 36. Queda, per tant, demostrada la tècnica de descomposició en mode parell i mode senar per a trobar la matriu de paràmetres S de xarxes simètriques. El gran avantatge és que, en analitzar només una meitat de la xarxa, l'anàlisi del circuit se simplifica.

Un cop hem demostrat la metodologia, l'aplicarem a un circuit real en l'exemple següent.

Ens demanen trobar els paràmetres S de la xarxa de dos ports de la figura 37, en la qual es presenta un filtre passabaix amb topologia en π.

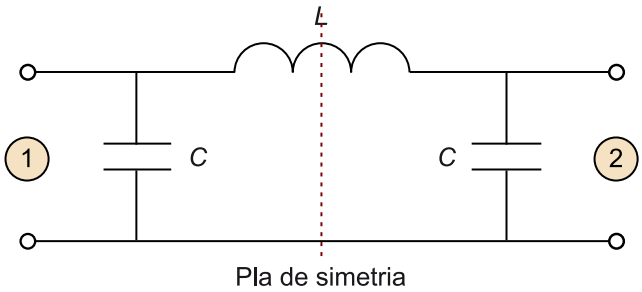
Figura 37. Filtre passabaix



Solució

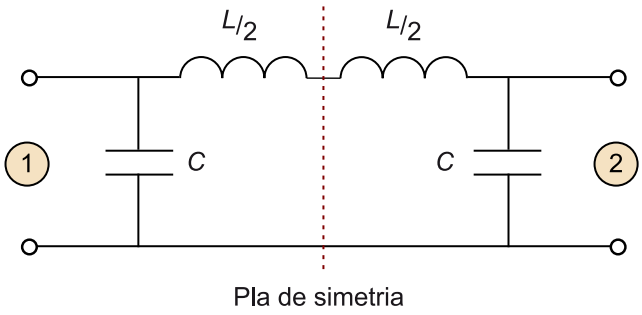
Es pot veure que aquest circuit respon a la condició de simetria per a poder aplicar el mètode de la descomposició en mode parell i mode senar (figura 38).

Figura 38. Pla de simetria del filtre passabaix



Per tant, podem fer un nou circuit equivalent format per dos circuit simètrics com els de la figura 39.

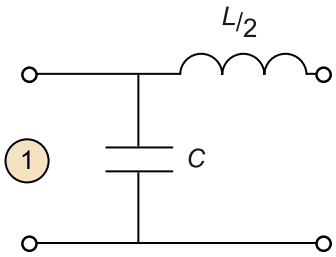
Figura 39. Circuit equivalent del filtre passabaix



Agafem la primera meitat del circuit i procedim segons el mètode:

1) Anàlisi del mode parell: analitzem la primera meitat del circuit i deixem les connexions internes en circuit obert.

Figura 40. Mode parell



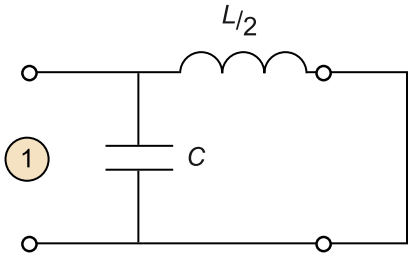
$$Z_{\text{in}e} = \frac{1}{j\omega C} \qquad 2.125$$

I, per tant:

$$\Gamma_e = \frac{Z_{\text{in}e} - Z_0}{Z_{\text{in}e} + Z_0} = \frac{\frac{1}{j\omega C} - Z_0}{\frac{1}{j\omega C} + Z_0} = \frac{\frac{1 - j\omega C Z_0}{j\omega C}}{\frac{1 + j\omega C Z_0}{j\omega C}} = \frac{1 - j\omega C Z_0}{1 + j\omega C Z_0} \qquad 2.126$$

2) Anàlisi del mode senar:

Figura 41. Mode senar



$$Z_{\text{in}o} = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{j\omega \frac{L}{2}}} = \frac{1}{j\omega C + \frac{2}{j\omega L}} = \frac{j\omega L}{-\omega^2 CL + 2} \qquad 2.127$$

I, per tant:

$$\Gamma_o = \frac{Z_{\text{in}o} - Z_0}{Z_{\text{in}o} + Z_0} = \frac{\frac{j\omega L}{-\omega^2 CL + 2} - Z_0}{\frac{j\omega L}{-\omega^2 CL + 2} + Z_0} = \frac{j\omega L + Z_0 \omega^2 CL - 2Z_0}{j\omega L - Z_0 \omega^2 CL + 2Z_0} \qquad 2.128$$

3) Finalment, podem recuperar la matriu de paràmetres *S* a partir de l'equació 2.110. Primer de tot, calculem la suma i la resta dels coeficients obtinguts:

$$\begin{aligned}\Gamma_e+\Gamma_o&=\frac{1-j\omega CZ_0}{1+j\omega CZ_0}+\frac{j\omega L+Z_0\omega^2CL-2Z_0}{j\omega L-Z_0\omega^2CL+2Z_0}\\ \Gamma_e-\Gamma_o&=\frac{1-j\omega CZ_0}{1+j\omega CZ_0}-\frac{j\omega L+Z_0\omega^2CL-2Z_0}{j\omega L-Z_0\omega^2CL+2Z_0}\end{aligned} \qquad 2.129$$

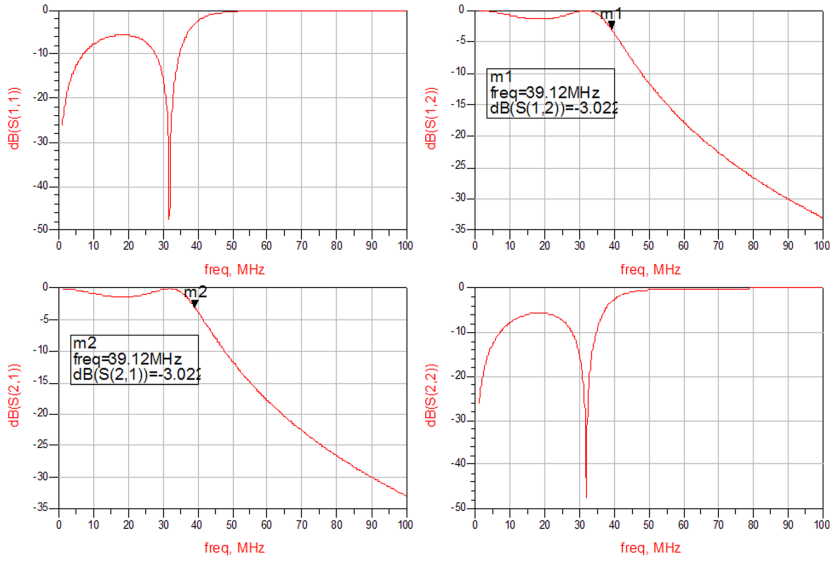
I ja podem calcular la matriu total:

$$[S]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}[S_e]+[S_o] & [S_e]-[S_o]\\ [S_e]-[S_o] & [S_e]+[S_o]\end{bmatrix}=$$
$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{1-j\omega CZ_0}{1+j\omega CZ_0}+\frac{j\omega L+Z_0\omega^2CL-2Z_0}{j\omega L-Z_0\omega^2CL+2Z_0} & \frac{1-j\omega CZ_0}{1+j\omega CZ_0}-\frac{j\omega L+Z_0\omega^2CL-2Z_0}{j\omega L-Z_0\omega^2CL+2Z_0}\\ \frac{1-j\omega CZ_0}{1+j\omega CZ_0}-\frac{j\omega L+Z_0\omega^2CL-2Z_0}{j\omega L-Z_0\omega^2CL+2Z_0} & \frac{1-j\omega CZ_0}{1+j\omega CZ_0}+\frac{j\omega L+Z_0\omega^2CL-2Z_0}{j\omega L-Z_0\omega^2CL+2Z_0}\end{bmatrix} \qquad 2.130$$

Per tant, hem pogut calcular de manera senzilla els paràmetres *S* d'un circuit més o menys complex.

En la figura 42 es mostra la simulació dels paràmetres *S* d'aquest mateix circuit entre 1 i 100 MHz, utilitzant una bobina de 200 nH i dos condensadors de 200 pF. Es pot veure clarament el comportament del filtre passabaix a partir dels paràmetres de transmissió, S_{21} i S_{12}, amb una freqüència de tall a 3 dB de 39,12 MHz. Per sobre d'aquesta freqüència, l'atenuació augmenta i arriba a uns 30 dB a 90 MHz. Els paràmetres de reflexió, S_{11} i S_{22}, mostren com per sota de la freqüència de tall aquests prenen uns valors baixos (hi ha poca reflexió), mentre que a alta freqüència la reflexió és pràcticament total.

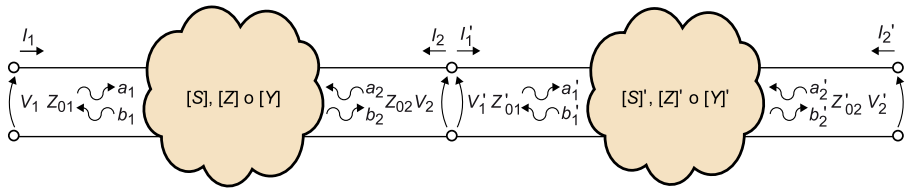
Figura 42. Simulació dels paràmetres *S* del filtre passabaix entre 1 i 100 MHz



4. Relacions entre els paràmetres *S*, *Z*, *Y*, *T* i *ABCD*

Tal com hem estat veient al llarg del mòdul, podem caracteritzar completament una xarxa de microones a partir dels paràmetres *S*, i també amb els paràmetres *Z* o *Y*. En una situació en la qual dues o més xarxes de microones es connecten en cascada, com s'observa en la figura 43 amb dues xarxes de dos ports, el càlcul dels nous paràmetres *S*, *Z* o *Y* del sistema total pot ser complicat (especialment si el nombre de ports augmenta). Per aquest motiu és convenient definir uns nous paràmetres de transmissió que ens permetin trobar els paràmetres totals del circuit d'una manera més àgil. En aquest context seran molt útils els paràmetres *T* i els paràmetres *ABCD*. En aquest apartat es defineixen aquests nous paràmetres (subapartats "Paràmetres *T*" i "Paràmetres *ABCD*", respectivament), a més de la relació entre tots (subapartats "Relació entre matrius de paràmetres *S*, *Z* i *Y* per a una xarxa de *N* ports" i "Relació entre paràmetres *S*, *T* i *ABCD* per a una xarxa de dos ports"), de manera que es pugui passar d'una definició a una altra segons convingui.

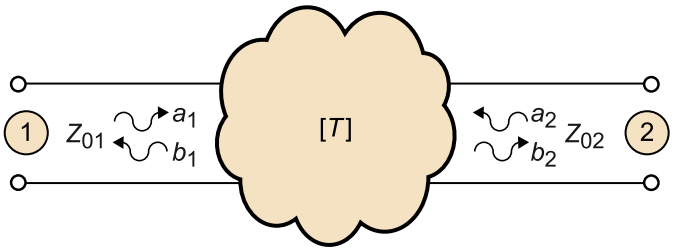
Figura 43. Connexió de dues xarxes en cascada



4.1. Paràmetres *T*

Els paràmetres *T*, com els paràmetres *S*, relacionen ones *a* i *b*, però en comptes de fer-ho en funció de les ones d'entrada i sortida ho fan en funció d'ones d'un port i de l'altre. Agafant com a referència, per exemple, la xarxa de dos ports de la figura 44:

Figura 44. Definició dels paràmetres *T* en una xarxa de microones de dos ports

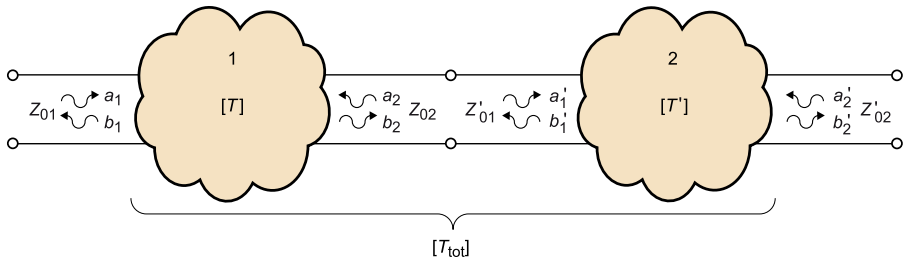


els paràmetres *T* es defineixen com:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad 2.131$$

Per a veure la utilitat d'aquests paràmetres, el més convenient és tractar el cas senzill de dues xarxes connectades en cascada, com les de la figura 45.

Figura 45. Definició dels paràmetres *T* en la connexió de dues xarxes en cascada



En aquest cas, definim la xarxa 1 amb la matriu de paràmetres *T* ([*T*]'), com mostra l'equació 2.131. I la xarxa 2 també amb la matriu de paràmetres *T* ([*T*']):

$$\begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_2 \\ b'_2 \end{bmatrix} \qquad 2.132$$

amb el signe ' per a diferenciar-los dels paràmetres de la primera xarxa. Si es compleix que la impedància de referència del port 2 de la xarxa 1 (Z_{02}) i la impedància de referència del port 1 de la xarxa 2 (Z_{01}') són iguals, hi haurà continuïtat d'ones entre les dues xarxes, perquè una ona que surti de la xarxa 1 entrarà íntegra a la xarxa 2 pel fet de no veure cap canvi de medi que la faci reflectir-se. Per tant, atès que:

$$Z_{02} = Z'_{01} \qquad 2.133$$

llavors:

$$b_2 = a'_1 \qquad 2.134$$

$$a_2 = b'_1 \qquad 2.135$$

Amb aquestes condicions, es compleix que:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{bmatrix}}_{[T][T']} \begin{bmatrix} a'_2 \\ b'_2 \end{bmatrix} = [T_{\text{tot}}] \begin{bmatrix} a'_2 \\ b'_2 \end{bmatrix} \qquad 2.136$$

En conseqüència, la matriu de paràmetres *T* total del sistema ([T_{tot}]) es pot trobar si es multipliquen directament les matrius de paràmetres *T* individuals. És a dir:

$$[T_{\text{tot}}] = [T]\,[T'] \qquad 2.137$$

D'aquesta manera, els càlculs per a trobar els paràmetres de tot un sistema amb N xarxes connectades en cascada queden reduïts a una senzilla multiplicació de matrius, i se simplifica àmpliament l'anàlisi del circuit:

$$[T\text{tot}]=[T_1][T_2][T_3]\cdots[T_N] \qquad 2.138$$

sempre que es compleixi:

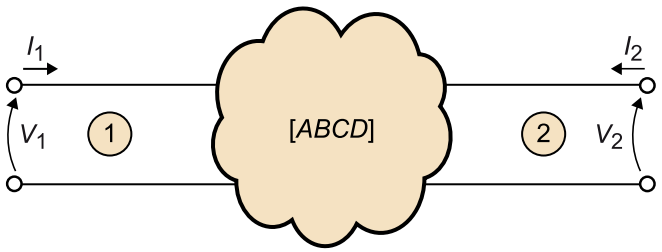
$$Z_{02}=Z'_{01}, Z'_{02}=Z''_{01}, Z''_{02}=Z'''_{01},\ldots \qquad 2.139$$

4.2. Paràmetres *ABCD*

Anàlogament als paràmetres T tenim els paràmetres *ABCD*, els quals, en comptes de dependre d'ones normalitzades de tensió, depenen de tensions i corrents. L'ús d'aquests paràmetres dependrà del tipus d'anàlisi que estiguem fent. Si estem treballant amb ones de tensió i paràmetres S, és preferible utilitzar els paràmetres T per a encadenar la caracterització de diferents tipus de xarxes. Però si estem treballant amb tensions, corrents i paràmetres Z o Y, els paràmetres *ABCD* seran més apropiats.

Si prenem com a referència, per exemple, la xarxa de dos ports de la figura 46:

Figura 46. Definició dels paràmetres *ABCD* en una xarxa de microones de dos ports



els paràmetres *ABCD* es defineixen com:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \qquad 2.140$$

Si la xarxa és recíproca, aleshores:

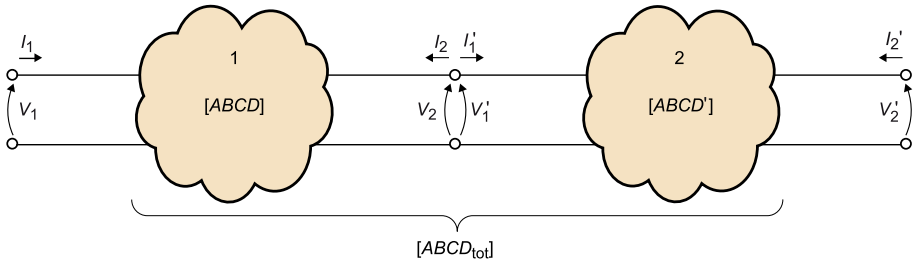
$$A\cdot D - B\cdot C = 1 \qquad 2.141$$

I, si la xarxa és simètrica, aleshores:

$$A = D \qquad 2.142$$

Novament, per a veure la utilitat d'aquests paràmetres, el més convenient és tractar el cas senzill de dues xarxes connectades en cascada, com les de la figura 47.

Figura 47. Definició dels paràmetres *ABCD* en la connexió de dues xarxes en cascada



Definim la xarxa 1 amb la matriu de paràmetres *ABCD* ([*ABCD*]), com mostra l'equació 2.140. I la xarxa 2 també amb la matriu de paràmetres *ABCD* ([*ABCD*]'):

$$\begin{bmatrix} V'_1 \\ I'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_2 \\ -I'_2 \end{bmatrix} \qquad 2.143$$

amb el signe ' per a diferenciar-los dels paràmetres de la primera xarxa. Es pot veure que:

$$V_2 = V'_1 \qquad 2.144$$

$$I_2 = -I'_1 \qquad 2.145$$

Amb aquestes condicions, es compleix que:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_1 \\ I'_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}}_{[ABCD][ABCD']} \begin{bmatrix} V'_2 \\ -I'_2 \end{bmatrix} = [ABCD_{\text{tot}}] \begin{bmatrix} V'_2 \\ -I'_2 \end{bmatrix} \qquad 2.146$$

D'aquesta manera, els càlculs per a trobar els paràmetres de tot un sistema amb *N* xarxes connectades en cascada queden reduïts, novament, a una senzilla multiplicació de matrius, i se simplifica àmpliament l'anàlisi del circuit:

$$[ABCD_{\text{tot}}] = [ABCD_1]\,[ABCD_2]\,[ABCD_3] \cdots [ABCD_N] \qquad 2.147$$

4.3. Relació entre matrius de paràmetres *S*, *Z* i *Y* per a una xarxa de *N* ports

Considerem una matriu de *N* ports caracteritzada per les seves matrius de paràmetres S, *Z* i *Y* ([*S*],[*Z*] i [*Y*]). Si suposem que la impedància de referència dels *N* ports de la xarxa és la mateixa i val Z_0, podem trobar les relacions següents:

- Relació entre les matrius de paràmetres *S* i paràmetres *Z*:

$$[S]=([Z]+Z_0\cdot[I_d])^{-1}\cdot([Z]-Z_0\cdot[I_d])=([Z]-Z_0\cdot[I_d])\cdot([Z]+Z_0\cdot[I_d])^{-1}$$
$$[Z]=Z_0\cdot([I_d]-[S])^{-1}\cdot([I_d]+[S])=Z_0\cdot([I_d]+[S])\cdot([I_d]-[S])^{-1} \qquad 2.148$$

- Relació entre les matrius de paràmetres *S* i paràmetres *Y*:

$$[S]=(Y_0\cdot[I_d]+[Y])^{-1}\cdot(Y_0\cdot[I_d]-[Y])=(Y_0\cdot[I_d]-[Y])\cdot(Y_0\cdot[I_d]+[Y])^{-1}$$
$$[Y]=Y_0\cdot([I_d]+[S])^{-1}\cdot([I_d]-[S])=Y_0\cdot([I_d]-[S])\cdot([I_d]+[S])^{-1} \qquad 2.149$$

- Relació entre les matrius de paràmetres *Z* i paràmetres *Y*:

$$[Z]=[Y]^{-1}$$
$$[Y]=[Z]^{-1} \qquad 2.150$$

A continuació es presenta un exemple en el qual es necessita fer un canvi de paràmetres *S* a paràmetres *Z*.

Sovint ens pot interessar canviar la impedància de referència d'una matriu de paràmetres *S* de Z_{01} a Z_{02}. Per exemple, imagineu que, per les seves prestacions d'amplada de banda, volem connectar una antena mesurada amb una impedància de referència de 50 Ω en un circuit electrònic les pistes impreses del qual tenen una impedància característica diferent de 50 Ω. En aquest cas podríem mirar de convertir aquesta informació a la nova impedància de referència per a veure si aquesta antena és adequada o no per al sistema.

Per a veure com podem fer aquesta transformació en aquest i altres casos, utilitzarem l'exemple d'una xarxa de dos ports que presenta una matriu de paràmetres *S* a una freqüència determinada i referits a 50 Ω com:

$$[S]=\begin{bmatrix} 0{,}5 & j0{,}866 \\ j0{,}866 & 0{,}5 \end{bmatrix} \qquad 2.151$$

i mirarem d'obtenir la resposta d'aquesta xarxa en un sistema referenciat a 75 Ω.

Solució

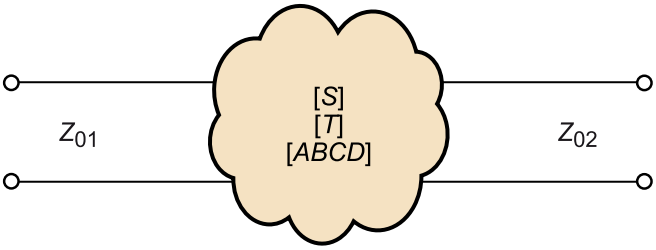
Una manera senzilla de modificar la matriu és utilitzar la conversió a algun tipus de paràmetres que no depenguin de referències per a mesurar-los, com poden ser els paràmetres *Z*, *Y* o *ABCD*. Aquests paràmetres són independents de qualsevol referència i només depenen de la xarxa mateixa. Finalment, tornem a convertir aquests a paràmetres *S* mitjançant la nova impedància de referència. Així doncs, utilitzant l'equació 2.148 i substituint:

$$[Z]=Z_0\cdot([I_d]-[S])^{-1}\cdot([I_d]+[S])=\begin{bmatrix} 0{,}0022 & j86{,}6 \\ j86{,}6 & 0{,}0022 \end{bmatrix}$$
$$[S]_{75\Omega}=([Z]+Z_0\cdot[I_d])^{-1}\cdot([Z]-Z_0\cdot[I_d])=\begin{bmatrix} 0{,}143 & j0{,}989 \\ j0{,}989 & 0{,}143 \end{bmatrix} \qquad 2.152$$

4.4. Relació entre paràmetres *S*, *T*, i *ABCD* per a una xarxa de dos ports

Considerem una xarxa de dos ports amb impedàncies de referència Z_{01} i Z_{02}, tal com s'observa en la figura 48.

Figura 48. Xarxa genèrica caracteritzada amb paràmetres *S*, *T* i *ABCD*



Podem trobar llavors les relacions següents:

- Relació entre els paràmetres *S* i els paràmetres *ABCD*:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{AZ_{02}+B-CZ_{01}Z_{02}-DZ_{01}}{AZ_{02}+B+CZ_{01}Z_{02}+DZ_{01}} \\ S_{12} &= \frac{2(AD-BC)\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}{AZ_{02}+B+CZ_{01}Z_{02}+DZ_{01}} \\ S_{21} &= \frac{2\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}{AZ_{02}+B+CZ_{01}Z_{02}+DZ_{01}} \\ S_{22} &= \frac{-AZ_{02}+B-CZ_{01}Z_{02}+DZ_{01}}{AZ_{02}+B+CZ_{01}Z_{02}+DZ_{01}} \end{aligned} \qquad 2.153$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\left(1+S_{11}-S_{22}-S_{11}S_{22}+S_{12}S_{21}\right)\sqrt{Z_{01}/Z_{02}}}{S_{21}} \\ B &= \frac{\left(1+S_{11}+S_{22}+S_{11}S_{22}-S_{12}S_{21}\right)\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}{S_{21}} \\ C &= \frac{\left(1-S_{11}-S_{22}+S_{11}S_{22}-S_{12}S_{21}\right)}{S_{21}\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} \\ D &= \frac{\left(1-S_{11}+S_{22}-S_{11}S_{22}+S_{12}S_{21}\right)\sqrt{Z_{01}/Z_{02}}}{S_{21}} \end{aligned} \qquad 2.154$$

- Relació entre els paràmetres *S* i els paràmetres *T*:

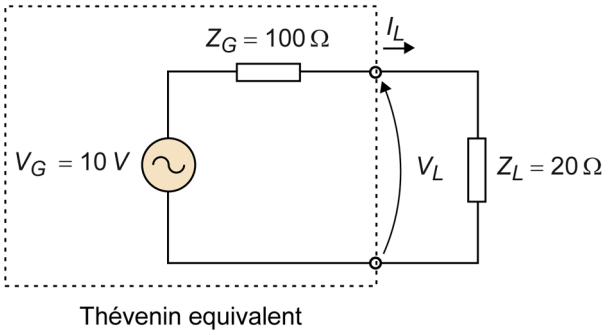
$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{T_{12}}{T_{22}} \\ S_{12} &= T_{11} - \frac{T_{21}T_{12}}{T_{22}} \\ S_{21} &= \frac{1}{T_{22}} \\ S_{22} &= -\frac{T_{21}}{T_{22}} \end{aligned} \qquad 2.155$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{-S_{11}S_{22}+S_{12}S_{21}}{S_{21}} \\ T_{12} &= \frac{S_{11}}{S_{21}} \\ T_{21} &= \frac{-S_{22}}{S_{21}} \\ T_{22} &= \frac{1}{S_{21}} \end{aligned} \qquad 2.156$$

A continuació s'exposa un exemple en el qual s'utilitzen diverses transformacions entre paràmetres per a arribar al resultat.

Tenim un dispositiu electrònic connectat a una càrrega. Aquest dispositiu el podem modelitzar pel seu equivalent de Thévenin amb una font de tensió i una impedància en sèrie, tal com es mostra en la figura 49.

Figura 49. Dispositiu electrònic modelitzat pel seu equivalent de Thévenin connectat a una càrrega

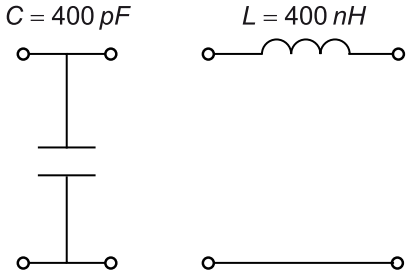


La tensió que cau sobre la càrrega és:

$$V_L|_{dB} = 20\log\left(V_G\frac{Z_L}{Z_G+Z_L}\right) = 4{,}43\ \text{dBV} \qquad 2.157$$

Ens demanen dissenyar un filtre que atenuï al màxim la tensió als borns de la impedància de càrrega Z_L a la freqüència de 50 MHz, amb només dos components: un condensador de 400 pF i una bobina de 400 nH. La situació és la que es mostra en la figura 50.

Figura 50. Condensador i bobina



Solució

Primer de tot necessitem trobar la matriu de paràmetres S de les dues xarxes. Podem considerar totes dues com xarxes de dos ports. Si apliquem el mètode de les tensions i els corrents, i amb una impedància de referència Z_0 en els dos ports, podem trobar que la matriu de paràmetres S de la xarxa amb el condensador és:

$$[S_C] = \frac{1}{2+j\omega CZ_0}\begin{bmatrix} -j\omega CZ_0 & 2 \\ 2 & -j\omega CZ_0 \end{bmatrix} \qquad 2.158$$

I la matriu de paràmetres S que conté la bobina és:

$$[S_L] = \frac{1}{2Z_0+j\omega L}\begin{bmatrix} j\omega L & 2Z_0 \\ 2Z_0 & j\omega L \end{bmatrix} \qquad 2.159$$

De fet, si substituïm cada constant pel valor que ens dóna l'enunciat i una Z_0 = 50 W, obtenim:

$$[S_C] = \frac{1}{1+j\pi}\begin{bmatrix} -j\pi & 1 \\ 1 & -j\pi \end{bmatrix} \qquad 2.160$$

$$[S_L] = \frac{1}{5+j2\pi}\begin{bmatrix} j2\pi & 5 \\ 5 & j2\pi \end{bmatrix} \qquad 2.161$$

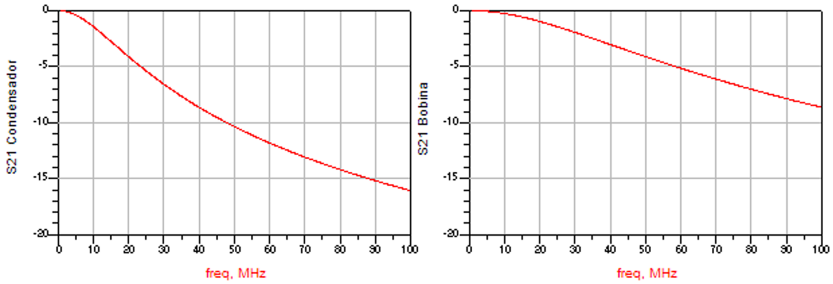
Un dels paràmetres més interessants en aquest cas és el paràmetre S_{21}, ja que és el paràmetre que ens dóna informació sobre la transferència de potència del generador a la càrrega (en un entorn de generador i càrrega de 50 Ω). Si calculem el seu mòdul i ho convertim a dB, obtenim:

$$|S_{21C}|_{dB} = 20 \cdot \log(|S_{21C}|) = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\right) = -10{,}36 \text{ dB} \qquad 2.162$$

$$|S_{21L}|_{dB} = 20 \cdot \log(|S_{21L}|) = 20 \cdot \log\left(\frac{5}{\sqrt{25+4\pi^2}}\right) = -4{,}11 \text{ dB} \qquad 2.163$$

Per tant, si haguéssim d'escollir un dels dos components, molt probablement el condensador seria la millor opció. Per a tenir una idea més completa del comportament d'aquests dos components, s'ha fet un escombratge en freqüència del paràmetre S_{21} de les dues xarxes, i s'han obtingut els resultats que es mostren en la figura 51.

Figura 51. Escombratge en freqüència del paràmetre S_{21} per a les xarxes amb el condensador i bobina, respectivament



Per tant, com calia preveure, cada xarxa és un filtre passabaix per si mateix. De totes maneres, l'enunciat ens demana el filtre òptim, per la qual cosa és raonable pensar que la màxima atenuació l'aconseguirem si unim les dues xarxes i les connectem entre el dispositiu i la càrrega. Per a comprovar-ho, calcularem les dues possibles matrius de paràmetres S, la matriu del conjunt condensador més bobina i la matriu del conjunt bobina més condensador, amb l'objectiu de trobar la configuració més adequada.

El primer que farem serà transformar les matrius de paràmetres S de cada xarxa a paràmetres T, a partir de l'equació 2.156, per a facilitar el càlcul de les matrius del conjunt. Si ho apliquem a la matriu de paràmetres S del condensador, obtenim la matriu de paràmetres T ($[T_C]$):

$$[T_C] = \begin{bmatrix} 1-j\pi & -j\pi \\ j\pi & 1+j\pi \end{bmatrix} \qquad 2.164$$

Seguint el mateix procediment, la matriu de paràmetres T per al cas de la bobina, $[T_L]$, és:

$$[T_L] = \begin{bmatrix} 1-j\frac{2}{5}\pi & j\frac{2}{5}\pi \\ -j\frac{2}{5}\pi & 1+j\frac{2}{5}\pi \end{bmatrix} \qquad 2.165$$

Segons l'equació 2.138, calculem la matriu del conjunt condensador més bobina a partir del producte de les dues matrius, en aquest ordre:

$$[T_{C+L}] = [T_C] \cdot [T_L] = \begin{bmatrix} -6{,}89 - j\frac{7}{5}\pi & 7{,}89 - j1{,}88 \\ 7{,}89 + j1{,}88 & -6{,}89 + j\frac{7}{5}\pi \end{bmatrix} \qquad 2.166$$

I calculem la matriu del conjunt bobina més condensador a partir del producte de les dues matrius, en l'ordre invers:

$$[T_{L+C}]=[T_L]\cdot[T_C]=\begin{bmatrix}-6{,}89-j\frac{7}{5}\pi & -7{,}89-j1{,}88\\ -7{,}89+j1{,}88 & -6{,}89+j\frac{7}{5}\pi\end{bmatrix} \qquad 2.167$$

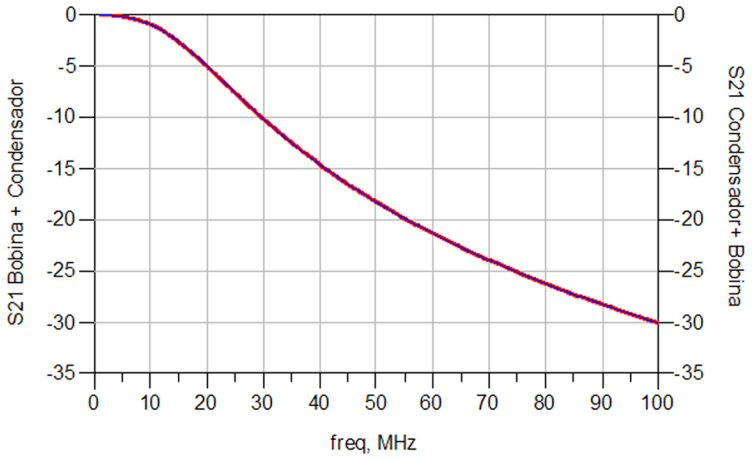
Finalment, podem recuperar la matriu de paràmetres *S* dels dos conjunts amb l'equació 2.155, i obtenim per als dos casos:

$$[S_{C+L}]=\begin{bmatrix}-0{,}93-j0{,}32 & -0{,}10-j0{,}06\\ -0{,}10-j0{,}06 & 0{,}68+j0{,}71\end{bmatrix} \qquad 2.168$$

$$[S_{L+C}]=\begin{bmatrix}0{,}68+j0{,}71 & -0{,}10-j0{,}06\\ -0{,}10-j0{,}06 & -0{,}93-j0{,}32\end{bmatrix} \qquad 2.169$$

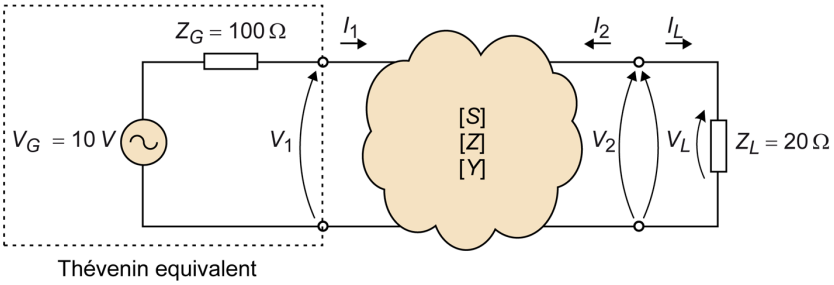
Hem obtingut el mateix valor per al paràmetre S_{21} en totes dues xarxes, i això no és casualitat per a aquesta freqüència en concret. De fet, si tornem a fer un escombratge del paràmetre S_{21} dels dos conjunts en funció de la freqüència, obtenim el resultat mostrat en la figura 52.

Figura 52. Escombratge en freqüència del paràmetre S_{21} del conjunt condensador més bobina (línia vermella) i bobina més condensador (línia blava)



Totes dues xarxes presenten el mateix comportament. A més, podem veure com l'atenuació a la freqüència de 50 MHz és d'uns 18 dB, més gran que la del condensador sol. Implica aquest resultat que la tria de la xarxa idònia per a atenuar el senyal del dispositiu electrònic és indiferent? Per a esbrinar-ho connectem les dues xarxes entre el dispositiu electrònic i la càrrega del circuit de la figura 49, i obtenim el nou circuit de la figura 53.

Figura 53. Dispositiu electrònic modelitzat pel seu equivalent de Thévenin i càrrega connectats a una xarxa de paràmetres *S*, *Z* o *Y*



Atès que no tenim cap LT connectada a la xarxa i que volem calcular la caiguda de tensió a la càrrega, pot ser convenient treballar amb paràmetres *Z* o *Y*. Provem amb els paràmetres *Y*. Si analitzem el circuit de la figura 53, obtenim que la tensió a la càrrega és determinada per:

$$V_L=V_G\frac{Y_{21}Z_L}{Y_{12}Z_G-(1+Y_{11}Z_G)(1+Y_{22}Z_L)} \qquad 2.170$$

Només ens queda convertir les matrius de paràmetres S a paràmetres Y i calcular la tensió V_L per als dos casos. En utilitzar la transformació de l'equació 2.149, les matrius de paràmetres Y resten:

$$[Y_{C+L}]=\begin{bmatrix} 0{,}11j & 0{,}0079j \\ 0{,}0079j & -0{,}0079j \end{bmatrix} \qquad 2.171$$

$$[Y_{L+C}]=\begin{bmatrix} -0{,}0079j & 0{,}0079j \\ 0{,}0079j & 0{,}11j \end{bmatrix} \qquad 2.172$$

I obtenim:

$$V_{L1}|_{\mathrm{dB}} = 20\log\left(|V_{L1}|\right) = -17{,}5\ \mathrm{dBV} \qquad 2.173$$

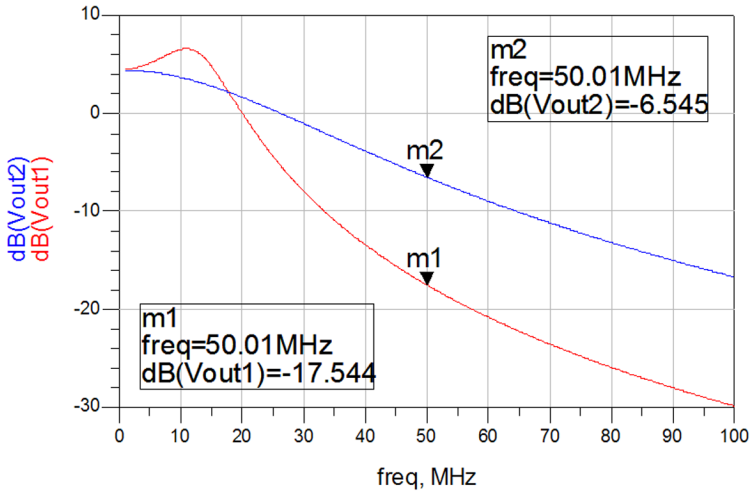
$$V_{L2}|_{\mathrm{dB}} = 20\log\left(|V_{L2}|\right) = -6{,}5\ \mathrm{dBV} \qquad 2.174$$

Així doncs, la tria no és indiferent. La xarxa condensador més bobina és el millor filtre per a aquest circuit en concret, amb una atenuació d'uns 22 dB respecte al resultat obtingut amb l'equació 2.157, tal com mostra el resultat de 2.173, davant dels 11 dB obtinguts amb la xarxa bobina més condensador, com mostra el resultat de 2.174. És a dir, segons la configuració escollida, s'aconsegueix el doble d'atenuació.

Tot i que el paràmetre S_{21} era el mateix per a les dues xarxes (equació 2.168 i 2.169), no ens hauria de sorprendre el resultat, ja que els paràmetres S_{11} i S_{22} són diferents. Ja vam veure com el coeficient de reflexió no solament depèn dels paràmetres S_{11} o S_{22}, sinó també de la resta de paràmetres i del valor de la càrrega. En aquest cas, el coeficient de transmissió no solament depèn del paràmetre S_{21}, sinó també dels altres paràmetres i de les impedàncies de generador i de càrrega. Per tant, només una de les dues configuracions ha resultat ser la més apropiada.

Novament, com a demostració, en la figura 54 es mostra la caiguda de tensió a la càrrega (en dBV) per a les dues configuracions de xarxa. A partir dels 20 MHz la xarxa més adequada és la de condensador més bobina.

Figura 54. Tensió a la càrrega (en dBV) quan al circuit connectem els filtres condensador més bobina (línia vermella) i bobina més condensador (línia blava)



5. Analitzadors de xarxes

Els paràmetres *S* de les xarxes de microones, siguin passives o actives, es poden mesurar amb un analitzador vectorial de xarxes.

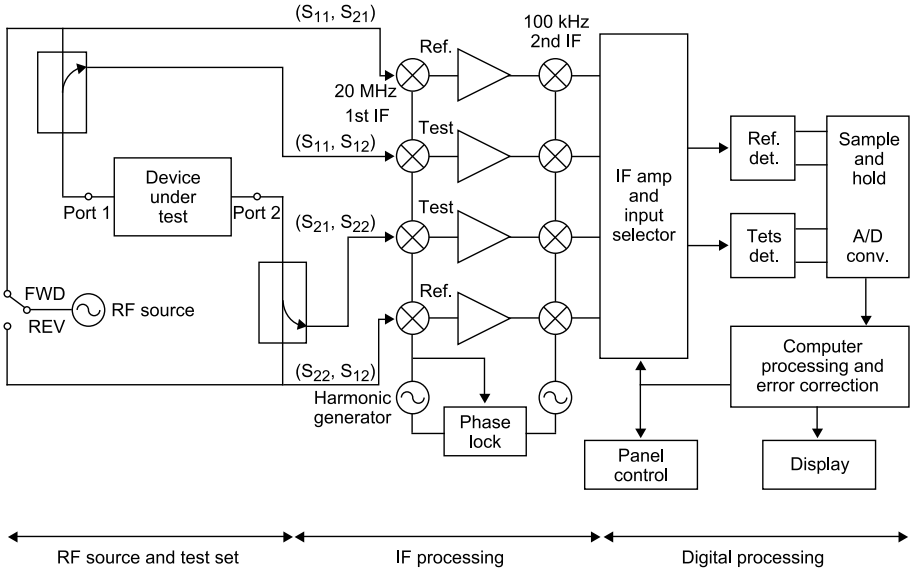
Un ***analitzador de xarxes*** és un aparell de dos o quatre ports que mesura el mòdul i la fase de les ones transmeses (generades internament) i reflectides en la xarxa analitzada.

En la figura 55 es mostra la imatge d'un analitzador de xarxes vectorial de quatre ports.

Figura 55. Imatge d'un analitzador vectorial de xarxes de quatre ports comercial

En la figura 56 es mostra un diagrama de blocs simplificat d'un analitzador de xarxes similar a l'HP8510.

Figura 56. Diagrama de blocs d'un analitzador vectorial de xarxes

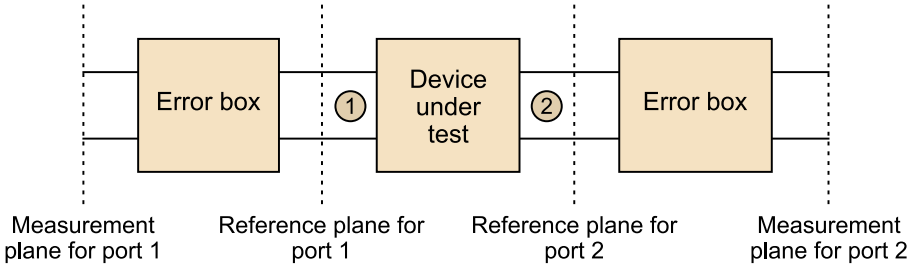


Font: extret de D. M. Pozar (2012). *Microwave engineering* (4a ed.). John Wiley.

Aquest analitzador de xarxes funciona de la manera següent. Tota la part compresa dins d'*RF source and test set* fa la mesura dels paràmetres *S* del dispositiu que s'està provant. La font d'*RF* fa un escombratge en freqüència (en l'amplada de banda escollida) i, mitjançant acobladors, les ones *a* (que tot i generar-les el mateix analitzador, cal mesurar-les també per a tenir-les com a referència) i *b* (reflectides o transmeses pel dispositiu analitzat) es transmeten al bloc següent, *IF processing*. Aquest segon bloc només és un receptor superheterodí, que baixa la freqüència del senyal a una freqüència més adequada per a processar-lo. És possible que els analitzadors més actuals no tinguin dues etapes, sinó només una, ja que els convertidors analogicodigitals actuals poden treballar cada cop a freqüències més altes. Tot i això, dependrà del marge de freqüències de l'analitzador. Actualment, els analitzadors més potents del mercat poden arribar fins a aproximadament 1 THz. En tot cas, en el bloc de *digital processing* el senyal es digitalitza, es processa i es mostren els resultats. A part de la magnitud i la fase dels paràmetres *S* els analitzadors de xarxes també calculen l'*ROE*, les pèrdues de retorn, impedància, admitància, etc.

Una característica important dels analitzadors de xarxes és la millora substancial en la precisió gràcies al programari de correcció d'errors. Aquests errors poden estar causats per desadaptacions en els acobladors direccionals, directivitat imperfecta, pèrdues i variacions en la resposta freqüencial de l'analitzador, i es corregeixen amb un procés de calibratge. Per a mesurar acuradament els paràmetres *S* d'una xarxa de microones cal que l'analitzador estigui ben calibrat, és a dir, és imprescindible que les pèrdues i variacions de fase causades pels connectors, cables i transicions utilitzades per a connectar la xarxa a l'analitzador estiguin perfectament compensades. En el diagrama de blocs de la figura 57 es mostren aquests efectes englobats en dos blocs d'error situats entre els plans de mesura real de l'analitzador i els plans de referència de la mesura de la xarxa de dos ports.

Figura 57. Diagrama de blocs del sistema de mesura d'un analitzador de xarxes i un dispositiu de dos ports



Font: extreta de D. M. Pozar (2012). *Microwave engineering* (4a. ed.). John Wiley.

Per a compensar aquests errors s'utilitzen tècniques de calibratge abans de procedir amb la mesura del dispositiu. Així, la mesura dels paràmetres *S* del dispositiu es pot dur a terme compensant aquests errors i recuperant, per tant, la matriu de paràmetres *S* només del dispositiu. Aquestes tècniques han de ser molt precises, ja que han de compensar els errors a freqüències de desenes de GHz (i superiors). Hi ha diverses tècniques de calibratge, com la de *Thru-Reflect Line* (TRL) o la de *Thru-Open Short Match* (TOSM), entre altres. En qualsevol d'aquestes tècniques, l'objectiu és trobar tots els termes d'error mitjançant la mesura de diversos components coneguts (en el cas de la tècnica TRL, una LT, un *Thru*, que és un connector directe entre els dos ports, i una impedància de valor gran; en el cas de la tècnica TOSM, un *Thru*, un circuit obert, un curtcircuit i una impedància d'adaptació). Amb aquestes mesures, i mitjançant un sistema d'equacions, es troben tots els termes d'error.

Els components necessaris per a calibrar s'acostumen a comprar amb tot un equip de calibratge. La figura 58 en mostra un exemple.

Figura 58. Equip de calibratge d'un analitzador de xarxes

Resum

En aquest mòdul s'han introduït els paràmetres *S* i s'han utilitzat per a caracteritzar xarxes a freqüències de microones. Aquests paràmetres estableixen relacions entre les ones de tensió als diferents ports de la xarxa i presenten alguns avantatges, respecte de les limitacions dels paràmetres *Z* o *Y*, quan apareixen els efectes de propagació. Per a mesurar-lo només necessitem impedàncies de valor igual al de la impedància característica de les línies de transmissió que hi ha a cada port, i així s'eviten comportaments erràtics de circuits oberts i curtcircuits. Per a considerar també la potència reflectida i transmesa, s'hi afegeix la informació de la impedància característica del port. D'aquesta manera apareixen les ones *a* i *b*, que es defineixen com l'ona de tensió (progressiva i regressiva, respectivament) normalitzada per l'arrel quadrada de la impedància característica de la línia de transmissió. Per tant, aquestes només tindran sentit físic si al port tenim precisament la línia de transmissió. En qualsevol altre cas només tindran sentit matemàtic, és a dir, hi podem operar, però no ens aporten informació sobre les ones de tensió i corrent reals als ports de la xarxa. Quan aquestes tenen sentit físic podem calcular la potència propagada simplement elevant-les al quadrat.

Per a calcular la matriu de paràmetres *S* d'un circuit o xarxa s'han presentat dos mètodes, un de basat en les tensions i els corrents presents als ports del circuit i l'altre en la descomposició del mode parell i del mode senar. Aquest últim mètode només es pot aplicar si el circuit és simètric. A més, analitzant la matriu de paràmetres *S* obtinguda podem extreure característiques intrínseques del circuit: podem saber si aquest és recíproc, si és passiu o actiu, o si conté pèrdues o no.

A llarg del mòdul s'ha demostrat que els paràmetres *S* són els més adequats quan s'ha de mesurar i caracteritzar una xarxa de microones. Tanmateix, no són els més convenients si hem d'operar amb diverses xarxes connectades entre si. Segons aquesta connexió (en cascada, sèrie, paral·lel, etc.) podem calcular algun tipus de paràmetre més apropiat, com poden ser els paràmetres *T*, els paràmetres *ABCD* o fins i tot els paràmetres *Z* o *Y*. Per al cas d'una xarxa de dos ports, s'han presentat totes les conversions entre els diferents paràmetres.

Finalment, en aquest mòdul també s'ha descrit l'aparell utilitzat per a mesurar els paràmetres *S* d'un dispositiu real: l'analitzador de xarxes vectorial. Aquest analitzador disposa d'un sistema de calibratge per a extreure els errors introduïts pels cables i connectors utilitzats en la mesura, de manera que obtenim així una gran precisió en la mesura.

Exercicis d'autoavaluació

1. A freqüències de microones, els paràmetres *S* són preferibles als paràmetres *Z* o *Y* per a la caracterització de xarxes perquè...

a) ... les ones de tensió aporten més informació que les tensions i els corrents.
b) ... resolen les limitacions d'aquests últims, ja que no utilitzen curtcircuits ni circuits oberts per a mesurar-los.
c) ... permeten interpretar d'una manera més intuïtiva el comportament físic de la xarxa mesurada.
d) ... necessiten menys càlculs a l'hora d'analitzar els circuits.

2. Els paràmetres *S* són sempre una relació...

a) ... d'ones de tensió amb ones de corrent.
b) ... d'ones de tensió V^+ i V^-.
c) ... de tensions i corrents.
d) ... d'ones de tensió normalitzades.

3. En la definició de paràmetres *S* s'utilitzen les ones *a* i *b* perquè...

a) ... són més fàcils de calcular que les ones V^+ i V^-.
b) ... caracteritzen la xarxa de microones amb més precisió.
c) ... ens donen informació directa de la potència mitjana als ports de la xarxa.
d) ... les ones V^+ i V^- no tenen sentit físic si no hi tenim una LT.

4. En una mesura de paràmetres *S*, el pla de referència és el pla a partir del qual...

a) ... es mesura la matriu de paràmetres *S*.
b) ... la matriu de paràmetres *S* no té sentit físic.
c) ... es considera que l'LT connectada té una impedància característica de valor Z_0.
d) ... podem considerar que no hi ha ones reflectides.

5. Considereu la matriu següent de paràmetres *S*:

$$[S]=\begin{bmatrix} 0,1e^{j\frac{\pi}{2}} & 0,8e^{-j\frac{\pi}{4}} & 0,3e^{-j\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0,8e^{-j\frac{\pi}{4}} & 0 & 0 & 0,4e^{j\frac{\pi}{4}} \\ 0,3e^{-j\frac{\pi}{4}} & 0 & 0 & 0,6e^{-j\frac{\pi}{4}} \\ 0 & 0,4e^{j\frac{\pi}{4}} & 0,6e^{-j\frac{\pi}{4}} & 0 \end{bmatrix} \qquad 2.175$$

a) Aquesta matriu caracteritza una xarxa recíproca, passiva i sense pèrdues.
b) Aquesta matriu caracteritza una xarxa recíproca, però no passiva i sense pèrdues.
c) Aquesta matriu caracteritza una xarxa passiva i sense pèrdues, però no recíproca.
d) Aquesta matriu no caracteritza una xarxa recíproca, passiva i sense pèrdues.

6. El coeficient de reflexió del port 1 d'una xarxa de més d'un port...

a) ... és sempre igual al paràmetre S_{11}, independentment dels altres paràmetres.
b) ... depèn exclusivament de la matriu de paràmetres *S*.
c) ... depèn del paràmetre S_{11}, de la resta de paràmetres *S*, de les impedàncies amb les quals es carreguen els altres ports i de la impedància amb què es carrega el port 1.
d) ... depèn del paràmetre S_{11}, de la resta de paràmetres *S* i de les impedàncies amb què es carreguen els altres ports.

7. En un circuit caracteritzat per la matriu de paràmetres *S* següent:

$$[S]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5j \\ 0,5j & 0,5 \end{bmatrix} \qquad 2.176$$

la matriu de paràmetres *Z* que caracteritza aquest mateix circuit és:

a) $[Z]=\begin{bmatrix} 69 & 65j \\ 65j & 69 \end{bmatrix}$.

b) $[Z]=\begin{bmatrix} 89j & 65 \\ 65 & 89j \end{bmatrix}$.

c) $[Z]=\begin{bmatrix} 69 & 5j \\ 5j & 69 \end{bmatrix}$.

d) $[Z]=\begin{bmatrix} 15 & 65j \\ 65j & 15 \end{bmatrix}$.

8. Quan tenim una xarxa connectada a un circuit real, els seus paràmetres *S*...

a) ... només tenen sentit si els ports de la xarxa estan carregats amb la seva impedància de referència.
b) ... no varien, però sí que poden variar els coeficients de reflexió i de transmissió en funció de les impedàncies que vegin els diferents ports de la xarxa.
c) ... no els podem utilitzar i els hem de convertir a paràmetres *Z* o *Y* per a analitzar el circuit.
d) ... només tindran sentit si utilitzem l'LT per a interconnectar les xarxes.

9. Dos dispositius de dos ports presenten les matrius de paràmetres *S* següents, mesurades amb la mateixa impedància de referència:

$$[S_1]=\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad 2.177$$

$$[S_2]=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad 2.178$$

Si connectem els dos dispositius en cascada, la matriu de paràmetres *S* del dispositiu global resultant és:

a) $[S_{1+2}]=\begin{bmatrix} -4{,}44 & 2{,}75 \\ 2{,}75 & -2{,}37 \end{bmatrix}$.

b) $[S_{1+2}]=\begin{bmatrix} 4{,}44 & -2{,}37 \\ -2{,}37 & 2{,}75 \end{bmatrix}$.

c) $[S_{1+2}]=\begin{bmatrix} 4{,}44 & -2{,}75 \\ -2{,}75 & 2{,}37 \end{bmatrix}$.

d) $[S_{1+2}]=\begin{bmatrix} 4{,}44 & -2{,}75 \\ 2{,}75 & 2{,}37 \end{bmatrix}$.

10. Una xarxa d'un sol port presenta un coeficient de reflexió $\Gamma = j0{,}5$, mesurat amb una impedància de referència de 50 Ω. Si connectem aquesta xarxa a una LT d'impedància de referència de 75 Ω, el coeficient de reflexió presentarà un valor:

a) $\Gamma = 0{,}52e^{j2{,}69}$.
b) $\Gamma = 0{,}22e^{j0{,}69}$.
c) $\Gamma = 0{,}52e^{j0{,}69}$.
d) $\Gamma = 0{,}22e^{j2{,}69}$.

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. b

2. d

3. c

4. a

5. b

6. d

7. a

8. b

9. c

10. d

Glossari

a *f* Ona progressiva de tensió normalitzada respecte de l'arrel quadrada de la impedància característica de la línia de transmissió. En una xarxa de microones seran les ones entrants.

adaptació *f* Connexió d'una impedància igual al valor de la impedància característica en un extrem d'una línia de transmissió.

b *f* Ona regressiva de tensió normalitzada respecte de l'arrel quadrada de la impedància característica de la línia de transmissió. En una xarxa de microones seran les ones sortints.

coeficient de reflexió *m* Relació entre l'ona progressiva i l'ona regressiva en un punt dins d'una línia de transmissió.

freqüències de microones *f pl* Interval de freqüències de microones comprés entre 300 MHz i 300 GHz.

impedància característica *f* Relació entre l'ona de tensió progressiva (o regressiva) i l'ona de corrent progressiva (o regressiva).

impedància de referència *f* Impedància amb què es carreguen els ports d'una xarxa de microones per a mesurar els seus paràmetres *S*.

línia de transmissió *f* Guia d'ones formada per dos o més conductors amb secció recta constant que propaga ones TEM. sigla LT

LT *f* Vegeu línia de transmissió.

matriu conjugada *f* Matriu que canvia el signe dels components imaginaris.

matriu hermítica *f* Matriu conjugada i transposada.

matriu transposada *f* Matriu que intercanvia files per columnes.

ona progressiva *f* Ona que es propaga en el sentit creixent de l'eix definit.

ona regressiva *f* Ona que es propaga en el sentit decreixent de l'eix definit.

pla de referència *m* Pla de calibratge de l'analitzador de xarxes.

paràmetres *ABCD* *m pl* Paràmetres de transmissió. Paràmetres que relacionen les tensions i els corrents amb les tensions i els corrents presents als ports d'una xarxa de microones.

paràmetres *S* *m pl* Paràmetres de dispersió. Paràmetres que relacionen les ones sortints (*b*) amb les ones entrants (*a*) presents als ports d'una xarxa de microones. *en* scattering parameters

paràmetres *T* *m pl* Paràmetres de transmissió. Paràmetres que relacionen les ones entrants (*a*) i sortints (*b*) amb les ones entrants (*a*) i sortints (*b*) presents als ports d'una xarxa de microones.

paràmetres *Y* *m pl* Paràmetres d'admitància. Paràmetres que relacionen els corrents amb les tensions presents als ports d'una xarxa de microones.

paràmetres *Z* *m pl* Paràmetres d'impedància. Paràmetres que relacionen les tensions amb els corrents presents als ports d'una xarxa de microones.

scattering parameters *m pl* Vegeu paràmetres S.

xarxa passiva *f* Xarxa de microones que no amplifica la potència del senyal incident.

xarxa recíproca *f* Xarxa de microones que presenta una matriu simètrica, és a dir, $S_{ij} = S_{ji}$ ($\forall\ i \neq j$).

xarxa sense pèrdues *f* Xarxa de microones que no atenua la potència del senyal incident.

xarxa simètrica *f* Xarxa que si es divideix per la meitat dóna dues xarxes simètricament iguals.

Bibliografia

Bibliografia bàsica

Pozar, D. M. (2012). *Microwave engineering* (4a. ed.). John Wiley.

Ribó, M.; Pajares, F. J. (2008). *Circuits d'alta freqüència*. Enginyeria La Salle (Guia d'estudis semipresencials).

Bibliografia complementària

González, G. (2004). *Microwave Transistor Amplifier* (2a. ed.). Prentice Hall.

Weber, R. J. (2001). *Introduction to Microwave Circuits, Radio Frequency and Design Applications*. IEEE Press Series on RF and Microwave Technology.