

# Análisis de circuitos de microondas

Albert-Miquel Sánchez Delgado

PID\_00193559



Los textos e imágenes publicados en esta obra están sujetos –excepto que se indique lo contrario– a una licencia de Reconocimiento-Compartir igual (BY-SA) v.3.0 España de Creative Commons. Se puede modificar la obra, reproducirla, distribuirla o comunicarla públicamente siempre que se cite el autor y la fuente (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), y siempre que la obra derivada quede sujeta a la misma licencia que el material original. La licencia completa se puede consultar en: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/es/legalcode.ca>

# Índice

<b>Introducción</b> .....	5
<b>Objetivos</b> .....	6
<b>1. Los parámetros <math>Z</math> e <math>Y</math>, y sus limitaciones</b> .....	7
<b>2. Parámetros <math>S</math> de una red de microondas</b> .....	13
2.1. Justificación de la caracterización de una red a través de ondas de tensión .....	13
2.2. Definición de las ondas $a$ y $b$ .....	16
2.3. Sentido físico de $a$ y $b$ .....	20
2.4. Coeficiente de reflexión generalizado .....	21
2.5. Parámetros $S$ generalizados .....	23
2.6. Redes pasivas y sin pérdidas .....	28
2.7. Redes recíprocas .....	32
2.8. Cambio del plano de referencia .....	33
2.9. Puntos clave .....	35
<b>3. Cálculo de los parámetros <math>S</math></b> .....	36
3.1. Cálculo de los parámetros $S$ a partir de tensiones y corrientes ...	36
3.2. Cálculo de los parámetros $S$ a partir de la descomposición en modo par/impar .....	39
<b>4. Relaciones entre parámetros <math>S</math>, <math>Z</math>, <math>Y</math>, <math>T</math> y <math>ABCD</math></b> .....	47
4.1. Parámetros $T$ .....	47
4.2. Parámetros $ABCD$ .....	49
4.3. Relación entre matrices de parámetros $S$ , $Z$ e $Y$ para una red de $N$ puertos .....	51
4.4. Relación entre parámetros $S$ , $T$ y $ABCD$ para una red de 2 puertos .....	52
<b>5. Analizadores de redes</b> .....	58
<b>Resumen</b> .....	61
<b>Ejercicios de autoevaluación</b> .....	63
<b>Solucionario</b> .....	65
<b>Glosario</b> .....	66

---

<b>Bibliografía.....</b>	<b>67</b>
--------------------------	-----------

## Introducción

En circuitos donde las medidas de las pistas, componentes e integrados son pequeñas en relación con la longitud de onda de trabajo, se suelen utilizar los parámetros  $Z$  o  $Y$  (de impedancia y de admitancia respectivamente) para modelizar su comportamiento. No obstante, a las frecuencias de microondas (entre 300 MHz y 300 GHz), las longitudes de los circuitos empiezan a ser comparables a las longitudes de onda de trabajo y aparecen los efectos de propagación. Las pistas se convierten en líneas de transmisión (de ahora en adelante, LT), y, en consecuencia, la medida de este tipo de parámetros deviene complicada. El motivo principal es que para poder medirlos con precisión, se necesita utilizar cortocircuitos o circuitos abiertos perfectos, pero los efectos de propagación hacen que un cortocircuito deje de ser un cortocircuito y un circuito abierto deje de ser un circuito abierto. Bajo estas condiciones son de más utilidad otro tipo de parámetros, los parámetros  $S$ , que, en vez de relacionar tensiones con corrientes, relacionan ondas de tensión incidentes con ondas de tensión reflejadas y/o transmitidas. Su principal ventaja es que para medirlos solo se necesitan impedancias de un cierto valor (que dependerá de la impedancia característica de la línea de transmisión de cada puerto de la red), mucho más fáciles de obtener que los cortocircuitos y los circuitos abiertos. Además, dado que estas redes tienen conectadas LT a sus puertos, los parámetros  $S$  resultan idóneos para su caracterización, puesto que permiten trabajar directamente con las ondas de tensión que se propagan por su interior y facilitan así el análisis completo de los circuitos.

Para introducir estos nuevos parámetros, este módulo se ha organizado de la manera siguiente. Primero de todo se presentan los objetivos que hay que lograr. En el apartado "Los parámetros  $Z$  e  $Y$ , y sus limitaciones" se revisan los parámetros  $Z$  e  $Y$ , y se describen las limitaciones que estos presentan cuando se trabaja a frecuencias de microondas. En el apartado "Parámetros  $S$  de una red de microondas" se introducen los parámetros  $S$  y se exponen sus ventajas, así como otras características importantes. En el apartado "Cálculo de los parámetros  $S$ " se muestran dos técnicas para calcular los parámetros  $S$  de un circuito, el método de las tensiones y corrientes, y el método de la descomposición en modo par y modo impar. En el apartado "Relaciones entre parámetros  $S$ ,  $Z$ ,  $Y$ ,  $T$  y  $ABCD$ " se establecen las relaciones entre los diferentes parámetros. Finalmente, en el apartado "Analizadores de redes" se describe el funcionamiento del instrumento utilizado para la medida de los parámetros  $S$ , el analizador de redes.

## Objetivos

Con el estudio de este módulo se persiguen los objetivos siguientes:

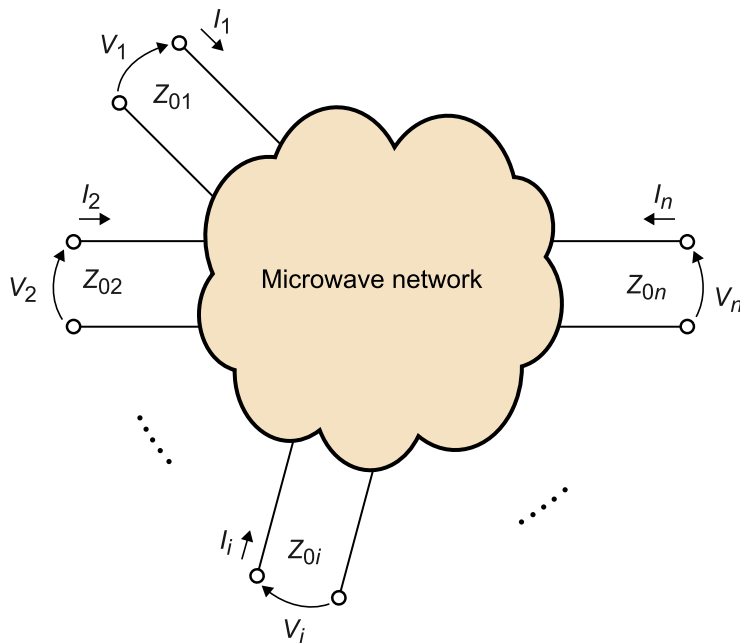
1. Conocer los parámetros  $S$  y sus ventajas en la caracterización de redes.
2. Entender el concepto y la utilidad de las ondas  $a$  y  $b$ .
3. Entender el concepto de coeficiente de reflexión.
4. Entender el concepto de redes pasivas, recíprocas y sin pérdidas.
5. Saber calcular los parámetros  $S$  de una red utilizando los dos métodos expuestos.
6. Saber encontrar los parámetros  $S$  si se modifica el plano de referencia.
7. Saber relacionar los parámetros  $S$  con los parámetros  $T$ ,  $Z$ ,  $Y$  y  $ABCD$ .
8. Entender el funcionamiento de un analizador de redes.

## 1. Los parámetros $Z$ e $Y$ , y sus limitaciones

Una **red de microondas** se define como un circuito de elementos discretos (bobinas, condensadores, resistencias, etc.) y/o distribuidos (LT) accesible a través de sus puertos.

Los puertos se suelen realizar también sobre LT de una cierta impedancia característica,  $Z_{0i}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , tal y como se muestra en la figura 1.

Figura 1. Red de microondas genérica de  $n$  puertos



La caracterización del comportamiento de una red de microondas es importante a la hora de diseñar esta misma red y/o redes adyacentes en un circuito complejo. Existen muchos ejemplos en este sentido, como puede ser la necesidad de adaptar dos circuitos para maximizar la transferencia de potencia entre ellos. Conociendo su impedancia y/o admitancia de entrada, se puede construir la red de adaptación adecuada. Por lo tanto, cualquier circuito se puede describir por medio de los **parámetros de impedancia** (matriz de parámetros  $Z$ ) o **de admitancia** (matriz de parámetros  $Y$ ) midiendo la representación fasorial de las tensiones y las corrientes en sus puertos. Estas relaciones se establecen respectivamente como:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \dots + Z_{1n}I_n \\
 V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \dots + Z_{2n}I_n \\
 &\vdots \\
 V_n &= Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + \dots + Z_{nn}I_n
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + \cdots + Y_{1n}V_n \\
 I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + \cdots + Y_{2n}V_n \\
 &\vdots \\
 I_n &= Y_{n1}V_1 + Y_{n2}V_2 + \cdots + Y_{nn}V_n
 \end{aligned}
 \quad 2.2$$

Estas expresiones las podemos representar también de manera sencilla con una notación matricial:

$$[V] = [Z][I] \quad 2.3$$

$$[I] = [Y][V] \quad 2.4$$

donde  $[V]$  e  $[I]$  son los vectores de tensiones y corrientes respectivamente, y  $[Z]$  e  $[Y]$  las matrices de impedancias y admitancias respectivamente:

$$[V] = [V_1 \ V_2 \ \cdots \ V_n] \quad 2.5$$

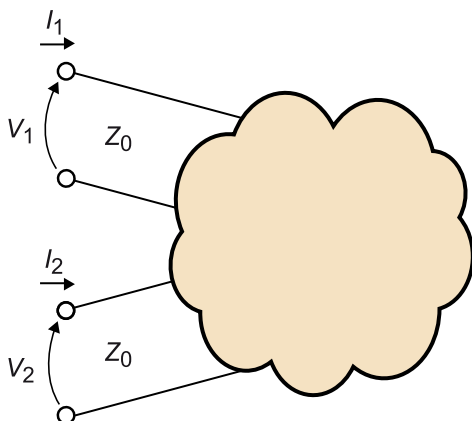
$$[I] = [I_1 \ I_2 \ \cdots \ I_n] \quad 2.6$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ Z_{n1} & & & Z_{nn} \end{bmatrix} \quad 2.7$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ Y_{n1} & & & Y_{nn} \end{bmatrix} \quad 2.8$$

A frecuencias donde las longitudes de onda son comparables a las medidas del circuito, la medida de las tensiones y corrientes en los puertos de la red deviene un problema, debido a los efectos de propagación de la señal. Para exponerlo con claridad, escenificaremos el ejemplo de una red de solo dos puertos con la misma impedancia característica,  $Z_0$ , como la de la figura 2.

Figura 2. Red de microondas genérica de dos puertos



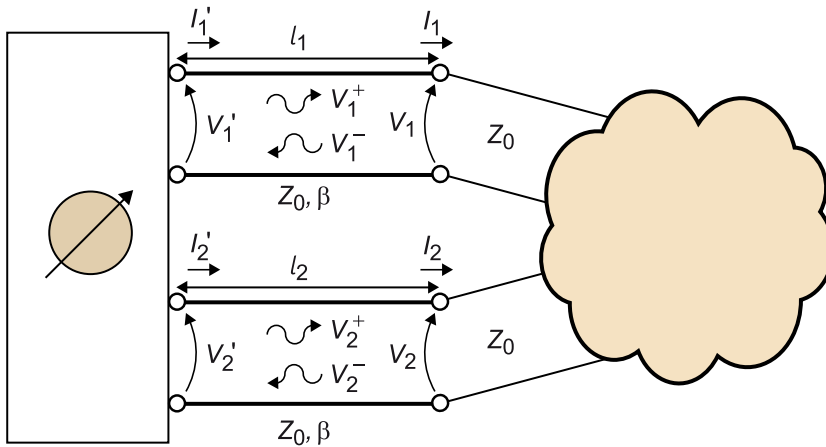


En este caso, la relación de tensiones y corrientes en sus puertos la podemos encontrar con los parámetros  $Z$  como:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \quad 2.9$$

Para medir estos parámetros, conectamos un medidor a los dos puertos de la red a través de dos LT (una por puerto) de impedancia característica también  $Z_0$ , tal y como se observa en la figura 3 (estas LT son los cables que nos permitirán interconectar la red amb el medidor; por ejemplo, cables coaxiales).

Figura 3. Medida de la impedancia de una red de microondas



$Z_0$  es la impedancia característica de cada uno de los puertos de la red de microondas y de las LT que interconectan esta con el medidor.

Además, para medir los parámetros  $Z$  de la red hay que tener en cuenta que:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}; & Z_{12} &= \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} \\ Z_{21} &= \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}; & Z_{22} &= \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} \end{aligned} \quad 2.10$$

Esto implica que el medidor deberá implementar un circuito abierto en el puerto 2 para la medida de los parámetros  $Z_{11}$  y  $Z_{21}$  (para que  $I_2 = 0$ ), tal y como muestra la figura 4, y un circuito abierto en el puerto 1 para la medida de los parámetros  $Z_{12}$  y  $Z_{22}$  (para que  $I_1 = 0$ ), tal y como muestra la figura 5.

Figura 4. Medida de los parámetros  $Z_{11}$  y  $Z_{21}$  de una red de dos puertos, donde el puerto 2 presenta un circuito abierto

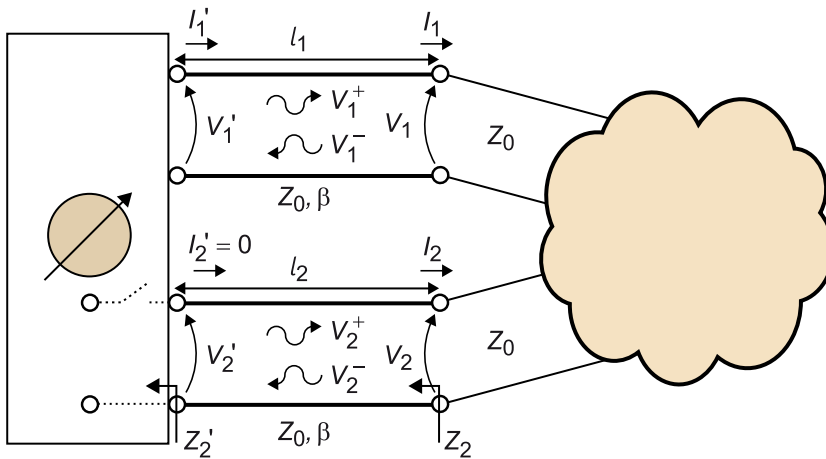
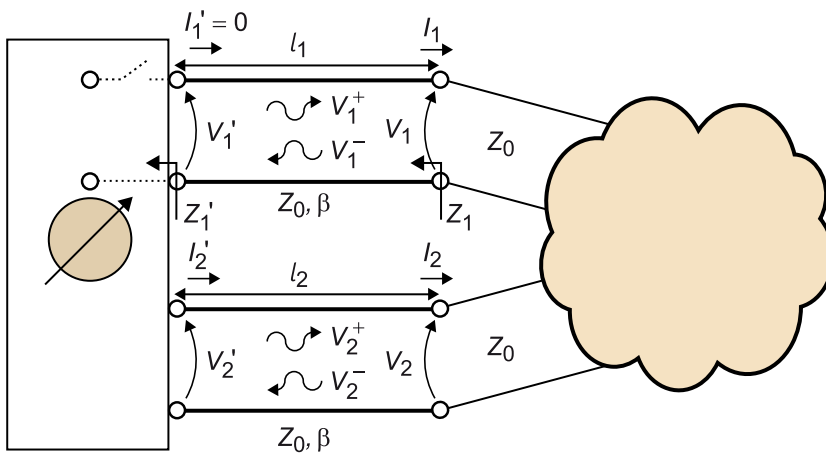


Figura 5. Medida de los parámetros  $Z_{12}$  y  $Z_{22}$  de una red de dos puertos, donde el puerto 1 presenta un circuito abierto



El problema es que los efectos de propagación causados por las LT pueden suponer que en los puertos de la red no haya un circuito abierto, sino cualquier otra impedancia imaginaria en función de las longitudes de estas LT ( $Z_1 \neq Z_1'$  y  $Z_2 \neq Z_2'$ ). Además, las tensiones y corrientes que mide el medidor no son  $V_1, V_2, I_1, I_2$  respectivamente, sino  $V_1', V_2', I_1', I_2'$ , también modificadas por los efectos de propagación. Para encontrar los valores de  $V_1, V_2, I_1, I_2$  se tendría que descomponer  $V_1', V_2', I_1', I_2'$  en ondas de tensión progresivas y regresivas y analizar las LT.

Análogamente, para los parámetros  $Y$  tendríamos:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{aligned} \quad 2.11$$

Y podemos medirlos teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 Y_{11} &= \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}; & Y_{12} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \\
 Y_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}; & Y_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

En este caso, el medidor deberá implementar un cortocircuito en el puerto 2 para la medida de los parámetros  $Y_{11}$  e  $Y_{21}$  (para que  $V_2 = 0$ ), tal y como muestra la figura 6, y un cortocircuito en el puerto 1 para la medida de los parámetros  $Y_{12}$  e  $Y_{22}$  (para que  $V_1 = 0$ ), tal y como muestra la figura 7.

Figura 6. Medida de los parámetros  $Y_{11}$  e  $Y_{21}$  de una red de dos puertos, donde el puerto 2 presenta un cortocircuito

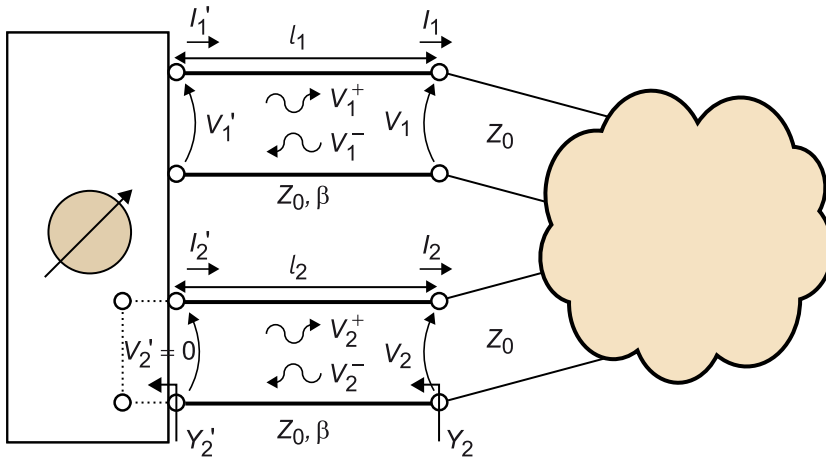
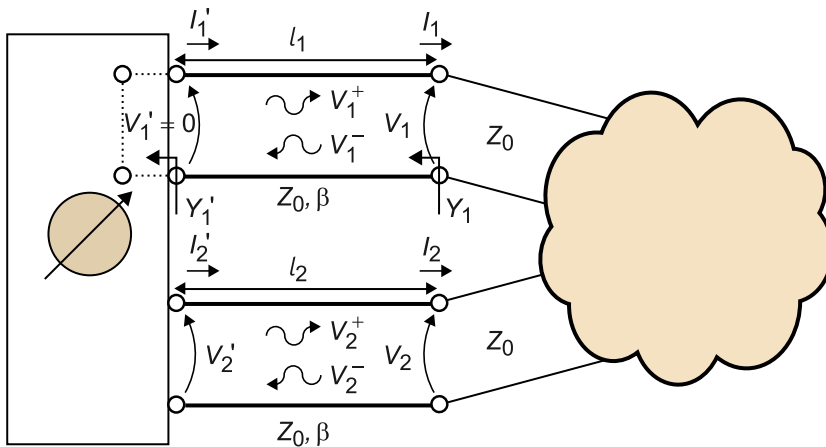


Figura 7. Medida de los parámetros  $Y_{12}$  e  $Y_{22}$  de una red de dos puertos, donde el puerto 1 presenta un cortocircuito



Por lo tanto, tenemos los mismos problemas que en la medida de los parámetros  $Z$ . En los puertos de la red no habrá un cortocircuito, sino una impedancia imaginaria que dependerá de la longitud de la LT ( $Y_1 \neq Y_1'$  e  $Y_2 \neq Y_2'$ ), y los valores de tensión y corriente medidos  $V_1', V_2', I_1', I_2'$ , en lugar de  $V_1, V_2, I_1, I_2$ .

Una manera de evitar estos problemas es utilizar dispositivos de sintonización que se deben ajustar para cada frecuencia con el fin de que la red vea en sus puertos un circuito abierto o un cortocircuito (en función de la medida que queramos realizar,  $Z$  o  $Y$  respectivamente), hecho que representa un trabajo

incómodo, tedioso y no muy práctico. Queda patente, pues, la limitación de estos parámetros cuando se han de caracterizar redes a frecuencias de microondas y, en consecuencia, la necesidad de un nuevo tipo de caracterización de dispositivos más adecuada. Además, en muchos elementos guiados de microondas es problemático definir no ya tan solo impedancias, sino tensiones y corrientes (por ejemplo, en una guía de ondas rectangular). Lo que sí que puede definirse son los coeficientes de reflexión y transmisión sobre los campos eléctricos de su interior. Por lo tanto, una caracterización de estos circuitos a partir de tensiones, corrientes e impedancias parece menos adecuada que una a partir de ondas y coeficientes de reflexión.

## 2. Parámetros $S$ de una red de microondas

Ya se han visto las limitaciones que presenta una medida de parámetros  $Z$  o  $Y$  a frecuencias de microondas, puesto que los efectos de propagación causados por las LT utilizadas en la medida dificultan la obtención de un resultado minucioso. Para mejorar la caracterización de dispositivos a estas frecuencias necesitamos utilizar un sistema de medida diferente que no se base en tensiones y corrientes. Dado que sabemos que en las LT del medidor se propagan ondas progresivas y regresivas de tensión (estas últimas originadas por la reflexión de la onda progresiva al final de la LT en función de la impedancia de entrada que presente la red de microondas), podríamos intentar utilizarlas para caracterizar la red. Los parámetros que relacionan las ondas de tensión en los diferentes puertos de la red se denominan *parámetros  $S$* <sup>1</sup>, y en el presente apartado se analizarán con detalle.

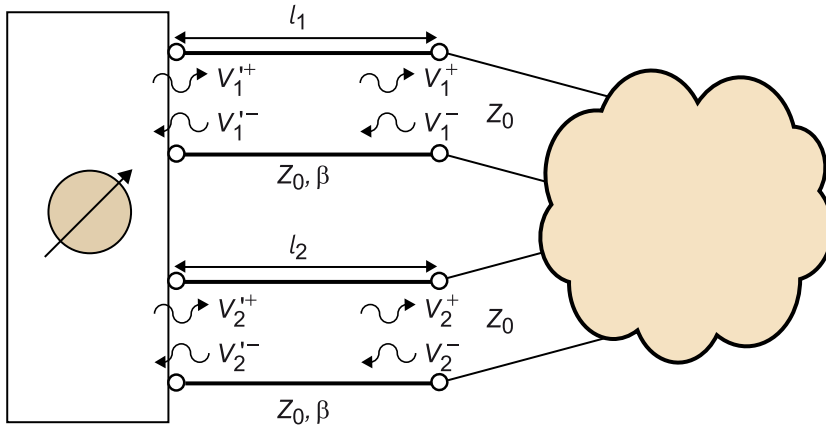
<sup>(1)</sup>Nomenclatura que proviene de *scattering parameters*, parámetros de dispersión.

Para presentar las características de estos nuevos parámetros de manera estructurada, este apartado se ha organizado tal y como se explica a continuación. En el subapartado "Justificación de la caracterización de una red a través de ondas de tensión" se introducen los parámetros  $S$  y se justifica su utilización. Para considerar también la propagación de potencia en la red de microondas, se utilizarán las ondas de tensión normalizadas  $a$  y  $b$ , definidas en los subapartados "Definición de las ondas  $a$  y  $b$ " y "Sentido físico de  $a$  y  $b$ ", en vez de las ondas de tensión tradicionales  $V^+$  y  $V^-$ . La relación de estas ondas nos la dan el coeficiente de reflexión generalizado en el caso de una red de un solo puerto (subapartado "Coeficiente de reflexión generalizado") o los parámetros  $S$  generalizados en el caso de una red de  $n$  puertos (subapartado "Parámetros  $S$  generalizados"). Las propiedades de la matriz de parámetros  $S$  que caracterizan redes recíprocas, pasivas y sin pérdidas se describen en los subapartados "Redes pasivas y sin pérdidas" y "Redes recíprocas". En el subapartado "Cambio del plano de referencia" se presenta el cálculo para modificar el plano de referencia de una matriz de parámetros  $S$  que describa el comportamiento de una red de microondas. Y, finalmente, en el subapartado "Puntos clave" se hace referencia a los puntos más importantes que hay que tener muy claros de este apartado.

### 2.1. Justificación de la caracterización de una red a través de ondas de tensión

Para comprobar si utilizar una caracterización a partir de ondas de tensión progresivas y regresivas nos supone alguna ventaja ante los parámetros  $Z$  o  $Y$ , trataremos de aplicarlo a la red de dos puertos de la figura 2, donde los dos puertos presentan la misma impedancia característica  $Z_0$ . El sistema de medida se muestra en la figura 8.

Figura 8. Sistema de medida de ondas de tensión progresivas y regresivas



En este caso deberemos relacionar las ondas de tensión incidentes con las ondas de tensión reflejadas en un puerto y las ondas de tensión incidentes con las ondas de tensión transmitidas al otro puerto. Los parámetros que relacionan estas ondas de tensión los denominamos *parámetros S*, y para el caso particular de la red de la figura 8, esta relación queda reflejada en la ecuación siguiente:

$$\begin{bmatrix} V_1^- \\ V_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \end{bmatrix} \quad 2.13$$

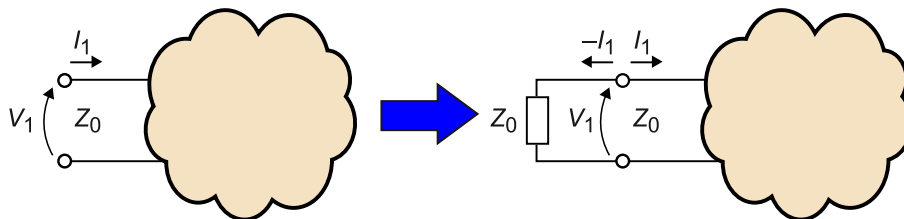
Para medir cada uno de los diferentes parámetros se deberá cumplir que:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \left. \frac{V_1^-}{V_1^+} \right|_{V_2^+ = 0} ; S_{12} = \left. \frac{V_1^-}{V_2^+} \right|_{V_1^+ = 0} \\ S_{21} &= \left. \frac{V_2^-}{V_1^+} \right|_{V_2^+ = 0} ; S_{22} = \left. \frac{V_2^-}{V_2^+} \right|_{V_1^+ = 0} \end{aligned} \quad 2.14$$

Para conseguir que  $V_1^+ = 0$  y  $V_2^+ = 0$ , solo hay que conectar una impedancia igual al valor de la impedancia característica de la LT del puerto 1 o 2 respectivamente.

La figura 9 lo muestra gráficamente en el caso de una red de un puerto.

Figura 9. Adaptación del puerto de una red de microondas

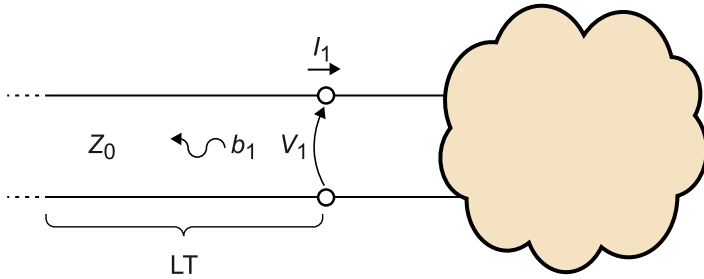


**Ved también**

Podéis ver la ecuación 2.44 del apartado "Concepto de adaptación de impedancias" del módulo "Líneas de transmisión" de este material didáctico.

Por lo tanto, obtenemos que para que  $V^+ = 0$  hay que conectar al puerto la impedancia de referencia del puerto. Físicamente esto equivale a conectar una línea semiinfinita de impedancia característica  $Z_0$ .

Figura 10. Circuito equivalente al de la figura 9. Tenemos conectada una LT semiinfinita al puerto



Esta situación se conoce como **adaptación**, y la impedancia utilizada para adaptar la LT es la **impedancia de referencia** de la medida.

Todo esto implica que nuestro medidor deberá presentar esta impedancia en el puerto 2 para la medida de los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$ , tal y como se muestra en la figura 11. Y en el puerto 1 para la medida de los parámetros  $S_{12}$  y  $S_{22}$ , tal y como se muestra en la figura 12.

Figura 11. Medida de los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$  de una red de dos puertos

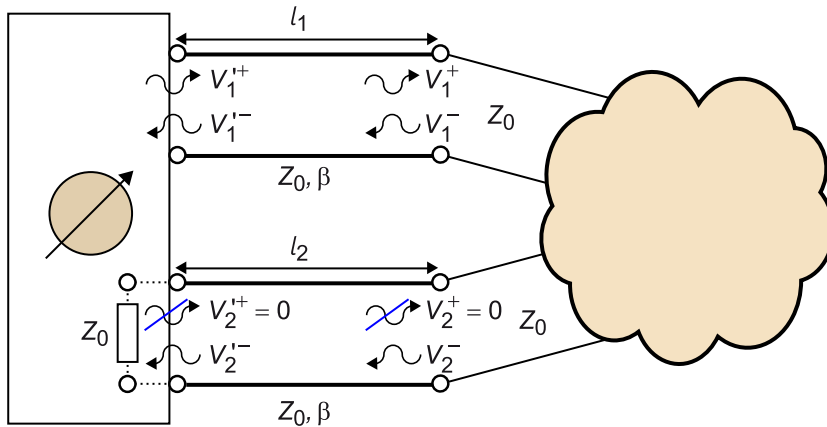
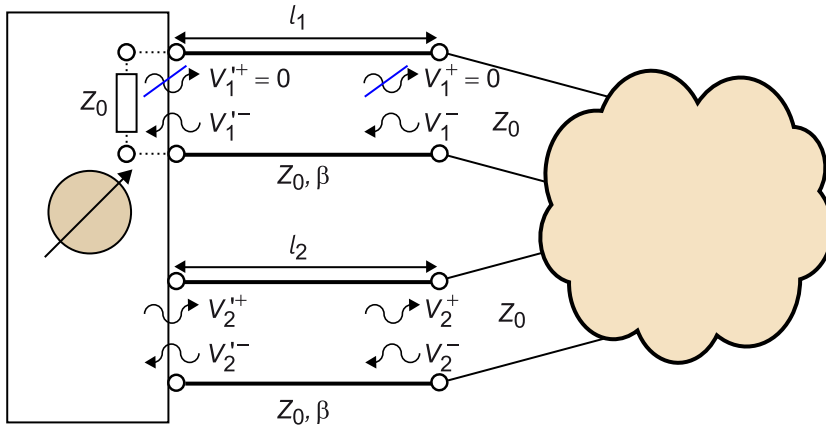


Figura 12. Medida de los parámetros  $S_{12}$  y  $S_{22}$  de una red de dos puertos



La ventaja principal es que resulta más fácil implementar una impedancia que presente un valor constante en un cierto margen de frecuencias que un cortocircuito o un circuito abierto, por lo que simplifica mucho la medida. Además, el valor de esta impedancia se refleja directamente en el puerto de la red, puesto que la onda progresiva de la LT adaptada será 0 en cualquier punto de esta sea cual sea su longitud. Por otro lado, se sigue manteniendo el inconveniente de que el medidor mide las señales  $V_1'^+$  y  $V_2'^+$  en lugar de  $V_1^-$  y  $V_2^-$  (que son las que realmente caracterizan la red). Pero en el caso de las ondas de tensión este problema se resuelve fácilmente considerando la longitud de las LT en la fase de los fasores de las ondas de tensión, por lo que la fase del coeficiente de reflexión al inicio ( $\rho'$ ) y al final ( $\rho$ ) de las LT varía de manera:

$$\varphi_{\rho'} = \varphi_{\rho} - 2\beta l \quad 2.15$$

Por lo tanto, una caracterización a partir de ondas de tensión parece mucho más adecuada que a partir de tensiones y corrientes, puesto que los efectos de propagación introducidos por las LT que interconectan la red de microondas con el medidor quedan compensados de manera sencilla. Además, estos parámetros siguen modelizando completamente el comportamiento de la red igual que hacían los parámetros  $Z$  o los parámetros  $Y$ . Por este motivo, a frecuencias de microondas los parámetros  $S$  son más adecuados para caracterizar cualquier tipo de red o dispositivo.

### 2.2. Definición de las ondas $a$ y $b$

Acabamos de ver cómo a través de los parámetros  $S$  podemos relacionar las ondas de tensión en los diferentes puertos de una red de dos puertos. Concretamente, los parámetros de transmisión se habían definido como:

$$S_{12} = \left. \frac{V_1^-}{V_2^+} \right|_{V_1^+ = 0} ; S_{21} = \left. \frac{V_2^-}{V_1^+} \right|_{V_2^+ = 0} \quad 2.16$$

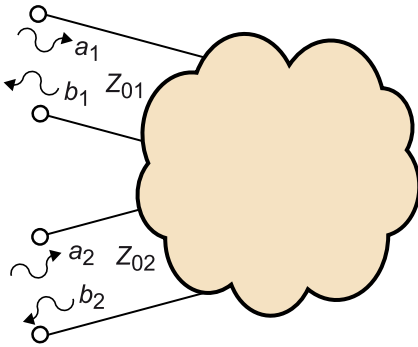


Tenemos, por lo tanto, una relación en términos de ondas de tensión. No obstante, esto no nos da información directa sobre la propagación de potencia en el circuito, a menudo mucho más interesante, puesto que no se refleja la impedancia característica de la LT por donde viaja la onda. Este hecho es especialmente importante si las LT de los dos puertos de la red presentan impedancias características diferentes. Para encontrar una relación más adecuada en términos de potencia se define un nuevo conjunto de ondas que denominaremos **ondas normalizadas de tensión**:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{0i}}} \\ b_i &= \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{0i}}} \end{aligned} \quad 2.17$$

donde  $a_i$  representa la onda incidente (normalizada) en el puerto  $i$  y  $b_i$  representa la onda reflejada (normalizada) del puerto  $i$ . En el caso de la red de dos puertos, esta vez con diferentes impedancias características en cada puerto, estas ondas normalizadas quedarían reflejadas tal y como se muestra en la figura 13.

Figura 13. Definición de las ondas normalizadas de tensión



Y la ecuación 2.16 quedará modificada como:

$$S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0} ; S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad 2.18$$

que sería equivalente a:

$$S_{12} = \left. \frac{V_1^- \sqrt{Z_{02}}}{V_2^+ \sqrt{Z_{01}}} \right|_{V_1^+=0} ; S_{21} = \left. \frac{V_2^- \sqrt{Z_{01}}}{V_1^+ \sqrt{Z_{02}}} \right|_{V_2^+=0} \quad 2.19$$

En consecuencia, los parámetros de reflexión quedan como:

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} ; S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0} \quad 2.20$$

Las relaciones establecidas entre las ondas normalizadas de tensión y tensión y corriente son:

$$\begin{aligned} V_i &= V_i^+ + V_i^- = \sqrt{Z_{0i}}(a_i + b_i) \\ I_i &= I_i^+ - I_i^- = \frac{1}{\sqrt{Z_{0i}}}(a_i - b_i) \end{aligned} \quad 2.21$$

siendo  $i$  la referencia al puerto  $i$ . Si invertimos las dependencias:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}}(V_i + Z_{0i}I_i) \\ b_i &= \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}}(V_i - Z_{0i}I_i) \end{aligned} \quad 2.22$$

Fijaos en que si queremos conocer la potencia media en el puerto de la red, podemos calcularla directamente como:

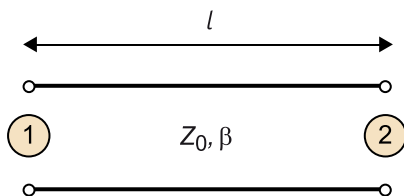
$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{V_i I_i^*\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{|a_i|^2 - |b_i|^2 + (b_i a_i^* - b_i^* a_i)\} = \frac{1}{2}|a_i|^2 - \frac{1}{2}|b_i|^2 \quad 2.23$$

Este resultado nos indica que la potencia media entregada al puerto  $i$  es igual a la potencia de la onda incidente menos la potencia de la onda reflejada. Por este motivo las ondas normalizadas  $a$  y  $b$  también se denominan *ondas de potencia*, puesto que elevándolas al cuadrado podemos calcular fácilmente la potencia media. Si expresáramos este resultado en términos de ondas de tensión  $V_i^+$  y  $V_i^-$ , el resultado nos quedaría en función de la impedancia característica del puerto  $i$ .

Para empezar a practicar con estos parámetros calcularemos los parámetros  $S$  de una LT en el ejemplo siguiente.

Sea una LT sin pérdidas de longitud  $l$  y constante de fase  $\beta$ , como la de la figura 14.

Figura 14. LT de longitud  $l$



Calcular sus parámetros  $S$ .

#### Solución

Esta LT la podemos ver como una red de microondas de dos puertos y, en consecuencia, la podemos caracterizar con una matriz de parámetros  $S$  de  $2 \times 2$ :

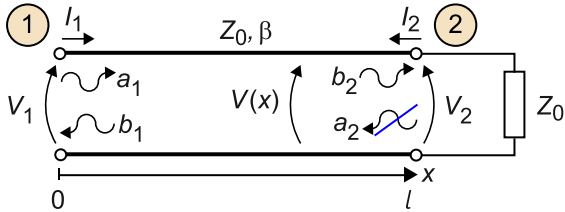
$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad 2.24$$

Empezamos calculando los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$ , dado que ambos comparten que  $a_2 = 0$ , con:

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0}; S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad 2.25$$

Por lo tanto, adaptamos el puerto 2 de la LT. El subíndice de cada onda se define según el puerto, tal y como se muestra en la figura 15.

Figura 15. Adaptamos el puerto 2 para el cálculo de los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$



De 2.21 sabemos que:

$$V_1 = V(0) = V_1^+ e^{-j\beta 0} + V_1^- e^{j\beta 0} = V_1^+ + V_1^- = \sqrt{Z_0}(a_1 + b_1) \quad 2.26$$

$$V_2 = V(l) = V_1^+ e^{-j\beta l} + V_1^- e^{j\beta l} = V_2^+ + V_2^- = \sqrt{Z_0}(a_2 + b_2) \quad 2.27$$

Dado que tenemos el puerto 2 adaptado, por fuerza:

$$V_1^-(x) = \left. \frac{dV_1}{dx} \right|_{x \in [0, l]} \rightarrow b_1 = \frac{V_1^-}{\sqrt{Z_0}} = 0 \rightarrow S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = 0 \quad 2.28$$

Para encontrar  $b_2$ , utilizamos  $V_2$ :

$$V_2 = V(l) = V_1^+ e^{-j\beta l} + V_1^- e^{j\beta l} = V_1^+ e^{-j\beta l} = \sqrt{Z_0} a_1 e^{-j\beta l} = \sqrt{Z_0} b_2 \rightarrow b_2 = a_1 e^{-j\beta l} \quad 2.29$$

Por lo tanto:

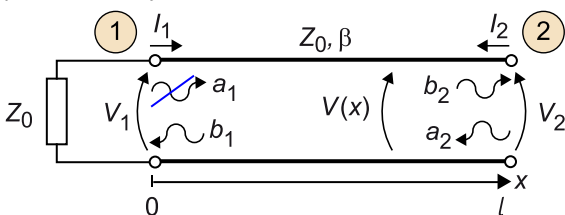
$$S_{21} = e^{-j\beta l} \quad 2.30$$

Procedemos ahora con el cálculo de los dos parámetros restantes,  $S_{12}$  y  $S_{22}$ , con:

$$S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0}; S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0} \quad 2.31$$

Para que  $a_1 = 0$ , hay que adaptar el puerto 1. El circuito restante y la definición de ondas se muestran en la figura 16.

Figura 16. Adaptamos el puerto 1 para el cálculo de los parámetros  $S_{21}$  y  $S_{22}$



Se puede observar que el circuito es simétrico al de la figura 15. Por lo tanto, el cálculo de los parámetros es análogo al de las ecuaciones 2.26-2.31. En este caso obtendríamos que:

$$S_{22} = 0 \quad 2.32$$

$$S_{12} = e^{-j\beta l} \quad 2.33$$

Unificando los resultados en una única matriz obtenemos:

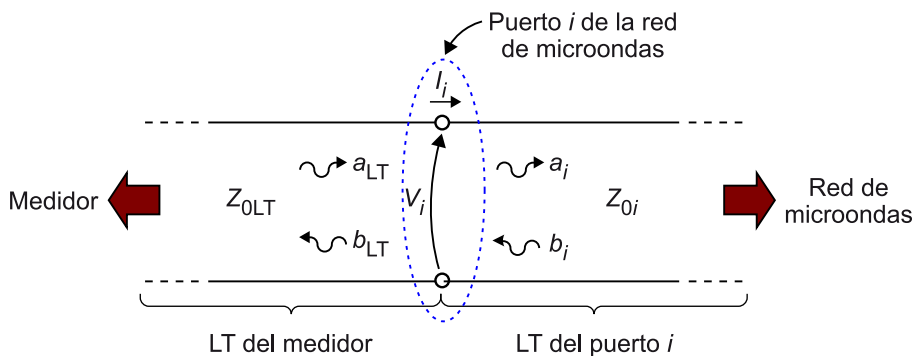
$$[S] = e^{-j\beta l} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 2.34$$

Este resultado nos dice que una LT desfasa las ondas que circulan del puerto 1 al 2 y/o del 2 al 1 un valor de  $-\beta l$  radianes.

### 2.3. Sentido físico de $a$ y $b$

Las ondas  $a$  y  $b$  en cualquier puerto de una red solo tendrán sentido físico si conectamos una LT (LT del medidor) al puerto de la red con la misma impedancia característica que la LT que constituye el puerto (LT del puerto). Por ejemplo, en el caso del puerto  $i$  de una red de microondas cualquiera, como se muestra en la figura 17, la impedancia característica de la LT tendría que ser  $Z_{0i}$  ( $Z_{0LT} = Z_{0i}$ ).

Figura 17. LT conectada a una red de un solo puerto



Siendo  $a_i$  y  $b_i$  las ondas normalizadas de tensión presentes en el puerto  $i$  de la red de microondas, y  $a_{LT}$  y  $b_{LT}$  las ondas normalizadas de tensión presentes en la LT del medidor. Utilizando las ecuaciones 2.17 y 2.22, el valor de estas ondas justo en el puerto es:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} (V_i + Z_{0i} I_i) = \frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{0i}}} \\ b_i &= \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} (V_i - Z_{0i} I_i) = \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{0i}}} \end{aligned} \quad 2.35$$

Hay que fijarse en que los valores que mide el medidor son aquellos proporcionados por su LT, es decir,  $a_{LT}$  y  $b_{LT}$ , y, una vez se compensa de manera adecuada esta LT (es decir, se considera el desfase introducido por la LT), obtenemos el valor de las ondas  $a_i$  y  $b_i$ , puesto que justo antes y justo después del puerto  $a_{LT} = a_i$  y  $b_{LT} = b_i$  (si y solo si  $Z_{0LT} = Z_{0i}$ ). Pero si en el puerto de la red no hay una LT (el puerto  $i$  no está constituido por una LT) o la impedancia característica de la LT del puerto  $i$  no es la misma que la del puerto (en este

caso,  $Z_{0LT} \neq Z_{0i}$ ), entonces  $a_{LT} \neq a_i$  y  $b_{LT} \neq b_i$ , y las ondas que nosotros estaremos interpretando como  $a_i$  y  $b_i$  no tendrán sentido físico, solo matemático. Sí que seguirán teniendo significado físico los valores de la tensión  $V_i$  y la corriente  $I_i$ , que, conociendo los valores matemáticos de  $a_i$  y  $b_i$ , podemos recuperar a partir de la transformación lineal de:

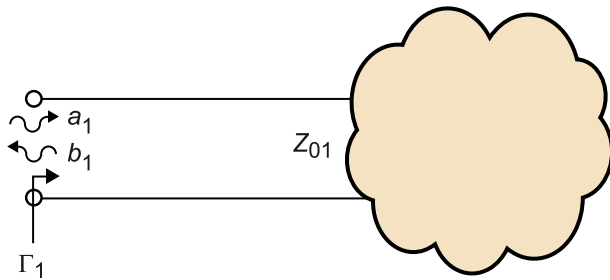
$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} \begin{bmatrix} 1 & Z_{0i} \\ 1 & -Z_{0i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ I_i \end{bmatrix} \quad 2.36$$

Si además se trata de una LT con  $Z_{0LT} \neq Z_{0i}$ , entonces también tenemos ondas progresivas y regresivas, a pesar de que estas no tienen nada que ver con  $a_i$  y  $b_i$ .

## 2.4. Coeficiente de reflexión generalizado

Tomamos como partida la figura 18.

Figura 18. Coeficiente de reflexión generalizado en una red de microondas genérica de un solo puerto



Una vez definidas las ondas  $a$  y  $b$ , y observando la figura 18, podemos definir el **coeficiente de reflexión generalizado**  $\Gamma$  como:

$$\Gamma_1 = \frac{\text{onda normalizada que se propaga en el sentido contrario al que miramos}}{\text{onda normalizada que se propaga en el mismo sentido que miramos}} = \frac{b_1}{a_1} \quad 2.37$$

Si nos encontramos en una situación en la que el punto donde consideramos que empieza nuestro puerto es una LT y desarrollamos esta definición podemos ver que:

$$\Gamma = \frac{b_1}{a_1} = \frac{\frac{V_1^-}{\sqrt{Z_{01}}}}{\frac{V_1^+}{\sqrt{Z_{01}}}} = \frac{V_1^-}{V_1^+} = \rho \equiv \text{coeficiente de reflexión del puerto} \quad 2.38$$

En un caso más general,  $a$  y  $b$  pueden también no tener sentido físico, sino solo matemático. En este caso no tenemos claramente ninguna  $V^+$  y  $V^-$  físicas. En cualquier caso, siempre se cumple que:

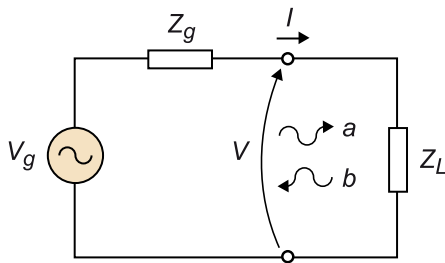
$$\Gamma = \frac{b_1}{a_1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{Z_{01}}}(V_1 - Z_{01}I_1)}{\frac{1}{2\sqrt{Z_{01}}}(V_1 + Z_{01}I_1)} = \frac{V_1 - Z_{01}I_1}{V_1 + Z_{01}I_1} = \frac{V_1/I_1 - Z_{01}}{V_1/I_1 + Z_{01}} = \frac{Z_1 - Z_{01}}{Z_1 + Z_{01}} = \frac{Y_{01} - Y_1}{Y_{01} + Y_1} \quad 2.39$$

$$Z_1 = Z_{01} \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

A continuación se presenta un ejemplo de una situación muy habitual, un generador y una impedancia de generador (que pueden representar el modelo de Thévenin de un dispositivo generador cualquiera) cargado con una impedancia (que puede representar la impedancia de entrada de otra red de microondas).

Consideramos el circuito de la figura 19, formado por un generador y una carga cualesquiera:

Figura 19. Circuito genérico formado por el equivalente de Thévenin de un generador y de una carga



Calcular el valor de las ondas  $a$  y  $b$  utilizando la definición de coeficiente de reflexión generalizado.

**Solución**

Analizando el circuito obtenemos:

$$V = V_g - Z_g I \quad 2.40$$

Si sustituimos las definiciones de  $V$  e  $I$  en función de las ondas  $a$  y  $b$  de la ecuación 2.21, obtenemos:

$$\sqrt{Z_0}(a+b) = V_g - \frac{Z_g}{\sqrt{Z_0}}(a-b) \quad 2.41$$

Aislando  $a$  en función de  $b$ :

$$a = \frac{V_g}{\sqrt{Z_0}} \frac{Z_0}{Z_g + Z_0} + b \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = b_s + b\Gamma_g \quad 2.42$$

Por otro lado, la carga nos fija la relación:

$$b = \Gamma_L a \quad 2.43$$

Tenemos, por lo tanto, un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Si lo solucionamos, obtenemos:

$$\begin{aligned} a &= b_s \frac{1}{1 - \Gamma_g \Gamma_L} \\ b &= b_s \frac{\Gamma_L}{1 - \Gamma_g \Gamma_L} \end{aligned} \quad 2.44$$

donde:

$$\begin{aligned} b_s &= \frac{V_g}{\sqrt{Z_0}} \frac{Z_0}{Z_g + Z_0} \\ \Gamma_g &= \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} \\ \Gamma_L &= \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \end{aligned} \quad 2.45$$

Si la carga contiene una LT de impedancia característica  $Z_0$ ,  $b_s$  es la onda progresiva que el generador entregaría a la carga en el instante inicial. Para el caso en el que  $\Gamma_g = 0$ , entonces:

$$a = b_s = \frac{1}{2} \frac{V_g}{\sqrt{Z_0}} \quad 2.46$$

Esto implica que el generador es capaz de generar  $a$  independientemente de la carga que haya conectada. Es lo que se denomina **generador canónico**.

Otros dos casos que se pueden dar son:

1) Que no tengamos onda reflejada ( $\Gamma_L = 0$ ). En este caso:

$$\begin{aligned} a &= b_s = \frac{1}{2} \frac{V_g}{\sqrt{Z_0}} (1 - \Gamma_g) \\ b &= 0 \end{aligned} \quad 2.47$$

2) Que tengamos máxima transferencia de potencia ( $Z_L = Z_g^*$ ). En este caso:

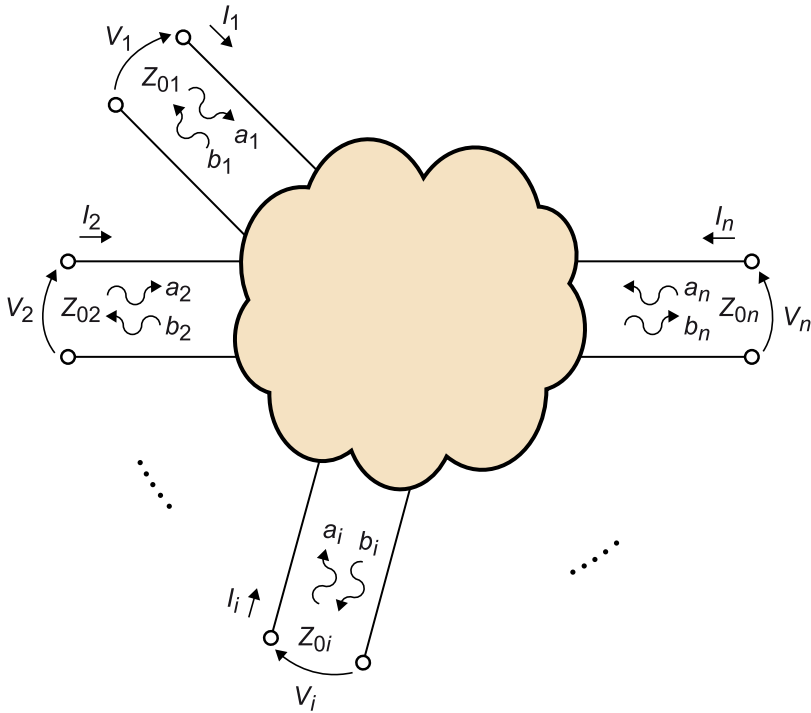
$$\begin{aligned} a &= b_s \frac{1}{1 - |\Gamma_g|^2} \\ b &= b_s \frac{\Gamma_g^*}{1 - |\Gamma_g|^2} \end{aligned} \quad 2.48$$

Por lo tanto, máxima transferencia de potencia y adaptación son, en general, fenómenos diferentes.

## 2.5. Parámetros S generalizados

El coeficiente de reflexión generalizado nos relaciona la onda incidente  $a$  con la onda reflejada  $b$  en una red de un puerto. En una situación más general como la de la figura 20, donde tenemos una red de  $n$  puertos, utilizaremos también la relación de ondas normalizadas de tensión  $a$  y  $b$  para caracterizarla.

Figura 20. Red de microondas genérica de  $n$  puertos



Definiremos  $a_i$  siempre como la onda entrante al puerto  $i$ , y  $b_i$  como la onda saliente del puerto  $i$ , tal y como se observa en la figura 20.

Se sigue cumpliendo que:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{0i}}} \\ b_i &= \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{0i}}} \end{aligned} \quad 2.49$$

Y la relación de ondas incidentes y reflejadas entre cualquier puerto viene dada por los parámetros  $S$ . Su matriz queda definida como:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \dots & \\ S_{n1} & \dots & & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad 2.50$$

o, de manera matricial:

$$[b] = [S][a] \quad 2.51$$



Además, en la mayoría de los casos  $Z_{0i} = Z_0$ , es decir, hay una impedancia característica igual en todos los puertos. En este caso, si introducimos la ecuación 2.49 en la ecuación 2.51, se cumple que la relación de ondas de tensión queda determinada por la misma matriz de parámetros  $S$ , es decir:

$$[V^-] = [S][V^+] \quad 2.52$$

siendo  $[V^+]$  el vector de ondas de tensión incidentes y  $[V^-]$  el vector de ondas de tensión reflejadas o transmitidas.

Los parámetros  $S$  indican por lo tanto los diferentes caminos que siguen las ondas  $a$  para llegar a una salida. De la ecuación 2.50 se extrae que:

- Los parámetros  $S_{ii}$  son parámetros de reflexión en el puerto  $i$ , que se pueden calcular con:

$$S_{ii} = \left. \frac{b_i}{a_i} \right|_{a_k=0 \text{ para } k \neq i} \quad 2.53$$

Este parámetro también se puede denotar con  $S_{ii} = \Gamma_i$ , si y solo si el resto de los puertos están adaptados.

- Los parámetros  $S_{ij}$  son parámetros de transmisión del puerto  $j$  al puerto  $i$ , que se pueden calcular con:

$$S_{ij} = \left. \frac{b_i}{a_j} \right|_{a_k=0 \text{ para } k \neq j} \quad 2.54$$

Para conseguir  $a_k = 0$  necesitaremos conectar alguna terminación en el puerto  $k$ :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\sqrt{Z_{0k}}} (V_k + Z_{0k}I_k) = 0 \\ V_k &= -Z_{0k}I_k \\ \frac{V_k}{-I_k} &= Z_{0k} \end{aligned} \quad 2.55$$

Por lo tanto, igual que cuando hablábamos de ondas de tensión, solo hay que conectar una impedancia igual a la impedancia característica de la LT, es decir, solo es necesario adaptarla.

Un punto importante que hay que entender de los parámetros  $S$  es que, en una situación real (donde los puertos de la red de microondas están conectados a otros circuitos), el coeficiente de reflexión del puerto  $i$  no tiene por qué ser igual a  $S_{ii}$ . De hecho, solo coincidirán si el resto de los puertos están adaptados. Análogamente, el coeficiente de transmisión del puerto  $j$  al puerto  $i$  solo coincidirá en el parámetro  $S_{ij}$  si el resto de los puertos están adaptados. Los parámetros  $S$  de una red solo están

definidos para una impedancia de referencia única en cada puerto. Si esta varía en uno o más puertos, los parámetros  $S$  no varían pero sí lo hacen los coeficientes de reflexión y/o de transmisión.

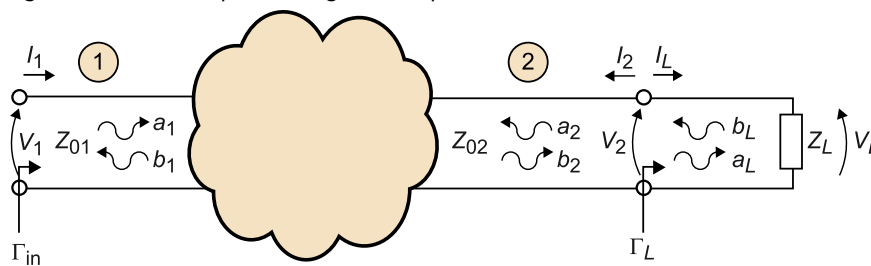
Vamos a comprobarlo con un ejemplo práctico.

Para el caso sencillo de una red de dos puertos cargada con impedancias en los dos puertos, calcular los coeficientes de reflexión de cada puerto bajo estas condiciones.

### Solución

Sea la red de la figura 21, cargada con una impedancia de valor  $Z_L$  en el puerto 2. Esta impedancia podría modelizar, por ejemplo, la impedancia de entrada de otra red de dos puertos, una antena, o cualquier otro tipo de circuito.

Figura 21. Red de dos puertos cargada en el puerto 2



Según la ecuación 2.50, la red quedaría caracterizada con:

$$b_1 = a_1 S_{11} + a_2 S_{12} \quad 2.56$$

$$b_2 = a_1 S_{21} + a_2 S_{22} \quad 2.57$$

La red, junto con la carga  $Z_L$ , se comporta como una nueva carga que podemos modelizar a partir de su coeficiente de reflexión:

$$\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1} \quad 2.58$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\Gamma_L = \frac{b_L}{a_L} = \frac{Z_L - Z_{02}}{Z_L + Z_{02}} \quad 2.59$$

Observando la figura 21 podemos ver que esta ecuación la podemos reescribir como:

$$\Gamma_L = \frac{b_L}{a_L} = \frac{a_2}{b_2} \rightarrow a_2 = \Gamma_L b_2 \quad 2.60$$

Ahora podemos trabajar un poco las ecuaciones 2.56 y 2.57, de manera que:

$$b_1 = a_1 S_{11} + a_2 S_{12} = a_1 S_{11} + \Gamma_L b_2 S_{12} \quad 2.61$$

$$b_2 = a_1 S_{21} + a_2 S_{22} = a_1 S_{21} + \Gamma_L b_2 S_{22} \quad 2.62$$

Si aislamos  $b_2$  en la ecuación 2.62 y lo introducimos en la ecuación 2.61, obtenemos:

$$b_2 = \frac{a_1 S_{21}}{1 - \Gamma_L S_{22}} \quad 2.63$$

$$b_1 = a_1 S_{11} + \Gamma_L S_{12} \frac{a_1 S_{21}}{1 - \Gamma_L S_{22}} \quad 2.64$$

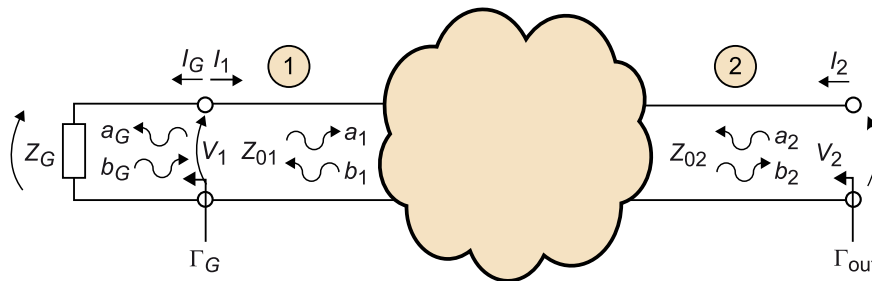
Ahora podemos aislar el coeficiente de reflexión como:

$$\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - \Gamma_L S_{22}} \quad 2.65$$

Por lo tanto, se demuestra que el coeficiente de reflexión solo será igual al parámetro  $S_{11}$  cuando el puerto 2 esté adaptado, es decir, cuando  $\Gamma_L = 0$ . Alternativamente, también sería equivalente a  $S_{11}$  si  $S_{12} = 0$  o  $S_{21} = 0$ . Este caso se dará cuando no haya paso de señal de un puerto al otro. Podría ser el caso de un filtro fuera de la banda de paso. Para el resto de los casos,  $\Gamma_{in} \neq S_{11}$ .

Análogamente, podríamos seguir el mismo procedimiento para el puerto 2, empezando por cargar el puerto 1, tal y como se muestra en la figura 22.

Figura 22. Red de dos puertos cargada en el puerto 1



Definiendo:

$$\Gamma_G = \frac{b_G}{a_G} = \frac{Z_G - Z_{01}}{Z_G + Z_{01}} \quad 2.66$$

obtenemos que:

$$\Gamma_{out} = \frac{b_2}{a_2} = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_G}{1 - \Gamma_G S_{11}} \quad 2.67$$

Se vuelve a demostrar que el coeficiente de reflexión en el puerto 2 depende de  $\Gamma_G$  y, en consecuencia, de  $Z_G$ . Para los casos en los que  $S_{12} \neq 0$  y  $S_{21} \neq 0$ , el coeficiente de reflexión solo será igual a  $S_{22}$  cuando  $Z_G = Z_{01}$ .

## 2.6. Redes pasivas y sin pérdidas

Una red de microondas como la de la figura 20 se considera **pasiva** si no amplifica la potencia de la señal incidente, y **sin pérdidas** si tampoco la atenúa. Bajo estas condiciones, la matriz  $[S]$  es unitaria:

$$[S][S]^H = [S]^H[S] = [I] \quad 2.68$$

donde  $[S]^H$  es la **matriz hermítica de S** (traspuesta conjugada de S,  $[S]^H = ([S]^t)^*$ ) e  $[I]$  es la **matriz identidad**.

Esta igualdad se deriva de la demostración siguiente. En una red pasiva y sin pérdidas, toda la potencia incidente se refleja o se transmite a otro puerto, lo que implica:

$$P_{\text{in}} = P_{\text{out}} \quad 2.69$$

Sea:

$$P_{\text{in}} = \sum_{i=1}^n P_i^+ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} |a_i|^2 \quad 2.70$$

y

$$P_{\text{out}} = \sum_{i=1}^n P_i^- = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} |b_i|^2 \quad 2.71$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} |a_i|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} |b_i|^2 \quad 2.72$$

$|a_i|^2$  lo podemos descomponer como el producto de  $a_i^* \cdot a_i$ , donde  $a_i^*$  es el hermítico de  $a_i$ . Y lo mismo con  $|b_i|^2$  como el producto de  $b_i^* \cdot b_i$ , donde  $b_i^*$  es el hermítico de  $b_i$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} |a_i|^2 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} a_i^* \cdot a_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} |b_i|^2 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} b_i^* \cdot b_i \end{aligned} \quad 2.73$$

Si introducimos las igualdades de la ecuación 2.73 en la ecuación 2.72, entonces:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} a_i^* \cdot a_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} b_i^* \cdot b_i \quad 2.74$$

Esta ecuación la podemos expresar en formato vectorial como:

$$[a]^H [a] = [b] [b]^H \quad 2.75$$

Teniendo en cuenta que:

$$[b] = [S] [a] \quad 2.76$$

y que:

$$(A \cdot B)^H = B^H \cdot A^H \quad 2.77$$

se cumple que:

$$[b]^H = [a]^H [S]^H \quad 2.78$$

Por lo tanto:

$$[a]^H [a] = [b] [b]^H = [a]^H [S]^H [S] [a] \quad 2.79$$

Esta igualdad solo puede ser cierta si:

$$[S] [S]^H = [S]^H [S] = [Id] \quad 2.80$$

Como se quería demostrar, si multiplicamos una matriz de parámetros  $S$ ,  $[S]$ , pasiva y sin pérdidas por su matriz hermítica,  $[S]^H$ , obtenemos la matriz identidad. Por lo tanto,  $[S]$  es unitaria. Si desarrollamos el contenido de las matrices de la expresión 2.80 obtenemos:

$$[S] [S]^H = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots \\ \vdots & \ddots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11}^* & \dots \\ S_{12}^* & \ddots \\ S_{13}^* & \\ \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \quad 2.81$$

Y, por lo tanto, se desprende que:

$$\sum_{j=1}^n S_{ij} S_{ij}^* = \sum_{j=1}^n |S_{ij}|^2 = 1 \quad \forall i = 1 \dots n \quad 2.82$$

Si os fijáis, esta última ecuación nos vuelve a decir que en una red pasiva y sin pérdidas, toda la potencia incidente o bien se refleja (expresado con el término  $|S_{ii}|^2$ ), o bien se transmite (expresado a través del término  $|S_{ij}|^2$  para  $j \neq i$ ). En caso de que la red fuera pasiva y presentara pérdidas, el resultado del sumatorio sería inferior a 1. En caso de que la red fuera activa y sin pérdidas, el resultado sería mayor que 1.

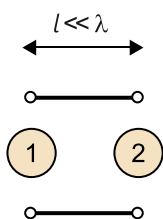
Una gran ventaja de los parámetros  $S$  que caracterizan una red pasiva es que estos tienen un módulo acotado entre 0 y 1 y siempre se pueden calcular y/o medir.

Por otro lado, los parámetros  $Z$  e  $Y$  no están acotados (la parte real estará comprendida entre 0 e  $\infty$ , y la parte imaginaria entre  $-\infty$  e  $\infty$ ), por lo que para algunos circuitos las matrices de estos parámetros pueden ser singulares o estar mal condicionadas.

En el ejemplo siguiente calcularemos los parámetros  $Z$  y  $S$  de un circuito. Veremos cómo en este caso el circuito no tiene matriz de parámetros  $Z$ , pero sí de parámetros  $S$ .

Muchas veces no tenemos un circuito único para analizar, sino varios circuitos interconectados entre ellos con conectores formando una red de circuitos. Para analizar el comportamiento de esta red, nos puede interesar tener caracterizado el conector de alguna manera. Vamos a caracterizar el caso sencillo de un conector de dos puertos eléctricamente pequeño, es decir, un conector donde no consideraremos los efectos de propagación, como el de la figura 23.

Figura 23.  
Conector de  
dos puertos  
eléctricamente  
pequeño



### Solución

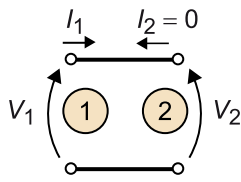
Empecemos caracterizándolo con la matriz de parámetros  $Z$ . Los primeros parámetros que calculamos son:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}; \quad Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad 2.83$$

Para hacer que  $I_2 = 0$  tenemos que dejar el puerto 2 en circuito abierto:

Figura 24. El puerto 2  
lo dejamos en circuito

abierto para calcular los parámetros  $Z_{11}$  y  $Z_{21}$



Fijaos en que si  $I_2 = 0$ , entonces  $I_1 = 0$  también. Esto implica que los parámetros de la ecuación 2.83 quedan:

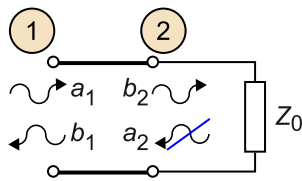
$$\begin{aligned} Z_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \infty \\ Z_{21} &= \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \infty \end{aligned} \quad 2.84$$

Análogamente, obtendremos el mismo resultado para los parámetros  $Z_{12}$  y  $Z_{22}$ , obteniendo una matriz:

$$Z = \begin{bmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{bmatrix} \quad 2.85$$

Por lo tanto, este circuito no lo podemos caracterizar con los parámetros  $Z$ . Veamos qué sucede con los parámetros  $S$ . Empezamos cargando el puerto 2 con una impedancia de referencia  $Z_0$ :

Figura 25. Cargamos el puerto 2 con una impedancia de referencia  $Z_0$

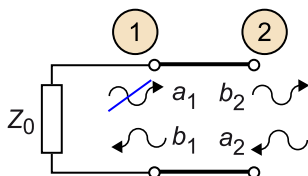


En este caso:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} = \frac{a_2}{a_1} = 0 \\ S_{21} &= \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} = \frac{a_1}{a_1} = 1 \end{aligned} \quad 2.86$$

Y, si cargamos el puerto 1:

Figura 26. Cargamos el puerto 1 con una impedancia de referencia  $Z_0$



Obtenemos:

$$\begin{aligned} S_{12} &= \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0} = \frac{a_2}{a_2} = 1 \\ S_{22} &= \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0} = \frac{a_1}{a_2} = 0 \end{aligned} \quad 2.87$$

Y la matriz total de parámetros  $S$  nos queda:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 2.88$$

Hemos podido calcular por lo tanto los parámetros  $S$  de un circuito que no tiene matriz de parámetros  $Z$ . Estos parámetros los podemos calcular y/o medir con cualquier tipología de circuito, puesto que siempre obtendremos un resultado acotado entre 0 y 1, mientras que los parámetros  $Z$  o  $Y$  no se pueden encontrar en todos los casos.

## 2.7. Redes recíprocas

Una red de microondas será **recíproca** si su matriz de parámetros  $S$ ,  $[S]$ , es una matriz simétrica:  $S_{ij} = S_{ji}$  (para  $\forall i \neq j$ ).

La red de la figura 20 puede ser recíproca si no contiene elementos como transistores, ferritas o diodos en funcionamiento no lineal.

Ya hemos visto cómo podemos determinar algunas características de la matriz de parámetros  $S$  de un circuito, que es conociendo si esta es pasiva, sin pérdidas o recíproca. Vamos a aplicarlo a un ejemplo.

Una red de dos puertos tiene la matriz de parámetros  $S$  siguiente:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0,15 & 0,85e^{-j\frac{\pi}{4}} \\ 0,85e^{j\frac{\pi}{4}} & 0,2 \end{bmatrix} \quad 2.89$$

Determinar si esta matriz es recíproca, pasiva y sin pérdidas.

### Solución

Dado que  $[S]$  no es simétrica ( $S_{12} \neq S_{21}$ ), la red no es recíproca. Para ser una red pasiva y sin pérdidas, la matriz de parámetros  $S$  debería cumplir la ecuación 2.82. Si la aplicamos a este caso:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |S_{1j}|^2 &= |0,15|^2 + |0,85|^2 = 0,74 < 1 \\ \sum_{j=1}^n |S_{2j}|^2 &= |0,85|^2 + |0,2|^2 = 0,76 < 1 \end{aligned} \quad 2.90$$

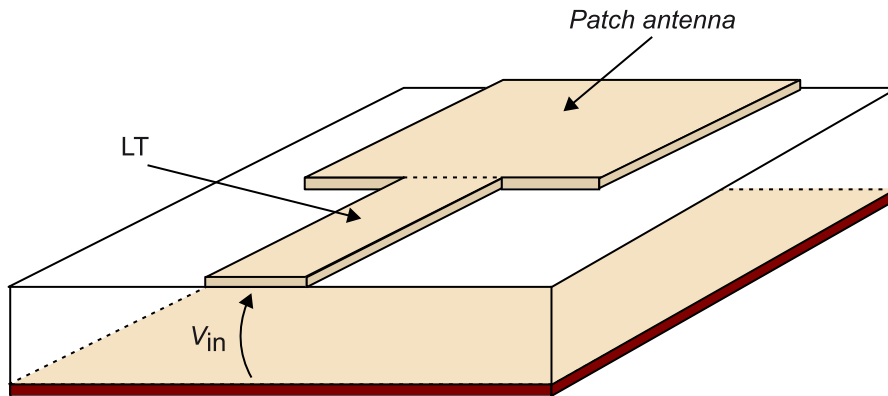
Dado que la suma de la potencia reflejada y transmitida en ambos casos es inferior a la potencia incidente (puesto que la relación es inferior a la unidad), se trata de una red pasiva con pérdidas, lo que implica que algún elemento de la red que modeliza esta matriz o bien tiene pérdidas o bien radia energía.



## 2.8. Cambio del plano de referencia

A menudo puede suceder que la red de microondas no sea directamente accesible y resulte necesario hacer un cambio del plano de referencia (punto a partir del cual se miden los parámetros  $S$ ). Por ejemplo, imaginad el caso de una antena *microstrip* como la que se muestra en la figura 27.

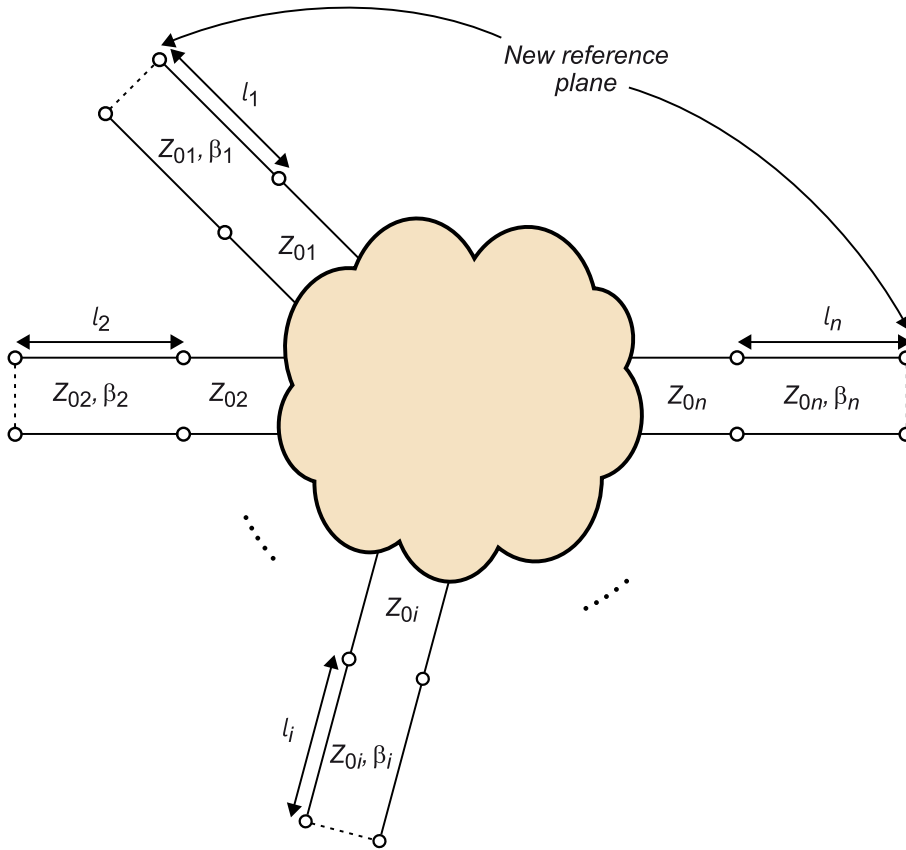
Figura 27. Antena *microstrip* con línea de transmisión de entrada



Esta antena está alimentada por una línea de transmisión (también *microstrip*) que de ninguna manera puede ser desconectada de la antena, puesto que realiza la adaptación. Dado que no podemos conectar físicamente el medidor de parámetros  $S$  directamente a la antena, esta línea de transmisión introducirá un efecto sobre la medida (principalmente sobre la fase de los parámetros  $S$ , si consideramos que no tiene pérdidas). Por lo tanto, tenemos que considerar este efecto a la hora de considerar los parámetros obtenidos.

Un caso más general es el que se muestra en la figura 28, donde tenemos una red de microondas de  $n$  puertos, todos ellos conectados a una línea de transmisión de impedancia característica  $Z_{0i}$  igual a la de referencia del puerto  $i$ .

Figura 28. Cambio de plano de referencia de una red de  $n$  puertos



Los nuevos puertos, situados en el nuevo plano de referencia (figura 28), tienen también una impedancia de referencia  $Z_{0i}$ . Si denotamos la antigua matriz de parámetros  $S$  (sin líneas de transmisión) como  $[S]$ , y la nueva matriz de parámetros  $S$  (con líneas de transmisión) como  $[S']$ , se cumple la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
 S'_{ij} &= S_{ij} e^{-j(\beta_i l_i + \beta_j l_j)} \\
 S'_{ii} &= S_{ii} e^{-j2\beta_i l_i}
 \end{aligned}
 \tag{2.91}$$

Vamos a aplicar este resultado a un ejemplo.

Un medidor de parámetros  $S$  sin calibrar nos da una matriz de un dispositivo de dos puertos tal como:

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-j\frac{4\pi}{3}} & e^{-j\frac{5\pi}{3}} \\ e^{-j\frac{5\pi}{3}} & e^{-j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix}
 \tag{2.92}$$

Si hemos utilizado dos cables coaxiales de longitud  $\lambda/3$  exactamente iguales para la medida, encontrar la matriz de parámetros  $S$  real del dispositivo.

**Solución**

Para resolver el problema utilizaremos la ecuación 2.91, pero deberemos invertir las dependencias. Fijaos en que los parámetros  $S$  del enunciado están medidos en los extremos de los cables de  $\lambda/3$ , y se nos pide extraer el efecto de estos cables, es decir, mover el plano de referencia a los puertos de la red (lo que tenemos son los parámetros  $S'$  y queremos encontrar los parámetros  $S$ ). Podemos empezar por ejemplo con el parámetro  $S_{12}$ :

$$\begin{aligned} \frac{e^{-j\frac{5\pi}{3}}}{\sqrt{2}} &= S_{12} e^{-j(\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2)} = S_{12} e^{-j\beta(l_1 + l_2)} = S_{12} e^{-j2\beta l} \rightarrow \\ \rightarrow S_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{5\pi}{3}} e^{j2\beta l} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{5\pi}{3}} e^{j2\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{5\pi}{3}} e^{j\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{3}} \end{aligned} \quad 2.93$$

El mismo procedimiento lo podemos seguir con el parámetro  $S_{11}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{4\pi}{3}} &= S_{11} e^{-j2\beta l} \rightarrow \\ \rightarrow S_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{4\pi}{3}} e^{j2\beta l} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{4\pi}{3}} e^{j2\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad 2.94$$

Como la matriz es simétrica, obtendremos los mismos resultados para los parámetros  $S_{21}$  y  $S_{22}$  respectivamente. Por lo tanto, la matriz del dispositivo sin el efecto de los cables es:

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{\pi}{3}} \\ e^{j\frac{5\pi}{3}} & 1 \end{bmatrix} \quad 2.95$$

## 2.9. Puntos clave

En este apartado se han introducido los parámetros  $S$ . Los puntos más destacados que es necesario tener muy claros son:

- Los parámetros  $S$  establecen relaciones de ondas de tensión normalizadas incidentes denotadas como  $a$  con ondas de tensión normalizadas salientes denotadas como  $b$ .
- Estos parámetros caracterizan completamente el comportamiento de una red de microondas y son más fáciles de medir cuando trabajamos a frecuencias de microondas.
- Las ondas  $a$  y  $b$  nos dan información directa sobre la propagación de potencia si las elevamos al cuadrado, y solo tienen sentido físico si en el puerto  $i$  de la red tenemos una LT de impedancia característica  $Z_{0i}$ .
- El término **adaptación** implica cargar una LT con una impedancia igual a su impedancia característica.
- El coeficiente de reflexión del puerto  $i$  solo coincidirá con el parámetro  $S_{ii}$  si tenemos el resto de los puertos adaptados.
- Una red se considera pasiva si no amplifica la potencia de la señal incidente, y sin pérdidas si tampoco la atenúa. Una red es recíproca si su matriz de parámetros  $S$  es una matriz simétrica.

### 3. Cálculo de los parámetros $S$

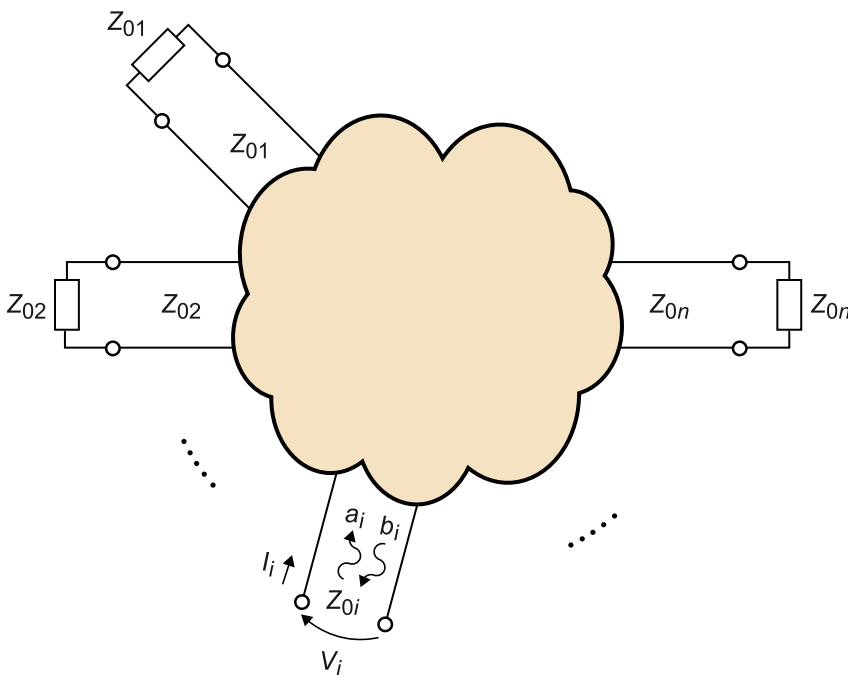
Ya se han presentado los parámetros  $S$  y se ha demostrado su utilidad a la hora de caracterizar cualquier red de microondas, así como también se han descrito algunas de sus propiedades. Aun así, cuando las redes están formadas por circuitos más o menos complejos se puede complicar su cálculo. Por este motivo, en este apartado se describen dos metodologías para calcular los parámetros  $S$  de redes con un número de puertos cualquiera.

En el subapartado "Cálculo de los parámetros  $S$  a partir de tensiones y corrientes" se presenta el método de las tensiones y las corrientes. Este es un método general y puede aplicarse a cualquier tipo de circuito o red. En el subapartado "Cálculo de los parámetros  $S$  a partir de la descomposición en modo par/impar" se introduce el método de la descomposición en modo par y modo impar. Este simplifica mucho el cálculo de la matriz de parámetros  $S$ , pero solo puede aplicarse a redes simétricas, por lo que no se podrá utilizar en todos los casos.

#### 3.1. Cálculo de los parámetros $S$ a partir de tensiones y corrientes

Sea una red de microondas genérica de  $n$  puertos, como la de la figura 29, de la que queremos obtener sus parámetros  $S$ .

Figura 29. Red de microondas genérica de  $n$  puertos



El procedimiento para el análisis es el siguiente:

1) Analizamos el puerto  $i$  (donde  $i$  puede ser cualquier puerto de la red) para calcular  $\Gamma_i$ . Con esta finalidad hemos de cargar todos los puertos menos el puerto  $i$  con su impedancia de referencia (tal y como se observa en la figura) y calculamos:

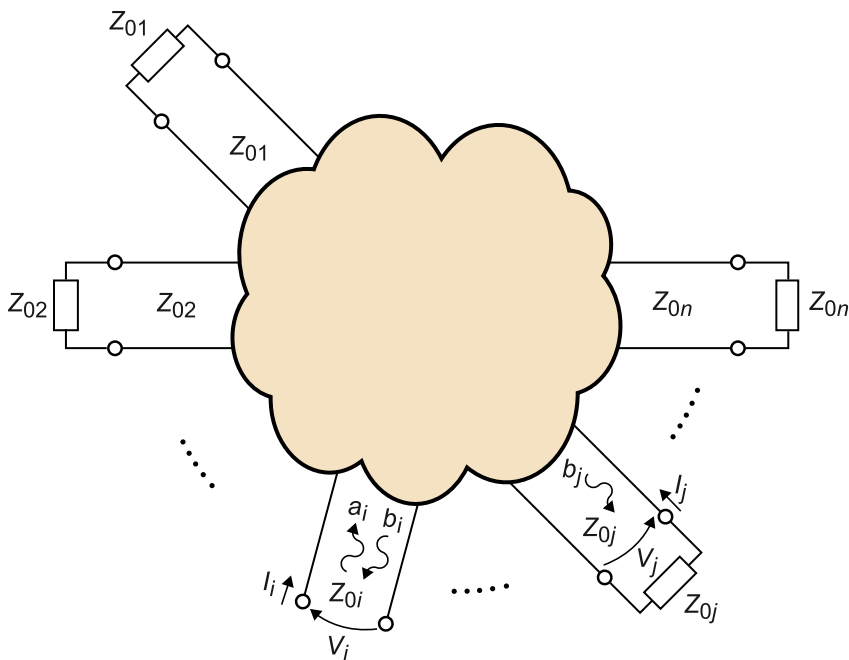
$$\Gamma_i = S_{ii} = \left. \frac{b_i}{a_i} \right|_{a_k=0 \text{ para } k \neq i} \quad 2.96$$

Alternativamente podemos calcular primero  $Z_i$  y utilizar:

$$\Gamma_i = \frac{Z_i - Z_{0i}}{Z_i + Z_{0i}} \quad 2.97$$

2) Ahora podemos encontrar todos los parámetros  $S_{ji}$  (donde  $j$  puede ser cualquier puerto de la red diferente a  $i$ ). Con esta finalidad volvemos a cargar todos los puertos con su impedancia de referencia, excepto el puerto  $i$ , como se observa en la figura 30.

Figura 30. Ondas normalizadas en los puertos  $i$  y  $j$  de una red de  $n$  puertos cargados con su impedancia de referencia



Podríamos calcular el parámetro  $S_{ji}$  con:

$$S_{ji} = \left. \frac{b_j}{a_i} \right|_{a_k=0 \text{ para } k \neq i} \quad 2.98$$

pero suele ser complicado calcularlo de manera directa, por lo que alternativamente podemos encontrar los parámetros de transmisión a partir del cálculo de tensiones. La tensión en el puerto  $i$  es:

$$V_i = \sqrt{Z_{0i}}(a_i + b_i) \quad 2.99$$

Y la tensión en el puerto  $j$  es:

$$V_j = \sqrt{Z_{0j}}(a_j + b_j) = \sqrt{Z_{0j}}(b_j) \quad 2.100$$

(dado que lo hemos cargado con una impedancia igual a  $Z_{0j}$ ). La relación de tensiones de estos dos puertos es:

$$\frac{V_j}{V_i} = \frac{\sqrt{Z_{0j}}(b_j)}{\sqrt{Z_{0i}}(a_i + b_i)} = \frac{\sqrt{Z_{0j}}(b_j/a_i)}{\sqrt{Z_{0i}}(1 + b_i/a_i)} = \frac{\sqrt{Z_{0j}}}{\sqrt{Z_{0i}}} \frac{S_{ji}}{1 + S_{ii}} \quad 2.101$$

Si aislamos  $S_{ji}$  nos queda:

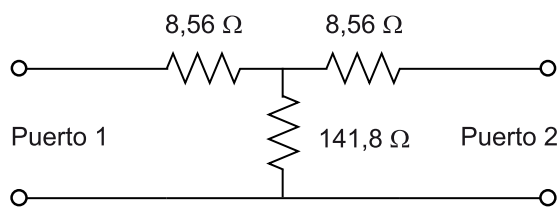
$$S_{ji} = \frac{V_j}{V_i} \frac{\sqrt{Z_{0i}}}{\sqrt{Z_{0j}}} (1 + S_{ii}) \Bigg|_{a_k=0 \text{ para } k \neq i} \quad 2.102$$

donde  $S_{ii}$  es el mismo parámetro calculado en el paso 1.

Vamos a aplicar esta metodología a un circuito real.

Nos piden encontrar los parámetros  $S$  de la red de dos puertos de la figura 31, un atenuador de potencia de 3 dB.

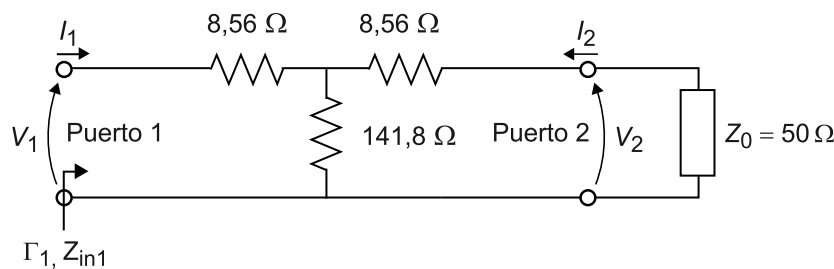
Figura 31. Atenuador de 3 dB adaptado a una impedancia característica de  $50 \Omega$



**Solución**

Empezaremos analizando el puerto 1. Para ello, hemos de adaptar el puerto 2 con su impedancia característica (en este caso,  $Z_0 = 50 \Omega$ ), como se observa en la figura 32.

Figura 32. Atenuador 3 dB con el puerto 2 adaptado



Con el puerto 2 adaptado, seguimos el procedimiento explicado anteriormente:

1) Calculamos la reflexión en el puerto 1:

$$S_{11} = \Gamma_1 = \frac{Z_{in1} - Z_0}{Z_{in1} + Z_0} \quad 2.103$$

donde:

$$Z_{in1} = 8,56 + 141,8 \parallel (8,56 + 50) \Omega = 50 \Omega \quad 2.104$$

Por lo tanto, el parámetro  $S_{11}$  queda:

$$S_{11} = \Gamma_1 = \frac{Z_{in1} - Z_0}{Z_{in1} + Z_0} = \frac{50 - 50}{50 + 50} = 0 \quad 2.105$$

2) Podemos calcular ahora el parámetro  $S_{21}$  con:

$$S_{21} = \frac{V_2 \sqrt{Z_0}}{V_1 \sqrt{Z_0}} (1 + S_{11}) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V \frac{141,8 \parallel (8,56 + 50)}{18,56 + 141,8 \parallel (8,56 + 50)} \cdot \frac{50}{50 + 8,56}}{V_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 2.106$$

Una vez analizado el puerto 1, podríamos proceder a analizar el puerto 2. Por otro lado, se puede observar la simetría del circuito, por lo que podemos asegurar que el análisis del puerto 2 nos dará como resultado que  $S_{22} = 0$  y  $S_{12} = 0,707$ . Por lo tanto, la matriz de parámetros  $S$  del circuito resulta:

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 2.107$$

Fijaos en que la potencia en el puerto 1 es:

$$P_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{V_1 I_1^*\} = \frac{1}{2} k_1 I^2 \quad 2.108$$

Y, en el puerto 2 tenemos:

$$P_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{V_2 I_2^*\} = \frac{1}{2} b_2 I^2 = \frac{1}{2} S_{21} a_1 I^2 = \frac{1}{4} k_1 I^2 \quad 2.109$$

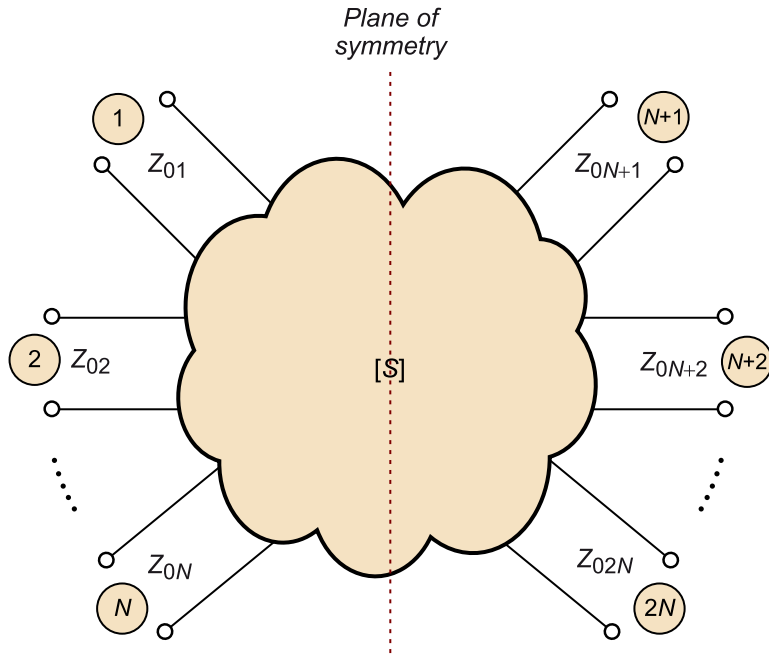
Por lo tanto, hemos dividido la potencia a la mitad (como era de esperar).

### 3.2. Cálculo de los parámetros $S$ a partir de la descomposición en modo par/impar

La descomposición en modo par y modo impar es un método aplicable solo a **redes de microondas simétricas** (red que se puede dividir física o eléctricamente en dos redes exactamente iguales) que permite calcular los parámetros  $S$  de un circuito reduciendo considerablemente el número de cálculos.

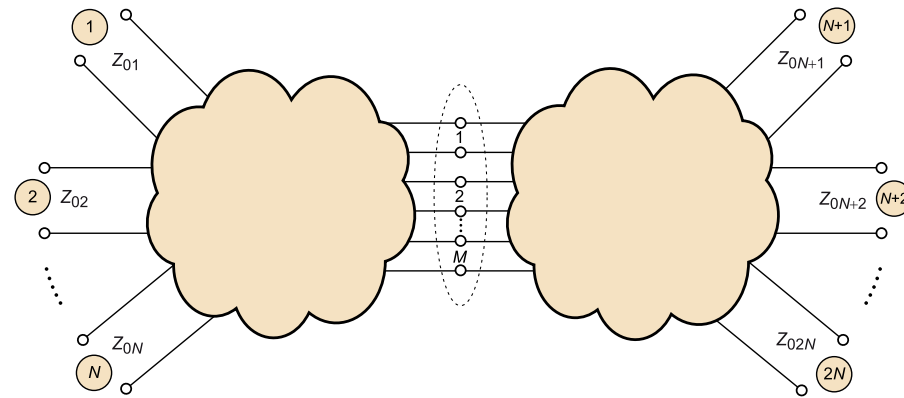
Sea una red de microondas simétrica con la numeración de puertos como la que se ve en la figura 33.

Figura 33. Red de microondas simétrica



Como la red es simétrica, la podemos descomponer en un circuito equivalente formado por dos redes unidas por una serie de conexiones internas ( $M$  conexiones), como se muestra en la figura 34.

Figura 34. Circuito equivalente formado por dos redes unidas por  $M$  conexiones internas. No son puertos porque no accedemos a ellos desde el exterior

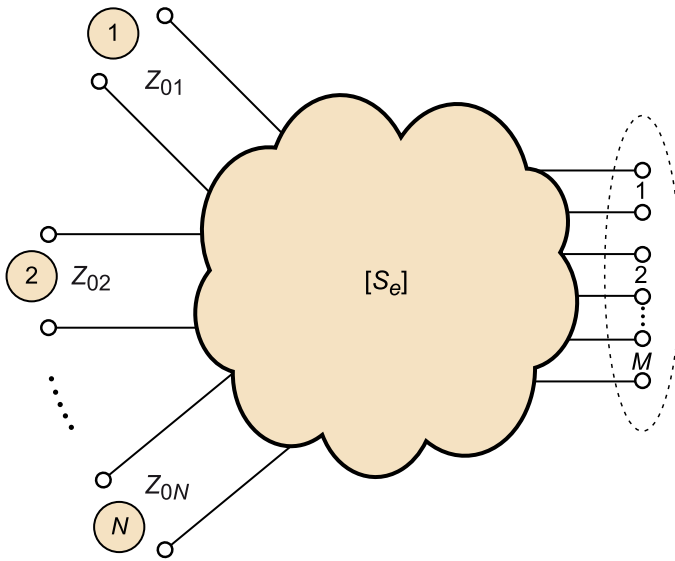


La matriz de parámetros  $S$  total de la red la podemos calcular con el método anterior o, bajo estas condiciones, utilizando la descomposición en modo par y modo impar. Con este nuevo método se puede encontrar la matriz de parámetros  $S$  siguiendo los siguientes pasos:

1) **Análisis del modo par:** calculamos la matriz de parámetros  $S$  de la primera mitad de la red (puertos 1 a  $N$ ), con las  $M$  conexiones internas en circuito abierto. La matriz obtenida la denotamos como  $[S_e]$  (figura 35).

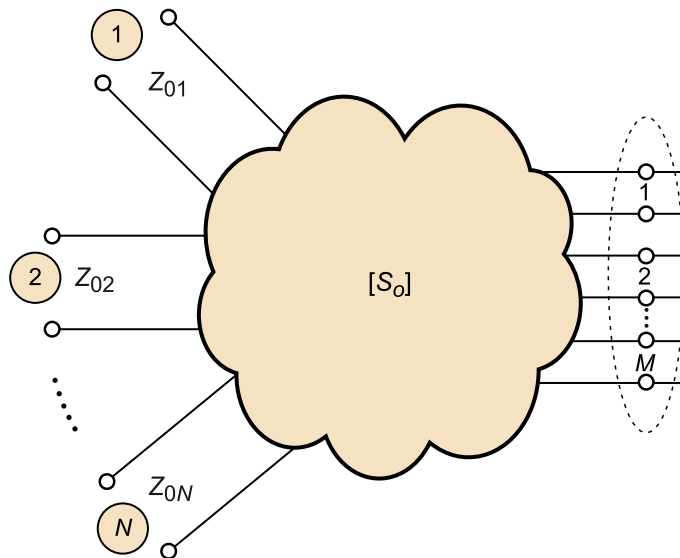


Figura 35. Descomposición en modo par del circuito original



2) **Análisis del modo impar:** calculamos la matriz de parámetros  $S$  de la primera mitad de la red (puertos 1 a  $N$ ), con las  $M$  conexiones internas en cortocircuito. La matriz obtenida la denotamos como  $[S_o]$  (figura 36).

Figura 36. Descomposición en modo par del circuito original



3) La matriz de parámetros  $S$  del circuito completo la recuperamos con:

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [S_e] + [S_o] & [S_e] - [S_o] \\ [S_e] - [S_o] & [S_e] + [S_o] \end{bmatrix} \quad 2.110$$

Se puede observar que se ha reducido el cálculo de la matriz  $2N \times 2N$  original al de dos matrices  $N \times N$ .

La ecuación 2.110 se puede demostrar con el razonamiento que se expone a continuación. Supongamos una red simétrica como la de la figura 33, con  $2N$  puertos. La matriz de parámetros  $S$  de esta red la podemos partir en un conjunto de 4 submatrices de la manera siguiente:

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_1] & [S_2] \\ [S_3] & [S_4] \end{bmatrix} \quad 2.111$$

donde  $[S_1]$ ,  $[S_2]$ ,  $[S_3]$  y  $[S_4]$  son matrices cuadradas de orden  $N$  ( $N$  filas por  $N$  columnas). Dado que la red es simétrica, por fuerza:

$$\begin{aligned} [S_1] &= [S_4] \\ [S_2] &= [S_3] \end{aligned} \quad 2.112$$

Si lo introducimos en 2.111 obtenemos:

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_1] & [S_2] \\ [S_2] & [S_1] \end{bmatrix} \quad 2.113$$

Denominamos ahora al vector de ondas incidentes para los puertos 1 a  $N$  como  $[a_1]$  y al vector de ondas incidentes para los puertos  $N + 1$  a  $2N$  como  $[a_2]$ . Análogamente, para las ondas salientes, tenemos  $[b_1]$  como vector para los puertos 1 a  $N$  y  $[b_2]$  para los puertos  $N + 1$  a  $2N$ . De este modo podemos completar la expresión 2.113 como:

$$\begin{bmatrix} [b_1] \\ [b_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_1] & [S_2] \\ [S_2] & [S_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [a_1] \\ [a_2] \end{bmatrix} \quad 2.114$$

Supongamos que excitamos los dos lados de la red con el mismo vector de ondas incidentes, es decir:

$$[a_1] = [a_2] \quad 2.115$$

La simetría de la red nos devolverá:

$$[b_1] = [b_2] \quad 2.116$$

Y, por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} [b_1] \\ [b_1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_1] & [S_2] \\ [S_2] & [S_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [a_1] \\ [a_1] \end{bmatrix} \rightarrow [b_1] = [S_1] [a_1] + [S_2] [a_1] \quad [a_1] = ([S_1] + [S_2]) [a_1] \quad 2.117$$

La suma de estas dos matrices la denominamos **matriz del modo par**, y la denotamos con el subíndice  $e$  (de *even*):

$$[S_e] = [S_1] + [S_2] \quad 2.118$$

Volvemos a empezar el mismo proceso excitando ahora cada mitad simétrica de la red con un vector de ondas desfasado 180°, es decir:

$$[a_1] = -[a_2] \quad 2.119$$

Nuevamente, la simetría de la red nos devolverá:

$$[b_1] = -[b_2] \quad 2.120$$

Y, por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} [b_1] \\ -[b_1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_1] & [S_2] \\ [S_2] & [S_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [a_1] \\ -[a_1] \end{bmatrix} \rightarrow [b_1] = [S_1] [a_1] - [S_2] [a_1] = ([S_1] - [S_2]) [a_1] \quad 2.121$$

La resta de estas dos matrices la denominamos **matriz del modo impar**, y la denotamos con el subíndice *o* (de *odd*):

$$[S_o] = [S_1] - [S_2] \quad 2.122$$

Si invertimos las dependencias en las ecuaciones 2.129 y 2.134, obtenemos:

$$\begin{aligned} [S_1] &= \frac{1}{2}([S_e] + [S_o]) \\ [S_2] &= \frac{1}{2}([S_e] - [S_o]) \end{aligned} \quad 2.123$$

Y, entonces:

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [S_e] + [S_o] & [S_e] - [S_o] \\ [S_e] - [S_o] & [S_e] + [S_o] \end{bmatrix} \quad 2.124$$

Hemos demostrado que las submatrices de la matriz de parámetros *S* las podemos encontrar como una suma o resta de dos matrices, la del modo par y la del modo impar. La primera la obtenemos cuando excitamos cada mitad de la red con el mismo vector de ondas incidentes. Fijaos en que, dado que las dos mitades son exactamente iguales, en las *M* conexiones internas tendremos exactamente la misma excitación (misma amplitud y misma fase) proveniente de los puertos externos de cada mitad. Es decir, la energía aportada por la onda  $a_1$  a cualquiera de las *M* conexiones internas justo en el plano de simetría será la misma que aporte la onda  $a_{N+1}$  (figura 34), por lo que es lo mismo que si multiplicáramos por 2 la excitación de una sola mitad. Y esto lo podemos conseguir dejando las conexiones internas de una mitad en circuito abierto (puesto que la excitación de esta mitad se reflejará en esta discontinuidad, dando una nueva onda que se propagará en sentido contrario y, en el plano de simetría,

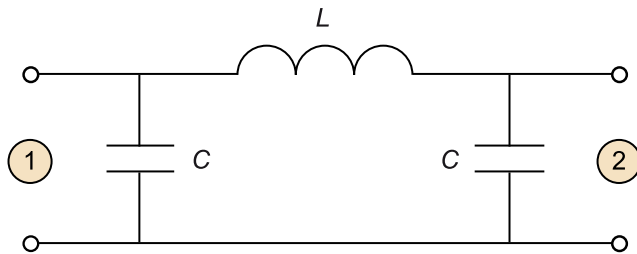
tendrá la misma amplitud y la misma fase, justamente el mismo efecto que el tener la otra mitad simétrica conectada). Precisamente esto es lo que estamos haciendo en el primer paso del método, mostrado también en la figura 35.

La matriz del modo impar, en cambio, la obtenemos cuando excitamos cada mitad de la red con un vector de ondas incidente desfasado  $180^\circ$ . Esto implica que en las  $M$  conexiones internas tendremos la misma excitación en amplitud pero con un desfase también de  $180^\circ$ . Es decir, la energía aportada por la onda  $a_1$  a cualquiera de las  $M$  conexiones internas justo en el plano de simetría será la misma que aporte la onda  $a_{N+1}$  con una diferencia de fase de  $180^\circ$  (figura 34), por lo que es lo mismo que si cortocircuitáramos las  $M$  conexiones internas justo en el plano de simetría. Y precisamente esto es lo que hacemos en el segundo paso del método, mostrado también en la figura 36. Queda por tanto demostrada la técnica de descomposición en modo par y modo impar para encontrar la matriz de parámetros  $S$  de redes simétricas. La gran ventaja es que por el hecho de analizar solo una mitad de la red, el análisis del circuito queda simplificado.

Una vez que hemos demostrado la metodología, vamos a aplicarla a un circuito real en el ejemplo siguiente.

Nos piden encontrar los parámetros  $S$  de la red de dos puertos de la figura 37, donde se presenta un filtro paso-bajo con topología en  $\pi$ .

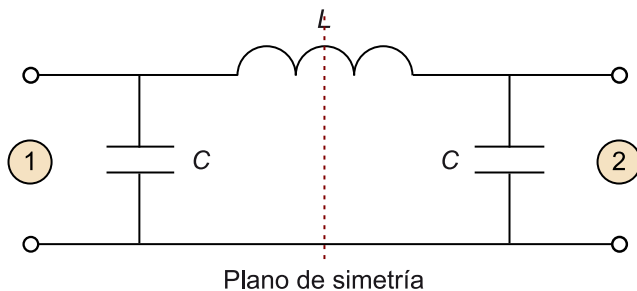
Figura 37. Filtro paso-bajo



### Solución

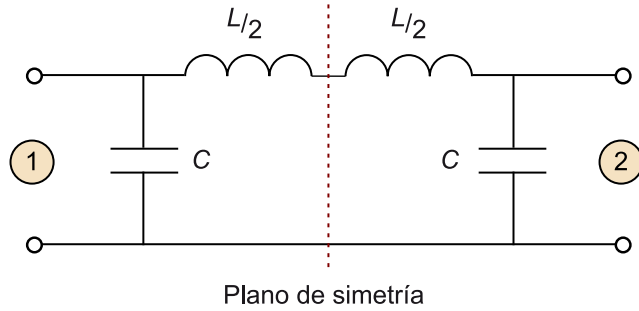
Se puede ver que este circuito responde a la condición de simetría para poder aplicar el método de la descomposición en modo par y modo impar (figura 38).

Figura 38. Plano de simetría del filtro paso-bajo



Por lo tanto, podemos hacer un nuevo circuito equivalente formado por dos circuitos simétricos como los de la figura 39.

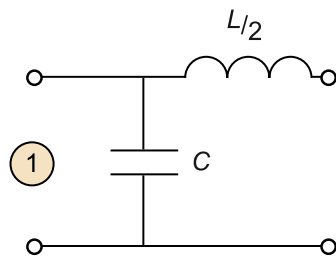
Figura 39. Circuito equivalente del filtro paso-bajo



Tomamos la primera mitad del circuito y procedemos según la metodología:

1) **Análisis del modo par:** analizamos la primera mitad del circuito dejando las conexiones internas en circuito abierto.

Figura 40. Modo par



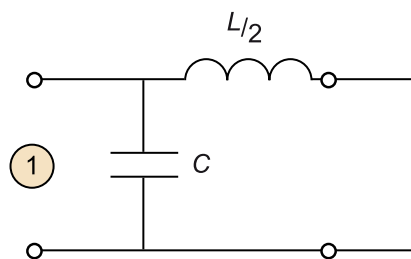
$$Z_{ine} = \frac{1}{j\omega C} \quad 2.125$$

Y, por lo tanto:

$$\Gamma_e = \frac{Z_{ine} - Z_0}{Z_{ine} + Z_0} = \frac{\frac{1}{j\omega C} - Z_0}{\frac{1}{j\omega C} + Z_0} = \frac{\frac{1 - j\omega CZ_0}{j\omega C}}{\frac{1 + j\omega CZ_0}{j\omega C}} = \frac{1 - j\omega CZ_0}{1 + j\omega CZ_0} \quad 2.126$$

2) **Análisis del modo impar:**

Figura 41. Modo impar



$$Z_{ino} = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{j\omega \frac{L}{2}}} = \frac{1}{j\omega C + \frac{2}{j\omega L}} = \frac{j\omega L}{-\omega^2 CL + 2} \quad 2.127$$

Y, por lo tanto:

$$\Gamma_o = \frac{Z_{ino} - Z_0}{Z_{ino} + Z_0} = \frac{\frac{j\omega L}{-\omega^2 CL + 2} - Z_0}{\frac{j\omega L}{-\omega^2 CL + 2} + Z_0} = \frac{j\omega L + Z_0\omega^2 CL - 2Z_0}{j\omega L - Z_0\omega^2 CL + 2Z_0} \quad 2.128$$

3) Finalmente, la matriz de parámetros  $S$  la podemos recuperar utilizando 2.110. Primero de todo calculamos la suma y la resta de los coeficientes obtenidos:

$$\begin{aligned}\Gamma_e + \Gamma_o &= \frac{1-j\omega CZ_0}{1+j\omega CZ_0} + \frac{j\omega L + Z_0\omega^2 CL - 2Z_0}{j\omega L - Z_0\omega^2 CL + 2Z_0} \\ \Gamma_e - \Gamma_o &= \frac{1-j\omega CZ_0}{1+j\omega CZ_0} - \frac{j\omega L + Z_0\omega^2 CL - 2Z_0}{j\omega L - Z_0\omega^2 CL + 2Z_0}\end{aligned}\quad 2.129$$

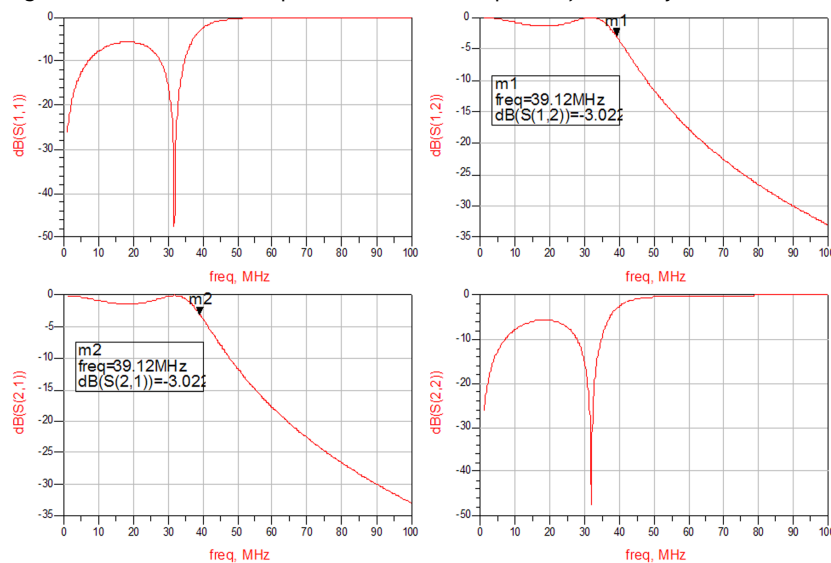
Y ya podemos calcular la matriz total:

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [S_e] + [S_o] & [S_e] - [S_o] \\ [S_e] - [S_o] & [S_e] + [S_o] \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1-j\omega CZ_0}{1+j\omega CZ_0} + \frac{j\omega L + Z_0\omega^2 CL - 2Z_0}{j\omega L - Z_0\omega^2 CL + 2Z_0} & \frac{1-j\omega CZ_0}{1+j\omega CZ_0} - \frac{j\omega L + Z_0\omega^2 CL - 2Z_0}{j\omega L - Z_0\omega^2 CL + 2Z_0} \\ \frac{1-j\omega CZ_0}{1+j\omega CZ_0} - \frac{j\omega L + Z_0\omega^2 CL - 2Z_0}{j\omega L - Z_0\omega^2 CL + 2Z_0} & \frac{1-j\omega CZ_0}{1+j\omega CZ_0} + \frac{j\omega L + Z_0\omega^2 CL - 2Z_0}{j\omega L - Z_0\omega^2 CL + 2Z_0} \end{bmatrix} \quad 2.130$$

Por lo tanto, hemos podido calcular de manera sencilla los parámetros  $S$  de un circuito más o menos complejo.

En la figura 42 se muestra la simulación de los parámetros  $S$  de este mismo circuito entre 1 y 100 MHz utilizando una bobina de 200 nH y dos condensadores de 200 pF. Se puede ver claramente el comportamiento del filtro paso-bajo a través de los parámetros de transmisión,  $S_{21}$  y  $S_{12}$ , con una frecuencia de corte a 3 dB de 39,12 MHz. Por encima de esta frecuencia, la atenuación aumenta, llegando a unos 30 dB a 90 MHz. Los parámetros de reflexión,  $S_{11}$  y  $S_{22}$ , muestran cómo por debajo de la frecuencia de corte estos toman unos valores bajos (hay poca reflexión), mientras que a alta frecuencia la reflexión es prácticamente total.

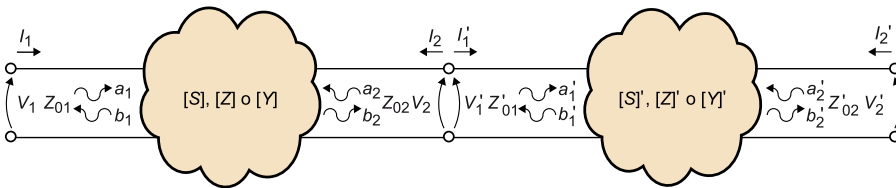
Figura 42. Simulación de los parámetros  $S$  del filtro paso-bajo entre 1 y 100 MHz



### 4. Relaciones entre parámetros $S$ , $Z$ , $Y$ , $T$ y $ABCD$

Tal y como hemos ido viendo a lo largo del módulo, una red de microondas la podemos caracterizar completamente a través de los parámetros  $S$ , así como con los parámetros  $Z$  o  $Y$ . En una situación en la que dos o más redes de microondas se conectan en cascada, como se observa en la figura 43 con dos redes de dos puertos, el cálculo de los nuevos parámetros  $S$ ,  $Z$  o  $Y$  del sistema total puede ser complicado (especialmente si el número de puertos aumenta). Por este motivo, es conveniente definir unos nuevos parámetros de transmisión que nos permitan encontrar los parámetros totales del circuito de una manera más ágil. Bajo este contexto serán muy útiles los parámetros  $T$  y los parámetros  $ABCD$ . En el presente apartado quedarán definidos estos nuevos parámetros (subapartados "Parámetros  $T$ " y "Parámetros  $ABCD$ " respectivamente), así como la relación entre todos ellos (subapartados "Relación entre matrices de parámetros  $S$ ,  $Z$  e  $Y$  para una red de  $N$  puertos" y "Relación entre parámetros  $S$ ,  $T$  y  $ABCD$  para una red de 2 puertos"), de manera que se pueda pasar de una definición a otra según convenga.

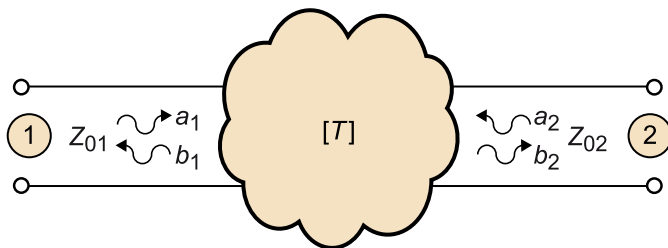
Figura 43. Conexión de dos redes en cascada



#### 4.1. Parámetros $T$

Tanto los parámetros  $T$ , como los parámetros  $S$ , relacionan ondas  $a$  y  $b$ , pero en vez de hacerlo en función de las ondas de entrada y salida, lo hacen en función de ondas de un puerto y del otro. Tomando como referencia, por ejemplo, la red de dos puertos de la figura 44:

Figura 44. Definición de los parámetros  $T$  en una red de microondas de dos puertos

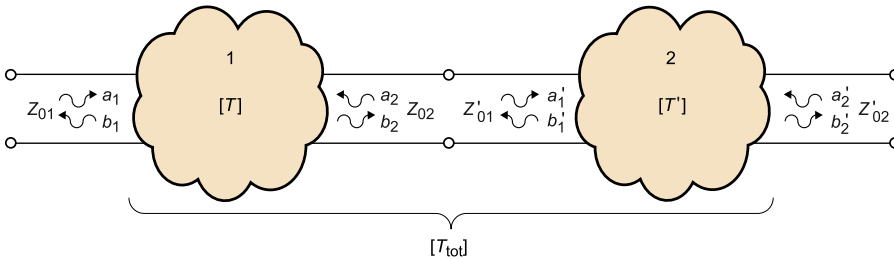


los parámetros  $T$  se definen como:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad 2.131$$

Para ver la utilidad de estos parámetros, lo más adecuado será tratar el caso sencillo de dos redes conectadas en cascada, como las de la figura 45.

Figura 45. Definición de los parámetros  $T$  en la conexión de dos redes en cascada



En este caso, la red 1 la definimos con la matriz de parámetros  $T$  ( $[T]$ ) tal y como muestra la ecuación 2.131. Y la red 2 también con la matriz de parámetros  $T$  ( $[T']$ ) tales como:

$$\begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad 2.132$$

con el signo ' para diferenciarlos de los parámetros de la primera red. Si se cumple que la impedancia de referencia del puerto 2 de la red 1 ( $Z_{02}$ ) y la impedancia de referencia del puerto 1 de la red 2 ( $Z'_{01}$ ) son iguales, habrá continuidad de ondas entre las dos redes porque una onda que salga de la red 1 entrará íntegra en la red 2 por el hecho de no ver ningún cambio de medio que pueda hacerla reflejarse. Por lo tanto, dado:

$$Z_{02} = Z'_{01} \quad 2.133$$

entonces:

$$b_2 = a'_1 \quad 2.134$$

$$a_2 = b'_1 \quad 2.135$$

Bajo estas condiciones, se cumple que:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{bmatrix}}_{[T][T']} \begin{bmatrix} a'_2 \\ b'_2 \end{bmatrix} = [T_{tot}] \begin{bmatrix} a'_2 \\ b'_2 \end{bmatrix} \quad 2.136$$

En consecuencia, la matriz de parámetros  $T$  total del sistema ( $[T_{tot}]$ ) se puede encontrar multiplicando directamente las matrices de parámetros  $T$  individuales. Es decir:



$$[T_{\text{tot}}] = [T][T'] \quad 2.137$$

De este modo, los cálculos para encontrar los parámetros de todo un sistema con  $N$  redes conectadas en cascada quedan reducidos a una sencilla multiplicación de matrices, simplificando mucho el análisis del circuito:

$$[T_{\text{tot}}] = [T_1][T_2][T_3] \cdots [T_N] \quad 2.138$$

siempre y cuando se cumpla que:

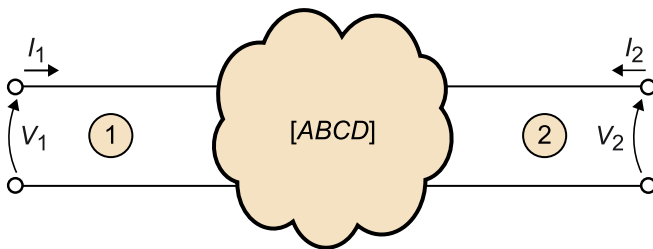
$$Z_{02} = Z'_{01}, Z'_{02} = Z''_{01}, Z''_{02} = Z'''_{01}, \dots \quad 2.139$$

## 4.2. Parámetros ABCD

Análogamente a los parámetros  $T$  tenemos los parámetros  $ABCD$ , que, en lugar de depender de ondas normalizadas de tensión, dependen de tensiones y corrientes. El uso de estos parámetros dependerá del tipo de análisis que estemos haciendo. Si estamos trabajando con ondas de tensión y parámetros  $S$ , es preferible utilizar los parámetros  $T$  para encadenar la caracterización de diferentes tipos de redes. Pero si estamos trabajando con tensiones, corrientes y parámetros  $Z$  o  $Y$ , los parámetros  $ABCD$  serán más apropiados.

Tomando como referencia, por ejemplo, la red de dos puertos de la figura 46:

Figura 46. Definición de los parámetros  $ABCD$  en una red de microondas de dos puertos



los parámetros  $ABCD$  se definen como:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad 2.140$$

Si la red es recíproca, entonces:

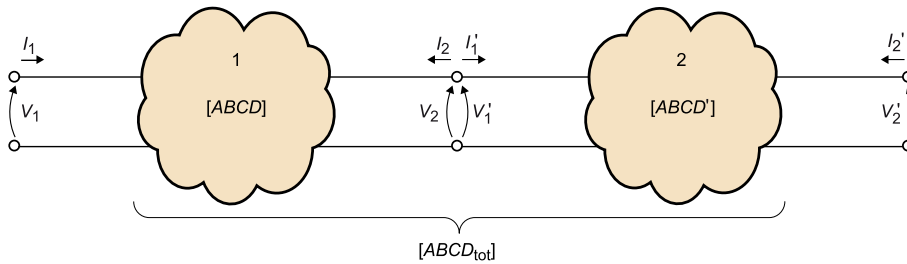
$$A \cdot D - B \cdot C = 1 \quad 2.141$$

Y, si la red es simétrica, entonces:

$$A = D \quad 2.142$$

Nuevamente, para ver la utilidad de estos parámetros, lo más adecuado será tratar el caso sencillo de dos redes conectadas en cascada, como las de la figura 47.

Figura 47. Definición de los parámetros ABCD en la conexión de dos redes en cascada



La red 1 la definimos con la matriz de parámetros ABCD ( $[ABCD]$ ) tal y como muestra la ecuación 2.140. Y la red 2 también con la matriz de parámetros ABCD ( $[ABCD']$ ) tales como:

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ I_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2' \\ -I_2' \end{bmatrix} \quad 2.143$$

con el signo ' para diferenciarlos de los parámetros de la primera red. Se puede ver que:

$$V_2 = V_1' \quad 2.144$$

$$I_2 = -I_1' \quad 2.145$$

Bajo estas condiciones, se cumple que:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1' \\ I_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2' \\ -I_2' \end{bmatrix} = [ABCD_{tot}] \begin{bmatrix} V_2' \\ -I_2' \end{bmatrix} \quad 2.146$$

De este modo, los cálculos para encontrar los parámetros de todo un sistema con  $N$  redes conectadas en cascada quedan reducidos, nuevamente, a una sencilla multiplicación de matrices, simplificando mucho el análisis del circuito:

$$[ABCD_{tot}] = [ABCD_1][ABCD_2][ABCD_3] \dots [ABCD_N] \quad 2.147$$

### 4.3. Relación entre matrices de parámetros $S$ , $Z$ e $Y$ para una red de $N$ puertos

Sea una matriz de  $N$  puertos caracterizada por sus matrices de parámetros  $S$ ,  $Z$  e  $Y$  ( $[S]$ ,  $[Z]$  e  $[Y]$ ). Suponiendo que la impedancia de referencia de los  $N$  puertos de la red es la misma y vale  $Z_0$ , podemos encontrar las siguientes relaciones:

- Relación entre las matrices de parámetros  $S$  y parámetros  $Z$ :

$$\begin{aligned} [S] &= ([Z] + Z_0 \cdot [I_d])^{-1} \cdot ([Z] - Z_0 \cdot [I_d]) = ([Z] - Z_0 \cdot [I_d]) \cdot ([Z] + Z_0 \cdot [I_d])^{-1} \\ [Z] &= Z_0 \cdot ([I_d] - [S])^{-1} \cdot ([I_d] + [S]) = Z_0 \cdot ([I_d] + [S]) \cdot ([I_d] - [S])^{-1} \end{aligned} \quad 2.148$$

- Relación entre las matrices de parámetros  $S$  y parámetros  $Y$ :

$$\begin{aligned} [S] &= (Y_0 \cdot [I_d] + [Y])^{-1} \cdot (Y_0 \cdot [I_d] - [Y]) = (Y_0 \cdot [I_d] - [Y]) \cdot (Y_0 \cdot [I_d] + [Y])^{-1} \\ [Y] &= Y_0 \cdot ([I_d] + [S])^{-1} \cdot ([I_d] - [S]) = Y_0 \cdot ([I_d] - [S]) \cdot ([I_d] + [S])^{-1} \end{aligned} \quad 2.149$$

- Relación entre las matrices de parámetros  $Z$  y parámetros  $Y$ :

$$\begin{aligned} [Z] &= [Y]^{-1} \\ [Y] &= [Z]^{-1} \end{aligned} \quad 2.150$$

A continuación se presenta un ejemplo en el que se necesita realizar un cambio de parámetros  $S$  a parámetros  $Z$ .

A menudo nos puede interesar cambiar la impedancia de referencia de una matriz de parámetros  $S$  de  $Z_{01}$  a  $Z_{02}$ . Por ejemplo, imaginad que, por sus prestaciones de ancho de banda, queremos conectar una antena medida con una impedancia de referencia de  $50 \Omega$  en un circuito electrónico cuyas pistas impresas tienen una impedancia característica diferente de  $50 \Omega$ . En este caso podríamos tratar de convertir esta información a la nueva impedancia de referencia para ver si esta antena es adecuada o no para el sistema.

Para ver cómo podemos realizar esta transformación en este y otros casos, utilizaremos el ejemplo de una red de dos puertos que presenta una matriz de parámetros  $S$  a una frecuencia determinada y referidos a  $50 \Omega$  como:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0,5 & j0,866 \\ j0,866 & 0,5 \end{bmatrix} \quad 2.151$$

y trataremos de obtener la respuesta de esta red en un sistema referenciado a  $75 \Omega$ .

#### Solución

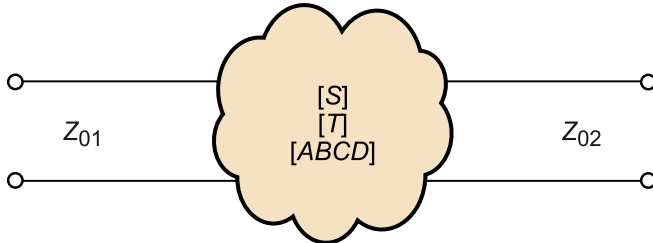
Una manera sencilla de modificar la matriz es utilizar la conversión a algún tipo de parámetros que no dependan de referencias para su medida, como pueden ser los parámetros  $Z$ ,  $Y$  o  $ABCD$ . Estos parámetros son independientes de cualquier referencia y solo dependen de la propia red. Finalmente, volvemos a convertir estos a parámetros  $S$  utilizando la nueva impedancia de referencia. Así pues, utilizando la ecuación 2.148 y sustituyendo:

$$\begin{aligned} [Z] &= Z_0 \cdot ([I_d] - [S])^{-1} \cdot ([I_d] + [S]) = \begin{bmatrix} 0,0022 & j86,6 \\ j86,6 & 0,0022 \end{bmatrix} \\ [S]_{75\Omega} &= ([Z] + Z_0 \cdot [I_d])^{-1} \cdot ([Z] - Z_0 \cdot [I_d]) = \begin{bmatrix} 0,143 & j0,989 \\ j0,989 & 0,143 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 2.152$$

#### 4.4. Relación entre parámetros $S$ , $T$ y $ABCD$ para una red de 2 puertos

Sea una red de dos puertos con impedancias de referencia  $Z_{01}$  y  $Z_{02}$ , tal y como se observa en la figura 48.

Figura 48. Red genérica caracterizada con parámetros  $S$ ,  $T$  y  $ABCD$



Podemos encontrar entonces las relaciones siguientes:

- Relación entre los parámetros  $S$  y parámetros  $ABCD$ :

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{AZ_{02}+B-CZ_{01}Z_{02}-DZ_{01}}{AZ_{02}+B+CZ_{01}Z_{02}+DZ_{01}} \\
 S_{12} &= \frac{2(AD-BC)\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}{AZ_{02}+B+CZ_{01}Z_{02}+DZ_{01}} \\
 S_{21} &= \frac{2\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}{AZ_{02}+B+CZ_{01}Z_{02}+DZ_{01}} \\
 S_{22} &= \frac{-AZ_{02}+B-CZ_{01}Z_{02}+DZ_{01}}{AZ_{02}+B+CZ_{01}Z_{02}+DZ_{01}}
 \end{aligned} \tag{2.153}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{(1+S_{11}-S_{22}-S_{11}S_{22}+S_{12}S_{21})\sqrt{Z_{01}/Z_{02}}}{S_{21}} \\
 B &= \frac{(1+S_{11}+S_{22}+S_{11}S_{22}-S_{12}S_{21})\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}{S_{21}} \\
 C &= \frac{(1-S_{11}-S_{22}+S_{11}S_{22}-S_{12}S_{21})}{S_{21}\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} \\
 D &= \frac{(1-S_{11}+S_{22}-S_{11}S_{22}+S_{12}S_{21})\sqrt{Z_{01}/Z_{02}}}{S_{21}}
 \end{aligned} \tag{2.154}$$

- Relación entre parámetros  $S$  y parámetros  $T$ :

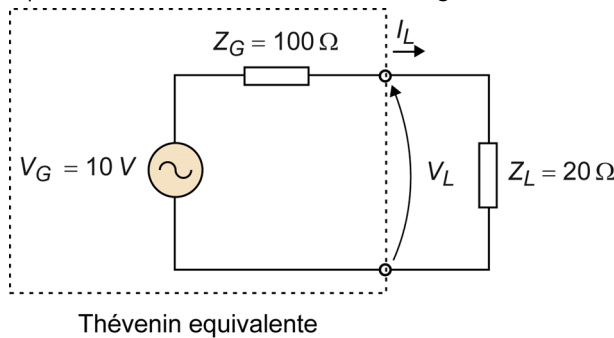
$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{T_{12}}{T_{22}} \\
 S_{12} &= T_{11} - \frac{T_{21}T_{12}}{T_{22}} \\
 S_{21} &= \frac{1}{T_{22}} \\
 S_{22} &= -\frac{T_{21}}{T_{22}}
 \end{aligned} \tag{2.155}$$

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= \frac{-S_{11}S_{22} + S_{12}S_{21}}{S_{21}} \\
 T_{12} &= \frac{S_{11}}{S_{21}} \\
 T_{21} &= \frac{-S_{22}}{S_{21}} \\
 T_{22} &= \frac{1}{S_{21}}
 \end{aligned}
 \tag{2.156}$$

A continuación se expone un ejemplo donde se utilizan varias transformaciones entre parámetros para llegar al resultado.

Tenemos un dispositivo electrónico conectado a una carga. Este dispositivo lo podemos modelizar por su equivalente de Thévenin con una fuente de tensión y una impedancia en serie, tal y como se muestra en la figura 49.

Figura 49. Dispositivo electrónico modelizado por su equivalente de Thévenin conectado a una carga

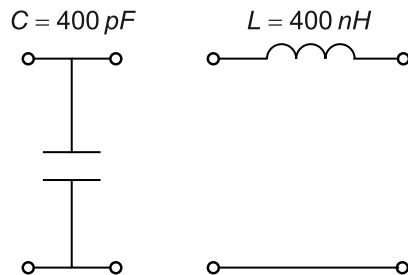


La tensión que cae sobre la carga es:

$$V_L |_{dB} = 20 \log \left( V_G \frac{Z_L}{Z_G + Z_L} \right) = 4,43 \text{ dBV}
 \tag{2.157}$$

Nos piden diseñar un filtro que atenúe al máximo la tensión en los bornes de la impedancia de carga  $Z_L$  a la frecuencia de 50 MHz disponiendo solo de dos componentes, un condensador de 400 pF y una bobina de 400 nH, en la situación que se muestra en la figura 50.

Figura 50. Condensador y bobina



**Solución**

Primero de todo necesitamos encontrar la matriz de parámetros S de las dos redes. Ambas las podemos considerar como redes de dos puertos. Utilizando el método de las tensiones y las corrientes y utilizando una impedancia de referencia  $Z_0$  en los dos puertos, podemos encontrar que la matriz de parámetros S de la red con el condensador es:

$$[S_C] = \frac{1}{2 + j\omega CZ_0} \begin{bmatrix} -j\omega CZ_0 & 2 \\ 2 & -j\omega CZ_0 \end{bmatrix}
 \tag{2.158}$$

Y la matriz de parámetros S que contiene la bobina es:

$$[S_L] = \frac{1}{2Z_0 + j\omega L} \begin{bmatrix} j\omega L & 2Z_0 \\ 2Z_0 & j\omega L \end{bmatrix} \quad 2.159$$

De hecho, si sustituimos cada constante por el valor que nos da el enunciado y una  $Z_0 = 50 \Omega$ , obtenemos:

$$[S_C] = \frac{1}{1 + j\pi} \begin{bmatrix} -j\pi & 1 \\ 1 & -j\pi \end{bmatrix} \quad 2.160$$

$$[S_L] = \frac{1}{5 + j2\pi} \begin{bmatrix} j2\pi & 5 \\ 5 & j2\pi \end{bmatrix} \quad 2.161$$

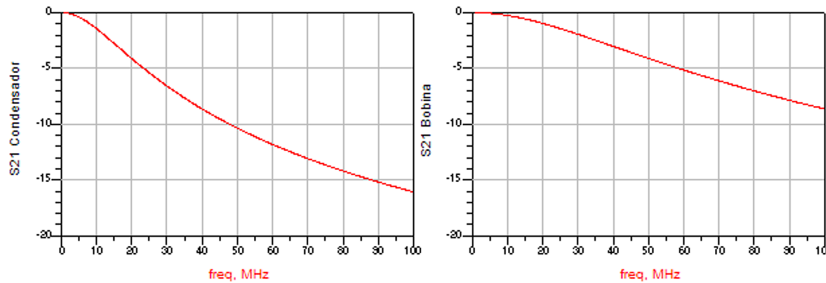
Uno de los parámetros más interesantes en este caso es el parámetro  $S_{21}$ , dado que es el parámetro que nos da información sobre la transferencia de potencia del generador a la carga (en un entorno de generador y carga de  $50 \Omega$ ). Si calculamos su módulo y lo convertimos en dB obtenemos:

$$|S_{21C}|_{dB} = 20 \cdot \log(|S_{21C}|) = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2}}\right) = -10,36 \text{ dB} \quad 2.162$$

$$|S_{21L}|_{dB} = 20 \cdot \log(|S_{21L}|) = 20 \cdot \log\left(\frac{5}{\sqrt{25 + 4\pi^2}}\right) = -4,11 \text{ dB} \quad 2.163$$

Por lo tanto, si hubiéramos de elegir uno de los dos componentes, muy probablemente el condensador sería la mejor opción. Para tener una idea más completa del comportamiento de estos dos componentes, se ha realizado un barrido en frecuencia del parámetro  $S_{21}$  de las dos redes, obteniendo los resultados que se muestran en la figura 51.

Figura 51. Barrido en frecuencia del parámetros  $S_{21}$  para las redes con el condensador y la bobina respectivamente



Por lo tanto, como era de prever, cada red es un filtro paso-bajo por sí mismo. No obstante, el enunciado nos pide el filtro óptimo, por lo que es razonable pensar que la máxima atenuación la conseguiremos uniendo las dos redes y conectándolas entre el dispositivo y la carga. Para comprobarlo, calcularemos las dos posibles matrices de parámetros  $S$ , la matriz del conjunto condensador más bobina y la matriz del conjunto bobina más condensador, con el objetivo de encontrar la configuración más adecuada.

Lo primero que haremos será transformar las matrices de parámetros  $S$  de cada red a parámetros  $T$  utilizando la ecuación 2.156, para facilitar el cálculo de las matrices del conjunto. Si lo aplicamos a la matriz de parámetros  $S$  del condensador, obtenemos la matriz de parámetros  $T$  ( $[T_C]$ ):

$$[T_C] = \begin{bmatrix} 1 - j\pi & -j\pi \\ j\pi & 1 + j\pi \end{bmatrix} \quad 2.164$$

Siguiendo el mismo procedimiento, la matriz de parámetros  $T$  para el caso de la bobina,  $[T_L]$ , es:

$$[T_L] = \begin{bmatrix} 1 - j\frac{2}{5}\pi & j\frac{2}{5}\pi \\ -j\frac{2}{5}\pi & 1 + j\frac{2}{5}\pi \end{bmatrix} \quad 2.165$$

Según la ecuación 2.138, la matriz del conjunto condensador más bobina la calculamos haciendo el producto de las dos matrices en este orden:

$$[T_{C+L}] = [T_C] \cdot [T_L] = \begin{bmatrix} -6,89 - j\frac{7}{5}\pi & 7,89 - j1,88 \\ 7,89 + j1,88 & -6,89 + j\frac{7}{5}\pi \end{bmatrix} \quad 2.166$$

Y la matriz del conjunto bobina más condensador la calculamos haciendo el producto de las dos matrices en el orden inverso:

$$[T_{L+C}] = [T_L] \cdot [T_C] = \begin{bmatrix} -6,89 - j\frac{7}{5}\pi & -7,89 - j1,88 \\ -7,89 + j1,88 & -6,89 + j\frac{7}{5}\pi \end{bmatrix} \quad 2.167$$

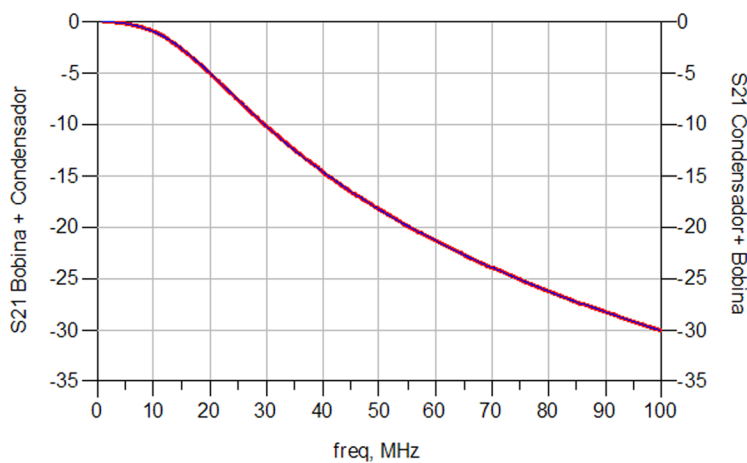
Finalmente, podemos recuperar la matriz de parámetros S de los dos conjuntos utilizando la ecuación 2.155, obteniendo así para los dos casos:

$$[S_{C+L}] = \begin{bmatrix} -0,93 - j0,32 & -0,10 - j0,06 \\ -0,10 - j0,06 & 0,68 + j0,71 \end{bmatrix} \quad 2.168$$

$$[S_{L+C}] = \begin{bmatrix} 0,68 + j0,71 & -0,10 - j0,06 \\ -0,10 - j0,06 & -0,93 - j0,32 \end{bmatrix} \quad 2.169$$

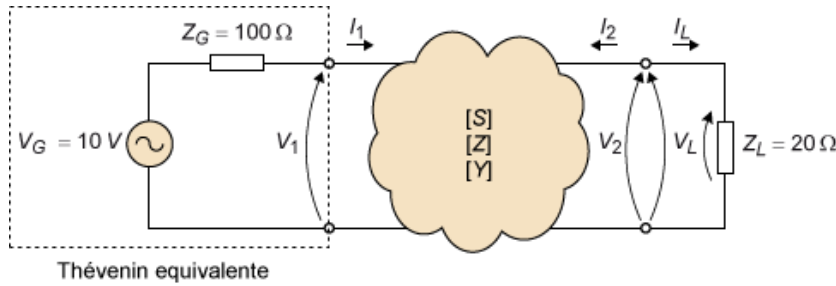
Hemos obtenido el mismo valor para el parámetro  $S_{21}$  en ambas redes. Y esto no es casualidad para esta frecuencia en concreto. De hecho, si volvemos a hacer un barrido del parámetro  $S_{21}$  de los dos conjuntos en función de la frecuencia, obtenemos el resultado mostrado en la figura 52.

Figura 52. Barrido en frecuencia del parámetro  $S_{21}$  del conjunto condensador más bobina (línea roja) y bobina más condensador (línea azul)



Ambas redes presentan el mismo comportamiento. Además, podemos ver cómo la atenuación a la frecuencia de 50 MHz es de unos 18 dB, mayor que la del condensador solo. ¿Implica este resultado que la elección de la red idónea para atenuar la señal del dispositivo electrónico es indiferente? Para averiguarlo conectaremos las dos redes entre el dispositivo electrónico y la carga del circuito de la figura 49, obteniendo el nuevo circuito en la figura 53.

Figura 53. Dispositivo electrónico modelizado por su equivalente de Thévenin y carga conectados a una red de parámetros S o Z o Y



Dado que no tenemos ninguna LT conectada en la red y que queremos calcular la caída de tensión en la carga, puede ser conveniente trabajar con parámetros Z o Y. Probamos con los parámetros Y. Si analizamos el circuito de la figura 53, obtenemos que la tensión en la carga viene determinada por:

$$V_L = V_G \frac{Y_{21} Z_L}{Y_{12} Z_G - (1 + Y_{11} Z_G)(1 + Y_{22} Z_L)} \quad 2.170$$

Solo nos queda convertir las matrices de parámetros S a parámetros Y y calcular la tensión  $V_L$  para los dos casos. Utilizando la transformación de la ecuación 2.149, las matrices de parámetros Y quedan:

$$[Y_{C+L}] = \begin{bmatrix} 0,11j & 0,0079j \\ 0,0079j & -0,0079j \end{bmatrix} \quad 2.171$$

$$[Y_{L+C}] = \begin{bmatrix} -0,0079j & 0,0079j \\ 0,0079j & 0,11j \end{bmatrix} \quad 2.172$$

Y, obtenemos:

$$V_{L1} |_{\text{dB}} = 20 \log(|V_{L1}|) = -17,5 \text{ dBV} \quad 2.173$$

$$V_{L2} |_{\text{dB}} = 20 \log(|V_{L2}|) = -6,5 \text{ dBV} \quad 2.174$$

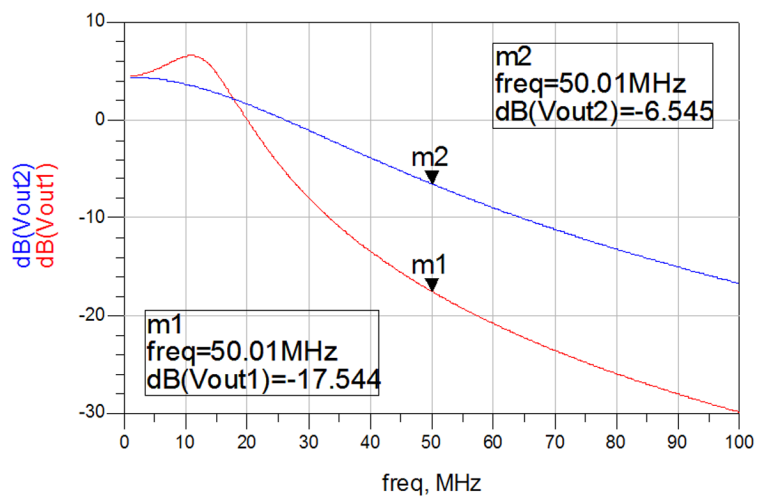
Así pues, la elección no es indiferente. La red condensador más bobina es el mejor filtro para este circuito en concreto, obteniendo una atenuación de unos 22 dB respecto al resultado obtenido en la ecuación 2.157, tal y como muestra el resultado de 2.173, frente a los 11 dB obtenidos con la red bobina más condensador, tal y como muestra el resultado de 2.174. Es decir, según la configuración elegida se consigue el doble de atenuación.

No nos tendría que sorprender el resultado, dado que a pesar de que el parámetro  $S_{21}$  era el mismo para las dos redes (ecuación 2.168 y 2.169), los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{22}$  son diferentes. Ya vimos cómo el coeficiente de reflexión no solo depende de los parámetros  $S_{11}$  o  $S_{22}$ , sino también del resto de los parámetros y del valor de la carga. En este caso, el coeficiente de transmisión no solo depende del parámetro  $S_{21}$ , sino también de los otros parámetros y de las impedancias de generador y de carga. Por lo tanto, solo una de las dos configuraciones ha resultado ser la más apropiada.

Nuevamente, como demostración, en la figura 54 se muestra la caída de tensión en la carga en dBV para las dos configuraciones de red. A partir de los 20 MHz la red más adecuada es la de condensador más bobina.



Figura 54. Tensión en dBV en la carga cuando al circuito le conectamos los filtros condensador más bobina (línea roja) y bobina más condensador (línea azul)



## 5. Analizadores de redes

Los parámetros  $S$  de las redes de microondas, ya sean pasivas o activas, se pueden medir con un analizador vectorial de redes.

Un **analizador de redes** es un aparato de dos o cuatro puertos que mide el módulo y la fase de las ondas transmitidas (generadas internamente) y reflejadas en la red bajo análisis.

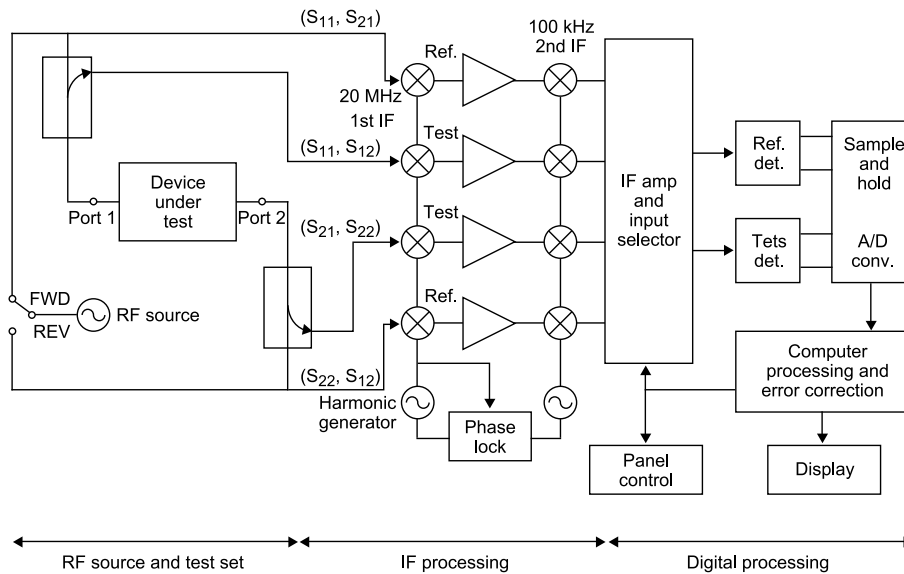
En la figura 55 se muestra la imagen de un analizador de redes vectorial de cuatro puertos.

Figura 55. Imagen de un analizador vectorial de redes de cuatro puertos comercial



Un diagrama de bloques simplificado de un analizador de redes similar al HP8510 se muestra en la figura 56.

Figura 56. Diagrama de bloques de un analizador vectorial de redes



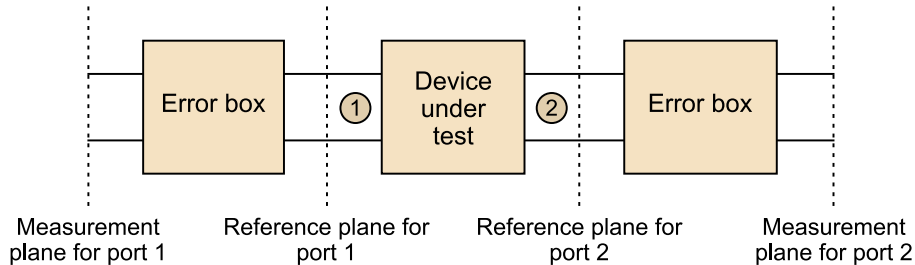
Fuente: extraída de D. M. Pozar (2012). *Microwave engineering* (4.ª ed.). John Wiley.

Este analizador de redes funciona de la manera siguiente. Toda la parte comprendida dentro de *RF source and test set* realiza la medida de los parámetros  $S$  del dispositivo bajo prueba. La fuente de *RF* realiza un barrido en frecuencia (en el ancho de banda elegido) y, utilizando acopladores, las ondas  $a$  (que a pesar de generarlas el mismo analizador, es necesario medirlas también para tenerlas como referencia) y  $b$  (reflejadas o transmitidas por el dispositivo bajo prueba) se transmiten al siguiente bloque, *IF processing*. Este segundo bloque solo es un receptor superheterodino, que baja la frecuencia de la señal a una frecuencia más adecuada para procesarla. Es posible que los analizadores más actuales no tengan dos etapas, sino solo una, dado que los convertidores analógico-digitales actuales pueden trabajar cada vez a frecuencias más altas. Aun así, dependerá del margen de frecuencias del analizador. Los analizadores más potentes del mercado actual pueden llegar hasta 1 THz aproximadamente. En todo caso, en el bloque de *Digital Processing*, la señal se digitaliza, se procesa y se muestran los resultados. Aparte de la magnitud y la fase de los parámetros  $S$ , los analizadores de redes también calculan la *ROE*, las pérdidas de retorno, impedancia, admitancia, etc.

Una característica importante de los analizadores de redes es la mejora sustancial en la precisión gracias al software de corrección de errores. Estos errores pueden estar causados por desadaptaciones en los acopladores direccionales, directividad imperfecta, pérdidas y variaciones en la respuesta frecuencial del analizador, y se corrigen con un proceso de calibración. Para obtener una medida ajustada de los parámetros  $S$  de una red de microondas, es necesario que el analizador esté muy calibrado, es decir, es imprescindible que las pérdidas y variaciones de fase causadas por los conectores, cables y transiciones utilizadas para conectar la red al analizador estén perfectamente compensadas. En el

diagrama de bloques de la figura 57 se muestran estos efectos englobados en dos bloques de error situados entre los planos de medida real del analizador y los planos de referencia de la medida de la red de dos puertos.

Figura 57. Diagrama de bloques del sistema de medida de un analizador de redes y un dispositivo de dos puertos



Fuente: Extraída de D. M. Pozar (2012). *Microwave engineering* (4.ª ed.). John Wiley.

Para compensar estos errores se utilizan técnicas de calibración antes de proceder con la medida del dispositivo. Así, la medida de los parámetros  $S$  del dispositivo se puede llevar a cabo compensando estos errores y recuperando por lo tanto la matriz de parámetros  $S$  solo del dispositivo. Estas técnicas deben ser muy precisas puesto que han de compensar los errores a frecuencias de decenas de GHz (y superiores). Existen varias técnicas de calibración, como la de *Thru-Reflect Line* (TRL) o la de *Thru-Open Short Match* (TOSM), entre otras. Con cualquiera de estas técnicas el objetivo es encontrar todos los términos de error a través de la medida de varios componentes conocidos (en el caso de la técnica TRL, una LT, un *thru*, que es un conector directo entre los dos puertos, y una impedancia de valor grande; en el caso de la técnica TOSM, un *thru*, un circuito abierto, un cortocircuito y una impedancia de adaptación). Con estas medidas y mediante un sistema de ecuaciones, se encuentran todos los términos de error.

Los componentes necesarios para la calibración se suelen comprar dentro de un kit. En la figura 58 se muestra un ejemplo.

Figura 58. Kit de calibración de un analizador de redes



## Resumen

En este módulo se han introducido los parámetros  $S$  y se han utilizado para la caracterización de redes a frecuencias de microondas. Estos parámetros establecen relaciones entre las ondas de tensión en los diferentes puertos de la red y presentan algunas ventajas ante las limitaciones de los parámetros  $Z$  o  $Y$  cuando aparecen los efectos de propagación. Para su medida solo necesitamos impedancias de igual valor al de la impedancia característica de las líneas de transmisión que hay en cada puerto, evitando así comportamientos erráticos de circuitos abiertos y cortocircuitos. Para considerar también la potencia reflejada y transmitida se añade la información de la impedancia característica del puerto. De este modo, aparecen las ondas  $a$  y  $b$ , que se definen como la onda de tensión (progresiva y regresiva respectivamente) normalizada por la raíz cuadrada de la impedancia característica de la línea de transmisión. Por lo tanto, estas solo tendrán sentido físico si en el puerto tenemos precisamente la línea de transmisión. En cualquier otro caso solo tendrán sentido matemático, es decir, podemos operar con ellas, pero no nos aportan información sobre las ondas de tensión y corriente reales en los puertos de la red. Cuando estas tienen sentido físico podemos calcular la potencia propagada simplemente elevándolas al cuadrado.

Para calcular la matriz de parámetros  $S$  de un circuito o red se han presentado dos métodos, uno basado en las tensiones y las corrientes presentes en los puertos del circuito y otro basado en la descomposición del modo par y del modo impar. Este último método solo se puede aplicar si el circuito es simétrico. Además, analizando la matriz de parámetros  $S$  obtenida podemos extraer características intrínsecas del circuito: podemos saber si este es recíproco, si es pasivo o activo, o si contiene pérdidas o no.

A largo del módulo se ha ido demostrando que los parámetros  $S$  son los más adecuados cuando se ha de medir y caracterizar una red de microondas. Aun así, no son los más convenientes si hemos de operar con varias redes conectadas entre ellas. Según esta conexión (cascada, serie, paralelo, etc.) podemos calcular algún tipo de parámetro más apropiado, como pueden ser los parámetros  $T$ , los parámetros  $ABCD$ , o incluso los parámetros  $Z$  o  $Y$ . Para el caso de una red de dos puertos, se han presentado todas las conversiones entre los diferentes parámetros.

Finalmente, en este módulo también se ha descrito el aparato utilizado para medir los parámetros  $S$  de un dispositivo real, el analizador de redes vectorial. Este analizador dispone de un sistema de calibración para extraer los errores introducidos por los cables y conectores utilizados en la medida, obteniendo así una gran precisión en esta.



## Ejercicios de autoevaluación

1. A frecuencias de microondas, los parámetros  $S$  son preferibles a los parámetros  $Z$  o  $Y$  para la caracterización de redes porque...

- a) ...las ondas de tensión aportan más información que las tensiones y las corrientes.
- b) ...resuelven las limitaciones de estos últimos, puesto que no utiliza cortocircuitos ni circuitos abiertos para su medida.
- c) ...permiten interpretar de una manera más intuitiva el comportamiento físico de la red medida.
- d) ...necesitan menos cálculos a la hora de analizar los circuitos.

2. Los parámetros  $S$  son siempre una relación...

- a) ...de ondas de tensión con ondas de corriente.
- b) ...de ondas de tensión  $V^+$  y  $V^-$ .
- c) ...de tensiones y corrientes.
- d) ...de ondas de tensión normalizadas.

3. En la definición de parámetros  $S$  se utilizan las ondas  $a$  y  $b$  porque...

- a) ...son más fáciles de calcular que las ondas  $V^+$  y  $V^-$ .
- b) ...caracterizan la red de microondas con una precisión mayor.
- c) ...nos dan información directa de la potencia media en los puertos de la red.
- d) ...las ondas  $V^+$  y  $V^-$  no tienen sentido físico si no tenemos una LT.

4. En una medida de parámetros  $S$ , el plano de referencia es el plano a partir del cual...

- a) ...se mide la matriz de parámetros  $S$ .
- b) ...la matriz de parámetros  $S$  no tiene sentido físico.
- c) ...se considera que la LT conectada tiene una impedancia característica de valor  $Z_0$ .
- d) ...podemos considerar que no hay ondas reflejadas.

5. Sea la siguiente matriz de parámetros  $S$ ,...

$$[S] = \begin{bmatrix} 0,1e^{j\frac{\pi}{2}} & 0,8e^{-j\frac{\pi}{4}} & 0,3e^{-j\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0,8e^{-j\frac{\pi}{4}} & 0 & 0 & 0,4e^{j\frac{\pi}{4}} \\ 0,3e^{-j\frac{\pi}{4}} & 0 & 0 & 0,6e^{-j\frac{\pi}{4}} \\ 0 & 0,4e^{j\frac{\pi}{4}} & 0,6e^{-j\frac{\pi}{4}} & 0 \end{bmatrix} \quad 2.175$$

- a) esta matriz caracteriza una red recíproca, pasiva y sin pérdidas.
- b) esta matriz caracteriza una red recíproca, pero no pasiva y sin pérdidas.
- c) esta matriz caracteriza una red pasiva y sin pérdidas, pero no recíproca.
- d) esta matriz no caracteriza una red recíproca, pasiva y sin pérdidas.

6. El coeficiente de reflexión del puerto 1 de una red de más de un puerto...

- a) ...es siempre igual al parámetro  $S_{11}$ , independientemente de los otros parámetros.
- b) ...depende exclusivamente de la matriz de parámetros  $S$ .
- c) ...depende del parámetro  $S_{11}$ , así como del resto de los parámetros  $S$ , de las impedancias con las que se cargan los otros puertos, y de la impedancia con la que se carga el puerto 1.
- d) ...depende del parámetro  $S_{11}$ , así como del resto de los parámetros  $S$  y de las impedancias con las que se cargan los otros puertos.

7. Sea un circuito caracterizado por la matriz de parámetros  $S$  siguiente...

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5j \\ 0,5j & 0,5 \end{bmatrix} \quad 2.176$$

la matriz de parámetros  $z$  que caracteriza este mismo circuito es...

$$\text{a) } [Z] = \begin{bmatrix} 69 & 65j \\ 65j & 69 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } [Z] = \begin{bmatrix} 89j & 65 \\ 65 & 89j \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } [Z] = \begin{bmatrix} 69 & 5j \\ 5j & 69 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d) } [Z] = \begin{bmatrix} 15 & 65j \\ 65j & 15 \end{bmatrix}.$$

8. Cuando tenemos una red conectada en un circuito real, sus parámetros  $S$ ,...

- a) ...solo tienen sentido si los puertos de la red están cargados con su impedancia de referencia.
- b) ...no varían, pero sí pueden variar los coeficientes de reflexión y/o de transmisión en función de las impedancias que vean los diferentes puertos de la red.
- c) ...no los podemos utilizar. Hemos de convertirlos a parámetros  $Z$  o  $Y$  para analizar el circuito.
- d) ...solo tendrán sentido si utilizamos la LT para interconectar las redes.

9. Dos dispositivos de dos puertos presentan las matrices de parámetros  $S$  siguientes, medidas con la misma impedancia de referencia:

$$[S_1] = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad 2.177$$

$$[S_2] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 2.178$$

Si conectamos los dos dispositivos en cascada, la matriz de parámetros  $S$  del dispositivo global resultante es...

$$\text{a) } [S_{1+2}] = \begin{bmatrix} -4,44 & 2,75 \\ 2,75 & -2,37 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } [S_{1+2}] = \begin{bmatrix} 4,44 & -2,37 \\ -2,37 & 2,75 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } [S_{1+2}] = \begin{bmatrix} 4,44 & -2,75 \\ -2,75 & 2,37 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d) } [S_{1+2}] = \begin{bmatrix} 4,44 & -2,75 \\ 2,75 & 2,37 \end{bmatrix}.$$

10. Una red de un solo puerto presenta un coeficiente de reflexión  $\Gamma = j0,5$  medido con una impedancia de referencia de  $50 \Omega$ . Si conectamos esta red a una LT de impedancia de referencia de  $75 \Omega$ , el coeficiente de reflexión presentará un valor tal como...

$$\text{a) } \Gamma = 0,52e^{j2,69}.$$

$$\text{b) } \Gamma = 0,22e^{j0,69}.$$

$$\text{c) } \Gamma = 0,52e^{j0,69}.$$

$$\text{d) } \Gamma = 0,22e^{j2,69}.$$



## **Solucionario**

### **Ejercicios de autoevaluación**

1. b

2. d

3. c

4. a

5. b

6. d

7. a

8. b

9. c

10. d

## Glosario

**$a$**  *f* Onda progresiva de tensión normalizada respecto a la raíz cuadrada de la impedancia característica de la línea de transmisión. En una red de microondas serán las ondas entrantes.

**adaptación** *f* Conexión de una impedancia igual al valor de la impedancia característica en un extremo de una línea de transmisión.

**$b$**  *f* Onda regresiva de tensión normalizada respecto a la raíz cuadrada de la impedancia característica de la línea de transmisión. En una red de microondas serán las ondas salientes.

**coeficiente de reflexión** *m* Relación entre la onda progresiva y la onda regresiva en un punto dentro de una línea de transmisión.

**frecuencias de microondas** *f pl* Rango de frecuencias de microondas comprendido entre 300 MHz y 300 GHz.

**impedancia característica** *f* Relación entre la onda de tensión progresiva (o regresiva) y la onda de corriente progresiva (o regresiva).

**impedancia de referencia** *f* Impedancia con la que se cargan los puertos de una red de microondas para medir sus parámetros *S*.

**línea de transmisión** *f* Guía de ondas formada por dos o más conductores con sección recta constante que propaga ondas TEM.

**LT** *f* Línea de transmisión.

**matriz conjugada** *f* Matriz que cambia el signo de los componentes imaginarios.

**matriz hermítica** *f* Matriz conjugada y traspuesta.

**matriz traspuesta** *f* Matriz que intercambia filas por columnas.

**onda progresiva** *f* Onda que se propaga en el sentido creciente del eje definido.

**onda regresiva** *f* Onda que se propaga en el sentido decreciente del eje definido.

**parámetros ABCD** *m pl* Parámetros de transmisión. Parámetros que relacionan las tensiones y las corrientes con las tensiones y las corrientes presentes en los puertos de una red de microondas.

**parámetros *S* (scattering parameters)** *m pl* Parámetros de dispersión. Parámetros que relacionan las ondas salientes (*b*) con las ondas entrantes (*a*) presentes en los puertos de una red de microondas.

**parámetros *T*** *m pl* Parámetros de transmisión. Parámetros que relacionan las ondas entrantes (*a*) y salientes (*b*) con las ondas entrantes (*a*) y salientes (*b*) presentes en los puertos de una red de microondas.

**parámetros *Y*** *m pl* Parámetros de admitancia. Parámetros que relacionan las corrientes con las tensiones presentes en los puertos de una red de microondas.

**parámetros *Z*** *m pl* Parámetros de impedancia. Parámetros que relacionan las tensiones con las corrientes presentes en los puertos de una red de microondas.

**plano de referencia** *m* Plano de calibración del analizador de redes.

**red pasiva** *f* Red de microondas que no amplifica la potencia de la señal incidente.

**red recíproca** *f* Red de microondas que presenta una matriz simétrica, es decir,  $S_{ij} = S_{ji}$  (para  $\forall i \neq j$ ).

**red simétrica** *f* Red de la que, si se divide por la mitad, se obtienen dos redes simétricamente iguales.

**red sin pérdidas** *f* Red de microondas que no atenúa la potencia de la señal incidente.

## Bibliografía

### Bibliografía básica

**Pozar, D. M.** (2012). *Microwave engineering* (4.<sup>a</sup> ed.). John Wiley.

**Ribó, M.; Pajares, F. J.** (2008). *Circuits d'alta freqüència*. Enginyeria La Salle (Guía de estudios Semipresenciales).

### Bibliografía complementaria

**González, G.** (2004). *Microwave Transistor Amplifier* (2.<sup>a</sup> ed.). Prentice Hall.

**Weber, R. J.** (2001). *Introduction to Microwave Circuits, Radio Frequency and Design Applications*. IEEE Press Series on RF and Microwave Technology.

