Modelos de regresión dinámicos y multiecuacionales

Tomás del Barrio Castro
Miquel Clar López
Jordi Suriñach Caralt

PID_00160620

Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

Índice

Introducción

En este módulo didáctico estudiaremos los modelos dinámicos y los modelos multiecuacionales, que introducimos a continuación:

1) Las relaciones que se producen entre las variables económicas, en muchas ocasiones no son **relaciones estáticas** (en el sentido de que se agotan en el mismo periodo analizado), sino que son **relaciones dinámicas** (en el sentido de que se mantienen más allá de un periodo o momento concreto del tiempo). Por este motivo, en el presente módulo estudiaremos otro caso particular del modelo de regresión: aquel en el que, por el hecho de trabajar con datos temporales, las relaciones que se producen con las variables no sólo son contemporáneas. Este hecho supone que en el modelo de regresión tengamos que explicitar esta dinamicidad. Así que estudiaremos tanto la manera de hacer la especificación de los distintos tipos de **modelos dinámicos**, como la interpretación asociada a los parámetros de estos modelos. Por otra parte, también analizaremos los problemas que encontraremos en la etapa de estimación y las soluciones adecuadas en cada caso.

2) En segundo lugar estudiaremos otra extensión del modelo de regresión lineal múltiple (MRLM) como es el caso de los **modelos multiecuacionales**. En algunas ocasiones hay hechos económicos que se explican por variables que son exógenas, pero, al mismo tiempo, por variables endógenas. En tal caso, será preciso especificar más de una ecuación. Nos vamos a centrar, básicamente, en presentar los diferentes tipos de modelos multiecuacionales que hay, la notación que debemos utilizar, y estimar e interpretar los parámetros como es debido.

Objetivos

Los materiales didácticos de este módulo contienen las herramientas fundamentales para que el estudiante alcance los siguientes objetivos:

1. Conocer los distintos tipos de modelos de regresión dinámicos que se pueden especificar.

2. Saber calcular los multiplicadores de impacto, retardados y totales.

3. Saber calcular el retardo medio y el valor mediano, y, en general, el número de periodos que tienen que transcurrir para alcanzar un porcentaje determinado del cambio que se producirá en la variable endógena ante una modificación en el valor de una variable explicativa.

4. Conocer las propiedades de los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) de cualquier modelo dinámico.

5. Saber seleccionar el método de estimación adecuado para cada uno de los modelos dinámicos.

6. Saber estimar por el método de las variables instrumentales.

7. Saber ante qué tipo de modelo multiecuacional nos encontramos.

8. Saber escribir la forma estructural, reducida y final de un modelo multiecuacional, e interpretar el significado de sus parámetros.

9. Identificar las ecuaciones de un modelo multiecuacional.

10. Determinar las propiedades de la estimación por MCO ante distintos modelos multiecuacionales y proponer alternativas de estimación que la mejoren.

1. Modelos de regresión dinámicos

En un modelo de regresión suponemos que una variable Y (endógena) se explica por un conjunto de k variables X, de manera que, si modificamos el valor de alguna de las X, también estaremos cambiando en la Y.

En caso de que trabajamos con datos de corte temporal, de manera adicional, deberemos tener presente que puede ser necesario que este factor temporal quede explicitado de manera directa o indirecta en la relación, puesto que tiene una influencia en el valor que toma la variable endógena.

Por ejemplo, supongamos que queremos explicar el número de coches que ha vendido una empresa automovilística (V). Como variables explicativas, podríamos incluir, realizando un supuesto simple, el precio del coche (P), el precio medio de un vehículo de la competencia de características similares (PC), el número de concesionarios de la marca (NC) y el volumen de gasto publicitario que ha efectuado la empresa en cada periodo (DP). Así pues, para cualquier tiempo t podríamos especificar el modelo:

$$V_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 PC_t + \beta_4 NC_t + \beta_5 DP_t + u_t \quad \forall t = 1, ..., T.$$

Una vez especificado el modelo, lo estimaremos por ejemplo, por el conjunto de treinta datos de periodicidad anual de los que disponemos, $t = 1, ..., T$ (en general denotaremos el número total de observaciones con la letra T; en este caso concreto, $T = 30$).

Con toda seguridad, el resultado asociado al modelo no sería tan bueno como desearíamos. Los residuos del modelo quizá presentarían problemas de autocorrelación, indicativos de una omisión de variables relevantes o, sencillamente, de una mala especificación. El ajuste seguramente no sería tan elevado como tendría que ser, etc. ¿Por qué? Pues bien, porque en este modelo no hemos considerado la relación dinámica, no contemporánea, que se produce entre las variables.

Es fácil pensar, por ejemplo, que el efecto de una campaña publicitaria de promoción de un coche no sólo afectará al volumen de ventas de aquel año, sino que, probablemente, también tendrá efectos en años sucesivos. La no consideración de este hecho generará las consecuencias negativas que hemos mencionado antes. La autocorrelación residual de orden 1 que podría haber sería una manera de captar esta relación no contemporánea que se da en el modelo y que tendríamos que incluir, sea por la vía de explicitar las relaciones no contemporáneas en el término de perturbación (entre u_t y u_{t-1}, que, de hecho, conduciría a la reespecificación del modelo con la aparición de variables retardadas), sea por la incorporación en el modelo de la variable explicativa DP_{t-1}, si creemos que el gasto publicitario realizado en un periodo también afecta a las ventas del periodo siguiente, o de la varia-

Tipos de relaciones dinámicas

Los tipos de relaciones dinámicas pueden ser variados. Por ejemplo, podemos encontrarnos con que una variable no tenga efectos inmediatos sobre otra, pero sí al cabo de un cierto tiempo. Asimismo, puede ser que el efecto se concentre en un número concreto de periodos o que se diluya en un número indefinido de éstos.

ble endógena retardada V_{t-1}, si el efecto de las variables explicativas sobre la variable endógena se produce de manera decreciente en un conjunto de periodos.

El ejemplo anterior hace evidente que, en muchas ocasiones, una acción económica tomada en un momento determinado del tiempo no tiene efectos sólo en el periodo en curso, sino también en otros futuros.

Hallaremos una justificación teórica de la necesidad de especificar modelos dinámicos en aquellos modelos económicos en los que aparece como variable endógena o como variable explicativa una variable deseada, esperada, que requerirá la formulación de una **hipótesis de ajuste** o *expectativa,* mediante la cual se relacionen estas variables esperadas con las que en realidad acabaremos observando.

Ejemplos de estos modelos son $Y_t^* = \alpha + \beta X_t + u_t$, o $Y_t = \alpha + \beta X_t^* + u_t$, donde el símbolo * indica *variable esperada* o *deseada*.

La incorporación de estas expectativas al modelo (la inclusión de expresiones en las que en exclusiva habrá variables reales en lugar de las variables esperadas) conducirá a nuevos modelos de regresión que serán dinámicos, en los que la relación entre las variables no sólo será contemporánea.

Algunas de las formulaciones más habituales para registrar las expectativas son la **hipótesis de ajuste parcial** (HAP), la **hipótesis de expectativas adaptativas** (HEA), la **hipótesis de expectativas racionales** (HER), etc.

Por ejemplo, la HAP especifica que $Y_t - Y_{t-1} = \gamma\,(Y_t^* - Y_{t-1})$, y la HEA que $X_t^* - X_{t-1}^* = \lambda(X_t - X_{t-1}^*)$. Así, por ejemplo, para el caso de la HAP, en el modelo inicial sustituiremos Y_t^* por $\{[1 - (1 - \gamma)L]Y_t/\gamma\}$, donde L es el **operador de retardo**, que aplicado sobre la variable Y_t transforma la variable inicial en Y_{t-1} (así, en general, $L^jY_t = Y_{t-j}$), y llegaremos al siguiente modelo:

$$Y_t = \gamma\alpha + \gamma\beta X_t + (1 - \gamma)Y_{t-1} + \gamma u_t \quad \forall t = 2, ..., T.$$

Actividad

1.1. Encontrad el modelo al que llegaríamos para el caso de la hipótesis de expectativas adaptativas.

Podríamos mencionar muchos más casos en los que se manifiesta esta dinamicidad entre las variables económicas. Asimismo, hay evidencia empírica de que la modificación del tipo impositivo del IVA no sólo tiene consecuencias sobre el IPC del mismo mes, sino que también posee un efecto diferido, como mínimo, en uno o dos meses más.

Otro ejemplo de modelo dinámico

Un ejemplo de modelo dinámico podría ser la inversión que hiciese una empresa al comprar una máquina nueva. Claro está, el periodo de compra de la máquina y aquel en el que afectará la mejora en el nivel de producción de la empresa no tienen por qué coincidir.

Este último ejemplo puede servirnos para ver que la dinamicidad o no de las relaciones económicas dependerá, también, de la frecuencia de las observaciones. Si trabajásemos con un modelo anual, sería uno **modelo estático**, mientras que, si fuese mensual, sería uno **modelo dinámico**.

La manera de explicitar la dinamicidad en un modelo puede ser tanto la incorporación de variables (endógenas o exógenas) retardadas en el tiempo, como la aparición de esquemas de autocorrelación en el término de perturbación o la aparición de variables tendenciales (t) en el MRLM.

Ejemplos de variables tendenciales

Una variable tendencial puede ser, por ejemplo, t = 1, 2, 3, 4, ...
o t = 1.960, 1.961, 1.962, ...

En este apartado estudiaremos los distintos tipos de especificaciones de los modelos dinámicos que explicitan una relación no contemporánea entre las variables, así como los métodos de estimación y la interpretación que tenemos que realizar de los parámetros estimados.

1.1. Tipología de modelos dinámicos

En este subapartado vamos a presentar los principales modelos dinámicos que podemos especificar. Nos limitaremos a presentarlos debido a que en otros subapartados estudiaremos la forma adecuada de estimarlos e interpretar sus resultados.

1.1.1. Modelos de retardos distribuidos (RD)

Un primer tipo de modelo dinámico es el modelo de retardos distribuidos de orden s, RD(s).

En los **modelos de retardos distribuidos de orden *s*** explicitamos la dinamicidad mediante la presencia de variables exógenas retardadas dentro de los regresores. El orden del modelo de retardos distribuidos es igual al número de retardos asociado a las variables exógenas.

Así, si suponemos que una variable Y se explica por una variable exógena X, el modelo RD(s) sería:

$$Y_t = \mu + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \ldots + \beta_s X_{t-s} + u_t. \qquad (1.1)$$

Este modelo RD(s) se leería como un modelo de retardos distribuidos de orden s.

En el modelo mencionado diríamos que una variación de X en un periodo afectaría al valor de Y en aquel mismo periodo, y hasta s periodos más. Otras formas habituales de escribir la expresión 1.1, a partir del uso del operador de retardos L, son:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu + \beta_0 X_t + \beta_1 L X_t + \beta_2 L^2 X_t + \ldots + \beta_s L^s X_t + u_t = \\ &= \mu + (\beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \ldots + \beta_s L^s) X_t + u_t = \\ &= \mu + B(L) X_t + u_t. \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Algunas características de este modelo RD son las siguientes:

a) El orden del retardo s no tiene por qué ser finito; puede ser infinito.

b) Para simplificar, en la expresión 1.1 hemos supuesto que sólo había una variable exógena X como variable explicativa de Y, pero una especificación más general admitiría que hubiese k variables explicativas, cada una de las cuales podría presentar distintos órdenes de retardo. En este caso, podríamos hablar de un modelo RD(s_1 , s_2 , s_3 , ..., s_k):

$$Y_t = \mu + B_1(L)X_{1t} + \ldots + B_k(L)X_{kt} + u_t,$$

donde $B_j(L)$ sería el polinomio de orden s_j asociado a la variable X_{ij}.

c) Los parámetros β del modelo RD(2) pueden interpretarse directamente como los multiplicadores (contemporáneos o retardados) de X sobre Y y, además, el modelo siempre será estable.

Para tener más detalles acerca de los conceptos *estabilidad del modelo* y *multiplicadores*, ved los subapartados 1.2.1 y 1.2.2 del presente módulo didáctico.

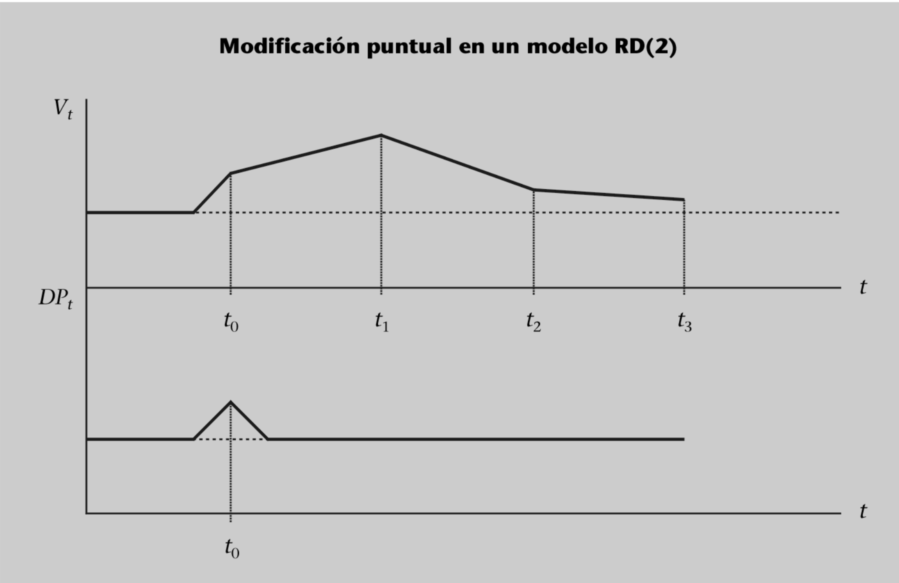
Ejemplo de modelo RD(2)

Volviendo al ejemplo que hemos presentado al iniciar de este módulo sobre las ventas de coches, un modelo de RD(2) sería:

$$V_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 PC_t + \beta_4 NC_t + \beta_5 DP_t + \beta_6 DP_{t-1} + \beta_7 DP_{t-2} + u_t,$$

si supusiésemos que una campaña publicitaria tiene efecto sobre el número de coches que se venderán en aquel mismo periodo y sólo en los dos siguientes; es decir, el número de coches vendidos en t depende del gasto en publicidad efectuado en el mismo periodo y en los dos periodos anteriores.

El gráfico temporal asociado a este caso, si suponemos una modificación puntual en el valor del nivel de equilibrio de DP en el instante t_0 , sería el que presentamos a continuación (en este ejemplo suponemos que $\beta_6 > \beta_5 > \beta_7$, lo cual quiere decir que el gasto en publicidad que más afecta es el del periodo inmediatamente anterior al instante considerado):



1.1.2. Modelos autorregresivos (AR)

Un segundo tipo de modelo dinámico es aquel en el que las variables explicativas que presentan una relación no contemporánea con la variable endógena son las mismas variables endógenas retardadas, además de las variables exógenas habituales.

Definimos el **modelo autorregresivo de orden *r***, AR(*r*) de la manera siguiente:

$$Y_t = \mu + \beta_0 X_t + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \ldots + \alpha_r Y_{t-r} + u_t, \qquad (1.3)$$

que también podemos reescribir como:

$$Y_t - \alpha_1 L Y_t - \alpha_2 L^2 Y_t - \ldots - \alpha_r L^r Y_t = \mu + \beta_0 X_t + u_t, \qquad (1.4)$$

o bien:

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \ldots - \alpha_r L^r) Y_t = A(L) Y_t = \mu + \beta_0 X_t + u_t. \qquad (1.5)$$

Los modelos autorregresivos de orden finito se caracterizan porque una variación en la variable exógena tendrá un efecto temporal indefinido sobre la variable endógena, en el sentido que ésta se verá afectada en un número de periodos indeterminado, y su impacto total puede ser finito o no. En cambio, en un modelo RD, el impacto es finito y se distribuye en un periodo temporal también concreto.

Más adelante llevaremos a cabo un análisis más detallado de este efecto temporal diferido sobre *Y* de una variación unitaria en *X* y veremos con más detenimiento la diferencia que hay entre los dos tipos de modelos, y lo haremos a partir del análisis del valor que presentan los multiplicadores retardados en cada uno de los modelos AR y RD.

Ved el análisis de los modelos AR y RD en el subapartado 1.2 de este módulo didáctico.

Ejemplo de modelo AR(1)

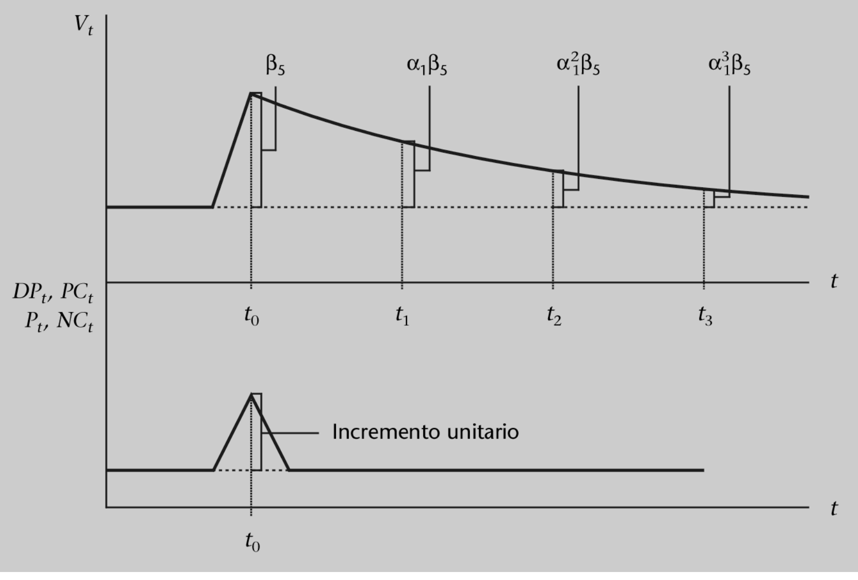
Volvemos, de nuevo, al ejemplo sobre las ventas de coches. En este caso, un modelo AR(1) sería:

$$V_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 PC_t + \beta_4 NC_t + \beta_5 DP_t + \alpha_1 V_{t-1} + u_t,$$

donde $|\alpha_1| < 1$, si suponemos que una campaña publicitaria tiene un efecto en el número de coches que se venderán en el mismo periodo y en un número indeterminado de periodos, pero siendo este efecto cada vez menor hasta que desaparece. $|\alpha_1|$ tendrá que ser menor que 1 para que el modelo sea estable. En este caso, el gráfico temporal asociado a V_t y a cualquier variable explicativa, si suponemos un cambio en el valor de equilibrio de una variable explicativa cualquiera en el instante t_0, sería:

Ved las condiciones de estabilidad de un modelo en el subapartado 1.2.1 de este módulo didáctico.

Modificación puntual en un modelo AR(1)



El incremento de V_t en t_0, ΔV_{t0}, ante un aumento unitario en DP, será β_5. El incremento de V_t en t_1 asociado al aumento, ΔV_{t1}, será $\alpha_1 \Delta V_{t0} = \alpha_1\beta_5$. El incremento de V_t en t_2 asociado al aumento, ΔV_{t1}, será $\alpha_1 \Delta V_{t1} = \alpha_1(\alpha_1\beta_5) = \alpha_1^2\beta_5$. Y así sucesivamente: el incremento en t_3 sería $\alpha_1^3\beta_5$, etc.

1.1.3. La hipótesis de Koyck

En realidad, entre los modelos RD y AR se establece una interrelación clara. En algunas ocasiones, para evitar tener que especificar un modelo dinámico RD(∞) o AR(∞) (con los problemas de estimación que surgirían por el hecho de tener que estimar infinitos parámetros), se plantea como solución reespecificar el modelo en un AR o RD de orden finito, respectivamente. Uno de los casos más habituales consiste en introducir lo que se conoce como **hipótesis de Koyck**. El punto de partida es un modelo RD de infinitos retardos:

Ved el epígrafe d del subapartado 3.1.2 de este módulo didáctico.

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \ldots + u_t, \qquad (1.6)$$

donde suponemos que el valor de los parámetros **B** disminuye siguiendo geométricamente la siguiente expresión:

$$\beta_j = \beta_0 \delta^j \quad j = 0, 1, \ldots, \qquad (1.7)$$

donde $0 < \delta < 1$. Por tanto, a medida que nos referimos a periodos más alejados en el tiempo, menor es la influencia de X sobre Y. Sustituyendo 1.7 en 1.6 y trabajando la expresión resultante, llegaríamos, finalmente, a un modelo AR(1):

Lectura complementaria

Podéis encontrar la demostración que convierte un modelo RD de retardos infinitos en un modelo AR(1) en la siguiente obra:

D.N. Gujarati (1993). *Econometría* (cap. 14 y 17). México: McGraw-Hill.

$$Y_t = \alpha(1 - \delta) + \beta_0 X_t + \delta Y_{t-1} + v_t, \qquad (1.8)$$

donde $v_t = u_t - \delta u_{t-1}$. Este nuevo modelo AR(1) presenta ventajas e inconvenientes con respecto al modelo RD(∞) inicial, que mostramos a continuación:

a) Por una parte, las ventajas consisten en que se reduce el número de parámetros y los problemas de multicolinealidad que podía haber en el modelo 1.6.

b) Por otra, el inconveniente es que aparece como variable explicativa la variable endógena retardada y que el nuevo término de perturbación será no esférico (aunque u_t fuese esférico), por lo que tendremos que ser cautos en cuanto al método de estimación que debemos utilizar, ya que los estimadores MCO no cumplirán las propiedades deseables.

Ved el método de estimación por MCO que debemos utilizar en caso de no esfericidad del término de perturbación en el subapartado 1.3 del módulo "Incumplimiento de las hipótesis básicas..." de esta asignatura.

El paso del modelo RD(∞) de la expresión 1.6 al modelo AR(1) de la expresión 1.8 sólo es válido si aceptamos la relación entre los parámetros **B** del modelo que registra la expresión 1.7.

1.1.4. Modelos autorregresivos y de retardos distribuidos (AD)

Estos modelos engloban los dos tipos de modelos anteriores y, por lo tanto, los consideran casos particulares.

En general, definimos el **modelo autorregresivo y de retardos distribuidos**, AD(r,s) de la siguiente manera:

$$A(L)Y_t = \mu + B(L)X_t + u_t,$$

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - ... - \alpha_r L^r)Y_t =$$
$$= \mu + (\beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + ... + \beta_s L^s)X_t + u_t \qquad (1.9)$$

$$Y_t = \mu + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + ... +$$
$$+ \alpha_r Y_{t-r} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + ... + \beta_s X_{t-s} + u_t.$$

El desarrollo...

... para llegar al modelo AD(r,s) consiste en sustituir $A(L)$ y $B(L)$ por sus respectivas expresiones y, a continuación, aislar la Y_t.

Un modelo todavía más general que éste sería aquel que contuviese más de una variable explicativa X_j (j = 1, 2, ..., k) diferente. En este caso, el modelo sería AD(r;s_1,s_2,...,s_k). Por contra, modelos más simples son un modelo RD(s), que es un modelo AD(0,s), y un modelo AR(r), que es un modelo AD(r,0).

Ejemplo de modelo AD(1,1)

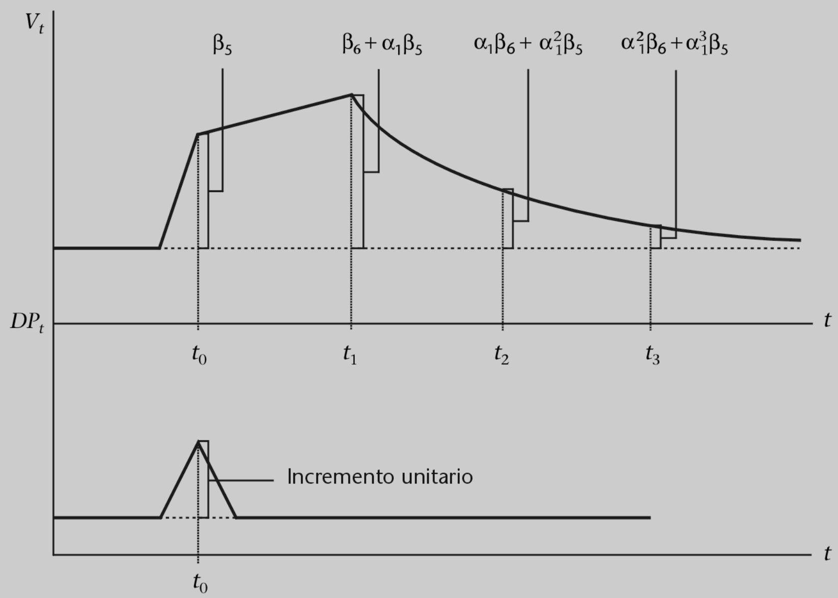
Volvemos a nuestro recurrente ejemplo sobre las ventas de coches. Aquí, un modelo AD(1,1) sería el siguiente:

$$V_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 PC_t + \beta_4 NC_t + \beta_5 DP_t + \beta_6 DP_{t-1} + \alpha V_{t-1} + u_t,$$

si supusiésemos que una campaña publicitaria tiene un efecto directo sobre el número de coches que se venderán en el mismo periodo y en el siguiente, pero, en este caso, también hay un efecto indirecto sobre los futuros periodos.

El gráfico correspondiente a esta situación sería una combinación de los dos gráficos de los ejemplos anteriores, como vemos a continuación:

Modificación puntual en un modelo AD(1,1)



Comprobamos que, en este caso, los efectos sobre V_t de una variación unitaria en DP en t_0 en los diferentes momentos del tiempo serían: β_5 en t_0; $\beta_6 + \alpha_1\beta_5$ en t_1; $\alpha_1(\beta_6 + \alpha_1\beta_5) = \alpha_1\beta_6 + \alpha_1^2\beta_5$ en t_2; $\alpha_1(\alpha_1\beta_6 + \alpha_1^2\beta_5) = \alpha_1^2\beta_6 + \alpha_1^3\beta_5$ en t_3, y así sucesivamente.

1.1.5. Otros modelos dinámicos

Los modelos econométricos dinámicos que hemos presentado hasta ahora están basados en modelos económicos teóricos. Existe otra estrategia de modelización dinámica (no basada en la teoría económica) que propone especificar los modelos y, por lo tanto, decidir los retardos asociados a cada variable, sólo a partir de la información histórica (datos) de estas variables. Son modelos que, en algunos casos, podréis hallar referenciados como **modelos de caja negra**, teniendo en cuenta su origen en la especificación, no basado en la teoría económica y sí en los datos. De entre los más habituales, podríamos citar los siguientes modelos:

- Los **modelos ARIMA(p,d,q) univariantes**:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p)Y_t = \mu + (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q)\varepsilon_t,$$

o bien:

$$\phi(L)Y_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t.$$

El modelo ARIMA

El modelo ARIMA es una generalización de los modelos ARMA que se utilizan en el contexto de series temporales, en el que se incorpora la posibilidad de una regularidad estacional.

- Los **modelos de función de transferencia**:

$$Y_t = \mu + [B(L)/A(L)]X_t + [\phi(L)/\theta(L)]\varepsilon_t.$$

Un último tipo de modelo, surgido en torno a la teoría de la cointegración, intenta combinar la estrategia econométrica clásica, basada en modelos teóricos, con la estrategia acerca de las series temporales, en la que se intenta evitar el problema de modelizar relaciones espurias entre variables. Es el modelo conocido como **modelo del mecanismo de corrección del error** (MCE). Como ejemplo de un MCE, mostramos el siguiente, que obtendríamos a partir de un modelo AD(1,1) entre Y_t y X_t:

Relaciones espurias

Una relación entre dos variables es espuria cuando viene causada, no por una relación directa entre éstas, sino por una relación indirecta por medio de una tercera variable (como, por ejemplo, el tiempo).

$$\Delta Y_t = \mu + (\alpha - 1)\{Y_{t-1} - [(\beta_0 + \beta_1) / (1 - \alpha)]X_{t-1}\} + \beta_0 \Delta X_t + u_t.$$

1.2. Análisis e interpretación de los modelos dinámicos

Una vez presentados los distintos tipos de modelos dinámicos, pasamos a estudiar los resultados que derivan de éstos. La vertiente temporal explicitada en los modelos hace necesaria una interpretación complementaria de las consecuencias económicas asociadas a los parámetros estimados del modelo.

1.2.1. Estabilidad del modelo

Un primer requisito que necesariamente tiene que cumplir cualquier modelo es su obligación de ser estable.

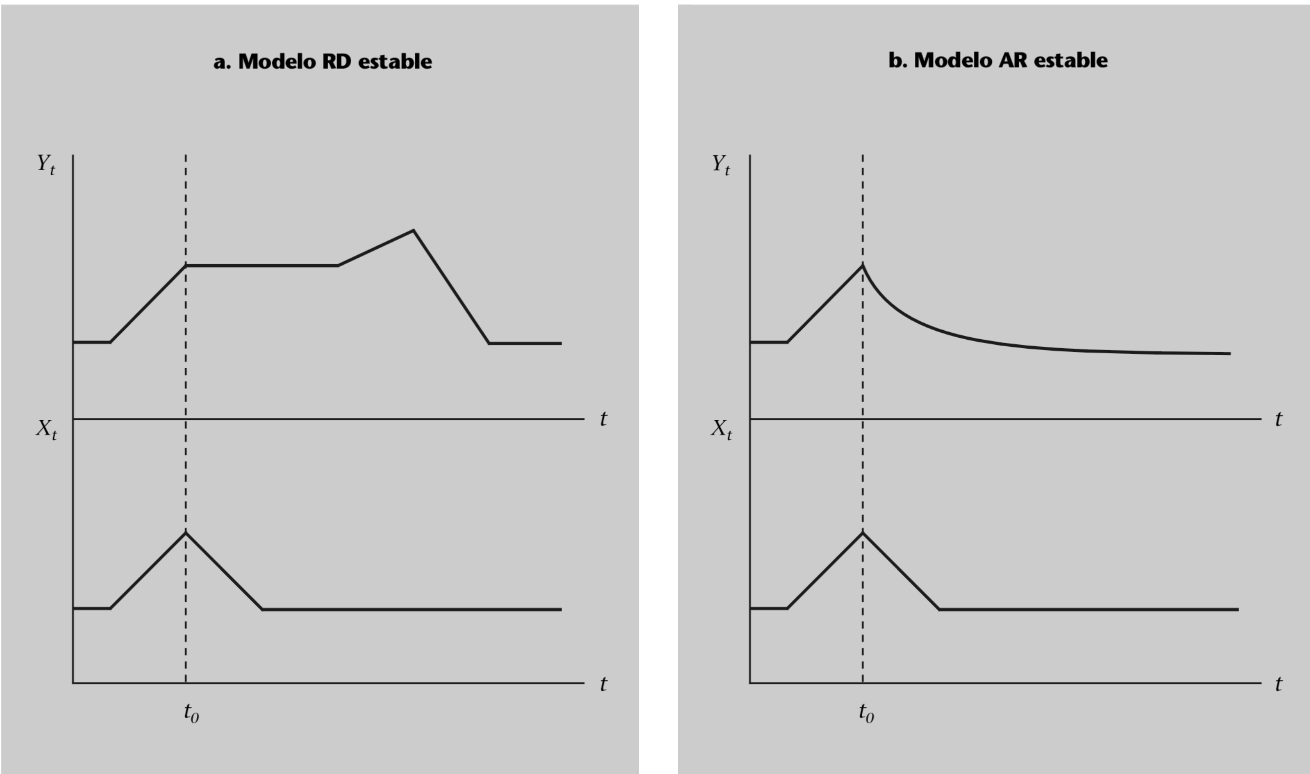
Se define como uno **modelo estable** aquel en el qué, ante una variación puntual en el valor de una variable exógena en un momento concreto del tiempo, la variable endógena retorna a su valor de equilibrio, de manera que el efecto total de esta variación es finito.

En caso de que la variación en la variable exógena fuese permanente, el modelo sería estable si la variable endógena también evolucionase hacia un nuevo valor de equilibrio.

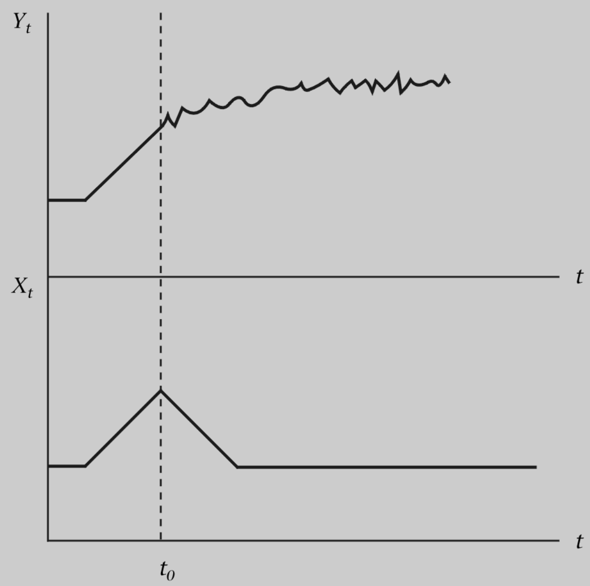
Los gráficos **a**, **b**, **c**, y **d**, que presentamos a continuación, pretenden mostrar cuatro situaciones distintas. Suponiendo un valor de equilibrio inicial para X e Y (X^* e Y^*), y ante una modificación puntual en el valor de la variable exógena en un momento determinado del tiempo (t_0), en los dos primeros gráficos el valor de la variable endógena recupera su valor de equilibrio, mientras que en los dos últimos no lo hace.

Así pues, los dos primeros casos indicarían una estabilidad del modelo (dado que el impacto en la variable endógena es finito), y los dos últimos, modelos inestables.

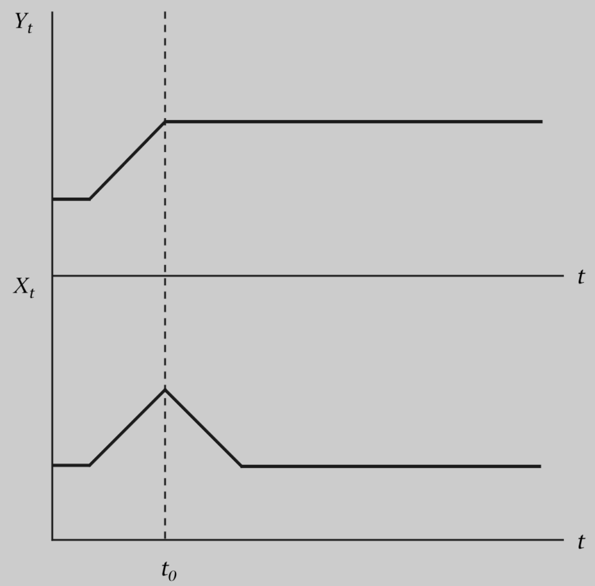
Por otra parte, en los gráficos **e** y **f**, que vamos ver en la página siguiente, también nos encontraríamos ante una serie de modelos estables, puesto que, ante una variación que se mantiene a lo largo del tiempo en el valor de la variable exógena, la variable endógena tiende a un nuevo valor de equilibrio.



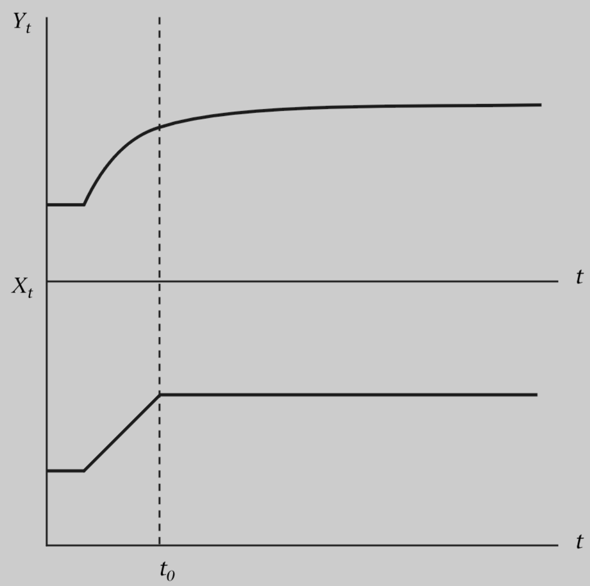
c. Modelo AD inestable de tipo explosivo



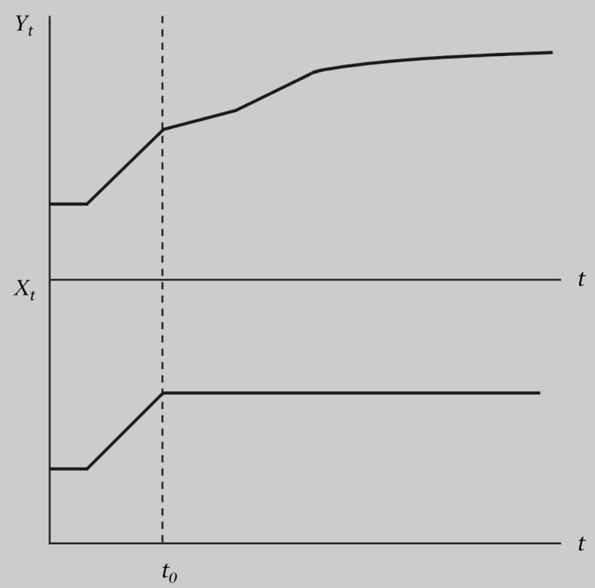
d. Modelo AD inestable no explosivo



e. Modelo AR estable



f. Modelo RD estable



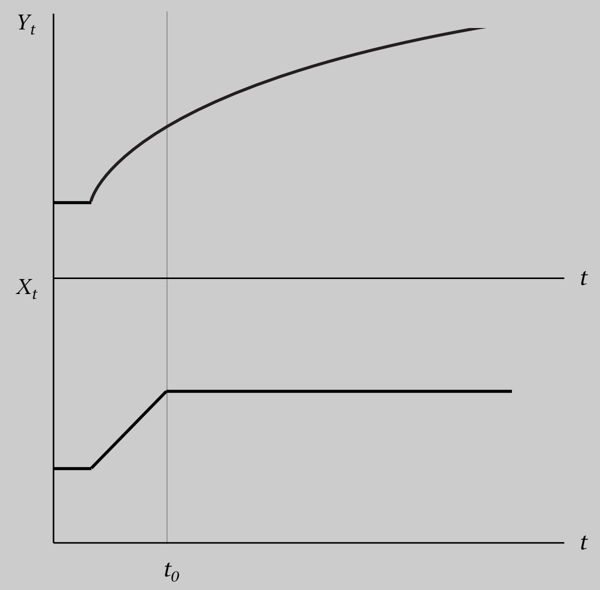
En cambio, el gráfico **g** (ved la página siguiente) estaría asociado a un modelo inestable, dado que la evolución de Y_t sería explosiva y no se alcanzaría un nuevo valor de equilibrio.

Para analizar la estabilidad del modelo, y partiendo del modelo dinámico general que registra la expresión 1.9, podemos demostrar que la condición de estabilidad es que las raíces o soluciones del polinomio autorregresivo A(L) sean, en valor absoluto, mayores que la unidad (o, dicho de otra manera, que las raíces o soluciones estén fuera del círculo de radio unidad). En caso de que se verifique la condición mencionada, aseguramos que la variable endógena recupera su

Las raíces de un polinomio $A(L)$...

... las obtenemos igualando a cero el polinomio mencionado:
$1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - ... - \alpha_r L^r = 0$,
y resolviendo la ecuación como si L fuese la incógnita.

g. Modelo AR inestable



valor de equilibrio y que el efecto de una variación puntual del valor de la variable exógena tiene un impacto finito sobre la variable endógena, o bien que, ante una variación permanente en la variable exógena, la variable endógena alcanza un nuevo valor de equilibrio.

El gráfico **a**, en el que el efecto sobre la variable endógena se da en un número concreto y finito de periodos, está asociado con modelos de retardos distribuidos. El gráfico **b**, en el que el efecto sobre la variable endógena es finito, pero se da en un número indefinido de periodos, se asocia con los modelos autorregresivos. El gráfico **c**, en el que la variable endógena sigue una trayectoria explosiva, estaría asociado con los modelos AD con alguna raíz o solución dentro del círculo de radio unidad. Y el gráfico **d** sería el caso de un modelo AD con alguna raíz igual a la unidad. Por otra parte, el gráfico **e** estaría asociado a un modelo AR estable; el gráfico **f**, a un RD estable, y el gráfico **g**, a un modelo AR inestable.

1.2.2. Multiplicadores de impacto, retardados y totales

Si la relación entre la variable endógena y las variables exógenas es dinámica, en el análisis del efecto que tienen estas últimas sobre la variable endógena tendremos que diferenciar los efectos contemporáneos de los no contemporáneos.

El concepto de multiplicador es útil para explicar el cambio que se da en la variable endógena ante un cambio unitario en el valor de la variable exógena. En el contexto dinámico en el que nos movemos ahora, tendremos que diferenciar entre multiplicador de impacto, o multiplicador contemporáneo, multiplicadores una vez transcurridos j periodos, y multiplicador total. Dado el modelo dinámico AD(r,s):

$$Y_t = \mu + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + ... + \alpha_r Y_{t-r} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + ... + \beta_s X_{t-s} + u_t,$$

Multiplicadores

Los multiplicadores son los parámetros del modelo. En un modelo como el siguiente, $Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_k X_k$, los multiplicadores se definen de esta manera:

$$\beta_j = \frac{\partial Y}{\partial X_j} \quad \forall j = 2, ..., k.$$

Vimos los multiplicadores en el subapartado 2.1 del módulo "Modelo de regresión lineal múltiple...".

definimos los conceptos de **multiplicador** siguientes:

1) Definimos el **multiplicador contemporáneo** o *multiplicador de impacto* (m_0) como la variación que se produce en Y_t ante la variación unitaria de X_t. Formalmente, esto se expresa de la siguiente forma:

$$m_0 = \partial Y_t / \partial X_t = \beta_0. \tag{1.10}$$

2) Asimismo, definimos el **multiplicativo tras haber transcurrido *j* periodos** como la variación que se produce en Y_t ante la variación unitaria de X_{t-j}. Formalmente, lo expresamos así:

$$m_j = \partial Y_t / \partial X_{t-j}. \tag{1.11}$$

Observamos que, en este caso, $m_j \neq \beta_j$, porque hay una dependencia implícita de las variables endógenas retardadas.

3) Para acabar, definimos el **multiplicador total** como la suma de todos los multiplicadores (contemporáneos y no contemporáneos):

$$m_T = \sum_{j=0}^{\infty} m_j. \tag{1.12}$$

Observad que, a partir de esta definición, para que un sistema tenga sentido, el multiplicador total tendrá que ser finito.

Para obtener los multiplicadores, y recuperando la formulación 1.9 del modelo dinámico, podemos decir que:

$$Y_t = \mu/A(L) + [B(L)/A(L)]X_t + u_t/A(L) = \mu' + D(L)X_t + v_t, \tag{1.13}$$

donde $D(L) = \delta_0 + \delta_1 L + \delta_2 L^2 + \ldots$ Entonces, aplicando las expresiones de la 1.10 a la 1.12 al modelo dinámico general 1.13, obtenemos que los multiplicadores contemporáneos y no contemporáneos serán los parámetros d asociados a las variables X_{t-j}; es decir:

$$m_0 = \partial Y_t / \partial X_t = \delta_0.$$
$$m_j = \partial Y_t / \partial X_{t-j} = \delta_j.$$
$$m_T = \sum_{j=0}^{\infty} m_j = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j.$$

En este caso, los multiplicadores contemporáneos y totales serán $D(L)$ cuando $L = 0$ y $L = 1$, respectivamente, es decir, $D(0)$ y $D(1)$:

$$m_0 = D(0) = \delta_0.$$
$$m_T = D(1) = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \ldots$$

Ejemplo de análisis de modelos dinámicos

Supongamos que, para explicar el número de coches que ha vendido una empresa (V), especificamos y estimamos el siguiente modelo dinámico, y obtenemos los resultados que vemos a continuación:

$$\hat{V}_t = 3 - 1{,}5P_t + 0{,}8PC_t + 0{,}3NC_t + 0{,}6DP_t + 0{,}25DP_{t-1} + 0{,}35V_{t-1}.$$

Analizaremos, acto seguido, el modelo planteado. El análisis consistirá en considerar estos elementos:

a) Determinaremos el tipo de modelo dinámico que es: nos hallamos ante un modelo dinámico AD(1,1). La parte autorregresiva de orden 1 será $(1 - 0{,}35L)\hat{V}_t$, y la parte de retardos distribuidos (también de orden 1) asociada a *DP* será $(0{,}6 + 0{,}25L)DP_t$.

b) Asimismo, determinaremos la estabilidad del modelo. Podemos reescribir el modelo de la manera que mostramos a continuación:

$$(1 - 0{,}35L)\hat{V}_t = 3 - 1{,}5P_t + 0{,}8PC_t + 0{,}3NC_t + 0{,}6DP_t + 0{,}25\ DP_{t-1}.$$

Así pues, el modelo es estable porque la raíz del polinomio $(1 - 0{,}35L)$ es, en valor absoluto, mayor que 1. En concreto, vale 2,85714. Recordad que, en un polinomio de primer grado $(1 - \alpha L) = 0$, decir que $|L| > 1$ es equivalente a decir que $|\alpha| < 1$, ya que $|L| = |1/\alpha|$.

c) Obtendremos los multiplicadores contemporáneos, no contemporáneos y totales respecto de las variables DP_t y P_t, e interpretaremos su significado. Para calcular los multiplicadores reescribimos el modelo anterior:

$$\hat{V}_t = [3 - 1{,}5P_t + 0{,}8PC_t + 0{,}3NC_t + (0{,}6 + 0{,}25L)DP_t] / (1 - 0{,}35L).$$

Así, el cálculo de los multiplicadores asociados a DP_t pasa por calcular los coeficientes del cociente de polinomios que vemos a continuación:

$$(0{,}6 + 0{,}25L) / (1 - 0{,}35L) = \delta_0 + \delta_1 L + \delta_2 L^2 + ...$$

Mediante la realización de las operaciones adecuadas (es decir, pasando el denominador al otro miembro de la igualdad, multiplicando los dos polinomios de la derecha de la expresión e igualando los coeficientes de los dos miembros de la igualdad con un mismo orden de operador de retardo *L* asociado), obtenemos los siguientes valores:

$$\begin{array}{lllll}
0{,}6 & = \delta_0. & & & \\
0{,}25 & = \delta_1 - 0{,}35\delta_0 \rightarrow & \delta_1 = 0{,}25 + 0{,}35 \cdot 0{,}6 & = & 0{,}46. \\
0 & = \delta_2 - 0{,}35\delta_1 \rightarrow & \delta_2 = 0{,}35 \cdot 0{,}46 & = & 0{,}161. \\
0 & = \delta_3 - 0{,}35\delta_2 \rightarrow & \delta_3 = 0{,}35 \cdot 0{,}161 & = & 0{,}05635. \\
\ldots & \ldots & \ldots & & \ldots
\end{array}$$

En consecuencia, el multiplicador contemporáneo es 0,6; el multiplicador cuando ha transcurrido un periodo, 0,46; el de dos periodos, 0,161, y así sucesivamente. En consecuencia, el aumento de una unidad monetaria en el gasto publicitario en el año t_0 provocará un aumento de las ventas de coches de 0,6 unidades en el mismo periodo, un aumento de 0,46 unidades en el periodo $t_0 + 1$, de 0,161 en $t_0 + 2$, etc.

Como podemos observar, por el hecho de tener un polinomio autorregresivo en el modelo, el efecto sobre la variable endógena se diluye en un número infinito de periodos. A pesar de esto, el impacto tiene que ser finito, puesto que el modelo es estable. Veremos esto mismo si calculamos el multiplicador total, que será finito e igual a la suma de todos los multiplicadores y a $D(1)$. Así:

$$m_T = D(1) = B(1)/A(1) = (0{,}6 + 0{,}25) / (1 - 0{,}35) = 1{,}3076923.$$

Por lo tanto, el aumento de una unidad monetaria de gasto publicitario provocará un aumento global a lo largo del tiempo de 1,3077 coches vendidos.

Podemos observar que, si el modelo dinámico es un modelo RD, los multiplicadores* son directamente los parámetros asociados a las variables explicativas. Suponemos que el modelo correcto para explicar V_t hubiera sido el modelo RD(2).

*** En los modelos RD,** $D(L) = B(L)$, **ya que** $A(L) = 1$.

$$\hat{V}_t = 3 - 1{,}5P_t + 0{,}8PC_t + 0{,}3NC_t + 0{,}55DP_t + 0{,}27DP_{t-1} + 0{,}15DP_{t-2}.$$

En este caso, el modelo es estable por definición, ya que el efecto de una variación de la variable exógena sólo afectará a los valores de la variable endógena del periodo en curso y de dos periodos más. El multiplicador contemporáneo sería 0,55; el no contemporáneo, una vez transcurrido un periodo, 0,27, y tras el transcurso de dos periodos, 0,15, mientras que los restantes serían 0. El multiplicador total sería 0,97.

Por lo tanto, nos queda el siguiente valor:

$$D(L) = 0{,}55 + 0{,}27L + 0{,}15L^2 \rightarrow D(1) = 0{,}55 + 0{,}27 + 0{,}15 = 0{,}97.$$

Actividad

1.2. Demostrad que los multiplicadores asociados a P_t en el ejemplo de análisis de un modelo dinámico $AD(1,1)$ tienen los valores que mostramos a continuación:

$$m_0 = D(0) = -1{,}5;\ m_1 = -0{,}525;\ m_2 = -0{,}18375;\ \ldots;\ m_T = D(1) = -2{,}30769.$$

1.2.3. Retardo medio y retardo mediano

Existen dos retardos que ayudan a interpretar los resultados surgidos de la estimación de un modelo dinámico, que son éstos:

1) El primero es el retardo medio.

El **retardo medio** se define como la media ponderada de todos los coeficientes del polinomio $D(L)$ del modelo $Y_t = \mu' + D(L)X_t + v_t$. Es decir:

$$\text{Retardo medio} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} j \cdot \delta_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \delta_j} = \frac{D'(1)}{D(1)} = \frac{B'(1)}{B(1)} - \frac{A'(1)}{A(1)}, \qquad (1.14)$$

donde $D'(1)$, $B'(1)$ y $A'(1)$ son, respectivamente, las derivadas de $D(L)$, $B(L)$ y $A(L)$ respeto de L valoradas en $L = 1$, y $D(1)$, $B(1)$ y $A(1)$ son los valores de los tres polinomios en caso de que $L = 1$.

$D'(L) = \delta_1 + 2\delta_2 L + 3\delta_3 L^2 + \ldots$

Cuanto mayor sea el retardo medio, la contribución al comportamiento de la variable endógena de periodos alejados en el tiempo será superior, y viceversa. Por lo tanto, es un indicador de si el efecto sobre la variable endógena ante una variación en la variable exógena está muy concentrado o diluido en el tiempo.

Observad que para el caso de un modelo RD puro, como cuando $D(L) = B(L)$, ya que $A(L) = 1$ y $A'(L) = 0$, en la expresión 1.14 se sustituirían las δ por las β:

$$\text{Retardo medio} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} j \cdot \beta_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j} = \frac{B'(1)}{B(1)}.$$

2) El segundo retardo que estudiaremos es el retardo mediano.

El **retardo mediano** registra el momento en el que se alcanza el 50% de la variación total que se produce en la variable endógena, debida a una variación en la variable exógena.

Ahora veremos con un ejemplo cómo podemos calcular los retardos medio y mediano.

Ved el ejemplo de análisis de modelos dinámicos en el subapartado 1.2.2 de este módulo didáctico.

Consideramos el siguiente modelo:

$$\hat{V}_t = 3 - 1{,}5P_t + 0{,}8PC_t + 0{,}3NC_t + 0{,}6DP_t + 0{,}25DP_{t-1} + 0{,}35V_{t-1}.$$

En este caso, los polinomios $A(L)$ y $B(L)$, y las primeras derivadas de éstos, tienen los valores que vemos a continuación:

$$\begin{array}{ll} A(L) = 1 - 0{,}35L; & A(1) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65. \\ B(L) = 0{,}6 + 0{,}25L; & B(1) = 0{,}6 + 0{,}25 = 0{,}85. \\ A'(L) = -0{,}35; & A'(1) = -0{,}35. \\ B'(L) = 0{,}25; & B'(1) = 0{,}25. \end{array}$$

A partir de estos valores calculamos los retardos medio y mediano, tras lo que obtenemos los siguientes resultados:

- El retardo medio será:

$$\frac{D'(1)}{D(1)} = \frac{B'(1)}{B(1)} - \frac{A'(1)}{A(1)} = \frac{0{,}25}{0{,}85} - \frac{-0{,}35}{0{,}65} = 0{,}832579.$$

- Por otra parte, el retardo mediano será aquel en el que se alcance el 50% del efecto total (que era de 1,3076923, esto es, el valor del multiplicador total). Es decir, cuando se llegue a una variación en la variable endógena de 0,653846 unidades. En nuestro caso, al final del retardo 0 se alcanza una variación de $\delta_0 = 0{,}60$, y al final del periodo 1 la variación acumulada ya es de $\delta_0 + \delta_1 = 1{,}06$. Por lo tanto, el retardo mediano estará entre los retardos 0 y 1. Suponiendo la proporcionalidad de la variación de la variable endógena a lo largo del tiempo, podemos calcular el retardo mediano a partir de la siguiente relación:

$$\begin{array}{ll} \Delta\text{Endógena} & \Delta\text{Retardo (entre el contemporáneo y el primero)} \\ 0{,}46 & \left.\begin{array}{l} 1 \\ x \end{array}\right] \blacktriangleright \Rightarrow x = 0{,}1170565, \\ 0{,}053846 & \end{array}$$

donde 0,053846 es la diferencia entre el efecto acumulado al final del retardo 0 (0,60) y el valor en el que el efecto acumulado sería del 50% (0,653846). Así pues, el retardo mediano sería 0,1170565, que, en términos económicos, querría decir que, ante una campaña publicitaria, el 50% del número total de coches que se venderán de más a causa de esta campaña se venderá el próximo año (al cabo de 0,1170 meses del siguiente año, es decir, al cabo de 1 mes y 12 días).

A continuación podemos ver una tabla que ayuda a interpretar los resultados del modelo dinámico:

Tabla resumen de resultados				
Retardo	m_j	m_j^*	$m_j/\mathrm{D}(1)$	$m_j^*/\mathrm{D}(1)$
0	0,6	0,60	0,4588	0,4588
1	0,46	1,06	0,3517	0,8106
2	0,161	1,221	0,1231	0,9337
3	0,056	1,277	0,0428	0,9765
...	...	...	...	...
∞	0	1,3076	0,0000	1,0000

donde m_j es el multiplicador del periodo j; m_j^*, el multiplicador acumulado hasta el periodo j; m_j/D(1), el tanto por 1 que aporta el retardo j a la variación global de la variable endógena, y m_j^*/D(1), el tanto por 1 acumulado de variación que hay en la variable endógena hasta el retardo j. En la última columna podemos observar que el retardo mediano se encuentra entre 0 y 1.

Podemos apreciar que, en el caso del ejemplo que acabamos de plantear, el 90% del efecto total (1,3076 · 0,9 = 1,17684) se alcanzará más allá del retardo 1, ya que el efecto acumulado hasta entonces sólo es de 1,06. La tabla anterior ayuda a ver esto; en concreto, será en el retardo 1,7257, que calculamos a partir de la siguiente relación:

ΔEndógena	ΔRetardo (entre el primero y el segundo)
0,161	1
0,11684	x

$$\Rightarrow x = 0{,}7257,$$

donde 0,11684 = 1,17684 – 1,06, es decir, la diferencia entre el 90% de m_T y el efecto acumulado ($m_0 + m_1$) inferior y más próximo al que buscábamos.

Ejemplo de cálculo de los retardos medio y mediano

Comprobaremos que los retardos medio y mediano asociados a DP_t en el modelo que hemos estado considerando a lo largo del subapartado son los siguientes:

- Retardo medio $= \frac{D'(1)}{D(1)} = \frac{B'(1)}{B(1)} - \frac{A'(1)}{A(1)} = \frac{0,57}{0,97} - \frac{0}{1} = 0{,}587629.$

- Por lo que al retardo mediano se refiere, el 50% del efecto total (que era de 0,97), 0,485, se alcanzaría en el mismo periodo contemporáneo, aproximadamente al cabo de 5 meses y 25 días, si la campaña hubiese iniciado el primer día del año.

En este caso la tabla resumen de los resultados sería la que vemos a continuación:

Tabla resumen de resultados				
Retardo	m_j	m_j^*	m_j/D(1)	m_j^*/D(1)
0	0,55	0,55	0,5670	0,5670
1	0,27	0,77	0,2784	0,7938
2	0,15	0,97	0,1546	1,0000
3	0,00	0,97	0,0000	1,0000
...	...	...	...	...
∞	0	0,97	0,0000	1,0000

1.3. Métodos de estimación

Tras haber estudiado los distintos tipos de modelos dinámicos y la manera de interpretar los resultados que se derivan de éstos, en este subapartado nos centraremos en el análisis de las propiedades asociadas al método de estimación de los MCO, así como en las alternativas que será recomendable aplicar en algunos casos. Realizaremos el estudio de manera individualizada por tres grandes tipos de modelos dinámicos:

Ved los modelos dinámicos y su interpretación en los subapartados 1.1 y 1.2 de este módulo didáctico.

- Modelos dinámicos con variables exógenas retardadas.

- Modelos dinámicos con variables explicativas incorrelacionadas con el término de perturbación.

- Modelos dinámicos con variables explicativas correlacionadas con el término de perturbación.

La primera situación se dará cuando trabajemos con modelos de retardos distribuidos finitos, y la segunda y la tercera surgirán cuando tengamos modelos autorregresivos en los que aparece la variable endógena retardada como regresor. En este último caso, nos encontraremos ante el incumplimiento de un supuesto básico del modelo de regresión, puesto que no se cumplirá que los elementos de la matriz **X** sean fijos debido a que tendremos regresores estocásticos. En este último caso, tal y como veremos más adelante, nos encontraremos con dos posibilidades: cuando el término de perturbación del modelo está incorrelacionado con los regresores (situación que se dará si el término de perturbación del modelo no tiene problemas de autocorrelación), y cuando está correlacionado con los regresores (situación que se dará si el término de perturbación tiene problemas de autocorrelación).

1.3.1. Estimación por MCO en modelos con variables exógenas retardadas

Un primer grupo de modelos dinámicos es el constituido por aquellos modelos en los que la dinamicidad de las relaciones económicas está determinada por la presencia de variables exógenas retardadas. Nos encontraríamos, por lo tanto, ante modelos de retardos distribuidos, RD(s):

$$Y_t = \mu + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \ldots + \beta_s X_{t-s} + u_t. \qquad (1.15)$$

En este caso, si el término de perturbación cumple todas las hipótesis básicas, es decir, si el término de perturbación tiene matriz de varianzas y covarianzas escalar, podemos utilizar los estimadores MCO en tanto que método de estimación. Esto es así porque no estamos ante el incumplimiento de ninguna hipótesis básica del MRLM, ya que, además de las hipótesis básicas que cumple el término de perturbación, todas las variables explicativas son deterministas o *fija*s, y están incorrelacionadas con el término de perturbación. Entonces, los estimadores MCO serán no sesgados, eficientes y consistentes.

Únicamente se pueden presentar los dos problemas que veremos a continuación: !

1) A medida que aumenta el número de retardos de la variable exógena, menos grados de libertad tendremos y, por lo tanto, también disminuirá la fiabilidad de la estimación.

2) Se puede presentar un nivel de multicolinealidad elevada a causa de la presencia, como regresores, de la misma variable referida a diferentes momentos del tiempo.

! Podéis ver los problemas, la detección, las soluciones, etc., de la multicolinealidad en el apartado 2 del módulo "Errores de especificación, multicolinealidad y observaciones atípicas".

En caso de que el término de perturbación no fuese esférico, para obtener estimadores eficientes tendremos que utilizar los estimadores MCG como método de estimación.

Ved los estimadores MCG en el subapartado 1.3 del módulo "Incumplimiento de las hipótesis básicas...".

En cuanto a la estimación del modelo de retardos distribuidos con un número infinito de retardos, es decir, en el caso de que el modelo fuese RD(∞), nos encontraríamos ante un modelo con infinitos parámetros, que, en consecuencia, no podríamos estimar por falta de datos. La solución pasaría para utilizar alguna hipótesis en torno a la evolución de los parámetros del modelo, la cual nos permitirá transformar el modelo en otro menos parametrizado. Un caso habitual, ya mencionado, es transformarlo mediante el uso de la hipótesis de Koyck.

Ved la hipótesis de Koyck en el subapartado 1.1.3 del presente módulo didáctico.

1.3.2. Estimación por MCO en modelos con variables explicativas incorrelacionadas con el término de perturbación

Los problemas de estimación en los modelos dinámicos surgen cuando tenemos como regresores retardos de la variable endógena. En este caso, nos encontraremos ante el incumplimiento de un supuesto básico del MRLM, ya que tendremos regresores estocásticos.

Variables retardadas como variables exógenas

µObservad que en tiempo *t* todas las variables endógenas retardadas son conocidas y, por lo tanto, se pueden considerar variables exógenas.

En los métodos de estimación que hemos visto hasta ahora, es decir, MCO y MCG, para garantizar que tenían las propiedades deseadas (no sesgados, eficientes y consistentes), hemos tenido que suponer que todas las variables explicativas del modelo eran fijas. Ahora, sin embargo, en los modelos autorregresivos surge como regresor la variable endógena retardada. Por lo tanto, tenemos que comprobar si en esta nueva situación el método de MCO nos permite obtener estimadores con las propiedades deseadas y, en caso de que esto no sea posible, deberíamos encontrar otro método de estimación que nos permita obtenerlas .

Ved el método de estimación por MCO en el apartado 2 del módulo "Modelo de regresión lineal múltiple..." y el método de estimación por MCG en el subapartado 1.3 del módulo "Incumplimiento de las hipótesis básicas..." de esta asignatura.

Con el fin de alcanzar los objetivos que hemos planteado antes, analizaremos por separado las propiedades de los estimadores MCO cuando el término de perturbación está incorrelacionado con los regresores y cuando está correlacionado con éstos. En este subapartado veremos el primer caso, y en el siguiente, el segundo.

En un modelo dinámico puede haber variables endógenas retardadas como variables explicativas, pero éstas pueden no estar correlacionadas con el término de perturbación a causa de la no presencia de una estructura de autocorrelación en el término mencionado.

Para analizar las propiedades de los estimadores MCO cuando tenemos la variable endógena retardada como regresor y el término de perturbación no presenta problemas de autocorrelación (y, por lo tanto, está incorrelacionado con los regresores), por simplicidad y sin pérdida de generalidad, utilizaremos el modelo AD(1,0) siguiente:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + u_t. \quad (1.16)$$

Para que el término de perturbación (u_t) esté incorrelacionado con los regresores, éste debe tener una matriz de varianzas y covarianzas escalar, es decir, tiene que cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} E[u_t^2] &= \sigma_u^2 \quad \forall t. \\ E[u_t u_{t-j}] &= 0 \quad \forall j \neq 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Así pues, todas las variables explicativas tendrán una distribución independiente del término de perturbación.

Según lo que acabamos de decir, hay que comprobar si el valor de $E[1u_t]$, $E[X_t u_t]$ y $E[Y_{t-1}u_t]$ es igual a cero. Lo vemos a continuación:

a) En cuanto a $E[1u_t]$ y $E[X_t u_t]$, por las hipótesis básicas sabemos que son iguales a cero, teniendo en cuenta que el término independiente y X_t son deterministas, y que el valor esperado del término de perturbación es cero. Por lo tanto:

$$\left.\begin{aligned} E[1u_t] &= 1E[u_t] = 0. \\ E[X_t u_t] &= X_t E[u_t] = 0. \end{aligned}\right] \quad (1.18)$$

b) En cuanto a $E[Y_{t-1}u_t]$, para calcular su valor esperado deberemos tener en cuenta que $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$. Por lo tanto, $Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + u_{t-1}$, pero estamos interesados en expresar Y_{t-1} en función de variables de las cuales conocemos el valor esperado. En consecuencia, tendremos que hacer las transformaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} &Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + u_{t-1}; \\ &Y_{t-1} - \beta_2 Y_{t-2} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + u_{t-1}; \\ &Y_{t-1} - \beta_2 L Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + u_{t-1}; \\ &(1 - \beta_2 L) Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + u_{t-1}; \\ &Y_{t-1} = \frac{\beta_0}{(1 - \beta_2 L)} + \frac{\beta_1 X_{t-1}}{(1 - \beta_2 L)} + \frac{u_{t-1}}{(1 - \beta_2 L)}. \end{aligned}\right] \quad (1.19)$$

En la expresión 1.19, los sumandos del segundo miembro de la igualdad están multiplicados por $1 / (1 - \beta_2 L)$. Si $\beta_2 < 1$ y, por consiguiente, el modelo autorregresivo es estable, este cociente es el valor final de la suma de una serie en progresión geométrica con término independiente igual a 1 y razón $\beta_2 L$. Entonces tendremos:

$$\frac{\beta_0}{(1 - \beta_2 L)} = \frac{\beta_0}{(1 - \beta_2)} = \beta'_0. \quad (1.20)$$

Teniendo en cuenta que β_0 es una constante, no se ve afectada por el operador de retardos, mientras que:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\beta_1 X_{t-1}}{(1-\beta_2 L)} = (1+\beta_2 L+\beta_2^2 L^2+\beta_2^3 L^3+\ldots)\beta_1 X_{t-1} = \\
&= \beta_1 X_{t-1}+\beta_2\beta_1 X_{t-2}+\beta_2^2\beta_1 X_{t-3}+\beta_2^3\beta_1 X_{t-4}+\ldots = \beta_1\sum_{i=0}^{\infty}\beta_2^i X_{t-1-i}; \\
&\frac{u_{t-1}}{(1-\beta_2 L)} = (1+\beta_2 L+\beta_2^2 L^2+\beta_2^3 L^3+\ldots)u_{t-1} = \\
&= u_{t-1}+\beta_2 u_{t-2}+\beta_2^2 u_{t-3}+\beta_2^3 u_{t-4}+\ldots = \sum_{i=0}^{\infty}\beta_2^i u_{t-1-i}.
\end{aligned}\right\} \quad (1.21)$$

Utilizando estos últimos resultados, podemos desarrollar $E[Y_{t-1}u_t]$ de la siguiente manera:

$$E\left[\left(\beta'_0+\frac{\beta_1 X_{t-1}}{(1-\beta_2 L)}+\frac{u_{t-1}}{(1-\beta_2 L)}\right)u_t\right] =$$

$$= E[\beta'_0 u_t] + E\left[\frac{\beta_1 X_{t-1}}{(1-\beta_2 L)}\,u_t\right] + E\left[\frac{u_{t-1}}{(1-\beta_2 L)}\,u_t\right] =$$

$$= E[\beta'_0 u_t] + E\left[\beta_1\sum_{i=0}^{\infty}\beta_2^i X_{t-1-i}u_t\right] + E\left[\sum_{i=0}^{\infty}\beta_2^i u_{t-1-i}u_t\right]. \quad (1.22)$$

Entonces, si analizamos por separado cada uno de los términos de los sumandos de la expresión 1.22, conoceremos $E[Y_{t-1}u_t]$:

- En lo que concierne a $E[\beta'_0 u_t]$, es inmediato ver que es igual a cero, ya que β'_0 es un parámetro constante.

- En relación con el segundo sumando, tendremos:

$$E\left[\beta_1\sum_{i=0}^{\infty}\beta_2^i X_{t-1-i}u_t\right] = \beta_1 E[X_{t-1}u_t+\beta_2 X_{t-2}u_t+\beta_2^2 X_{t-3}u_t+\ldots] =$$

$$= \beta_1 E[X_{t-1}u_t]+\beta_1\beta_2 E[X_{t-2}u_t]+\beta_1\beta_2^2 E[X_{t-3}u_t]+\ldots = 0. \quad (1.23)$$

Podemos ver con facilidad que 1.23 es igual a cero, ya que los componentes de **X** son variables deterministas, y todos sus retardos estarán incorrelacionados con el término de perturbación.

En cuanto al tercer sumando de 1.22, tendremos:

$$E\left[\sum_{i=0}^{\infty}\beta_2^i u_{t-1-i}u_t\right] = E[u_{t-1}u_t+\beta_2 u_{t-2}u_t+\beta_2^2 u_{t-3}u_t+\ldots] =$$

$$= E[u_{t-1}u_t]+\beta_2 E[u_{t-2}u_t]+\beta_2^2 E[u_{t-3}u_t]+\ldots =$$

$$= \gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_2^2\gamma_3+\ldots = \sum_{i=0}^{\infty}\beta_2^i\gamma_{1+i}. \quad (1.24)$$

Entonces, 1.24 tan sólo será igual a cero cuando el término de perturbación del modelo no tenga problemas de autocorrelación, ya que, de esta manera, todas las autocovarianzas serán iguales a cero. Por lo tanto, en este caso se cumpliría que $E[Y_{t-1}u_t] = 0$.

De forma similar podemos comprobar que $E[Y_{t-1}u_{t+1}]$, $E[Y_{t-1}u_{t+2}]$... también son iguales a cero. En consecuencia, Y_{t-1} es independiente de u_t, u_{t+1}, u_{t+2}, etc. No obstante, sí que hay dependencia entre Y_{t-1} y los retardos del término de perturbación (es decir, u_{t-1}, u_{t-2}, etc.), tal y como veremos a continuación:

$$
\begin{aligned}
E[Y_{t-1}u_{t-1}] &= E\left[\left(\beta_0' + \frac{\beta_1 X_{t-1}}{(1-\beta_2 L)} + \frac{u_{t-1}}{(1-\beta_2 L)}\right)u_{t-1}\right] = \\
&= E[\beta_0' u_{t-1}] + E\left[\frac{\beta_1 X_{t-1}}{(1-\beta_2 L)}\, u_{t-1}\right] + E\left[\frac{u_{t-1}}{(1-\beta_2 L)}\, u_{t-1}\right] = \\
&= E[\beta_0' u_{t-1}] + E\left[\beta_1 \sum_{i=0}^{\infty} \beta_2^i X_{t-1-i} u_{t-1}\right] + E\left[\sum_{i=0}^{\infty} \beta_2^i u_{t-1-i} u_{t-1}\right] = \\
&= 0 + 0 + E\left[\sum_{i=0}^{\infty} \beta_2^i u_{t-1-i} u_{t-1}\right]. \qquad (1.25)
\end{aligned}
$$

Utilizando los mismos argumentos que antes, es sencillo ver que los dos primeros sumandos de 1.25 son cero. Por lo que respecta al último, podemos observar que:

$$
\begin{aligned}
E\left[\sum_{i=0}^{\infty} \beta_2^i u_{t-1-i} u_{t-1}\right] &= E[u_{t-1}u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2}u_{t-1} + \beta_2^2 u_{t-3}u_{t-1} + \ldots] = \\
&= E[u_{t-1}u_{t-1}] + \beta_2 E[u_{t-2}u_{t-1}] + \beta_2^2 E[u_{t-3}u_{t-1}] + \ldots = \\
&= \gamma_0 + \beta_2\gamma_1 + \beta_2^2\gamma_2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_2^i \gamma_i. \qquad (1.26)
\end{aligned}
$$

A partir del resultado anterior no hallaremos dificultadas para ver que, incluso si el término de perturbación carece de problemas de autocorrelación, es decir, cuando todas las autocovarianzas son iguales a cero, permanecerá un sumando que no se anulará: γ_0.

De manera similar al caso anterior, podemos comprobar para $E[Y_{t-1}u_{t-2}]$, $E[Y_{t-1}u_{t-3}]$..., que no se anulan.

En resumidas cuentas, Y_{t-1} no es independiente del término de perturbación en $t - 1$ y en periodos anteriores, pero sí que es independiente en t y en periodos posteriores.

µLlamamos a la matriz de regresores...

... **Z** en lugar de **X**, como hemos hecho hasta ahora, para hacer constar que, mientras que **X** es una matriz en la que todos los regresores son fijos, en **Z** no lo son.

En cuanto a la obtención de los estimadores MCO, utilizaremos la expresión siguiente:

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Y}, \qquad (1.27)$$

en la que **Z** es una matriz en la que tenemos por columnas los regresores del modelo; en nuestro ejemplo (el modelo 1.16) **Z** es ($\mathbf{1}\ \mathbf{X}_t\ \mathbf{Y}_{t-1}$). Para aplicar la expresión anterior nos encontraremos con el problema asociado a la pérdida de observaciones a causa de la aparición de la variable endógena retardada como regresor, situación que también se da cuando tenemos retardos de las variables exógenas.

En lo que concierne a las propiedades de los estimadores MCO, veremos que son las siguientes: tienen sesgo, son consistentes, asintóticamente se distribuyen con normalidad y, si el término de perturbación se distribuye según una normal, los estimadores MCO coinciden con los estimadores MV y la eficiencia asintótica queda garantizada. A continuación, consideramos estas propiedades con más detalle:

a) Los estimadores MCO tienen **sesgo** y para comprobarlo utilizaremos la expresión:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}} &= (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Y} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'(\mathbf{Z}\mathbf{B} + \mathbf{U}) = \\ &= (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{B} + (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{U} = \mathbf{B} + (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{U}.\end{aligned} \tag{1.28}$$

Para comprobar si los estimadores MCO tienen sesgo o no lo tienen, sólo tendremos que tomar esperanzas en la expresión 1.28:

$$\mathrm{E}[\hat{\mathbf{B}}] = \mathrm{E}[\mathbf{B} + (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{U}] = \mathbf{B} + \mathrm{E}[(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{U}]. \tag{1.29}$$

Para que sea no sesgado $\mathrm{E}[(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{U}]$ tendría que ser igual a cero. Sin embargo, no es así porque en la matriz **Z** aparece la variable endógena retardada (Y_{t-1}), que no es independiente de los retardos del término de perturbación (u_{t-1}, u_{t-2}, ...), tal y como hemos visto. Por lo tanto, $\mathrm{E}[(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{U}] \neq 0$.

b) La **consistencia** es una propiedad importante, ya que garantiza que, a medida que aumenta el tamaño muestral, más próximo se encuentra el estimador del parámetro a su valor de población.

Hasta ahora habíamos definido la consistencia en términos del error cuadrático medio (ECM), pero en este apartado utilizaremos otra definición de *consistencia*, que está basada en el hecho de que un estimador es consistente si su límite en probabilidad coincide con el verdadero valor de población:

Encontraréis la definición de *consistencia* en el subapartado 2.3.2 del módulo "Modelo de regresión lineal múltiple...".

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty} (\hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{B}. \tag{1.30}$$

La expresión 1.30...

... es la forma compacta de expresar la siguiente definición:

$$\lim_{T\to\infty} (p[|\hat{\mathrm{B}} - \mathrm{B}| < \varepsilon]) = 0,$$

en la que ε es una constante arbitrariamente pequeña y T es el tamaño de la muestra observada (T periodos).

El concepto de límite en probabilidad es muy similar al de límite, aunque no es exactamente igual.

Para comprobar si los estimadores MCO son consistentes, tendremos que calcular su límite en probabilidad:

$$\begin{aligned}\operatorname*{plim}_{T\to\infty} [\hat{\mathbf{B}}] &= \operatorname*{plim}_{T\to\infty} \left[\mathbf{B} + \left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{T}\right)^{-1}\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{U}}{T}\right)\right] = \\ &= \mathbf{B} + \operatorname*{plim}_{T\to\infty}\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{T}\right)^{-1} \operatorname*{plim}_{T\to\infty}\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{U}}{T}\right).\end{aligned} \tag{1.31}$$

La matriz $(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})/T$ es la matriz de varianzas y covarianzas de las variables explicativas. Por ser una matriz de varianzas y covarianzas será cuadrada, simétrica, definida positiva y no singular. Para que esta matriz sea finita, es decir, que los momentos de segundo orden sean finitos, se tiene que cumplir que el modelo sea estable, que, en el caso de nuestro modelo AD(1,0), consiste en el hecho de que $|\beta_2| < 1$.

Llegados a este punto, para saber si los estimadores MCO son consistentes, es decir, para comprobar que 1.31 es igual a **B**, tenemos que utilizar el teorema de Mann-Wald.

El teorema de Mann-Wald parte del cumplimiento de los siguientes supuestos:

- El término de perturbación es homoscedástico y no autocorrelacionado, dado que la matriz de varianzas y covarianzas de **U** es $\sigma_u^2\mathbf{I}_T$.

$$E[\mathbf{U}\mathbf{U}'] = \sigma_u^2\mathbf{I}_T.$$

- La variable explicativa $\mathbf{X}_t$ está incorrelacionada con el término de perturbación u_t, ya que, por definición, hemos supuesto que $\mathbf{X}_t$ era un regresor fijo o estocástico incorrelacionado con u_t.

$$E[\mathbf{X}_t u_t] = 0 \quad \forall t.$$

- La variable endógena retardada también está incorrelacionada con u_t, ya que aunque $\mathbf{Y}_{t-1}$ es estocástica, si $|\beta_2| < 1$, $\mathbf{Y}_{t-1}$ depende de u_{t-1}, u_{t-2}… pero no de u_t, y si éste último es esférico, obtendremos lo siguiente:

$$E[\mathbf{Y}_{t-1} u_t] = 0 \quad \forall t.$$

- Si el modelo es estable y existen las varianzas y covarianzas de $\mathbf{X}_t$ e $\mathbf{Y}_{t-1}$, y dado el modelo $\mathbf{Y} = \mathbf{ZB} + \mathbf{U}$, en el que **Z** es la matriz formada por el vector columna de unos, los valores de $\mathbf{Y}_{t-1}$ y los valores de $\mathbf{X}_t$, $\mathbf{Z} = (\mathbf{1}\ \mathbf{Y}_{t-1}\ \mathbf{X}_t)$ obtenemos que la matriz de varianzas y covarianzas de los regresores es ésta:

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty}\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{T}\right) = \Sigma_{ZZ}.$$

  Esta última expresión se lee como el límite en probabilidad de $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}/T$, es decir, la matriz de varianzas y covarianzas de la matriz **Z**, es igual a una matriz Σ_{ZZ}.

Con los supuestos mencionados, el **teorema de Mann-Wald** asegura que:

- $\operatorname*{plim}_{T\to\infty}\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{U}}{T}\right) = \mathbf{0}_k.$

- $\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{U}}{\sqrt{T}} \xrightarrow{D} \mathbf{N}[\mathbf{0}_k, \sigma_u^2\Sigma_{ZZ}].$

Estos resultados garantizan la consistencia de los estimadores MCO, ya que:

$$\underset{T\to\infty}{\text{plim}}\,(\hat{\mathbf{B}}) = \underset{T\to\infty}{\text{plim}}\left[\mathbf{B} + \left(\frac{\mathbf{Z'Z}}{T}\right)^{-1}\left(\frac{\mathbf{Z'U}}{T}\right)\right] =$$

$$= \mathbf{B} + \underset{T\to\infty}{\text{plim}}\left(\frac{\mathbf{Z'Z}}{T}\right)^{-1}\underset{T\to\infty}{\text{plim}}\left(\frac{\mathbf{Z'U}}{T}\right) =$$

$$= \mathbf{B} + \Sigma_{ZZ}\mathbf{0}_k = \mathbf{B}. \tag{1.32}$$

Recordemos que el estimador MCO...

... en el modelo $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}\beta + \mathbf{Z}$, es $\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{Z'Z})^{-1}\mathbf{Z'Z}$. La consistencia se asegura cuando el límite en probabilidad de un estimador es igual a su valor de población. En este caso, esto se cumpliría en la expresión 1.32.

c) Se puede demostrar que el estimador MCO sigue una distribución normal asintóticamente. En tal caso tendremos que:

$$\sqrt{T}(\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}) \sim A\mathbf{N} \text{ o, } \hat{\mathbf{B}} \sim A\mathbf{N}\left[\mathbf{B}, \sigma_u^2 \frac{\sigma_u^2}{T}\Sigma_{ZZ}^{-1}\right]. \tag{1.33}$$

Además, en la última expresión, si el tamaño de la muestra es elevado, podemos aproximar $\Sigma_{ZZ} = \text{plim}(\mathbf{Z'Z}/T)$ por $\mathbf{Z'Z}/T$. Entonces, la matriz de varianzas y covarianzas de las $\hat{\mathbf{B}}$ sería igual a la expresión habitual $\sigma_u^2(\mathbf{Z'Z})^{-1}$, a pesar de la presencia de variables endógenas retardadas.

Así pues, el estimador MCO es asintóticamente no sesgado, consistente y, si **U** se distribuye según una normal, también asintóticamente eficiente.

1.3.3. Estimación por MCO en modelos con variables explicativas correlacionadas con el término de perturbación

El tercer tipo de modelo dinámico es aquel en el que hay variables endógenas retardadas como variables explicativas, y éstas están correlacionadas con el término de perturbación a causa de la presencia de una estructura de autocorrelación en el mencionado término. En este caso, podemos demostrar que las estimaciones por MCO son sesgadas (y el sesgo no tiende a cero al aumentar el tamaño de la muestra), inconsistentes e ineficientes.

Un ejemplo de este caso sería el de un AD(1,0) con un término de perturbación no esférico. En este modelo la matriz de varianzas y covarianzas será no singular, porque el término de perturbación tiene problemas de autocorrelación:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + u_t;\ \text{E}[u_t u_{t-i}] \neq 0 \text{ para algún } i, \tag{1.34}$$

donde $|\beta_2| < 1$ para que el modelo sea estable. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- El término de perturbación presenta autocorrelación: $\text{E}[\mathbf{UU'}] = \sigma^2\Omega_T$.

- La variable explicativa X_t está incorrelacionada con u_t, puesto que, por definición, hemos supuesto que X_t era un regresor fijo o estocástico incorrelacionado con u_t:

$$\text{E}[X_t u_t] = 0 \quad \forall t.$$

- La variable endógena retardada ahora está correlacionada con u_t, ya que Y_{t-1} es estocástica y depende de u_{t-1}, y, si el término de perturbación u_t sigue un AR(1), éste también depende de u_{t-1}:

$$E[Y_{t-1}u_t] \neq 0 \qquad \forall t.$$

Para ver lo que acabamos de apuntar únicamente debemos tener en cuenta 1.19, 1.20 y 1.21, y se puede ver fácilmente que:

$$E[Y_{t-1}u_t] = E\left[\left(\beta'_0 + \frac{\beta_1 X_{t-1}}{(1-\beta_2 L)} + \frac{u_{t-1}}{(1-\beta_2 L)}\right)u_t\right] =$$

$$= E[\beta'_0 u_t] + E\left[\frac{\beta_1 X_{t-1}}{(1-\beta_2 L)}\ u_t\right] + E\left[\frac{u_{t-1}}{(1-\beta_2 L)}\ u_t\right] =$$

$$= E[\beta'_0 u_t] + E\left[\beta_1 \sum_{i=0}^{\infty} \beta_2^i X_{t-1-i}\, u_t\right] + E\left[\sum_{i=0}^{\infty} \beta_2^i\, u_{t-1-i}\, u_t\right] =$$

$$= 0 + 0 + E\left[\sum_{i=0}^{\infty} \beta_2^i\, u_{t-1-i}\, u_t\right] = E[u_{t-1}u_t + \beta_2 u_{t-2}u_t + \beta_2^2 u_{t-3}u_t + ...] =$$

$$= E[u_{t-1}u_t] + \beta_2 E[u_{t-2}u_t] + \beta_2^2 E[u_{t-3}u_t] + ... =$$

$$= \gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_2^2\gamma_3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_2^i \gamma_{1+i}.$$

Si el término de perturbación presenta problemas de autocorrelación, no todos los sumandos de $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_2^i \gamma_{1+i}$ son iguales a cero.

El último resultado hace que no se cumpla el teorema de Mann-Wald, por lo que los estimadores MCO serán inconsistentes. Tampoco serán eficientes, teniendo en cuenta la no esfericidad del término de perturbación u_t.

1.3.4. Métodos de estimación alternativos

Hemos visto que en el caso de un modelo dinámico con variables explicativas correlacionadas con el término de perturbación, las estimaciones por MCO son sesgadas, inconsistentes e ineficientes.

Ved el caso de un modelo dinámico con variables explicativas correlacionadas con el término de perturbación en el subapartado 1.3.3 de este módulo didáctico.

Un método de estimación alternativo que asegura la consistencia de los nuevos estimadores es el de variables instrumentales (VI). En primer lugar, estudiaremos este método de estimación aplicado al modelo $\mathbf{Y} = \mathbf{ZB} + \mathbf{U}$, donde $\mathbf{Z}$ es la matriz de dimensión $T \times k$ de variables explicativas del modelo dinámico (en el que había variables endógenas retardadas).

Tenemos que advertir, sin embargo, que en general este método de estimación puede ser utilizado para obtener estimaciones consistentes más allá del caso del que trata este módulo, en el que estudiamos modelos dinámicos con variables endógenas retardadas correlacionadas con un término de perturbación autocorrelacionado. En concreto, también se utiliza el método de las VI en modelos en los que hay correlación entre variables explicativas y el término de perturbación a causa del no cumplimiento del supuesto de exogeneidad de los regresores.

Ejemplo de uso del método de las VI

Un ejemplo de utilización de las variables instrumentales en modelos en los que hay correlación entre variables explicativas y el término de perturbación, a causa del no cumplimiento del supuesto de exogeneidad de los regresores, lo encontramos en algunos modelos multiecuacionales, en los que como variables explicativas figuran variables dependientes en otras ecuaciones del modelo.

El problema de la inconsistencia de los estimadores MCO se debía a la correlación entre $\mathbf{Z}_t$ y u_t:

$$\mathrm{E}[\mathbf{Z}_t' u_t] \neq \mathbf{0} \qquad \forall t.$$

Este incumplimiento impedía que se cumpliesen los requisitos para aplicar el teorema de Mann-Wald, que asegura la consistencia de los estimadores. Entonces, el método de las VI propone definir una nueva matriz $\mathbf{W}_t$, formada por tantas variables como $\mathbf{Z}_t$, de manera que estas variables (llamadas *instrumentos*) estén tan correlacionadas como sea posible con las variables iniciales y no lo estén con el término de perturbación del modelo. Así, se garantiza que los nuevos instrumentos registren el máximo de lo que explicaban los regresores iniciales de la variable endógena y, además, aseguramos el cumplimiento del requisito:

$$\mathrm{E}(\mathbf{W}_t' u_t) = \mathbf{0} \qquad \forall t,$$

que nos permitirá aplicar el teorema de Mann-Wald.

A continuación, presentamos dos ejemplos ilustrativos de las opciones que tenemos a la hora de construir la matriz **W**:

1) Dado el siguiente modelo dinámico AD(1,0):

$$V_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 PC_t + \beta_4 NC_t + \beta_5 DP_t + \alpha_1 V_{t-1} + u_t,$$

conocemos que u_t presenta una estructura de correlación AR(1) por el hecho de que en el modelo especificado hay un problema de omisión de variables relevantes, ya que el modelo correcto sería un AD(1,1).

La estimación por MCO nos conduciría a estimadores sesgados, inconsistentes e ineficientes. Por el método de las VI, en cambio, obtendríamos una estimación consistente. Una matriz **W** de instrumentos posible sería la siguiente:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & P_2 & PC_2 & NC_2 & DP_2 & P_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & P_T & PC_T & NC_T & DP_T & P_{T-1} \end{bmatrix},$$

si P_t fuese la variable que mejor explicase V_t.

2) Otra posibilidad sería obtener una estimación de V_{t-1} a partir de la estimación de una regresión auxiliar:

$$\hat{V}_{t-1} = \hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2 P_{t-1} + \hat{\pi}_3 PC_{t-1} + \hat{\pi}_4 NC_{t-1} + \hat{\pi}_5 DP_{t-1},$$

y utilizar esta estimación como último elemento de la matriz **W**:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & P_2 & PC_2 & NC_2 & DP_2 & \hat{V}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & P_T & PC_T & NC_T & DP_T & \hat{V}_{t-1} \end{bmatrix}.$$

Este último estimador también recibe el nombre de **estimador por mínimos cuadrados en dos etapas** y proporciona unas estimaciones más eficientes de los parámetros **B** iniciales que si utilizásemos otro tipo de instrumentos para $\mathbf{V}_{t-1}$.

Las expresiones del estimador por VI y de la varianza de éste son las siguientes:

$$\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{VI}} = (\mathbf{W'Z})^{-1}\mathbf{W'Y}.$$

$$\mathrm{VAR}[\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{VI}}] = \sigma^2(\mathbf{W'Z})^{-1}(\mathbf{W'W})(\mathbf{Z'W})^{-1}.$$

De todos modos, tenemos que recordar que, para obtener la estimación de la varianza del término de perturbación $\hat{\sigma}^2$, es preciso que utilicemos las variables originales del modelo ($\mathbf{Z}_t$):

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{VI}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{VI}})}{T - k}.$$

Las estimaciones por VI no son asintóticamente eficientes; en cualquier caso, pueden ser útiles como estimaciones iniciales del método de estimación por máxima verosimilitud.

Dos métodos alternativos de estimación son el **método de mínimos cuadrados no lineales** (MCNL) y el **método de máxima verosimilitud** (MV). El primero minimiza la *SCR* y el segundo maximiza el logaritmo neperiano de la función de verosimilitud, y los resultados sobre los **B** estimados coinciden si el término de perturbación sigue una ley de distribución normal.

Los procesos de optimización (minimización en el primer caso y maximización, en el segundo) conducen a la obtención de unos sistemas de ecuaciones no lineales. Para resolverlos, tenemos que utilizar algoritmos iterativos que requieren una serie de estimaciones iniciales de los parámetros que nos interesa estimar. Los algoritmos más habituales son los de Gauss-Newton, Scoring y Newton-Raphson. El proceso converge con más rapidez hacia los valores deseados si utilizamos estimaciones ya consistentes como estimaciones iniciales. En este sentido, por este motivo son útiles las estimaciones por VI.

2. Modelos multiecuacionales

Hasta ahora todos los análisis que hemos realizado con los modelos econométricos tenían como objetivo explicar el comportamiento de una única variable (que hemos denominado *variable endógena* o *variable a explicar*). Además, suponíamos que las variables explicativas eran todas predeterminadas (exógenas o endógenas retardadas), sin tener en cuenta la posibilidad de que en la parte sistemática del modelo también hubiese otras variables endógenas o que se tuvieran que explicar en el mismo modelo). Sin embargo, en muchas ocasiones esta aproximación no será adecuada, puesto que, para explicar una variable, será preciso introducir otras variables endógenas en tanto que variables explicativas.

Los conceptos de exogeneidad y endogeneidad en econometría no son sencillos. Hay varias acepciones (según Goldberger, Engle, Hendry y Richard, etc.). Aquí, para simplificar, entenderemos que una variable es endógena si no es controlada por el analista y se tiene que explicar por el modelo. En cambio, una variable será exógena si el modelizador puede predeterminar su valor y, por lo tanto, no se explica por el modelo.

Ejemplo de planteamiento de modelos multiecuacionales

A continuación, mostramos dos ejemplos en los que tenemos que plantear un modelo multiecuacional:

1) Un primer ejemplo es aquel en el que hubiese que explicar los precios de venta de un producto. La teoría económica recomienda que en los regresores se incluyan los salarios. De todos modos, difícilmente podremos considerar los salarios como una variable exógena, ya que más bien serán una variable endógena. Entonces, el modelo correcto sería un modelo biecuacional, en el que las dos variables endógenas vendrían constituidas por los precios y los salarios.

2) Un segundo ejemplo sería el típico modelo macroeconómico en el que se intenta explicar alguna macromagnitud (como, por ejemplo, el consumo, la inversión, etc.). Es habitual que como variables explicativas de estas variables endógenas figuren otras variables endógenas (tales como la renta).

En algunas ocasiones, tanto para explicar mejor la realidad como para llevar a cabo un tratamiento econométrico adecuado (que permita obtener buenas estimaciones, predicciones, etc.), tenemos que especificar un modelo multiecuacional en lugar de uno uniecuacional. En la práctica, podemos encontrar tanto un modelo de dos ecuaciones como modelos formados por millares de ecuaciones.

Ejemplo de modelo multiecuacional

Podemos hallar ejemplos de modelos multiecuacionales formados por millares de ecuaciones en algunos modelos macroeconómicos asociados a países o a áreas económicas interrelacionadas (como puede ser la Unión Europea).

2.1. Hipótesis básicas y formulación general de un modelo multiecuacional

Supondremos que el modelo multiecuacional cumple las siguientes hipótesis:

1) Nos encontramos ante G variables endógenas que queremos explicar por nuestro modelo. En consecuencia, tendremos que especificar G ecuaciones, al suponer que el modelo es completo. Para explicar estas variables introduciremos k variables predeterminadas (entre exógenas y endógenas retardadas). Representaremos el conjunto de variables endógenas por el vector $\mathbf{Y}$ y el conjunto de variables predeterminadas por la matriz $\mathbf{Z}$.

No es necesario que se encuentren presentes en cada una de las ecuaciones todas las variables endógenas y predeterminadas. Además, supondremos que la relación que hay entre las variables es lineal.

Así, el modelo multiecuacional sería éste:

$$\left.\begin{array}{l}
\beta_{11}Y_{1t} + \beta_{12}Y_{2t} + \ldots + \beta_{1G}Y_{Gt} + \gamma_{11}Z_{1t} + \ldots + \gamma_{1k}Z_{kt} = u_{1t},\\
\beta_{21}Y_{1t} + \beta_{22}Y_{2t} + \ldots + \beta_{2G}Y_{Gt} + \gamma_{21}Z_{1t} + \ldots + \gamma_{2k}Z_{kt} = u_{2t},\\
\vdots \\
\beta_{G1}Y_{1t} + \beta_{G2}Y_{2t} + \ldots + \beta_{GG}Y_{Gt} + \gamma_{G1}Z_{1t} + \ldots + \gamma_{Gk}Z_{kt} = u_{Gt},
\end{array}\right\} \quad (2.1)$$

donde $t = 1, 2, \ldots, T$ observaciones en el tiempo o en el espacio.

En los parámetros del modelo se suelen introducir restricciones. La más habitual es suponer que $\beta_{ii} = 1$.

En notación matricial, la expresión 2.1 es $\mathbf{BY_t} + \Gamma\mathbf{Z_t} = \mathbf{U_t}$, en la que:

$$\left.\begin{array}{c}
\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1G} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{G1} & \beta_{G2} & \cdots & \beta_{GG} \end{bmatrix}; \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1k} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{G1} & \gamma_{G2} & \cdots & \gamma_{Gk} \end{bmatrix}; \\
\\
\mathbf{Y_t} = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{Gt} \end{bmatrix}; \mathbf{Z_t} = \begin{bmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \\ \vdots \\ Z_{kt} \end{bmatrix}; \mathbf{U_t} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ \vdots \\ u_{Gt} \end{bmatrix}.
\end{array}\right\} \quad (2.2)$$

2) Los términos de perturbación de cada ecuación tendrán media nula y serán esféricos. Pero ahora, como hipótesis básica del modelo multiecuacional, supondremos que hay términos de perturbación referidos a diferentes ecuaciones del modelo que pueden presentar autocorrelación contemporánea. Desde un punto de vista formal, lo podemos escribir de la siguiente manera:

- $\mathrm{E}[u_{it}] = 0$.

- $\mathrm{E}[u_{it}u_{is}] = 0$ si $t \neq s$;
  $\mathrm{E}[u_{it}u_{is}] = \sigma_{ii}$ si $t = s$.
  Matricialmente: $\mathrm{E}[u_i u'_i] = \sigma_{ii}\mathbf{I}_T = \Sigma_{ii}$.

- $\mathrm{E}[u_{it}u_{js}] = 0$ si $t \neq s$;
  $\mathrm{E}[u_{it}u_{js}] = \sigma_{ij}$ si $t = s$.
  Matricialmente: $\mathrm{E}[u_i u'_j] = \sigma_{ij}\mathbf{I}_T = \Sigma_{ij}$.

En las expresiones anteriores, *i* o *j* son los subíndices indicativos de la ecuación *i*-ésima o *j*-ésima, y *t* o *s* indican el momento del tiempo. Matricialmente, esto se escribe $E[\mathbf{U}] = \mathbf{0}$ i $E[\mathbf{UU}'] = \Sigma \otimes \mathbf{I}$, con:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1G} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{G1} & \sigma_{G2} & \cdots & \sigma_{GG} \end{bmatrix},$$

donde **U** es la matriz de dimensión $TG \times TG$ formada por todas las T observaciones de cada uno de los G términos de perturbación.

Producto de Kronecker, ⊗

Recordad que el símbolo ⊗ indica producto de Kronecker, mediante el cual cada elemento de la primera matriz se multiplica por la segunda.

Ejemplo de modelo multiecuacional

Supongamos que tenemos un modelo multiecuacional de dos ecuaciones. Para los supuestos que hemos introducido, habrá dos variables endógenas ($\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$). Además, suponemos que hay tres variables predeterminadas ($\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$). El modelo sería el siguiente:

$$Y_{1t} + \beta_{12}Y_{2t} + \gamma_{11}Z_{1t} + \gamma_{12}Z_{2t} + \gamma_{13}Z_{3t} = u_{1t},$$
$$\beta_{21}Y_{1t} + Y_{2t} + \gamma_{21}Z_{1t} + \gamma_{22}Z_{2t} + \gamma_{23}Z_{3t} = u_{2t},$$

y en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \end{bmatrix}}_{\Gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \\ Z_{3t} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_t},$$

La matriz de varianzas y covarianzas global del modelo será:

$$E[\mathbf{UU}'] = \Sigma \otimes \mathbf{I}_T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_T = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} \sigma_{11} & 0 & \cdots & & 0 & \sigma_{12} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \sigma_{11} & 0 & \cdots & & 0 & \sigma_{12} \\ \hline \sigma_{21} & 0 & \cdots & & 0 & \sigma_{22} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \sigma_{21} & 0 & \cdots & & 0 & \sigma_{22} \end{array}\right],$$

Nota: fijaos en que cada submatriz es de dimensión $T \times T$.

en la que en las dos submatrices principales tenemos las varianzas y covarianzas del término de perturbación de la primera y segunda ecuaciones, respectivamente. En cambio, en las otras dos submatrices hallamos las covarianzas entre los términos de perturbación de las dos ecuaciones. Si estas últimas covarianzas, σ_{12} y σ_{21}, son distintas de cero, diremos que los términos de perturbación de las dos ecuaciones ($\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$) están correlacionados.

Fijaos en que en esta submatriz suponemos que se cumple la hipótesis básica de no correlación entre términos de perturbación referidos a momentos del tiempo diferentes (*t* y *s*): son cero todos los valores de fuera de las diagonales principales de cada submatriz. En cambio, se permite que sean diferentes de cero las varianzas (σ_{11} y σ_{22}) o covarianzas (σ_{12} y σ_{21}) entre los dos términos de perturbación referidos al mismo momento del tiempo.

Tras haber definido un modelo multiecuacional, podemos pasar a estudiar las diferentes maneras de escribirlo. Para ello, tenemos que hacer referencia, básicamente, a los siguientes aspectos:

- La **forma estructural** consiste en escribir en cada una de las G ecuaciones la combinación lineal de todas las variables endógenas y predeterminadas, e igualarlas a sus términos de perturbación. Las expresiones 2.1 o 2.2 serían un ejemplo de esto.

- La **forma reducida** es aquella en la que cada una de las variables endógenas tan sólo se encuentran en función de variables predeterminadas. Matricialmente, dado el modelo en su forma estructural, $\mathbf{BY}_t + \Gamma\mathbf{Z}_t = \mathbf{U}_t$, la forma reducida sería ésta:

$$\mathbf{Y}_t = \Pi\mathbf{Z}_t + \mathbf{V}_t, \tag{2.3}$$

donde $\Pi = -\mathbf{B}^{-1}\Gamma$ i $\mathbf{V}_t = +\mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}_t$. En notación no matricial, lo escribiríamos así:

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= \Pi_{11}Z_{1t} + \Pi_{12}Z_{2t} + \ldots + \Pi_{1k}Z_{kt} + V_{1t}, \\ Y_{2t} &= \Pi_{21}Z_{1t} + \Pi_{22}Z_{2t} + \ldots + \Pi_{2k}Z_{kt} + V_{2t}, \\ \vdots\; &\quad\;\; \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots, \\ Y_{Gt} &= \Pi_{G1}Z_{1t} + \Pi_{G2}Z_{2t} + \ldots + \Pi_{Gk}Z_{kt} + V_{Gt}. \end{aligned}$$

- La **forma final** es aquella en la que las variables endógenas están en función únicamente de variables exógenas y exógenas retardadas. El punto de partida para obtener esta formulación a partir de la forma estructural requeriría reescribir 2.1 como la siguiente expresión:

$$B(L)\mathbf{Y}_t + \Gamma(L)\mathbf{X}_t = \mathbf{U}_t,$$

en la que L es el operador de retardos y, como podemos ver, donde hemos incorporado las variables endógenas retardadas en el término $B(L)\mathbf{Y}_t$. La expresión de la forma final es la siguiente:

$$\mathbf{Y}_t = \Pi(L)\mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t(L),$$

en la que $\Pi(L) = -B(L)^{-1}\Gamma(L)$ y $\mathbf{V}_t(L) = +B(L)^{-1}\mathbf{U}_t$.

Ejemplo de las diferentes maneras de escribir un modelo multiecuacional

Dado el siguiente modelo multiecuacional:

$$\begin{aligned} C_t &= \alpha + \beta\, Y_{t-1} + u_{1t}, \\ Y_t &= C_t + I_t, \end{aligned}$$

donde C_t representa el consumo, Y_t, la renta, e I_t, la inversión, la primera ecuación establece que el consumo en un periodo depende linealmente de la renta del periodo anterior. Por otra parte, la segunda ecuación establece que la renta se repartirá entre la parte destinada al consumo y la parte destinada a la inversión. A continuación, escribiremos las formas estructural, reducida y final de este modelo (apreciad que la segunda ecuación es una identidad contable y no una ecuación de comportamiento porque no hay aleatoriedad, lo cual no es contradictorio con el hecho de que sea un modelo multiecuacional):

a) En el mismo enunciado del modelo podríamos considerar la forma estructural, dado que hay alguna variable endógena (C_t) como variable explicativa de otra variable endógena (Y_t). De todos modos, y siguiendo la notación que hemos explicado antes, se podría reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C_t - \alpha - \beta Y_{t-1} &= u_{1t}, \\ Y_t - C_t - I_t &= 0, \end{aligned}$$

o bien:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} C_t \\ Y_t \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\Gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ I_t \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{1t} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_t};$$

b) Por otra parte, podemos demostrar que la **forma reducida** sería la siguiente:

$$C_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + u_{1t},$$
$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + I_t + u_{1t},$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} C_t \\ Y_t \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ I_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix}}_{\Pi} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ I_t \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{1t} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_t}.$$

c) Para acabar, la **forma final** sería ésta:

$$C_t = \frac{\alpha + \beta I_{t-1} + u_{1t}}{1 - \beta L} = (1 + \beta L + \beta^2 L^2 + \ldots)(\alpha + \beta I_{t-1} + u_{1t}),$$
$$Y_t = \frac{\alpha + I_t + u_{1t}}{1 - \beta L} = (1 + \beta L + \beta^2 L^2 + \ldots)(\alpha + I_t + u_{1t}),$$

o, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} C_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \frac{-1}{1 - \beta L} \begin{bmatrix} 1 & \beta L \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ I_t \end{bmatrix} + \frac{1}{1 - \beta L} \begin{bmatrix} 1 & \beta L \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{1 - \beta L} \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta I_{t-1} \\ -\alpha & -I_t \end{bmatrix} + \frac{1}{1 - \beta L} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{1t} \end{bmatrix}.$$

Actividad

2.1. Demostrad la expresión de la forma reducida que hemos podido ver en el punto **b)** del ejemplo que acabamos de presentar.

2.2. Tipología de modelos multiecuacionales

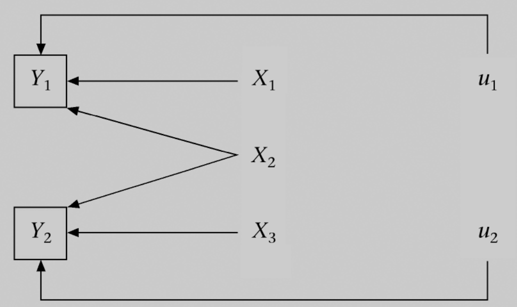
Distinguiremos cuatro tipos de modelos multiecuacionales:

a) Modelos multiecuacionales no relacionados

Los modelos multiecuacionales no relacionados son aquellos modelos en los que un conjunto de variables predeterminadas explican el comportamiento de G variables endógenas, pero no hay ninguna relación ni directa (en el sentido de que una explique la otra) ni indirecta (mediante la correlación entre los términos de perturbación de las diferentes ecuaciones) entre las variables endógenas.

Gráficamente, si suponemos un modelo de dos ecuaciones, para simplificar, podemos representar uno de estos modelos como vemos a continuación:

Esquema de modelo multiecuacional no relacionado



Veamos ahora cómo podemos escribir el modelo analíticamente:

$$\left.\begin{aligned} Y_{1t} &= a_1X_{1t} + a_2X_{2t} + u_{1t}, \\ Y_{2t} &= b_1X_{2t} + b_2X_{3t} + u_{2t}, \end{aligned}\right] \qquad (2.4)$$

donde $E[u_{1t}u_{2t}] = 0$. En este supuesto, en el caso de G ecuaciones, la matriz **B** de la expresión 2.2 será diagonal y los elementos de la matriz de varianzas y covarianzas, σ_{ij}, tendrán que ser todos cero.

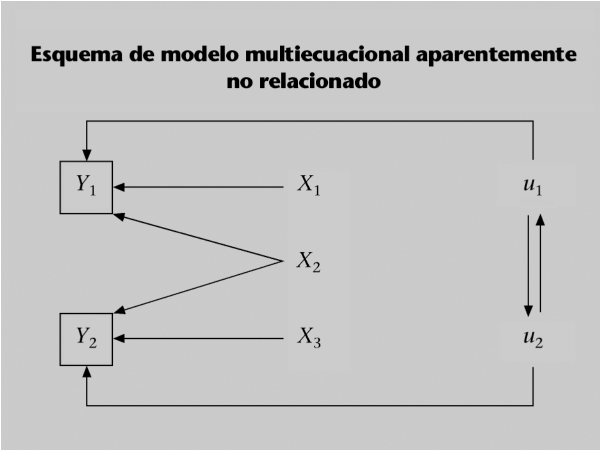
b) Modelos multiecuacionales aparentemente no relacionados

Los modelos multiecuacionales aparentemente no relacionados son aquellos modelos en los que un conjunto de variables predeterminadas explican el comportamiento de G variables endógenas. No se establece relación directa alguna (en el sentido de que una explique la otra) con variables endógenas, pero sí que hay indirecta (por medio de la correlación entre los términos de perturbación de las diferentes ecuaciones).

Podemos representar esta situación gráficamente (siguiendo el ejemplo del punto anterior) de la manera que tenéis en el gráfico 1 de la página siguiente.

Desde un punto de vista analítico, obtendríamos la misma expresión que antes (2.4), pero ahora $E[u_{1t}u_{2t}] \neq 0$. En el caso de un modelo multiecuacional general, la matriz **B** de la expresión 2.2 será diagonal y algún σ_{ij} tendrá que ser diferente de cero.

Gráfico 1

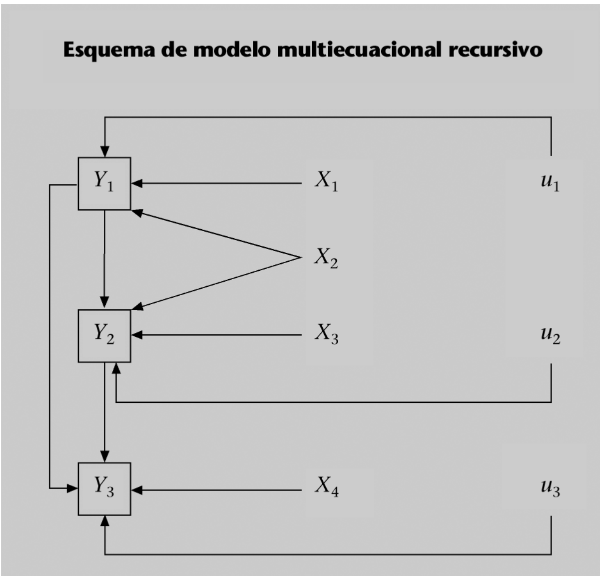


c) Modelos multiecuacionales recursivos

Los modelos multiecuacionales recursivos son aquellos modelos en los que un conjunto de variables predeterminadas explican el comportamiento de *G* variables endógenas y, además, se produce una relación de causalidad unidireccional directa entre las variables endógenas. Una característica adicional es la no correlación entre los términos de perturbación de las diferentes ecuaciones.

Supongamos ahora, para que quede más claro, un caso con tres ecuaciones; en tal caso, podemos representar gráficamente esta situación con el siguiente esquema:

Gráfico 2



Analíticamente, el modelo se escribe así:

$$Y_{1t} = a_1X_{1t} + a_2X_{2t} + u_{1t},$$
$$Y_{2t} = b_1X_{2t} + b_2X_{3t} + b_3Y_{1t} + u_{2t},$$
$$Y_{3t} = c_1X_{4t} + c_2Y_{1t} + c_3Y_{2t} + u_{3t},$$

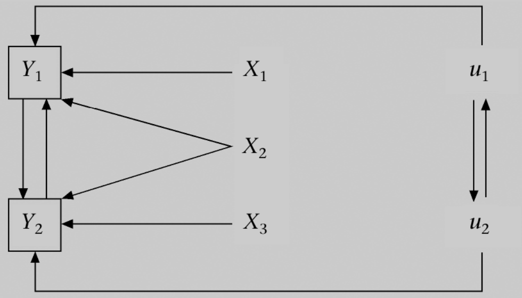
donde $E[u_{it}u_{jt}] = 0$. En este caso, la matriz **B** de la expresión 2.2 será triangular, y la matriz de varianzas y covarianzas de los términos de perturbación (Σ_{ij}) será diagonal.

d) Modelos multiecuacionales integrados

Los modelos multiecuacionales integrados constituyen el caso general, en el que no se da ninguno de los casos particulares que hemos mencionado antes. Habrá relaciones directas entre las variables endógenas y, además, correlación entre los términos de perturbación de las diferentes ecuaciones.

Podemos representar gráficamente la situación como vemos a continuación:

Esquema de modelo multiecuacional integrado



De forma analítica el modelo se escribiría así:

$$Y_{1t} = a_1X_{1t} + a_2X_{2t} + a_3Y_{2t} + u_{1t},$$
$$Y_{2t} = b_1X_{2t} + b_2X_{3t} + b_3Y_{1t} + u_{2t},$$

donde ahora $E[u_{1t}u_{2t}] \neq 0$.

2.3. El problema de la identificación

Uno de los problemas que hay que resolver antes de abordar la estimación de los modelos multiecuacionales es el de la identificación. En un modelo multiecuacional como el que registra la expresión 2.1, las incógnitas que nos interesa estimar son los parámetros del modelo.

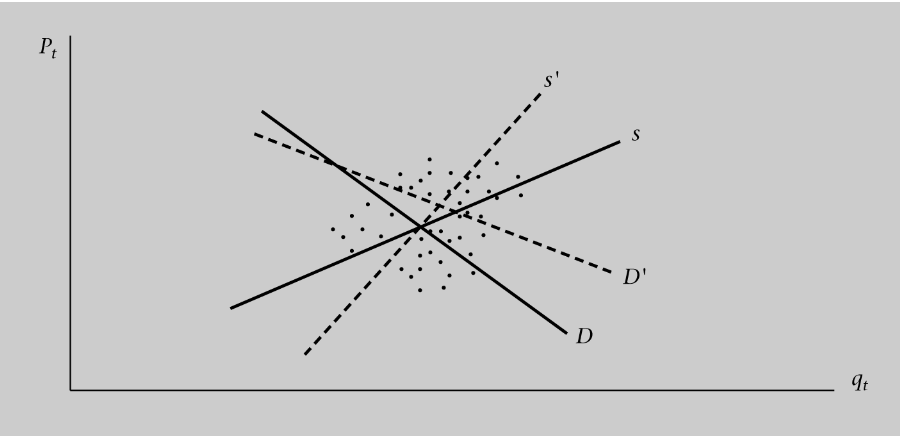
El problema de la identificación surge, básicamente, cuando no disponemos de la suficiente información estadística como para resolver el sistema de ecuaciones (y, por lo tanto, para estimar los parámetros del modelo escrito en su forma estructural).

Ejemplo de problema de identificación de un modelo

Tenemos el siguiente modelo:

$$q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t},$$
$$q_t^s = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t},$$
$$q_t^s = q_t^d,$$

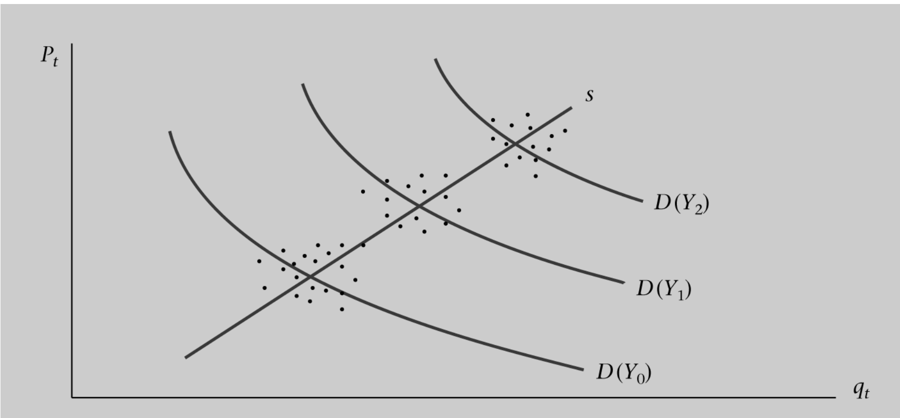
en el que q_t^d es la cantidad demandada de un bien, q_t^s es la cantidad ofrecida y P_t, el nivel de precios, podríamos demostrar que este modelo no está identificado. Para estimar los parámetros del modelo, sólo tenemos información estadística de dos variables (el precio y la cantidad). De forma gráfica, podemos ver que el modelo no está identificado:



Cualquier combinación de rectas oferta/demanda podría estar asociada a la nube de puntos disponible. El modelo será, por lo tanto, no identificado. La alternativa sería añadir nueva información al modelo o incorporar restricciones. En el caso del ejemplo anterior, podríamos añadir la variable renta (Y) a la ecuación de demanda como variable explicativa (o, dicho de otra manera, añadir la restricción de que en la ecuación de oferta el parámetro asociado a la variable explicativa renta, Y, fuese cero). Así, ahora el modelo sería el siguiente:

$$q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Y_t + u_{1t},$$
$$q_t^s = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t},$$
$$q_t^d = q_t^s.$$

De esta manera, conseguiríamos identificar la ecuación de oferta. Lo que acabamos de ver, gráficamente, sería:



Para distintos niveles de renta (Y_0, Y_1, Y_2...), la nube de puntos oferta/demanda sería distinta y determinaría la evolución de la curva de oferta.

En cuanto a la identificación, podemos hallar estos tres tipos de situaciones:

Nota: una ecuación identificada puede ser exactamente identificada o sobreidentificada.

- **Ecuaciones no identificadas**: se dan cuando no tenemos suficiente información para estimar los parámetros de la forma estructural de la ecuación.

Estaríamos ante un sistema de ecuaciones incompatible. Esta ecuación tendrá que reespecificarse mediante la incorporación de nueva información en la misma. Lo más habitual es incorporar restricciones lineales sobre los parámetros de las variables endógenas o predeterminadas. Son ejemplos de restricciones $\beta_{ij} + \beta_{ih} = 0$, o, la más habitual, $\beta_{ij} = 0$.

- **Ecuaciones sobreidentificadas**: son aquellas ecuaciones en las que hay más de una combinación de valores estimados posible de los parámetros estructurales que cumplirían la relación entre variables registrada en la ecuación. Se corresponden con sistemas de ecuaciones compatibles indeterminados.

- **Ecuaciones exactamente identificadas**: son aquellas ecuaciones en las que, a partir de las variables incluidas en el modelo, sólo podemos obtener una única estimación de los parámetros estructurales. Se corresponden con sistemas de ecuaciones compatibles determinados.

En general, es habitual hablar de modelos identificados, cuando, en realidad, hay que estudiar la identificación para cada ecuación individualmente. Un modelo estará no identificado si hay alguna ecuación que no lo esté. Si el modelo está identificado, por el único hecho de que haya una ecuación sobreidentificada, el modelo estará sobreidentificado. Así pues, un modelo estará exactamente identificado cuando todas las ecuaciones lo estén.

Por las características de los diferentes modelos multiecuacionales, podríamos demostrar que los modelos multiecuacionales no relacionados, los aparentemente no relacionados y los recursivos siempre están identificados. Por lo tanto, sólo tendremos que estudiar la identificación en los modelos de ecuaciones simultáneas integrados. Asimismo, la forma reducida de un modelo también está siempre identificada. El problema de la identificación se centra en la forma estructural.

En la práctica, para conocer si una ecuación está identificada o no lo está, tenemos que aplicar lo que se conoce como *condición de rango* y *condición de orden*, y que definimos a continuación:

a) La **condición de rango** consiste en calcular el rango de una matriz ($\mathbf{A}\phi$), de manera que:

- Si Rango($\mathbf{A}\phi$) $= G - 1$, la ecuación está identificada.

- Si Rango($\mathbf{A}\phi$) $\neq G - 1$, la ecuación no está identificada.

Aquí $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \mid \Gamma)$ es la matriz de dimensión $G \times (G + k)$, formada por todos los parámetros de la forma estructural del modelo, y ϕ, la matriz de restricciones de dimensión $(G + k) \times q$, formada por tantas filas como número de variables endógenas y predeterminadas haya, y tantas columnas (q) como restricciones presente la ecuación.

Ved cómo hay que escribir los elementos que forman parte de una matriz de restricciones en el subapartado 3.1.1 del módulo "Modelo de regresión lineal múltiple… ".

b) La **condición de orden** determina el tipo de identificación. Así:

- Si el número de restricciones = $G - 1$, la ecuación está exactamente identificada.
- Si el número de restricciones > $G - 1$,la ecuación está sobreidentificada.

La condición de orden es una condición necesaria, pero no suficiente, en el sentido de que se podría cumplir y que la ecuación no estuviese identificada.

Ejemplo de identificación de un modelo

Dado el modelo que acabamos de ver en "Ejemplo de problema de identificación de un modelo", demostraremos que las dos ecuaciones de comportamiento no están identificadas. Con el fin de demostrarlo seguiremos los pasos que marcamos a continuación:

a) En lo que concierne a la condición de rango:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{B} \mid \Gamma) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 0 & 1 & -\beta_1 & -\beta_0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]; G = 3.$$

- La primera ecuación es:

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rango}(\mathbf{A}\phi) = \text{Rango}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq G - 1 = 2 \Rightarrow \text{No identificada.}$$

- La segunda ecuación es:

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rango}(\mathbf{A}\phi) = \text{Rango}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \neq G - 1 = 2 \Rightarrow \text{No identificada.}$$

b) En cuanto a la condición de orden, en realidad no será necesario calcularla, puesto que ya no se cumple la de rango. De todos modos, el número de restricciones en cada ecuación es 1, menor que $G - 1 = 3 - 1$, motivo por el que tampoco se cumple la condición de orden.

En cambio, si trabajamos con el modelo modificado en el que se ha añadido la variable renta (Y_t) como variable explicativa de la demanda, pero restringida a tener coeficiente 0 en la ecuación de la oferta, demostraremos a continuación que la ecuación de oferta estará identificada.

Construimos la matriz **A**:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_0 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & -\beta_1 & -\beta_0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]; G = 3.$$

Y, a continuación, seguimos los mismos pasos que antes:

a) En lo que concierne a la condición de rango:

- La primera ecuación resulta:

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rango}(\mathbf{A}\phi) = \text{Rango}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq G - 1 = 2 \Rightarrow \text{No identificada.}$$

- La segunda ecuación es:

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rango}(\mathbf{A}\phi) = \text{Rango} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 2 = G - 1 = 2 \Rightarrow \text{Identificada.}$$

b) Sobre la condición de orden de la segunda ecuación:

Número de restricciones $= 2 = G - 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow$ Exactamente identificada.

2.4. La estimación de los modelos multiecuacionales

Tras haber asegurado la identificación de los modelos, se tiene que proceder a la etapa de estimación. Hay tres métodos de estimación, que presentamos a continuación:

1) Métodos directos: son aquellos que estiman cada ecuación por separado, sin tener en cuenta que la ecuación forma parte de un modelo multiecuacional. El método más conocido es el de MCO.

2) Métodos de información limitada: son aquellos que estiman cada ecuación por separado, pero que tienen en cuenta información adicional a la ecuación estimada (registrada en el resto de las ecuaciones del modelo). En concreto, tienen en cuenta si una variable explicativa es endógena o exógena, y también, las variables que no están incluidas en la ecuación, pero que sí están presentes en el modelo. Los métodos más habituales son el de mínimos cuadrados indirectos (MCI), el de mínimos cuadrados en dos etapas (MC2E), el de variables instrumentales (VI) y el de máxima verosimilitud de información limitada (MVIL).

3) Métodos de información completa: son aquellos que estiman de manera conjunta todas las ecuaciones del modelo, por lo que tienen en cuenta toda la información del modelo. Los más habituales son el de mínimos cuadrados en tres etapas (MC3E) y el de máxima verosimilitud de información completa (MVIC).

En el cuadro siguiente aparecen las propiedades asintóticas de los estimadores MCO de los diferentes modelos multiecuacionales*:

*** En caso de que se cumplan las hipótesis básicas del MRLM en cada ecuación.**

Propiedades asintóticas de los estimadores MCO		
	Consistencia	Eficiencia
Modelos multiecuacional no relacionado	Sí	Sí
Modelo multiecuacional aparentemente no relacionado	Sí	No
Modelo multiecuacional recursivo	Sí	Sí
Modelo multiecuacional integrado	No	No

En consecuencia, los problemas se concentran en los modelos aparentemente no relacionados y en los modelos integrados. A continuación, apuntamos estos problemas para cada tipo de modelos:

1) En los modelos aparentemente no relacionados, los estimadores serán ineficientes porque la estimación uniecuacional no tendrá en cuenta toda la información asociada al modelo (en este caso registrada en la correlación entre los términos de perturbación de las diferentes ecuaciones). Para solucionar el problema tenemos que estimar por métodos de información completa. El más habitual es el **método de estimación de Zellner** (que, a grandes rasgos, consiste en estimar el modelo multiecuacional completo por mínimos cuadrados generalizados).

2) En los modelos integrados, los estimadores serán sesgados e inconsistentes a causa de la presencia de otras variables endógenas correlacionadas con el término de perturbación como variables explicativas. Además, serán ineficientes porque no consideran toda la información disponible en el modelo. En este segundo modelo, los estimadores de información limitada serán consistentes, pero ineficientes, y los de información completa, consistentes y eficientes.

Los métodos de información limitada más utilizados

Los tres métodos de información limitada más utilizados son el de MCI, el de MC2E y el de las VI. A continuación, nos disponemos a explicarlos de forma breve:

a) El método de los mínimos cuadrados indirectos consiste en estimar por MCO los parámetros Π de la forma reducida del modelo y, posteriormente, obtener las estimaciones de los parámetros de la forma estructural (**B** y Γ), a partir de la siguiente relación:

$$\Pi = -\mathbf{B}^{-1}\Gamma \Rightarrow \mathbf{B}\,\Pi + \Gamma = \mathbf{0}.$$

Resulta útil aplicar este modelo en ecuaciones exactamente identificadas.

b) El método de los mínimos cuadrados en dos etapas, tal y como su nombre indica, consiste en un procedimiento en dos etapas:

- En la primera etapa estima la forma reducida por MCO, con lo que obtenemos una estimación de las variables endógenas ($\hat{\mathbf{Y}}_t$):

$$\hat{\mathbf{Y}}_t = \hat{\Pi}\,\mathbf{Z}_t.$$

- En la segunda etapa se estima la ecuación estructural inicial por MCO una tras haber sustituido las variables endógenas presentes como variables explicativas ($\mathbf{Y}_t$) por sus valores estimados ($\hat{\mathbf{Y}}_t$).

Este método es útil tanto en ecuaciones sobreidentificadas como en las exactamente identificadas.

c) Para acabar, el método de las VI consiste en definir una matriz **W** de instrumentos y aplicar la fórmula presentada en el apartado anterior. En tanto que instrumentos de las variables predeterminadas de una ecuación, se utilizan las mismas variables. Se pueden presentarse los dos casos que encontramos a continuación:

Ved la matriz **W** de instrumentos en el subapartado 1.3.4 de este módulo didáctico.

- En el caso de una ecuación exactamente identificada, si como instrumentos de las variables endógenas explicativas utilizamos las variables predeterminadas omitidas en la ecuación, pero presentes en otras ecuaciones del modelo, los resultados equivaldrán a los de los MCI.

- Por otra parte, en el caso de ecuaciones sobreidentificadas, si como instrumentos utilizamos las $\hat{\mathbf{Y}}_t$ obtenidos en la primera etapa de los MC2E, los estimadores VI serán equivalentes a los MC2E.

Como hemos podido ver, de manera muy básica, las mejoras en la estimación por métodos de información limitada o completa se producen asintóticamente. No obstante, en muestras pequeñas, las ventajas no están claras. El hecho de que, por una parte, muchos modelos multiecuacionales sean recursivos y, por la otra, que trabajemos con pocas observaciones ha provocado que en la práctica una gran cantidad de modelos multiecuacionales se estimen por métodos directos. Además, algunos estudios han demostrado que estos últimos son menos sensibles al problema de la multicolinealidad*.

*** La multicolinealidad es habitual en modelos econométricos.**

Por otra parte, los métodos de información completa tienen mejores propiedades, pero también inconvenientes. Uno de los más relevantes es que, al hacer la estimación conjunta de todos los parámetros del modelo, un error en la especificación de una ecuación no sólo afecta a esta misma, sino que también se trasladará a las restantes.

2.5. Interpretación de los parámetros del modelo

Ya hemos estimado el modelo, pues bien, ahora tendremos que interpretar el significado de los parámetros. En este sentido, los parámetros de la forma estructural únicamente registran los efectos directos entre las variables explicativas y la variable endógena. Con el fin de registrar los efectos directos e indirectos contemporáneos (variaciones en la variable endógena ante variaciones en la variable exógena referidas todas ellas el mismo momento del tiempo), hay que calcular los parámetros de la forma reducida. Para acabar, para registrar todos los efectos contemporáneos, así como aquellos que hacen referencia a cualquier momento del tiempo, tendremos que analizar los parámetros de la forma final.

Ejemplo de interpretación de los parámetros de un modelo

Dado el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{1t} + \alpha_2 Y_{2t} + u_{1t}, \\ Y_{2t} &= \beta_0 + \beta_1 X_{2t} + \beta_2 Y_{1t} + u_{2t}, \end{aligned}$$

a continuación interpretaremos los parámetros de las formas estructural, reducida y final.

La expresión anterior es la forma estructural del modelo. Por lo tanto, α_1 y β_1 son los multiplicadores contemporáneos directos de X_{1t} y X_{2t} sobre Y_{1t} e Y_{2t}, respectivamente. Sin embargo, vemos que una variación en X_{2t} provocará un efecto sobre Y_{2t} que, a la vez, afectará también a Y_{1t}. Captaremos estos efectos indirectos a partir de la forma reducida; y esta última será la que vemos a continuación:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \alpha_2\beta_2} \begin{bmatrix} \alpha_0 + \alpha_2\beta_0 & \alpha_1 & \alpha_2\beta_1 \\ \alpha_0\beta_2 + \beta_0 & \alpha_1\beta_2 & \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} + \mathbf{V}_t =$$

$$= \begin{bmatrix} \pi_{10} & \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{20} & \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} + \mathbf{V}_t,$$

donde π_{11} y π_{12} serán los multiplicadores directos e indirectos de X_{1t} y X_{2t} sobre Y_{1t}, y π_{21} y π_{22}, los multiplicativos sobre Y_{2t}, respectivamente. En tal caso, al no haber variables endógenas retardadas, la forma reducida y la final coincidirán, y también los parámetros que registrarán los efectos contemporáneos y no contemporáneos.

Observamos que, por ejemplo, los efectos directos de X_{2t} sobre Y_{1t} son cero. En cambio, los indirectos son distintos de cero (π_{12}).

Glosario

condición de rango
Condición necesaria y suficiente para que una ecuación esté identificada.

condición de orden
Condición necesaria, pero no suficiente, para que una ecuación esté identificada. El número de restricciones tendrá que ser mayor o igual que el número de variables endógenas menos uno.

ecuación exactamente identificada
Ecuación en la que a partir de los parámetros de la forma reducida de un modelo sólo podemos obtener una combinación de valores de los parámetros de la forma estructural.

ecuación no identificada
Ecuación en la que a partir de los parámetros de la forma reducida de un modelo no podemos obtener los parámetros de la forma estructural.

ecuación sobreidentificada
Ecuación en la que a partir de los parámetros de la forma reducida de un modelo podemos obtener más de una combinación de valores de los parámetros de la forma estructural.

estabilidad
Propiedad que tiene un modelo cuando una variación en alguna variable exógena provoca una variación finita en la variable endógena. Es decir, una variación puntual de la variable exógena provoca una variación en la variable endógena, pero ésta vuelve a su valor de equilibrio inicial. Si la modificación en la variable exógena es permanente, la variable endógena encuentra un nuevo valor de equilibrio.

forma estructural
Forma de escribir los modelos multiecuacionales, mediante la cual, la variable dependiente de cada ecuación se explica por otras variables endógenas y por variables predeterminadas.

forma final
Manera de escribir los modelos multiecuacionales, mediante la cual la variable dependiente de cada ecuación se explica únicamente por variables exógenas y exógena retardadas.

forma reducida
Forma de escribir los modelos multiecuacionales, mediante la cual la variable dependiente de cada ecuación se explica por variables predeterminadas (exógenas, exógenas retardadas y endógenas retardadas).

hipótesis de ajuste parcial
Mecanismo que relaciona el valor esperado, no observado, de la variable endógena con su valor finalmente observado.

hipótesis de expectativas adaptativas
Mecanismo que relaciona el valor esperado, no observado, de la variable exógena con su valor finalmente observado.

métodos de información completa
Métodos que estiman todas las ecuaciones de un modelo de ecuaciones simultáneas (MES) en conjunto. Las estimaciones son sesgadas, consistentes y eficientes.

métodos de información limitada
Métodos en los que se estima cada ecuación de un modelo de ecuaciones simultáneas (MES) por separado, teniendo en cuenta cierta información registrada en otras ecuaciones. Las estimaciones son sesgadas y consistentes, pero ineficientes.

métodos directos de estimación
Métodos en los que se estima cada ecuación de un modelo de ecuaciones simultáneas (MES) por separado, sin tener en cuenta información registrada en otras ecuaciones. Las estimaciones son sesgadas, inconsistentes e ineficientes.

modelo autorregresivo
Modelo en el que la variable endógena se explica por variables exógenas y por variables endógenas retardadas.

modelo autorregresivo y de retardos distribuidos
Modelo en el que la variable endógena se explica por variables exógenas, exógenas retardadas y endógenas retardadas.

modelo de caja negra
Modelo en el que las variables explicativas y los retardos están asociados, es decir, no están determinados a partir de la teoría económica, sino en exclusiva a partir de los datos.

modelo de retardos distribuidos
Modelo en el que la variable endógena se explica por variables exógenas y exógenas retardadas.

modelo dinámico
Modelo en el que se produce una relación no contemporánea con las variables.

modelo integrado
Modelo de ecuaciones simultáneas en el que las variables endógenas se explican por otras variables endógenas y los términos de perturbación de las diferentes ecuaciones están correlacionados entre sí. Ni la matriz **B** es diagonal o triangular, ni la matriz Σ es diagonal.

modelo multiecuacional aparentemente no relacionado
Modelo de ecuaciones simultáneas, formado por varias ecuaciones, en las que no hay relación directa alguna con las variables endógenas del modelo, pero sí que hay relación indirecta (por medio de la correlación que se produce entre los términos de perturbación de las diferentes ecuaciones). La matriz **B** es diagonal, pero la Σ no lo es.

modelo multiecuacional no relacionado
Modelo formado por varias ecuaciones en el que no hay ninguna relación, ni directa ni indirecta, con las variables endógenas del modelo. Las matrices **B** de parámetros y Σ (de varianzas y covarianzas) son diagonales.

modelo recursivo
Modelo de ecuaciones simultáneas en el que se produce una causalidad unidireccional entre las variables endógenas del modelo y en el que los términos de perturbación de las distintas ecuaciones no están correlacionados. La matriz **B** es triangular y la matriz Σ, diagonal.

multiplicador contemporáneo
Valor en el que se modifica la variable endógena en el momento t_0 ante una modificación unitaria de la variable exógena también en t_0.

multiplicador total
Suma de todos los multiplicadores una vez transcurridos j periodos y el contemporáneo. Por lo tanto, ofrece como resultado el valor total en el que se modifica la variable endógena ante una modificación unitaria de la variable exógena en t_0.

multiplicativo una vez transcurridos *j* periodos
Valor en el que se modifica la variable endógena en el momento $t_0 + j$ ante una modificación unitaria de la variable exógena en t_0.

retardo mediano
Retardo en el que se alcanza el 50% de la variación total que se produce en la variable endógena ante una variación unitaria en la variable exógena.

retardo medio
Media ponderada de todos los coeficientes del polinomio $D(L) = B(L)/A(L)$. Cuanto mayor sea, más importante será la contribución de los periodos alejados en el tiempo en el comportamiento de la variable endógena.

teorema de Mann-Wald
Teorema que asegura la consistencia de los estimadores, si se cumplen una serie de supuestos iniciales.

variables instrumentales
Método de estimación que asegura la consistencia de los estimadores, que está basado en el uso de una matriz de instrumentos **W** formada por variables no correlacionadas con el término de perturbación, pero correlacionadas con las variables explicativas iniciales.

Bibliografía

Gujarati, D.N. (1993). *Econometría* (cap. 14 a 17). México: McGraw-Hill.

Johnston, J. (1987). *Métodos de Econometría* (cap. 9 y 11). Barcelona: Vicens Vives.

Novales, A. (1993). *Econometría* (2.ª edición; cap. 9, 17 y 18). Madrid: McGraw-Hill.