Ones electromagnètiques

Equacions de Maxwell i ones electromagnètiques

Antoni Pérez i Navarro

PID_00166266

UOC
Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

Índex

Introducció 5

Objectius 8

1. Equacions de Maxwell 9
1.1. Resum de les lleis de Maxwell 10
1.2. Incompletesa de la llei d'Ampère 12
1.3. El corrent de desplaçament 15
1.4. Les equacions de Maxwell completes 21
1.5. Propagació del camp electromagnètic 22
1.6. L'equació d'ona 24
1.7. Funcions de vàries variables 25
1.8. Solució de l'equació d'ona 27
1.8.1. Caràcter vectorial de les ones electromagnètiques 29

2. Ones electromagnètiques 32
2.1. Què és una ona? 32
2.2. Descripció d'una ona 36
2.2.1. El front d'ona 37
2.2.2. La longitud d'ona λ i el número d'ona k 38
2.2.3. La freqüència angular ω i el període T 40
2.2.4. L'amplitud $\vec{E}_0$ i $\vec{B}_0$ 43
2.2.5. La fase 43
2.2.6. Diverses formes d'escriure els camps elèctric i magnètic 45
2.3. Ones harmòniques, planes i monocromàtiques 47
2.3.1. Ones harmòniques 47
2.3.2. Ones planes 48
2.3.3. Ones monocromàtiques 49
2.4. Classificació de les ones electromagnètiques 49

3. Problemes resolts 53
3.1. Enunciats 53
3.2. Solucions 53

Resum 60

Exercicis d'autoavaluació 61

Solucionari 63

Glossari 63

Bibliografia 65

Introducció

En els mòduls "Electrostàtica" i "Magnetostàtica i inducció electromagnètica", heu vist diverses lleis i comportaments dels camps elèctric i magnètic. En el primer mòdul heu vist la llei de Gauss i, en el segon, la llei d'Ampère, la llei de Faraday-Lenz i la llei de Gauss per al camp magnètic. De fet, aquestes lleis no van aparèixer de cop, sinó que es van anar elaborant al llarg de més de deu anys.

Ampère va publicar les seves observacions sobre electricitat i magnetisme entre el 1822 (quan va publicar *Recueil d'observations électro-dynamiques* ["Col·lecció d'observacions sobre electrodinàmica"]) i el 1827 (a la seva *Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience* ["Teoria matemàtica dels fenòmens electrodinàmics, deduïda exclusivament a partir dels experiments"]). Gauss va formular la seva llei el 1835, tot i que no es va publicar fins el 1867. Faraday i Henry van descobrir, independentment i pràcticament alhora, la inducció electromagnètica. Tanmateix, atès que el treball de Faraday es va publicar abans, és aquest el nom que fem servir per a a llei d'inducció. Malgrat tot, Faraday es va limitar a donar el mòdul de la fem induïda i va ser Lenz qui, el 1834, va donar la interpretació física al signe del corrent induït: és el signe negatiu que apareix a la llei de Faraday-Lenz.

Teorema de Gaus

El que hem vist en el mòdul "Electrostàtica" és la llei de Gauss aplicada a electromagnetisme. Aquesta és, però, només una de les aplicacions del teorema de Gauss, que és un teorema matemàtic fonamental en geometria diferencial.

Heinrich Friedrich Emil Lenz

Heinrich Friedrich Emil Lenz (Dorpat, 12 de febrer de 1804 - Roma, 10 de febrer de 1865). Químic, físic i matemàtic estonià. Se'l coneix per haver descobert en quin sentit es produeix el corrent induït. És per això que a la llei de Faraday també se la coneix com a llei de Faraday-Lenz.

Tanmateix, les lleis que s'anaven deduint es consideraven equacions que satisfeien o bé el camp eletrostàtic o bé el camp magnètic. Només en el cas de la llei de Faraday veiem que hi ha una relació explícita entre ambdós. Va ser Maxwell qui es va adonar que, en realitat, aquesta relació no era una curiositat sinó que era més profunda del que semblava *a priori*. Va ser ell qui va descobrir que el camp elèctric i el camp magnètic estaven relacionats i constituïen el camp electromagnètic. Amb aquesta afirmació va unificar dos camps que, fins aleshores, havien estat separats, i les diverses equacions que hem vist van esdevenir les equacions de Maxwell. Va ser el 1873 quan van aparèixer per primera vegada en la seva forma moderna*, publicades en *A Treatise on Electricity and Magnetism* ("Tractat d'electricitat i magnetisme").

*** Quan diem que van aparèixer les lleis de Maxwell en forma moderna, ho diem des d'un punt de vista conceptual. La notació actual, amb vectors, etc. és posterior i es deu a Oliver Heaviside (18 de maig 1850 - 3 de febrer de 1925).**

Aquest nou enfocament de Maxwell no va ser un simple exercici teòric, sinó que va portar a una sèrie de descobriments cabdals tant per a la ciència en general com per a la nostra vida diària en particular. Perquè us en feu una idea, de les lleis de Maxwell deriven disciplines com la telecomunicació o l'electrònica. Per tant, no són només un element d'estudi, sinó que són un dels pilars de la nostra civilització.

Ja veieu, doncs, que si haguéssim d'estudiar les lleis de Maxwell a fons i totes les seves conseqüències potser no acabaríem mai i, per tant, no les podem

abraçar totes en l'espai d'aquest mòdul. Ens centrarem, aleshores, només en una i, així i tot, l'estudiarem de forma molt bàsica: les ones electromagnètiques.

Fins ara, en els mòduls "Magnetostàtica i inducció electromagnètica" i "Electrostàtica" hem obtingut expressions que ens permeten calcular els camps elèctric i magnètic per a diverses distribucions de càrregues i de corrents. Fixeu-vos, però, en què és el que fèiem: fèiem el càlcul i dèiem que ja teníem el camp a tot l'espai. A tot l'espai! Vol dir això que si posem una càrrega en un punt, instantàniament tot l'univers, fins i tot les galàxies més llunyanes, notarà la presència del camp que crea aquesta càrrega?

La resposta a aquesta pregunta és que no. El que passa és que tant el camp elèctric com el magnètic (el que en direm *camp electromagnètic*) es propaguen a una velocitat finita i, a més, ho poden fer en el buit! Per tant, el camp que crea la nostra càrrega no apareix instantàniament a tot l'univers, sinó que surt de la càrrega i comença a allunyar-se'n. Ho fa en forma del que se'n diu *ones electromagnètiques*. Aquestes ones són un element clau de la nostra societat o podríem dir, fins i tot, de la nostra civilització: les ones de ràdio, les ones del telèfon mòbil, etc. són ones electromagnètiques.

Com hem dit, però, el camp electromagnètic es desplaça a una velociat finita i ho fa en forma d'ones electromagnètiques. Per tant, estem dient que aquestes també es desplaçaran a velocitat finita. Aquesta velocitat és, en el buit, igual a $2{,}9979 \cdot 10^8$ m/s, que resulta que coincideix amb la velocitat de la llum.

> Aquest resultat és, si més no, curiós, i va portar Maxwell a afirmar, el 1864, en un article titulat *A dynamical theory of the electromagnetic field* ("Una teoria dinàmica del camp electromagnètic"), que:
>
> "L'acord dels resultats sembla mostrar que la llum i el magnetisme són manifestacions d'una mateixa substància, i que la llum no és més que una perturbació electromagnètica que es propaga mitjançant el camp d'acord amb les lleis electromagnètiques."

I efectivament, en Maxwell tenia raó: la llum no és res més que una forma d'ona electromagnètica.

Ja veieu, doncs, que el mòdul ens portarà des dels fonaments de l'electromagnetisme fins a les ones electromagnètiques. L'estructura serà ben bé aquesta. En el primer apartat, dedicat a les lleis de Maxwell, reescriurem aquestes lleis i veurem que, en realitat, no les havíem vist completes. Per aquesta raó n'haurem de completar una, la llei d'Ampère i, en completar-la, podreu veure, des d'un punt de vista qualitatiu, que permet que els camps electromagnètics es puguin desplaçar (el que en direm *propagar*) pel buit. Tot seguit veurem que, a partir de les equacions de Maxwell podem veure que els camps es poden propagar en forma d'ona i acabarem aquesta primera part escrivint els camps elèctric i magnètic en forma d'ona. Això sí, d'un tipus d'ona que ens simplifica molt la feina: escriurem el camp només per al cas que es coneix com a ona harmònica, plana i monocromàtica.

En el segon apartat del mòdul, dedicat a la descripció de les ones electromagnètiques, entrarem més a fons en aquestes ones i veurem com les podem descriure. Per a fer-ho, definirem paràmetres com la frequència, la longitud d'ona, el període, etc. Per a acabar introduirem l'espectre electromagnètic, que ens permetrà veure que la llum és, efectivament, una forma d'ona electromagnètica.

Finalment, trobareu un tercer apartat amb un conjunt de problemes resolts amb els quals podreu practicar els conceptes apresos.

Així doncs, aquest mòdul va des dels aspectes més abstractes (les lleis de Maxwell) als més concrets (les ones electromagnètiques). Les primeres són un conjunt d'equacions que constitueixen un element cabdal de la història de la física i de la ciència i l'enginyeria actuals. Ens permeten explicar fenòmens tan aparentment dispars com per què ens arriba la llum del Sol o per què ens podem comunicar a través del telèfon mòbil. I en tots aquests fenòmens hi ha presents uns "objectes" que deriven de les lleis de Maxwell: les ones electromagnètiques, unes ones que estaran ben presents al llarg de tota la vostra titulació, ja que amb elles es pot transmetre informació.

Objectius

Els objectius que l'estudiant ha d'assolir amb aquest mòdul són els següents:

1. Mirar amb esperit crític els fonaments de l'electromagnetisme.
2. Conèixer les lleis de Maxwell i comprendre que són el fonament de l'electromagnetisme.
3. Entendre el concepte de funció de diverses variables i comprendre la diferència entre representar una ona en funció de l'espai i representar-la en funció del temps.
4. Saber què és una ona.
5. Comprendre com es propaga el camp electromagnètic en forma d'ones i entendre el concepte d'ona viatjera.
6. Entendre el concepte d'ones planes harmòniques.
7. Saber descriure una ona mitjançant la longitud d'ona i la freqüència.
8. Conèixer l'espectre electromagnètic.

1. Equacions de Maxwell

Començarem aquest mòdul pels fonaments: les **equacions de Maxwell**, que ens permetran assentar les bases de tot el que farem durant el mòdul i, sobretot, entendre el perquè del principal fenòmen que estudiarem: la propagació dels camps electromagnètics.

James Clerk Maxwell

James Clerk Maxwell (Edimburg, 13 de juny de 1831– Cambridge, 5 de novembre de 1879). Físic escocès conegut principalment per haver desenvolupat la teoria clàssica de l'electromagnetisme.

L'objectiu del mòdul no és aprendre passos i demostracions matemàtiques molt complicades, sinó saber què volen dir les equacions de Maxwell. Veureu que sovint, per tant, no farem els passos matemàtics; en canvi, convindrà que entengueu els conceptes que hi ha al darrere i que, tot sovint, es troben a aquestes equacions.

Començarem aquest apartat fent una recopilació del que ja heu estudiat. Veureu que, en realitat, en els dos mòduls anteriors heu estat treballant les equacions de Maxwell. Aquí les recopilarem i ens les mirarem com un tot. Això ens permetrà detectar una "raresa" i veurem que una d'elles està incompleta. Per a completar-la haurem d'introduir un concepte nou: el corrent de desplaçament. Fet això ja podrem veure les equacions de Maxwell completes.

Un cop les tinguem, veurem que ens permeten explicar com es poden propagar els camps elèctric i magnètic i que ambdós compleixen un tipus d'equació que es coneix com a *equació d'ona*. Aquesta és una de les equacions fonamentals de la física, ja que la compleixen tots els fenòmens ondulatoris, i en veurem una possible solució que ens ajudarà a entendre-la i, més endavant, ens ajudarà a veure el perquè del nom.

Alguns fenòmens ondulatoris s'estudien al mòdul "Mecànica: cinemàtica i dinàmica" en parlar de l'oscil·lador harmònic.

Què aprendrem?

En aquest apartat aprendreu:

- que les equacions de Maxwell no són un conjunt d'equacions aïllades, sinó que totes juntes constitueixen els fonaments de l'electromagnetisme;
- el concepte de corrent de desplaçament;
- que els camps elèctric i magnètic es poden realimenetar mútuament i que ambdós compleixen l'equació d'ona.

Què suposarem?

Suposarem que teniu assolits els coneixements dels mòduls "Electrostàtica" i "Magnetostàtica i inducció electromagnètica". En particular, suposarem:

- que sabeu què és un flux,
- que sabeu què és una integral de línia,
- que sabeu què és una integral de superfície,

- que coneixeu el camp elèctric a l'interior d'un condensador,
- que coneixeu i sabeu treballar amb les funcions trigonomètriques,
- que sabeu fer derivades parcials i derivades totals,
- que sabeu fer un producte vectorial.

1.1. Resum de les lleis de Maxwell

Per a començar, farem un recull de tot el que tenim; en particular, de quatre equacions que hem vist en mòduls anteriors, que corresponen a les equacions (o lleis) de Maxwell.

Equacions de Maxwell en forma integral

Parlem d'equacions de Maxwell en forma integral perquè hi ha una altra manera d'escriure-les: en forma diferencial. Aquesta forma queda, però, més enllà dels objectius de l'assignatura.

Les **lleis de Maxwell** en forma integral, en el buit, són:

- Llei de Gauss per al camp elèctric:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \tag{1}$$

- Llei de Gauss per al camp magnètic:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \tag{2}$$

- Llei de Faraday-Lenz:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} \tag{3}$$

- Llei d'Ampère:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{tancada}} \tag{4}$$

Els diversos elements que apareixen a les lleis de Maxwell són els següents:

- $\vec{E}$ i $\vec{B}$ són, respectivament, els camps elèctric i magnètic.
- $\oint_S \ldots d\vec{S}$ indica la integral sobre una superfície tancada, S.
- $\oint_C \ldots d\vec{l}$ indica la integral sobre una corba tancada, C.
- ϵ_0 i μ_0 són, respectivament, la permitivitat elèctrica i la permeabilitat magnètica del buit.

- Q_{int} és la càrrega tancada per una superfície gaussiana en la llei de Gauss.

- I_{tancada} és la intensitat tancada per la corba d'Ampère en la llei d'Ampère.

A més, podem definir el flux magnètic, ϕ_b, de la següent manera:

Recordeu que ϕ és la lletra grega phi, que es llegeix "fi".

$$\phi_b = \int_S \vec{B} d\vec{S} \tag{5}$$

Michael Faraday

Michael Faraday (Newington Butts, 22 de setembre de 1791 – Hampton Court, Surrey, 25 d'agost de 1867). Físic i químic anglès. Se'l coneix, entre molts altres treballs, pel seu descobriment de la inducció electromagnètica. La unitat de capacitància es denomina farad (F) en honor seu.

Aleshores, podem reescriure la llei de Faraday-Lenz de la següent manera:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\phi_b}{dt} \tag{6}$$

Repassem breument què diu cadascuna de les quatre equacions fonamentals de l'electromagnetisme, és a dir, cadascuna de les equacions de Maxwell en forma integral:

- La llei de Gauss ens està dient que el flux net de camp elèctric que travessa una superfície tancada és igual a la càrrega continguda en aquesta superfície dividida per la permitivitat del medi, ϵ que, en el cas del buit és ϵ_0. Fixeu-vos que no està parlant del camp elèctric, sinó del flux de camp elèctric. Aquesta llei ve a dir, en paraules col·loquials, que existeixen càrregues elèctriques i que aquestes són les fonts del camp elèctric.

Recordeu que ϵ és la lletra grega èpsilon, que es llegeix "èpsilon".

- La llei de Gauss per al camp magnètic ens diu el mateix que la llei de Gauss per al camp elèctric. Tanmateix, atès que no hi ha càrregues magnètiques*, el flux de camp magnètic a través d'una superfície tancada és, en aquest cas, igual a zero.

*** Si existissin càrregues magnètiques en diríem *monopols magnètics*.**

- La llei de Faraday-Lenz és clau per al que farem en aquest mòdul, i ens diu que una variació en el temps del flux de camp magnètic produeix una força electromotriu induïda, un voltatge: fixeu-vos que l'expressió $\oint_C \vec{E} d\vec{l}$ no és res més que l'expressió per al càlcul del potencial que vam trobar al mòdul "Electrostàtica". Això sí, noteu que és una integral sobre una línia tancada. Que hagi de ser tancada té sentit: per un circuit elèctric no circularà corrent si no està tancat.

Tingueu present la llei d'Ampère, que es veu al mòdul "Magnetostàtica i inducció electromagnètica".

- La Llei d'Ampère ens està dient que la circulació de camp magnètic, és a dir, el camp magnètic sobre una determinada corba tancada, serà igual a la intensitat que travessa aquesta corba. Aquesta llei també conté una informació important: ens està afirmant que una intensitat genera un camp magnètic, és a dir, ens està relacionant el camp magnètic amb les seves fonts.

Recordeu

Els camps magnètics es creen a partir d'intensitats de corrent elèctric, que no són res més que càrregues elèctriques en moviment.

En resum, les dues primeres equacions de Maxwell, les lleis de Gauss per al camp elèctric (equació 1) i per al camp magnètic (equació 2) ens parlen de les fonts del camp elèctric i magnètic i ens diuen que existeixen les càrregues elèctriques però que no existeixen les magnètiques.

La tercera, la llei de Faraday-Lenz (equació 3), i la quarta, la llei d'Ampère (equació 4), parlen de les circulacions del camp elèctric i del camp magnètic. El camp elèctric està relacionat amb la variació del flux de camp magnètic. En canvi, la circulació del camp magnètic només està relacionada amb la seva font, la intensitat.

Producte vectorial

Recordeu que el producte vectorial de dos vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$ és $\vec{A} \times \vec{B} = A \cdot B \sin \alpha$, on α és l'angle que formen. A més, el vector resultant és perpendicular a $\vec{A}$ i a $\vec{B}$ i va en la direcció que indica la regla de la mà dreta en dur el primer vector, $\vec{A}$, sobre el segon, $\vec{B}$.

Veiem, doncs, que si el flux de camp magnètic varia amb el temps, es produeix un camp elèctric; però, en canvi, si el flux de camp elèctric varia amb el temps, sembla que no es produeix un camp magnètic. Com a mínim les equacions no ens diuen res sobre aquest fet. No ho trobeu estrany? Què té el camp magnètic que és tan especial? Per què podem produir un camp elèctric a partir del camp magnètic, però no a la inversa? Podria ser que aquestes equacions tan importants estiguessin malament?

La resposta a totes aquestes preguntes està inclosa, de fet, en una resposta afirmativa a la darrera pregunta: efectivament, les equacions estan malament! Després d'insistir tant en la seva importància, ara resulta que fallen! Bé, hem exagerat una mica; de fet no és que estiguin malament, sinó que n'hi ha una que està incompleta. Tot seguit us mostrarem aquesta incompletesa i ho farem amb un element tan real i tan comú com un condensador. Veureu que, amb l'equació completa, serem capaços de produir un camp magnètic a partir de variacions del flux de camp elèctric.

1.2. Incompletesa de la llei d'Ampère

Hem dit que les equacions de Maxwell (equacions 1, 2, 3 i 4) estaven incompletes, i ens ho ha fet pensar veure que una variació del flux de camp magnètic és capaç de produir un camp elèctric, però que no passa a la inversa. Això ja ens pot donar una pista de quina equació cal corregir.

André-Marie Ampère

André-Marie Ampère (Poleymieux-lès-Mont-d'Or, 20 de gener de 1775 – Marsella, 10 de juny de 1836), físic i matemàtic francès. Se'l coneix per haver descobert les interaccions mútues entre conductors travessats per corrents elèctrics. La unitat d'intensitat es denomina ampere (A) en honor seu.

Fixeu-vos que, en la equació 3, la llei de Faraday-Lenz, tenim que la variació del flux de camp magnètic està relacionada amb la circulació del camp elèctric. Podríem esperar, per tant, que una variació del flux de camp elèctric estigués relacionada amb la circulació del camp magnètic, és a dir, sembla que la llei d'Ampère (equació 4) podria estar incompleta. Vegem-ho!

Al mòdul "Magnetostàtica i inducció electromagnètica" es treballa amb la llei d'Ampère.

Atès que volem veure si la llei d'Ampère està incompleta, comencem mirant aquesta llei i recordant com hi treballem. Segons la llei d'Ampère, si agafem una corba tancada, qualsevol, la integral del camp magnètic sobre aquesta corba serà μ_0 multiplicada per la intensitat de corrent que la travessa. És ben

μ_0 es llegeix "mu sub zero".

bé el que diu l'equació 4. Ara bé, què vol dir que la intensitat "travessa" una corba? Més explícitament, això vol dir que travessa la **superfície tancada per la corba**. A la figura 1a teniu representat un exemple d'aquesta situació: una intensitat I i una corba d'Ampère que l'envolta, amb la superfície, S_1, que tanca aquesta corba. Fixeu-vos com la intensitat travessa la superfície; és això el que volem dir quan diem que la intensitat "travessa la corba".

Figura 1. Corba d'Ampère

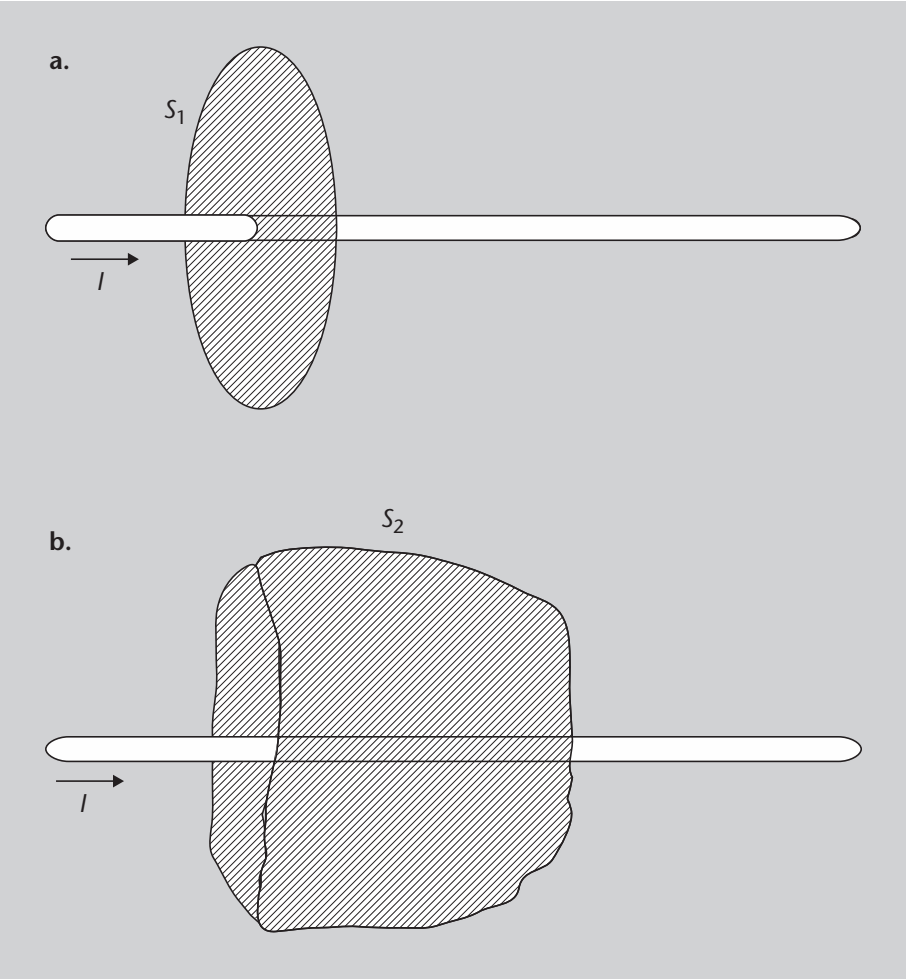


Figura 1

Corba d'Ampère en un fil pel qual circula una intensitat. S'hi indica quina és la superfície que travessa la intensitat.
a. S'agafa la superfície S_1, que és la més petita tancada per la corba.
b. S'agafa una superfície S_2 qualsevol, tancada per una corba qualsevol al voltant de la intensitat I.

Possiblement, si us haguéssim demanat que dibuixéssiu la superfície tancada per la corba d'Ampère de la figura, haguéssiu dibuixat la que teniu a la figura 1a. Ara bé, és la superfície que hem pintat l'única possible? Fixeu-vos que la llei d'Ampère només parla de la intensitat que travessa la corba, però no parla de com ha de ser la superfície tancada per aquesta corba. Per tant, podríem haver triat una superfície, S_2, com la que teniu a la figura 1b.

En els problemes que heu fet al mòdul "Magnetostàtica i inducció electromagnètica" sobre la llei d'Ampère, podíeu triar una superfície o una altra. En qualsevol dels dos casos, la llei d'Ampère (equació 4) ens diu que la circulació del camp magnètic sobre la corba d'Ampère ($\oint \vec{B}d\vec{l}$) serà la intensitat I

que travessa la superfície tancada per la corba (S_1 o S_2 a la figura 1, tant és) multiplicada per la permeabilitat del medi, en aquest cas, del buit, μ_0:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I \tag{7}$$

Ara bé, imagineu que tenim un circuit amb un condensador. Ja veieu que no és cap situació estrambòtica: obriu qualsevol ràdio o qualsevol aparell electrònic i trobareu condensadors. Si repetim la figura 1, però posem un condensador al circuit, trobarem el cas de la figura 2.

Figura 2. Comparació de dues superfícies tancades per una corba d'Ampère

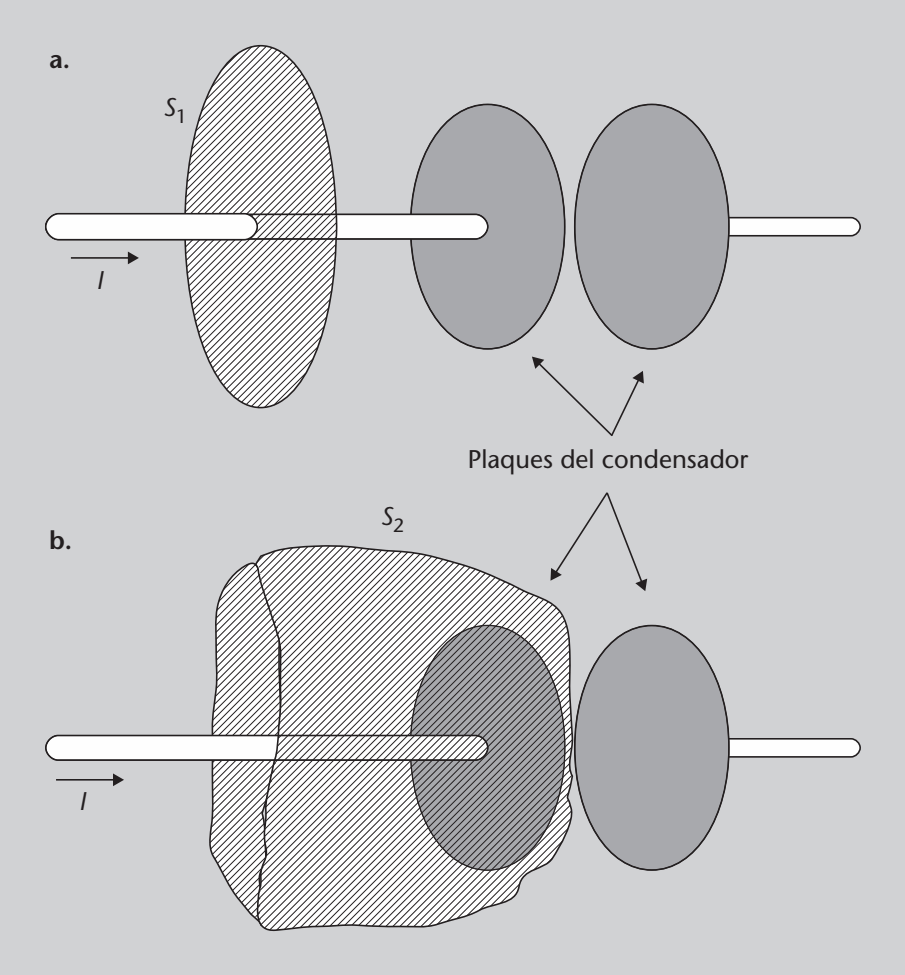


Figura 2

Corba d'Ampère en un circuit. S'hi indica quina és la superfície que travessa la intensitat.
a. S'agafa la superfície S_1, que és la més petita tancada per la corba.
b. S'agafa una superfície S_2 que passa entre les plaques del condesador, tancada per una corba qualsevol al voltant de la intensitat I.

Apliquem ara la llei d'Ampère per a cadascuna de les superfícies. Potser pensareu que no cal, perquè hauria de sortir el mateix. Segur? Vegem-ho!:

- Superfície 1. El resultat serà el mateix que hem vist a l'equació 7:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I \tag{8}$$

- Superfície 2. En aquest cas no hi ha cap intensitat que travessi la superfície (fixeu-vos que està entre les plaques del condensador), per tant tenim:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = 0 \tag{9}$$

Surten dos resultats diferents! Hauria hagut de sortir el mateix, ja que la llei d'Ampère no hauria de dependre de la superfície que triem com a superfície tancada per la corba. Què ha passat aquí?

Per a respondre aquesta pregunta veurem que la llei d'Ampère és incompleta i cal que li afegim un terme nou. Veurem tot seguit quin és aquest terme.

1.3. El corrent de desplaçament

Com podem saber quin terme manca a la llei d'Ampère (equació 4)? Per on comencem? Com podem trobar en una equació un terme que no sabem què és? Bé, tenim algunes pistes:

1) L'element nou que hem introduït i que ens ha fet veure que alguna cosa no anava bé, és el condensador. Per tant, sembla raonable suposar que quan el condensador no hi era tot estava bé.

2) El resultat no pot dependre d'una tria arbitrària nostra, per la qual cosa les equacions 8 i 9 haurien de ser iguals i, si a més a més hem dit que quan no teníem el condensador el resultat era correcte, podem dir que el terme que ens falta a l'equació 9 haurà de ser igual a $\mu_0 I$.

De tot això podem deduir que el que ja teníem està bé i que ens manca sumar un terme. Com que, a més, sabem que haurà de ser del tipus $\mu_0 I$, les unitats del nou terme hauran de ser les mateixes que té $\mu_0 I$, ja que només podem sumar termes amb les mateixes unitats. Així doncs, el nou terme haurà de ser de la forma:

$$\mu_0 I_D \tag{10}$$

on hem simbolitzat la intensitat amb I_D en lloc de I per a distingir-la de la que hi ha a la llei d'Ampère (equació 4). De fet, aquesta intensitat, la de l'equació 10, es diu **corrent de desplaçament**. Per tant, podem dir que la llei d'Ampère completa haurà de ser de la forma:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 I_D \tag{11}$$

Amb aquest nou corrent, en el cas de la superfície 2 tindríem que l'equació 9 queda:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_D \tag{12}$$

Si $I_D = I$ ja tenim que les equacions 9 i 8 són iguals. Amb això el problema estaria solucionat. Tanmateix, sembla que ens ho haguem tret de la mànigа. Què és aquest corrent de desplaçament? Existeix realment? I si existeix realment, com es calcula?

Per a respondre aquestes preguntes hem de tenir present la situació en la qual l'hem trobat. L'hem "vist" quan hem pres la superfície 2 (S_2) de la figura 2. Era com si la intensitat hagués desaparegut de cop i volta quan ha arribat a les plaques del condensador. Què ha passat amb aquesta intensitat? No pot haver desaparegut així com així. Deu haver-hi alguna cosa que l'ha substituït i que està relacionada amb la intensitat. I, efectivament, hi és.

Sabem que entre les plaques d'un condensador hi ha un camp elèctric, el mòdul del qual és:

El camp elèctric entre les plaques d'un condensador s'estudia al mòdul "Electrostàtica".

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{13}$$

on σ és la densitat de càrrega superficial que hi ha a les plaques. El camp, a més, és perpendicular a les plaques, com podeu veure a la figura 3.

Figura 3. Camp a l'interior d'un condensador de plaques circulars de radi R

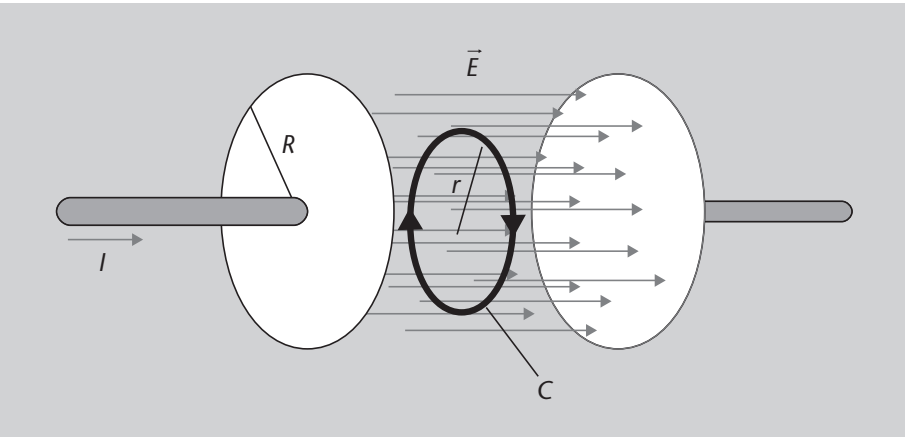


Figura 3

Podeu veure que el camp va de la placa positiva a la negativa i que les línies de camp són paral·leles entre si.

Ara bé, segons si les plaques són més grans o més petites, hi haurà més o menys línies de camp. Per tant, més important que el camp elèctric és, en aquest cas, el flux del camp elèctric, ϕ_e. Per a veure la idea que hi ha al darrere, agafarem plaques rodones de radi R com les que teniu a la figura 3, ja que en sabem calcular l'àrea, i calcularem el flux de camp elèctric.

El flux d'una magnitud és la integral d'aquesta magnitud sobre la superfície en la qual volem calcular-lo. En el cas del camp elèctric serà:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} d\vec{S} \tag{14}$$

Recordeu que ϕ és la lletra grega phi, que es llegeix "fi".

Però, atès que el camp entre les plaques d'un condensador és perpendicular a aquestes plaques i, per tant, paral·lel al vector superfície, com podeu veure a la figura 4, tenim que el producte escalar serà el producte de mòduls:

$$\phi_e = \int_S E dS \tag{15}$$

Producte escalar

El producte escalar de dos vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$ és $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\alpha$, on α és l'angle que formen $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Si els vectors són paral·leles, $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$ i, per tant, $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B$.

Figura 4. Camp i vector superfície a l'interior d'un condensador

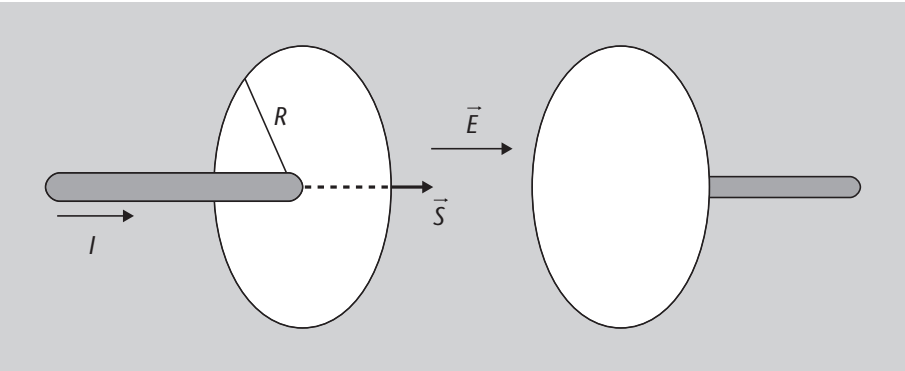


Figura 4

Camp i vector superfície a l'interior d'un condensador de plaques planes paral·leles i circulars de radi R. Podeu veure que el vector camp $\vec{E}$ i el vector superfície $\vec{S}$ són paral·lels.

Finalment, atès que el camp és constant dins de les plaques del condensador (vegeu l'equació 13), pot sortir fora de la integral:

$$\phi_e = E \int_S dS = E \cdot S \tag{16}$$

Recordeu

La integral d'una diferencial de la mateixa variable que s'està integrant és, simplement, aquella variable. És a dir:

$$\int dx = x$$

El camp el tenim a l'equació 13 i la superfície d'un cercle* és πR^2. Així obtenim:

$$\phi_e = E \cdot S = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \pi R^2 = \frac{\sigma \pi R^2}{\epsilon_0} \tag{17}$$

*** Recordeu que hem agafat un condensador de plaques circulars de radi R.**

Recordeu que l'àrea del cercle és: $A_{cercle} = \pi R^2$, on R és el radi.

D'altra banda, la densitat de càrrega, σ, multiplicada per l'àrea, que és πR^2, és la càrrega total:

$$\phi_e = \frac{\sigma \pi R^2}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{18}$$

Recordeu

Quan tenim una densitat de càrrega superficial, σ, constant, la càrrega total Q és $Q = \sigma S$, on S és la superfície total en què hi ha densitat de càrrega.

És important que no perdeu de vista on volem arribar: volem saber com calcular el nou terme I_D de l'equació 11. És a dir, volem trobar una intensitat. El que estem fent ara és veure com la podem trobar. Per a fer-ho hem vist que la

intensitat que arriba al condensador es transforma en flux de camp elèctric, i a l'equació 18 veiem que aquest flux està relacionat amb la càrrega. Però, hi ha alguna relació entre la càrrega i la intensitat?

Doncs sí! I la relació està en la mateixa definició d'intensitat:

Tingueu present la definició d'intensitat al mòdul "Electrostàtica".

$$I_D = \frac{dQ}{dt} \tag{19}$$

Aleshores, si aïllem la càrrega de l'equació 18 tenim:

$$Q = \phi_e \epsilon_0 \tag{20}$$

i si substituïm la Q obtinguda a l'equació 19, trobem una expressió per a la I_D:

$$I_D = \frac{d(\epsilon_0 \phi_e)}{dt} \tag{21}$$

En el cas de materials isòtrops, homogenis i lineals (els que ens ocupen, vaja), la ϵ_0 pot sortir de la derivada i arribem a la definició de corrent de desplaçament:

Vegeu el mòdul "Electrostàtica" per a saber com és un material isòtrop, homogeni i lineal (i. h. l.)

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \tag{22}$$

Material isòtrop, homogeni i lineal (i. h. l.)

Si un material es isòtrop les propietats del material són independents de la direcció; si és homogeni, les propietats són independents de la posició; i si es lineal, les propietats són directament proporcionals al camp aplicat (és a dir, varien linealment amb el camp).

I ja tenim com calcular el corrent de desplaçament! Per tant, si substituïm l'equació 22 en la 11, la llei d'Ampère queda de la manera següent:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I + \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \tag{23}$$

És a dir, la circulació del camp magnètic, $\oint \vec{B} d\vec{l}$, depèn de la intensitat que travessa la corba d'Ampère i del corrent de desplaçament, I_D:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{tancada}} + \mu_0 I_D \tag{24}$$

En materials isòtrops, homogenis i lineals (i. h. l.) es defineix el corrent de desplaçament, I_D, com la derivada del flux de camp elèctric, ϕ_e, respecte al temps dividida per la permitivitat del medi (ϵ_0 en el cas del buit):

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \tag{25}$$

on:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} d\vec{S} \tag{26}$$

i $\vec{E}$ és el camp elèctric i $\vec{S}$ la superfície a través de la qual calculem aquest flux.

Exemple de càlcul del corrent de desplaçament

Tenim un camp elèctric variable que és donat per l'expressió:

$$\vec{E} = 5\sin(400t)\vec{i}\ \text{N/C} \tag{27}$$

a) Calculeu el corrent de desplaçament degut a aquest camp sobre un quadrat d'1 m de costat col·locat perpendicularment al camp (és a dir, en el pla *yz*).

b) Quin seria el corrent de desplaçament sobre el quadrat si aquest estigués en el pla *xy*?

c) Quin seria el corrent de desplaçament sobre el quadrat si aquest estigués en un pla que formés 45° amb el pla *xy*?

Solució

En els tres apartats hem de trobar el corrent de desplaçament. L'estratègia per a fer-ho és:

1) Trobar el flux de camp elèctric amb l'equació 26.

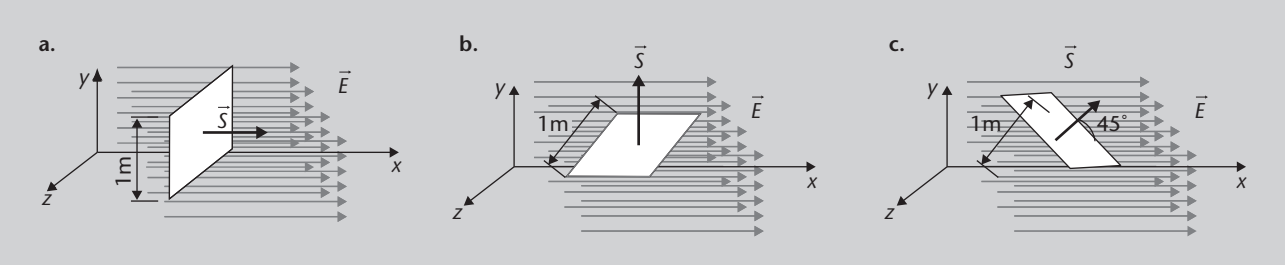
2) Derivar el flux i dividir per ϵ_0, tal com indica l'equació 25.

Teniu les tres situacions que es demanen al problema representades a la figura 5.

Figura 5

Les tres situacions que es demanen en l'exemple. S'hi representen els vectors camp $\vec{E}$ i superfície $\vec{S}$.
a. La superfície és perpendicular al camp (i, per tant, el vector superfície és paral·lel al camp).
b. La superfície és paral·lela al camp (i, per tant, el vector superfície és perpendicular al camp);
c. La superfície i el camp formen un angle de 45°.

Figura 5. Situacions de l'exemple de càlcul del corrent de desplaçament



Disposem-nos a solucionar, doncs, cada apartat.

a) En el primer cas tenim la situació de la figura 5a, en què el vector superfície i el vector camp elèctric són paral·lels. Comencem calculant el flux a través d'aquesta superfície mitjançant l'expressió 26:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{28}$$

Atès que la superfície no està corbada, independentment de quin $d\vec{S}$ consideren, sempre anirà en la direcció de $\vec{S}$. Per tant, $\vec{E}$ i $d\vec{S}$ són paral·lels (formen un angle de 0°) i, si recordeu com es calcula el producte escalar i que el cosinus de 0 és igual a 1, trobem que:

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos 0° = E \cdot dS \tag{29}$$

Recordeu

El producte escalar de dos vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$ que formen un angle α és: $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\alpha$.

Si substituïm aquest resultat a l'equació 28, trobem:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \cdot dS \tag{30}$$

Ara fixeu-vos bé que estem fent una integral sobre la superfície, i no sobre el temps. Això és important, perquè el camp elèctric de l'enunciat, donat per l'expressió 27, varia en el temps però no en l'espai. Per tant, és el mateix en tota la superfície. En conseqüència, podem treure el camp de la integral de l'equació 30:

$$\phi_e = \int_S E \cdot dS = E \int_S dS \tag{31}$$

Però la integral de dS és simplement S. Per tant:

$$\phi_e = E \cdot S \tag{32}$$

Recordeu

La integral d'una diferencial de la mateixa variable que s'està integrant és, simplement, aquella variable. És a dir:

$$\int dx = x$$

L'expressió de E la traiem de l'equació 27 (i fixeu-vos que només en necessitem el mòdul). Per a aconseguir la de S només necessitem aplicar que l'àrea d'un quadrat és el producte dels costats: $S = 1\ \mathrm{m}^2$:

$$\phi_e = E \cdot S = 5\sin(400t) \cdot 1 = 5\sin(400t)\ \mathrm{N/C} \cdot \mathrm{m}^2 \tag{33}$$

I ja tenim el flux. El pas següent és calcular el corrent de desplaçament amb l'expressió 25 i fent servir el resultat que acabem d'obtenir (equació 33):

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} = 5 \cdot 400\cos(400t) = 2.000\cos(400t)\ \mathrm{A} \tag{34}$$

Recordeu

$\frac{d}{dx}\sin(f(x)) = \frac{df(x)}{dx}\cos(f(x))$.

I ja tenim el corrent de desplaçament.

b) En aquest cas fixeu-vos que el procediment és exactament igual que a l'apartat *a*. La diferència està en l'angle que formen $\vec{E}$ i $d\vec{S}$. Ara formen un angle de 90°, com podeu veure a la figura 5b. Per tant, en calcular el producte de l'equació 29, tenim:

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos 90^\circ = 0 \tag{35}$$

I per tant el flux queda:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{36}$$

El corrent de desplaçaments serà, en conseqüència, també 0:

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} = 0 \tag{37}$$

Fem ara el tercer apartat i després ja comentarem una mica els resultats.

c) En aquest cas el procediment torna a ser el mateix, i, per tant, ens limitarem a indicar els resultats. Aquest cop la diferència és que $\vec{E}$ i $d\vec{S}$ formen un angle de 45°. L'equació 29 queda aleshores:

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos 45 \tag{38}$$

L'equivalent de l'equació 33 serà ara:

$$\phi_e = E \cdot S = 5\sin(400t) \cdot 1\cos 45^\circ = 5\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(400t)\ \mathrm{N/C} \cdot \mathrm{m}^2 \tag{39}$$

on hem fet servir que $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

El corrent de desplaçament serà, llavors (l'equivalent de l'expressió 34):

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} = 5 \cdot 400\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(400t) = 1.000\sqrt{2}\cos(400t)\ \mathrm{A} \tag{40}$$

Ja tenim completats els tres càlculs. Fixeu-vos que el resultat que ens dóna un valor més gran és el de l'apartat *a*, equació 34, quan $\vec{E}$ i $d\vec{S}$ són paral·lels; mentre que el més petit (que és 0) és a l'apartat *b*, equació 37, quan $\vec{E}$ i $d\vec{S}$ són perpendiculars. Això és a causa del producte escalar que hi ha a la definició del flux (equació 28). Si mireu les expressions 29, 35 i 38, podeu veure que és l'angle que formen $\vec{E}$ i $d\vec{S}$ el que determina que el corrent de desplaçament sigui més gran o més petit. Una manera d'expressar-ho seria dir que només contribueix al corrent de desplaçament la part de $\vec{E}$ que està en la direcció del vector superfície.

Arribats a aquest punt ja podem escriure les equacions de Maxwell completes.

1.4. Les equacions de Maxwell completes

Després d'haver completat la llei d'Ampère podem tornar a escriure les lleis de Maxwell. Com veureu, les equacions 1, 2 i 3 queden igual, i només canvia l'equació 4.

Les Lleis de Maxwell completes en forma integral en el buit, per a materials isòtrops, homogenis i lineals, són:

- Llei de Gauss per al camp elèctric:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \tag{41}$$

- Llei de Gauss per al camp magnètic:

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0 \tag{42}$$

- Llei de Faraday-Lenz:

$$\oint_C \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S} \tag{43}$$

- Llei d'Ampère:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{tancada}} + \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}d\vec{S} \tag{44}$$

Els diversos elements de les lleis de Maxwell són:

- $\vec{E}$ i $\vec{B}$ són, respectivament, els camps elèctric i magnètic.
- $\oint_S \ldots d\vec{S}$ indica la integral sobre una superfície tancada, S.
- $\oint_C \ldots d\vec{l}$ indica la integral sobre una corba tancada, C.
- μ_0 és la permeabilitat magnètica del buit.
- ϵ_0 és la permitivitat elèctrica del buit.
- Q_{int} és la càrrega tancada per la superfície gaussiana en la llei de Gauss.
- I_{tancada} és la intensitat tancada per la corba d'Ampère en la llei d'Ampère.

La integral sobre una superfície tancada s'estudia al mòdul "Electrostàtica" i la integral sobre una corba tancada, al mòdul "Magnetostàtica i inducció electromagnètica".

Integral tancada

Recordeu que el símbol $\oint$ indica integral tancada. Així, quan trobem $\oint_C$ vol dir que hem de fer la integral a tota una corba tancada; i quan trobem $\oint_S$ vol dir que hem de fer la integral a tota una superfície tancada.

A més, es poden fer les definicions següents:

- Flux elèctric, ϕ_e:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} d\vec{S} \tag{45}$$

- Flux magnètic, ϕ_b:

$$\phi_b = \int_S \vec{B} d\vec{S} \tag{46}$$

- Corrent de desplaçament, I_D:

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} d\vec{S} \tag{47}$$

Fixeu-vos que amb aquestes equacions, si el flux de camp magnètic varia en el temps, genera un camp elèctric (llei de Faraday-Lenz, equació 43), però ara, a mes a més, si el flux de camp elèctric varia en el temps, genera un camp magnètic (llei d'Ampère, equació 44). Tot seguit, al subapartat següent veurem un exemple matemàtic de com poder aconseguir aquesta situació.

1.5. Propagació del camp electromagnètic

Com hem dit al final del subapartat anterior, fixeu-vos en dos fets:

- De la llei de Faraday-Lenz (equació 43) podeu veure que un camp magnètic que varia en el temps pot generar un camp elèctric.
- De la llei d'Ampère (equació 44) podeu veure que un camp elèctric que varia en el temps pot generar un camp magnètic.

Noteu que aquí ens hem centrat en el cas en què els camps elèctric i magnètic varien en el temps. De fet, el que ha de variar en el temps és el flux, per tant també podria ser que els camps fossin constants i el que variés fos el flux o, dit d'una altra manera, la posició relativa de la superfície sobre la qual calculem

el flux, amb el camp (penseu en una espira girant en un camp magnètic constant, per exemple).

Amb aquests dos fets ja n'hi ha prou perquè els camps elèctric i magnètic es puguin propagar. Per a veure-ho, imagineu-vos una situació en què el camp magnètic varia amb el temps, de tal manera que el camp elèctric que genera segons la llei de Faraday (equació 43) també varia en el temps; és a dir, que el camp magnètic està donat per una funció que depèn del temps i que, en derivar-la, continua depenent del temps.

Llavors, si el camp elèctric obtingut varia en el temps, generarà, al seu torn, un camp magnètic, seguint la llei d'Ampère (equació 44). Si aquest camp magnètic generat també depèn del temps, és a dir, la derivada del camp elèctric torna a dependre del temps, tornarem a tenir la situació inicial i tornarem a començar el cicle. Us adoneu de què vol dir aquesta situació? Vol dir que els camps elèctric i magnètic s'aniran realimentant indefinidament.

Fixeu-vos què ha de passar perquè es produeixi aquesta situació: que la funció que descriu un camp depengui del temps, i que ho faci de tal manera que la puguem anar derivant indefinidament i que sempre depengui del temps. Se us acut alguna funció així? En veurem una tot seguit, en l'exemple següent.

Exemple

Penseu una funció f que depengui d'una variable, que per a nosaltres ara serà el temps t (per tant la funció serà $f(t)$), i que es pugui anar derivant indefinidament sense que trobem mai que la derivada és 0.

Solució

Fixeu-vos per exemple en la funció següent:

$$f(t) = A\cos(\omega t) \tag{48}$$

No us preocupeu ara pel que són A o ω. Centreu-vos en la funció en si. És una funció que varia en el temps. Si la derivem respecte al temps tenim:

$$\frac{df(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t) \tag{49}$$

que també varia amb el temps. I si aquesta la tornem a derivar respecte al temps, obtenim:

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t) \tag{50}$$

Tornem a tenir un cosinus, que és la funció inicial amb què hem començat, de manera que ja tenim el cicle un altre cop. De fet, també podríem aconseguir aquesta situació amb una funció exponencial, però en el fons seria el mateix, perquè hi ha una relació directa entre la funció exponencial i les funcions trigonòmetriques.

Així doncs, ja veieu que amb un camp variable en el temps, segons una funció cosinus, ja tindríem la situació que ens demanàvem.

Recordeu

$\frac{d}{dx}(\sin(g(x))) = \frac{dg(x)}{dx}\cos(g(x))$ i $\frac{d}{dx}(\cos(g(x))) = -\frac{dg(x)}{dx}\sin(g(x))$, on $g(x)$ és una funció que depèn de x.

Recordeu

La notació $\frac{d^2f(t)}{dt^2}$ vol dir que derivem dues vegades la funció $f(t)$ respecte al temps.

Recordeu

Podem escriure una exponencial complexa com: $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$

En l'exemple anterior hem vist que una funció cosinus com la que teniu a l'equació 48 compleix els requisits perquè la puguem anar derivant indefinidament sense perdre la dependència en el temps. Per tant, com hem dit al principi de l'apartat, si passa això, els camps elèctric i magnètic es podran anar realimentant mútuament.

Ara bé, és possible aquesta situació? Es dóna a la natura? Doncs sí, i és més habitual del que podria semblar. Perquè us feu una idea de fins a quin punt és un fenomen quotidià, només us direm que la llum que ens arriba del Sol (o fins i tot de les estrelles i, de fet, tota la llum) n'és un exemple.

Hem trobat, doncs, que és possible que els camps elèctric i magnètic es vagin realimentant mútuament. Per tant, sempre que passi això, no tindrem un camp elèctric o un camp magnètic per separat, sinó que els tindrem tots dos. És per això que sovint, en lloc de referir-nos a cada camp per separat, parlarem de **camp electromagnètic**.

Ara que ja sabem com es genera el camp electromagnètic, intentem determinar com es propaga. Per a fer-ho no abandonarem les lleis de Maxwell, sinó que partirem d'una equació que se'n deriva, i que compleixen tant el camp elèctric com el camp magnètic: l'equació d'ona.

1.6. L'equació d'ona

Al subapartat 1.5. heu pogut veure que és possible generar un camp electromagnètic de manera que els camps elèctric i magnètic es vagin realimentant mútuament i indefinidament. Això ho hem vist a partir de les lleis de Faraday (l'equació 43) i d'Ampère (equació 44).

Doncs bé, es pot demostrar, a partir de les lleis d'Ampère i de Faraday que els camps elèctric, $\vec{E}$, i magnètic, $\vec{B}$, compleixen, en un medi lineal, unes equacions que tenen la forma següent*:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{51}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{52}$$

on x és el punt en què estem observant el camp ($\vec{E}$ o $\vec{B}$), és a dir, la posició, i t és el temps que els camps triguen a arribar-hi.

*** Demostrar com s'hi arriba queda més enllà dels objectius del mòdul.**

Derivada parcial

Recordeu que el símbol $\frac{\partial f}{\partial t}$ indica la derivada parcial de la funció f respecte t. Això vol dir que derivem f respecte a t i tractem com a constant qualsevol altra variable que pugui contenir.

Aquestes equacions ens estan dient que si derivem dues vegades un camp ($\vec{E}$ o $\vec{B}$) respecte a la posició (x), el resultat serà igual que derivar dues vegades el

mateix camp ($\vec{E}$ o $\vec{B}$) respecte al temps (t) però dividit per la velocitat de la llum (c) al quadrat. Si us hi fixeu, ambdues equacions tenen la mateixa forma:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} \tag{53}$$

Aquest tipus d'equació s'anomena **equació d'ona** i és una de les equacions fonamentals de la física. És per això que us l'hem volgut presentar tot i que no l'hàgim deduït.

Una característica de l'equació d'ona és que derivem respecte a x i respecte a t; per tant, hi hem posat una funció, $f(x,t)$, que depèn tant de x com de t, és el que se'n diu una *funció de vàries variables*. Precisament, abans de continuar amb el tema principal farem un breu incís sobre aquest tipus de funcions.

1.7. Funcions de vàries variables

En el subapartat anterior hem vist l'equació d'ona (equació 53) on hi ha una derivada parcial d'una funció f respecte al temps (t) igualada a una derivada parcial respecte a l'espai (x). Això vol dir que si la funció no depèn de x i de t alhora, un membre de l'equació serà igual a zero. Cal, doncs, que una funció f que compleix l'equació d'ona depengui tant de x com de t. Per això hi hem escrit $f(x,t)$, que vol dir que la funció f depèn tant de x com de t, és a dir, depèn de dues variables.

Què vol dir, però, que una funció depengui de dues (o més!) variables? Doncs bàsicament el que el seu nom indica, que la funció varia quan varia amb més d'un element. Aquest tema, per si sol, constitueix una assignatura completa en titulacions com matemàtiques i física. Aquí, però, només pretenem que entengueu una mica la idea. Per a fer-ho, farem servir la següent funció:

$$f(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \tag{54}$$

Fixeu-vos que és una funció que depèn de x i de t. Tot i que sigui un concepte matemàtic i que x i t puguin ser dues variables qualssevol, com que estem fent física, x serà la posició i t, el temps. A, k i ω són constants; les hem posat perquè us acostumeu a veure-les, ja que al llarg del mòdul sortiran diverses vegades equacions de la mateixa forma que l'expressió 54.

Imagineu ara que esteu "quiets" en un lloc (x fixa). Per a fer-ho fàcil farem $x = 0$, amb la qual cosa queda:

$$f(0,t) = A\cos(\omega t) \tag{55}$$

Aleshores, a mesura que passa el temps, veureu que la funció va variant. És el que teniu representat a la figura 6. Fixeu-vos que, a efectes pràctics, és com si la x no hi fos, o fos una constant més. Físicament seria el que fem en fer una derivada parcial respecte al temps, com teniu a l'equació 53.

Figura 6. Funció $f(x,t)$ que depèn de la posició, x, i del temps, t, amb la posició fixada

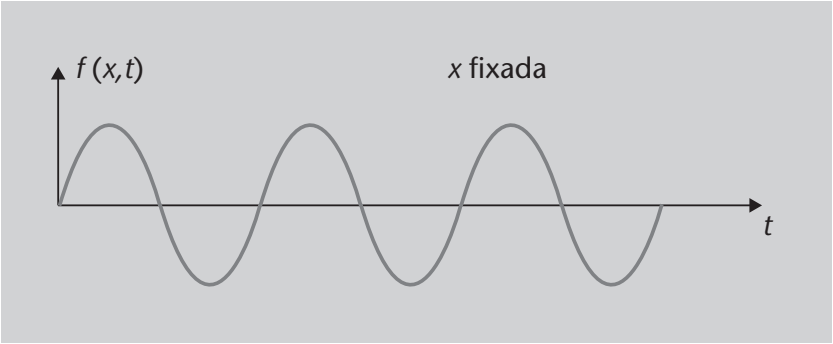


Figura 6

Fixeu-vos que l'eix d'abscisses és el temps t.

Ara deixarem fix el temps. Imagineu que "congeleu" la funció en un instant de temps i mireu quin aspecte té (vegeu la figura 7). Ara tractem el temps com una constant i, per simplicitat, podeu agafar l'instant inicial, $t = 0$:

$$f(x,0) = A\cos(-kx) \tag{56}$$

Figura 7. Funció $f(x,t)$ que depèn de la posició, x, i del temps, t, amb el temps fixat

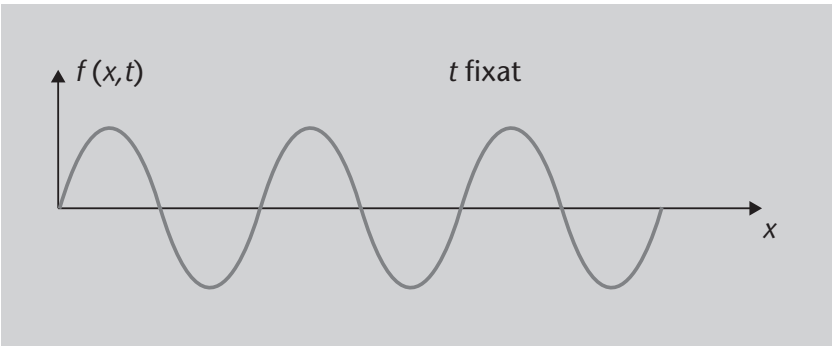


Figura 7

Fixeu-vos que l'eix d'abscisses és la posició x.

Ja veieu que les figures 6 i 7 són aparentment iguals, però en el fons són totalment diferents: una representa l'evolució de la funció en el temps i l'altra, en l'espai. Atès que és difícil representar funcions de moltes variables és normal que, a l'hora de representar la funció, es vagi fent d'aquesta manera: deixant una variable fixa i representant com varia l'altra. Per tant, convé vigilar molt què s'està representant.

En resum, en les funcions de vàries variables poden variar totes simultàniament i de forma independent. Per a simplificar-ne la representació, podem fixar totes les variables menys una.

Arribats a aquest punt, és hora de concretar una mica i veure ben bé com es propaguen els camps elèctromagnètics, és a dir, com són les ones electromagnètiques. Ho farem en el subapartat següent.

1.8. Solució de l'equació d'ona

Hem vist que les funcions que satisfan l'equació d'ona (equació 53) han de ser funcions de diverses variables com les que heu vist en el subapartat anterior, subapartat 1.7. Per tant, si el camp elèctric, $\vec{E}$ i el camp magnètic, $\vec{B}$, han de satisfer l'equació 53, hauran de dependre tant de la posició x com del temps t. És a dir, variaran tant en l'espai com en el temps.

La pregunta que ens ve al cap aleshores és: molt bé, han de dependre de la posició i del temps, però com ha de ser aquesta dependència? És a dir, com seran el camp elèctric, $\vec{E}$, i el camp magnètic, $\vec{B}$, que satisfacin les equacions d'ona (equacions 51 i 52, respectivament)? Per a respondre aquesta pregunta us proposem un exercici.

Exercici

Proposeu una solució per a l'equació 53.

Solució

La solució a l'equació d'ona, l'equació 53 és, precisament, el mateix tipus de funció que hem comentat a l'exemple del subapartat 1.5., equació 48. Ara bé, com hem dit, la funció haurà de dependre tant del temps, t, com de l'espai, x, per la qual cosa hauran d'aparèixer les dues variables. Així doncs, tant el camp elèctric com el camp magnètic hauran de ser funcions del tipus:

$$f(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \tag{57}$$

que és precisament el mateix tipus de funció de l'equació 54, que hem fet servir al subapartat 1.7. per a mostrar-vos la dependència en diverses variables. A, k i ω continuen sent tres constants el significat de les quals, de moment, no ens preocupa.

Però, és realment l'expressió 57 solució de l'equació 53? Per a veure-ho el que farem serà verificar que compleix l'equació d'ona, és a dir, la substituirem a les dues bandes de l'equació 53 i veurem que dóna el mateix. Fem-ho!

Farem cada derivada per separat. Començarem amb la derivada respecte al temps:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -A\omega\sin(\omega t - kx) \tag{58}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t - kx) \tag{59}$$

Recordeu

$\frac{d}{dx}(\sin(g(x))) = \frac{dg(x)}{dx}\cos(g(x))$ i $\frac{d}{dx}(\cos(g(x))) = -\frac{dg(x)}{dx}\sin(g(x))$, on $g(x)$ és una funció que depèn de x.

Ara farem les derivades respecte a la posició:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -Ak\sin(\omega t - kx) \tag{60}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -Ak^2\cos(\omega t - kx) \tag{61}$$

Amb això ja podem substituir les equacions 59 i 61 a l'equació 53:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{62}$$

$$-A\omega^2\cos(\omega t - kx) = \frac{1}{c^2}(-Ak^2\cos(\omega t - kx)) \tag{63}$$

Si simplifiquem, ens queda:

$$\omega^2 = \frac{1}{c^2}k^2 \tag{64}$$

que, fent l'arrel a ambdues bandes, queda:

$$\omega = \frac{1}{c}k \tag{65}$$

Fixeu-vos què hem obtingut: resulta que aquelles dues constants que havíem posat, com inventades, ω i k, estan, de fet, relacionades amb la velocitat de la llum en el buit, c:

$$c = \frac{k}{\omega} \tag{66}$$

Així, doncs, l'equació 57 serà la solució de l'equació d'ona si es compleix l'equació 66.

Per tant, noteu que sense haver dit res de què són aquestes constants, ja sabem que:

- kx i ωt han de tenir les mateixes unitats, ja que estan sumades;
- el quocient de k i ω, $\frac{k}{\omega}$, té unitats de velocitat, ja que és la velocitat de la llum en el buit (equació 66).

De l'exemple anterior, ja tenim que l'equació 57 és una solució per a l'equació d'ona (equació 53). En el nostre cas, en lloc de $f(x,t)$ tindrem el camp elèctric, $\vec{E}$, i el camp magnètic, $\vec{B}$. Com que fins ara estem treballant en mòdul, l'escriurem, de moment, en forma de mòdul, més endavant ja introduirem el caràcter vectorial.

Els camps elèctric, E, i magnètic, B, de la forma*:

$$E(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \tag{67}$$

$$B(x,t) = B_0 \cos(kx - \omega t) \tag{68}$$

satisfan les respectives equacions d'ona (expressions 67 i 68):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{69}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{70}$$

on E_0, B_0, k i ω són constants. En el cas de k i ω, compleixen la condició:

$$c = \frac{k}{\omega} \tag{71}$$

i c és la velocitat de la llum en el buit.

*** Escrivim només el mòdul.**

És important que tingueu present que les equacions 67 i 68 són només una solució d'entre infinites possibles. Us l'hem mostrat perque és el tipus de solució en què ens centrarem. Ara bé, com veureu a l'apartat següent, és una solució molt especial.

Encara ens falta, però, un pas per a tenir realment la solució, ja que els camps elèctric i magnètic són vectors. De fet, com hem dit, les expressions 67 i 68 són les solucions en forma escalar. Tot seguit us mostrarem les expressions en forma vectorial.

1.8.1. Caràcter vectorial de les ones electromagnètiques

A les equacions 67 i 68 hem escrit l'expressió dels camps elèctric i magnètic, però sense tenir en compte el seu caràcter vectorial. Com apareixen els vectors en aquestes equacions?

Si mireu la figura 8, ja veieu que si l'ona es propaga en la direcció x (és a dir, en la direcció del vector unitari $\vec{i}$ o $\vec{u}_x$), el camp elèctric va en la direcció y (és a dir, en la direcció del vector unitari $\vec{j}$ o $\vec{u}_y$) i el camp magnètic en la direcció z (és a dir, en la direcció del vector unitari $\vec{k}$ o $\vec{u}_k$). Per tant, podem escriure les equacions 67 i 68 en forma vectorial, simplement posant la direcció en què va cada camp:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\vec{j} \tag{72}$$

$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(kx - \omega t) = B_0 \cos(kx - \omega t)\vec{k} \tag{73}$$

Figura 8. Representació de l'ona completa dels camps elèctric i magnètic propagant-se en la direcció x

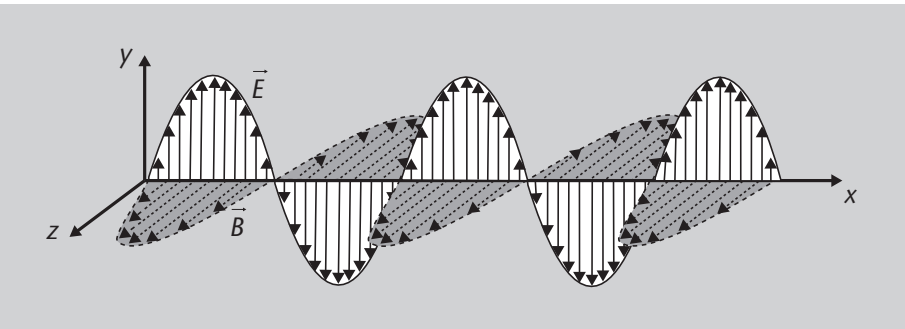


Figura 8

Teniu representats els vectors camp elèctric, $\vec{E}$, que van en la direcció de l'eix y i varien sinusoïdalment, i els vectors camp magnètic, $\vec{B}$, que van en la direcció de l'eix z i varien també sinusoïdalment.

Ara bé, què passa si l'ona no va en la direcció de l'eix x? Teniu la situació més general representada a la figura 9. En aquest cas, l'ona es propaga en una direcció qualsevol $\vec{k}$ i la distància a l'origen està expressada per un vector de posició $\vec{r}$. A la figura teniu representats també els eixos cartesians.

Figura 9. Representació de l'ona completa dels camps elèctric i magnètic propagant-se en una direcció qualsevol $\vec{k}$

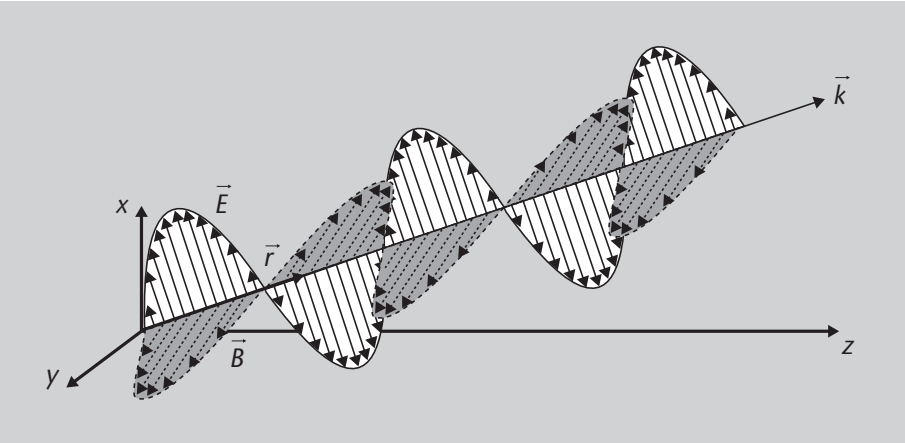


Figura 9

Teniu representats els vectors camp elèctric, $\vec{E}$, i magnètic, $\vec{B}$, que són perpendiculars entre si i a la direcció de propagació $\vec{k}$.

El vector $\vec{k}$ s'anomena **vector de propagació** i el seu mòdul correspon a la k de les equacions 72 i 73. En aquest cas les expressions dels camps elèctric i magnètic seran:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \tag{74}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \tag{75}$$

Ara bé, si mireu la figura ja veieu que $\vec{k}$ i $\vec{r}$ són vectors paral·lels, i el producte escalar de dos vectors paral·lels és el producte dels seus mòduls:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k \cdot r \cos 0 = k \cdot r \tag{76}$$

Per tant, podem escriure les equacions 74 i 75 com:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(k \cdot r - \omega t) \tag{77}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cos(k \cdot r - \omega t) \tag{78}$$

Aquestes equacions, però, compliquen els càlculs i no aporten res conceptualment, per la qual cosa en aquest mòdul farem servir les equacions 72 i 73. A més, si mireu la figura 9 ja veieu que l'únic que necessitem és girar els eixos de coordenades, per a tenir la situació de la figura 8.

Val a dir que també haguéssim pogut representar l'ona respecte al temps en lloc de fer-ho respecte a l'espai. En aquest cas trobaríem la figura 10. Fixeu-vos que és igual que la figura 8, però ara en funció del temps en lloc de ser en funció de l'espai.

Activitat

Per què la figura 10 i la figura 8 tenen la mateixa forma?

Figura 10. Representació dels camps elèctric i magnètic en funció del temps

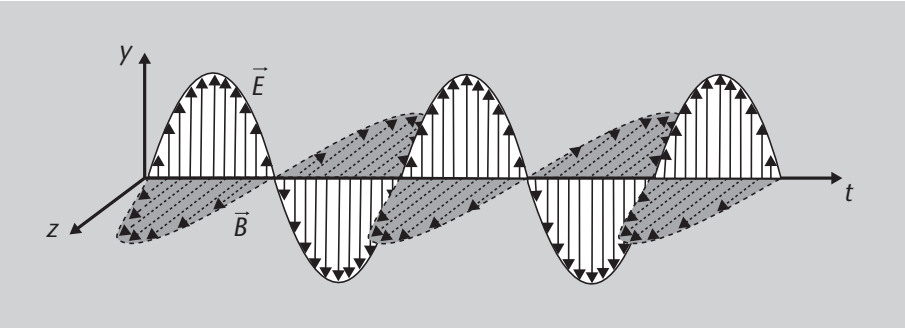


Figura 10

Representació de l'ona completa dels camps elèctric i magnètic en funció del temps t. Teniu representats els vectors camp elèctric, $\vec{E}$, que van en la direcció de l'eix y i varien sinusoïdalment, i els vectors camp magnètic, $\vec{B}$, que van en la direcció de l'eix z i varien també sinusoïdalment.

Ara que ja tenim una solució per a l'equació d'ona ha arribat l'hora de passar a explicar les ones electromagnètiques en si i veure si, realment, el nom d'*equació d'ona* i les solucions que hem trobat (equacions 72 i 73) s'hi adiuen. Ho veurem a l'apartat següent, en què explicarem què són les ones i com es descriuen.

1.9. Què hem après

En aquest apartat:

- Heu vist quines són les equacions de Maxwell.
- Heu après a mirar un conjunt d'equacions com un tot i a detectar asimetries que poden posar de manifest mancances d'alguna equació.
- Heu vist com completar la llei d'Ampère amb el corrent de desplaçament.
- Heu pogut veure, a partir de les equacions de Maxwell completes, que els camps elèctric i magnètic es poden realimentar, és a dir, generar mútuament, amb variacions de flux d'un i de l'altre (en virtut de la llei de Faraday, equació 43, i de la llei d'Ampère, equació 44).
- També us hem explicat que aquests camps compleixen l'equació d'ona, que es deriva de les equacions de Maxwell i, a través d'ella, us hem fet una breu introducció a les funcions de vàries variables.
- Finalment, heu vist que una equació de la forma:

$$\vec{F}(x,t) = \vec{F}_0 \cos(kx - \omega t) \tag{79}$$

pot ser solució de l'equació d'ona.

Bàsicament el que hem fet fins aquí és buscar, a partir de primers principis (és a dir, de les equacions de Maxwell) com podem fer que es propaguin els camps elèctric i magnètic. D'aquesta manera hem arribat a l'equació d'ona i a

veure'n una solució: la de l'ona harmònica. Per tant, ja sabem com es generen i com es propaguen els camps.

Seguirem endavant, precisament, aprofundint en la solució de l'equació d'ona. Descriurem què és una ona i veurem que les solucions que hem trobat per a l'equació d'ona són un tipus d'ona.

2. Ones electromagnètiques

En els mòduls anteriors hem vist com calcular els camps elèctric i magnètic a partir de, per exemple, una distribució de càrregues o un corrent. En l'apartat 1 hem vist com es propaguen aquests camps i ens hem quedat en el punt en què hem comprovat que compleixen l'equació d'ona. Arribats en aquest punt podem dir que hem trobat els principis que fan que els camps elèctric i magnètic es puguin generar i realimentar mútuament. També hem vist que compleixen l'equació d'ona i n'hem trobat una possible solució.

Ara que ja hem vist com es produeix aquesta solució, ens centrarem en el seu caràcter ondulatori. Veurem, per començar, què és una ona i quins tipus d'ona hi ha. Això ens permetrà veure de quin tipus són les ones electromagnètiques. Tot seguit us mostrarem amb quins paràmetres descrivim l'ona i, a continuació, veureu que, en realitat, hem estat treballant tota l'estona amb unes ones molt especials: les ones harmòniques, planes i monocromàtiques. Finalment, us mostrarem l'espectre electromagnètic que ens permetrà veure que la llum i les ones de ràdio estan més a prop del que pugui semblar *a priori*.

Què aprendrem?

En aquest apartat aprendreu:

- Què és una ona i quins tipus d'ona hi ha. De fet, veureu que les ones electromagnètiques són ones transversals no mecàniques.

- Quins són els paràmetres que permeten descriure les ones.

- Què són les ones harmòniques, planes i monocromàtiques, que són de fet les que estudiarem en aquest mòdul.

- Què es l'espectre electromagnètic i a què correspon.

Què suposarem?

Suposarem que teniu assolits els coneixements dels mòduls "Electrostàtica" i "Magnetostàtica i inducció electromagnètica", a més dels coneixements de l'apartat 1. Pel que fa a l'aspecte matemàtic, només suposarem, per a seguir aquest apartat, que:

- Sabeu representar una funció trigonomètrica com el sinus o el cosinus.

2.1. Què és una ona?

En aquest punt tenim encara moltes preguntes per a respondre. Potser una de les que primer ens ve al cap és que hem dit que l'equació 53 es deia *equació d'ona* però, per què aquest nom? Què és una ona? I potser el més important de tot, com encaixa tot això en un mòdul d'electromagnetisme?

Per a respondre totes aquestes preguntes el que hem de fer és, bàsicament, respondre'n una: què és una ona? En aquest subapartat intentarem donar-vos una idea del que és una ona. Començarem amb una primera temptativa de definició que posa de manifest un dels aspectes més rellevants d'aquest tipus de fenomen.

Una ona o, millor dit, un moviment ondulatori és un tipus de moviment que transporta energia i moment lineal però no transporta matèria.

Al mòdul "Mecànica: cinemàtica i dinàmica" s'expliquen què són l'energia i el moment lineal.

L'exemple típic serien les oscil·lacions que es formen en llençar una pedra al centre d'un estany. Podeu veure'n un exemple a la figura 11. Aquesta seria la manera de crear les ones. Ara bé, imagineu que a l'estany hi hagués un suro o un objecte que us hi hagués caigut i volguéssiu fer-lo arribar a la riba. Potser alguna vegada heu intentat fer-lo arribar a la riba picant l'aigua amb un pal i creant ones com les que teniu a la figura 11. Si ho heu fet, haureu vist que les ones avancen cap a la vora; quan les oscil·lacions arriben al suro veiem que aquest comença a oscil·lar amunt i avall, però... no avança! Aquesta oscil·lació és el que se'n diu **ona**, i el fet que l'ona en si avanci (vagi cap a la riba) però no faci avançar el suro és el que significa el que hem dit abans "que transporta energia, però no matèria".

Adreces web

A l'adreça http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_wave2.gif podeu veure una animació en què es representa un moviment d'ones del centre cap a la vora.
També podeu veure una animació en què es mostra un objecte oscil·lant a causa d'una ona a: http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Simple_harmonic_motion_animation.gif.

Figura 11. Ones circulars

Figura 11

Visió des de dalt de les ones que es crearien en un estany d'aigua. Fixeu-vos en l'oscil·lació.

Quedeu-vos amb les següents tres idees pel que fa a les ones:

- Es desplacen.
- Transporten energia i moment lineal, però no matèria.

- Hi ha una oscil·lació: "alguna cosa" es mou amunt i avall. En el cas de l'aigua aquesta "cosa" és la mateixa aigua.

D'altra banda, les ones es poden classificar de diverses maneres:

- Segons el sentit de vibració tenim:

– **Ones transversals**: si la vibració és perpendicular a la direcció de propagació. Aquest seria el cas de la bassa i el suro. L'exemple de la figura 11, de l'ona a l'aigua, és, de fet, un exemple d'ona transversal, ja que l'ona es desplaça en la direcció paral·lela a la superfície de l'aigua, però oscil·la amunt i avall, és a dir, en la direcció perpendicular a la superfície de l'aigua. A la figura 12 en teniu una representació esquemàtica, on les fletxes indiquen la direcció de vibració. Un altre exemple d'ones transversals són les ones electromagnètiques, que són les que ens interessen en aquest mòdul.

Figura 12. Oscil·lació transversal

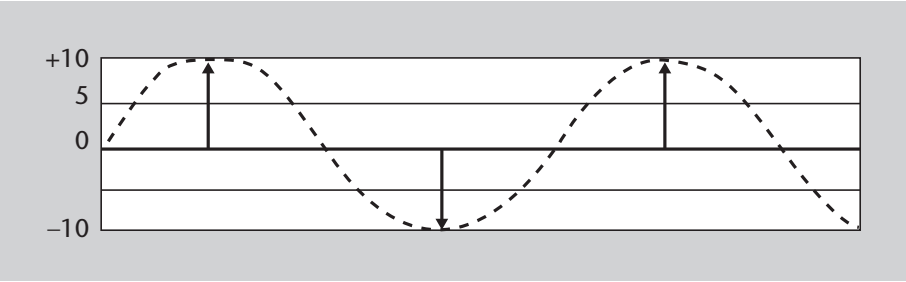


Figura 12

L'eix horitzontal indica la direcció de propagació i les fletxes indiquen la direcció i el sentit de l'oscil·lació.

– **Ones longitudinals**: si la vibració és en la mateixa direcció que la direcció de propagació. Seria el cas de les ones sonores, però en aquest mòdul no ens preocuparem d'aquest tipus d'ones. A la figura 13 teniu representada una ona longitudinal. Les zones més fosques corresponen als màxims de la vibració i les zones més clares a les "valls". Perquè vegeu més clar què volem dir amb "màxims" i "valls" la figura incorpora també una representació gràfica de la forma d'una ona sinusoïdal. De fet, els termes equivalents serien "cresta" i "vall" o "màxim" i "mínim".

Figura 13. Oscil·lació longitudinal

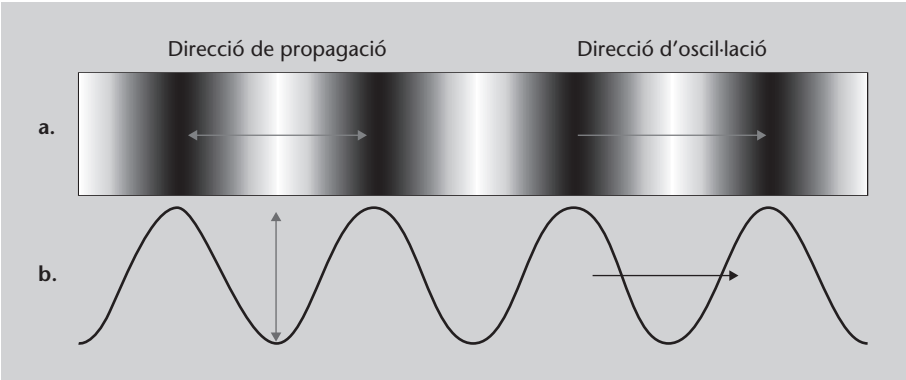


Figura 13

Ona longitudinal. Els màxims són els punts més foscos. L'ona es produeix per l'oscil·lació endavant i endarrere del material pel qual es propaga l'ona. A sota teniu una representació gràfica en la forma d'ona sinusoïdal.

– **Ones mixtes**: són una barreja dels dos tipus anteriors.

- Segons si necessiten d'un medi material per a propagar-se tenim:

– **Ones mecàniques**: el que oscil·la és un medi material, com en el cas de l'aigua de la bassa (figura 11). Per tant, són ones que necessiten d'un medi material per a propagar-se.

– **Ones no mecàniques**: No necessiten de cap medi material per a propagar-se. Correspondria a les ones electromagnètiques, que són precisament les que ens interessen en aquest mòdul.

Així doncs, pel que fa a les ones electromagnètiques, que són les que ens interessen en aquest mòdul, tenim que:

- Són ones no mecàniques perquè no necessiten cap medi per a propagar-se: hem treballat tota l'estona amb μ_0 i ϵ_0, que són, respectivament, la permeabilitat i la permitivitat del buit.
- Són ones transversals, ja que es pot demostrar a partir de les equacions de Maxwell (equacions 41 a 44) que:

– el camp elèctric i el camp magnètic són perpendiculars entre si,
– els dos camps són perpendiculars a la direcció de propagació.

Teniu la situació representada a la figura 14. Fixeu-vos que, atès que tant un camp com l'altre són perpendiculars a la direcció de propagació, que a la figura és x, estem parlant d'ones transversals.

Figura 14. Camps elèctric, magnètic i direcció de propagació

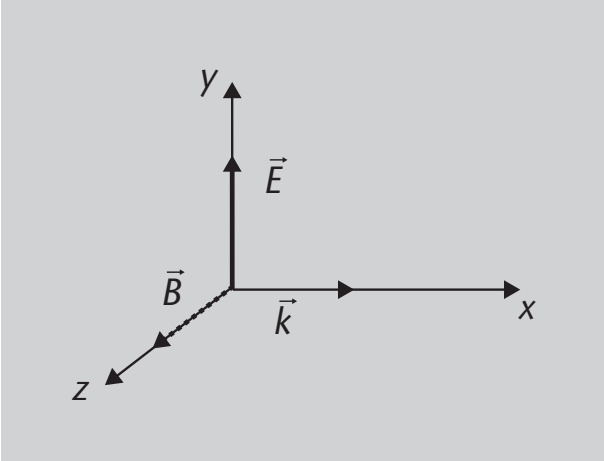


Figura 14

Representació dels camps elèctric, $\vec{E}$, i magnètic, $\vec{B}$, en la direcció de propagació, $\vec{k}$. Fixeu-vos que tots tres són perpendiculars entre si i que el camp $\vec{B}$ va en la direcció del producte vectorial $\vec{k} \times \vec{E}$.

Si ho ajuntem tot tenim que els camps elèctric i magnètic (el camp electromagnètic) es propaguen conjuntament en forma d'ona. Aquestes ones són les ones electromagnètiques, que són ones transversals i no mecàniques.

Ara que ja tenim una idea de què és una ona, el pas següent és descriure-les matemàticament. En general, això serà força complicat, però hi ha un cas en què es relativament senzill, que correspon a una ona del tipus que apareix a l'equació 54. Ho farem tot seguit.

2.2. Descripció d'una ona

En l'apartat anterior ens hem quedat en el punt en què havíem vist que els camps electromagnètics es propaguen en forma d'ones electromagnètiques. Aquestes es poden descriure mitjançant una funció del tipus de l'equació 54:

$$f(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \tag{80}$$

De fet, quan una ona es pot descriure amb aquest tipus de funció es diu *ona harmònica*.

Més concretament, per al camp electromagnètic, les equacions 77 i 78 que heu vist al subapartat 1.8.1. són:

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_0\cos(kr - \omega t) \tag{81}$$

$$\vec{B}(r,t) = \vec{B}_0\cos(kr - \omega t) \tag{82}$$

En el cas de la situació de la figura 8, les podem escriure amb les equacions 72 i 73. Tot i que aquest tipus d'ones és només un dels infinits possibles tipus que podem trobar, les ones descrites d'aquesta manera són molt útils per a explicar els diversos paràmetres que fem servir per a descriure-les:

- L'amplitud, representada per la lletra A a l'equació 80 i per $\vec{E}_0$ i $\vec{B}_0$ a les equacions 67 i 68.
- La longitud d'ona, λ.
- El número d'ona, que es representa amb el símbol k.
- La freqüència angular, ω.

λ és la lletra grega lambda minúscula i es llegeix "lambda"; ω és la lletra grega omega minúscula i es llegeix "omega".

Ja veieu, per tant, que les constants A, k i ω que hem anat arrossegant al llarg de tot el mòdul tenen un cert significat, que aclarirem en aquest subapartat. Alguns d'aquests paràmetres ja els vau veure al mòdul "Mecànica: cinemàtica i dinàmica", en parlar d'oscil·lacions, però convé repassar-los.

Hi ha però un altre concepte que és important a l'hora de descriure l'ona: és el concepte de front d'ona. Començarem per aquest i, tot seguit, entrarem a descriure els diversos paràmetres.

2.2.1. El front d'ona

Heu anat veient al llarg de tot el mòdul que els camps elèctric i magnètic es poden propagar en forma d'ones. Per tant, el que ha de passar és que una ona "viatgi". I és això ben bé el que passa: l'ona es desplaça a una certa velocitat i, aleshores, és com si els camps elèctric i magnètic anessin avançant. A la figura 15 teniu representada gràficament aquesta idea.

Figura 15. Ona viatgera

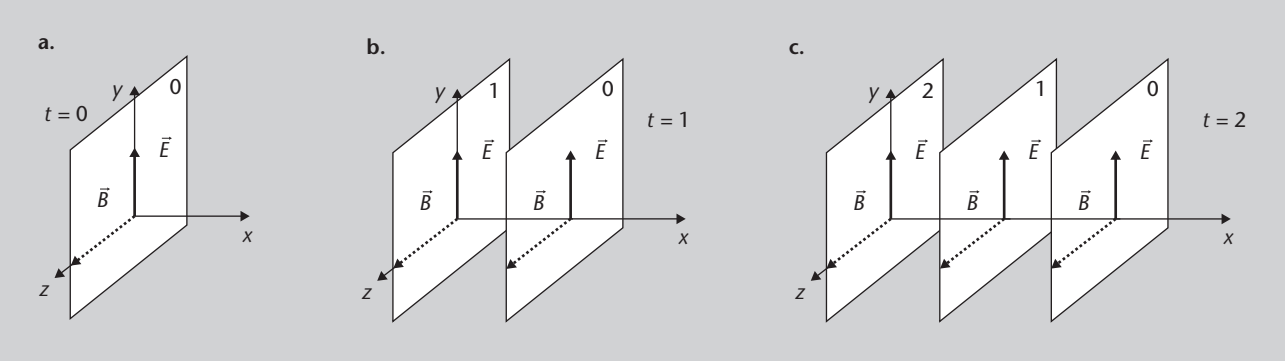


Figura 15

Representació de com viatja una ona.
a. Instant $t = 0$, quan es crea l'ona;
b. Instant $t = 1$. Fixeu-vos que els camps creats a $t = 0$ han avançat i els nous se situen darrere;
c. Un tercer instant, $t = 2$. Podeu veure com els camps creats als instants anteriors han seguit avançant.

A la figura teniu representats els màxims de l'ona en instants diferents, però començant a comptar a partir de l'instant en què es generen. A la figura 15a teniu la situació en l'instant en què es genera el camp electromagnètic (el camp elèctric $\vec{E}$ i el magnètic $\vec{B}$) i teniu representat també el pla en què es troben, que podem anomenar *pla 0*. Com podeu veure, hem representat la situació en què un camp vibra en l'eix y (el camp elèctric) i l'altre, en l'eix z (el camp magnètic). Al cap d'un cert temps (figura 15b), que considerem com l'instant $t = 1$ (les unitats són arbitràries), aquest pla s'ha desplaçat una certa distància i ha aparegut un altre màxim: és el segon pla que veieu aparèixer, que anomenem *pla 1*. Fixeu-vos que el pla 0 està ara una mica mes endavant. A la figura 15c teniu un tercer instant ($t = 2$) en què l'ona ha avançat un altre tram.

Adreça web

Podeu veure una ona viatjant en l'animació disponible a: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blender3D_CircularWaveAnim.gif

Fixeu-vos que el camp electromagnètic va "viatjant". A efectes pràctics podem dir que el que transporten aquestes ones és l'energia electromagnètica.

Aquests plans que hem dibuixat a la figura 15 tenen un nom, són els fronts d'ona.

Els **fronts d'ona** són línies o superfícies (com en l'exemple de la figura 15) corresponents a un determinat estat d'oscil·lació (en el cas de les ones electromagnètiques dels camps $\vec{E}$ i $\vec{B}$) que, a mesura que passa el temps, es propaguen en l'espai. Els fronts d'ona mai no es poden creuar entre ells.

D'altra banda, hi ha una altra característica dels fronts d'ona que hem dibuixat a la figura 15: són paral·lels i sempre perpendiculars a la direcció de propagació.

2.2.2. La longitud d'ona λ i el número d'ona k

La **longitud d'ona** es defineix com la distància entre dos punts que estan en el mateix estat de vibració. La unitat de mesura en el Sistema Internacional és el metre (m).

Teniu la situació representada en la figura 16. Fixeu-vos que és la figura 8, és a dir, l'ona respecte a l'espai, però hem agafat només el camp elèctric, per a simplificar la figura. Hi podeu veure que la longitud d'ona és l'interval entre qualssevol dos punts que estiguin en el mateix estat de vibració (no cal que sigui un màxim o un mínim).

Recordeu que SI és la sigla del Sistema Internacional d'unitats.

Figura 16. Longitud d'ona

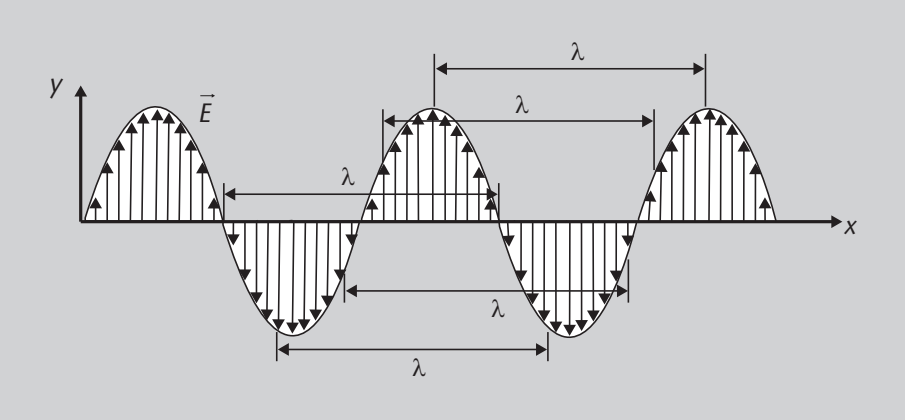


Figura 16

Representació de l'ona completa dels camps elèctrics en la direcció de propagació. S'hi assenyala a què correspon la longitud d'ona. Fixeu-vos que és la distància entre dos punts que estan en el mateix estat de vibració, sigui quin sigui aquest estat.

A partir d'aquesta longitud es defineix un altre concepte, el número d'ona:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{83}$$

Com que tenim la longitud d'ona dividint, les unitats seran m^{-1}.

Per a entendre què vol dir el número d'ona convé pensar una mica en les funcions trigonomètriques. Si teniu el $\cos(\alpha)$, quan sumem 2π a α, tornem a tenir el mateix valor: $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$, és a dir, el cosinus és una funció periòdica de període 2π i, per tant, també serà periòdic el camp elèctric. Per a veure-ho, podeu escriure l'expressió del camp elèctric (equació 72) quan $x = 0$:

Adreça web

Podeu veure una animació en què es mostra la longitud d'ona a: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:1D_Progressive_Wave.gif

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\vec{j} \tag{84}$$

$$\vec{E}(0,t) = E_0 \cos(-\omega t)\vec{j} \tag{85}$$

I ara fixeu-vos què passa quan $x = \lambda$:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\vec{j} \tag{86}$$

$$\vec{E}(\lambda,t) = E_0 \cos(k\lambda - \omega t)\vec{j} \tag{87}$$

$$\vec{E}(\lambda,t) = E_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda}\lambda - \omega t)\vec{j} \tag{88}$$

$$\vec{E}(\lambda,t) = E_0 \cos(2\pi - \omega t)\vec{j} \tag{89}$$

Veiem, per tant que, atès que la funció cosinus té període 2π, els resultats de les equacions 85 i 89 són iguals.

Aleshores, si us hi fixeu, el que ens està dient el número d'ona (equació 83) és quantes longituds d'ona, λ, hi ha en un cicle complet, és a dir, quan l'ona ha recorregut una distància de 2π. O dit amb unes altres paraules, "quantes ones" hi ha en un cicle, que és el que dóna lloc al seu nom, *número d'ona*.

El **número d'ona** es defineix com el nombre d'oscil·lacions que fa l'ona en un cicle complet. Es pot calcular a partir de la longitud d'ona λ mitjançant l'equació:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{90}$$

La unitat de mesura en el SI és la inversa del metre, el metre elevat a menys u (m^{-1}).

Exemple

Calculeu el número d'ona d'una ona electromagnètica de longitud d'ona igual 580 nm, que correspon al color groc.

Solució

Per a fer-ho només hem de substituir els valors a l'equació 90. Per a evitar problemes, passarem primer les unitats a m:

$$580 \text{ nm} = 580 \text{ nm} \frac{1 \text{ m}}{10^9 \text{ nm}} = 5{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ m} \tag{91}$$

Recordeu que 1 nm = 10^{-9} m.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{5{,}8 \cdot 10^{-7}} \tag{92}$$

$$k = 1{,}083 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \tag{93}$$

2.2.3. La freqüència angular ω i el període T

Ara veurem què és la freqüència angular, el que hem simbolitzat amb ω. Per a fer-ho, no partirem directament d'aquesta freqüència sinó que farem un recorregut una mica diferent.

Adreça web

Podeu veure el concepte de freqüència d'una ona en l'animació disponible a: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wave_frequency.gif.

Començarem per una equació que heu estudiat a bastament: l'equació del moviment rectilini i uniforme. Una ona electromagnètica que es desplaça en el buit és, de fet, un element que es mou a velocitat constant, c. Per tant, podem aplicar-li aquesta equació.

L'equació del moviment rectilini i uniforme s'estudia al mòdul "Mecànica: cinemàtica i dinàmica".

$$\text{espai} = \text{velocitat} \cdot \text{temps} \tag{94}$$

Ara imagineu que volem calcular el temps, T, que triga l'ona a recórrer l'espai corresponent a una longitud d'ona. Per a fer-ho només hem de substituir l'espai per λ i la velocitat per c:

λ és la lletra grega lambda minúscula i es llegeix "lambda"; ω és la lletra grega omega minúscula i es llegeix "omega".

$$T = \frac{\lambda}{c} \tag{95}$$

Aquest temps es diu *període*.

El **període** és el temps que triga l'ona a fer una oscil·lació completa. La unitat de mesura en el SI és el segon (s).

Recordeu que *SI* és la sigla de *sistema internacional d'unitats*.

I ara ens podem fer la mateixa pregunta que ens havíem fet per a calcular el nombre d'ona en el subapartat 2.2.2.: quantes oscil·lacions fa l'ona en un cicle complet? Si recordeu que un cicle són 2π i que T és el temps que triga a fer una oscil·lació, el nombre d'oscil·lacions que farà l'ona en un període és $\frac{2\pi}{T}$. A aquest valor se l'anomena *freqüència angular* i es representa amb la lletra ω, que és la mateixa ω que hem anat veient al llarg de tot el mòdul:

Adreça web

Podeu veure una animació que mostra el període a: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wave_period.gif.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{96}$$

La **freqüència angular**, ω, indica el nombre d'oscil·lacions que ha fet una ona en un cicle complet. La unitat de mesura en el SI és el radian per segon (rad/s) o, simplement, la inversa del segon, el segon elevat a menys u (s^{-1}).

Hi ha però un altre paràmetre que es fa servir, la freqüencia, f, que indica quant triga l'ona a fer una única oscil·lació. Es calcula fent la inversa del període (que recordeu que és el temps que triga a fer una oscil·lació):

$$f = \frac{1}{T} \tag{97}$$

Notació

En aquest mòdul simbolitzem la freqüència amb la lletra f. Tanmateix, en molts textos trobareu que també es fa servir la lletra grega nu minúscula, ν.

La **freqüència** és el temps que triga l'ona a fer una única oscil·lació. La unitat de mesura en el SI és el segon elevat a menys u (s^{-1}), que rep el nom de hertz i es representa amb el símbol Hz.

Heinrich Rudolf Hertz

Heinrich Rudolf Hertz (Hamburg, Alemanya, 1857 - Bonn, 1894) físic alemany conegut principalment per haver demostrat l'existència de les ones electromagnètiques. La unitat de freqüència rep el nom de hertz (Hz) en el seu honor.

Teniu la situació representada a la figura 17. Fixeu-vos que és la figura 10, és a dir, una representació respecte al temps, però hem agafat només el camp elèctric, per a simplificar la figura. Hi podeu veure que el període és l'interval entre qualssevol dos punts que estiguin en el mateix estat de vibració (no cal que sigui un màxim o un mínim).

Figura 17. Període

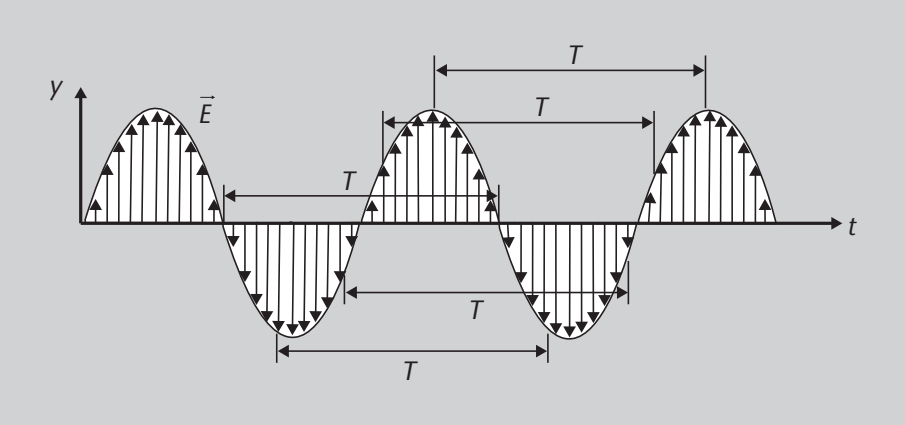


Figura 17

Representació de l'ona de camp elèctric en funció del temps. S'hi assenyala a què correspon el període. Fixeu-vos que és el temps que triga l'ona a tornar a estar en el mateix estat de vibració, sigui quin sigui aquest estat.

Fixeu-vos que, en realitat, tant la freqüència angular com la freqüència es mesuren en s^{-1}, però només hem parlat de hertzs en el cas de la freqüència. El motiu és que, tot i que el hertz es defineixi com un s^{-1}, només es fa servir quan parlem de freqüència, ja que en el cas de la freqüència angular, les unitats no són en realitat s^{-1}, sinó rad/s.

Val a dir també que si comparem les equacions 96 i 97 veiem que ambdues freqüències estan relacionades de la següent manera:

$$\omega = 2\pi f \tag{98}$$

També podeu trobar una relació semblant entre la longitud d'ona i la freqüència, com veureu en el següent exercici.

Exercici

Trobeu la relació entre la longitud d'ona i la freqüència.

Solució

Per a trobar la relació entre la longitud d'ona i la freqüència combinarem les equacions 95 i 97:

$$T = \frac{\lambda}{c} \tag{99}$$

$$f = \frac{1}{T} \tag{100}$$

Si substituïm la primera equació en la segona tenim:

$$f = \frac{c}{\lambda} \tag{101}$$

Fixeu-vos que la freqüència és, per tant, inversament proporcional a la longitud d'ona. Així, com més gran sigui la freqüència, menor serà la longitud d'ona.

Exemple

El color groc té una longitud d'ona de 580 nm. Si una ona de color groc es desplaça pel buit, calculeu-ne el número d'ona, la freqüència, la freqüència angular i el període.

Solució

Per a fer els càlculs començarem passant les unitats de la longitud d'ona a metres:

$$580 \text{ nm} = 580\frac{10^{-9} \text{ nm}}{1 \text{ m}} = 5{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ m} \tag{102}$$

Recordeu que 1 nm són 10^{-9} m.

I ara anirem calculant la resta de paràmetres:

- Número d'ona. El podem obtenir amb l'equació 90:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1{,}08 \cdot 10^{7} \text{ m}^{-1} \tag{103}$$

- Freqüència. La podem obtenir amb l'equació 101:

$$f = \frac{c}{\lambda} = 5{,}2 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 516{,}9 \text{ THz} \tag{104}$$

Recordeu que la velocitat de la llum en el buit és: $c = 2{,}9979 \cdot 10^{8}$ m/s.

- Freqüència angular. La podem obtenir a partir del resultat obtingut a l'equació 104 i fent servir l'equació 98:

$$\omega = 2\pi f = 3{,}2 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} = 3.247{,}6 \text{ Ts}^{-1} \tag{105}$$

Recordeu que el prefix tera (T) són 10^{12}. Per tant 1 THz són 10^{12} Hz.

- Període. El podem obtenir a partir del resultat obtingut a l'equació 104 i fent servir l'equació 97:

$$T = \frac{1}{f} = 1{,}9 \cdot 10^{-15} \text{ s} = 1{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ fs} \tag{106}$$

Recordeu que el perfil femto (f) són 10^{-15}. Per tant 1 fs són 10^{-15} s.

2.2.4. L'amplitud $\vec{E}_0$ i $\vec{B}_0$

Ens queda encara un paràmetre per definir, l'A de l'equació 80, que hem simbolitzat $\vec{E}_0$ en l'equació 81 i $\vec{B}_0$ en l'equació 82. De fet, aquest valor el teniu representat a la figura 18. Aquest paràmetre es diu *amplitud* i fixeu-vos que és el paràmetre que indica el valor màxim de la vibració i en quina direcció es produeix aquesta vibració i, per això, es representa vectorialment.

L'**amplitud**, $\vec{E}_0$ en el cas del camp elèctric i $\vec{B}_0$ en el cas del camp magnètic, representa la màxima separació respecte a la posició d'equilibri, tant de l'ona del camp elèctric com de l'ona del camp magnètic. La unitat de mesura en el SI és la unitat de l'ona que es propagui; així, serien N/C en el cas del camp elèctric i T en el cas del camp magnètic.

Recordeu que *SI* és la sigla de *sistema internacional d'unitats*.

Quan definim l'amplitud, parlem de separació màxima. Per tant, és sempre positiva, ja que en realitat parlem del mòdul. Fixeu-vos, però, que el vector que la representa apunta cap amunt o cap avall segons el sentit en què estigui oscil·lant l'ona en aquell instant, com podeu veure a la figura 18. Així, segons el sistema de referència d'aquesta figura, $\vec{E}_0$ serà $+E_0\vec{j}$ quan apunta cap amunt i $-E_0\vec{j}$ quan apunta cap avall.

Figura 18. Amplitud

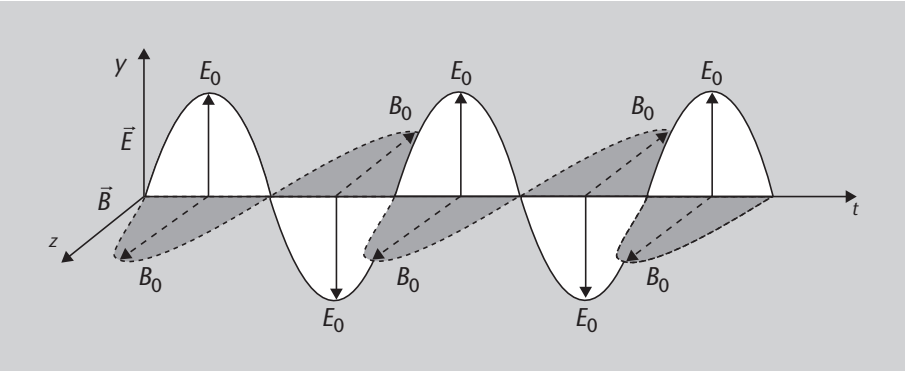


Figura 18

Representació d'una ona electromagnètica. E_0 i B_0 indiquen l'amplitud de, respectivament, els camps elèctric i magnètic. Fixeu-vos que és la distància màxima a l'estat d'equilibri.

2.2.5. La fase

En les equacions que hem anat veient al llarg del mòdul, de l'estil de l'equació 80, com serien les equacions 81 i 82, hi ha un altre element que és present en tots els casos: $kx - \omega t$, és a dir, el que hi ha dins del cosinus. Aquest terme té un nom propi: es diu *fase*.

La **fase** és l'argument del cosinus (o el sinus) en la funció que descriu l'ona.

Val a dir que en tot el mòdul hem obviat un element, la fase inicial, que podríem simbolitzar ϕ_0. La fase inicial permet tenir en compte l'estat de l'oscil·lació en l'instant i posició inicials.

La fase inicial

A la figura 8 teniu les ones corresponents als camps elèctric i magnètic, però fixeu-vos en un detall: les dues ones comencen en el punt que hem pres com a origen de coordenades. Què passaria, però, si en aquest instant les ones tinguessin un cert valor en lloc de ser iguals a zero? Tindríem el que en diem una fase inicial (vegeu la figura 19).

Figura 19. Fase

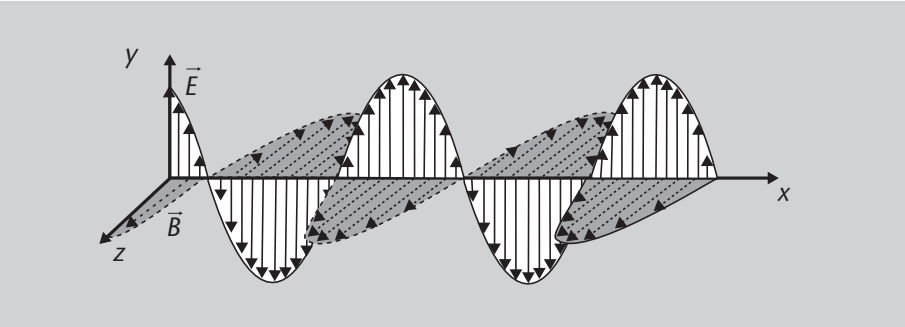


Figura 19

Representació dels camps elèctric i magnètic en la direcció de propagació i amb una certa fase inicial.

En aquest cas, les equacions 72 i 73 (que són com la 81 i la 82 amb la situació de les figures 8 o 19) quedarien, amb una fase inicial ϕ_0, de la manera següent:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t + \phi_0)\vec{j} \tag{107}$$

$$\vec{B}(x,t) = B_0 \cos(kx - \omega t + \phi_0)\vec{k} \tag{108}$$

Fixeu-vos que l'únic que hem hagut de fer ha estat afegir aquesta fase inicial a la funció trigonomètrica, al cosinus. Per a veure que, efectivament, és la fase inicial només heu de fer $x = 0$ i $t = 0$:

$$\vec{E}(0,0) = E_0 \cos(\phi_0)\vec{j} \tag{109}$$

$$\vec{B}(0,0) = B_0 \cos(\phi_0)\vec{k} \tag{110}$$

D'aquestes equacions podeu veure perquè es diu fase inicial.

La **fase inicial** és la fase que té una ona en l'instant i la posició inicials, és a dir, per a $x = 0$ i $t = 0$.

En tot aquest mòdul hem fet:

$$\phi_0 = 0 \tag{111}$$

és a dir, hem suposat tota l'estona la situació de la figura 8, i és per això que fins ara no ha aparegut la fase inicial. Tanmateix heu de tenir en compte que aquest terme existeix. Val a dir, però, que quan tenim una única ona, aquest paràmetre és irrellevant. Sí que té molt de sentit considerar-lo quan tenim dues o més ones que interaccionen entre si, ja que aleshores trobarem situacions diferents depenent de quina sigui, precisament, la fase inicial de cadascuna.

2.2.6. Diverses formes d'escriure els camps elèctric i magnètic

En aquest apartat hem vist els paràmetres que caracteritzen una ona electromagnètica: l'amplitud, la freqüència i la longitud d'ona. Amb ells hem representat l'ona amb les expressions 72 i 73 (que reproduïm aquí per comoditat):

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\vec{j} \tag{112}$$

$$\vec{B}(x,t) = B_0 \cos(kx - \omega t)\vec{k} \tag{113}$$

Aquestes equacions són com la 81 i la 82, la situació de les figures 8 o 19, amb aquells eixos, però les fem servir perquè no es perd generalitat. Si voleu, també podeu representar-la en funció de la longitud d'ona, tot recordant l'equació 83: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t)\vec{j} \tag{114}$$

$$\vec{B}(x,t) = B_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t)\vec{k} \tag{115}$$

I si tenim en compte l'equació 98, $\omega = 2\pi f$, veiem que podem escriure també:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi ft)\vec{j} \tag{116}$$

$$\vec{B}(x,t) = B_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi ft)\vec{k} \tag{117}$$

Aquest resultat el podríem deixar així, però el cert és que demana a crits treure factor comú 2π, tot i que no duu enlloc:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos\left[2\pi(\frac{1}{\lambda}x - ft)\right]\vec{j} \tag{118}$$

$$\vec{B}(x,t) = B_0 \cos\left[2\pi(\frac{1}{\lambda}x - ft)\right]\vec{k} \tag{119}$$

que és una altra manera d'escriure l'equació de les ones; en funció de la longitud d'ona, λ, i de la freqüència, f, en lloc de fer-ho en funció del nombre d'ona, k, i de la freqüència angular, ω.

Tot seguit veurem com podem identificar els diversos elements dins de l'equació d'una ona.

Exemple

Tenim una ona electromagnètica el camp elèctric de la qual està expressat per l'expressió:

$$\vec{E}(z,t) = 150\cos(5{,}0 \cdot 10^{-4}z - 1{,}5\pi \cdot 10^{6}t)\vec{i}\ \text{N/C} \tag{120}$$

Respongueu les preguntes següents:

a) En quina direcció vibra el camp elèctric?
b) En quina direcció es propaga l'ona?
c) Quina és l'amplitud?
d) Quina és la freqüència angular?
e) Quin és el número d'ona?

Solució

Per a respondre totes les preguntes només necessitem comparar l'equació 120 amb l'expressió 81.

Així, podem respondre directament les diverses qüestions:

a) El camp en aquest cas vibra en la direcció $\vec{i}$ (ho podeu veure pel vector unitari).
b) El camp es desplaça en la direcció z (ho podeu veure perquè la z fa aquí el paper que feia la x a l'equació 112.
c) L'amplitud val 150 N/C.
d) La freqüència angular val $1{,}5\pi \cdot 10^{6}\ \text{s}^{-1}$.
e) El número d'ona val $5{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^{-1}$.

Ja veieu, per tant, que de l'expressió de l'ona traiem bona part de la informació per a descriure-la.

Ara que ja tenim l'ona descrita, vegem per què les ones representades per les equacions 81 i 82 són tan especials: són ones harmòniques, planes i monocromàtiques.

Un últim apunt abans de començar: recordeu que podem escriure una funció exponencial en termes del sinus i del cosinus, és a dir:

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha \tag{121}$$

on j és el número imaginari (recordeu que en física i en enginyeria sovint fem servir j en lloc de i per a no confondre'l amb la i que simbolitza el corrent elèctric) i α, la fase.

Per tant, tot el que direm quant a les funcions trigonomètriques és vàlid també per a l'exponencial complexa, ja que són dues maneres diferents de representar el mateix.

2.3. Ones harmòniques, planes i monocromàtiques

Hem dit al principi de l'apartat que les ones representades per expressions del tipus 80 (que correspondria al tipus de les ones que descriuen els camps elèctric i magnètic, equacions 81 i 82) són molt especials.

El motiu d'això és que són el que es coneix com a *ones harmòniques, planes i monocromàtiques*. És a dir, dels infinits tipus d'ona possibles, ens estem quedant amb aquestes i prou. D'aquesta manera podem fer molts càlculs analíticament que, si triéssim casos més genèrics, serien impossibles, i també ens proporcionen una manera relativament fàcil de descriure-les. Val a dir també que, gràcies a l'anàlisi de Fourier, aquestes ones ens serviran per a descriure ones molt més complexes, però això ja queda més enllà dels objectius del mòdul.

Tot seguit descriurem què vol dir que una ona sigui harmònica, plana i monocromàtica. I veureu també que hi ha una raó molt més fonamental per a treballar-hi.

2.3.1. Ones harmòniques

Dins de les ones hi ha un tipus d'ona molt important, tant, que fins i tot tenen nom propi: les ones harmòniques.

Les **ones harmòniques** són les que tenen un comportament periòdic que es pot descriure amb una funció $f(x,t)$ sinusoïdal o cosinusoïdal.

Fixeu-vos que les equacions 80, 81 i 82 compleixen aquesta condició, ja que són una funció cosinusoïdal. A més, són periòdiques, com heu vist al subapartat 2.2.3.

Perquè us feu una idea de la importància de les ones harmòniques, fixeu-vos des de quants punts de vista ens ha sortit una equació sinusoïdal o cosinusoïdal:

El terme *oscil·lació harmònica* fa referència a les oscil·lacions que es veuen al mòdul "Mecànica: cinemàtica i dinàmica" en tractar el moviment harmònic simple!

- Hem partit de les equacions de Maxwell i llavors hem buscat un tipus de funció que complissin els camps elèctric i magnètic, de manera que poguessin generar-se mútuament. Hem trobat aleshores que una funció del tipus sinus o cosinus ho permetia (equació 57).
- Hem mostrat una equació a què s'arriba des de les equacions de Maxwell, l'equació d'ona (equació 53). I, un cop més, hem vist que el sinus i el cosinus en són solució (equacions 72 i 73).
- D'altra banda, resulta que una funció sinus o cosinus és també el tipus de funció que descriu un moviment harmònic simple.

El moviment harmònic simple s'estudia al mòdul "Mecànica: cinemàtica i dinàmica".

- I ara veiem que les ones que es descriuen amb una funció sinus o cosinus s'anomenen *ones harmòniques*.

Ja veieu que hem anat arribant a solucions del tipus de l'equació 80 des de diversos punts de vista. Això justifica en certa manera la importància de les *ones harmòniques*. Ara bé, hi ha tres elements més que fan que siguin tan importants:

- Com ja us vam avançar en el modul "Mecànica: cinemàtica i dinàmica", i com efectivament esteu veient, els moviments oscil·latoris harmònics són molt importants i són a tot arreu. Ja veieu que van aparèixer per a descriure el moviment d'una molla i ara ens els tornem a trobar en parlar de les ones.

- Hi ha un teorema matemàtic, el teorema de Fourier, que permet descompondre qualsevol funció periòdica com a suma (que pot ser una suma infinita) de sinus i cosinus. No demostrarem aquí aquest teorema, però ja veieu que, gràcies a ell, té molt sentit estudiar les funcions sinus i cosinus (les ones harmòniques) ja que qualsevol funció periòdica es pot expressar com a suma d'aquestes. Per tant, si sabem treballar amb les ones harmòniques, podem treballar amb qualsevol tipus d'ona.

- Finalment, però no per això menys important, les funcions sinus i cosinus són relativament fàcils de tractar matemàticament.

Així, doncs, hem vist que les ones de les equacions 54, 67 i 68 són harmòniques. Ara veurem que també són ones planes.

2.3.2. Ones planes

Si us fixeu en les tres subfigures de la figura 15, resulta que en ambdues tant el camp elèctric com el camp magnètic estan sempre en el mateix pla: que en el cas de la figura 15 és el pla *yz*. A més, tots dos camps es propaguen sempre en la mateixa direcció, que en el cas de la figura 15 és la direcció *x*. Quan es dóna aquesta situació diem que tenim ones planes.

El front d'ona es tracta al subapartat 2.2.1.

Les **ones planes** són les que compleixen que:

- es propaguen sempre en la mateixa direcció;
- el front d'ona és perpendicular a la direcció de propagació, tot i que aquesta condició també la compleixen les ones circulars i les esfèriques.

Les equacions 81 i 82 corresponen, doncs, a ones planes. De moment, a partir del que hem vist en aquest subapartat i en l'anterior ja podem afirmar que estem treballant amb ones harmòniques planes.

2.3.3. Ones monocromàtiques

Per acabar, hi ha un tema que és important tenir present. Si us fixeu en les equacions que han sortit en aquest mòdul, com ara les equacions 81 i 82, hi havia només una freqüència angular. És a dir, cada ona tenia una única ω o, el que és el mateix (en virtut de l'equació 101), una longitud d'ona fixada. Aquest tipus d'ones es diuen *ones monocromàtiques*.

Una **ona monocromàtica** és la que només té una freqüència.

I us preguntareu, com pot tenir una ona més d'una freqüència? Si recordeu el subapartat 2.3.1., quan hem mostrat com era la solució de l'equació d'ona, ja hem dit que, gràcies al teorema de Fourier, sempre podríem escriure una ona com a suma d'ones del tipus de l'equació 80. És a dir, qualsevol ona es pot escriure com a suma d'ones monocromàtiques o, dit amb unes altres paraules, les ones poden estar formades per moltes ones monocromàtiques, cadascuna d'una freqüència diferent.

De tot el que acabem d'explicar resulta que, sense haver dit res, en realitat ens havíem centrat només en ones harmòniques, planes i monocromàtiques. Malgrat que això us pugui semblar molt restructiu, recordeu novament que, gràcies al teorema de Fourier, podrem escriure sempre qualsevol funció periòdica com una suma de vàries (potser infinites) ones d'aquest tipus.

Monocromàtic

El terme *monocromàtic* vol dir "d'un sol color". Entendreu el perquè d'aquest nom al subapartat 2.4.

2.4. Classificació de les ones electromagnètiques

Fins ara hem vist que els camps elèctric i magnètic compleixen les equacions de Maxwell i que, a partir d'aquestes equacions, es pot demostrar que ambdós camps es propaguen conjuntament en forma d'ones, sense necessitat de cap medi, i que ho fan a la velocitat de la llum, c. En aquest mòdul ens hem centrat en ones harmòniques (subapartat 2.3.1.), planes (subapartat 2.3.2.) i monocromàtiques (subapartat 2.3.3.). Estem treballant, per tant, amb ones que es poden descriure amb una funció sinusoïdal o cosinusoïdal i que tenen una única freqüència (o longitud d'ona, vegeu el subapartat 2.2.3.).

En resum, arribats a aquest punt ja tenim les ones electromagnètiques i les sabem descriure. Hi ha, però, un punt que crida l'atenció: no trobeu molt curiós que la velocitat de propagació de les ones electromagnètiques en el buit coincideixi amb la velocitat de la llum en el buit? Efectivament, sí que es curiós, i aquest va ser un dels fets que va portar a adonar-se que allò que anomenem *llum* no és res més que un conjunt d'ones electromagnètiques en un rang de freqüències determinat.

La llum no és, però, l'únic rang de freqüències amb nom propi. De fet, si fem una ordenació de les ones electromagnètiques en funció de la seva freqüència

(o de la seva longitud d'ona, que és equivalent, com podeu veure a l'equació 101), ens trobem que tenen noms i propietats diferents segons quin sigui el rang de freqüències en què es trobin. A la taula 1 teniu com es classifiquen les ones electromagnètiques monocromàtiques. Aquesta classificació es coneix amb el nom d'*espectre electromagnètic*.

Vegeu el subapartat 2.2.3. per a recordar el concepte de monocromaticitat.

L'**espectre electromagnètic** és la distribució de les ones electromagnètiques en funció de la seva freqüència o longitud d'ona.

Així, tenim, de menys a més freqüència (o, si voleu, de més a menys longitud d'ona).

Taula 1. Espectre electromagnètic

Denominació	Rang de freqüències	Longituds d'ona
Rajos γ	> 30 EHz	< 10 pm
Rajos X	30 PHz - 30 EHz	10pm - 10 nm
Ultraviolat extrem	1,5 PHz - 30 PHz	10nm - 200 nm
Ultraviolat proper	789 THz - 1,5 PHz	200 nm - 380 nm
Llum visible	384 THz - 789 THz	380 nm - 780 nm
Infraroig proper	120 THz - 384 THz	780 nm - 2,5 μm
Infraroig mitjà	6 THz - 120 THz	2,5 μm - 50 μm
Infraroig llunyà	300 GHz - 6 THz	50 μm - 1 mm
Microones	1 GHz - 300 GHz	1 mm - 30 cm
Freqüència ultraalta (TV, UHF)	300 MHz - 1 GHz	30 cm - 1 m
Freqüència molt alta (TV, VHF)	30 MHz - 300 MHz	1 m - 10 m
Ona curta (ràdio, SW)	1,7 MHz - 30 MHz	10 m - 180 m
Ona mitja (ràdio, MW)	650 kHz - 1,7 MHz	180 m - 650 m
Ona llarga (ràdio, LW)	30 kHz - 650 kHz	650 m - 10 km
Freqüència molt baixa (ràdio, VSF)	<30 kHz	>10 km

Un EHz, llegit "exahertz", són 10^{18} Hz.

Un PHz, llegit "petahertz", són 10^{15} Hz.

Un THz, llegit "terahertz", són 10^{12} Hz.

Un GHz, llegit "gigahertz", són 10^{9} Hz.

Un μm, llegit "micròmetre", són 10^{-6} m.

Un nm, llegit "nanòmetre", són 10^{-9} m.

Un pm, llegit "picòmetre", són 10^{-12} m.

No cal que us aprengueu aquests rangs, n'hi ha prou amb que tingueu una idea de l'ordre de magnitud (saber que quan parlem de microones parlem de centenars de GHz, per exemple). Potser sí que convé saber, per la seva importància, el rang de la llum visible, entre 380 nm i 780 nm. Val a dir també que les fronteres no són tan marcades com teniu a la taula 1, sinó que hi ha un cert encavalcament entre els diversos rangs. En teniu una representació gràfica a la figura 20, en què s'ha ampliat la zona corresponent al visible (és a dir, a la llum) per la seva importància, i hi podeu veure l'encavalcament entre diversos rangs.

De tota aquesta classificació el que crida més l'atenció, sens dubte, és que nomes variant la freqüència passem de tenir ones de ràdio a tenir microones o llum visible. També pot sobtar que precisament la llum només en sigui un fragment. Però és un fragment molt especial, ja que és el conjunt d'ones electromagnètiques que podem veure sense ajuda de cap instrument, només amb els nostres ulls.

Figura 20. Espectre electromagnètic

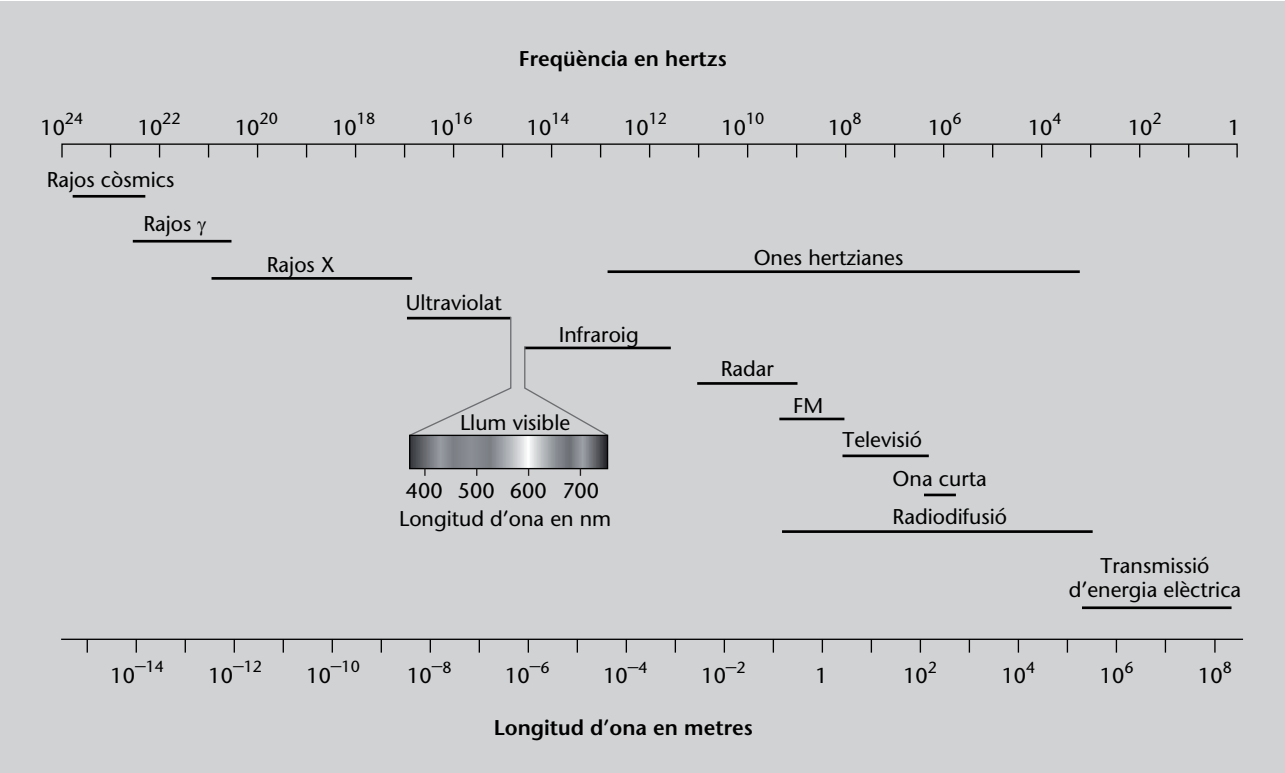


Figura 20

De freqüència més baixa a més alta (longitud d'ona més llarga a més curta) teniu ones de ràdio, microones, infraroig, visible, ultraviolat, rajos X i rajos γ. En el cas del visible teniu una ampliació amb els diversos colors.

Els límits del rang de la llum visible estan presos per a un ésser humà estàndard, ja que les freqüències visibles varien d'una persona a una altra.

En aquest sentit, el rang corresponent a la llum és el mes objectiu: si no ho veiem, no és llum. La resta de la classificació és purament convencional i els límits estan posats de la manera que ens interessa actualment, tenint present la tecnologia actual. Val a dir que, especialment en el rang de la ràdio i la televisió, aquests límits estan actualment en discussió.

Un altre element a tenir present és que cada rang és finit. Penseu per exemple en la banda de l'UHF (la de la televisió): l'espai que té assignat és finit. Això vol dir que si una emissora emet en una determinada freqüència, aquella freqüència ja està agafada i ningú més no podrà emetre-hi. És per això que l'espectre electromagnètic es considera un recurs limitat i està regulat per les administracions.

L'espectre, continu?

És cert que l'espectre és un continu i, per tant, sembla que entre dues freqüències hagi d'haver un número infinit de freqüències. Per exemple, si una emissora emet a 400 MHz i una altra a 439 MHz, una tercera podria emetre a 439,5 MHz i, així, afegint decimals, sempre podem trobar "espais" lliures. Això ,però, no és tan senzill, ja que les emissores emeten en realitat en una banda de freqüències, és a dir, en un estret rang de freqüències al voltant de la freqüència central. Si una altra emissora emetés molt a prop, hi hauria interferències.

Hi ha una altra cosa que també crida l'atenció en la figura 20: els noms no es corresponen ben bé amb els de la taula 1. Això és degut al fet que la classificació que us hem mostrat es pot refinar molt més en funció de quin sigui l'àmbit en què estem treballant. Penseu-ho un moment amb un tema que coneixeu: la llum està en un rang que va dels 380 nm als 780 nm de longitud d'ona. Dins d'aquest rang sabem que podem trobar els diversos colors: cada freqüència correspondrà a un color (i d'aquí ve el nom de *monocromàtiques* quan ens referim a ones que tenen una única freqüència).

A la taula 2 us hem posat aquest refinament, corresponent a les ones de radiofreqüència, que són les que es fan servir en el món de la telecomunicació. Veureu que algunes fronteres no coincideixen ben bé amb les de la taula 1. De

fet, aquest subconjunt que us hem posat aquí, entre els 3 kHz i els 3.000 GHz té nom propi: es diu **espectre radioelèctric**.

Taula 2. Espectre radioelèctric

Denominació	Rang de freqüències	Longituds d'ona
Freqüència extremadament alta (*Extremely High Frequency*, EHF)	30 GHz - 300 GHz	10 mm - 1 mm
Freqüència superalta (*Super High Frequency*, SHF)	3 GHz - 30 GHz	10 cm - 1 cm
Freqüència ultraalta (*Ultra High Frequency*, UHF)	300 MHz - 3 GHz	100 cm - 10 cm
Freqüència molt alta (*Very High Frequency*, VHF)	30 MHz - 300 MHz	10 m - 1 m
Alta freqüència (*High Frequency*, HF)	3 MHz - 30 MHz	100 m - 10 m
Freqüència mitjana (*Medium Frequency*, MF)	300 kHz - 3 MHz	1 km - 100 m
Baixa freqüència (*Low Frequency*, LF)	30 kHz - 300 kHz	10 km - 1 km
Freqüència molt baixa (*Very Low Frequency* VLF)	3 kHz - 30 kHz	100 km - 10 km

Els noms que apareixen a la taula 2 són els que es fan servir habitualment en el sector de les telecomunicacions i deriven de les seves sigles en anglès, que us hem indicat entre parèntesis.

Així doncs, hem vist que la descripció de les ones electromagnètiques harmòniques, planes i monocromàtiques que havíem fet en el subapartat 2.2. ens ha permès classificar les ones, és a dir, establir l'espectre electromagnètic.

2.5. Què hem après

En aquest apartat:

- Heu vist com descriure les ones harmòniques, planes i monocromàtiques.
- També heu après la importància d'aquest tipus d'ones, ja que qualsevol funció periòdica es podrà escriure com a suma d'ones d'aquest tipus, gràcies al teorema de Fourier.
- Finalment, heu après a classificar les ones electromagnètiques en funció de la seva freqüència, el que es coneix com a *espectre electromagnètic*.

Amb tot això ja heu pogut veure com es genera una ona electromagnètica, a partir de quelcom tan bàsic com les lleis de Maxwell (apartat 1); i teniu les eines necessàries per a descriure-les i treballar-hi. De fet, aquí us hem fet només un aperitiu, però molt petit, del que són les ones electromagnètiques. Al llarg de la titulació hi anireu aprofundint; però no solament això, sinó que es convertiran en l'element fonamental de moltes assignatures: només heu de pensar que un senyal no és res més que una ona electromagnètica.

3. Problemes resolts

3.1. Enunciats

1. Tenim un condensador de plaques plano-paral·leles en el buit. Les plaques són circulars de costat 2 cm de radi i estan separades una distància d'1 mm. Calculeu el corrent de desplaçament.

2. Calculeu el camp magnètic entre les plaques del condensador de l'exercici anterior, si està connectat a un corrent de 10 A.

3. Tenim, en el buit, un condensador de plaques plano-paral·leles de capacitat C i connectat a un voltatge V:

a) Demostreu que el corrent de desplaçament dins de les plaques d'un condensador de plaques plano-paral·leles de capacitat C és $I_d = C\frac{dV}{dt}$.

b) Calculeu quant val el corrent de desplaçament si $C = 5\ \mu$F i el potencial és de la forma $V = 30\sin(5t)$ V.

4. Una ona electromagnètica de freqüència 5 MHz es desplaça en la direcció z. Escriviu l'expressió del camp magnètic si té una intensitat màxima de 10 T.

3.2. Solucions

1. En aquest problema hem de calcular el corrent de desplaçament, que sabem que és donat per l'equació 25:

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \tag{122}$$

on ϕ_e està expressant en l'equació 26:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} d\vec{S} \tag{123}$$

Així doncs, l'estratègia per a resoldre el problema serà:

1) Trobar el camp entre les plaques del condensador.

2) Calcular el flux que travessa les plaques, ϕ_e, amb l'equació 123.

3) Derivar el flux respecte al temps per a trobar el corrent de desplaçament amb l'equació 122.

El primer pas, de fet, no cal fer-lo, ja que vam calcular el camp a l'interior d'un condensador en el buit. Tornarem a fer servir la figura 4, que reproduïm aquí per comoditat com a figura 21, però afegint-hi l'eix *x*.

Figura 21. Figura de resolució del problema 1

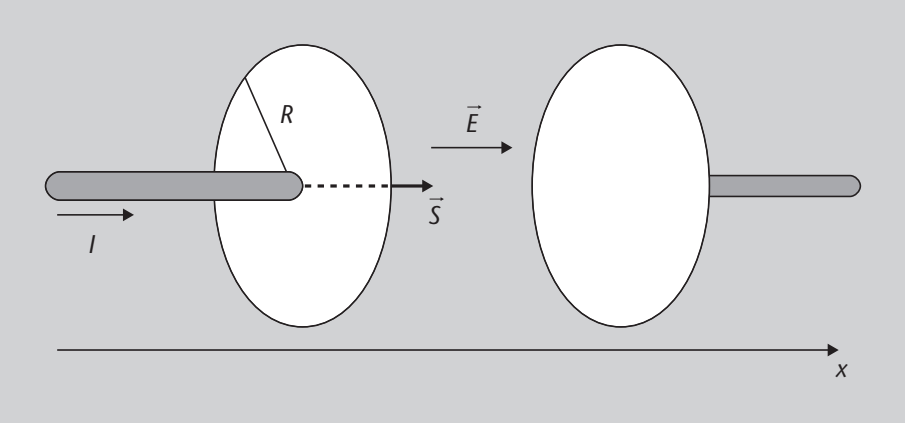


Figura 21

Camp elèctric i vector superfície a l'interior d'un condensador, amb l'eix de coordenades i el sentit que prenem com a positiu.

El camp va d'una placa a l'altra i val:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{i} \tag{124}$$

on σ és la densitat de càrrega de les plaques del condensador i ϵ_0, la permitivitat del buit. De fet, però, al final sempre ens interessava treballar amb la càrrega més que no pas amb la densitat de càrrega. Per a fer-ho, heu de recordar que la càrrega es defineix com:

Les càrregues s'estudien al mòdul "Electrostàtica".

$$Q = \int_S \sigma dS \tag{125}$$

on *S* és tota la superfície on hi ha densitat de càrrega. Si la densitat de càrrega és constant a tota la superfície de les plaques (que com que no ens diuen res, suposarem que és així), la σ pot sortir de la integral i l'equació 125 es converteix en:

$$Q = \int_S \sigma dS = \sigma \int_S dS = \sigma \cdot S \tag{126}$$

D'aquí trobem que la densitat de càrrega es pot posar en funció de la càrrega total:

$$\sigma = \frac{Q}{S} \tag{127}$$

i substituint l'equació 127 en la 124 trobem l'expressió del camp dins d'un condensador en funció de la càrrega:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}\vec{i} \tag{128}$$

Ara ja podem calcular el flux, substituint aquesta expressió dins de l'equació 123 i tenint present també que el vector camp, $\vec{E}$, i el vector superfície, $\vec{S}$, són ambdós paral·lels (vegeu la figura 21):

$$\phi_e = \int_S \vec{E}d\vec{S} \underbrace{=}_{\vec{E}\|\vec{S}} \int_S EdS \tag{129}$$

Recordeu

El producte escalar de dos vectors paral·lels és el producte dels seus mòduls. És a dir, $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B$, si $\vec{A}$ i $\vec{B}$ són paral·lels.

Atès que E és constant en tota la superfície (ho podeu veure de l'equació 128 o de la 124, en què el camp és constant), pot sortir de la integral:

$$\phi_e = \int_S EdS \underbrace{=}_{E \text{ const.}} E\int_S dS = E \cdot S \tag{130}$$

I substituint el valor del mòdul del camp que podem veure a l'equació 128 trobem:

$$\phi_e = E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{131}$$

Ara ja podem calcular el corrent de desplaçament amb l'equació 122:

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\epsilon_0}\right) = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0}\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dt} \tag{132}$$

Això podria semblar que fos 0. Ara bé: és una derivada total, no una derivada parcial. Això vol dir que hem de tenir en compte qualsevol terme que depengui de t. I la càrrega en depèn, ja que un condensador està connectat a una xarxa i es carrega mitjançant una intensitat, I, com teniu representat a la figura 21. Per la definició d'intensitat:

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{133}$$

Per tant, la $\frac{dQ}{dt}$ és la intensitat a què estan connectades les plaques del condensador i l'equació 132 queda:

$$I_D = I \tag{134}$$

És a dir, hem trobat que el corrent de desplaçament és igual al corrent que carrega les plaques del condensador. Si recordeu com hem trobat aquesta expres-

sió (vegeu el subapartat 1.3.), vam buscar que satisfés, precisament, aquesta condició.

2. Entre les plaques del condensador no hi ha intensitat pròpiament dita, però, com hem vist al problema 1, sí que hi ha un altre tipus d'intensitat, el corrent de desplaçament, que anirà en la direcció del camp elèctric. A la figura 22 teniu representada aquesta situació (de fet és la mateixa figura que la 3 però hi hem afegit l'eix). Fixeu-vos que, per la regla de la mà dreta, podem preveure que el camp magnètic anirà en la direcció indicada per la corba *C*.

Atès que podem preveure en quina direcció anirà el camp magnètic i que el problema presenta simetria, podem resoldre'l fent servir la llei d'Ampère com ho havíem fet al mòdul "Magnetostàtica i inducció electromagnètica".

Figura 22. Figura del problema 2

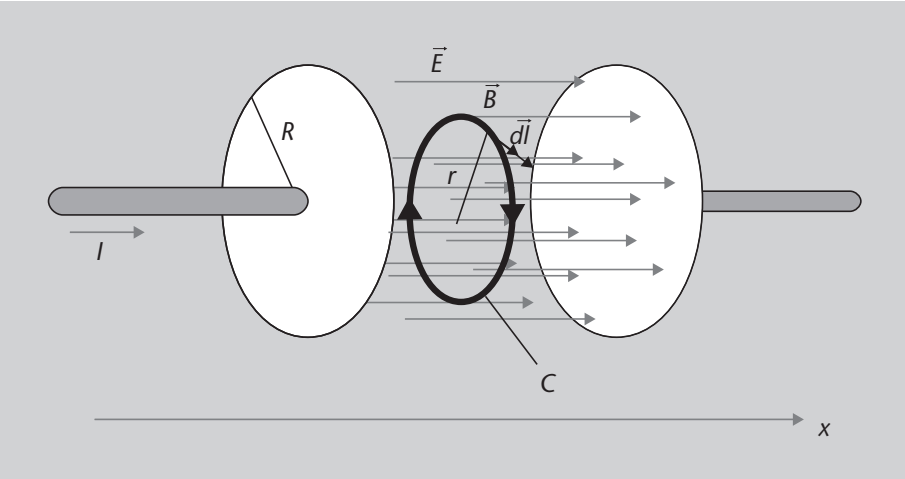


Figura 22

Camp a l'interior d'un condensador de plaques circulars de radi *R*. Hi podeu veure dibuixada la corba d'Ampère de radi *r*.

Ara bé, recordeu que ara hem de fer servir la llei d'Ampère completa (equació 44):

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{tancada}} + \mu_0 I_D \tag{135}$$

En aquest cas $I_{\text{tancada}} = 0$, per la qual cosa tenim:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_D \tag{136}$$

Calculem cada terme per separat. Comencem calculant la circulació del camp magnètic $\vec{B}$. Aquest camp serà paral·lel a la diferencial $d\vec{l}$, com teniu indicat a la figura. A més, per simetria, ja veiem que serà constant en tota la corba *C* i, per tant, podrà sortir de la integral. Aquests passos són:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} \underbrace{=}_{\vec{B}\parallel d\vec{l}} \oint_C Bdl \underbrace{=}_{B\ \text{const.}} B\oint_C dl = B2\pi r \tag{137}$$

on hem fet servir, a l'últim pas, que la longitud de la circumferència és $2\pi r$.

Anem ara al segon membre de l'equació 136. En el problema 1 ja hem trobat I_D (equació 134), que era igual a la intensitat I a què estava connectat el condensador. Ara bé, aquella és la I_D corresponent a tota la superfície de les plaques; ara, però, hem d'agafar només la que correspon a la superfície tancada per la corba C. Per a trobar-la podem determinar en primer lloc la I_D per unitat de superfície, és a dir, dividir I_D per la superfície de les plaques del condensador (πR^2) i multiplicar aleshores per la superfície tancada per la corba C (πr^2):

$$I_{D,\ \text{tancada}} = I_D \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = I_D \frac{r^2}{R^2} = I \frac{r^2}{R^2} \tag{138}$$

on hem fet servir que la intensitat a què està connectat el condensador és I. Ara igualem les equacions 137 i 138 i trobem:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{D,\ \text{tancada}} \tag{139}$$

$$B 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \tag{140}$$

$$B = \mu_0 I \frac{r}{2\pi R^2} \tag{141}$$

Amb aquest resultat ja podem substituir-hi els valors corresponents:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{N/A}^2 \cdot 10\ \text{A}}{2\pi \cdot (0{,}02\ \text{m})^2}\, r = 5 \cdot 10^{-3} r\ [\text{T}] \tag{142}$$

Fixeu-vos que hem trobat el valor en mòdul, que és el que trobem amb la llei d'Ampère.

3.

a) Per a respondre a aquesta pregunta partirem del resultat del problema 1. A l'equació 134 hem trobat que:

$$I_D = I \tag{143}$$

D'altra banda, hem vist diverses vegades (per exemple a l'equació 133) que

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{144}$$

Ja hem vist que la capacitat C del condensador és donada per l'expressió:

La capacitat d'un condensador s'estudia al mòdul "Electrostàtica".

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \tag{145}$$

on ΔV és la diferència de potencial entre les plaques. Per tant, podem aïllar la Q de l'equació 145:

$$Q = C \cdot V \tag{146}$$

i substituir a l'equació 144, tenint present que la capacitat és constant i que $I = I_D$ (equació 143):

$$I_D = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(CV)}{dt} = C\frac{dV}{dt} \tag{147}$$

que és el que volíem demostrar.

b) En aquest apartat només hem de substituir el que ens donen, a l'equació 147:

$$I_D = C\frac{dV}{dt} = 5 \cdot 10^{-6}\ \text{F}\,(30 \cdot 5 \cdot \cos(5t))\ \text{V} = 7{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(5t)\ \text{A} \tag{148}$$

4. Per a escriure l'expressió del camp magnètic hem de comparar les dades que ens donen amb l'expressió 82:

$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(kr - \omega t) \tag{149}$$

En aquest cas ens diuen que:

$$f = 5\ \text{MHz} \tag{150}$$

$$B_0 = 10\ \text{T} \tag{151}$$

Podem trobar ω a partir de f fent servir l'expressió 98:

Recordeu que el prefix mega (M) indica 10^6. Per tant, 1 MHz = 10^6 Hz.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^6\ \text{Hz} = 10\pi \cdot 10^6\ \text{Hz} \tag{152}$$

Per a trobar k podem fer servir l'equació 101:

$$f = \frac{c}{\lambda} \tag{153}$$

Recordeu que la velocitat de la llum és $c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ m/s.

i combinar-la amb l'equació 83:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{154}$$

Per a fer-ho aïllem λ de l'equació 154:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{155}$$

i substituïm aquesta λ a l'equació 153:

$$f = \frac{c}{2\pi}k \tag{156}$$

D'aquesta expressió ja podem aïllar k i calcular-la:

$$k = \frac{2\pi}{c}f = 0{,}1\ \mathrm{m}^{-1} \tag{157}$$

A més, ens diuen que l'ona es desplaça en la direcció z. Això vol dir que r serà z. A més, si mireu la figura 8 i canvieu els eixos per tal que l'ona dibuixada es desplaci en la direcció z, haurà de vibrar en la direcció y. Ho teniu representat a la figura 23.

Figura 23. Figura del problema 4

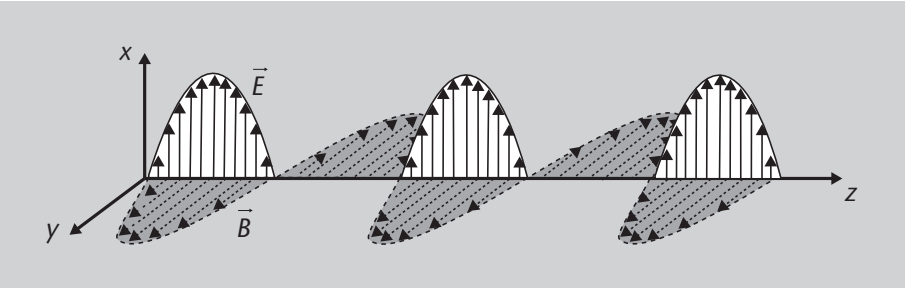


Figura 23

Representació de l'ona completa dels camps elèctric i magnètic en la direcció de propagació.

Amb això ja tenim tots els ingredients per escriure el camp magnètic (equació 149) fent servir els resultats obtinguts a les equacions 151, 152 i 157:

$$\vec{B}(z,t) = B_0 \cos(kz - \omega t)\vec{j} = 10\cos(0{,}1z - 10\pi \cdot 10^6 t)\vec{j} \tag{158}$$

Resum

En aquest mòdul hem començant veient que les diverses equacions de l'electromagnetisme que heu estat estudiant al llarg dels mòduls anteriors (la llei de Gauss, la llei de Gauss per al camp magnètic, la llei de Faraday-Lenz i la llei d'Ampère) formen part d'un únic conjunt que és el de les equacions de Maxwell. Aquestes equacions expliquen tots els fenòmens de l'electromagnetisme. Tot i així, hem verificat que una d'elles, la llei d'Ampère, estava incompleta. Per a completar-la hem introduït el corrent de desplaçament i hem vist que la variació de flux de camp elèctric produeix un camp magnètic. Un cop completada la llei d'Ampère ja hem pogut escriure les **lleis de Maxwell** totalment completes.

Amb les lleis de Maxwell en la seva forma completa, hem pogut veure que una variació del flux de camp magnètic genera un camp elèctric (llei de Faraday-Lenz) i que una variació del flux de camp elèctric genera un camp magnètic (llei d'Ampère). Amb aquests dos fenòmens és possible arribar a la conclusió que els camps elèctric i magnètic es realimenten mútuament i poden propagar-se, fins i tot en el buit. A més a més hem vist que compleixen una equació que es coneix com a **equació d'ona** i que en són solució els camps elèctric i magnètic corresponents a una **ona plana**, **harmònica** i **monocromàtica**:

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_0 \cos(kr - \omega t) \tag{159}$$

$$\vec{B}(r,t) = \vec{B}_0 \cos(kr - \omega t) \tag{160}$$

Arribats a aquest punt, hem definit els conceptes necessaris per a descriure les ones: el front d'ona, l'amplitud, la longitud d'ona, el número d'ona, la freqüència, la freqüència angular, el període i la fase.

Finalment, hem vist que la freqüència caracteritza les ones monocromàtiques i és el que determina si una ona pertany, per exemple, a la part visible o a la part de les ones de ràdio. Us hem mostrat aleshores l'espectre electromagnètic, donant un èmfasi especial a la zona corresponent a les ones de ràdio.

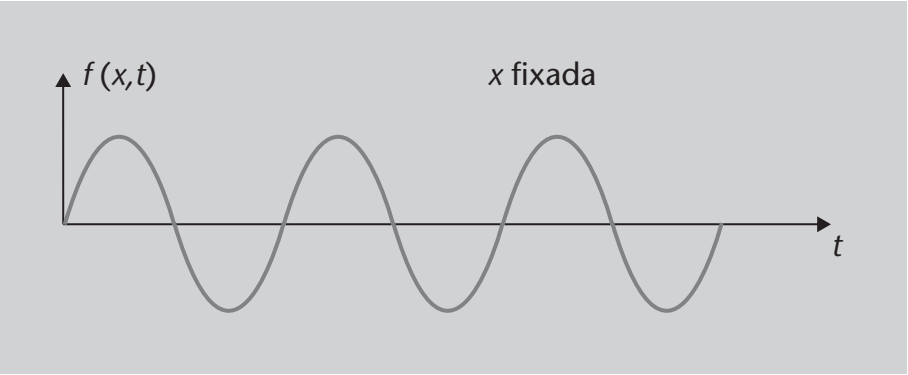
Exercicis d'autoavaluació

1. El corrent de desplaçament apareix quan hi ha una variació de...
a) ... camp elèctric.
b) ... camp elèctric amb el temps.
c) ... flux de camp elèctric.
d) ... flux de camp elèctric amb el temps.

2. Una funció del tipus $f(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$...
a) ... és periòdica només en el temps.
b) ... és periòdica només en l'espai.
c) ... és periòdica en el temps i en l'espai.
d) ... no és periòdica.

3. La distància entre dos màxims cosecutius a la figura 24 és...
a) ... la freqüència.
b) ... el període.
c) ... la longitud d'ona.
d) ... el número d'ona.

Figura 24. Representació d'una ona



4. La freqüència és...
a) ... el número d'oscil·lacions que fa una ona per segon.
b) ... la inversa del període.
c) ... c/λ
d) Totes les altres respostes són certes.

5. Quina de les següents ones és monocromàtica?
a) $f(x) = \log(x)$
b) $f(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$
c) $f(x,t) = A\cos(kx - \omega_1 t - \omega_2 t)$
d) $f(x,t) = A\cos(kx)$

6. Quina de les següents expressions correspon a una ona harmònica?
a) $f(x) = \log(x)$
b) $f(x,t) = A\log(kx - \omega t)$
c) $f(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$
d) Totes les anteriors.

7. Un camp elèctric descrit per l'expressió $\vec{E}(y,t) = 50\cos(1{,}3 \cdot 10^7 y - 2\pi \cdot 10^{14} t)\vec{k}$ N/C vibra en...
a) ... la direcció x.
b) ... la direcció z.
c) ... la direcció y.
d) ... totes les direccions alhora.

8. Un camp magnètic descrit per l'expressió $\vec{B}(y,t) = 50\cos(2\pi \cdot 10^{14} t - 1{,}3 \cdot 10^7 y)\vec{i}$ T es desplaça en...
a) ... la direcció x.
b) ... la direcció z.
c) ... la direcció y.
d) ... totes les direccions alhora.

9. Un camp elèctric descrit per l'expressió $\vec{E}(y,t) = 50\cos(2\pi \cdot 10^{14}t - 2\pi \cdot 2 \cdot 10^{6}y)\vec{k}$ N/C té un període de...

a) ... $1{,}6 \cdot 10^{-15}$ s.
b) ... $7{,}7 \cdot 10^{-8}$ s.
c) ... $1{,}3 \cdot 10^{-8}$ s.
d) ... $1 \cdot 10^{-14}$ s.

10. Un camp elèctric descrit per l'expressió $\vec{E}(y,t) = 50\cos(2\pi \cdot 10^{14}t - 2\pi \cdot 2 \cdot 10^{6}y)\vec{k}$ N/C té una longitud d'ona de...

a) ... $5 \cdot 10^{-7}$ m.
b) ... $8 \cdot 10^{-8}$ m.
c) ... $1{,}6 \cdot 10^{-15}$ m.
d) ... $7{,}7 \cdot 10^{-8}$ m.

11. La part de l'espectre a què pertany una ona depèn...

a) ... de la freqüència de l'ona.
b) ... del medi pel qual es propaga l'ona.
c) ... de la freqüència i del medi pel qual es propaga l'ona.
d) ... del dispositiu que rep l'ona.

Solucionari

1. d; **2.** c; **3.** b; **4.** d; **5.** b; **6.** c; **7.** b; **8.** c; **9.** d; **10.** a; **11.** a

Glossari

amplitud *f* Separació màxima de la posició d'equilibri en un moviment ondulatori que varia periòdicament.

corrent de desplaçament *m* Variació amb el temps del flux de camp elèctric a través d'una superfície, dividida per la permitivitat elèctrica del medi (ϵ o, en el cas del buit, ϵ_0). No és un corrent en sentit estricte, ja que no és conseqüència d'un moviment de càrregues. Genera un camp magnètic i està associat a la llei d'Ampère.

equació d'ona *f* Equació diferencial en derivades parcials lineal i de segon ordre que descriu la propagació d'una gran varietat d'ones.

espectre electromagnètic *m* Distribució del conjunt d'ones electromagnètiques ordenada per freqüències.

fase *f* Situació instantània d'una ona periòdica. Es mesura en radians.

fase inicial *f* Valor de la fase d'una ona periòdica en l'instant inicial. Es mesura en radians.

freqüència *f* Número d'oscil·lacions que fa una ona periòdica en un un segon. Es representa amb la lletra *f* o la lletra grega ν (nu) i es mesura en hertz (Hz).

freqüència angular *f* Número d'oscil·lacions que fa una ona periòdica en un cicle de 2π radians. Es representa amb la lletra grega ω (omega) i es mesura en rad/s o s^{-1}.

infraroig *m* Zona de l'espectre electromagnètic entre 300 GHz i 384 THz de freqüència (o entre 780 nm i 1 mm de longitud d'ona).

llei d'Ampère *f* Una de les equacions de Maxwell en forma integral, que afirma que la circulació del camp magnètic sobre una corba qualsevol és igual a la intensitat que travessa la corba multiplicada per la permeabilitat magnètica del medi (μ o, en el cas del buit, μ_0) més el corrent de desplaçament.

llei de Faraday-Lenz *f* Una de les equacions de Maxwell en forma integral, que afirma que la circulació del camp elèctric és igual la variació en el temps del flux del camp magnètic, amb signe negatiu. Aquest signe negatiu es coneix específicament com a Llei de Lenz.

llei de Gauss *f* Una de les equacions de Maxwell en forma integral, que afirma que el flux que travessa una superfície tancada és igual a la càrrega tancada per la superfície dividida per la permitivitat elèctrica del medi (ϵ o, en el cas del buit, ϵ_0).

llei de Gauss per al camp magnètic *f* Una de les equacions de Maxwell en forma integral, que afirma que el flux de camp magnètic que travessa una superfície tancada és igual a zero. Aquesta equació estableix que no hi ha càrregues magnètiques i que, per tant, les línies de camp magnètic són tancades.

llei de Lenz *f* Signe negatiu de la llei de Faraday-Lenz.

lleis de Maxwell *f pl* Conjunt de quatre equacions (la llei de Gauss, la llei de Gauss per al camp magnètic, la llei d'Ampère i la llei de Faraday-Lenz) que descriuen tots els fenòmens electromagnètics.

longitud d'ona *f* Distància entre dos punts en el mateix estat de vibració en una ona periòdica. Es representa amb la lletra grega λ (lambda) i es mesura en metres (m).

microones *f pl* Zona de l'espectre electromagnètic entre 1 GHz i 300 GHz de freqüència (o entre 1 mm i 30 cm de longitud d'ona).

número d'ona *m* Nombre de vegades que vibra una ona en un cicle de 2π radians. Es representa amb la lletra *k* i es mesura en m^{-1} o bé en rad/m.

ona *f* Propagació d'una pertorbació (que pot ser densitat, pressió, camp elèctric, camp magnètic, etc.) amb transport d'energia i de moment lineal però no de matèria.

ona electromagnètica *f* Ona en la qual la pertorbació que es propaga consisteix en una variació dels camps elèctric i magnètic.

període *f* Temps que triga una ona periòdica a fer una oscil·lació completa. Es representa amb la lletra *T* i es mesura en segons (s).

ràdio *f* Zona de l'espectre electromagnètic per sota d'1 GHz de freqüència (o per sobre d'1 m de longitud d'ona).

rajos γ *m pl* Zona de l'espectre electromagnètic per sobre de 30 EHz de freqüència (o per sota de 10 pm de longitud d'ona).

rajos X *m pl* Zona de l'espectre electromagnètic entre 30 PHz i 30 EHz de freqüència (o entre 10pm i 10 nm de longitud d'ona).

ultraviolat *m* Zona de l'espectre electromagnètic entre 789 THz i 30 PHz de freqüència (o entre 200 nm i 380 nm de longitud d'ona).

visible *m* Zona de l'espectre electromagnètic entre 384 THz - 789 TH de freqüència (o entre 380 nm - 780 nm de longitud d'ona)

Bibliografia

Alonso, M.; Finn, E. J. (1998). *Física. Campos y ondas* (volum 2). Mèxic: Editorial Addison Wesley Logman.

Chabay, R; Sherwood, B. (1995). *Electric & Magnetic Interactions*. Nova York: John Wiley & Sons, Inc.

Feynman, R. P.; Leighton, R. B.; Sands, M. (1987). *Física, Vol. II: electromagnetismo y materia*. Pearson Addison Wesley

Reitz, J. R.; Milford, F. J. (2001). *Fundamentos de la teoría electromagnética* (1a edició). Mèxic: Editorial Alhambra Mexicana, S. A.

Tipler, P. A.; Mosca, G. (2005). *Física para la ciencia y la tecnología* (5a edició, volum 1B). Barcelona: Editorial Reverté.

Viquipèdia: http://ca.wikipedia.org. Última consulta: 7 de març de 2010.

Wikipedia: http://en.wikipedia.org. Última consulta: 7 de març de 2010.