

Comunicacions amb diversitat

Francesc Rey Micolau
Javier Villares Pera

PID_00197093



Els textos i imatges publicats en aquesta obra estan subjectes –llevat que s'indiqui el contrari– a una llicència de Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 Espanya de Creative Commons. Podeu copiar-los, distribuir-los i transmetre'ls públicament sempre que en citeu l'autor i la font (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), no en feu un ús comercial i no en feu obra derivada. La llicència completa es pot consultar a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.ca>

Índex

Introducció	5
Objectius	8
1. Motivació	9
2. Diversitat de temps	16
3. Diversitat de freqüència	19
4. Diversitat d'espai	25
4.1. Conformació de feix	32
4.2. Codificació espaciotemporal	33
4.3. Multiplexació espacial	35
4.4. Antenes intel·ligents	39
5. Conclusions	41
Activitats	43
Bibliografia	47

Introducció

Com hem exposat en un altre mòdul, hi ha casos en què el canal de comunicacions atenua fortament el senyal i en dificulta la recepció. Es parla en aquest cas d'esvaniments o fàdings del senyal. Aquest fenomen és molt típic en comunicacions terrestres sense fil per les reflexions que el senyal experimenta en l'entorn del transmissor i el receptor. L'objectiu d'aquest mòdul didàctic és conèixer com podem combatre els fàdings del canal i millorar la fiabilitat de la comunicació. Com indiquem en el títol del mòdul, aprofitarem la diversitat del canal per a combatre els fàdings del canal i millorar la fiabilitat de la comunicació. A continuació expliquem, doncs, què entenem per *diversitat* i com la podem utilitzar.

En el cas de canals variants en el temps, és sabut que els fàdings del canal duren un temps limitat, que coincideix amb el temps de coherència del canal. Si ens esperem aquest temps, és probable que el canal no trigui gaire a sortir del fàding i el nivell del senyal rebut torni a ser prou bo per a recuperar correctament el missatge transmès. Per tant, si transmetem el mateix senyal en diversos instants de temps prou separats (més que el temps de coherència del canal) i el receptor selecciona (o combina) les diverses còpies del senyal rebut, aconseguirem "evitar" els fàdings del canal i millorar així la fiabilitat de la comunicació. Aquesta estratègia de transmissió s'anomena *diversitat en el temps* i l'explicarem en l'apartat 1.

Com hem explicat també, la variabilitat temporal del canal és conseqüència del moviment del transmissor, del receptor o dels objectes al voltant dels equips transmissor i receptor. En els casos en què aquesta mobilitat és molt baixa i el canal varia molt lentament, hi ha altres mecanismes per a aconseguir diversitat i combatre els fàdings del canal. La primera opció que estudiarem és la coneguda com a *diversitat de freqüència*.

Perquè hi hagi diversitat de freqüència cal que el canal sigui dispersiu, és a dir, que es rebin diverses còpies del mateix senyal (propagació multicamí o *multipath propagation*) amb retards relatius prou grans i atenuacions independents. Quan passa això, es diu que el canal és selectiu en freqüència i llavors els components freqüencials dels senyals experimenten fàdings diferents, que seran independents sempre que la separació freqüencial sigui més gran que l'amplada de banda de coherència del canal. Per tant, si transmetem el mateix senyal utilitzant diverses freqüències prou separades (més que l'amplada de banda de coherència del canal) i el receptor selecciona (o combina) les diverses còpies del senyal rebut, aconseguirem reduir l'impacte dels fàdings del canal i millorarem la fiabilitat de la comunicació. Com ja hem dit, aquesta estratè-

Fàding en comunicacions fixes per satèl·lit

Si l'ona es propagues en l'espai lliure no es produirien fàdings. Aquest és el cas de les comunicacions fixes per satèl·lit.

gia de transmissió s'anomena *diversitat de freqüència*. En l'apartat 2 explicarem diferents esquemes de comunicació que exploten la diversitat de freqüència del canal.

Un altre tipus de diversitat que es pot aplicar en radiocomunicacions quan el canal no varia temporalment és la diversitat d'espai. La idea és observar el canal des de diverses posicions de l'espai. Per a fer-ho es podria moure l'antena del transmissor o del receptor per a aconseguir diversitat del temps o, alternativament, es poden utilitzar diverses antenes en transmissió o recepció separades una distància prou gran perquè els fàdings entre cada parell d'antenes transmissora i receptora siguin independents. Així, doncs, quan parlem de diversitat d'espai, ens referim a sistemes de comunicacions amb múltiples antenes en transmissió o en recepció.

Exemples d'aplicació

Les mateixes tècniques es poden aplicar també en altres entorns. Per exemple, les comunicacions per mitjà de la xarxa elèctrica (*power line*) també es veuen afectades per la propagació multicamí a causa de les reflexions que es produeixen en endolls i altres discontinuïtats de la xarxa elèctrica quan les impedàncies no estan ben adaptades. En aquests sistemes es pot aconseguir diversitat d'espai transmetent o rebent per més d'un endoll.

Quan els fàdings són deguts a la propagació multicamí, és suficient que la separació entre antenes sigui una fracció de la longitud d'ona λ , per tant, les antenes es poden muntar generalment una al costat de l'altra en el mateix equip transmissor o receptor.

En canvi, quan el fàding es deu, per exemple, al *shadowing*, cal separar molt més les antenes per a explotar la diversitat d'espai del canal. En aquest cas, estem obligats a emplaçar les antenes en llocs diferents, com, per exemple, en diferents estacions base en el cas de comunicacions cel·lulars. Aquest tipus de diversitat s'anomena *macrodiversitat*. En l'apartat 4 estudiarem diferents esquemes que fan ús de la diversitat d'espai del canal.

Exemples

Fàdings deguts a la programació multicamí: En el cas d'un encaminador (*router*) wi-fi que treballa a 2,4 GHz és suficient que la separació de les antenes sigui de prop de 6 cm ($\lambda/2$).

Fàdings deguts al *shadowing*: En exteriors, la separació de les antenes per a veure realitzacions independents del *shadowing* és típicament entre 50 m i 100 m (Goldsmith, 2005).

Un tipus de macrodiversitat que s'ha implementat amb molt d'èxit a l'estàndard HSPA de telefonia mòbil (3,5G) és el conegut com a *diversitat multiusuari*, que consisteix en el fet que en cada moment transmeti (o rebi) l'usuari que té el millor canal i romanguin muts la resta d'usuaris, alguns dels quals possiblement afectats per fàdings. La idea és aprofitar les oportunitats de transmissió que ofereix el canal als usuaris (comunicacions oportunistes). Evidentment, cal que el canal sigui variant en el temps perquè tots els usuaris tinguin l'oportunitat de transmetre algun cop. Si no fos així, sempre transmetria o rebria el mateix usuari. Per tant, la diversitat multiusuari requereix que el ca-

Vegeu també

Vegeu el *shadowing* en el subapartat 2.2 del mòdul didàctic "Canal de comunicacions" d'aquesta assignatura.

Un exemple de macrodiversitat

Una de les propostes que s'estan considerant en la quarta generació de telefonia mòbil (4G), també coneguda com a LTE (*long term evolution* 'evolució a llarg termini'), és un esquema de macrodiversitat anomenat CoMP (*coordinated multipoint*) en el qual els terminals poden estar connectats simultàniament a dues estacions base per a millorar la cobertura i facilitar el traspàs de trucades entre cel·les veïnes.

nal ofereixi diversitat d'espai (usuaris en diferents posicions) i també de temps (canal variant en el temps). Es pot trobar més informació sobre aquest tema en les referències incloses en la bibliografia del mòdul i en l'exercici 1 de les activitats.

Hi ha un quart tipus de diversitat: és la diversitat de polarització. Com és ben sabut, la polarització d'una ona electromagnètica la defineix la direcció del vector camp elèctric. Aquest vector es pot descompondre en dos components ortogonals, que són els components horitzontal i vertical. Com que generalment aquests components experimenten fàdings diferents quan es propaguen pel canal, es pot transmetre el senyal amb les dues polaritzacions (horitzontal i vertical) de manera que el receptor les pugui combinar per tal de reduir l'efecte del fàding d'una d'aquestes polaritzacions. No obstant això, com que només hi ha dues polaritzacions ortogonals, el guany de diversitat que es pot aconseguir és 2 en el millor dels casos. Per no allargar excessivament aquest mòdul, no aprofundirem més en aquest tipus de diversitat.

Com acabem de veure, la fiabilitat d'un sistema de comunicacions està limitada pels fàdings, però hi ha mecanismes per a combatre aquests fàdings. La clau és utilitzar la diversitat que ens ofereix el canal per a disposar en recepció de diverses còpies del senyal que estiguin afectades per fàdings independents. En els propers apartats estudiarem els diferents tipus de diversitat que hi ha i avaluarem els guanys que es poden aconseguir en termes de fiabilitat (probabilitat d'error).

Objectius

Els objectius d'aquest mòdul didàctic són:

1. Entendre el concepte de *diversitat*.
2. Saber que la diversitat permet millorar la fiabilitat de les comunicacions en canals amb fàdings.
3. Conèixer els diferents tipus de diversitat que pot presentar el canal de comunicacions: de temps, de freqüència, d'espai i de polarització.
4. Entendre la funció de l'entrellaçament quan el canal és variant en el temps.
5. Saber que els canals dispersius presenten diversitat de freqüència.
6. Conèixer diferents maneres de fer servir la diversitat de freqüència del canal: equalització, RAKE i OFDM.
7. Estudiar l'origen físic de la diversitat d'espai del canal.
8. Saber que calen múltiples antenes en transmissió o recepció (MIMO) per a utilitzar la diversitat d'espai del canal.
9. Conèixer les tècniques de transmissió en canals MIMO: conformació de feix, codificació espaciotemporal i multiplexació espacial.

1. Motivació

En la introducció hem presentat molt breument els tipus de diversitats existents: de temps, freqüència, espai i polarització. En general, el canal és selectiu en aquestes quatre dimensions, és a dir, la resposta del canal varia en el temps (t) i depèn de la freqüència (f), la posició del transmissor (x_t), la posició del receptor (x_r) i la polarització utilitzada (p). Aquesta selectivitat del canal és la que ens ofereix la diversitat que necessitem per a combatre els fàdings.

Formalment diem que la resposta del canal és una funció d'aquestes cinc variables:

$$H(t, f, x_t, x_r, p) \quad (1)$$

Aquesta funció no és més que la resposta freqüencial (variant en el temps) del canal establert entre l'antena transmissora, situada a la posició x_t , i l'antena receptora, situada a la posició x_r , en la polarització p .

Com que la caracterització determinista del canal és molt complicada, s'acostuma a modelitzar $H(t, f, x_t, x_r, p)$ com una variable aleatòria. Abans de continuar, recordarem ràpidament com es caracteritza estadísticament el canal de comunicacions.

El primer que cal tenir en compte és que les variables t , f , x_t i x_r són a la pràctica variables discretes perquè la resolució temporal (Δt), freqüencial (Δf) i espacial (Δx) del receptor és finita. Això vol dir que $H(t, f, x_t, x_r, p)$ s'obté a la pràctica sumant tots els components del senyal rebut (rajos) dins dels intervals compresos entre $t \pm \Delta t/2$, $f \pm \Delta f/2$, $x_t \pm \Delta x/2$ i $x_r \pm \Delta x/2$. Si el nombre de components (rajos) que se sumen és prou gran per a tots els valors de t , f , x_t , x_r i p , el teorema del límit central ens garanteix que $H(t, f, x_t, x_r, p)$ seguirà una distribució gaussiana que podem caracteritzar mitjançant la seva mitjana i la seva covariància (o correlació).

Vegeu també

La caracterització del canal es desenvolupa en el mòdul didàctic "Canal de comunicacions" d'aquesta assignatura.

Resolució temporal i freqüencial d'un receptor digital

En l'exercici 2 de les activitats es calcula la resolució temporal i freqüencial d'un receptor digital. Pel que fa a la resolució espacial, en l'apartat 4 s'estudia quina ha de ser la separació mínima de les antenes del transmissor i del receptor (d_0) en un escenari amb propagació multicamí perquè cada antena observi una realització independent del canal. La conclusió és que la separació ha de ser superior a $\lambda/2$, en què λ és la longitud d'ona.

De la mateixa manera que per al canal de comunicacions hem definit el temps de coherència T_c , i l'amplada de banda de coherència B_c com els intervals de temps i freqüència en què la resposta del canal pràcticament no canvia (la correlació temporal és alta), podem definir T_0 , B_0 i d_0 com la separació temporal, freqüencial i espacial mínimes per a obtenir realitzacions incorrelades (independents) del canal:

$$\begin{aligned} E\{H(t, f, x_t, x_r, p)H^*(t + T_0, f, x_t, x_r, p)\} &\approx 0 \\ E\{H(t, f, x_t, x_r, p)H^*(t, f + B_0, x_t, x_r, p)\} &\approx 0 \\ E\{H(t, f, x_t, x_r, p)H^*(t, f, x_t + d_0, x_r, p)\} &\approx 0 \\ E\{H(t, f, x_t, x_r, p)H^*(t, f, x_t, x_r + d_0, p)\} &\approx 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Considerem ara que ens volem comunicar utilitzant aquest canal, i per fer-ho transmetem durant T segons (durada de la trama) ocupant una amplada de banda de B hertz i utilitzant una agrupació d'antenes en transmissió i una altra en recepció que ocupen un espai de d_t i d_r metres, respectivament. Assumint que els canals que veuen les dues polaritzacions són independents, això vol dir que disposem de N realitzacions independents del canal:

$$N = \left\lfloor \frac{T}{T_0} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{B}{B_0} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{d_t}{d_0} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{d_r}{d_0} \right\rfloor \times 2 \quad (3)$$

en què $\lfloor x \rfloor$ és el nombre enter més petit o igual que x . El nombre N estableix quin és el màxim guany de diversitat que podem aconseguir en aquest canal. El significat de N és el següent. Suposem que la probabilitat que $20 \cdot \log |H(t, f, x_t, x_r, p)|$ sigui més petit que -20 dB (fàding profund) és $0,1$. Si ara transmetem el mateix símbol d'informació N vegades (codi repetició) utilitzant N components del canal que siguin independents, la probabilitat que els N símbols rebuts hagin experimentat un fàding profund es redueix a $0,1^N$. Per exemple, si N fos 10, podríem reduir la probabilitat d'estar en un fàding profund de $0,1$ a 10^{-10} (gairebé mai!).

Ara analitzarem amb més detall l'impacte dels fàdings i quant es pot guanyar fent ús de la diversitat del canal. Per fer-ho, ens hem d'oblidar per un moment de l'origen de la diversitat (temps, freqüència, espai i polarització) i considerar que tenim N components independents del canal que anomenarem h_1, \dots, h_N . L'esquema més senzill de diversitat consisteix a enviar el mateix símbol d'informació, que anomenarem s , per mitjà dels N components independents del canal. En el fons, estem utilitzant un codi de repetició perquè el mateix símbol el transmetem N vegades. La clau és separar prou aquestes repeticions en les cinc dimensions del canal (t, f, x_t, x_r o p) de manera que cada repetició es vegi afectada per un fàding independent de la resta.

Vegeu també

El temps de coherència T_c i l'amplada de banda de coherència B_c es defineixen, respectivament, en els subapartats 3.4 i 3.2 del mòdul didàctic "Canal de comunicacions" d'aquesta assignatura.

Per a calcular la probabilitat d'error, formalitzarem primer el problema. Si anomenem y_n la mostra que es rep a la sortida del component n del canal, tindrem:

$$y_n = h_n s + w_n \quad n = 1, \dots, N \quad (4)$$

en què w_n és el soroll gaussià del receptor que considerarem que té mitjana zero i variància σ_w^2 , en tots els components. Per simplificar-ho, considerarem que $E\{|s|^2\} = E\{|h_n|^2\} = 1$ i centrarem l'atenció en el cas del canal Rayleigh per dues raons: és senzill d'analitzar matemàticament, i sobretot, és el més desfavorable quant a la probabilitat i la profunditat dels fàdings. Com sabem, el canal Rayleigh apareix quan no hi ha visibilitat directa entre el transmissor i el receptor de manera que tot el senyal rebut procedeix de les reflexions de l'ona transmesa en els obstacles (*scatters*) que hi ha en l'entorn del transmissor i el receptor.

Per a calcular de manera aproximada la probabilitat d'error, establim les hipòtesis següents:

- El símbol transmès es decideix correctament si la relació senyal a soroll, *SNR* (de *signal-to-noise ratio*), és més gran que un llindar λ . Aquest llindar depèn de la modulació i la codificació de canal utilitzada.
- El símbol transmès es decideix incorrectament quan l'*SNR* és més petita que λ . Quan això passa, diem que s'ha produït un fàding.

Això vol dir que solament es produirà un error de decisió quan els N components del canal estiguin en fàding, perquè només que es rebí un dels components amb prou *SNR*, a partir d'aquest component es podrà decidir correctament el símbol que s'ha transmès. Així, doncs, ens cal calcular l'*SNR* de cada component del canal i avaluar amb quina probabilitat aquesta *SNR* és més petita que λ . Comencem per obtenir l'*SNR* que hi ha a la sortida del component n del canal:

$$SNR_n = \frac{|h_n|^2}{\sigma_w^2} \quad (5)$$

Es pot demostrar fàcilment que SNR_n és una variable aleatòria amb distribució exponencial de mitjana $1/\sigma_w^2$, és a dir:

Vegeu també

Vegeu el canal Rayleigh en el subapartat 2.3.1 del mòdul didàctic "Canal de comunicacions" d'aquesta assignatura.

$$p(SNR_n) = \sigma_w^2 e^{-\sigma_w^2 SNR_n} \quad (6)$$

Tenint ara present que els fàdings dels N components són independents, la probabilitat d'error es pot calcular de la manera següent:

$$P_e = \prod_{n=1}^N p(SNR_n < \lambda) = (1 - e^{-\lambda \sigma_w^2})^N \quad (7)$$

ja que:

$$p(SNR_n < \lambda) = \int_0^{\lambda} p(SNR) dSNR = 1 - e^{-\lambda \sigma_w^2} \quad (8)$$

Com és d'esperar, surt que la probabilitat d'error depèn del nivell de soroll σ_w^2 . Fixat el llindar λ , si el valor de σ_w^2 és gran (SNR baixa), la probabilitat de fàding s'aproparà a 1, mentre que si σ_w^2 és molt petita (SNR alta), la probabilitat de fàding es podrà aproximar en sèrie de Taylor al voltant de $\sigma_w^2 = 0$, i obtenir així que la probabilitat d'error a alta SNR és aproximadament igual a l'expressió següent, en què $\overline{SNR} = E\{|h_n|^2\}/\sigma_w^2 = 1/\sigma_w^2$ és el valor mitjà de l' SNR (equació (5)):

$$P_e \approx (\lambda \sigma_w^2)^N = \left(\frac{1}{\lambda \overline{SNR}}\right)^{-N} \quad (9)$$

Cal assenyalar que ens fixem en el que passa a SNR alta perquè quan l' SNR és alta, el soroll per si sol no provoca errors de decisió sinó que són els fàdings del canal els responsables directes d'aquests errors.

Per acabar, si dibuixem la corba de la probabilitat d'error en eixos logarítmics, trobarem que és una recta amb pendent negatiu $-N$ desplaçada cap a la dreta en $10 \cdot \log_{10} \lambda$, és a dir:

$$10 \cdot \log_{10} P_e \approx -N(\overline{SNR}_{dB} - 10 \log_{10} \lambda) \quad (10)$$

Malgrat que l'anàlisi de la probabilitat d'error que hem fet és molt simple, el resultat que hem trobat en les equacions (9) i (10) és en general correcte i ens permet extreure les conclusions següents:

1) El **guany de diversitat** N determina el pendent de la corba de probabilitat d'error a SNR alta quan la corba es representa en eixos logarítmics (equació (10)). Sense diversitat, aquest pendent és -1 , i per tant, la probabilitat d'error decau molt lentament amb l' SNR .

Justificació

En un canal Rayleigh, h_n és una variable aleatòria gaussiana complexa de mitjana zero. Per tant, $|h_n|^2 = \text{Re}\{h_n\}^2 + \text{Im}\{h_n\}^2$ segueix una distribució exponencial, perquè és la suma del quadrat de dues variables aleatòries gaussianes reals i independents.

2) El **guany de codificació** $-10 \cdot \log_{10} \lambda / \lambda_0$ determina el desplaçament cap a l'esquerra de la corba de probabilitat d'error a SNR alta, quan la corba es representa en eixos logarítmics (equació (10)), respecte d'un esquema de transmissió de referència amb llindar $\lambda_0 > \lambda$.

3) **Esquema de transmissió.** Qualsevol esquema de transmissió que utilitzi els N components independents del canal per a transmetre cadascun dels símbols d'informació pot aconseguir el màxim guany de diversitat (N). No obstant això, depenent de l'esquema de transmissió escollit, el guany de codificació serà més o menys elevat. Per exemple, el codi de repetició analitzat no és gaire eficient i es pot augmentar el guany de codificació utilitzant codis més elaborats. En realitat, es poden utilitzar els mateixos codis que s'utilitzen per al canal gaussià (codis bloc, codis convolucionals, etc.). El guany de diversitat d'aquests codis és donat per la distància de Hamming mínima del codi (exercici 3 de les activitats).

4) **Esquema de recepció.** Per a aprofitar al màxim la diversitat del canal, cal que el receptor conegui amb exactitud l'amplitud i la fase dels components del canal h_1, \dots, h_N i els combini coherentment. Per al cas del codi de repetició estudiat, *coherentment* vol dir que s'ha de decidir el símbol transmès combinant les mostres y_1, \dots, y_N de la manera següent, en què w' és el terme de soroll a la sortida del combinador, que té una variància igual a $N\sigma_w^2$:

$$z = \sum_{n=1}^N h_n^* y_n = N \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |h_n|^2 \right) s + w' \quad (11)$$

Aquest esquema de combinació s'anomena **combinació de màxima relació senyal-soroll (*maximal ratio combining, MRC*)** i requereix que el receptor faci l'estimació dels coeficients complexos del canal h_1, \dots, h_N abans de poder prendre decisions fiables. Per a fer aquesta estimació, el transmissor acostuma a transmetre símbols coneguts que el receptor utilitza per a fer l'estimació del mòdul i la fase dels diversos components del canal h_1, \dots, h_N .

Hi ha altres maneres de combinar els components del canal que, encara que subòptimes, redueixen la complexitat del sistema. A continuació en detallem dues de les més utilitzades:

a) Combinació d'igual guany (*equal gain combining*)

En aquest esquema es combinen tots els components del canal amb la mateixa amplitud. La sortida del combinador és la següent, en què denotem per $\arg\{h_n\}$ la fase del coeficient del canal h_n , i w'' és el terme de soroll de variància $N\sigma_w^2$:

$$z = \sum_{n=1}^N e^{-j\arg\{h_n\}} y_n = \left(\sum_{n=1}^N |h_n| \right) s + w'' \quad (12)$$

El principal avantatge d'aquest esquema és que el receptor no ha de conèixer el mòdul dels components del canal; només n'ha de conèixer les fases per a poder combinar els N símbols rebuts coherentment (en fase). Encara que s'aconsegueix tot el guany de diversitat (N), aquest esquema té un guany de codificació més baix que l'esquema òptim (MRC). Tot i així, la pèrdua no acostuma a ser gaire gran –menys d'1 dB– (vegeu l'exercici 4 de les activitats).

b) Combinació per selecció (*selection combining*)

En aquest cas, se selecciona el component del canal amb una qualitat més bona (SNR), és a dir, aquell component amb una $SNR_n = |h_n|^2 / \sigma_w^2$ màxima (equació (5)). Per tant, el receptor només ha de conèixer el mòdul dels N components del canal per a fer la selecció. Si denotem per n_0 el component del canal amb SNR màxima, la sortida del combinador serà:

$$z = y_{n_0} = h_{n_0} \cdot s + w_{n_0} \quad (13)$$

A partir de z , es podrà desmodular el símbol d'informació s de manera coherent, si es coneix la fase de h_{n_0} , o no coherentment, si no es coneix. Com que només s'utilitza el component n_0 del canal, no cal conèixer la fase de la resta de components ($n \neq n_0$), i això simplifica enormement la complexitat del receptor. Aquest esquema aconsegueix el guany de diversitat esperat però el guany de codificació és significativament més petit que el que s'aconsegueix amb l'esquema de combinació òptim (MRC).

5) Guany de codificació amb MRC. Si analitzem l'equació (11), es pot comprovar que la relació SNR mitjana a la sortida del combinador és N vegades més gran que a l'entrada (exercici 4 de les activitats). La raó és que estem rebent cada símbol d'informació repetit N vegades. Aquest guany correspon al factor N que apareix multiplicant el parèntesi de l'equació (11). Si per disposar en recepció de N còpies del símbol d'informació, cal transmetre $N' < N$ vegades més energia, haurem aconseguit millorar l' SNR mitjana del sistema en un factor N/N' respecte d'un sistema sense diversitat ($N = 1$) (aquest factor es correspon amb el factor λ/λ_0 de l'equació (10)). Aquest és l'anomenat **guany de codificació**, que depèn de l'esquema de transmissió utilitzat (factor N'), i també de l'esquema de combinació utilitzat en recepció (N en el cas d'MRC). És important destacar que aquest guany s'aconsegueix tant en un canal aleatori (canal amb fàdings) com en un canal determinista ($h_n = 1$).

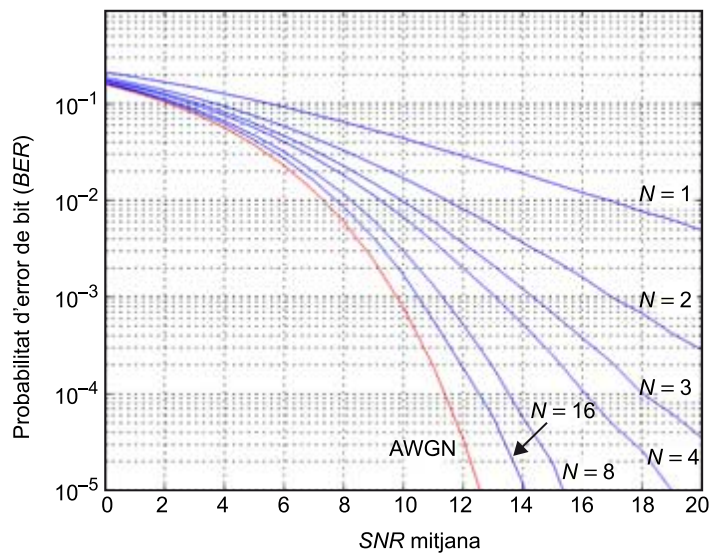
6) Guany de diversitat amb MRC. Com es demostra a continuació (equació (14)), la probabilitat d'error d'un canal gaussià, representada en eixos logarítmics, decau exponencialment a SNR alta, mentre que només decau linealment

(més lentament) en el cas del canal Rayleigh (equació (10)). El guany de diversitat (N) determina el pendent en eixos logarítmics de la corba de probabilitat d'error (equació (10)). Quan el guany de diversitat N és molt gran, es pot demostrar fàcilment que la probabilitat d'error a la sortida del combinador òptim (equació (11)) convergeix a la probabilitat d'error del canal gaussià (equació (14)). Per a demostrar-ho, només cal adonar-se que el terme aleatori dins del parèntesi de l'equació (11) convergeix a 1 quan N tendeix a infinit.

$$P_{e,awgn} = Q\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda} SNR}\right) < \exp\left(-\frac{1}{\lambda} SNR\right) \quad (14)$$

$$10\log_{10} P_{e,awgn} < \frac{10\log_{10}}{\lambda} SNR = -4,34 \cdot 10^{\left(\frac{SNR_{dB}}{\lambda} - 10\log_{10}\lambda\right)/10}$$

Figura 1. Probabilitat d'error pel canal gaussià i pel canal Rayleigh en funció del guany de diversitat N



Es considera un codi de repetició: el mateix símbol es transmet N vegades per components independents del canal. En la simulació es considera que el guany de codificació és 1, és a dir, el combinador no millora l'SNR mitjana del sistema; únicament millora el pendent de la probabilitat d'error perquè redueix l'aleatorietat del canal.

2. Diversitat de temps

En l'apartat anterior hem explicat el concepte de *diversitat* en termes generals, considerant que es disposa de N components independents del canal. Com hem explicat, l'origen físic d'aquests N components pot ser divers (temps, freqüència, espai o polarització). En aquest apartat ens centrarem en la diversitat de temps del canal.

Si anomenem T la durada de la trama i T_0 la separació temporal entre dues realitzacions independents del canal, el nombre de realitzacions independents del canal serà:

$$N = \left\lfloor \frac{T}{T_0} \right\rfloor \quad (15)$$

Per tant, el nombre de símbols que caldrà per a tenir una realització independent del canal estarà donat per l'expressió següent, en què T_s és el període de símbol, és a dir, cada quant de temps es transmet un nou símbol al canal:

$$I = \left\lceil \frac{T_0}{T_s} \right\rceil \quad (16)$$

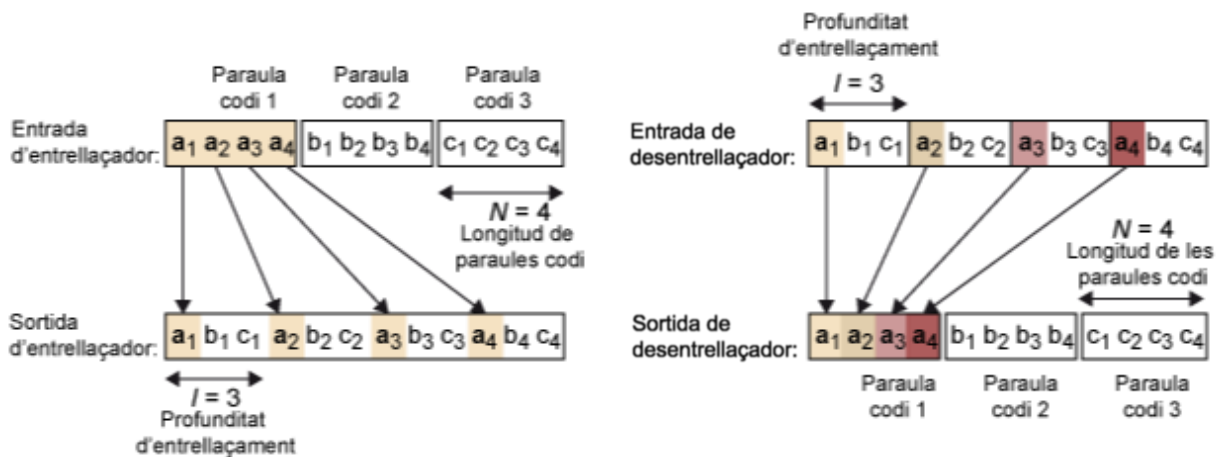
Com hem vist en l'apartat anterior, si volem utilitzar tota la diversitat que ens ofereix el canal, caldrà transmetre cada símbol d'informació utilitzant els N components independents del canal. Com que els N components independents del canal no són consecutius en el temps sinó que estan separats temporalment per I símbols, cal separar els N símbols de cada paraula codi (*code word*) de manera que es transmetin per components independents del canal. El bloc que fa aquesta separació rep el nom d'*entrellaçador* i rep aquest nom perquè entrellaça els N símbols de I paraules codi diferents per aconseguir que la separació dels símbols de cada paraula codi sigui I . El paràmetre I es denomina *profunditat d'entrellaçament* i determina dues coses: el nombre de paraules codi que s'entrellacen i la mínima separació temporal dels símbols de cadascuna de les paraules codi entrellaçades.

En la figura 2 s'explica gràficament el funcionament de l'entrellaçament per al cas de $N = 4$ i $I = 3$. Mirant la figura, es veu que els $N = 4$ símbols de la primera paraula codi (a_1, a_2, a_3 i a_4) estan separats a la sortida de l'entrellaçador una distància de $I = 3$ i, per tant, veuran realitzacions independents del canal. Passa el mateix amb els símbols de les altres dues paraules codi. El receptor, per la seva part, ha de desentrellaçar la trama rebuda per a reconstruir les tres paraules codi (figura 2, dreta). Com s'indica en la figura, els quatre símbols de la primera paraula codi (a_1, a_2, a_3 i a_4) han experimentat fàdings independents, que en la figura s'indiquen amb diferents intensitats de color. El descodificador és l'encarregat de combinar les $N = 4$ realitzacions independents del fàding per aconseguir el màxim guany de diversitat possible.

Reflexió

En l'apartat 1 hem considerat un codi de repetició de taxa $1/N$. En aquest cas, en cada paraula codi només es transmet un símbol d'informació (s) i la primera paraula codi seria $a_1 = \dots = a_N = s$. Amb aquest codi, el guany de diversitat és N , que és la distància mínima del codi (vegeu l'exercici 3 de les activitats).

Figura 2. Exemple d'entrellaçament i desentrellaçament per al cas $I = 3$ i $N = 4$



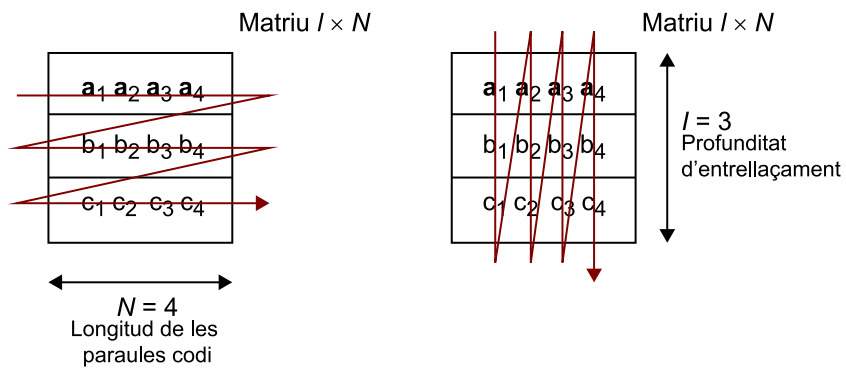
En la figura es mostra com l'entrellaçador separa els símbols de la primera paraula codi (a_1, a_2, a_3 i a_4) i el desentrellaçador els torna a ajuntar. A la part dreta de la figura es mostra com els quatre símbols de la primera paraula codi s'han transmès utilitzant components independents del canal, que es marquen utilitzant diferents intensitats de color.

L'entrellaçador de la figura s'anomena *entrellaçador de bloc* i s'implementa escrivint per files en una matriu de I files i N columnes i després llegint el contingut de la matriu per columnes (vegeu la figura 3). Com és de suposar, el desentrellaçador funciona al revés: escriu per columnes i llegeix per files. Hi ha altres maneres de fer l'entrellaçament. En comptes de fer l'entrellaçament en termes de símbol, es pot fer en termes de bit. Així mateix, en alguns estàndards es fa servir un entrellaçador convolucional en lloc de l'entrellaçador de bloc presentat en aquest apartat (vegeu l'exercici 5 de les activitats).

Figura 3. Il·lustració del funcionament de l'entrellaçador de bloc estudiat ($N = 4$ i $l = 3$)

Ordre d'escriptura de la matriu

Ordre de lectura de la matriu



3. Diversitat de freqüència

En aquest apartat considerarem que el canal és dispersiu. Això significa que el canal dispersa temporalment l'energia dels polsos transmesos, i per tant atenua de manera diferent els components freqüencials del senyal. Per aquesta raó es diu que el canal introdueix diversitat de freqüència. Si analitzem el que passa en el domini del temps, veurem que els polsos presents a la sortida del filtre adaptat són el resultat de la convolució del pols transmès $p(t)$ amb la resposta impulsional del canal $h_c(t) \neq \delta(t)$ i amb la resposta del filtre adaptat $p(-t)$:

$$h(t) = p(t) * h_c(t) * p(-t) \quad (17)$$

Així, doncs, si mostregem la sortida del filtre adaptat $y(t)$ per cada període de símbol T_s , obtindrem les mostres següents, en què s_k és la seqüència de símbols transmesos i s'ha definit $h_m = h(mT_s)$ com el coeficient m de la resposta impulsional del sistema mostrejada cada T_s :

$$y_n = y(nT_s) = \sum_k s_k h_{n-k} + w_n \quad (18)$$

Mirant l'equació (18), veiem que un dels efectes negatius del canal dispersiu és l'aparició d'interferència intersimbòlica (ISI). Com sabem, l'ISI degrada la qualitat de la comunicació i s'ha de compensar fent servir tècniques d'equalització de canal. No obstant això, la dispersió del canal també té un efecte positiu: introdueix diversitat, que es pot aprofitar per a reduir l'impacte dels fadings del canal. A continuació explicarem aquest nou tipus de diversitat, que es coneix com a *diversitat de freqüència*.

Per veure fàcilment que el canal dispersiu proporciona diversitat considerarem per un moment que només es transmet el primer símbol s_0 , i per tant, l'equació (18) es pot escriure de la manera següent, en què N és la durada de la resposta impulsional del canal (h_n):

$$y_n = h_n s_0 + w_n \quad n = 1, \dots, N \quad (19)$$

Gràcies a la dispersió temporal del canal, rebem N vegades el símbol s_0 , afectat en cada cas per un coeficient del canal diferent. Si el coeficient directe h_1 experimentés un fàding profund i no es pogués recuperar el símbol s_0 a partir de y_1 , podríem utilitzar les altres $N - 1$ mostres y_2, \dots, y_N per a detectar correctament el símbol transmès. Com hem explicat en l'apartat 1, el màxim guany de diversitat s'aconsegueix quan els N components del canal h_1, \dots, h_N són estadísticament independents. En comunicacions sense fil, els coeficients del

Vegeu també

Vegeu la interferència intersimbòlica (ISI) en el mòdul didàctic "Equalització de canal" d'aquesta assignatura.

Vegeu també

Vegeu els obstacles incorrelacionats en el subapartat 2.3 del mòdul didàctic "Canal de comunicacions" d'aquesta assignatura.

canal estan poc correlats quan el senyal transmès es propaga en entorns amb molts obstacles en els quals el senyal es difracta o reflecteix. Quan passa això es parla d'*obstacles incorrelacionats* o *uncorrelated scattering*, i és el cas que considerarem en aquest apartat.

Cal destacar que l'equació (19) és idèntica a l'equació (4), i és la mateixa equació que tindríem si utilitzéssim un codi de repetició en un canal variant en el temps (diversitat de temps). No obstant això, hi ha tres diferències importants:

a) En l'equació (19) només transmetem una vegada el símbol s_0 i és el canal el que el "repeteix" N vegades. En canvi, quan s'utilitza un codi de repetició, és el codificador el que transmet N vegades el símbol s_0 , i gasta llavors N vegades més energia per a transmetre'l.

b) De mitjana, l'energia que es rep del canal $E\{|h_n|^2\}$ és una funció decreixent de n , i per tant, la contribució dels primers components és més rellevant que la contribució dels darrers, que estan més atenuats. En canvi, quan h_n són realitzacions temporals del canal, podem considerar que $E\{|h_n|^2\}$ és constant en el temps. Per tant, amb canals dispersius, el guany de diversitat no és directament N , sinó que depèn de la durada efectiva (decaïment) del perfil de potències $E\{|h_n|^2\}$ del canal.

c) No hem d'oblidar que en l'equació (19) hem prescindit del terme d'ISI (equació (18)). A causa de l'ISI els símbols transmesos arriben barrejats al receptor, i el receptor els ha de separar d'alguna manera, per exemple, fent servir un equalitzador. L'esquema d'equalització triat ha d'eliminar l'ISI, però al mateix temps ha de fer un bon ús de la diversitat del canal. De fet, com més llarga és la resposta impulsional del canal (més dispersió), disposarem de més diversitat, però alhora l'ISI serà més gran.

Hi ha diferents maneres d'aprofitar la diversitat de freqüència del canal i reduir l'efecte de l'ISI. A continuació resumirem les tres maneres més importants de fer-ho:

1) Equalització temporal

L'esquema òptim d'equalització es coneix com a *MLSE* (*maximum likelihood sequence estimator*, 'estimació de seqüència de màxima versemblança') i consisteix a trobar la seqüència de símbols s_k que permet reconstruir la sortida del filtre adaptat amb màxima versemblança (mínim error quadràtic), és a dir:

$$\min_{s_k} \sum_n |y_n - \sum_k s_k h_{n-k}|^2 \quad (20)$$

en què:

Nota

$E\{|h_n|^2\}$ és l'anomenat *perfil del retard de la potència* o *power delay profile* (vegeu l'apartat 3.1 del mòdul didàctic 3).

- y_n són les mostres sorolloses que tenim a la sortida del filtre adaptat, i
- $\sum_k s_k h_{n-k}$ la reconstrucció que en fem en funció del valor dels símbols s_k .

Com que els símbols s_k pertanyen a un alfabet discret de M valors (per exemple, quatre valors en QPSK) i coneixem el valor dels coeficients del canal h_1, \dots, h_N (el receptor els ha estimat anteriorment), el terme $\sum_k s_k h_{n-k}$ pren M^N valors diferents i la seqüència s_k òptima es pot buscar aplicant l'algorisme de Viterbi sobre un diagrama d'enreixat (*trellis diagram*) de M^N estats.

Aquest esquema d'equalització s'explica amb detall en un altre mòdul didàctic. En aquest mòdul només volem destacar que l'MLSE no és solament la manera òptima de combatre l'ISI sinó que permet extreure tota la diversitat del canal. Hi ha altres esquemes subòptims que no sempre aconseguen extreure tota la diversitat del canal.

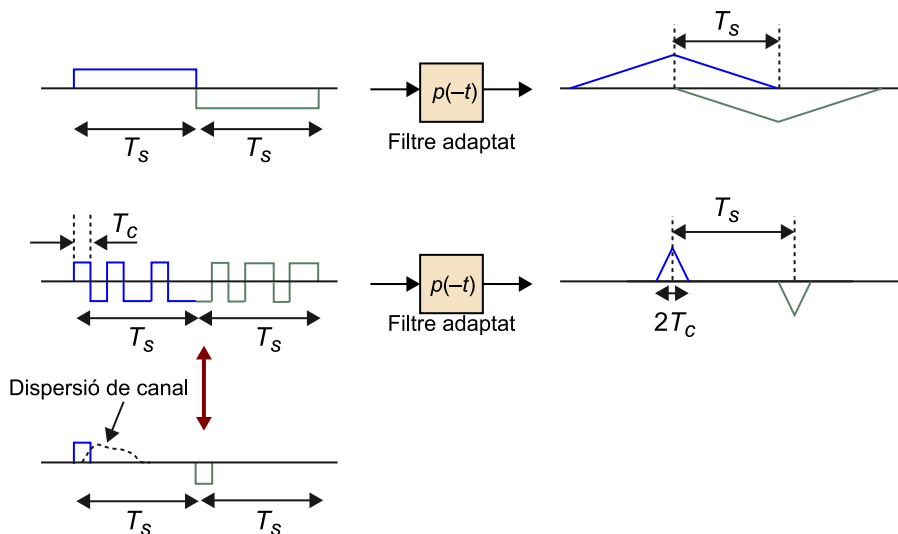
Vegeu també
 Vegeu altres esquemes subòptims en el mòdul "Equalització de canal" d'aquesta assignatura.

2) Receptor RAKE en comunicacions d'espectre eixamplat

Com sabem, en un sistema DS-CDMA els usuaris transmeten cada símbol d'informació modulant l'amplitud d'una seqüència de polsos, anomenats *xips* (*chips*), d'amplitud pseudoaleatòria (± 1) i durada $T_c = T_s/SF$ segons, en què SF és el factor d'eixamplament espectral (*spreading factor*). En canvi, en un sistema convencional, els símbols modulen l'amplitud d'un sol pols de durada $T_s = T_c \cdot SF$ segons. En la figura 4 es comparen els dos sistemes: un sistema d'espectre eixamplat i un de convencional.

Vegeu també
 Vegeu els sistemes DS-CDMA en el mòdul didàctic "Multiplexació i sistemes d'accés múltiple" de l'assignatura *Sistemes de comunicacions I*.

Figura 4. Comparació de sistemes d'espectre eixamplat i convencional



Es mostra l'entrada i la sortida del filtre adaptat en el cas d'un sistema convencional (part superior) i d'un sistema d'espectre eixamplat (part inferior) amb $SF = 8$. Es considera que el canal és ideal i el pols conformador, rectangular. A la part inferior, es mostra també que, en el cas d'espectre eixamplat, la sortida del filtre adaptat és la mateixa que tindríem si es transmetessin polsos de durada T_c cada T_s segons i s'utilitzessin codis CDMA ideals. En aquest cas es mostra també que passa quan el canal és dispersiu. Com es veu, és possible processar tota la resposta impulsional del canal per a aconseguir diversitat de freqüència sense que es produeixi ISI.

Com es veu en la figura, la sortida del filtre adaptat del sistema d'espectre eixamplat és idealment la mateixa que tindríem en un hipotètic sistema en el qual el pols conformador durés T_c segons i es transmetés un símbol cada T_s segons. Això és degut a les propietats d'autocorrelació de les seqüències pseudoaleatòries utilitzades en el cas de comunicacions CDMA asíncrones (per exemple, els codis de Gold o Kasami).

Per tant, si s'utilitza aquest tipus de codis, un sistema d'espectre eixamplat no tindrà ISI sempre que la durada del canal sigui més curta que T_s , i per tant, en aquest cas no serà necessari equalitzar. D'altra banda, un sistema d'espectre eixamplat té la capacitat de fer ús de la diversitat del canal quan la longitud de la resposta impulsional del canal és més gran que T_c però més petita que T_s , cosa que no és possible en un sistema convencional. A continuació ho demostrarem.

Si denominem $h_n = h(nT_c)$ la resposta impulsional del sistema (equació (17)) mostrejada ara cada T_c segons, podrem escriure la sortida del filtre adaptat corresponent a un dels símbols transmesos (per exemple, el símbol s_0) de la manera següent:

$$y_n = h_n s_0 + w_n \quad n = 1, \dots, N \quad (21)$$

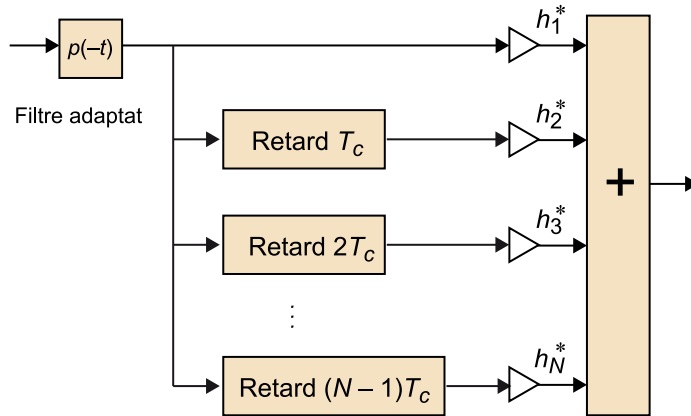
en què hem mostregat el senyal cada T_c segons i hem denotat per N el nombre de coeficients del canal no nuls ($N < SF$).

Com es veu, obtenim exactament la mateixa expressió que en l'equació (19), i per tant, podem combinar les mostres y_1, \dots, y_N , que estan afectades per coeficients independents del canal, per a guanyar diversitat. El receptor que combina els N components de manera òptima s'anomena *RAKE* (*rasplet*, en català) i es mostra en la figura 5. El receptor RAKE ha de conèixer els coeficients del

canal per a decidir el símbol s_0 a partir de la mètrica $z = \sum_{n=1}^N h_n^* y_n$ presentada en l'equació (11) (combinació de màxima relació senyal-soroll).

Per tant, es conclou que en un sistema d'espectre eixamplat és possible explotar la diversitat (de freqüència) del canal utilitzant el receptor RAKE sempre que la durada del canal sigui més petita que T_s . En l'assignatura *Teoria de la codificació i modulacions avançades* es descriu amb més detall el receptor RAKE i les modulacions d'espectre eixamplat.

Figura 5. Esquema simplificat d'un receptor RAKE



Cada branca és la sortida del filtre adaptat retardada T_c segons i s'acostuma a anomenar *finger*, fent referència a les dents d'un rasclat (*rake*). Els N *fingers* es combinen de manera coherent utilitzant els coeficients del canal, que han estat estimats prèviament.

3) Modulació OFDM (*orthogonal frequency division multiplexing*, 'multiplexatge per divisió ortogonal de freqüència')

La tercera manera d'extreure la diversitat de freqüència d'un canal és mitjançant la modulació OFDM. La idea fonamental de l'OFDM és transmetre K polsos de durada $K \cdot T_s$ segons multiplexats en freqüència, en lloc d'un sol pols de durada T_s segons. Cadascun d'aquests polsos és una subportadora d'amplada de banda K vegades més petita (figura 6). Com que en l'OFDM els polsos transmesos són molt més llargs que en un esquema convencional, no es veuran pràcticament afectats per la dispersió del canal ja que la durada del canal serà molt més petita que la durada dels polsos ($K \cdot T_s$). Com a resultat, en l'OFDM no es produeix ISI i no és necessari equalitzar. A més a més, si transmetem el mateix símbol d'informació per dues subportadores que estiguin prou separades freqüencialment, l'atenuació del canal serà diferent en les dues freqüències subportades i tindrem diversitat de freqüència (vegeu l'exercici 6 de les activitats). Aquesta és la raó per la qual hem anomenat *diversitat de freqüència* aquest tipus de diversitat.

Formalment, el pols que transmetem a freqüència f_k experimenta una atenuació que és igual a $h_k = H_c(f_k)$, en què $H_c(f)$ és la resposta freqüencial del canal, és a dir, la transformada de Fourier de la resposta impulsional $h_c(t)$ (17). Llavors, la sortida del filtre adaptat corresponent a la subportadora de freqüència f_k és la següent (vegeu la figura 6):

$$y_k = h_k s_k + w_k \quad k = 1, \dots, K \quad (22)$$

en què s_k és el símbol transmès a aquesta freqüència i hem tingut en compte que les K subportadores són ortogonals, i per tant, no s'interfereixen.

Com hem explicat en l'apartat 1 d'aquest mòdul, la resposta freqüencial del canal és estadísticament independent si la separació freqüencial és més gran que B_0 . Per tant, disposem de $N = B/B_0$ realitzacions independents del canal,

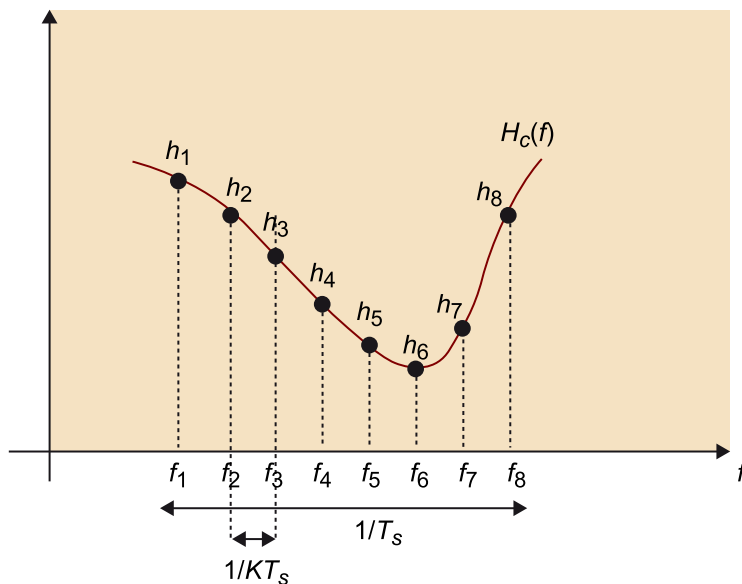
Durada del canal

La durada del canal s'acostuma a mesurar mitjançant la dispersió del retard o *delay spread* (vegeu el subapartat 3.1 del mòdul didàctic "Canal de comunicacions" d'aquesta assignatura).

en què $B = 1/T_s$ és l'amplada de banda del senyal OFDM. Si transmetem el mateix símbol per aquestes N subportadores, en lloc de transmetre-hi símbols diferents, tindrem un codi de repetició com el considerat en l'apartat 1 i podrem aconseguir un guany de diversitat igual a N . Com que els components independents del canal no són consecutius en freqüència, cal utilitzar un entrellaçador freqüencial. La funció d'aquest entrellaçador és la mateixa que la de l'entrellaçador temporal presentat en l'apartat 2, però ara l'entrellaçament s'ha de fer entre subportadores.

La modulació OFDM s'explica amb molt més de detall en l'assignatura *Teoria de la codificació i modulacions avançades*. En aquest apartat només hem volgut destacar que la modulació OFDM permet transmetre per mitjà d'un canal dispersiu sense necessitat d'equalitzar el senyal rebut, i a més a més permet extreure tota la diversitat de freqüència del canal aplicant en el domini de la freqüència exactament les mateixes tècniques utilitzades en el cas de canals variants en el temps (vegeu l'apartat 2).

Figura 6. Representació del senyal OFDM per al cas de $K = 8$ subportadores



En la figura s'indica com la resposta freqüencial del canal $H_c(f)$ modifica l'amplitud de les K subportadores.

4. Diversitat d'espai

En aquest apartat considerarem que el transmissor o el receptor tenen múltiples antenes, és a dir, disposen d'una agrupació d'antenes (*antenna array*). L'ús de múltiples antenes permet dues coses: estendre l'àrea física de l'antena per a millorar el guany d'antena (és com tenir una antena més gran!) i alhora observar diverses realitzacions del canal que, si són independents, es podran combinar per a guanyar diversitat d'espai. Per a aconseguir aquesta diversitat cal poder transmetre senyals diferents per les N_t antenes transmissores i poder processar la sortida de les N_r antenes receptores.

Per tant, no solament cal tenir múltiples antenes sinó que cal tenir un transmissor complet per cada antena en transmissió i un receptor complet per cada antena en recepció (vegeu la figura 7). Quan aquest és el cas, es diu que tenim un canal de comunicacions MIMO (*multiple inputs multiple outputs*, 'canal d'entrada i sortida múltiples') que, com indica el nom, vol dir que el canal té N_t entrades i N_r sortides. En el cas particular que el transmissor només tingui una antena ($N_t = 1$), el canal es denomina SIMO (*single input multiple outputs*, 'canal d'entrada única i sortida múltiple') i només disposem de diversitat espacial en recepció. Per contra, si és el receptor el que només té una antena ($N_r = 1$), el canal es denomina MISO (*multiple inputs single output*, 'canal d'entrada múltiple i sortida única') i disposem de diversitat d'espai en transmissió. Per acabar, quan tenim múltiples antenes en els dos extrems, el canal s'anomena MIMO i tenim diversitat tant en transmissió com en recepció.

Per fer l'estudi considerarem el canal MIMO equivalent de la figura 7, en el qual entren N_t símbols cada T_s segons i del qual surten N_r símbols sorollosos cada T_s segons, en què T_s és el període de símbol. Mirant la figura, és fàcil veure que la sortida del canal MIMO equivalent es pot expressar en funció de l'entrada de la manera següent:

$$y_n = \sum_{k=1}^{N_t} h_{kn} x_k + w_n \quad n = 1, \dots, N_r \quad (23)$$

en què h_{kn} és l'atenuació del canal entre l'antena transmissora k i l'antena receptora n .

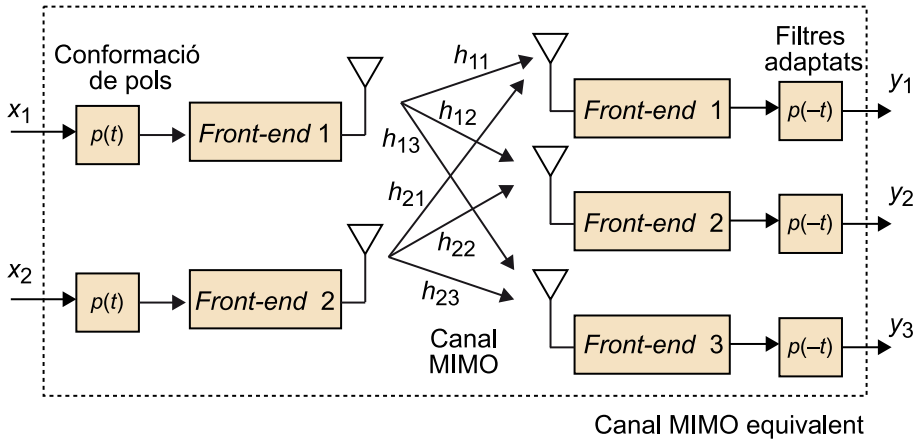
Per simplificar-ho, considerarem que el canal no canvia en el temps (no hi ha diversitat de temps) i tampoc no és selectiu en freqüència (no hi ha diversitat de freqüència), i ens centrarem només en la diversitat d'espai d'aquest canal.

Reflexió

Quan en aquest apartat parlem de MIMO ens referim a un sistema amb múltiples antenes en transmissió i recepció. No obstant això, les tècniques que explicarem en aquest apartat són aplicables a qualsevol altre sistema amb múltiples entrades i múltiples sortides, com per exemple un sistema de comunicacions OFDM en el qual transmetem i rebem N portadores.

D'altra banda, podem considerar els termes de soroll w_1, w_2, \dots, w_{N_r} estadísticament independents ja que cada sortida del canal MIMO té un capçal de radiofreqüència (*front-end module*) propi (figura 7).

Figura 7. Exemple d'un canal MIMO amb dues antenes en transmissió i tres en recepció



S'indica també el canal MIMO equivalent que inclou les cadenes de transmissió i recepció. En la figura s'anomena *RF front-end* (capçal de radiofreqüència) tot el processament analògic que es fa amb el senyal per a amplificar-lo, filtrar-lo i desplaçar-lo en freqüència.

L'equació (23) s'acostuma a escriure vectorialment de la manera següent:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (24)$$

en què el vector \mathbf{y} conté les N_r mostres rebudes a la sortida del canal MIMO, \mathbf{x} són les N_t mostres a l'entrada del canal i \mathbf{H} és l'anomenada *matriu de canal* que conté els coeficients h_{kn} del canal MIMO (vegeu l'exercici 7 de les activitats).

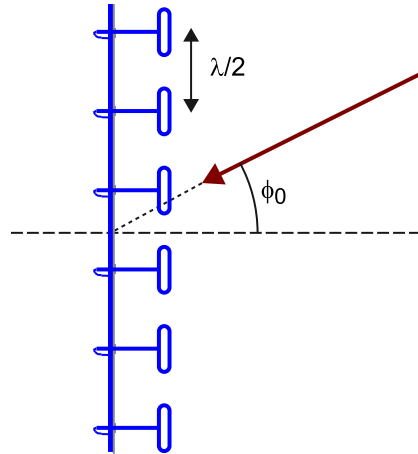
La qüestió més important que ens hem de plantejar és què ha de passar perquè els $N_t \times N_r$ canals siguin independents i puguem aconseguir el màxim guany de diversitat ($N_t \times N_r$) si combinem correctament les N_r sortides del canal. Per a respondre a aquesta pregunta ens cal entendre el concepte de *resolució angular*. Per explicar aquest concepte de la manera més senzilla, considerarem una agrupació lineal d'antenes formada per N antenes omnidireccionals separades per mitja longitud d'ona ($\lambda/2$) (vegeu la figura 8). Suposem llavors que arriba a l'agrupació un front d'ona (raig) amb un angle d'incidència igual a ϕ_o (vegeu la figura 8). En aquest cas, la resposta angular de l'agrupació voldríem que idealment fos una delta en la direcció ϕ_o , és a dir:

$$G(\phi) = N\delta(\phi - \phi_o) = \begin{cases} N & \phi = \phi_o \\ 0 & \phi \neq \phi_o \end{cases} \quad (25)$$

En canvi, com que l'agrupació té una longitud finita (N finit), la resposta angular serà en realitat una funció sinc (vegeu l'exercici 8):

$$G(\phi) = \frac{|\sin(0,5\pi N[\sin(\phi) - \sin(\phi_0)])|}{|\sin(0,5\pi[\sin(\phi) - \sin(\phi_0)])|} \quad (26)$$

Figura 8. Agrupació de $N = 8$ antenes separades $\lambda/2$



En la figura es defineix l'angle d'arribada ϕ_0 respecte de la direcció perpendicular a l'agrupació.

En la figura 9 es representa $G(\phi)$ per dos angles d'arribada: $\phi_0 = 0$ i $\phi_0 = 90$. Com es veu en la figura, dos rajos que arribin al receptor amb angles d'arribada 0° i $\Delta\phi$ es podran distingir si la separació angular $\Delta\phi$ que tenen és més gran que $\arcsin(2/N)$, que és l'angle en el qual té lloc el primer zero de la sinc. Si la separació angular és més petita que aquest valor, els lòbuls principals dels dos senyals se superposaran i el receptor no els podrà separar angularment. De la mateixa manera, si els dos senyals arriben a l'agrupació amb angles 90° i $90^\circ - \Delta\phi$, la separació angular $\Delta\phi$ haurà de ser $90 + \arcsin(2/N - 1)$ per a poder separar-los. Si fem números, per $N = 8$ ens surt que la separació per $\phi_0 = 0$ ha de ser $14,5^\circ$, mentre que per a $\phi_0 = 90^\circ$, ha de ser $41,4^\circ$ (figura 9). Això significa que l'agrupació és més resolutiva (directiva) per valors de ϕ_0 petits. En el cas general, es pot demostrar que dos rajos es poden separar en recepció si es compleix que la separació que tenen és més gran que (27):

$$\Delta\phi = \phi_0 + \arcsin(2/N - \sin(\phi_0)) \quad (27)$$

en què ϕ_0 és l'angle d'incidència d'un raig i $\phi_0 - \Delta\phi$ l'angle de l'altre raig (vegeu l'exercici 9 de les activitats).

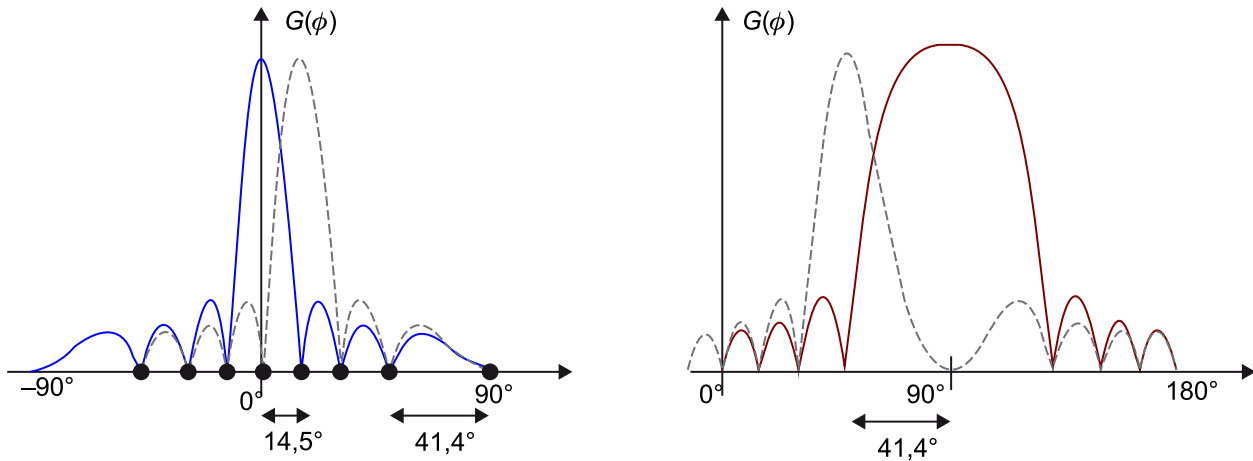
Sobre la base d'aquesta explicació, es defineix la resolució angular del receptor com la separació angular mínima ($\Delta\phi$) que han de tenir dos rajos incidents perquè el receptor els pugui discriminar (separar) i no els confongui. Per contra, qualsevol conjunt de rajos que arribin amb una separació angular més petita que la resolució angular del receptor seran integrats pel receptor i es processaran com un de sol. Això significa que una agrupació lineal de N elements només podrà discernir N angles d'arribada diferents, tal com s'indica en la fi-

Separació angular

Evidentment, no passem del blanc al negre abruptament, i com més separats estan els dos rajos, més bé es distingeixen. Per tant, la separació angular indicada s'ha d'entendre com un valor de referència.

gura 10 per al cas $N = 8$ (que són els mateixos angles marcats amb punts en la figura 9). Com s'indica en la figura, aquests angles divideixen l'agrupació en $N = 8$ sectors que hem numerat de l'1 al 8.

Figura 9. Resposta angular d'una agrupació lineal (1)



Resposta angular d'una agrupació lineal de $N = 8$ antenes a un senyal que arriba amb inclinació $\Phi_0 = 0$ (esquerra) o $\Phi_0 = 90$ (dreta). En línia gris discontinua s'indica la resposta de l'agrupació quan es rep un senyal separat $14,5$ (figura de l'esquerra) o $41,4$ (figura de la dreta), que correspon a la resolució angular de l'agrupació en les dues direccions considerades. Els punts de la figura de l'esquerra marquen els $N = 8$ angles que l'agrupació té capacitat de resoldre.

Abans d'acabar aquesta explicació, cal comentar els punts següents:

a) Per reciprocitat, tot el que hem explicat en recepció és igualment aplicable en transmissió. Això vol dir que només són distingibles dos senyals transmesos per una agrupació de N elements si es transmeten en direccions separades angularment com a mínim $\Delta\phi$ (equació (27)).

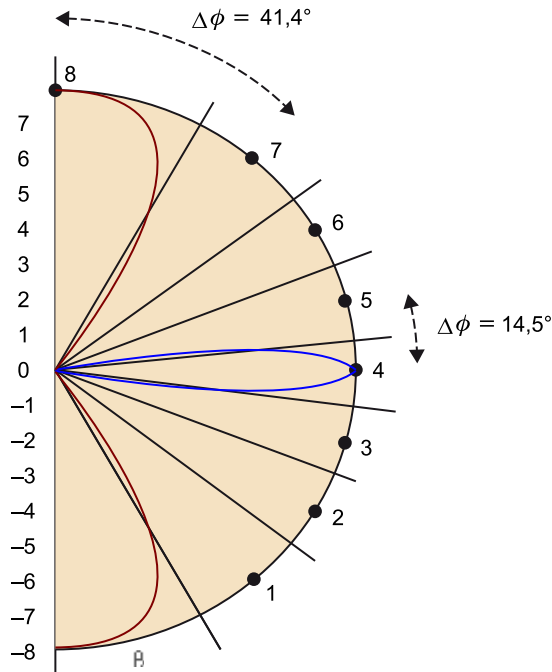
b) La resolució angular només depèn de les dimensions de l'agrupació, normalitzades respecte de la longitud d'ona λ . En el cas de l'agrupació lineal estudiada amb elements separats $d_0 = \lambda/2$, la longitud (normalitzada) de l'agrupació és $N/2$. Per tant, si augmentem la longitud de l'agrupació (N), millorarem la resolució angular. En canvi, es pot demostrar que si separem més les antenes ($d_0 > \lambda/2$) però mantenim la longitud de l'agrupació, la resolució angular no millorarà i apareixeran lòbuls principals espuris en la resposta angular de l'agrupació (equació (26)). Això significa que l'agrupació rep o transmet en més d'una direcció. Per contra, si ajuntem els elements de l'agrupació ($d_0 < \lambda/2$) sense canviar la longitud de l'agrupació, tampoc no aconseguirem millorar la resolució angular.

c) Si féssim tendir la longitud de l'agrupació (equació (26)) a infinit ($N \rightarrow \infty$), la resposta de l'agrupació $G(\phi)$ tendria a una delta (equació (25)) i la resolució angular esdevindria 0° per a qualsevol angle d'incidència ϕ_0 (equació (27)).

Una vegada explicat el concepte de *resolució angular*, estem en condicions de calcular quants components h_{kn} del canal MIMO (figura 7) són estadísticament independents. Com que el transmissor i el receptor només poden discriminar N_t i N_r direccions d'arribada diferents, podem sectorialitzar les agrupacions

del transmissor i del receptor en N_t i N_r sectors, respectivament (figura 10). Llavors, es demostra que el guany de diversitat és igual al nombre de sectors del transmissor i del receptor que estan interconnectats.

Figura 10. Resposta angular d'una agrupació lineal (2)



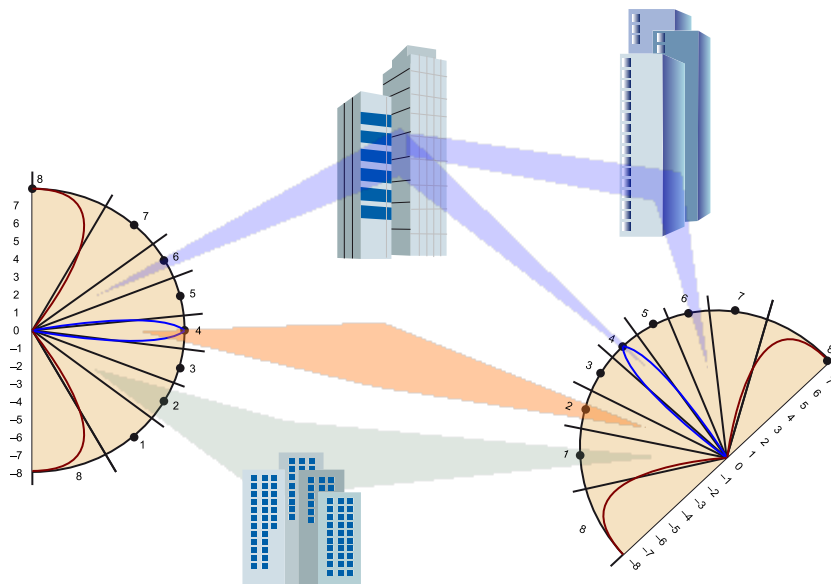
Resposta angular d'una agrupació lineal de $N = 8$ antenes a un senyal que arriba amb inclinació $\Phi_0 = 0^\circ$ (blau) o $\Phi_0 = 90^\circ$ (vermell). Només s'ha dibuixat el lòbul principal per a simplificar el dibuix. S'han senyalat també els $N = 8$ angles que l'agrupació és capaç de discriminar. Per exemple, tots els rajos que entrin dins del sector angular marcat amb el nombre 4 estaran integrats per l'agrupació i interpretats com si arribessin amb un angle de 0° . Cal assenyalar que, per simetria, l'agrupació presenta la mateixa resposta per davant, $|\Phi_0| \leq 90^\circ$, i per darrere, $|\Phi_0| > 90^\circ$.

Per a entendre-ho més bé, en la figura 11 hem plantejat un escenari típic en comunicacions mòbils en el qual hi ha diferents obstacles en l'entorn del transmissor i el receptor en els quals el senyal es difracta o reflecteix (propagació multicamí).

Encara que el transmissor i el receptor disposen de vuit antenes cadascun i el guany de diversitat potencial seria 64, el guany de diversitat de l'escenari mostrat en la figura no pot ser més gran que 4 perquè només hi ha quatre connexions entre el transmissor i el receptor. Aquestes quatre connexions són (vegeu la figura 11):

- Sector 6 del transmissor connectat amb els sectors 4 i 6 del receptor (feixos blaus). Perquè un sector es pugui connectar amb dos sectors (com és el cas), cal en general que el senyal es difracti en més d'un obstacle.
- Sector 4 del transmissor connectat amb el sector 2 del receptor (feix taronja). Aquest component correspon al raig directe.
- Sector 2 del transmissor connectat amb el sector 1 del receptor (feix gris).

Figura 11. Escenari de propagació multicamí amb tres edificis en els quals el senyal es difracta o reflecteix



Es considera que el transmissor i el receptor tenen vuit antenes cadascun, i per tant, els diagrames de radiació presenten vuit sectors. El guany de diversitat depèn de quants sectors del transmissor i el receptor estan interconnectats.

La conclusió més important a la qual arribem és que la diversitat d'espai d'un canal MIMO depèn fonamentalment dels tres aspectes següents:

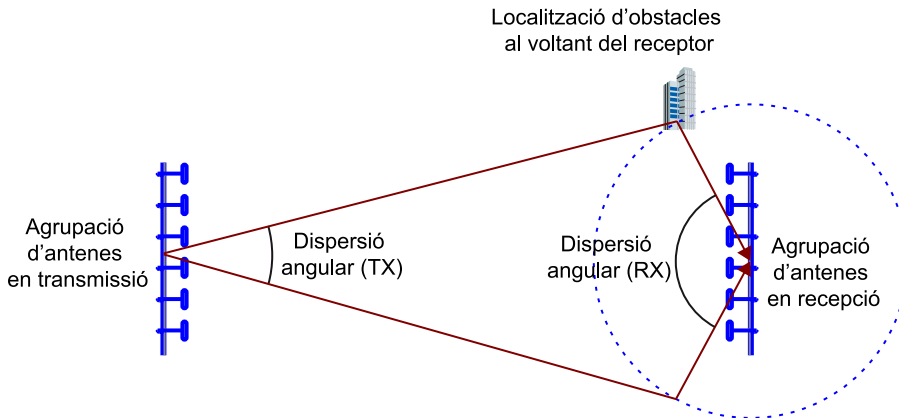
1) **Dispersió angular** del senyal en el transmissor i el receptor. Aquesta dispersió només és possible quan hi ha propagació multicamí i el senyal es reflecteix en obstacles que estan apartats angularment de la direcció de visió directa entre el transmissor i el receptor (LOS). Si la propagació es produís en l'espai lliure (només el feix taronja), no hi hauria guany de diversitat. En un escenari amb molts obstacles al voltant del transmissor, la dispersió angular del transmissor seria màxima ($-90^\circ < \phi < 90^\circ$) i s'aconseguiria màxima diversitat d'espai en transmissió (vegeu la figura 12). Si considerem un escenari amb molts obstacles al voltant del receptor, la dispersió angular en recepció serà màxima ($-90^\circ < \phi < 90^\circ$) i aconseguirem la màxima diversitat d'espai en recepció (vegeu la figura 13). Si es donen les dues condicions, es podrà aconseguir el màxim guany de diversitat, que és $N_t \times N_r$.

2) **Interconnexió** dels sectors del transmissor i del receptor. Perquè el guany de diversitat sigui gran cal que cada sector del transmissor estigui connectat amb el màxim nombre de sectors del receptor. Perquè un sector del transmissor (o del receptor) estigui connectat amb més d'un sector del receptor (o del transmissor) cal que el senyal "reboti" en més d'un objecte abans d'arribar al receptor (el feix blau de la figura 11), o que la mida de l'últim (o del primer) obstacle sigui prou gran perquè la dispersió angular que s'hi genera superi la resolució angular del receptor (o del transmissor).

3) **Independència de fadings**. Si el senyal es reflecteix en obstacles diferents (feixos blau i verd de la figura 11), podem assumir que els senyals transmesos o rebuts per sectors diferents experimentaran atenuacions i retards indepen-

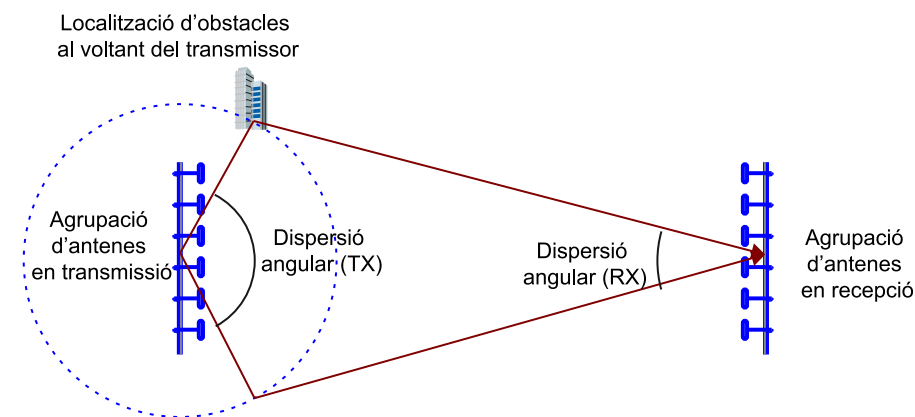
dents. A més a més, si el nombre de rajos que es transmeten i reben entre cada parell de sectors transmissor i receptor és prou gran, la distribució dels coeficients h_{kn} del canal esdevindrà gaussiana pel teorema del límit central.

Figura 12. Escenari de propagació en el qual els obstacles estan distribuïts al voltant del receptor



En aquest cas la dispersió angular en el receptor és gran i la diversitat d'espai s'aconseguirà en recepció.

Figura 13. Escenari de propagació en el qual els obstacles estan distribuïts al voltant del transmissor



En aquest cas la dispersió angular en el transmissor és gran i la diversitat d'espai s'aconseguirà en transmissió.

Una vegada coneguda la diversitat d'espai que ens ofereix el canal MIMO, estudiarem les diferents tècniques que ens permeten fer ús d'aquesta diversitat. Considerarem diversos casos en funció de les situacions següents:

- Si la matriu de canal \mathbf{H} (equació (24)) és coneguda pel transmissor, o només pel receptor.
- Si s'utilitza el canal MIMO per a guanyar diversitat (reduir probabilitat d'error quan hi ha fàdings) o per a augmentar la velocitat de transmissió (guany de multiplexació).

4.1. Conformació de feix

En els escenaris en què el canal varia molt lentament i hi ha un canal de retorn entre el receptor i el transmissor, el receptor pot estimar la matriu de canal \mathbf{H} i enviar el valor dels coeficients al transmissor perquè triï de manera òptima el senyal que transmet per cada antena. Si volem aconseguir tot el guany de diversitat que ens ofereix el canal MIMO, hem de transmetre cada símbol d'informació utilitzant les N_t antenes transmissores. El guany de cada antena transmissora i receptora s'ha d'ajustar en funció de la matriu \mathbf{H} per a maximitzar l'SNR en recepció i maximitzar així el guany de codificació (vegeu l'apartat 1).

Si anomenem s el símbol d'informació que volem transmetre i \mathbf{b}_{tx} el vector (columna) que conté el guany de cadascuna de les N_t antenes transmissores, el vector de símbols que transmetrem serà:

$$\mathbf{x} = \mathbf{b}_{tx}s \quad (28)$$

D'altra banda, el receptor hauria de combinar el senyal rebut en cadascuna de les N_r antenes de manera coherent per a decidir el valor del símbol transmès s amb la màxima fiabilitat possible. El resultat d'aquesta combinació és l'escalar següent:

$$z = \mathbf{b}_{rx}^H \mathbf{y} \quad (29)$$

en què \mathbf{b}_{rx} és el vector que conté el guany de les N_r antenes receptores i \mathbf{y} el vector que conté el senyal rebut en cadascuna (equació (24)). Es pot demostrar (vegeu l'exercici 10 de les activitats) que els vectors \mathbf{b}_{tx} i \mathbf{b}_{rx} que maximitzen l'SNR de z s'han de calcular de la manera següent:

1) S'ha de calcular la descomposició de valors singulars (*singular-value decomposition*, SVD) de la matriu \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H = \sum_{i=1}^N \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H \quad (30)$$

en què \mathbf{U} és la matriu de dimensions $N_r \times N$ que conté els N autovectors de \mathbf{H} per l'esquerra (\mathbf{u}_i), \mathbf{V} és la matriu de dimensions $N_t \times N$ que conté els N autovectors de \mathbf{H} per la dreta (\mathbf{v}_i) i $\mathbf{\Sigma}$ és la matriu diagonal de dimensions $N \times N$ que conté en la diagonal els N valors singulars σ_i no nuls de la matriu \mathbf{H} . L'SVD permet diagonalitzar qualsevol matriu encara que no sigui quadrada, com és el cas de \mathbf{H} quan $N_t \neq N_r$.

Enllaços bidireccionals en mode TDD

En enllaços bidireccionals en mode TDD (*time division duplexing*, 'dúplex per divisió de temps') el canal és el mateix en els dos sentits de la comunicació i no cal canal de retorn.

Superíndex H

El superíndex (H) indica transposició (canviar columnes per files) i conjugació (canviar el signe de la fase).

2) S'ha de buscar l'autovector per l'esquerra (\mathbf{u}_i) i per la dreta (\mathbf{v}_i) corresponents al valor singular màxim $\sigma_{max} = \max_i \sigma_i$, que anomenarem \mathbf{u}_{max} i \mathbf{v}_{max} , respectivament.

Es pot demostrar que els vectors \mathbf{b}_{tx} i \mathbf{b}_{rx} que maximitzen l'SNR de z (equació (29)) són $\mathbf{b}_{tx} = \mathbf{v}_{max}$ i $\mathbf{b}_{rx} = \mathbf{u}_{max}$. Aquests dos vectors s'anomenen *conformadors de feix* perquè ajusten els diagrames de radiació del transmissor i del receptor per tal de maximitzar la transferència d'energia per mitjà del canal MIMO.

Utilitzant els conformadors de feix òptims en transmissió i recepció, es pot demostrar que el senyal z de l'equació (29) pren el valor següent (vegeu l'exercici 10 de les activitats):

$$z = \sigma_{max}^S + \mathbf{u}_{max}^H \mathbf{w} \quad (31)$$

Es pot demostrar que l'esquema de diversitat presentat aconsegueix el màxim guany de diversitat i el màxim guany de codificació (vegeu l'apartat 1), és a dir, l'SNR de z és més petita que $\sigma_{max}^2 / \sigma_w^2$ per a qualsevol altre disseny dels conformadors de feix que fem.

4.2. Codificació espaciotemporal

Encara que no es conegui el canal en transmissió, es pot aconseguir tot el guany de diversitat del canal utilitzant els codis espaciotemporals que explicarem en aquest subapartat. No obstant això, el preu que es paga pel fet de no conèixer el canal en transmissió és que l'SNR que aconseguirem serà més petita que en l'apartat anterior.

Si no coneixem la matriu de canal \mathbf{H} en transmissió i volem continuar utilitzant un receptor lineal senzill, no es podrà transmetre el mateix símbol per totes les antenes en un sol instant de temps, com hem fet en el subapartat 4.1 en l'equació (28), sinó que s'han de fer $T \geq N_t$ transmissions i en cada transmissió transmetre una combinació diferent dels símbols d'informació. Si denotem per $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T]$ la matriu que conté la combinació de símbols transmesos per les N_t antenes en els T instants de temps, tindrem que l'equació (24) ens quedarà de la manera següent, en què hem afegit la dimensió temporal (columnes de \mathbf{X} i \mathbf{Y}) a la dimensió espacial (files de \mathbf{X} i \mathbf{Y}):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{W} \quad (32)$$

Vegeu també

En l'exercici 11 de les activitats es proposa buscar els conformadors òptims en el cas particular d'un canal MISO o d'un canal SIMO.

Si la paraula codi transmesa \mathbf{X} conté $R \cdot T$ símbols d'informació diferents, es diu que la taxa del codi és R ($0 < R \leq 1$). En general, sempre que sigui possible, s'intenta que la taxa del codi sigui propera a 1, de manera que els codis espaciotemporals no introdueixin redundància i sigui el codificador de canal el que faci aquesta feina.

Igual que els codis correctors d'error, els codis espaciotemporals es classifiquen en codis de bloc (*space-time block codes*, STBC) i codis convolucionals (*space-time trellis codes*, STTC). Per simplificar l'explicació, nosaltres ens centrarem en els primers i estudiarem els anomenats *codis espaciotemporals ortogonals*. Quan diem *ortogonals*, volem dir que les paraules codi \mathbf{X} es dissenyen de manera que els $R \cdot T$ símbols transmesos es puguin separar perfectament en el receptor mitjançant un esquema lineal i les decisions es puguin prendre llavors símbol a símbol. Com a exemple, explicarem el codi d'Alamouti, que es va proposar originalment per al cas d'un canal MISO amb dues antenes transmissores ($T = N_t = 2$). Aquest és el codi espaciotemporal que s'ha utilitzat més, perquè és senzill, i el podem trobar en múltiples estàndards de comunicacions amb diferents noms, com per exemple UMTS o WiMax (3G).

En el codi d'Alamouti les paraules codi es construeixen de la manera següent:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix} \quad (33)$$

en què s_1 i s_2 són els símbols (complexos) d'informació transmesos i l'operador $()^*$ canvia el signe de la fase (conjugació). Com que es transmeten dos símbols en dos instants de temps, la taxa del codi d'Alamouti és $R = 1$. Es demostra que no hi ha cap altre codi espaciotemporal ortogonal que aconsegueixi una taxa igual a 1 si els símbols transmesos són complexos (per exemple, QPSK). En concret, la màxima taxa que es pot aconseguir és 3/4. Això no és del tot bo però és el preu que s'ha de pagar perquè el codi sigui ortogonal.

Com que tenim dues antenes transmissores i una sola de receptora, podem expressar les mostres rebudes en els dos instants de temps de la manera següent (equació (32)):

$$[y_1 \ y_2] = [h_1 \ h_2] \mathbf{X} + [w_1 \ w_2] \quad (34)$$

I, si ara substituïm l'equació (33) dins de l'equació (34) i conjuguem la mostra rebuda en el segon instant de temps, es podrà demostrar (vegeu l'exercici 12 de les activitats) que arribem a l'expressió següent:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2^* \end{bmatrix} \quad (35)$$

Vegeu també

Per contra, el codi de repetició explicat en l'apartat 1 tindria una taxa igual a $1/T$. En el cas estudiat, això significaria que les paraules codi transmeses serien de la forma $\mathbf{X} = \mathbf{B}_{tx} \cdot s$, en què s és el símbol d'informació transmesa i \mathbf{B}_{tx} la matriu de dimensions $N_t \times T$.

Lectura complementària

E. G. Larsson; P. Stoica (2003). *Space-Time Block Coding for Wireless Communications*. Cambridge: Cambridge University Press.

Identificant termes, s'arriba al següent canal MIMO equivalent de dues entrades i dues sortides:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2^* \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{w}} \quad (36)$$

Si volem recuperar els símbols d'informació s_1 i s_2 , es demostra que el descodificador òptim (màxima versemblança) es podrà implementar linealment de la manera següent (vegeu l'exercici 13 de les activitats):

$$\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{H}}^H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2^* \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{H}}^H \tilde{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{H}}^H \tilde{\mathbf{w}} = (|h_1|^2 + |h_2|^2) \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{H}}^H \tilde{\mathbf{w}} \quad (37)$$

en què hem tingut en compte que, per construcció, la matriu $\tilde{\mathbf{H}}^H \tilde{\mathbf{H}}$ és diagonal. Per tant, el codi d'Alamouti és una manera enginyosa de convertir el canal MISO en un canal MIMO de 2×2 pel qual es puguin transmetre els dos símbols d'informació de manera que es puguin recuperar linealment en recepció i alhora s'aconsegueixi tot el guany de diversitat que ofereix el canal, que és 2.

És important comentar els aspectes següents del codi d'Alamouti:

- S'aconsegueix el mateix guany de diversitat que obtindríem en un canal SIMO amb una sola antena transmissora i dues antenes receptores. L'avantatge principal és que movem la complexitat que tindria el receptor cap al costat del transmissor. Això és molt interessant en el cas de l'enllaç de baixada d'una xarxa cel·lular perquè permet reduir la complexitat dels terminals dels usuaris a canvi de complicar les estacions base de l'operador.
- S'aconsegueix el mateix guany de diversitat que hem obtingut en el subapartat 4.1 sense que el transmissor hagi de conèixer el canal. No obstant això, fixada la potència transmesa, es produeix una pèrdua de 3 dB d'SNR respecte de la del subapartat 4.1.
- Es pot utilitzar també amb N_r antenes en recepció (vegeu l'exercici 14 de les activitats). En aquest cas, s'aconsegueix un guany de diversitat igual a $2N_r$.

4.3. Multiplexació espacial

En aquest subapartat explicarem una manera alternativa d'utilitzar la diversitat del canal. En comptes d'intentar millorar la probabilitat d'error com hem fet fins ara (guany de diversitat), l'objectiu serà incrementar la velocitat de transmissió multiplexant espacialment en cada transmissió N símbols

d'informació diferents. D'aquesta manera, podrem incrementar la taxa de transmissió en un factor N sense augmentar l'amplada de banda del sistema. El paràmetre N es coneix com a *guany de multiplexació* (espacial) del canal MIMO.

Aquesta descoberta és realment una de les més importants que s'han fet en els últims anys en l'àrea de les comunicacions sense fils. Actualment hi ha diversos estàndards que incorporen múltiples antenes per incrementar la velocitat de transmissió. Un d'aquests estàndards és l'IEEE 802.11n, que permet connexions Wi-Fi de 108 Mbps gràcies a l'ús de dues antenes en transmissió i dues antenes en recepció, utilitzant la mateixa amplada de banda que en l'IEEE 802.11g (20 MHz).

La primera pregunta que ens hauríem de fer és quin és el guany de multiplexació N que podem aconseguir. La resposta és que depèn de la matriu de canal \mathbf{H} que tinguem. En concret, es pot demostrar que el guany de multiplexació el determina el rang de la matriu \mathbf{H} (equació (30)). Com que \mathbf{H} és una matriu de dimensions $N_t \times N_r$, el rang de \mathbf{H} no pot ser mai més gran que $\min(N_t, N_r)$, i per tant es compleix la relació següent:

$$N \leq \min(N_t, N_r) \quad (38)$$

Encara que en molts casos es compleix que $N = \min(N_t, N_r)$, hi ha situacions en les quals el rang de \mathbf{H} és més petit que aquest valor. Si recordem l'explicació que hem fet en l'apartat 4 (vegeu la figura 11), el guany de diversitat depenia del nombre d'interconnexions entre els N_t sectors del diagrama de radiació del transmissor i els N_r sectors angulars del receptor. Per aquesta raó, el màxim guany de diversitat que es pot aconseguir és $N_t \times N_r$: cada sector del transmissor connectat amb cada sector del receptor. De la mateixa manera, es pot demostrar que per a aconseguir el màxim guany de multiplexació hi ha d'haver $N = \min(N_t, N_r)$ sectors angulars en el transmissor que estiguin connectats amb un mínim de $N = \min(N_t, N_r)$ sectors diferents del receptor. Per exemple, encara que en la figura 11 el transmissor i el receptor tenen vuit antenes, el guany de multiplexació que es podria aconseguir en aquest canal seria, 3 en lloc de 8.

Una vegada identificat el guany de multiplexació que ofereix el canal MIMO, explicarem quin és l'esquema de transmissió que ens permet transmetre a la màxima velocitat possible amb una probabilitat d'error tan petita com calgui. La màxima velocitat d'un canal MIMO en bits per segon es coneix com a *capacitat del canal*:

Rang d'una matriu

Recordeu que el rang d'una matriu és el nombre de files o columnes linealment independents. Si fem la descomposició SVD de la matriu, el rang serà també el nombre de valors singulars diferents de zero (vegeu el subapartat 4.1).

Probabilitat d'error

La probabilitat d'error depèn del codi corrector d'errors utilitzat. Teòricament, la probabilitat d'error es pot reduir tant com faci falta incrementant-ne la longitud de les paraules codi.

$$C = \max_{P_k} \sum_{k=1}^N B \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_k \sigma_k^2}{\sigma_w^2} \right) \quad (39)$$

La capacitat del canal és la suma de la capacitat dels N subcanals ortogonals en els quals podem descompondre el canal MIMO mitjançant la descomposició SVD estudiada en l'equació (30):

$$P = \sum_{k=1}^N P_k \quad (40)$$

La notació utilitzada en l'equació (39) és la següent: B és l'amplada de banda del sistema, σ_w^2 és la variància del soroll w_n en l'equació (23), σ_k és el valor singular número k de la matriu de canal \mathbf{H} (equació (30)), P_k és la potència assignada al subcanal k , i P , definida com l'expressió (40), és la potència total transmesa, que el transmissor ha de repartir de manera òptima entre els N subcanals.

Ara que sabem quina és la capacitat del canal MIMO estudiat, presentarem com s'ha de fer per a transmetre a una velocitat propera a la capacitat quan la matriu \mathbf{H} és coneguda pel transmissor.

1) **Transmissor.** En cada període de símbol, el transmissor transmet per les N_t antenes el vector:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{P}\mathbf{s} \quad (41)$$

en què \mathbf{s} és el vector que conté els N símbols d'informació s_1, \dots, s_N , \mathbf{V} és la matriu de dimensions $N_t \times N$ que conté en les columnes els N autovectors per la dreta de la matriu \mathbf{H} (equació (30)) i \mathbf{P} és la matriu diagonal que fixa les potències transmeses per cadascun dels N subcanals ortogonals per tal de maximitzar la capacitat del canal (equació (39)) fixada la potència total transmesa (equació (40)):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{P_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{P_N} \end{bmatrix} \quad (42)$$

2) **Receptor.** En cada instant, el receptor processa la sortida del canal MIMO de la manera següent:

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}^H \mathbf{y} \quad (43)$$

Waterfilling

El criteri òptim de repartiment de la potència s'anomena *waterfilling* (vegeu l'exercici 15 de les activitats).

S'obté una versió escalada i sorollosa del vector de símbols transmesos (equació (44)), en què \mathbf{U} és la matriu de dimensions $N_r \times N$ que conté els N autovectors de \mathbf{H} per l'esquerra, $\mathbf{\Sigma}$ és la matriu diagonal de dimensions $N \times N$ que conté en la diagonal els N valors singulars no nuls de \mathbf{H} (equació (30)) i es compleix que el soroll $\mathbf{U}^H \mathbf{w}$ té la mateixa variància que el soroll original \mathbf{w} :

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Sigma} \mathbf{P} \mathbf{s} + \mathbf{U}^H \mathbf{w} \quad (44)$$

Observant l'equació (44) veiem que l'SVD ens ha permès descompondre el canal MIMO en N subcanals ortogonals pels quals es pot transmetre informació independent, i augmentar d'aquesta manera la velocitat de transmissió en un factor N .

La pregunta que ens queda per respondre és la següent: es pot aconseguir el mateix guany de multiplexació sense conèixer el canal en transmissió? Afortunadament, la resposta és afirmativa i els esquemes de transmissió utilitzats en aquest cas reben el nom de *BLAST* (*bell labs space-time architectures*). Com que en BLAST no es coneix el canal en transmissió, cadascun dels $N = N_t$ símbols d'informació es transmeten per una antena diferent, és a dir, $\mathbf{x} = \mathbf{s}$. Conseqüentment, el receptor haurà de tenir $N_r \geq N$ antenes perquè el guany de multiplexació pugui ser N . A més a més, com que el canal és desconegut en transmissió, no és possible dividir el canal MIMO en N subcanals independents, i per tant, el receptor haurà de ser més complicat perquè haurà de descodificar conjuntament els N símbols transmesos.

Una alternativa a la descodificació conjunta que es pot utilitzar en alguns casos és l'anomenat *receptor SIC* (*successive interference cancellation*), en el qual es descodifiquen els N símbols seqüencialment, començant pel més potent. En el receptor SIC, cada vegada que es descodifica un símbol se'n sostreu el valor del senyal \mathbf{y} rebut de manera que, després de descodificar amb èxit els primers $k - 1$ símbols (s_1, \dots, s_{k-1}), el símbol s_k es descodifica utilitzant una versió "netejada" del senyal que només inclou la interferència dels símbols encara no descodificats (s_{k+1}, \dots, s_N):

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y} - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{h}_i \hat{s}_i = \mathbf{h}_k s_k + \sum_N^{i=k+1} \mathbf{h}_i s_i + \mathbf{w} \quad (45)$$

en què \mathbf{h}_i és la columna i de la matriu de canal \mathbf{H} i \hat{s}_i és la decisió del símbol s_i feta sobre la base de $\hat{\mathbf{y}}_i$ en la iteració número i .

V-BLAST

Aquest esquema en concret ($\mathbf{x} = \mathbf{s}$) s'anomena *V-BLAST* (*vertical BLAST*). Es demostra que V-BLAST és òptim quan el transmissor no coneix el canal i el canal és variant en el temps. Hi ha una altra versió que funciona més bé en canals lentament variants en el temps que s'anomena *D-BLAST* (*diagonal BLAST*). El problema de V-BLAST és que no explota la diversitat d'espai en transmissió del canal perquè no transmet el mateix símbol per les N_t antenes del transmissor. En D-BLAST aquest problema se soluciona fent codificació espaciotemporal (vegeu el subapartat 4.2) de manera que cada símbol es transmet per les N_t antenes en instants de temps diferents.

4.4. Antenes intel·ligents

En aquest subapartat hem après que podem utilitzar les antenes del transmissor i el receptor per a augmentar la fiabilitat de la transmissió davant dels fàdings del canal (diversitat) o augmentar la velocitat de transmissió (multiplexació espacial). En aquest subapartat considerarem una tercera manera d'utilitzar les antenes del transmissor i el receptor. En aquest cas, volem filtrar espacialment els senyals interferents procedents d'altres usuaris del sistema. Mitjançant aquest filtratge espacial és possible aconseguir que múltiples usuaris comparteixin el mateix medi sense que s'interfereixin o el nivell d'interferència sigui prou baix. Aquesta tècnica d'accés múltiple o multiplexació s'anomena SDM/A (*space division multiplexing / multiple-access*) i s'explica en una altra assignatura. A continuació explicarem com podem utilitzar les antenes del transmissor i del receptor en escenaris SDM/A.

Considerem un sistema amb N_u usuaris que comparteixen espacialment el mateix canal de comunicacions. L'objectiu és dissenyar per cada usuari un conformador de feix (*beamformer*) per al transmissor \mathbf{b}_{tx} i un altre per al receptor \mathbf{b}_{rx} que permetin maximitzar l'*SNIR* en recepció de l'usuari amb el qual ens volem comunicar sense degradar massa l'*SNIR* dels altres $N_u - 2$ usuaris del sistema. La interferència que apareix en el denominador de l'*SNIR* és, doncs, la interferència d'accés múltiple provinent dels $N_u - 2$ usuaris que comparteixen el medi amb l'usuari d'interès. Per tant, volem maximitzar l'energia que enviem a l'usuari d'interès alhora que minimitzem la interferència que es genera sobre la resta d'usuaris del sistema.

Encara que en els dos casos es parla de *conformació de feix (beamforming)*, el criteri adoptat en aquest subapartat és molt diferent del que hem considerat en el subapartat 4.1. Si rellegim el subapartat 4.1, veurem que llavors volíem maximitzar l'*SNR* del receptor en un escenari sense interferències (només dos usuaris) fent servir la diversitat d'espai del canal, mentre que ara volem maximitzar l'*SNIR* dels N_u usuaris del sistema en un escenari amb interferències.

La clau per a dissenyar els conformadors de feix del transmissor i del receptor és recordar que el diagrama de radiació d'una agrupació de N antenes omnidireccionals presenta $N - 1$ nuls (vegeu la figura 10). Això vol dir que hi ha $N - 1$ direccions de l'espai en les quals l'agrupació no transmet (ni tampoc rep) cap energia. El més important és que la posició d'aquests $N - 1$ nuls es pot fixar electrònicament canviant el valor dels coeficients del conformador. Per exemple, si el conformador \mathbf{b}_{tx} és un vector de tots uns, el diagrama de radiació serà exactament el de la figura 10 i trobarem els encreuaments per zero als angles $\phi_i = \arcsin(2i/N)$, amb i un enter entre $-N/2 + 1$ i $N/2$ ($i \neq 0$).

Si tenim present això i el transmissor d'un usuari sap en quina direcció es troba l'usuari d'interès i en quina direcció es troben els altres $N_u - 2$ usuaris, podrà ajustar el seu conformador \mathbf{b}_{tx} per tal que el lòbul principal apunti en la

Vegeu també

La tècnica SDM/A de multiplexació es veu en el mòdul didàctic "Multiplexació i sistemes d'accés múltiple" de l'assignatura *Sistemes de comunicacions I*.

direcció de l'usuari d'interès i el diagrama de radiació tingui zeros en les $N_u - 2$ direccions en què hi ha els altres usuaris. L'única limitació és que l'amplada angular del lòbul principal no pot ser més petita que $2\arcsin(2/N_t)$, i per tant, el conformador no pot cancel·lar mai espacialment els usuaris que estiguin separats angularment menys de $\arcsin(2/N_t)$ radians de l'usuari d'interès, que és la resolució angular $\Delta\phi$ de l'agrupació ($\Delta\phi = 14,5^\circ$ en l'exemple de la figura 10).

De la mateixa manera, si el receptor sap en quina direcció es troba el transmissor d'interès i en quines direccions es troben els altres usuaris del sistema, podrà dissenyar el seu conformador \mathbf{b}_{rx} perquè el lòbul principal apunti en la direcció de l'usuari d'interès i l'agrupació tingui una resposta nul·la en la direcció dels altres $N_u - 2$ usuaris. Una altra vegada, la limitació és la resolució angular del receptor, que depèn del nombre d'antenes receptores i val $\Delta\phi = \arcsin(2/N_r)$.

En tots dos casos, per a dissenyar els conformadors de feix cal que els usuaris coneguin les seves posicions angulars. Normalment no es disposa *a priori* d'aquesta informació perquè els usuaris en una xarxa sense fils es mouen lliurement i canvien de posició. Per tant, cal que els usuaris aprenguin en quina posició (angular) es troben els seus "companys" i monitorin aquesta posició al llarg del temps. És per aquesta raó que en els anys noranta aquesta tecnologia va rebre el nom comercial d'*antenes intel·ligents* (*smart antennas*), perquè han de tenir certa intel·ligència per a aprendre on són els altres usuaris i canviar en conseqüència el propi diagrama de radiació. Per acabar, cal comentar que en recepció es poden aplicar tècniques de filtratge adaptatiu per a ajustar en cada moment els coeficients de \mathbf{b}_{rx} que maximitzen l'*SNIR* del receptor en funció del senyal que es rep, que conté informació d'on procedeix la interferència i també del nivell de soroll del receptor.

5. Conclusions

En aquest mòdul didàctic hem explicat un concepte que és clau en el disseny de sistemes de comunicacions quan el canal presenta fàdings. Aquest concepte és la diversitat. Com que l'atenuació del canal és variant en el domini del temps, de la freqüència o de l'espai, els esquemes de diversitat transmeten la informació utilitzant diversos components temporals, freqüencials o espacials del canal. Si l'atenuació dels components del canal utilitzats és estadísticament independent, el més probable és que alguna versió del senyal transmès es rebi amb prou qualitat per a recuperar correctament la informació transmesa. Per a garantir que els components del canal utilitzats són independents, els hem de separar prou. En el domini temporal aquesta separació ha de ser superior al temps de coherència del canal, mentre que en el domini freqüencial s'han d'utilitzar freqüències que estiguin més separades que l'amplada de banda de coherència del canal. Pel que fa al domini de l'espai, cal enfocar l'agrupació d'antenes en direccions prou separades angularment perquè el senyal es reflecteixi o difracti en obstacles independents.

Segons quin sigui el domini en el qual el canal és variant (selectiu), l'esquema de diversitat que caldrà utilitzar serà diferent. Si la diversitat és de temps (canal variant en el temps), es podran utilitzar els codis correctors d'error clàssics acompanyats d'un entrellaçador que separi en el temps els símbols que surten del codificador de manera que aquests símbols vegin realitzacions independents del canal. Si la diversitat és en el domini de la freqüència (canal selectiu en freqüència), hi haurà diferents maneres d'explotar la diversitat del canal. La manera més directa és transmetent els símbols que surten del codificador de canal, convenientment entrellaçats mitjançant una modulació OFDM. Una altra opció és deixar que sigui l'equalitzador del receptor el que extregui la diversitat de freqüència del canal. En sistemes d'espectre eixamplat, es pot aprofitar que els receptors tenen una alta resolució temporal perquè extreguin l'energia dels diferents components del multicamí mitjançant l'anomenat *receptor RAKE*.

D'altra banda, cal disposar de múltiples antenes en transmissió o recepció (MIMO) si es vol fer servir la diversitat d'espai del canal. Els components del multicamí que arriben al receptor amb diferent angle d'arribada normalment estan afectats per atenuacions independents perquè pel camí han "rebotat" en objectes diferents. D'aquesta manera, la diversitat d'espai que es pot aconseguir en recepció depèn de la dispersió angular amb què el senyal arriba al receptor i de la resolució angular del receptor, que depèn del nombre d'antenes del receptor i de la separació entre elles (normalment $\lambda/2$). Per reciprocitat, tot això és cert també en el cas del transmissor.

La diversitat d'espai es pot utilitzar de dues maneres:

1) En primer lloc, es pot utilitzar per a transmetre amb més fiabilitat (menys probabilitat d'error) sense haver de reduir la velocitat de transmissió. Si volem reduir la probabilitat d'error hem de maximitzar l'*SNR* en recepció. Quan el canal és conegut pel transmissor, el transmissor ha d'utilitzar aquesta informació per a conformar angularment el senyal transmès de manera òptima. En canvi, quan el canal el coneix només el receptor, el millor que pot fer el transmissor és codificar el símbols mitjançant un codi espaciotemporal, com per exemple el codi d'Alamouti.

2) En segon lloc, si es fa servir la diversitat d'espai per a transmetre a més velocitat (multiplexació espacial), l'esquema de transmissió òptim requereix descompondre el canal MIMO en N subcanals independents i repartir la potència i els bits entre els N subcanals en funció de l'*SNR*. Per a fer-ho, cal conèixer el canal en transmissió. No obstant això, si no es coneix, hi ha esquemes de multiplexació espacial coneguts com a *BLAST* que no requereixen conèixer el canal en transmissió.

Per acabar, volem assenyalar que l'objectiu d'aquest mòdul no ha estat presentar totes les tècniques de diversitat existents, ni tampoc analitzar-ne les prestacions amb detall. L'objectiu és entendre la necessitat d'aprofitar la diversitat del canal quan es transmet en canals amb fàding, veure els diferents tipus de diversitat que ens ofereix el canal de comunicacions, i finalment, entendre com funcionen a alt nivell alguns dels algorismes de diversitat més importants.

Activitats

1. La propagació multicamí no sempre és perjudicial. Amb certa probabilitat els diferents components del canal se sumen coherentment (en fase) i el nivell de senyal rebut és més gran que el que tindríem sense propagació multicamí.

a) Suposem que a causa del multicamí la potència del senyal rebut segueix una distribució exponencial $f_p(P) = \exp(-P/\bar{P})/\bar{P}$, en què \bar{P} és la potència mitjana rebuda. Aquesta és la distribució de la potència rebuda en el l'anomenat *canal Rayleigh*. Calculeu la probabilitat que un usuari rebí una potència superior a dues vegades la potència mitjana \bar{P} .

b) Considerem ara un sistema amb $N = 20$ usuaris. Si la potència que reben els N usuaris és independent i segueix la mateixa distribució exponencial, calculeu la probabilitat que algun dels N usuaris rebí una potència superior a $2\bar{P}$.

2. La resolució temporal d'un receptor passabanda és igual a l'invers de la seva amplada de banda W .

a) Apliqueu el teorema de mostratge i demostreu que:

- s'ha de prendre una mostra cada $1/W$ segons.
- cada mostra es calcula integrant el senyal rebut mitjançant un filtre $h_r(t)$ de durada efectiva $1/W$.

b) Comenteu què passaria si es reduís o augmentés la freqüència de mostratge. Per dualitat, discutiu quina és la resolució freqüencial d'un sistema que transmet polsos de T segons de durada.

3. Calculeu el guany de diversitat que es pot aconseguir en un sistema BPSK si s'utilitza el següent codi de Hamming (7,4) amb matriu generadora:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

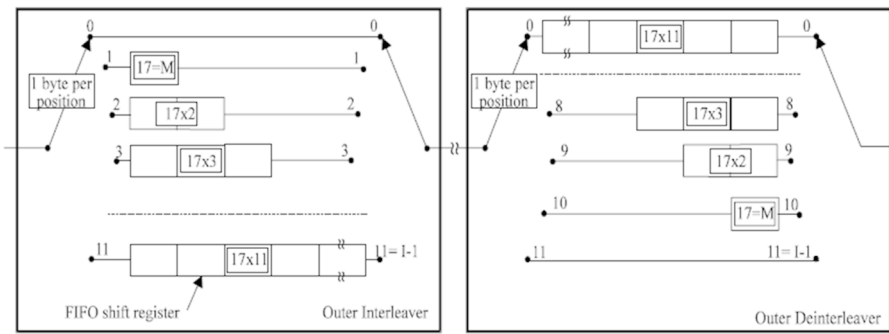
4. Compareu l'SNR mitjana a la sortida del combinador d'igual guany i del combinador de màxima relació senyal-soroll pel canal Rayleigh. Deixeu el resultat en funció de N i de σ_w^2 . Suposeu que N és molt gran. Si us cal, podeu resoldre numèricament l'exercici mitjançant un programa matemàtic.

5. En aquest exercici es vol estudiar el següent esquema d'entrellaçament, anomenat *convolucional*, que s'utilitza en la TDT (estàndard DVB-T) i també en els estàndards DVB-S (satèl·lit) i DVB-C (cable).

En l'estàndard, cada trama de $N = 204$ octets (bytes) que surt del codificador MPEG s'entrellaça utilitzant $K = 12$ registres de desplaçament de diferent longitud. En concret, el registre de desplaçament i té una longitud igual a $i \cdot N/K$ octets amb $i = 0, \dots, K - 1$. Com s'indica en la figura, els octets d'entrada s'escriuen l'un darrere l'altre en els registres de desplaçament, començant pel registre $i = 0$. Per simplificar-ho, nosaltres considerarem una trama més curta ($N = 12$) i un entrellaçador amb només $K = 4$ branques.

Calculeu la sortida de l'entrellaçador i indiqueu quina és la mínima separació dels símbols de la trama a la sortida de l'entrellaçador (profunditat d'entrellaçament). Marqueu amb una creu els símbols corresponents a les trames anteriors i posteriors. Per acabar, dissenyeu un entrellaçador de bloc que aconsegueixi la mateixa profunditat d'entrellaçament i compareu els avantatges i inconvenients de les dues arquitectures.

Figura 14. Esquema de l'entrellaçador i desentrellaçador convolucional utilitzat en l'estàndard DVB-T



Document ETSI EN 300 744

6. L'estàndard IEEE 802.11a/g (Wi-Fi) utilitza la modulació OFDM. Per a canals de $B = 20$ MHz, el nombre de subportadores és 52 i la separació de les subportadores és 312,5 kHz. De les 52 subportadores es transmeten 4 subportadores modulades amb una seqüència pseudoaleatòria coneguda pel transmissor i pel receptor. Aquestes subportadores s'anomenen *pilots* i es fan servir per a estimar la resposta freqüencial del canal. Els pilots es transmeten en les portadores amb índexs $-21, -7, 7$ i 21 .

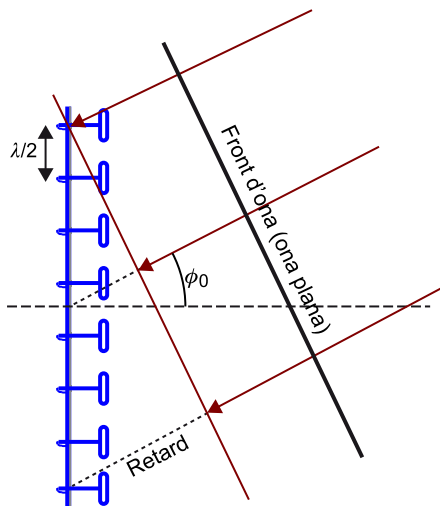
Partint d'aquesta informació, indiqueu quina és l'amplada de banda de coherència mínima que es preveu en l'estàndard i quin serà el màxim guany de diversitat (de freqüència) que es podrà aconseguir en Wi-Fi, segons el disseny de l'estàndard.

7. Determineu la matriu de canal H del canal MIMO de la figura 7 considerada en l'equació (24).

8. En aquest exercici es vol demostrar que la resposta angular d'una agrupació lineal formada per N elements separats $\lambda/2$ és la donada en l'equació (26).

Suposeu que al receptor arriba un front d'ona pla amb un angle ϕ_0 com s'indica en la figura. Com es veu en la figura, també, el senyal arriba primer a la primera antena i més tard a la resta d'antenes de l'agrupació.

Figura 15. Agrupació lineal de N antenes omnidireccionals a la qual arriba una ona plana amb una inclinació ϕ_0



En la figura s'indica el retard relatiu del senyal en les N antenes de l'agrupació.

Si anomenem $y(t) = x(t)\exp(j2\pi f_0 t)$ el senyal passabanda rebut en la primera antena ($f_0 = c/\lambda$ és la freqüència portadora), busqueu l'expressió del senyal que es rep en l'antena n de l'agrupació ($n = 0, \dots, N - 1$).

Considerem ara que el retard amb què arriba el senyal a l'últim element de l'agrupació pràcticament no modifica l'envolupant del senyal, $x(t)$, però sí que modifica la fase de la portadora, $\exp(j2\pi f_0 t)$.

Si el receptor suma el senyal present a les N antenes i després baixa el senyal resultant a banda base, el senyal obtingut és de la forma $g \cdot x(t)$. Es pot demostrar que el mòdul de g és la resposta de l'agrupació en la direcció $\phi = 0$, és a dir, $|g| = G(0)$. Busqueu el mòdul de g en funció de N i ϕ_0 . Com ho faríeu per apuntar l'agrupació en la direcció ϕ_0 ?

9. Demostreu que la resolució angular de l'agrupació estudiada en l'exercici anterior és la indicada en l'equació (27), que es correspon amb la distància al primer zero de la sinc centrada a ϕ_0 .

10. En aquest exercici s'analitza l'esquema de conformació de feix òptim quan la matriu de canal \mathbf{H} és coneguda en transmissió (vegeu el subapartat 4.1).

a) Busqueu l'expressió de l'SNR de z a la sortida del receptor (equació (29)) en funció de \mathbf{b}_{Tx} i \mathbf{b}_{Rx} .

b) Descomponeu la matriu de canal mitjançant l'SVD (equació (30)) i busqueu el contingut dels vectors \mathbf{b}_{Tx} i \mathbf{b}_{Rx} que maximitzen l'SNR fixada la norma d'aquests vectors a 1, és a dir, $\|\mathbf{b}_{Tx}\|^2 = \|\mathbf{b}_{Rx}\|^2 = 1$.

c) Demostreu que utilitzant els conformadors òptims, l'SNR màxima que es pot aconseguir és $\sigma_{max}^2 / \sigma_w^2$, en què σ_{max} és el valor singular màxim de la matriu de canal \mathbf{H} .

11. Torneu a resoldre l'exercici anterior en el cas que el transmissor només té una antena (SIMO), i per tant, la matriu \mathbf{H} és un vector columna de longitud $N = N_r$. Repetiu l'exercici pel canal MISO, en què la matriu \mathbf{H} és un vector fila de longitud $N = N_t$.

12. Demostreu l'equació (35).

13. En aquest exercici volem demostrar que el desmodulador ML del codi d'Alamouti es pot implementar símbol a símbol a partir de les mostres de z (equació (37)). A partir de l'equació (36) el desmodulador ML del vector $\mathbf{s} = [s_1, s_2]$ es pot escriure de la manera següent:

$$\min_{\hat{\mathbf{s}}} \|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{s}}\|^2$$

en què s'ha definit $\hat{\mathbf{y}}$ com:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2^* \end{bmatrix}$$

on hem tingut en compte que el vector de soroll $\hat{\mathbf{w}}$ està format per mostres de soroll gaussianes de mitjana zero i variància σ_w^2 .

Demostreu que el desmodulador ML del codi Alamouti també es pot escriure de la manera següent:

$$\min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{z} - \mu\mathbf{s}\|^2$$

en què $\mu = |h_1|^2 + |h_2|^2$, i que per tant, els dos símbols s_1 i s_2 es poden decidir per separat: $\min_{s_k} \|z_k - \mu \cdot s_k\|^2$ per a $k = 1, 2$. Tingueu present que $\hat{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{H}}$ és una matriu diagonal i els elements de la diagonal valen μ .

14. El codi d'Alamouti es pot estendre fàcilment per qualsevol nombre d'antenes receptores. Les paraules codi que s'han de transmetre són les mateixes que en el cas d'una sola antena receptora (equació (33)). Si anomenem N el nombre d'antenes receptores, la matriu de canal serà:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ \vdots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} \end{bmatrix}$$

a) Demostreu que, seguint el mateix procediment que en el cas 2×1 (subapartat 4.2), l'equació (36) es pot escriure com a $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{H}}\mathbf{s} + \hat{\mathbf{w}}$ amb les definicions següents:

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12}^* \\ y_{21} \\ y_{22}^* \\ \vdots \\ y_{N1} \\ y_{N2}^* \end{bmatrix}; \hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12}^* & -h_{11}^* \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{22}^* & -h_{21}^* \\ \vdots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} \\ h_{N2}^* & -h_{N1}^* \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

b) Calculeu l'expressió de $\mathbf{z} = \hat{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{y}}$ per al cas de N antenes receptores (equació (37)).

15. En aquest exercici s'estudia el criteri òptim d'assignació de potència en canals. L'objectiu és calcular les potències P_1, \dots, P_N amb les quals es maximitza la capacitat del canal (equació (39)) fixada la potència mitjana transmesa (equació (40)).

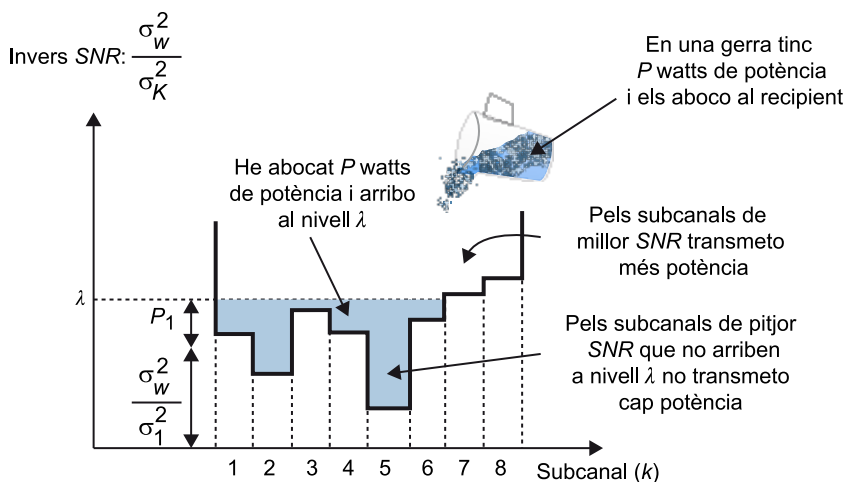
Aquest problema és un dels clàssics en comunicacions, i admet la solució següent, en què σ_k són els valors singulars de la matriu \mathbf{H} i λ és una constant positiva que garanteix que

$$\sum_{k=1}^N P_k = P:$$

$$P_k = \max\left(\lambda - \frac{\sigma_w^2}{\sigma_k^2}, 0\right)$$

Aquesta assignació de potències s'anomena *waterfilling* perquè té una interpretació gràfica molt intuïtiva: és com abocar una gerra de P litres d'aigua i omplir un recipient de fondària irregular (vegeu la figura 16). Les parts del recipient més profundes tindran més aigua i les parts menys profundes, en tindran menys. Per acabar d'entendre aquesta idea, en aquest exercici es proposa repartir 1 W de potència de manera òptima (*waterfilling*) entre quatre subcanals amb els següents valors d'SNR: $\sigma_1^2 / \sigma_w^2 = 10$, $\sigma_2^2 / \sigma_w^2 = 100$, $\sigma_3^2 / \sigma_w^2 = 2$ i $\sigma_4^2 / \sigma_w^2 = 100$.

Figura 16. Representació gràfica del criteri d'assignació de potències òptim anomenat *waterfilling*



En la figura es marca l'assignació del primer subcanal. A la resta de subcanals se'ls assigna la potència de la mateixa manera fins a haver assignat els P watts disponibles.

Bibliografia

Bibliografia bàsica

Goldsmith, A. (2005). *Wireless communications*. Cambridge: Cambridge University Press.

Tse, D.; Viswanath, P. (2005). *Fundamentals of wireless communications*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bibliografia complementària

Larsson, E. G.; Stoica, P. (2003). *Space-time block coding for wireless communications*. Cambridge: Cambridge University Press.

