

# Sincronització

Francesc Rey Micolau  
Javier Villares Pera

PID\_00197090



*Els textos i imatges publicats en aquesta obra estan subjectes –llevat que s'indiqui el contrari– a una llicència de Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 Espanya de Creative Commons. Podeu copiar-los, distribuir-los i transmetre'ls públicament sempre que en citeu l'autor i la font (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), no en feu un ús comercial i no en feu obra derivada. La llicència completa es pot consultar a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.ca>*

# Índex

<b>Introducció.....</b>	<b>5</b>
<b>Objectius.....</b>	<b>7</b>
<b>1. Motivació.....</b>	<b>9</b>
<b>2. Tècniques de sincronització.....</b>	<b>17</b>
2.1. Estimació de paràmetres de sincronisme .....	19
2.2. Correcció de paràmetres de sincronisme .....	22
<b>3. Sincronisme de freqüència de portadora.....</b>	<b>26</b>
<b>4. Sincronisme de símbol.....</b>	<b>32</b>
<b>5. Sincronisme de fase de portadora.....</b>	<b>36</b>
<b>6. Sincronisme de trama.....</b>	<b>40</b>
<b>7. Conclusions.....</b>	<b>43</b>
<b>Activitats.....</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografia.....</b>	<b>48</b>



## Introducció

En l'assignatura *Sistemes de comunicacions I (SC1)* s'han presentat les principals modulacions digitals i s'han analitzat quines són les seves prestacions en el cas d'un canal ideal (AWGN) quan el receptor està perfectament sincronitzat. Quan diem "perfectament sincronitzat", volem dir el següent:

1) El receptor mostreja els polsos rebuts en els instants òptims, que en general són els instants en els quals els polsos rebuts tenen amplitud màxima. Es parla en aquest cas de *sincronisme de símbol* o *timing*. Cal tenir en compte que quan el receptor s'encén, mai no coneix quins són aquests instants òptims de mostreig perquè el rellotge del transmissor i el del receptor no estan sincronitzats i tant l'un com l'altre desconeixen el retard del canal.

2) En el cas de comunicacions passabanda amb desmodulació coherent, el receptor utilitza un oscil·lador local que té la mateixa fase i freqüència que la portadora sinusoidal rebuda. Es parla en aquest cas de *sincronisme de portadora*. Aquesta sincronització no cal en el cas de comunicacions en banda base. Cal tenir en compte que el receptor al principi desconeix completament la fase de la portadora rebuda, per la mateixa raó que desconeix el *timing*: els oscil·ladors del transmissor i receptor no estan sincronitzats i el retard del canal és desconegut. D'altra banda, la freqüència de la portadora rebuda no és coneguda perfectament en recepció perquè, encara que els oscil·ladors locals tinguin la mateixa freqüència nominal, les freqüències reals són lleugerament diferents a causa de la tolerància admesa en el procés de fabricació dels oscil·ladors. A més a més, la freqüència dels oscil·ladors presenta derives tèrmiques i la freqüència de la portadora rebuda pot experimentar una desviació Doppler si el transmissor i els receptors no estan en repòs l'un respecte de l'altre.

En aquest mòdul estudiarem quines tècniques s'han d'implementar en un receptor digital per a sincronitzar-se amb el senyal rebut. També analitzarem com i quant es degraden les prestacions del sistema quan, com passa en realitat, la sincronització del receptor no és perfecta.

Per a fer l'explicació més clara, hem optat per considerar només el cas de modulacions lineals passabanda (QAM i PSK). En qualsevol cas, els algorismes de sincronització estudiats en aquest mòdul es poden adaptar per a funcionar amb altres modulacions digitals utilitzades a la pràctica. En concret, els algorismes de sincronisme de símbol que estudiarem es poden particularitzar fàcilment per a funcionar amb les modulacions en banda base estudiades a SC1 (PAM i altres codis de línia).

Pel que fa al model de canal, en aquest mòdul didàctic considerarem que el canal és ideal (AWGN). Això vol dir que suposarem el següent:

1) El pols conformador utilitzat garanteix que no hi ha interferència intersimbòlica (ISI) a la sortida del filtre adaptat del receptor, sempre que s'escullin correctament els instants de mostreig (sincronisme de símbol perfecte). En concret, considerarem polsos rectangulars sense retorn a zero (NRZ) i polsos de Nyquist.

2) El canal no distorsiona els polsos transmesos, és a dir, els polsos rebuts són una versió atenuada i retardada dels polsos transmesos. Això vol dir que la resposta freqüencial del canal és plana dins de la banda del senyal o, dit d'una altra manera, la resposta impulsional del canal es pot modelitzar com una delta de Dirac.

3) Les etapes analògiques del receptor introdueixen soroll additiu blanc gaussià (AWGN) dins de la banda del senyal. El nivell espectral del soroll ve donat per  $N_0/2 = c \cdot F$ , en què  $c = 2 \cdot 10^{-21}$  W/Hz és una constant molt petita i  $F$  s'anomena *xifra de soroll del receptor*.

La suposició de canal ideal no és restrictiva perquè, quan el canal no és ideal i apareix ISI en el receptor, el problema de sincronització forma part d'un problema més complex que s'anomena *equalització de canal* i que abordarem més endavant en aquest mateix curs.

## Objectius

Els objectius d'aquest mòdul didàctic són els següents:

1. Conèixer quins són els paràmetres que ha de sincronitzar un receptor digital.
2. Estudiar l'impacte que tenen els diferents errors de sincronisme sobre les prestacions del sistema.
3. Saber quina és la teoria matemàtica amb què es dissenyen els algorismes de sincronització més utilitzats.
4. Entendre com es poden corregir digitalment els diferents errors de sincronisme.
5. Distingir les dues arquitectures bàsiques d'un sincronitzador (llaç obert i llaç tancat).
6. Saber com es classifiquen els algorismes de sincronització depenent del coneixement que el receptor té sobre els símbols d'informació transmesos (DA, DD, CA i NDA).
7. Conèixer alguns exemples d'algorismes clàssics de sincronització per a cadascun dels paràmetres de sincronisme estudiats (fase, freqüència, *timing* i trama).

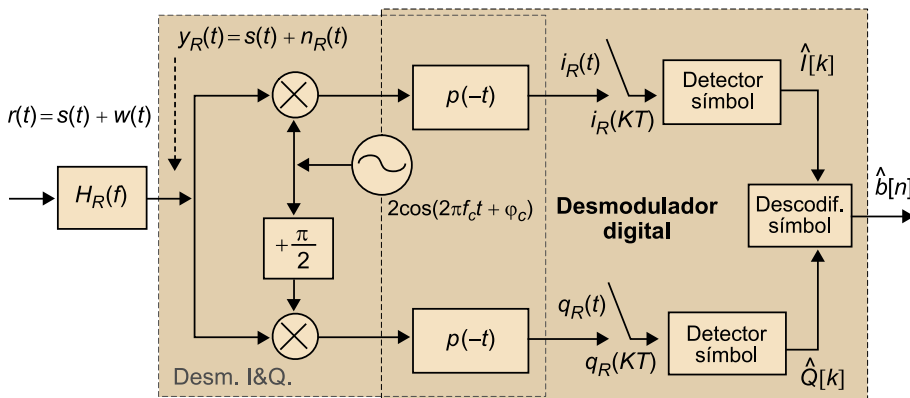




## 1. Motivació

Si recuperem de la documentació de l'assignatura SC1 l'esquema general d'un receptor digital passabanda (figura 1), veurem que el primer que es fa és filtrar el senyal rebut amb un filtre passabanda  $H_R(f)$  per a eliminar el soroll i les interferències fora de banda, i tot seguit s'abaixa el senyal a banda base multiplicant-lo per un cosinus i un sinus de fase  $\varphi_c$  i freqüència  $f_c$ .

Figura 1. Esquema desmodulador QAM



Com hem dit en la introducció, el sincronisme de portadora és l'encarregat de garantir que aquests sinus i cosinus tinguin, en la mesura del possible, la mateixa fase i freqüència que la portadora del senyal rebut  $r(t)$ . Així, doncs, si el sincronisme de portadora fos perfecte, a la sortida dels dos filtres adaptats de la figura, amb resposta impulsional  $p(-t)$ , recuperariem separadament els components en fase i en quadratura del senyal rebut:

$$\begin{aligned} i_R(t) &= A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} I[n] R_p(t - nT) + i_n(t) \\ q_R(t) &= A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q[n] R_p(t - nT) + q_n(t) \end{aligned} \quad (1)$$

en què s'ha mantingut la notació utilitzada a SC1:

- $A_c$  és l'amplitud de la portadora rebuda.
- $I[n]$  i  $Q[n]$  són els components en fase (part real) i en quadratura (part imaginària) del símbol complex rebut a l'instant  $nT$ .
- $T$  és el període de símbol, és a dir, cada quant de temps arriba un nou símbol (complex) al receptor.

- $R_p(t) = p(t) \cdot p(-t)$  és el pols a la sortida del filtre adaptat que garanteix que no hi haurà interferència intersimbòlica (ISI) sempre que es mostregi  $R_p(t)$  en el seu màxim ( $t = 0$ ), és a dir,  $R_p(t)$  s'ha dissenyat de manera que compleix que  $R_p(0) = 1$  i  $R_p(nT) = 0$  ( $n \neq 0$ ). Com hem explicat en la introducció, el sincronisme de símbol és l'encarregat de garantir, en la mesura del possible, que el mostratge es fa en el màxim dels polsos rebuts.
- $i_\eta(t)$  i  $q_\eta(t)$  són els components en fase i en quadratura del soroll  $n_R(t)$  (vegeu la figura 1), que compleixen que són estadísticament independents l'un de l'altre, encara que no són espectralment plans a causa de l'efecte del filtre adaptat  $p(-t)$ .

Com quedarà clar una mica més endavant, abans de continuar l'explicació és convenient ajuntar els components en fase i en quadratura en un sol senyal complex, que és l'anomenat *equivalent passabaix* i que denotem per  $z(t)$ :

$$z(t) = i_R(t) + j \cdot q_R(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] R_p(t - nT) + \eta(t) \quad (2)$$

en què  $j = \sqrt{-1}$  és el nombre imaginari, i hem introduït la notació complexa següent:

- Símbols complexos:  $a[n] = I[n] + j \cdot Q[n]$
- Soroll complex:  $\eta(t) = i_\eta(t) + j \cdot q_\eta(t)$

Una vegada introduïda tota la notació necessària, considerarem què passa quan el receptor encara no ha estat sincronitzat perfectament i es presenten els errors de sincronisme següents:

- Error de fase ( $\phi$  radians): la fase de l'oscil·lador local del receptor a l'instant  $t = 0$  val  $\varphi_c = \varphi_o - \phi$ , en què  $\varphi_o$  és la fase inicial de la portadora del senyal rebut. L'objectiu del sincronisme de portadora és aconseguir, en la mesura del possible, que  $\varphi_c = \varphi_o$  (és a dir,  $\phi = 0$ ).
- Error de freqüència ( $\nu$  hertz): la freqüència de l'oscil·lador local del receptor val  $f_c = f_o - \nu$ , en què  $\nu$  és la freqüència de la portadora del senyal rebut. L'objectiu del sincronisme de portadora és aconseguir, en la mesura del possible, que  $f_c = f_o$  (és a dir,  $\nu = 0$ ).
- Error de sincronisme de símbol o *timing* ( $\tau$  segons): els instants de mostratge són  $t_k = kT$ , mentre que  $kT - \tau$  són els instants òptims de mostratge en què els polsos rebuts  $R_p(t)$  prenen el valor màxim. L'objectiu del *timing* és

aconseguir, en la mesura del possible, retardar els instants de mostratge  $\tau$  segons, de manera que el mostratge es produeixi en els instants òptims.

Considerant ara els errors de sincronisme, tenim que l'equivalent passabaix  $z(t)$  té l'expressió següent:

$$z(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \exp\{j\phi\} \exp\{j2\pi\nu t\} R_p(t - nT + \tau) + \eta(t) \quad (3)$$

en què  $\exp(jx)$  és l'anomenada *exponencial complexa*, que s'ha d'interpretar com un gir de  $x$  radians en el pla dels nombres complexos. Cal recordar també que la igualtat d'Euler ens diu que  $\exp(jx)$  es pot escriure en coordenades cartesianes com  $\cos(x) + j\sin(x)$ . Si ara prenem una mostra per cada pols rebut en els instants  $kT$  (en què  $k$  és un nombre enter), obtindrem l'expressió de les mostres a l'entrada del detector de símbols, en què  $\eta[k] = \eta(kT) = i_{np}(kT) + j \cdot q_{np}(kT)$  són les mostres del soroll complex a l'entrada del detector de símbols:

$$\begin{aligned} z[k] = z(kT) &= A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \exp\{j\phi\} \exp\{j2\pi\nu T k\} R_p(kT - nT + \tau) + \eta[k] = \\ &= \underbrace{A_c a[k] e^{j\phi} e^{j2\pi\nu k} R_p(\tau)}_{\text{Senyal útil}} + \underbrace{A_c \sum_{n \neq k} a[n] \exp\{j\phi\} \exp\{j2\pi\nu T k\} R_p(kT - nT + \tau)}_{\text{Interferència intersimbòlica (ISI)}} + \underbrace{\eta[k]}_{\text{Soroll}} \end{aligned} \quad (4)$$

Es pot demostrar que l'amplitud de la part real i imaginària del soroll  $\eta[k]$  segueix una distribució gaussiana de mitjana 0 i variància  $N_0$ . Com hem dit més amunt, es compleix que la part real i la part imaginària de  $\eta[k]$  estan incorrelacionades, i per tant són estadísticament independents. També es pot demostrar que les mostres de  $\eta[k]$  estan temporalment incorrelacionades, i per tant són estadísticament independents.

Examinant ara amb detall l'equació (4), podem entendre l'impacte dels errors de sincronisme. Analitzem-los cadascun per separat.

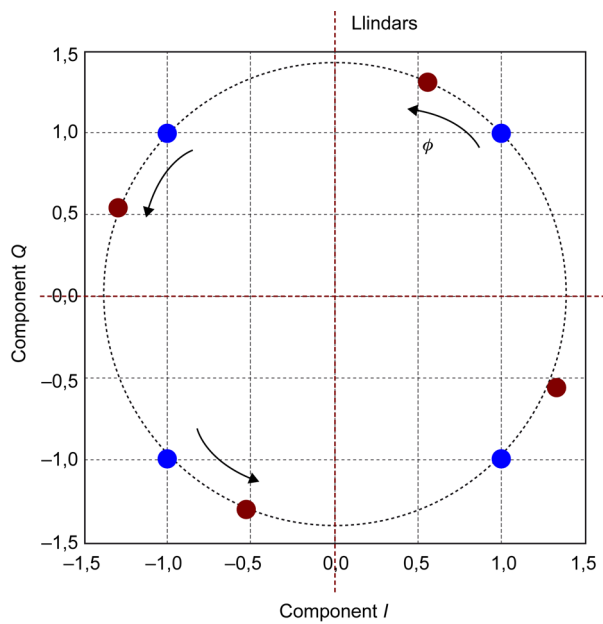
### 1) Impacte de l'error de fase ( $\phi$ radians)

Si deixem de banda el terme d'ISI (segon terme de l'equació (4)), l'error de fase fa que els símbols rebuts apareguin girats  $\phi$  radians. Observant l'equació (4) es pot veure fàcilment que, a causa de l'error de fase, la seqüència de símbols rebuts esdevé  $a[k] \exp(j\phi)$  en lloc de  $a[k]$ , en què, com hem dit abans,  $\exp(j\phi)$  provoca un gir fix de  $\phi$  radians respecte de la posició dels símbols en la constel·lació original.

#### Nota

La demostració de l'equació (3) es demana en els exercicis 1 i 2 de les activitats.

Figura 2. Constel·lacions QPSK transmesa i rebuda amb error de fase



En blau es representa la constel·lació QPSK transmesa. En vermell, la constel·lació QPSK rebuda afectada per un error de fase de  $\phi$  radians. Les línies vermelles puntejades indiquen els lliminars de decisió.

Com a conseqüència d'aquest gir, alguns punts de la constel·lació s'acosten als lliminars de decisió (figura 2), i fixada la  $E_b/N_0$ , la probabilitat d'error augmenta (figura 3). Equivalentment, a causa de l'error de fase, cal augmentar la relació  $E_b/N_0$  en recepció per a mantenir la mateixa probabilitat d'error. Aquest increment de  $E_b/N_0$  a causa dels errors de sincronisme són les pèrdues de sincronisme, que en un receptor ben dissenyat no acostumen a superar 1 dB. Per exemple, mirant la figura 3, si la probabilitat d'error esperada és  $10^{-3}$ , un error de fase de  $10^\circ$  introdueix unes pèrdues de sincronisme d'aproximadament 1,3 dB.

Per a enfrontar-se a aquest error de fase, hi ha diverses estratègies:

a) Incloure un algorisme que corregeixi automàticament la rotació causada per l'error de fase. Estudiarem aquesta alternativa en l'apartat 5.

b) Substituir el desmodulador coherent per un desmodulador que pugui funcionar sense conèixer la fase de la portadora rebuda. Hi ha dues opcions:

- La primera és utilitzar una modulació (de fase) diferencial i, en comptes de codificar la informació en la fase dels símbols, fer-ho en la diferència de fase entre un símbol i el símbol transmès abans.
- L'alternativa és codificar la informació en l'envolupant de la portadora (ASK) i utilitzar en recepció un desmodulador no coherent que calcula l'energia del senyal rebut, que és insensible a la seva fase, i comparar-la amb diferents lliminars de decisió.

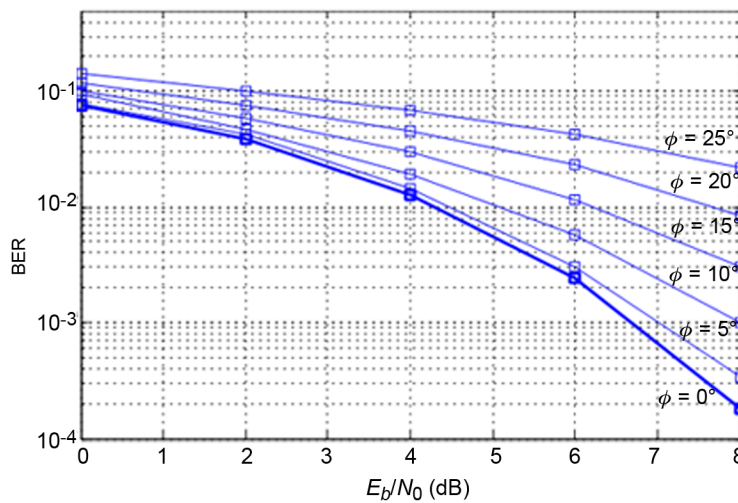
#### Nota

En l'exercici 3 de les activitats es proposa trobar l'expressió de la probabilitat d'error d'una modulació BPSK amb error de fase  $\phi$ .

#### Vegeu també

En l'exercici 4 de les activitats es presenta com a exemple la modulació QPSK diferencial (DQPSK) i en l'exercici 5 es calcula la probabilitat d'error d'un receptor no coherent en el cas de la modulació ASK.

Figura 3. Probabilitat d'error de bit (BER) en funció de la  $E_b/N_0$  per a diferents valors de l'error de fase quan la modulació transmesa és la QPSK



La relació  $E_b/N_0$  de la figura correspon a l'NSR per bit a la sortida del filtre adaptat en condicions de sincronisme perfecte.

La pregunta és per què en general es prefereix utilitzar esquemes coherents i haver de sincronitzar la portadora. La resposta és perquè els esquemes coherents aconseguen prestacions més bones, és a dir, fixada l'SNR, donen una probabilitat d'error més petita.

Per acabar, cal recordar que hi ha altres modulacions que poden ser desmodulades de manera no coherent encara que espectralment resultin ineficients i només s'utilitzin en casos en què s'ha de treballar a molt baixa SNR. Aquest és el cas de la modulació FSK, en què la informació es codifica en la freqüència de la portadora i la desmodulació es fa de manera no coherent calculant l'energia rebuda en cadascuna de les freqüències i després decidint la freqüència en què es detecta més energia. Un altre exemple de modulació que es pot desmodular de manera no coherent és la PPM (*pulse position modulation*), que analitzem en l'exercici 6 de les activitats.

## 2) Impacte de l'error de freqüència ( $\nu$ hertzs)

Si deixem de banda un altre cop l'ISI i ens fixem en el primer terme de l'equació (4), l'error de freqüència fa que els símbols rebuts girin a una velocitat angular de  $2\pi\nu$  radians cada segon o, dit d'una altra manera, cada símbol rebut està girat  $2\pi\nu T$  radians respecte de l'anterior. Observant l'equació (4) es pot veure fàcilment que, a causa de l'error de freqüència, la seqüència de símbols rebuts esdevé  $a[k]\exp(j2\pi\nu Tk)$  en lloc de  $a[k]$ .

Per a enfrontar-se a aquest error, hi ha diverses opcions:

- Utilitzar **modulacions coherents** i incloure un algorisme en el receptor que corregeixi automàticament l'error de freqüència. Estudiarem aquesta alternativa en l'apartat 4. Cal entendre que, com que l'error de freqüència fa créixer l'error de fase a un ritme de  $2\pi\nu$  radians cada segon, aquest

### Impacte de l'error de freqüència

Cal adonar-se que l'impacte de l'error de freqüència és més gran com més gran és  $T$ , és a dir, com més baixa és la velocitat de senyalització  $R = 1/T$ .

<sup>(1)</sup>Els esquemes TDMA també es denominen MCPC (*multiple channel per carrier*).

error s'ha de corregir obligatòriament, per petit que sigui, en el cas d'una transmissió contínua que dura un temps indefinit (per exemple, un senyal de televisió o ràdio). En aquest cas, encara que l'error de freqüència sigui molt petit, arribarà un moment que l'error de fase serà massa gran i les prestacions del receptor col·lapsaran. Per contra, si considerem un sistema TDMA<sup>1</sup>, en què múltiples usuaris comparteixen la mateixa portadora i transmeten en instants diferents, cada usuari haurà de transmetre en una ràfega de durada  $T_{Ràfega}$  totes les dades noves que tingui guardades des de la darrera transmissió. Per tant, en aquest cas només s'haurà de corregir l'error de freqüència quan l'increment d'error de fase al final de la ràfega ( $2\pi\nu T_{Ràfega}$  radians) sigui excessivament gran.

- Utilitzar **modulacions diferencials**. En aquest cas, es pot demostrar que l'error de freqüència es converteix en un error de fase que és constant i igual a  $2\pi\nu T$  radians (exercici 7 de les activitats). En cas que aquest error de fase fos massa gran, caldria utilitzar un algorisme de sincronització de fase com els que hem explicat en l'apartat 5. Per tant, podem concloure que l'error de fase  $\phi$  no afecta les modulacions diferencials i que l'error de freqüència  $\nu$  les afecta com un error de fase constant de valor  $2\pi\nu T$ .
- Utilitzar **modulacions d'amplitud o freqüència** que facilitin la desmodulació no coherent. L'error de freqüència provoca un error en la detecció de l'energia rebuda que degradarà les prestacions del receptor no coherent, però en qualsevol cas es podrà fer la desmodulació del senyal sempre que l'error de freqüència sigui moderat. Cal recordar que el desmodulador no coherent no és sensible a errors de fase.

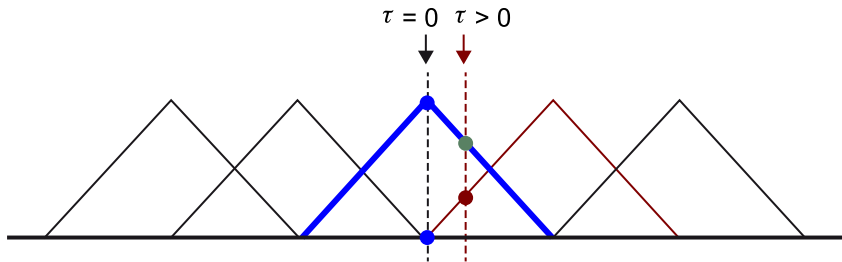
### 3) Impacte de l'error de *timing* ( $\tau$ segons)

L'error de *timing* és el causant del terme d'ISI de l'equació (4) ja que  $R_p(iT + \tau) \neq 0$  quan l'error de *timing*  $\tau$  és diferent de 0. A més a més, l'error de *timing* provoca que la part útil del símbol detectat en l'equació (4) perdi amplitud ja que es compleix que  $R_p(\tau) < R_p(0)$ , i per tant es redueix l'SNR a l'entrada del decisor de símbols. Aquest doble efecte es mostra en les figures 4 i 5. En la figura 4 es pot veure el senyal temporal a la sortida d'un dels filtres adaptats de la figura 1 quan el pols transmès és rectangular.

#### Transmissió contínua

Per *transmissió contínua* ens referim a un sistema FDMA en què cada transmissor té assignada una portadora diferent tota l'estona i transmet ininterrompudament per aquesta portadora. Aquests sistemes també es denominen SCPC (*single channel per carrier*).

Figura 4. Senyal després del filtre adaptat de pols rectangular



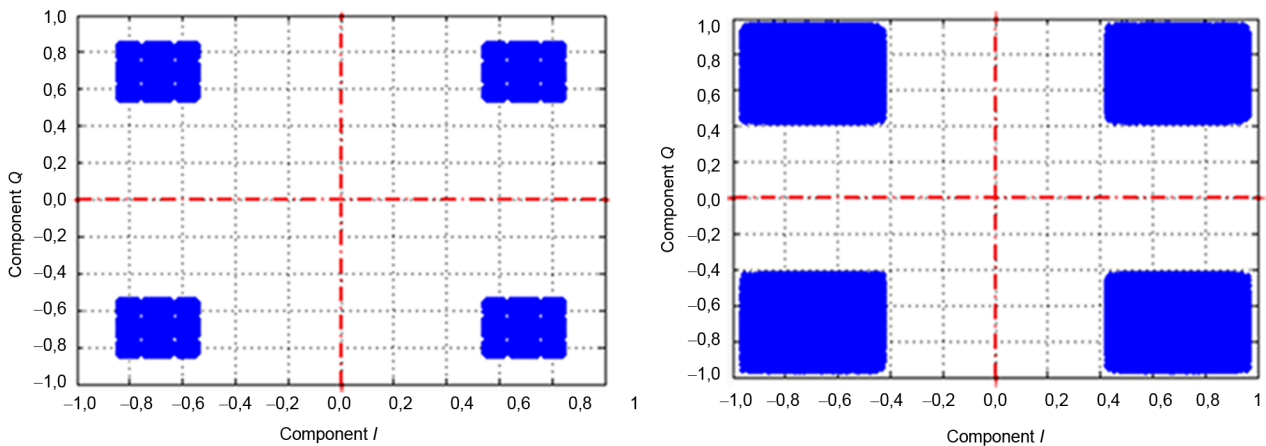
En la figura es representa el senyal després del filtre adaptat d'un dels dos components ( $I$  o  $Q$ ) en cas d'utilitzar un pols rectangular. La línia vertical vermella assenyalava l'instant de mostreig escollit corresponent a un error de *timing* igual a  $\tau$  segons. El punt verd indica la mostra que s'ha pres del pols desitjat (pols blau); el punt vermell correspon a la interferència intersimbòlica del pols interferent (pols vermell). En el cas de polsos de Nyquist el nombre de símbols interferents (punts vermells) seria molt més gran.

En la figura 5 es representa la constel·lació sense soroll que s'obté després de mostrejar amb un error de *timing*  $\tau$  un pols de Nyquist amb factor d'excés de banda (*roll-off factor*) petit. Com es pot apreciar en la constel·lació de la figura 5, l'efecte de l'error de sincronisme de *timing* és acostar els punts de la constel·lació als llindars de decisió, i per tant augmentar la probabilitat d'error (vegeu la figura 6).

**Nota**

En l'exercici 8 de les activitats es proposa obtenir la probabilitat d'error amb pols rectangular i un error de *timing* donat.

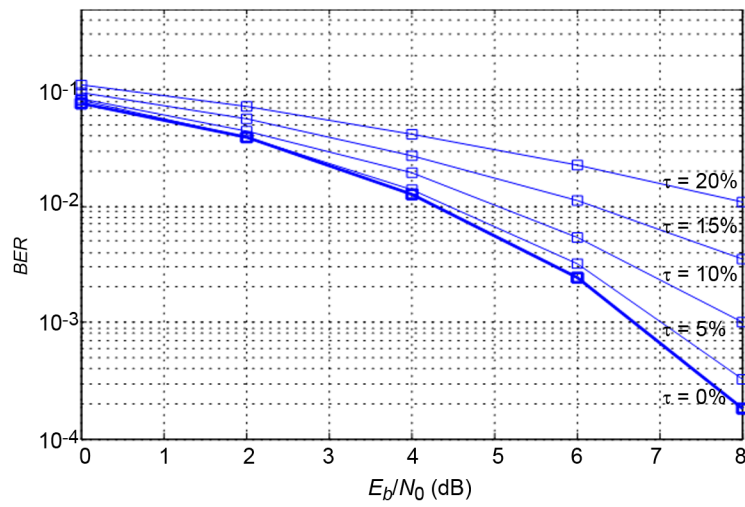
Figura 5. Constel·lació sense soroll amb error de *timing*



En la figura es representa la constel·lació, sense soroll, quan es mostra amb un error de *timing* de  $0,1\tau$ . La modulació és QPSK i el pols a la sortida del filtre adaptat és un pols de Nyquist de factor d'excés de banda  $0,5$  (a dalt) i  $0,2$  (a baix). Per a simular totes les combinacions de l'ISI s'ha simulat un vector de símbols molt llarg. Les línies vermelles discontinues indiquen els llindars de decisió.

Així com hi ha sistemes de transmissió que no requereixen sincronitzar la portadora, tots els sistemes de comunicacions digitals requereixen sincronitzar els instants de mostreig amb un error no gaire gran.

Figura 6. Probabilitat d'error de bit segons la relació  $E_b/N_0$  per a diferents valors de l'error de *timing*



La gràfica mostra la probabilitat d'error de bit en funció de la relació  $E_b/N_0$  (SNR per bit a la sortida del filtre adaptat en condicions de sincronisme perfecte) per a diferents valors de l'error de *timing* en el cas d'un pols de Nyquist d'excés de banda 0,2 i la modulació QPSK. En la figura, l'error de *timing* s'expressa com un percentatge del període de símbol.



## 2. Tècniques de sincronització

Com hem vist en l'apartat anterior, abans de fer la desmodulació del senyal, el receptor ha de reduir tant com pugui els errors de fase, freqüència i *timing* per acostar-se així a les prestacions que la modulació i el codi escollits teòricament permeten. La manera de fer-ho és la següent:

- A partir del senyal rebut, el receptor ha de ser capaç d'**estimar** amb la màxima exactitud possible el valor dels errors de fase, freqüència i *timing*. Com que el senyal rebut és sorollós, els paràmetres estimats tindran necessàriament un petit error d'estimació que serà aleatori i causarà una lleu pèrdua de prestacions del receptor. Aquesta pèrdua s'ha d'avaluar i tenir present en el balanç de potències de l'enllaç.
- A partir d'aquestes estimacions, el receptor ha de **corregir** els errors estimats de fase, freqüència i *timing*. Aquesta correcció es pot fer modificant el senyal rebut, o equivalentment, modificant la configuració del mateix receptor. Per exemple, si es mostreja amb un retard de  $0,1 \mu\text{s}$ , aquest error es pot corregir avançant els instants de mostrejatge  $0,1 \mu\text{s}$ , o alternativament, retardant  $0,1 \mu\text{s}$  el senyal rebut. Quan es fa la correcció de l'error de sincronisme també se sol cometre un petit error que, com l'error d'estimació, degradarà lleument les prestacions del receptor i afectarà el balanç de potències de l'enllaç.

### Vegeu també

En el subapartat 2.1 s'explica la teoria matemàtica que es fa servir per a construir bons estimadors i en el subapartat 2.2 s'expliquen diferents maneres de corregir digitalment els errors de fase, freqüència i *timing*.

Les tècniques de sincronització que explicarem es classifiquen segons els dos aspectes següents:

### 1) El coneixement que tenim sobre els símbols transmesos dins de l'interval de senyal observat.

Si el receptor coneix els símbols transmesos, es parla de **tècniques assistides per dades** (*data-aided, DA*). Aquestes tècniques es poden aplicar, doncs, quan l'estàndard de comunicacions preveu la transmissió de seqüències de símbols coneguts per a assistir el receptor en les tasques de sincronització i equalització, sempre que el receptor ja hagi adquirit el sincronisme de trama (vegeu l'apartat 6).

Si els símbols no són coneguts però el decisor de símbols és capaç de prendre decisions *hard* prou fiables, es parla de **tècniques dirigides per decisions** (*decision directed, DD*).

#### Decisió *soft* i *hard*

Es parla d'una decisió *soft* quan, en comptes de donar el valor més probable del símbol, es dona la probabilitat que aquest símbol prengui cadascun dels seus possibles valors, o equivalentment, el valor mitjà del símbol. Per exemple, si sabem que el símbol transmès

ha estat +1 o -1 (BPSK) amb probabilitats  $p(+1) = 0,3$  i  $p(-1) = 0,7$ , la decisió *soft* sobre aquest símbol serà el nombre real  $0,3 \cdot (+1) + 0,7 \cdot (-1) = -0,4$  mentre que la decisió *hard* serà simplement -1, perquè aquest és el més probable dels dos possibles valors.

Per a guanyar fiabilitat, es poden utilitzar les decisions *soft* que lliura el descodificador. En aquest cas, es parla d'**esquemes de sincronització assistits pel codi** (*code-aided*, CA), també coneguts com a *esquemes de turbosincronització*.

Finalment, si l'únic coneixement que tenim sobre els símbols transmesos és que pertanyen a un alfabet finit (per exemple, QPSK), podem utilitzar esquemes de sincronització anomenats **esquemes no dirigits per dades** (*non-data-aided*, NDA), que implícitament utilitzen decisions *soft* sobre els símbols a la sortida del desmodulador.

Encara que els esquemes DA són els que funcionen més bé i és molt habitual que el senyal rebut inclogui dades conegudes, els esquemes DA no s'acostumen a utilitzar perquè requereixen haver sincronitzat la trama i això implica que la resta de paràmetres de sincronisme (fonamentalment el *timing*) hagin estat sincronitzats prèviament.

## 2) En quin ordre es fa l'estimació i la correcció dels errors de sincronisme.

Quan l'estimació d'un paràmetre de sincronisme es fa a partir de l'observació del senyal rebut durant un interval, i a continuació l'estimació obtinguda es fa servir per a sincronitzar el senyal, es parla d'esquemes en **llaç obert** (*open loop* o *feedforward*). En aquesta arquitectura, l'estimació sempre es fa utilitzant les mostres del senyal rebut original, és a dir, abans d'aplicar cap correcció al senyal.

En canvi, si les mostres del senyal rebut durant l'interval observat es processen seqüencialment, alternant estimacions i correccions, es parla d'esquemes en **llaç tancat** (*closed loop* o *feedback*). En aquest cas, l'estimació dels paràmetres de sincronisme es fa a partir de mostres del senyal rebut que han estat corregides prèviament utilitzant estimacions fetes abans. En la figura 7, es representen gràficament les dues arquitectures.

Moltes vegades, el mateix algorisme es pot implementar en llaç obert o en llaç tancat. A l'hora de decidir quina és l'opció més adequada, el dissenyador ha de tenir en compte una sèrie d'aspectes:

1) els algorismes dirigits per dades (DD) requereixen una implementació en llaç tancat;

2) els esquemes en llaç tancat acostumen a tenir un cost computacional més baix;

### Vegeu també

En els apartats 3, 4 i 5 veurem alguns dels algorismes de sincronització NDA i DD més utilitzats.

### Correcció d'interval

Si s'ha d'aplicar la correcció al mateix interval de senyal que s'ha utilitzat per a fer l'estimació, aquest interval s'ha de guardar en memòria i processar-lo després en diferit.

### Vegeu també

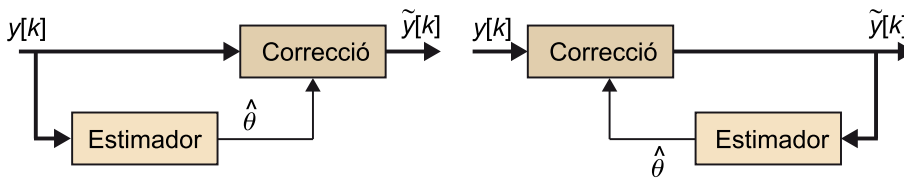
En els apartats 3, 4 i 5 veurem exemples d'algorismes de sincronització en llaç obert i llaç tancat.

3) els esquemes en llaç tancat són més adequats quan el paràmetre que volem sincronitzar no és constant sinó que canvia amb el temps;

4) els esquemes en llaç tancat són més adequats quan es tracta d'una transmissió contínua;

5) els esquemes en llaç obert són més adequats per a transmissió discontinua (paquets) perquè no tenen els problemes de convergència dels esquemes en llaç tancat (transitoris).

Figura 7. Esquema general d'un sincronitzador en llaç obert (esquerra) i en llaç tancat (dreta)



En els dibuixos, les mostres del senyal rebut es denoten per  $y[k]$ , i les mostres del senyal rebut després de corregir l'error de sincronisme, per  $\tilde{y}[k]$ .

## 2.1. Estimació de paràmetres de sincronisme

En aquest apartat farem una explicació molt breu de la teoria matemàtica en què es basen la majoria dels algorismes de sincronització utilitzats avui en dia, incloent-hi els que expliquem en els apartats 3, 4, 5 i 6 d'aquest mòdul. Abans de tot, hem de tenir present que el senyal rebut és sorollós, i per tant és un senyal aleatori que haurem de tractar estadísticament.

En concret, per estimar els errors de sincronisme hem d'observar el senyal rebut durant cert interval i guardar les mostres del senyal en aquest interval en el vector  $\mathbf{y}$ . Aquest vector  $\mathbf{y}$  és una de les possibles realitzacions d'un procés aleatori del qual només coneixem parcialment la funció densitat de probabilitat perquè no sabem quin és el valor dels paràmetres de sincronisme ni tampoc coneixem el contingut del vector de símbols transmesos durant l'interval observat. Si ara avaluem aquesta funció densitat de probabilitat per al cas particular del vector  $\mathbf{y}$  observat, obtindrem l'anomenada *funció de versemblança* (*likelihood function*), que és funció dels paràmetres de sincronisme ( $\phi$ ,  $\nu$  i  $\tau$ ) i del vector  $\mathbf{a}$  de símbols transmesos, ja que el vector  $\mathbf{y}$  que apareix en l'equació és constant i conegut:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{a}, \phi, \nu, \tau) \quad (5)$$

Si estem dissenyant un algorisme assistit per dades (DA), el vector de símbols transmesos és també conegut, i per tant, la funció de versemblança només depèn dels paràmetres de sincronisme. En cas contrari, cal eliminar la dependència amb el vector  $\mathbf{a}$  de símbols transmesos. Com que els símbols transmesos són aleatoris, la manera òptima d'eliminar aquesta dependència és calculant

el valor mitjà de la funció de versemblança respecte del vector de símbols  $\mathbf{a}$ , com s'indica a continuació, en què la mitjana inclou tots els possibles valors del vector  $\mathbf{a}$  ponderats per la seva probabilitat  $p(\mathbf{a})$ :

$$p(\mathbf{y}|\phi, \nu, \tau) = E_{\mathbf{a}}\{p(\mathbf{y}|\mathbf{a}, \phi, \nu, \tau)\} = \sum_{\mathbf{a}} p(\mathbf{y}|\mathbf{a}, \phi, \nu, \tau) p(\mathbf{a}) \quad (6)$$

En el cas d'esquemes no assistits per dades (NDA), es considera que el vector  $\mathbf{a}$  està format per  $N$  símbols independents, extrets aleatòriament d'un alfabet discret de dimensió  $M$ , per exemple,  $M = 4$  en el cas de QPSK. Per tant, es considera que hi ha  $M^N$  vectors de símbols possibles i que la probabilitat de cadascun val  $p(\mathbf{a}) = M^{-N}$ . Fent servir aquesta distribució en l'equació (6), es pot demostrar que els esquemes NDA òptims implícitament prenen decisions *soft* a la sortida del desmodulador i fan servir aquestes decisions  $\hat{\mathbf{a}}_{nda}$  per a calcular la funció de versemblança  $p(\mathbf{y}|\phi, \nu, \tau) = p(\mathbf{y}|\hat{\mathbf{a}}_{nda}, \phi, \nu, \tau)$ .

En el cas dels esquemes DD, es considera que les decisions a la sortida del desmodulador són prou fiables i es poden substituir les decisions *soft* dels esquemes NDA per decisions *hard*. D'aquesta manera, la funció de versemblança que s'ha de considerar en el cas d'algorismes de sincronització DD és  $p(\mathbf{y}|\phi, \nu, \tau) = p(\mathbf{y}|\hat{\mathbf{a}}_{dd}, \phi, \nu, \tau)$ , en què  $\hat{\mathbf{a}}_{dd}$  són les decisions *hard* a la sortida del desmodulador.

Perquè les decisions *hard* siguin prou fiables, cal que el nivell de soroll sigui baix (alta SNR) i que la resta de paràmetres de sincronisme s'hagin sincronitzat prèviament, o si més no, se sincronitzin tots alhora. En aquest cas, quan les decisions són prou fiables, els esquemes DD funcionen igual de bé que els esquemes NDA. Per contra, quan l'SNR és baixa o persisteixen errors de sincronisme massa grans, els esquemes DD no s'utilitzen perquè les seves prestacions són dolentes.

Per acabar, els esquemes assistits pel codi (CA) s'obtenen a partir de l'equació (6) tenint en compte que el vector de símbols transmesos,  $\mathbf{a}$ , ha estat codificat en el transmissor utilitzant un codi corrector/detector d'errors (codificació de canal). A causa d'aquesta codificació, no són possibles totes les seqüències de símbols a la sortida del codificador, i a més a més, les seqüències de símbols que són possibles estan formades per símbols que no són estadísticament independents. Aquesta dependència estadística és conseqüència de la redundància que el codificador genera a la seva sortida.

Els esquemes CA òptims incorporen tot aquest coneixement estadístic sobre el vector de símbols codificat,  $\mathbf{a}$ , per mitjà de la distribució  $p(\mathbf{a})$  que apareix en l'equació (6). Fent servir aquesta distribució, es demostra que els esquemes CA òptims prenen decisions *soft* a la sortida del descodificador i fan servir aquestes decisions  $\hat{\mathbf{a}}_{ca}$  per a calcular la funció de versemblança:

$$p(\mathbf{y}|\phi, \nu, \tau) = p(\mathbf{y}|\hat{\mathbf{a}}_{ca}, \phi, \nu, \tau) \quad (7)$$

Els esquemes CA són els que funcionen més bé quan no es coneix el vector de símbols transmesos i les seves prestacions s'acosten molt a les que s'aconseguirien amb esquemes DA. Encara que tradicionalment no s'han utilitzat perquè són més complexos, últimament estan substituint els esquemes clàssics (NDA i DD) quan s'ha de treballar a molt baixa SNR. Cal tenir en compte que l'SNR de treball s'ha reduït en els últims anys considerablement per la incorporació en tots els estàndards de comunicació de codis de canal molt més potents (LDPC i turbocodis), amb els quals es pot abaixar l'SNR de treball fins a valors propers al valor mínim establert per C. E. Shannon.

Si ajuntem per comoditat els tres paràmetres de sincronisme en el vector  $\theta = [\phi, \nu, \tau]$ , es pot demostrar que l'estimador òptim de  $\theta$  és el que maximitza la funció de versemblança de l'equació (6). Per aquesta raó, aquest estimador es coneix com *estimador de màxima versemblança* (*maximum likelihood*, ML) i, formalment, es calcula de la manera següent, en què  $\arg \max_x f(x)$  és l'operador que calcula el valor de  $x$  que maximitza la funció  $f(x)$ :

$$\hat{\theta}_{ml} = \arg \max_{\theta} p(\mathbf{y}|\theta) \quad (8)$$

Es pot demostrar que, sempre que el temps d'observació sigui prou gran, l'estimador ML no tindrà biaix i no hi haurà cap altre estimador que tingui una variància més petita que ell, és a dir:

$$\begin{aligned} \text{BIAS}(\hat{\theta}_{ml}) &= E\{\hat{\theta}_{ml} - \theta_0\} = 0 \\ \text{VAR}(\hat{\theta}_{ml}) &= E\{(\hat{\theta}_{ml} - \theta_0)^2\} \leq E\{(\hat{\theta} - \theta_0)^2\} \end{aligned} \quad (9)$$

En aquestes expressions,  $\theta_0$  és el valor desconegut que realment tenen els paràmetres de sincronisme i la darrera expressió és vàlida per a qualsevol estimador  $\hat{\theta}$  que puguem considerar.

Cal destacar altres característiques de l'estimador ML quan el temps d'observació és gran:

- L'error d'estimació  $(\hat{\theta}_{ml} - \theta_0)$  té una distribució gaussiana de mitjana zero (biaix zero) i variància mínima, com s'indica en l'equació (9).

#### Nota

La segona línia de l'equació (9) és formalment incorrecta perquè  $\theta$  és un vector i s'hauria de treballar amb la matriu de covariància en lloc de la de variància. No obstant això, per a no complicar l'explicació, s'ha preferit assumir en aquest punt que  $\theta$  és un escalar.

- La variància de l'estimador ML coincideix amb un límit teòric important que s'anomena *fitxa de Cramer-Rao*, que és la mínima variància que pot tenir qualsevol estimador no esbiaixat dels paràmetres.
- Encara que l'estimador ML només és òptim quan el temps d'observació és molt gran, en general les seves prestacions són també bones malgrat que el temps d'observació sigui relativament curt. Es demostra que, com més sorollós és el senyal rebut, més llarg ha de ser el temps d'observació perquè l'estimador ML sigui òptim.

Com hem vist, el sincronitzador òptim requereix que es faci l'estimació conjunta dels tres paràmetres  $\theta = [\phi, \nu, \tau]$ . En general, això és massa complicat i el receptor acostuma a sincronitzar els paràmetres un darrere de l'altre, començant habitualment per la freqüència de la portadora, seguint pel *timing* i acabant per la fase de la portadora. En quin ordre s'estimen i es corregeixen els tres paràmetres, és un tema crític que condiciona quins algorismes de sincronització es fan servir per a cada paràmetre. Encara que la solució no és única, en els apartats 3, 4 i 5 següents presentem la que considerem que és la seqüenciació més habitual i expliquem alguns algorismes de sincronització que es podrien fer servir en cada cas.

## 2.2. Correcció de paràmetres de sincronisme

En aquest apartat explicarem com es pot corregir digitalment la fase i el *timing* del senyal rebut a partir dels errors de sincronisme estimats mitjançant els algorismes que s'expliquen en els apartats 3, 4 i 5. Explicarem primer la correcció del *timing* i després la correcció de la fase.

### 1) Correcció del *timing*

Suposem que hem fet l'estimació de l'error del *timing* i hem d'avançar els instants de mostratge  $\hat{\tau}$  segons per a obtenir les mostres del senyal rebut als instants  $t_k = kT_s - \hat{\tau}$ . Aquesta correcció es pot fer de dues maneres. La primera és actuant directament sobre el mostrejador, obligant-lo a retardar els instants de mostratge  $\hat{\tau}$  segons. La idea és utilitzar el valor de  $\hat{\tau}$  per a modificar els encreuaments per zero de l'ona sinusoidal que marca els instants de mostratge  $t_k$ , tal com s'il·lustra en la figura 8.

### Lectura recomanada

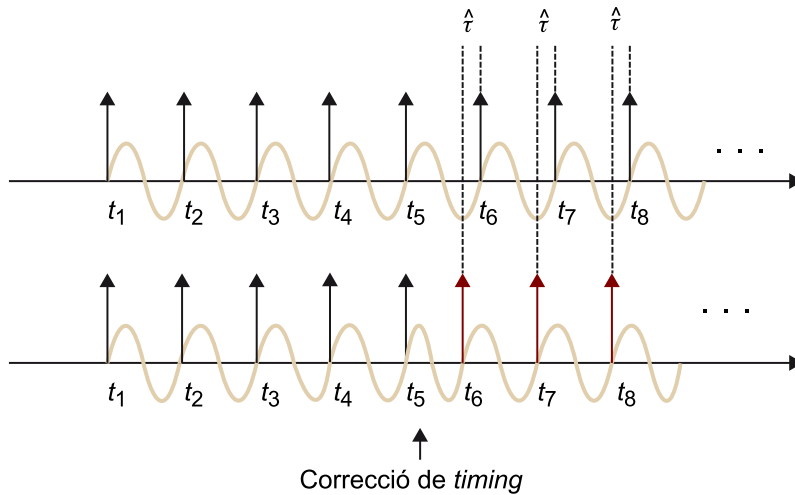
Sobre la fitxa de Cramer-Rao, podeu consultar l'obra següent:

Mengali, U.; Andrea, A. N. d' (1997). *Synchronization techniques for digital receivers*. Nova York, etc.: Plenum Press.

### Actuació sobre el mostrejador

Aquesta opció està lligada normalment a sincronitzadors en llaç tancat com els que presentem més endavant en la figura 16 de l'apartat 4 d'aquest mòdul.

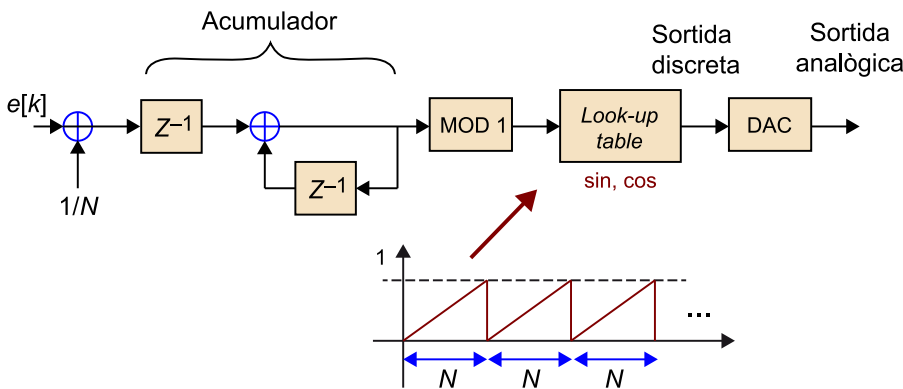
Figura 8. Impulsos enviats al mostrejador que marquen els instants de mostratge  $t_k$



Sobre l'eix superior s'han representat els impulsos originals, i a l'eix inferior, els impulsos avançats  $\hat{t}$  segons. Per a fer-ho, es modifica en l'instant  $t_5$  la freqüència de l'ona sinusoidal, que es mostra en color marró, que marca els instants en què s'envien els impulsos al mostrejador.

El circuit que fa aquesta operació es denomina *NCO* (*numerically controlled oscillator*), que és la implementació digital del circuit electrònic denominat *VCO* (*voltage controlled oscillator*). Amb l'*NCO* podem generar qualsevol ona periòdica (per exemple, una sinusoida) tot controlant-ne la freqüència amb el senyal discret d'entrada (vegeu la figura 9).

Figura 9. Esquema d'un NCO amb sortida discreta i analògica



L'entrada  $e[n]+1/N$  s'acumula fins que s'arriba a 1. Llavors, l'acumulador torna a zero (suma mòdul 1). Quan el senyal de control és  $e[n] = 0$ , la sortida de l'acumulador és un senyal dent de serra de període  $N$  com el que mostra la figura. El senyal  $e[n]$  permet canviar instantàniament la fase i la freqüència de la sortida de l'acumulador, tot allargant o escurçant els períodes del senyal dent de serra. El senyal periòdic que surt finalment de l'*NCO* s'obté llegint una taula (*look-up table*) en què es guarda un període del senyal periòdic esperat, com per exemple una sinusoida.

L'alternativa per a corregir el *timing* és completament digital i consisteix a remostrear el senyal mitjançant un filtre interpolador. Això és possible perquè el senyal útil ha estat mostreat complint el teorema del mostreig i, per tant, és possible reconstruir el valor del senyal en qualsevol instant a partir de les seves mostres (10):

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(nT_s)h(t - nT_s) \quad (10)$$

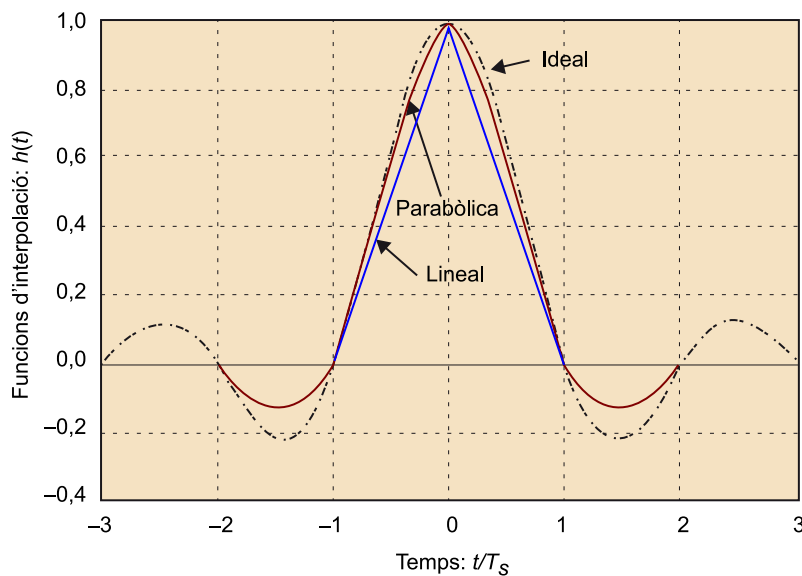
La funció interpoladora utilitzada en l'equació (10) idealment hauria de ser una funció sinc:

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t / T_s)}{\pi t / T_s} \quad (11)$$

Malgrat que la durada de la funció sinc és teòricament infinita,  $h(t)$  es pot aproximar agafant només els  $2K + 1$  lòbuls centrals, amb  $K$  entorn de 4 o 5.

En el cas de la correcció del *timing*, generalment no cal utilitzar l'interpolador ideal i es poden fer servir en lloc d'això interpoladors polinòmics de primer ordre (lineal), segon ordre (quadràtic), o en alguns casos, tercer ordre (cúbic). L'ordre de l'interpolador depèn de la distància entre mostres ( $T_s$ ) i de l'error d'interpolació que tolerem. En la figura 10 es mostra la resposta d'alguns dels interpoladors més habituals.

Figura 10. Funcions d'interpolació  $h(t)$  considerades: lineal, parabòlica i ideal (5 lòbuls)

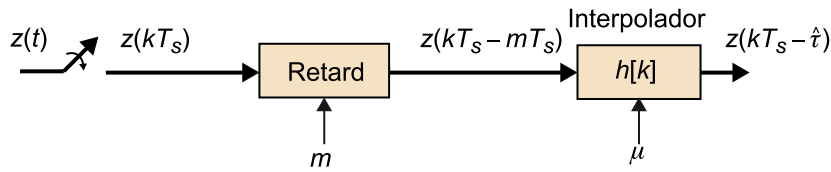


Utilitzant ara l'equació (10), podem remostrear el senyal  $z(t)$  en els instants  $t_k = kT_s - \hat{\tau}$ . L'expressió és la següent, en què hem dividit la correcció de *timing*  $\hat{\tau}$  en dues parts:  $\hat{\tau} = mT_s + \mu$ :

$$z(kT_s - \hat{\tau}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(nT_s)h(kT_s - \hat{\tau} - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(nT_s - mT_s)h(kT_s - \mu - nT_s) \quad (12)$$

Mentre que podem corregir fàcilment el component enter de  $\hat{\tau}$  ( $mT_s$ ) endarrerint  $m$  mostres la seqüència d'entrada  $z(nT_s)$ , el component fraccional de  $\hat{\tau}$  ( $0 \leq \mu < T_s$ ) s'ha de corregir mitjançant un filtre interpolador amb resposta impulsional  $h[k] = h(kT_s - \mu)$ . L'esquema complet es mostra en la figura 11.



Figura 11. Correcció digital del *timing* mitjançant un filtre interpolador

El senyal es retarda  $mT_s + \mu$  utilitzant el filtre interpolador  $h[k]$ , que corregeix l'error fraccional  $\mu$ . El període de mostreig,  $T_s$ , ha de complir el teorema de mostreig, és a dir,  $T_s < 1/2B$ , en què  $B$  és l'amplada de banda de  $z(t)$ .

## 2) Correcció de la fase i la freqüència

Suposem que disposem d'una estimació de l'error de fase  $\hat{\phi}$  i de l'error de freqüència  $\hat{\nu}$ . L'objectiu és corregir el senyal multiplicant-lo mostra a mostra per l'exponencial complexa  $\exp(-j2\pi\hat{\nu}kT_s - j\hat{\phi}) = \cos(\hat{\phi} + 2\pi\hat{\nu}kT_s) - j\sin(\hat{\phi} + 2\pi\hat{\nu}kT_s)$  que fa girar la fase de la mostra  $k$  del senyal en una quantitat  $-(\hat{\phi} + 2\pi\hat{\nu}kT_s)$  radians. Per a generar aquesta sinusoide discreta es pot utilitzar un senyal NCO com el de la figura 9, ajustant el senyal de control  $e(n)$  i la constant  $1/N$  perquè generin un sinus i un cosinus de la fase i la freqüència esperades. A més a més, si es treballa en format de coma fixa i es vol evitar el cost computacional de les multiplicacions, es pot recórrer a l'algorisme anomenat *CORDIC* (*coordinate rotation digital computer*), que permet descompondre qualsevol rotació de  $x$  radians en múltiples micro-rotacions que es poden fer desplaçant el valor binari de la mostra del senyal.

### 3. Sincronisme de freqüència de portadora

Quan el senyal es rep amb un error de freqüència gran, el primer que ha de fer el receptor és sincronitzar la freqüència de la portadora per a reduir aquest error per sota d'aproximadament el 10% de la velocitat de símbol, és a dir,  $vT < 0,1$ . Aquest valor és orientatiu, però garanteix que les pèrdues degudes a la desadaptació del filtre adaptat no siguin excessives. Com que suposem que inicialment l'error de freqüència pot ser més gran que  $0,1/T$ , caldrà estimar aquest error i corregir-lo processant el senyal a l'entrada del filtre adaptat. És a dir, no es podrà treballar a la sortida del filtre adaptat fins que no reduïm l'error de freqüència suficientment ( $vT < 0,1$ ) (vegeu l'exercici 2 de les activitats).

Si anomenem  $y(t)$  el senyal complex a l'entrada del filtre adaptat, tenim l'expressió següent, en què  $n(t) = i_n(t) + jq_n(t)$  és el soroll complex present a l'entrada del filtre adaptat:

$$y(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \exp\{j\phi\} \exp\{j2\pi\phi t\} p(t - nT + \tau) + n(t) \quad (13)$$

Com es pot veure, l'expressió de  $y(t)$  és la mateixa que l'expressió de  $z(t)$  a la sortida del filtre adaptat (equació (3)) si se substitueix el pols a la sortida del filtre adaptat  $R_p(t) = p(t) * p(-t)$  pel pols a la seva entrada  $p(t)$  i es considera el soroll  $n(t)$  a la sortida del filtre adaptat en lloc del soroll  $\eta(t)$  a l'entrada. Es pot demostrar que els components en fase i en quadratura del soroll  $i_n(t)$  i  $q_n(t)$  són independents l'un respecte de l'altre i tenen amplitud gaussiana de mitjana zero i variància  $N_0B$ , en què  $N_0/2$  es la densitat espectral de potència del soroll del receptor  $w(t)$  i  $B$  és l'amplada de banda del filtre passabanda  $H_R(f)$  (vegeu la figura 1).

L'amplada de banda d'aquest filtre ha de ser prou gran perquè el senyal útil passi sense cap distorsió. Això significa que  $B$  ha de ser més gran o igual que  $B_s + 2v_{max}$ , en què  $B_s$  és l'amplada de banda del senyal transmès i  $v_{max}$  és el màxim error de freqüència que sabem que pot tenir el senyal  $y(t)$ . Per a entendre la raó del terme  $2v_{max}$ , cal tenir present que l'exponencial complexa  $\exp(j2\pi vt)$  que apareix en l'equació (13) fa que l'espectre del senyal  $y(t)$  no estigui centrat entorn de 0 Hz sinó que estigui desplaçat  $v$  hertz, en què aquest desplaçament sabem que està delimitat dins de l'interval  $-v_{max} < v < v_{max}$  (vegeu la figura 12).

Si volem implementar digitalment el sincronitzador de portadora caldrà mostrejar el senyal  $y(t)$  a una freqüència  $F_s$  que ha de ser més gran o igual que l'amplada de banda del receptor ( $B$  hertz). Per senzillesa escollim una freqüèn-

#### Nota

Cal recordar que estem treballant amb notació complexa en què la part real correspon al component en fase i la part imaginària al component en quadratura. D'altra banda, com que el filtre adaptat dels components en fase i en quadratura és idèntic, considerarem que tenim un únic filtre adaptat que processa el senyal complex a la seva entrada.

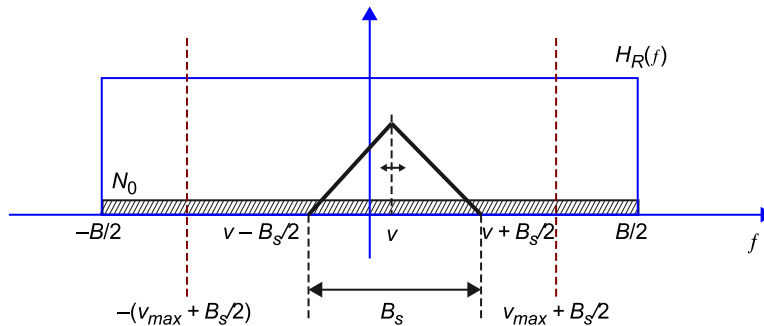
cia de mostratge múltiple del període de símbol, és a dir,  $F_s = N_{ss}/T$ , en què  $N_{ss}$  és l'anomenat *factor de sobremostratge*, que ens indica quantes mostres per símbol estem adquirint (vegeu la figura 12).

Una vegada fixada la freqüència de mostratge, podem mostrejar el senyal  $y(t)$  de l'equació (13), i obtenim el senyal discret següent, en què  $T_s = 1/F_s$  és el període de mostratge i  $n[k] = n(kT_s)$  són les mostres del soroll a l'entrada del filtre adaptat:

$$y[k] = y(kT_s) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \exp\{j\phi\} \exp\{j2\pi\nu kT_s\} p(kT_s - nT + \tau) + n[k] \quad (14)$$

Per a simplificar el disseny del sincronitzador, encara que no és imprescindible, considerarem que les mostres de  $n[k]$  són estadísticament independents (soroll blanc), és a dir que tenen densitat espectral de potència constant en l'interval  $\pm F_s/2$ . Perquè això sigui cert cal que la freqüència de mostratge  $F_s$  coincideixi exactament amb l'amplada de banda del receptor  $B$ , és a dir,  $F_s = B$  (vegeu la figura 12). Tenint en compte tot això, d'ara endavant considerarem que  $n[k]$  són mostres independents de soroll gaussià (complex) de mitjana zero i variància  $\sigma_n^2 = 2N_0B = 2N_0F_s = 2N_0N_{ss}/T$ , quantitat que correspon a la suma de la variància dels components en fase i en quadratura del soroll.

Figura 12. Espectre del senyal a l'entrada del filtre adaptat



En la figura es representa l'espectre del senyal  $y(t)$  a l'entrada del filtre adaptat mitjançant un triangle, desplaçat  $\nu$  Hz a causa de l'error de freqüència. El senyal  $y(t)$  pot tenir contingut espectral en l'interval marcat en vermell, que comprèn les freqüències entre  $-(\nu_{max} + B_s/2)$  i  $\nu_{max} + B_s/2$ , en què  $\nu_{max}$  és el màxim error de freqüència que pot tenir el senyal. En blau es representa l'equivalent passabaix del filtre receptor  $H_R(f)$  que limita el soroll entre  $\pm B/2$  i deixa passar el senyal útil sense distorsió sigui quin sigui el valor de  $\nu$ , és a dir,  $B \geq 2 \nu_{max} + B_s$ . Per a no mostrejar amb alíasing el soroll i que les mostres de soroll estiguin incorrelacionades, s'ha de complir que la freqüència de mostreig  $F_s$  sigui exactament igual a  $B$ .

Considerant que el receptor encara no ha sincronitzat la trama i que tampoc no es poden prendre decisions fiables respecte dels símbols transmesos a causa dels errors de sincronisme, per a fer una estimació de l'error inicial de freqüència s'utilitza un esquema no assistit per dades. En aquest cas, l'únic que sabem respecte dels símbols transmesos  $a[n]$  de l'equació (14) és que són independents i que pertanyen a un alfabet discret (constel·lació) de  $M$  valors equiprobables, és a dir,  $a[n] \in \mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_M\}$  amb  $p(a_i) = 1/M$ . A partir de la teoria explicada en el subapartat 2.1, l'estimador NDA òptim es pot formular com

aquell que maximitza la funció de versemblança de l'equació (6). En concret, si prenem  $K$  mostres del senyal rebut  $y[k]$ , es pot demostrar que la funció de versemblança que hem de maximitzar és la següent:

$$p(y|\phi, \nu, \tau) = C \sum_{\{a[n]\} \in \mathcal{A}} \exp\left(\frac{2}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^K \Re\{x^*[k]y[k]\}\right) \quad (15)$$

**Nota**

La demostració es demana en l'exercici 9.

en què  $C$  és una constant irrellevant,  $\sigma_n^2$  és la variància de les mostres del soroll blanc  $n[k]$ ,  $y[k]$  són les mostres del senyal rebut,  $x[k]$  són les mostres del senyal reconstruït assumint que el valor dels paràmetres de sincronisme és  $\theta = [\phi, \nu, \tau]$ , i  $a[n]$  és la seqüència de símbols transmesos. Cal tenir present que el valor real dels paràmetres de sincronisme  $\theta_0$  del senyal observat  $y$  és desconegut i que  $\theta$  és només el vector de paràmetres que estem considerant temptativament. Per a trobar les mostres del senyal reconstruït,  $x[k]$ , només ens cal eliminar de l'equació (14) el soroll, i obtenim l'expressió següent, en què hi hem feta explícita la dependència de  $x[k]$  amb els paràmetres de sincronisme i  $a[n]$ , per no complicar excessivament la notació:

$$x[k] = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \exp\{j\phi\} \exp\{j2\pi\nu kT_s\} p(kT_s - nT + \tau) \quad (16)$$

Mirant l'equació (15), se'ns plantegen dos problemes:

1) El primer és que no és possible calcular analíticament la mitjana respecte dels símbols transmesos  $a[n]$ . Aquest problema se soluciona dissenyant el sincronitzador per a funcionar a molt baixa SNR, és a dir,  $\sigma_n^2 \rightarrow \infty$ . Com que la variància del soroll és gran, l'argument de l'exponencial en l'equació (15) és petit i podem aproximar l'exponencial per una sèrie de Taylor d'ordre 2, és a dir,  $\exp(x) \approx 1 + x + x^2/2$ . D'aquesta manera, es pot fer fàcilment la mitjana respecte dels símbols transmesos (sumatori de l'equació (15)) i, quan es fa, es conclou que a baixa SNR el resultat és independent de la modulació digital utilitzada. Cal destacar que l'aproximació de baixa SNR és bastant correcta en la majoria dels sistemes de comunicacions digitals actuals.

2) El segon problema és que l'equació (15) depèn dels errors de sincronisme de fase ( $\phi$ ) i *timing* ( $\tau$ ), que encara no han estat sincronitzats. Aquest problema es resol modelitzant aquests paràmetres de sincronisme com a variables aleatòries uniformes en l'interval  $\pm\pi$  (error de fase) i  $\pm T/2$  (error de *timing*). D'aquesta manera, el sincronitzador de portadora obtingut funciona correctament independentment del valor concret que prenguin els errors de *timing* i fase durant el temps d'observació. Aquesta estratègia no és òptima, perquè idealment s'hauria de fer una estimació conjunta de tots els paràmetres, però permet seqüenciar la sincronització dels diferents paràmetres de sincronisme.

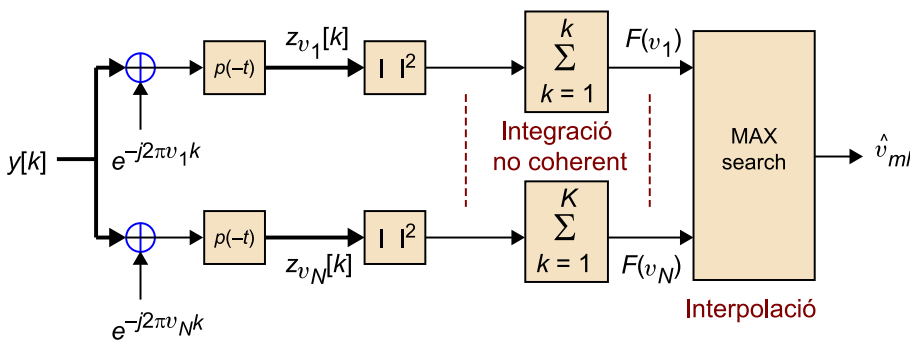
Aplicant ara les recomanacions dels dos paràgrafs anteriors a la funció de versemblança de l'equació (15), obtenim el següent estimador de l'error de freqüència  $\nu$ :

$$\hat{\nu}_{ml} = \arg \max_{\nu} E_{\phi, \tau} \{ p(\mathbf{y} | \phi, \nu, \tau) \} = \arg \max_{\nu} \sum_{k=1}^K |z_{\nu}[k]|^2 \quad (17)$$

en què  $z_{\nu}[k]$  és la sortida del filtre adaptat mostrejada cada  $T_s = T/N_{ss}$  segons quan hi entrem  $y[k] \exp\{-j2\pi\nu k T_s\}$ , que són les mostres del senyal rebut  $y[k]$  corregides en freqüència  $-\nu$  Hz.

Per tant, l'estimador NDA de l'error de freqüència ha de trobar quina és la correcció de freqüència que s'ha d'aplicar al senyal per a maximitzar l'energia mesurada a la sortida del filtre adaptat durant l'interval d'observació escollit de  $K$  mostres.

Figura 13. Esquema del sincronitzador NDA de l'error de freqüència



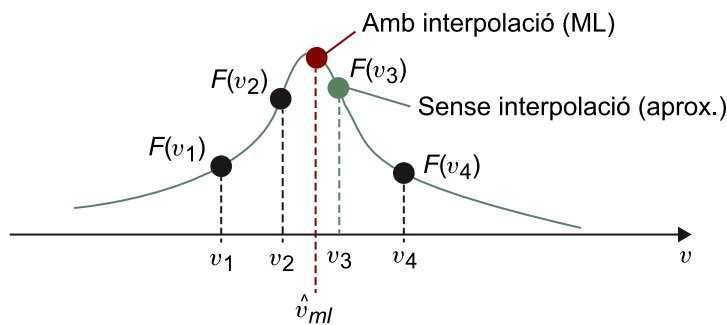
El filtre adaptat  $p(-t)$  de la figura s'implementa digitalment i la resposta impulsional és  $h[k] = p(-kT_s)$ . En la figura es parla d'integració no coherent perquè s'integra el mòdul al quadrat del senyal (energia).

Com que  $\nu$  és una variable contínua que pren valors en l'interval  $-\nu_{max} < \nu < \nu_{max}$ , cal avaluar la funció  $F(\nu)$  següent en  $N$  valors  $\nu_1, \dots, \nu_N$  dins d'aquest interval i després interpol·lar la funció  $F(\nu)$  per a trobar-ne el màxim:

$$F(\nu) = \sum_{k=1}^K |z_{\nu}[k]|^2 \quad (18)$$

Depenent del valor de  $N$  triat, la interpolació de la funció  $F(\nu)$  no serà necessària; utilitzarem un interpolador lineal, o haurèm d'utilitzar un interpolador quadràtic o cúbic (exercici 10 de les activitats). En la figura 13 es mostra la implementació de l'estimador de freqüència proposat i en la figura 14 un exemple del procés d'interpolació.

Figura 14. Exemple de la cerca del màxim de  $F(v)$  per al cas  $N = 4$ , amb interpolació i sense



Per acabar, és interessant destacar els següents aspectes de l'algorisme de sincronització de portadora presentat (equació (17)):

1) L'estimador és una funció no lineal (quadràtica) de les dades. En concret, es calcula l'energia del senyal sobremostrejat a la sortida del filtre adaptat. En canvi, l'estimador DA de la freqüència és lineal amb les dades.

2) Com que l'energia no depèn de la fase del senyal, aquest esquema permet sincronitzar la freqüència de la portadora sense conèixer-ne la fase.

3) Com que l'estimador proposat treballa amb sobremostratge ( $N_{ss} > 1$ ), l'energia mesurada a la sortida del filtre adaptat tampoc no depèn de l'error de *timing*, que únicament introdueix una fase lineal en el domini de la freqüència. D'aquesta manera, l'esquema proposat pot fer una estimació de la freqüència de la portadora sense conèixer aquest error de *timing*.

4) En el cas de transmissió de paquets, l'esquema de la figura 5 permet fer una estimació de l'error de freqüència i alhora detectar aproximadament l'instant d'arribada del paquet. Per a fer-ho, cal estar comparant tota l'estona el màxim de  $F(v)$  amb un llindar  $\lambda$ . Quan  $\max_v F(v) > \lambda$ , es considera que les primeres  $K$  mostres del paquet ja han entrat en l'integrador (sumador) de la figura 13 i que l'error de freqüència del paquet val  $\hat{\nu}_{ml} = \arg \max_v F(v)$ . No obstant això, a causa del soroll, no és possible amb aquest mètode establir amb precisió quin és el principi del paquet i, per tant, cal sincronitzar posteriorment la trama (apartat 6).

5) Hi ha altres algorismes NDA per a sincronitzar la freqüència de la portadora. Un dels més destacats és el conegut com a *delay and multiply*, que permet fer l'estimació de  $\nu$  utilitzant una fórmula tancada, i evitar d'aquesta manera la cerca del màxim que requereix l'equació (17). Aquest algorisme es descriu en l'exercici 11 de les activitats.

6) En el cas de l'estimació de la freqüència, el preu que es paga per utilitzar un algorisme NDA en lloc d'un algorisme assistit per dades és molt gran: la variància de l'error d'estimació d'un algorisme DA és molt més petita! Així

com en el cas DA la variància decau de manera inversament proporcional al cub de  $K$ , en el cas NDA decau només de manera inversament proporcional a  $K$ . No obstant això, els algorismes DA requereixen que s'hagi sincronitzat la trama (apartat 6) i tenen un marge de funcionament molt més petit que els NDA i, per tant, no s'utilitzen per a compensar l'error de freqüència inicial.

## 4. Sincronisme de símbol

En l'apartat anterior hem sincronitzat la freqüència de la portadora, i l'error de freqüència residual  $\nu$  s'ha fet prou petit. Cal recordar que considerem que l'error de freqüència és "petit" quan no supera el 10% de la velocitat de símbol ( $\nu T < 0,1$ ) i es pot treballar a la sortida del filtre adaptat sense pèrdues significatives de desadaptació. Una vegada estimada la freqüència, el pas següent és estimar i corregir l'error de *timing* ( $\tau$ ) per a trobar els instants de mostratge òptims a la sortida del filtre adaptat.

Com que desconeixem el vector de símbols transmesos  $\mathbf{a}$ , i encara ens falta sincronitzar la fase de la portadora ( $\phi$ ), començarem plantejant un algorisme de sincronització del *timing* no assistit per dades. L'estimador NDA òptim de l'error de *timing* es formula seguint els mateixos passos que hem seguit en l'apartat anterior. Primer hem d'agafar un vector de  $K$  mostres del senyal rebut (equació (14)) i després plantejar la funció de versemblança de l'equació (15) considerant ara que l'error de freqüència és pràcticament nul, és a dir,  $\nu \approx 0$ . Llavors, es fa l'aproximació de baixa SNR i es calcula la mitjana respecte del vector de símbols transmesos  $\mathbf{a}$  i respecte de l'error de fase  $\phi$ , que es modelitza com una variable aleatòria uniforme entre  $\pm\pi$  radians. Com a resultat d'això, obtenim la següent aproximació a baixa SNR de l'estimador ML de l'error de *timing*, en què  $z_\tau[k] = z(kT + \tau)$  és la sortida del filtre adaptat (equació (3)), mostrejada cada  $T$  segons aplicant un retard de  $-\tau$  segons ( $\tau$  prendrà valors negatius):

$$\hat{\tau}_{ml} = \arg \max_{\tau} E_{\phi} \{ P(\mathbf{y}|\phi, \nu = 0, \tau) \} = \arg \max_{\tau} \sum_{k=1}^K |z_\tau[k]|^2 \quad (19)$$

Per tant, l'estimador NDA de l'error de *timing* busca quina és la correcció de *timing* que s'ha d'aplicar al senyal rebut per tal de maximitzar l'energia dels  $K$  símbols detectats a la sortida del filtre adaptat, que reben el nom col·loquial de *strokes*.

Com que  $\tau$  és una variable contínua que pren valors en l'interval  $-T/2 < \tau \leq T/2$ , cal avaluar la funció  $F(\tau)$  en  $N$  valors  $\tau_1, \dots, \tau_N$  dins d'aquest interval i després interpolar la funció  $F(\tau)$  per a trobar-ne el màxim:

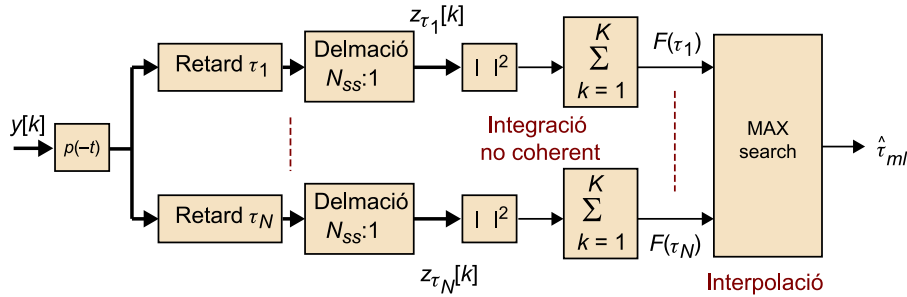
$$F(\tau) = \sum_{k=1}^K |z_\tau[k]|^2 \quad (20)$$

Si aquests  $N$  retards són múltiples del període de mostratge  $T_s = T/N_{ss}$ , només cal retardar o avançar el senyal a la sortida del filtre adaptat un nombre sencer de mostres i obtenir així fins a  $N = 2 N_{ss} - 1$  retards diferents. Si els retards



no són múltiples de  $T_s$ , s'ha de remostrejar el senyal tal com expliquem en el subapartat 2.2. En la figura 15 es mostra la implementació de l'estimador de *timing* proposat.

Figura 15. Esquema del sincronitzador NDA de l'error de *timing* proposat



El filtre adaptat  $p(-t)$  de la figura s'implementa digitalment i la seva resposta impulsional és  $h[k] = p(-kT_s)$ . L'operació de delmació conserva només una de cada  $N_{ss}$  mostres, de manera que a la seva sortida es treballa a velocitat de símbol  $(1/T)$ .

És interessant destacar els següents aspectes de l'algorisme de sincronització de *timing* presentat (equació (19)):

- 1) L'estimador és una funció no lineal (quadràtica) de les dades. En concret, es calcula l'energia dels símbols detectats (*strokes*) a la sortida del filtre adaptat. Per contra, l'estimador DA del *timing* és lineal amb les dades.
- 2) Com que l'energia no depèn de la fase del senyal, aquest esquema permet sincronitzar el *timing* sense conèixer la fase de la portadora. No obstant això, s'assumeix que l'error de freqüència és prou petit ( $\nu T < 0,1$ ).
- 3) Es pot demostrar que l'estimador de *timing* proposat funciona si es mostreja el senyal rebut a 2 mostres per símbol ( $N_{ss} = 2$ ). No obstant això, pot interessar augmentar el valor de  $N_{ss}$  per sobre de 2 per a treballar amb més de tres retards que siguin múltiples del període de mostreig  $T_s$ , i simplificar d'aquesta manera l'interpolador.

Abans de concloure aquest apartat, presentarem una possible implementació en llaç tancat del sincronitzador de *timing* obtingut en l'equació (19). Com hem comentat al principi de l'apartat 2, els esquemes en llaç tancat tenen menys complexitat i són més adequats per a seguir les variacions del paràmetre en el cas de paquets llargs o transmissions contínues.

En un esquema en llaç tancat, el màxim de la funció de versemblança es busca iterativament. Això vol dir que cada vegada que ens arriba una nova mostra de  $z[k]$ , l'estimació del paràmetre es corregeix en funció del valor de la derivada (gradient) de la funció de versemblança, que en el cas del *timing* és la funció següent:

$$G(\tau) = \frac{\partial F(\tau)}{\partial \tau} = 2 \sum_{k=1}^K \Re \left\{ z_{\hat{\tau}}^*[k] \frac{\partial z_{\hat{\tau}}[k]}{\partial \tau} \right\} \quad (21)$$

Aquesta funció val zero quan  $\tau = \hat{\tau}_{ml}$  (màxima versemblança), pren un valor positiu quan  $\tau < \hat{\tau}_{ml}$ , i un valor negatiu quan  $\tau > \hat{\tau}_{ml}$ . D'aquesta manera,  $G(\tau)$  ens indica en cada instant en quina direcció ens hem de moure per arribar a la solució ML. Abans de continuar, cal assenyalar que la derivada de  $z_{\hat{\tau}}[k]$  respecte de  $\tau$  que apareix en l'equació (21) es pot aproximar numèricament de la manera següent:

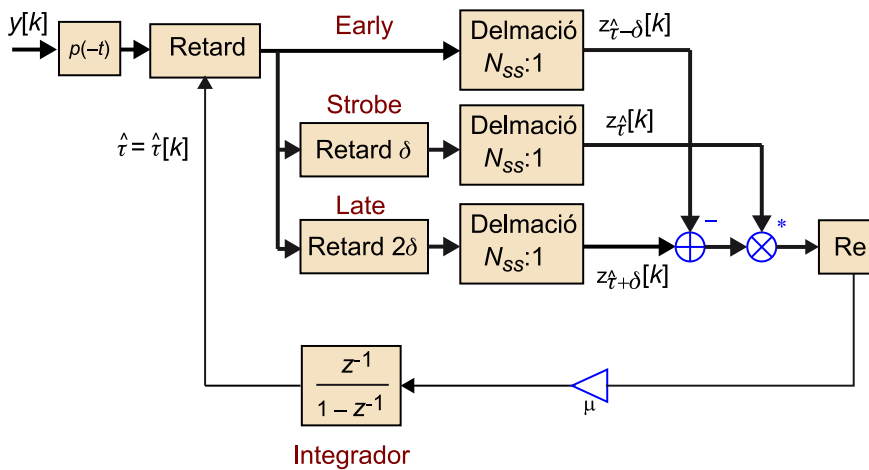
$$\frac{\partial z_{\hat{\tau}}[k]}{\partial \tau} \approx \frac{z_{\hat{\tau}+\delta}[k] - z_{\hat{\tau}-\delta}[k]}{2\delta} \quad (22)$$

Prenent com a base les equacions anteriors, es pot formular el següent sincronitzador NDA enllaç tancat de l'error de *timing*, que es denomina *early and late* pel fet que es calcula la diferència entre la sortida del filtre mostrejada  $\delta$  segons abans (*early*) i la sortida del filtre adaptat mostrejada  $\delta$  segons més tard (*late*):

$$\hat{\tau}[k+1] = \hat{\tau}[k] + \mu \Re \left\{ z_{\hat{\tau}[k]}^* \cdot \left( z_{\hat{\tau}[k]+\delta}[k] - z_{\hat{\tau}[k]-\delta}[k] \right) \right\} \quad (23)$$

En la figura 16 se'n mostra la implementació.

Figura 16. Esquema del sincronitzador enllaç tancat proposat pel *timing* (*early and late*)



El primer retardador ha de remostrejar el senyal en cada iteració del laç tancat (cada  $T$  segons) perquè la correcció de *timing*  $\hat{\tau}$  no és gairebé mai múltiple del període de mostreig  $T_s$ .

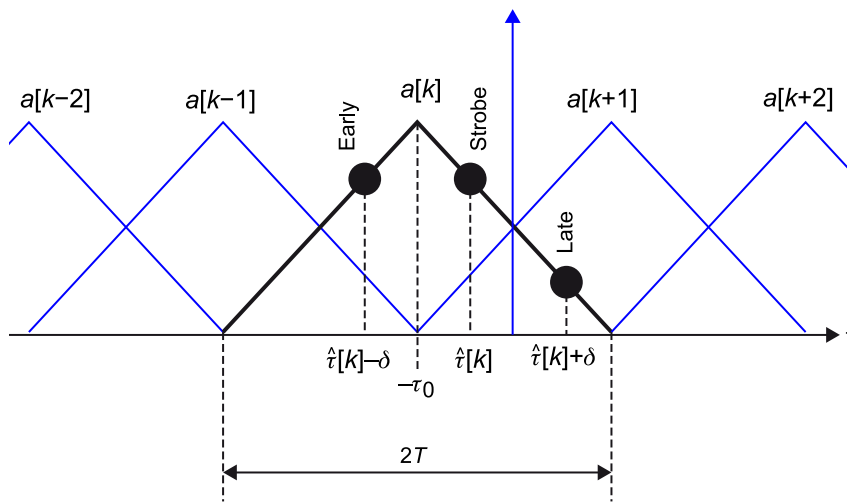
Per a entendre l'equació (23) cal tenir present el següent:

- S'ha eliminat el sumatori de l'equació (21) perquè aquesta integració es fa en l'equació (23) de manera recursiva. En concret, l'equació (23) correspon a l'equació d'un filtre recursiu d'ordre 1 amb resposta impulsional  $h[k] = \exp(-k/\mu)$ , en què  $\mu$  és la constant que determina la memòria del filtre. Si es vol que el laç tancat tingui la mateixa capacitat de filtratge que l'estimador ML de l'equació (19), que integrava  $K$  símbols, el valor de  $\mu$  s'ha de fixar

aproximadament a  $2/K$ , per a valors de  $K$  prou grans (per exemple,  $K = 100$ ). La demostració es demana en l'exercici 12 de les activitats.

- S'han eliminat tots els factors constants de l'equació (21) perquè queden absorbits dins de la constant del laç  $\mu$ .
- L'equació (23) s'ha d'entendre com una balança. Quan no hi ha error de *timing*, els dos costats de la balança,  $z_2^*[k]_{z_{\hat{\tau}+\delta}}[k]$  i  $z_2^*[k]_{z_{\hat{\tau}-\delta}}[k]$ , tenen el mateix valor mitjà i la balança es manté equilibrada. Si en un moment donat hi ha un error de *timing* positiu ( $\tau_0 + \hat{\tau}[k] > 0$ ),  $z_2^*[k]_{z_{\hat{\tau}+\delta}}[k]$  serà més petit (en valor mitjà) que  $z_2^*[k]_{z_{\hat{\tau}-\delta}}[k]$  i el terme corrector de l'equació (23) serà negatiu per a reduir el valor de  $\hat{\tau}[k]$  i compensar així l'error de *timing*. En la figura 17 es mostra gràficament aquest comportament.

Figura 17. Senyal a la sortida del filtre adaptat amb un pols conformador rectangular



**Figura 17**

Com es veu en la figura, si es mostra a la dreta de l'instant òptim,  $\hat{\tau}[k] > -\tau_0$ , les mostres *late* i *early* estan desbalancejades i el laç tancat de l'equació (23) redueix el valor de  $\hat{\tau}[k]$  per tal de balancejar-les i mostrejar en el pols següent, corresponent al símbol  $a[k+1]$ , més a prop del màxim del pols.

En la figura es mostra el senyal  $z(t)$  a la sortida del filtre adaptat en cas d'utilitzar un pols conformador rectangular. El triangle central (més gruixut) és el pols rebut corresponent al símbol  $a[k]$  i els triangles blaus més fins són els polsos anteriors i posteriors que generen interferència (ISI) en el càlcul de les mostres *early*, *strobe* i *late*. Aquesta interferència es denomina *soroll propi* (*self-noise*) en els llibres de sincronització i limita les prestacions del sincronitzador quan treballa a mitjana i alta SNR, mentre que a baixa SNR predomina el soroll del receptor.

Hi ha altres algorismes NDA per a sincronitzar el *timing*. Cal destacar l'algorisme conegut com a *square timing*, que permet fer una estimació del *timing* en laïç obert amb una fórmula tancada, i evitar així la cerca del màxim de la funció de versemblança que es fa en l'equació (19). En l'exercici 13 de les activitats s'analitza el funcionament d'aquest sincronitzador NDA del *timing*.

## 5. Sincronisme de fase de portadora

Una vegada sincronitzada la freqüència de la portadora ( $\nu T < 0,1$ ) i l'error de *timing*, el pas següent és sincronitzar l'error de fase de la portadora ( $\phi$ ). Com que desconeixem el vector de símbols transmesos  $\mathbf{a}$ , utilitzarem un altre cop un algorisme no assistit per dades. L'estimador NDA òptim de l'error de fase es formula seguint els mateixos passos que hem seguit en els dos apartats anteriors:

- Primer hem d'agafar un vector de  $K$  mostres del senyal rebut (equació (14)) i després plantejar la funció de versemblança de l'equació (16) considerant ara que l'error de freqüència i l'error de *timing* són pràcticament nuls, és a dir:  $\nu \approx 0$  i  $\tau \approx 0$ .
- Llavors, s'aproxima la funció de versemblança a baixa SNR mitjançant una sèrie de Taylor i es calcula la mitjana respecte del vector de símbols transmesos  $\mathbf{a}$ .

Ara bé, en el cas de la fase, ens trobem que hem d'estendre la sèrie de Taylor fins al terme d'ordre  $M$  perquè els termes anteriors són de mitjana zero. El valor de  $M$  que escollim depèn de la constel·lació utilitzada:  $M$  és el nombre de nivells en el cas de modulacions de fase (PSK), mentre que  $M$  ha de ser 4 per a modulacions "rectangulars" (QAM). Com a resultat d'això, obtenim la següent aproximació a baixa SNR de l'estimador ML de l'error de fase (equació (24)), que en el cas de la fase es pot resoldre analíticament i dona l'expressió (25), en què la funció  $\arg\{x\}^2$  calcula l'angle de  $x$  i  $z^M[k]$  es calcula elevat a  $M$  el valor dels símbols detectats a la sortida del filtre adaptat.

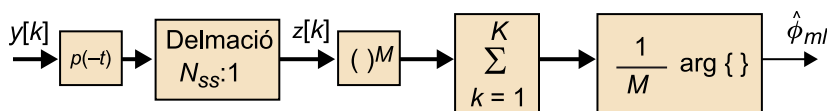
<sup>(2)</sup> Cal recordar que  $\arg\{x\}$  es calcula com l'arctangent de  $Im\{x\}/Re\{x\}$ .

$$\hat{\phi}_{ml} = \arg \max_{\phi} p(\mathbf{y}|\phi, \nu = 0, \tau = 0) = \arg \max_{\phi} \Re \left\{ e^{-jM\phi} \sum_{k=1}^K z^M[k] \right\} \quad (24)$$

$$\hat{\phi}_{ml} = \frac{1}{M} \arg \left\{ \sum_{k=1}^K z^M[k] \right\} \quad (25)$$

En la figura 18 es mostra la implementació de l'estimador de fase de l'equació (25).

Figura 18. Esquema de l'estimador NDA òptim de la fase a baixa SNR



És interessant destacar els següents aspectes de l'algorisme de sincronització de fase que hem presentat (equació (25)):

- L'estimació NDA de la fase requereix en general utilitzar no linealitats d'ordre superior a 2 i, per tant, l'estimació de fase és molt més sensible al soroll que les estimacions de freqüència i *timing* quan es treballa a baixa SNR. Cal senyalar que l'estimador DA de la fase és lineal en les dades.
- Els estimadors NDA de la fase no poden detectar errors de fase que siguin múltiples de  $2\pi/M$  radians. Això vol dir que la sortida de l'estimador de l'equació (25) serà la mateixa si l'error de fase de la portadora val  $\phi + i2\pi/M$  per a qualsevol valor del nombre enter  $i$  (vegeu l'exercici 14 de les activitats). Aquesta ambigüïtat de fase només es pot resoldre mitjançant estimadors assistits per dades i se solucionarà quan se sincronitzi la trama en l'apartat 6.

Com hem fet en l'apartat anterior, l'estimador ML que hem obtingut també es pot implementar utilitzant un esquema en llaç tancat. Per a fer-ho, hem de trobar la derivada (gradient) de la funció de versemblança de la fase, que obtenim derivant l'equació (24) respecte de  $\phi$ , i obtenim l'expressió següent, en què  $\mathcal{J}\{x\}$  és la part imaginària de  $x$ , i hem definit  $z_\phi[k]$  com la sortida del filtre adaptat corregida  $-\phi$  radians, és a dir,  $z_\phi[k] = z[k]e^{-j\phi}$ :

$$G(\phi) = \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi} = M \mathcal{J} \left\{ e^{-jM\phi} \sum_{k=1}^K z^M[k] \right\} = M \sum_{k=1}^K \mathcal{J} \left\{ z_\phi^M[k] \right\} \quad (26)$$

A partir del gradient de l'equació (26), trobem el següent sincronitzador NDA en llaç tancat de la fase:

$$\hat{\phi}[k+1] = \hat{\phi}[k] + \mu \mathcal{J} \left\{ z_{\hat{\phi}[k]}^M[k] \right\} \quad (27)$$

Aquest sincronitzador s'acostuma a anomenar *llaç de Costas* i es representa en la figura 15, considerant un filtre de llaç genèric  $F(z)$  en lloc del filtre de llaç  $F(z) = \mu$  considerat en l'equació (27). Aquest filtre és molt important quan hi ha un error de freqüència residual. Cal recordar que, encara que hem assumit que  $\nu = 0$  en el disseny dels sincronitzadors del *timing* i la fase, l'error residual de freqüència després de sincronitzar l'error inicial de freqüència (apartat 3) pot arribar a ser fins un 10% de la velocitat de símbol ( $\nu T < 0,1$ ).

Una manera de compensar aquest error de freqüència és substituint el filtre que hem considerat en l'equació (27) pel filtre següent, en què les constants  $\mu$  i  $\gamma$  s'han d'ajustar per a garantir al mateix temps que el llaç tingui una memòria efectiva de  $K$  símbols (vegeu l'equació (25)) i que el temps de convergència del

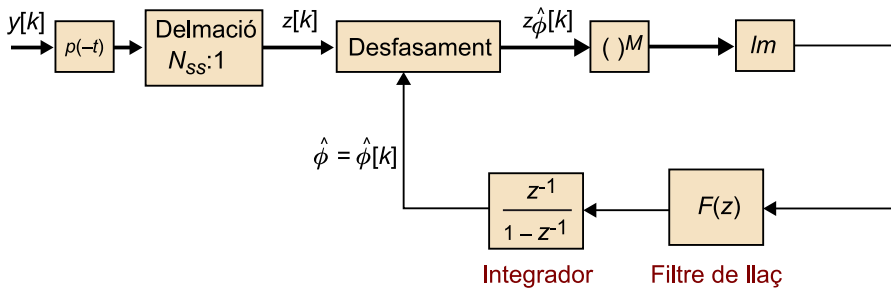
#### Nota

Si utilitzem el sincronitzador de fase de l'equació (27) hi ha un error de freqüència residual  $\nu$ , la fase estimada té un error sistemàtic igual a  $\nu TK$  radians. Això significa que, si necessitem augmentar la memòria del llaç ( $K$ ) per a filtrar més bé el soroll, l'error del sincronitzador de fase creixerà de manera proporcional amb  $K$ .

llaç sigui tan curt com sigui possible. Per a  $\gamma = 0$  es parla d'un llaç de fase de primer ordre (equació (27)), mentre que per a  $\gamma > 0$  obtenim un llaç de fase de segon ordre:

$$F(z) = \mu + \frac{\mu\gamma}{1-z^{-1}} \quad (28)$$

Figura 19. Implementació en llaç tancat del sincronitzador NDA òptim de la fase a baixa SNR (llaç de Costas)



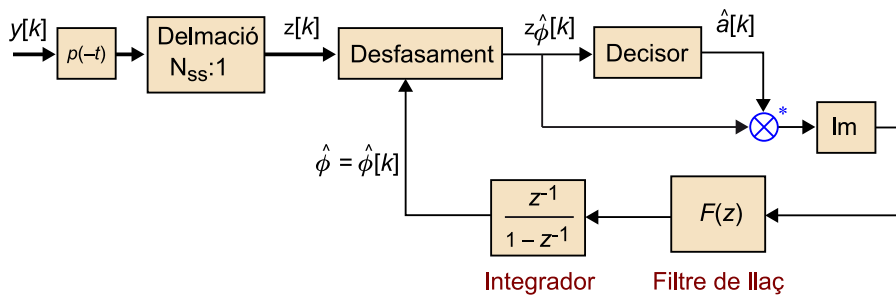
En la figura s'ha considerat un filtre de llaç genèric  $F(z)$ . En el cas del llaç d'ordre 1 de l'equació (27), es considera que  $F(z) = \mu$ .

Fins ara tots els esquemes de sincronisme que hem considerat han estat no assistits per dades. Les raons fonamentals són dues. La primera és que en molts casos estem treballant a baixa SNR i les decisions a la sortida del desmodulador són massa sorolloses per a utilitzar esquemes de sincronisme dirigits per decisions. La segona raó és que aquestes decisions no poden ser fiables en cap cas quan hi ha paràmetres sense sincronitzar. Aquest era el cas dels sincronitzadors de freqüència i *timing* utilitzats en els apartats 3 i 4. Si considerem ara que els errors de *timing* i freqüència són prou petits i que l'SNR en què estem treballant és raonablement bona, podem substituir el llaç tancat de fase NDA de l'equació (27) pel següent llaç tancat DD, en què  $\hat{a}[k]$  són les decisions *hard* a la sortida del desmodulador i  $z_{\phi}[k] = z[k]e^{-j\phi}$ :

$$\hat{\phi}[k+1] = \hat{\phi}[k] + \mu\mathcal{J} \left\{ \hat{a}^*[k] z_{\phi}[k] \right\} \quad (29)$$

El sincronitzador DD de la fase proposat es mostra en la figura 19. Per a arribar a l'equació (29), cal construir la funció de versemblança de la fase  $p(\hat{y}_{dd}, \phi, \nu = 0, \tau = 0)$  a partir de l'observació del senyal rebut durant  $KT$  segons (equació (14)) i de les decisions *hard*  $\hat{a}_{dd}$  calculades a la sortida del desmodulador durant l'interval observat. Cal assenyalar que els esquemes DD s'han d'implementar obligatòriament en llaç tancat ja que les decisions no són fiables fins que l'error de fase inicial no s'ha reduït prou. Igual que en el cas NDA, els esquemes DD no són capaços de resoldre l'ambigüitat de fase, és a dir, convergeixen a la mateixa solució per a tots els errors de fase que compleixen  $\phi + i2\pi/M$  ( $i$  enter) (vegeu l'exercici 15).

Figura 20. Implementació enllaç tancat del sincronitzador DD proposat



En la figura s'ha considerat un filtre de llaç genèric  $F(z)$ . En el cas del llaç d'ordre 1 de l'equació (29) es considera que  $F(z) = \mu$ .

## 6. Sincronisme de trama

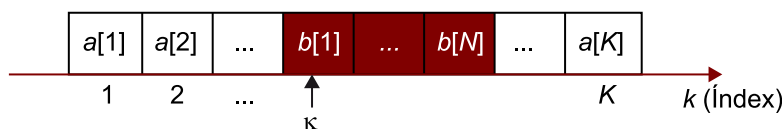
Una vegada sincronitzats tots els paràmetres de sincronisme (fase, freqüència i *timing*), el receptor encara ha de fer dues tasques més abans de poder recuperar correctament les dades d'informació. La primera tasca és resoldre l'ambigüitat de fase que no s'ha pogut resoldre amb el sincronitzador de fase utilitzat en l'apartat 5. La segona és determinar quin és l'índex temporal dels símbols d'informació que hem de lliurar al descodificador. Aquesta segona operació s'anomena *sincronització de trama* i requereix la transmissió d'una seqüència de dades conegudes, anomenada *paraula inequívoca* (*unique word*). El receptor ha de detectar l'arribada d'aquesta paraula inequívoca i utilitzar-la com a referència temporal per a localitzar on hi ha les dades d'informació, i finalment processar la paraula inequívoca per a resoldre l'ambigüitat de fase. Com que el receptor coneix el contingut i la localització de la paraula codi, la resolució de l'ambigüitat de fase es fa utilitzant un esquema assistit per dades.

El problema del sincronisme de trama es pot formular de la manera següent. Suposem que observem la sortida del filtre adaptat, mostrejada cada  $T$  segons, durant  $K$  instants consecutius ( $k = 1, \dots, K$ ). Les mostres obtingudes tenen l'expressió següent, que són les mostres de l'equació (4) considerant que els errors de freqüència i símbol són pràcticament nuls, però mantenint l'error de fase per culpa de l'ambigüitat de fase:

$$z[k] = A_c e^{j\phi} a[k] + \eta[k] \quad (30)$$

El problema que es planteja és trobar l'índex  $\kappa$  en què comença la paraula inequívoca  $b[1], \dots, b[N]$  sabent que aquest començament ha d'estar comprès entre  $\kappa = 1$  i  $\kappa = K - N$  (vegeu la figura 21). Per tant, el sincronisme de trama consisteix a decidir quin dels  $K - N$  possibles valors de  $\kappa$  és el més probable tenint en compte que es desconeix la fase de la portadora (ambigüitat de fase) i, en molts casos, el valor dels  $K - N$  símbols  $a[k]$  abans i després de la paraula inequívoca.

Figura 21. Procediment que se segueix per a sincronitzar la trama



En la figura es mostra el procediment que se segueix per a sincronitzar la trama: s'ha de buscar l'inici (índex  $\kappa$ ) de la paraula inequívoca  $b[1], \dots, b[N]$  dins d'un vector de  $K$  símbols  $a[1], \dots, a[K]$ . Aquests símbols s'observen a la sortida del filtre adaptat amb un error de fase encara no resolt i en presència de soroll.

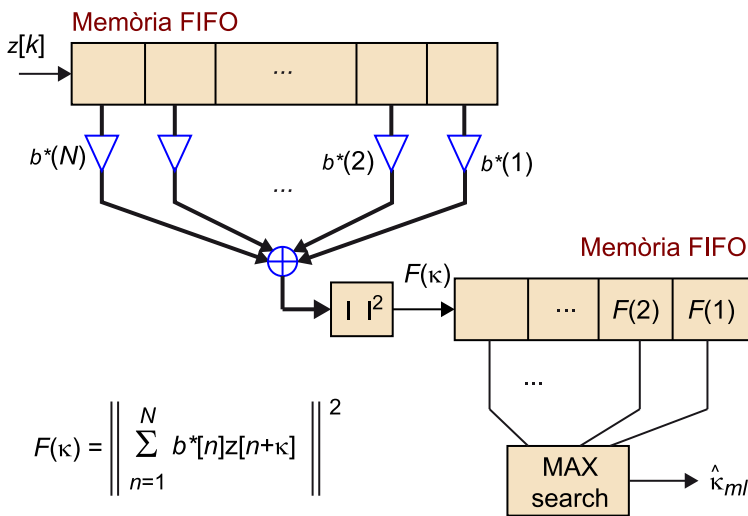
Utilitzant un altre cop la teoria de l'estimador/detector ML i fent l'aproximació a baixa SNR, es pot trobar el detector òptim de  $\kappa$  a baixa SNR, que té l'expressió següent, en què la constant  $\alpha$  depèn de la modulació que hàgim considerat:



$$\hat{\kappa}_{ml} = \arg \max_{\kappa \in \{1, K-N\}} \left( \left\| \sum_{n=1}^N b^*[n]z[n+\kappa] \right\|^2 - \alpha \sum_{n=1}^N |z[n+\kappa]|^2 \right) \quad (31)$$

Per exemple, en el cas de PSK, aquesta constant val 1. Encara que la solució òptima requereix considerar els dos termes de l'equació (31), a la pràctica el segon terme no se sol considerar, cosa que dóna lloc a l'esquema mostrat en la figura 22. Fixant-nos en el primer terme, el sincronisme de trama s'estableix quan la correlació entre la paraula inequívoca (coneguda) i la sortida del filtre adaptat és màxima.

Figura 22. Sincronitzador ML de la trama a baixa SNR



Les mostres a la sortida del filtre adaptat  $z[k]$  entren en la primera memòria FIFO (registre), començant per la mostra  $z[1]$  i acabant per la mostra  $z[K]$ . Quan el registre està ple amb les primeres  $N$  mostres de  $z[k]$ , es calcula  $F(1)$ , i en els propers  $K-N$  instants es calculen  $F(2), \dots, F(K-N)$ . Aquests valors es guarden en la segona memòria FIFO i, quan aquesta memòria és plena, es busca el valor de  $k$  que maximitza  $F(k)$ .

Una vegada sincronitzada la trama cal resoldre l'ambigüitat de fase. Per a fer-ho, cal maximitzar la funció de versemblança de l'equació (5) tenint en compte que els errors de símbol i freqüència són nuls i ara coneixem el contingut i posició de la paraula inequívoca  $b[1], \dots, b[N]$ . En concret, la funció de versemblança que hem de maximitzar és  $p(\mathbf{y}|\mathbf{b}, \phi, \nu=0, \tau=0)$ , en què el vector  $\mathbf{b}$  conté els  $N$  símbols que formen la paraula inequívoca. Per tant, es troba de manera senzilla que el màxim de la funció de versemblança s'ha de calcular de la manera següent, en què  $\hat{\kappa}_{ml}$  és l'estimació ML de la posició de la paraula inequívoca (equació (31)) i hem anomenat  $\phi_i = \hat{\phi}_{ml} + i2\pi/M$  els  $M$  possibles valors de la fase amb  $\hat{\phi}_{ml}$  l'estimació (ambigua) de fase calculada a l'apartat 5:

$$\hat{\phi}_{ml} = \arg \max_{\phi \in \{\phi_1, \dots, \phi_M\}} \Re \left\{ \sum_N^{n=1} b^*[n] z_{\phi} [n - \kappa_{ml}] \right\} \quad (32)$$

Arribats en aquest punt, el desmodulador ja s'ha sincronitzat amb el senyal rebut i està en condicions de prendre decisions sobre els símbols d'informació transmesos (si l'SNR és prou bona) o, en la majoria dels casos, lliurar al descodificador decisions *soft* sobre els símbols (o bits) transmesos perquè sigui el descodificador el que descodifiqui el missatge enviat pel transmissor.

**Nota**

Depenent de l'SNR i de la llargada de la paraula inequívoca ( $N$ ), pot convenir esperar a tenir sincronitzada la trama i fer llavors l'estimació de la fase utilitzant un esquema DA, en lloc dels esquemes NDA/DD de l'apartat 5. En l'exercici 16 de les activitats es considera l'estimador DA de la fase.

## 7. Conclusions

En els apartats d'aquest mòdul hem estudiat per què sempre hem de sincronitzar el receptor amb el senyal rebut abans de descodificar la informació enviada pel transmissor. Hem dissenyat els algorismes de sincronització considerats a partir de la teoria de l'estimador de màxima versemblança (ML), que permet obtenir estimadors òptims dels paràmetres de sincronisme quan el nombre de dades processades és gran i el senyal rebut és força sorollós (baixa SNR). Aquests estimadors, els hem implementat utilitzant esquemes en llaç obert i llaç tancat, i hem analitzat els avantatges i inconvenients de les dues alternatives.

D'altra banda, hem considerat diferents algorismes de sincronització segons el coneixement que el receptor té sobre la seqüència de símbols transmesos (algorismes DA, DD, CA i NDA). Els algorismes no assistits per dades (NDA) han rebut una atenció especial perquè permeten fer l'estimació de tots els paràmetres de sincronisme quan no es coneix la posició dels símbols dins de la trama (sincronisme de trama) i, per tant, no es poden utilitzar esquemes assistits per dades (DA). En el cas de la fase, hem estudiat també un sincronitzador dirigit per decisions (DD), que es pot aplicar sempre que les decisions del desmodulador siguin prou fiables (SNR alta). Per acabar, hem presentat l'algorisme DA utilitzat habitualment per a sincronitzar la trama i resoldre llavors l'anomenada *ambigüitat de fase*.

L'objectiu d'aquest mòdul didàctic no ha estat en cap cas conèixer tots els algorismes de sincronització que podem trobar a la literatura, que són molts i estan àmpliament documentats a la bibliografia, sinó conèixer com es dissenyen i s'implementen actualment aquests algorismes a la pràctica. Amb aquest propòsit, hem seleccionat alguns dels algorismes de sincronització més coneguts i els hem utilitzat per a sincronitzar el receptor des del moment en què l'encenem. Per això, hem sincronitzat un a un tots els paràmetres de sincronisme, i hem deixat finalment el receptor en condicions de descodificar el missatge d'informació.



## Activitats

1. Considereu que el receptor no està sincronitzat amb el senyal rebut i els errors de sincronisme són  $\phi$  (fase),  $\nu$  (freqüència) i  $\tau$  (timing). Demostreu que l'equació (3) ens dóna l'equivalent passabaix a la sortida dels filtres adaptats de la figura 1. Considereu que l'error de freqüència  $\nu$  és molt més petit que la velocitat de símbol  $1/T$  i, per tant, podem considerar que no distorsiona gens la forma dels polsos rebuts. Si us cal, utilitzeu les identitats trigonomètriques següents:

$$2\cos(A)\cos(B) = \cos(A-B) + \cos(A+B)$$

$$2\sin(A)\cos(B) = \sin(A-B) + \sin(A+B)$$

$$2\sin(A)\sin(B) = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

2. Trobeu quina és la pèrdua d'SNR a la sortida del filtre adaptat (mostrejant cada  $T$  segons) quan hi ha un error de freqüència  $\nu$ . Considereu que el pols conformador és rectangular sense retorn a zero i que l'error de símbol és nul. Prenent com a base el resultat, calculeu la degradació si  $\nu T = 0,1$ .

3. Trobeu la probabilitat d'error de la modulació BPSK quan es desmodula amb un error de fase constant  $\phi$ . Assumiu que no hi ha cap altre error de sincronisme. Expresses el resultat en funció de  $\phi$  i la relació  $E_b/N_0$  rebuda.

4. La modulació DQPSK és una modulació diferencial de 4 nivells en què els símbols transmesos són  $b[n] = b[n-1]d[n]\exp(j\pi/4)$  amb  $d[n] \in \mathcal{A} = \{1, \exp(j\pi/2), \exp(j\pi), \exp(j3\pi/2)\}$  els símbols d'informació. Proposeu la manera de recuperar en recepció els símbols d'informació  $a[n]$  a partir dels símbols  $b[n]$  rebuts. Demostreu que l'esquema proposat recupera els símbols d'informació correctament, encara que els símbols rebuts  $b[n]$  estiguin girats un angle  $\phi$ . Assumiu que no hi ha cap altre error de sincronisme ni soroll.

5. La modulació ASK (*amplitude shift keying*) és una modulació d'amplitud digital. En el cas de la modulació ASK de dos nivells, els símbols transmesos  $a[n]$  pertanyen a l'alfabet  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ . Considereu que els símbols rebuts han experimentat una rotació de  $\phi$  radians i trobeu un esquema de desmodulació no coherent que sigui insensible a l'error de fase  $\phi$  i que recuperi els símbols transmesos  $a[n]$  a partir de les mostres  $z[k]$  a la sortida del filtre adaptat. Assumiu que no hi ha cap altre error de sincronisme. Calculeu llavors la probabilitat d'error d'ASK i compareu-la amb la que s'obtingria en BPSK utilitzant un desmodulador coherent amb un error de fase  $\phi$  (exercici 3). Si us cal, tingueu en compte que, si les mostres del soroll  $n$  són variables aleatòries gaussianes complexes de mitjana zero i variància  $\sigma^2$ , el seu mòdul al quadrat,  $u = |n|^2$ , segueix una distribució exponencial de mitjana  $\sigma^2$ , es a dir,  $f_u(u) = \sigma^{-2}\exp(-\sigma^2 u)$ . D'altra banda, si us cal, considereu que  $|n| \ll 1$  (SNR alta) i feu l'aproximació  $|n|^2 \gg |n|$ .

6. La modulació PPM (*pulse position modulation*) és una modulació en què el període de símbol es divideix en  $M$  intervals de durada  $T/M$  i la informació es codifica en la posició del pols transmès, és a dir, el pols transmès (de durada  $T/M$  segons) es retarda  $a[k]$  segons, en què  $a[k] \in \mathcal{A} = \{0, 1, \dots, M-1\}$  és la seqüència de símbols d'informació. Si ens centrem en el cas de 2 nivells ( $M = 2$ ), trobeu un esquema de desmodulació no coherent que sigui insensible als errors de fase i permeti recuperar els símbols  $a[k]$  a partir del senyal rebut  $y_R(t)$  (figura 1). Considereu que el senyal rebut té un error de fase de  $\phi$  radians però que la resta d'errors de sincronisme val zero.

7. Tornant a la modulació diferencial DQPSK, demostreu que els símbols d'informació recuperats pel desmodulador de l'exercici 4 són  $a[n]\exp(j2\pi\nu T)$ , en lloc de  $a[n]$ , quan els símbols rebuts són  $b[n]\exp(j(2\pi\nu T + \phi))$ , en lloc de  $b[n]$ . Considereu que el sincronisme de *timing* és perfecte.

8. Calculeu la probabilitat d'error de la modulació BPSK en el cas de pols conformador rectangular quan el desmodulador mostreja el senyal rebut amb un error constant de  $\tau$  segons. Considereu que no hi ha cap altre error de sincronisme. Deixeu el resultat expressat en termes de  $\tau$ , el període de símbol  $T$  i la  $E_b/N_0$  del senyal rebut.

9. Demostreu que la funció de versemblança en el cas NDA és la indicada en l'equació (15), en què el contingut de  $x[n]$  es dóna en l'equació (16). Per a fer-ho, comenceu buscant la funció de versemblança  $p(y|a, \phi, \nu, \tau)$  que surt en l'equació (6) a partir de les mostres complexes  $y[k] = x[k] + n[k]$  a l'entrada del filtre adaptat (equació (14)). Recordeu que les mostres del soroll complex  $n[k]$  són gaussianes de mitjana zero i variància  $\sigma_n^2$ .

10. Es vol calcular el valor de  $x$  que fa màxima la funció  $F(x) = 6 - (x - 3,3)^2$  a partir dels valors  $F(1) = 0,71$ ,  $F(2) = 4,31$ ,  $F(3) = 5,91$ ,  $F(4) = 5,51$  i  $F(5) = 3,11$  utilitzant un interpolador quadràtic (parabòlic). Calculeu l'error d'interpolació i compareu-lo amb l'error d'un interpolador

lineal. Repetiu l'exercici considerant que ara es disposa de 9 valors de  $F(x)$  corresponents als punts  $x = 1; 1,5; 2; \dots; 4,5$  i 5.

Nota: donats 3 punts entorn del màxim de  $F(x)$ , l'interpolador quadràtic busca la paràbola que passa pels tres punts i calcula el màxim de  $F(x)$  com el valor de  $x$  en què la paràbola és màxima.

11. Demostreu que l'estimador que es presenta a continuació fa una estimació correcta de  $v$  a partir de les mostres  $y[k]$  del senyal a l'entrada del filtre adaptat, mostrejant cada  $T_s = T/N_{ss}$  segons (equació (14)). Aquest estimador es coneix com a *delay and multiply* perquè multiplica  $y[k]$  per una versió retardada de  $y[k]$ :

$$\hat{v}_{d\&m} = \frac{1}{2\pi T_s} \arg \left\{ \sum_{k=1}^K y[k] y^*[k-1] \right\} \quad (33)$$

Considereu que no hi ha soroll i, per simplificar, assumiu que l'error de *timing* és nul. Feu l'estudi considerant que encara no s'ha sincronitzat la fase de la portadora i hi ha un error de fase  $\phi$ .

Ajuda: calculeu el valor mitjà respecte de  $a[k]$  del producte  $y[k] \cdot y[k-1]$  tenint en compte que  $a[n]$  és una seqüència de símbols incorrelacionats. Les variacions de  $y[k] \cdot y[k-1]$  respecte del valor mitjà calculat es consideren soroll generat pel mateix estimador (soroll propi o *self-noise*) i no les considerarem en l'exercici.

12. Considereu el filtre recursiu de l'equació (23), que podem escriure de la manera següent:  $\hat{z}[k+1] = \hat{z}[k] + \mu e[k]$ , en què  $e[k]$  és la correcció de símbol que calcula el llaç en la iteració  $k$ .

Com hem explicat,  $e[k]$  és una mesura de l'error de símbol que es pot escriure com a  $e[k] = (\tau - \hat{z}[k]) + e_{in}[k]$ , en què  $e_{in}[k]$  és l'error en la iteració  $k$  a causa del soroll i el terme de soroll propi (vegeu el peu de la figura 17). L'objectiu d'aquest exercici és estudiar com el llaç tancat de l'equació (23) filtra el terme de soroll  $e_{in}[k]$ .

a) Per a fer-ho, us demanem que busqueu la funció de transferència (transformada Z) del llaç quan l'entrada és  $e_{in}[k]$  i la sortida és l'error de sincronització del llaç en la iteració  $k$ , que anomenarem  $e_{out}[k] = \tau - \hat{z}[k]$ .

A partir de la funció de transferència calculada, trobeu la resposta impulsional del llaç i calculeu la variància dels errors de sincronització  $e_{out}[k]$  en funció de  $\mu$  i de la variància del soroll d'entrada  $e_{in}[k]$ . Considereu que  $e_{in}[k]$  té de mitjana zero i està incorrelacionat temporalment.

b) Si en comptes del filtre recursiu de l'equació (23) s'adopta un esquema en llaç obert i els errors  $e_{in}[k]$  es filtren mitjançant un integrador de  $K$  mostres, trobeu quina és la variància de l'error de sincronització  $e_{out}[k]$  en funció de  $K$  i la variància del soroll d'entrada  $e_{in}[k]$ . Per acabar, compareu el resultat obtingut en els dos casos (llaç tancat i llaç obert) i trobeu la relació entre  $\mu$  i  $K$  per a garantir la mateixa variància a la sortida. Si cal, considereu que  $K \gg 1$  o, equivalentment,  $\mu \ll 1$ .

13. Demostreu que l'estimador que es presenta a continuació fa una estimació correcta del símbol a partir de les mostres  $z[k]$  del senyal a la sortida del filtre adaptat (equació (3)), mostrejant cada  $T_s = T/N_{ss}$  segons. Aquest estimador es coneix com a *square timing* i funciona de la manera següent:

$$\hat{z}_{st} = -\frac{T}{2\pi} \arg \left\{ \sum_{k=1}^K \|z[k]\|^2 \exp\{-j2\pi k/N_{ss}\} \right\} \quad (34)$$

Considereu que no hi ha soroll i l'error de freqüència és nul.

Ajuda: calculeu el valor mitjà respecte de  $a[k]$  del terme  $|z[k]|^2$  tenint en compte que  $a[n]$  és una seqüència de símbols incorrelacionats. Les variacions de  $|z[k]|^2$  respecte del valor mitjà calculat es consideren soroll generat pel mateix estimador (soroll propi) i no les tindrem en compte en l'exercici. Per a entendre què fa l'estimador us heu d'adonar que el valor mitjà de  $|z[k]|^2$  és una seqüència periòdica de període  $N_{ss} = T/T_s$ , i que per tant té harmònics a freqüències múltiples de  $1/N_{ss}$ .

14. Demostreu que l'estimador NDA de l'equació (25) dóna la mateixa sortida per a qualsevol error de fase  $\phi + i2\pi/M$  ( $i$  enter).

15. Demostreu que l'estimador DD de l'equació (29) dóna la mateixa sortida per a qualsevol error de fase  $\phi + i2\pi/M$  ( $i$  enter).

16. Una vegada coneixem la posició de la paraula inequívoca podem fer l'estimació de la fase mitjançant l'estimador DA següent, en què  $\arg\{x\}$  és l'angle del nombre complex  $x$  i  $z[n]$  són les mostres a la sortida del filtre adaptat (mostrejat cada  $T$  segons):

$$\hat{\phi}_{ml} = \arg \left\{ \sum_N^{n=1} b^*[n]z[n - \kappa_{ml}] \right\} \quad (35)$$

En aquest exercici us demanem que demostreu que, assumint que la trama s'ha sincronitzat correctament ( $\hat{\kappa}_{ml}$  és correcte), aquest és l'estimador ML de la fase quan es coneixen els  $N$  símbols de la paraula inequívoca  $b[1], \dots, b[N]$ .

Ajuda: calculeu la funció densitat de probabilitat de l'observació  $z$  que conté les  $N$  mostres  $z[n - \hat{\kappa}_{ml}] = A_c \exp(j\phi) b[n] + \eta[n]$  ( $n = 1, \dots, N$ ). Tingueu en compte que les mostres del soroll  $\eta[n]$  són gaussianes de mitjana zero i variància  $N_0$  (equació (4)) i estan temporalment incorrelacionades.

## Bibliografia

### Bibliografia bàsica

**Mengali, U.; Andrea, A. N. d'** (1997). *Synchronization techniques for digital receivers*. Nova York: Plenum Press.

### Bibliografia complementària

**Meyr, H.; Moeneclaey, M.; Fechtel, S. A.** (1998). *Digital communications receivers. Synchronization, channel estimation and signal processing*. Nova York: Wiley.

### Articles d'interès

**Noels, N.; Lottici, V.; Dejonghe, A.; Steendam, H.; Moeneclaey, M.; Luise, M.; Vanderdorpe, L.** (2005, febrer). "A theoretical framework for soft-information-based synchronization in iterative (turbo) receivers". *Eurasip journal on wireless communications and networking*.