

Equalització de canal

Francesc Rey Micolau
Javier Villares Pera

PID_00197092



Els textos i imatges publicats en aquesta obra estan subjectes –llevat que s'indiqui el contrari– a una llicència de Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 Espanya de Creative Commons. Podeu copiar-los, distribuir-los i transmetre'ls públicament sempre que en citeu l'autor i la font (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), no en feu un ús comercial i no en feu obra derivada. La llicència completa es pot consultar a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.ca>

Índex

Introducció	5
Objectius	7
1. Equalització i tipus d'equalitzadors	9
2. Equalitzadors lineals	14
2.1. Forçador de zeros (ZF)	15
2.1.1. Estudi en el domini del temps	15
2.1.2. Estudi en el domini de la freqüència	17
2.1.3. Inconvenients del forçador de zeros	19
2.2. Equalitzador de mínim error quadràtic mitjà (MMSE)	22
2.2.1. Cas 1: Resposta impulsional global $c[n]$ coneguda	26
2.2.2. Cas 2. Resposta impulsional global $c[n]$ desconeguda ...	27
2.3. Equalitzador adaptatiu	28
2.3.1. Equalitzador LMS: algoritme de gradient	29
2.3.2. Seqüència d'entrenament per a controlar l'actualització dels coeficients	33
3. Equalitzadors no lineals	39
3.1. Estimador de màxima versemblança (MLSE)	39
3.2. Estimador MLSE implementat amb l'algoritme de Viterbi	40
3.2.1. Inconvenients de l'algoritme de Viterbi	49
3.3. Equalitzador no lineal. Equalitzador amb realimentació de decisions (DFE)	50
Resum	53
Activitats	55
Bibliografia	57

Introducció

Ja sabem que el canal de comunicacions generalment no és un canal ideal. Com s'ha vist, en general pot tenir un comportament selectiu en freqüència i també pot variar en el temps. Quan el canal és dispersiu en temps apareix l'efecte d'interferència intersimbòlica (ISI), que, pot ser mitigat mitjançant un equalitzador si el canal varia de manera prou lenta. El funcionament es basa en l'estimació de l'efecte dispersiu del canal i el corresponent disseny d'un sistema (lineal o no lineal) que processa les mostres a la sortida del filtre adaptat i redueixi l'efecte de l'ISI.

En aquest mòdul ens centrarem específicament en el bloc equalitzador. El primer apartat, tot i que pugui semblar redundant perquè recull algunes idees ja presentades, tornarà a fer èmfasi en el problema de l'ISI per motivar la necessitat del bloc equalitzador. Aquest apartat, com a introducció al mòdul, finalitzarà presentant una classificació dels equalitzadors, que es poden agrupar en dos grans blocs: equalitzadors lineals i equalitzadors no lineals.

El segon apartat presentarà els equalitzadors lineals de manera natural, des del més senzill conceptualment parlant, fins al més complex. Per cadascun dels equalitzadors es presentarà l'objectiu, la funció de cost que cal optimitzar, la manera de dissenyar els coeficients de l'equalitzador, i finalment una descripció dels principals problemes d'aquell tipus d'equalitzador que motivarà el pas a l'equalitzador següent. Així, es començarà per l'equalitzador forçador de zeros per a presentar seguidament l'equalitzador de mínim error quadràtic mitjà, i finalment els equalitzadors adaptatius (basats en el criteri de mínim error quadràtic mitjà).

Finalment, el tercer apartat presentarà l'equalitzador no lineal basat en l'estimador de màxima versemblança. Si bé en alguns textos aquest equalitzador es presenta el primer, pel fet de tractar-se de l'equalitzador òptim, i a partir d'aquest, per raons de complexitat, es motiva la necessitat de recórrer als equalitzadors lineals, nosaltres hem preferit presentar primerament els equalitzadors lineals perquè són els més senzills (i sovint els més implementats) i deixar per al final la descripció de com hauria de ser l'equalitzador òptim.

Com ja podeu imaginar, els equalitzadors presentats en aquest mòdul, si bé inclouen els esquemes més utilitzats, no completen tot el ventall d'equalitzadors i tècniques d'equalització que hi ha. L'objectiu és, però, que amb aquest mòdul tingueu una idea del problema de l'equalització i de la manera habitual d'abordar-lo. Al final de mòdul trobareu unes referències bibliogràfiques per si voleu aprofundir més en el tema.

Vegeu també

Vegeu el mòdul "Canal de comunicacions" d'aquesta assignatura.

Per acabar aquesta introducció, fem la mateixa ressenya que ja vam fer en el mòdul anterior respecte al fet de treballar en tot moment amb l'equivalent passabaix quan parlem del senyal i de la resposta impulsional del canal. Així, en cap moment al llarg del mòdul fem referència a la banda de freqüències o la freqüència concreta a la qual es du a terme la comunicació. La teoria presentada per a l'equalitzador és vàlida per a qualsevol freqüència de treball.

En el mòdul, quan parlem de *canal* sempre ens referim en general al que es coneix com a *equivalent passabaix del canal*, que és el canal complex que veurà l'equivalent passabaix del senyal. En aquest aspecte, remarquem que, tot i que en els exemples i la derivació de les equacions considerem en tot moment el canal real, aquest serà gairebé sempre complex a la pràctica (pel fet que es tracta de l'equivalent passabaix). Utilitzem la notació real en primera instància per a facilitar la comprensió i no complicar les equacions més del necessari. Només en els casos de comunicacions en banda base tindrem un canal que no estarà desplaçat en banda, i per tant, en què el canal serà real tal com es presenta en el mòdul (alguns exemples de canals en banda base són el canal de veu o el canal ADSL –tots dos a través del bucle d'abonat de la línia telefònica–, canals amb problemes d'acústica, etc.).

Recordeu

L'equivalent passabaix del senyal es presenta en el mòdul didàctic "Comunicacions analògiques: senyals passabanda" de l'assignatura *Sistemes de comunicacions I*. Recordeu que l'equivalent passabaix és una definició matemàtica que pretén compactar la notació de la descomposició d'una modulació passabanda en els seus components en fase i quadratura eliminant-ne tota referència a la freqüència de la portadora. Si $s(t)$ és un senyal passabanda centrat en la freqüència portadora f_0 , aquest es pot escriure com a $s(t) = \text{Re}\{b_s(t) \cdot \exp(j2\pi f_0 t)\}$, en què $b_s(t)$ és l'equivalent passabaix del senyal.

Objectius

Amb l'estudi d'aquest mòdul didàctic, assolireu els objectius següents:

1. Entendre l'efecte que un canal no ideal té sobre el senyal (revisar el concepte d'ISI) per a poder assimilar la funció de l'equalitzador.
2. Conèixer els diferents tipus d'equalitzadors i la seva classificació en lineals i no lineals.
3. Entendre la problemàtica de l'equalitzador forçador de zeros i l'alternativa de l'equalitzador de mínim error quadràtic mitjà.
4. Ser conscients de la necessitat dels equalitzadors adaptatius, especialment quan el canal varia en el temps.
5. Conèixer els dos modes de disseny d'equalitzadors: els assistits per dades (DA) i els assistits per decisions (DD).
6. Ser capaços de dissenyar un equalitzador per a problemes senzills.
7. Poder implementar l'equalitzador òptim en termes de minimització de la probabilitat d'error utilitzant l'algoritme de Viterbi.

1. Equalització i tipus d'equalitzadors

Ja s'ha fet èmfasi en el fet que el canal de comunicacions no és ideal (canal AWGN) quan el senyal rebut no es correspon amb una rèplica atenuada i retardada del senyal transmès contaminat per un soroll additiu.

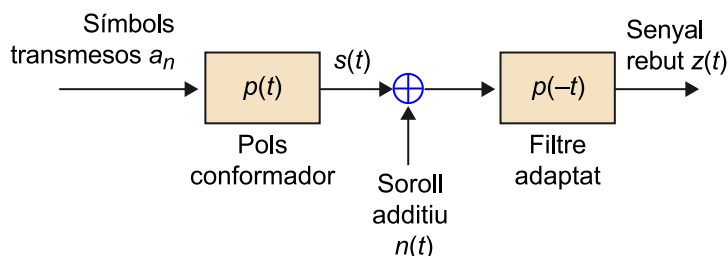
L'efecte que això té sobre el senyal digital ja s'ha presentat en altres materials. Sobre el senyal rebut apareix el fenomen d'interferència intersimbòlica (ISI, de l'anglès: *inter-symbol interference*), que es produeix quan en mostrejar el senyal a la sortida del filtre adaptat a una mostra per símbol, la mostra obtinguda, a més del símbol que s'ha de detectar, i del component de soroll, presenta una contribució superposada de símbols precedents i/o posteriors.

A continuació revisem la forma que pren el senyal en el receptor i la funcionalitat dels diferents blocs i introduïm la notació que seguirem en aquest mòdul. Estudiarem la forma que pren el senyal en cada punt en el domini del temps, i n'analitzarem el comportament quan el transmissor envia només un símbol (l'ampliació al problema real en què el transmissor envia una seqüència de símbols és immediata, simplement aplicant la superposició de tots els símbols enviats, atès que el conjunt de pols conformador més canal més filtre adaptat es comporta com un sistema lineal i invariant). Així, doncs, el resultat d'enviar un sol símbol (i per tant, un sol pols) correspondrà a la resposta impulsional global, que anomenarem $c(t)$ i ens serà útil per al disseny d'alguns dels equalitzadors que veurem en els apartats següents.

Comencem revisant el problema en presència d'un canal ideal.

Figura 1. Esquema d'un sistema de comunicacions digitals en presència de canal ideal (AWGN)

Canal ideal



Si a l'instant $t = 0$ enviem el símbol $a_0 = +1$, seguint l'esquema de la figura 1, el senyal analògic que s'enviarà serà $s(t) = p(t)$, en què $p(t)$ generalment serà el pols arrel de cosinus realçat. En absència de canal que distorsioni el senyal, i sense considerar el terme de soroll additiu, el senyal que s'obindrà a

Vegeu també

Vegeu els canals AWGN en l'assignatura *Sistemes de comunicacions I* i també el mòdul "Canal de comunicacions" d'aquesta assignatura.

Notació

Al llarg de tot el mòdul distingirem entre la notació genèrica $z(t)$, que es referirà al senyal a la sortida del filtre adaptat per a qualsevol senyal transmès $s(t)$, i la notació particular $c(t)$, que correspondrà al senyal a la sortida del filtre adaptat quan s'envia un sol pols conformador $s(t) = p(t)$ (o equivalentment, un sol símbol $a_0 = +1$). En aquest segon cas, el senyal $c(t)$ es podrà interpretar com la resposta impulsional global del sistema equivalent que (sense considerar el terme de soroll) agrupa pols conformador, canal i filtre adaptat. Des d'un punt de vista d'ISI, aquest canal equivalent $c(t)$ és el que ens interessarà que idealment generi un senyal lliure d'ISI.

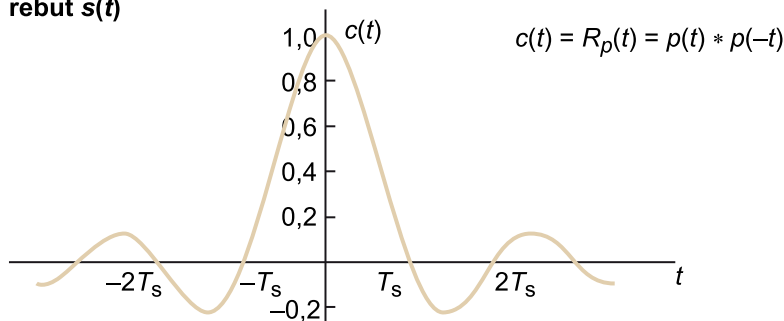
la sortida del filtre adaptat en enviar un sol símbol serà la convolució del pols transmès amb la resposta impulsional del filtre adaptat, i correspondrà al que hem anomenat *resposta impulsional global*, $c(t)$. Així, doncs:

$$c(t) = R_p(t) = p(t) * p(-t)$$

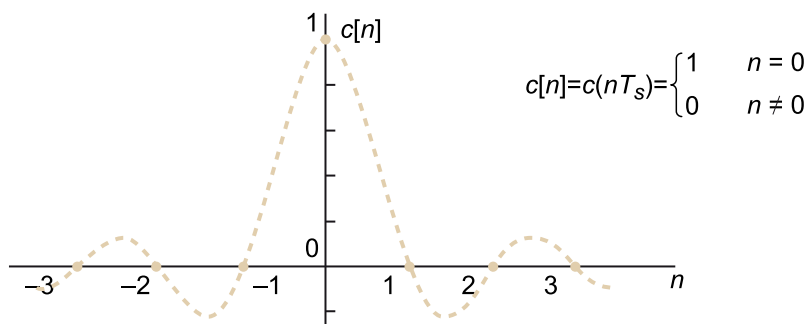
Tal com ja s'ha comentat, si el pols conformador i el filtre adaptat han estat ben dissenyats, el senyal $c(t)$ correspon a un pols de Nyquist que no generarà ISI. Per tant, en intentar recuperar els símbols transmesos, el senyal discret mostrejat a temps de símbol, $c[n] = c(nT_s)$, serà el que s'indica en la figura 2, que donarà lloc a un senyal lliure d'ISI, i per tant no requereix cap tipus d'equalització.

Figura 2. Resposta impulsional global a la sortida del filtre adaptat abans i després de mostrejar a una mostra per símbol per un canal ideal

Senyal rebut $s(t)$



Senyal mostrejat $c[n]$

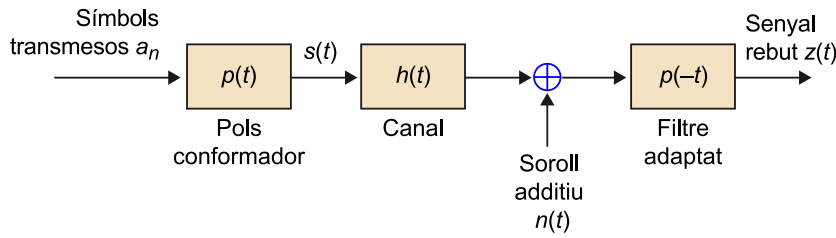


Ara bé, en presència d'un canal que tingui per resposta impulsional $h(t)$, tal com mostra la figura 3, el senyal que s'obtindrà a la sortida del filtre adaptat serà la convolució del pols transmès amb la resposta impulsional del canal i amb la del filtre adaptat. Quan s'envia un sol símbol, aquest senyal, que correspon a la resposta impulsional global $c(t)$, serà:

$$c(t) = p(t) * h(t) * p(-t)$$

Figura 3. Esquema d'un sistema de comunicacions digitals en presència de canal no ideal

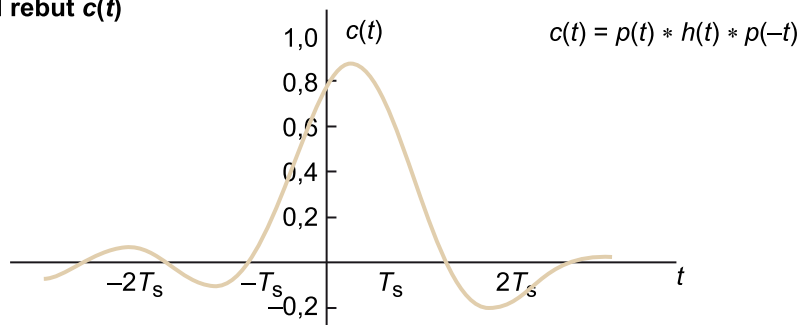
Canal no ideal



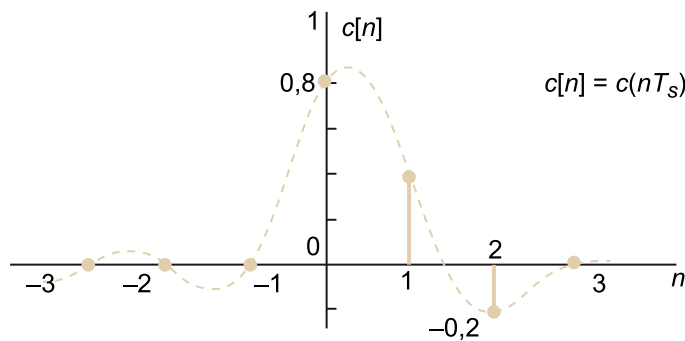
En aquest cas, si assumim novament que el pols conformador i el filtre adaptat han estat ben dissenyats perquè la seva convolució sigui un pols de Nyquist, el senyal discret mostrejat a temps de símbol, $c[n]$, serà el que s'indica en la figura 4. Com es veu clarament, les mostres $c[n]$ per a $n \neq 0$ no són nul·les, i per tant el senyal no estarà lliure d'ISI (quan mostregem el senyal en l'instant $n = 1, 2, 3, \dots$ per detectar el símbol a_1, a_2, a_3, \dots tindrem interferència del símbol a_0).

Figura 4. Resposta impulsional global a la sortida del filtre adaptat abans i després de mostrejar a una mostra per símbol per un canal no ideal

Senyal rebut $c(t)$



Senyal mostrejat $c[n]$

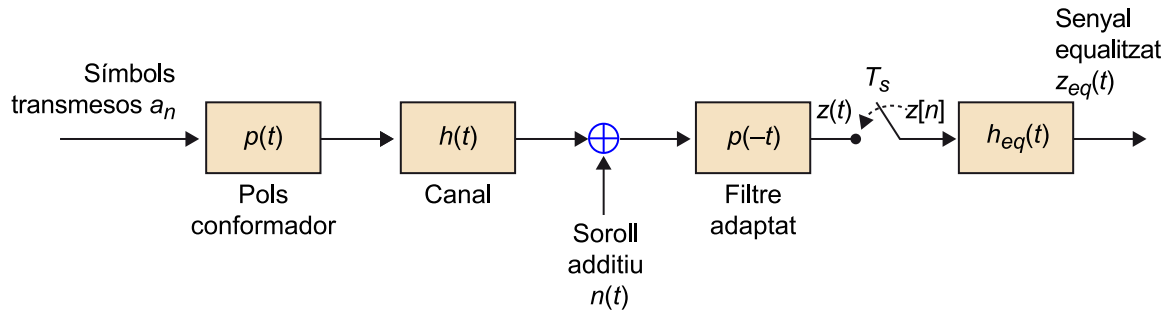


L'objectiu del bloc equalitzador serà, doncs, intentar obtenir a la sortida un senyal lliure d'ISI (solució ideal) o intentar-ne mitigar l'efecte tant com sigui possible (solució pràctica). La figura 5 mostra l'esquema complet d'un sistema de comunicacions digitals en presència de canal no ideal i equalitzador. Amb referència a aquest esquema, esmentem que es consideren per separat el filtre adaptat i el filtre equalitzador. Alguns autors consideren tots dos blocs junts, i aleshores el filtre conjunt compleix dues funcions: la de filtre adaptat que filtra el soroll buscant maximitzar la relació senyal a soroll -SNR, de l'anglès: *signal noise ratio*- i la d'equalitzador, que mitiga l'efecte del canal no ideal. Res

no varia en aquest segon plantejament, si bé des d'un punt de vista de disseny la complexitat augmenta innecessàriament, ja que no cal incorporar la part de filtre adaptat a la fase de disseny de l'equalitzador, que és determinista.

Figura 5. Esquema d'un sistema de comunicacions digitals en presència de canal no ideal, inclòs el bloc equalitzador

Canal no ideal + Equalitzador



Per a poder dissenyar l'equalitzador, caldrà tenir un coneixement de la resposta impulsional del canal, o bé tenir coneixement dels símbols transmesos i comparar-los amb el senyal rebut a fi de poder inferir què ha fet el canal. En el cas de requerir el coneixement de la resposta impulsional, en aquest mòdul assumirem que aquesta és coneguda, sense entrar en els detalls de com s'ha obtingut (a partir d'enviar una seqüència d'entrenament i aplicar un algoritme d'estimació de canal).

Quan calgui conèixer els símbols transmesos, es pot treballar en dos modes: un mode assistit per dades (DA), en què els símbols són coneguts a partir de l'enviament d'una seqüència d'entrenament, i un segon mode assistit per decisions (DD), en què els símbols són coneguts un cop s'ha decidit sobre ells a la sortida de l'equalitzador. El primer implica una pèrdua d'eficiència en enviar dades que no són d'informació, mentre que el segon requereix una qualitat mínima en les decisions, ja que aquestes han de ser prou fiables per a considerar-les en el disseny mateix de l'equalitzador. Encara hi ha una tercera manera de procedir, en entorns molt sorollosos, en què es treballa amb les probabilitats dels símbols en lloc dels seus valors decidits. Observeu que aquests modes DA i DD són conceptualment iguals que els descrits en l'apartat 2 del mòdul de sincronització.

Vegeu també

Vegeu la tercera manera de procedir en entorns molt sorollosos en el subapartat 2.3 d'aquest mòdul didàctic.

L'objectiu d'aquest mòdul serà treballar el bloc equalitzador i descriure'n les diferents opcions de disseny. Una primera classificació dels equalitzadors els divideix en dos grans blocs: els **equalitzadors lineals**, que s'implementen seguint un esquema lineal, i els **equalitzadors no lineals**, que s'implementen seguint un esquema no lineal. Podem dir que els primers obeeixen a l'estructura d'un sistema lineal i invariànt, i per tant la seva descripció es podrà fer a partir de la resposta impulsional i/o la resposta en freqüència, tal com ja heu vist en assignatures de senyals i sistemes. D'altra banda, els equalitzadors no lineals,

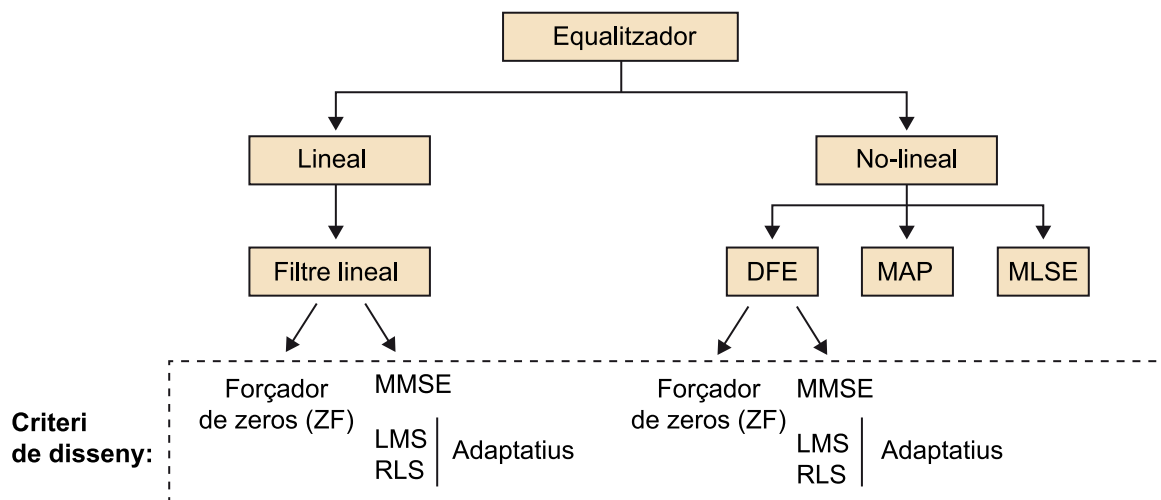
precisament per la naturalesa no lineal que tenen, no es podran caracteritzar a partir de la resposta impulsional, i caldrà recórrer a altres formes de caracteritzar-los i descriure'ls.

Com ja podeu intuir, els equalitzadors lineals seran molt més senzills a l'hora de dissenyar-los i d'implementar-los. Malgrat això, en general, les prestacions que oferiran seran pitjors que les que es poden obtenir amb un equalitzador no lineal. Concretant més, podem afirmar que l'equalitzador òptim en termes de probabilitat d'error en els símbols rebuts serà l'equalitzador basat en l'estimació de màxima versemblança (MLSE), que correspon a un equalitzador no lineal.

Deixem la descripció d'aquest equalitzador per a l'última part del mòdul. L'estructura del mòdul s'ha plantejat de manera que es presenten els equalitzadors més habituals, del més senzill des d'un punt de vista conceptual, fins al més complex. Aquest ordre, però, no es correspon amb el de les prestacions, que podríem dir que és l'invers: el primer equalitzador presentat és el que té pitjors prestacions, i l'últim correspon al que ofereix les prestacions més bones.

La figura 6 resumeix una classificació dels equalitzadors:

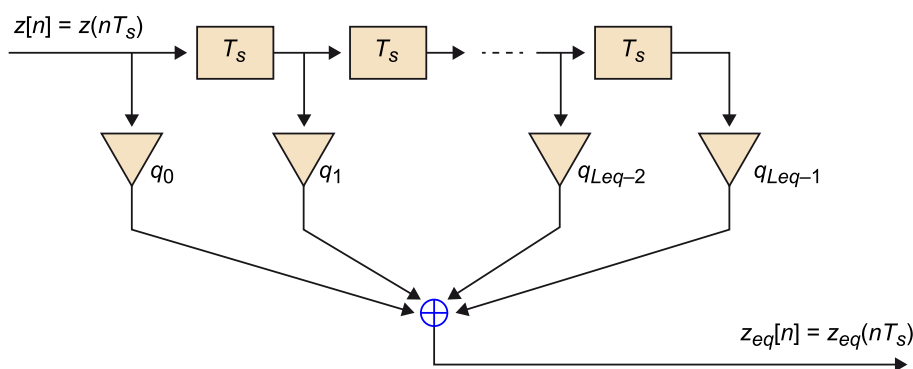
Figura 6. Classificació dels equalitzadors



2. Equalitzadors lineals

L'estructura dels equalitzadors lineals sempre és la mateixa: el senyal a la sortida (senyal equalitzat) s'obté en fer passar el senyal d'entrada per un filtre amb una línia de retards, de manera que la suma de totes les mostres de la memòria dels filtres ponderades per uns coeficients, genera el senyal equalitzat. La figura 7 il·lustra l'esquema de qualsevol equalitzador lineal discret, en què $q_0, q_1, \dots, q_{L_{eq}-1}$ són els coeficients de l'equalitzador, i L_{eq} la seva longitud.

Figura 7. Esquema d'un equalitzador lineal



L'expressió matemàtica del senyal a la sortida de l'equalitzador en funció del senyal a l'entrada (treballant amb senyals analògics) és:

$$z_{eq}(t) = \sum_{k=0}^{L_{eq}-1} q_k z(t - kT_s) \quad (1)$$

De manera equivalent, si tal com es mostra en la figura 5, considerem l'equalitzador digital que treballa amb el senyal a l'entrada ja mostrejat amb un període de mostratge igual al temps de símbol T_s , és a dir, $z[n] = z(nT_s)$, l'expressió discreta de les mostres a la sortida $z_{eq}[n]$ serà la següent:

$$z_{eq}[n] = \sum_{k=0}^{L_{eq}-1} q_k z[n - k] \quad (2)$$

Com es pot veure en l'equació (2), els paràmetres que defineixen qualsevol equalitzador lineal són: el nombre de coeficients de l'equalitzador, que hem denotat amb L_{eq} , i el valor dels coeficients $q_0, q_1, \dots, q_{L_{eq}-1}$. La manera com s'obté el valor dels coeficients és el que determinarà la diferència entre els diversos equalitzadors lineals que veurem en els subapartats següents. Així mateix, el

Vegeu també

Vegeu els equalitzadors adaptatius en el subapartat 2.3 d'aquest mòdul didàctic.

valor d'aquests coeficients pot ser fix al llarg del temps, o anar-se ajustant per a adaptar-se a les variacions que la resposta del canal pot experimentar al llarg de la transmissió, com es veurà quan dissenyem els equalitzadors adaptatius.

Reflexió

En l'equalitzador de la figura 7, el retard entre mostres (en la línia de retards) coincideix amb el temps de símbol T_s . Això indica que l'equalitzador treballa a una mostra per símbol. Si bé aquest esquema és habitual, es poden dissenyar equalitzadors que treballin a més d'una mostra per símbol, és a dir, que el valor dels retards a la línia de retards sigui inferior a T_s . En aquest cas es parla d'**equalitzador fraccional**.

Conceptualment, les idees que exposarem a continuació no varien, si bé s'han de modificar les equacions per a calcular els valors dels coeficients. Així mateix, si per exemple considerem que l'equalitzador treballa a m mostres per símbol (valor dels retards T_s/m), com que al final només volem conèixer el valor dels símbols transmesos, a la sortida de l'equalitzador només caldrà mirar el senyal cada m mostres si volem tenir els valors de les mostres corresponents als diferents símbols transmesos.

2.1. Forçador de zeros (ZF)

En un equalitzador forçador de zeros, comunament abreujat amb l'acrònim ZF (de l'anglès: *zero-forcing*), l'objectiu és que els coeficients es dissenyin de manera que es forci la condició d'ISI nul·la a la sortida de l'equalitzador.

Per analitzar i dissenyar aquest equalitzador estudiarem què passa quan el transmissor envia només un símbol, i per tant, tal com ja s'ha fet en la figura 4, treballarem amb la resposta impulsional global, $c(t)$. D'altra banda, com que el forçador de zeros centra l'atenció en el terme d'ISI, tampoc considerarem en el procés de disseny el terme de soroll (assumim per un moment que no hi ha soroll AWGN en la comunicació).

Vegeu també

Vegeu la figura 4 en l'apartat 1 d'aquest mòdul didàctic.

2.1.1. Estudi en el domini del temps

Com ja s'ha vist, en presència de canal no ideal, les mostres de la resposta impulsional global $c[n]$ per a $n \neq 0$ no són nul·les (vegeu l'exemple de la figura 4), i per tant el senyal no està lliure d'ISI (quan mostregem el senyal en l'instant $n = 1, 2, 3, \dots$ per a detectar el símbol a_1, a_2, a_3, \dots tindrem una interferència del símbol a_0). Idealment, l'objectiu del forçador de zeros serà dissenyar un equalitzador que elimini aquesta interferència i garanteixi que el senyal a la sortida estigui lliure d'ISI, o el que és el mateix, que compleixi la condició (3):

$$z_{eq}[n] = z_{eq}(nT_s) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

A la pràctica, això no serà possible, i per tant s'intentarà dissenyar un equalitzador que redueixi –sense arribar a eliminar– l'ISI tant com sigui possible. L'objectiu serà determinar quin valor han de prendre els coeficients de l'equalitzador ($q_0, q_1, \dots, q_{L_{eq}-1}$) per forçar que quan a l'entrada es té la resposta

impulsional global $c(t)$, el senyal a la sortida valgui zero en els instants $n = 1, 2, 3, \dots, L_{eq} - 1$, i aproximar així el senyal $z_{eq}[n]$ a un senyal lliure d'ISI que intenti aproximar-se a la condició de l'equació (3).

Dissenyar els valors dels coeficients requereix resoldre un sistema d'equacions. A partir de l'equació del senyal a la sortida de l'equalitzador lineal (2) tenim un problema de L_{eq} incògnites (el valor dels L_{eq} coeficients de l'equalitzador), i per tant necessitem L_{eq} equacions que generarem donant L_{eq} valors a $n \in [0, 1, \dots, L_{eq} - 1]$. Per al valor $n = 0$ s'haurà de complir $z_{eq}[0] = 1$, i per a la resta de valors de n , s'haurà de forçar $z_{eq}[n] = 0$.

Aquest problema de L_{eq} equacions amb L_{eq} incògnites es pot escriure matricialment de la manera següent:

$$\begin{pmatrix} d[0] & d[-1] & \dots & d[-(L_{eq}-1)] \\ d[1] & d[0] & \dots & d[-(L_{eq}-2)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d[L_{eq}-1] & d[L_{eq}-2] & \dots & d[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{L_{eq}-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Observeu que la manera de dissenyar l'equalitzador és ben senzilla. Coneguda la resposta impulsional global, $c[n]$, es construeix la matriu \mathbf{Z} com a (5), i els L_{eq} coeficients de l'equalitzador s'obtenen després d'invertir aquesta matriu i multiplicar-la pel vector tot zeros excepte un element a 1 (6):

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} d[0] & d[-1] & \dots & d[-(L_{eq}-1)] \\ d[1] & d[0] & \dots & d[-(L_{eq}-2)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d[L_{eq}-1] & d[L_{eq}-2] & \dots & d[0] \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{L_{eq}-1} \end{pmatrix} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Exemple

Quin és el forçador de zeros de vuit coeficients per al canal utilitzat en la figura 4, en què la resposta impulsional global compleix la condició següent?

$$\begin{aligned} d[0] &= +0,8 \\ d[1] &= +0,4 \\ d[2] &= -0,2 \\ d[n] &= 0 \quad n \neq 0, 1, 2 \end{aligned}$$

A partir d'aquesta informació construïm la matriu \mathbf{Z} :

Terminologia

Com ja haureu deduït, la denominació *forçador de zeros* prové del fet que estem forçant a la sortida de l'equalitzador un senyal amb zeros en determinats instants de temps.

Reflexió

Podem relaxar la condició forçada en l'equació (4) per permetre un cert retard del senyal a la sortida de l'equalitzador. En aquest cas, la posició de l'1 en el vector de l'equació (4), en lloc d'estar en la primera posició, podria estar en qualsevol altre lloc.

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} +0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +0,4 & +0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2 & +0,4 & +0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2 & +0,4 & +0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2 & +0,4 & +0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2 & +0,4 & +0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2 & +0,4 & +0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2 & +0,4 & +0,8 \end{pmatrix}$$

I dissenyem els coeficients de l'equalitzador:

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{Leq-1} \end{pmatrix} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1,250 \\ -0,625 \\ +0,625 \\ -0,469 \\ +0,391 \\ -0,312 \\ +0,254 \\ -0,205 \end{pmatrix}$$

2.1.2. Estudi en el domini de la freqüència

Un estudi en el domini del temps del valor de les mostres del senyal a la sortida del canal ens ha permès obtenir el disseny de l'equalitzador ZF, que pretén forçar un senyal lliure d'ISI a la sortida. Un estudi en el domini de la freqüència ens permetrà interpretar més bé com es comporta el forçador de zeros i arribar a la conclusió que aquest tipus d'equalitzador no és la millor solució per a mitigar l'efecte del canal.

Si mantenim els supòsits que només s'ha transmès un símbol i que l'estudi es fa en absència de soroll, la transformada de Fourier del senyal a la sortida del canal serà el producte de la transformada de Fourier de pols conformador $P(f)$, multiplicat per la resposta en freqüència del canal $H(f)$, i multiplicat per la resposta en freqüència del filtre adaptat $P^*(f)$. Així, doncs:

$$C(f) = P(f) \cdot H(f) \cdot P^*(f) \quad (7)$$

Recordeu que el pols conformador ha estat dissenyat perquè després que el senyal sigui mostrejat a una mostra per símbol, es compleixi la condició $C_{s\text{amp}}(f) = 1$, en què $C(f)$ en absència de canal val $C(f) = P(f) \cdot P^*(f)$, i el subíndex *samp* denota l'espectre del senyal després de mostrejar a una mostra per símbol. D'aquesta manera, en absència de canal, el mostratge del pols conformador convolucionat amb el filtre adaptat dóna lloc a un senyal espectralment pla (equivalentment genera una delta en el domini del temps, com veiem en la figura 2).

Ara bé, en presència de canal, la resposta impulsional del canal trenca aquesta propietat, i per tant s'obté un senyal que no és espectralment pla, sinó que està afectat per la resposta en freqüència del canal. Per a compensar aquesta distorsió, es proposa introduir un equalitzador lineal, de manera que la transfor-

mada de Fourier del senyal a la sortida de l'equalitzador sigui (8), en què $H_{eq}(f)$ serà la resposta en freqüència de l'equalitzador i novament el subíndex $samp$ denota l'espectre del senyal després de mostrejar a una mostra per símbol:

$$Z_{eq}(f) = [P(f) \cdot H(f) \cdot P^*(f)]_{samp} \cdot H_{eq}(f) = C_{samp}(f) \cdot H_{eq}(f) \quad (8)$$

En el cas del forçador de zeros ens preguntarem quina ha de ser la resposta en freqüència de l'equalitzador perquè el senyal $Z_{eq}(f)$ estigui lliure d'ISI. Perquè això es compleixi, serà necessari que $H_{eq}(f)$ garanteixi que $Z_{eq}(f)$ sigui espectralment pla, i per tant:

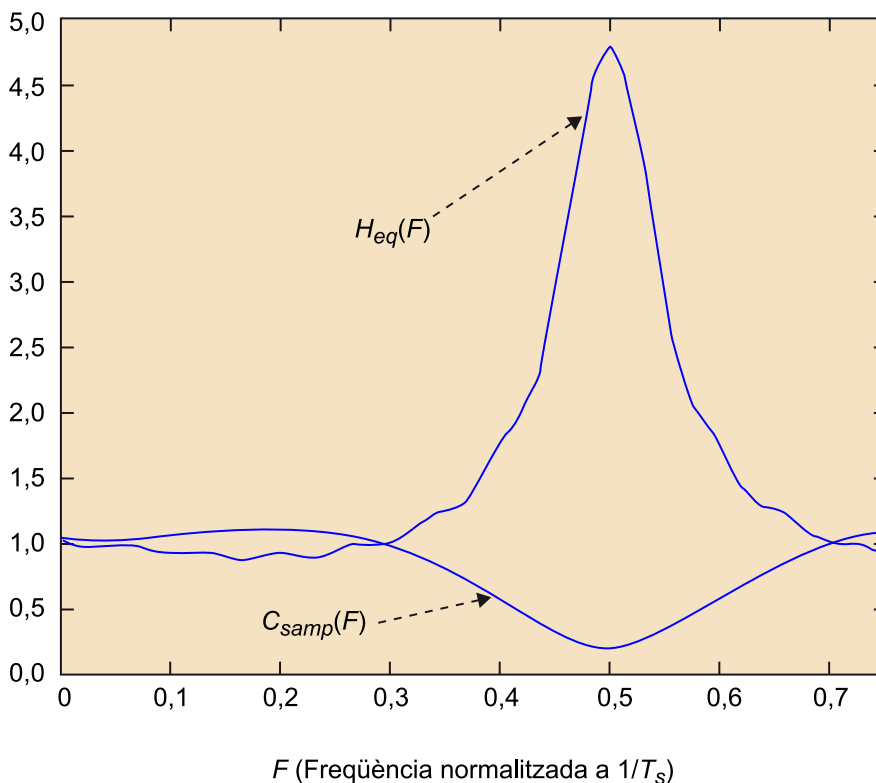
$$H_{eq}(f) = \frac{1}{C_{samp}(f)} \quad (9)$$

Recordeu que, formalment, una atenuació de canal α i un retard de propagació t_0 no afecten la forma d'ona del senyal. Per tant, estrictament, la resposta en freqüència de l'equalitzador de l'equació (9) podria anar multiplicada per una constant α i per un terme de fase lineal $e^{-j2\pi f t_0}$ tot mantenint el senyal a la sortida de l'equalitzador lliure d'ISI.

Vegeu també

Vegeu la introducció del mòdul "Canal de comunicacions" d'aquesta assignatura.

Figura 8. Exemple de resposta en freqüència d'un canal i el seu equalitzador forçador de zeros



Si negligim la constant i el terme de fase, l'important és veure que el paper de l'equalitzador forçador de zeros és invertir la resposta en freqüència del canal de manera que emfatitzi les freqüències atenuades pel canal (valors de $H(f)$ petits), i no ho faci per a les freqüències en què el canal no atenua. La

figura 8 il·lustra les respostes en freqüència del canal i de l'equalitzador per a l'exemple de l'equalitzador dissenyat anteriorment (com que els senyals que es representen han estat mostrejats a una mostra per símbol, l'eix de freqüència es representa en freqüència normalitzada a la freqüència de mostratge):

2.1.3. Inconvenients del forçador de zeros

De l'anàlisi feta sobre el comportament del forçador de zeros en el domini de la freqüència veiem dos problemes que ens faran qüestionar el forçador de zeros com a equalitzador, el segon d'ells més crític que el primer:

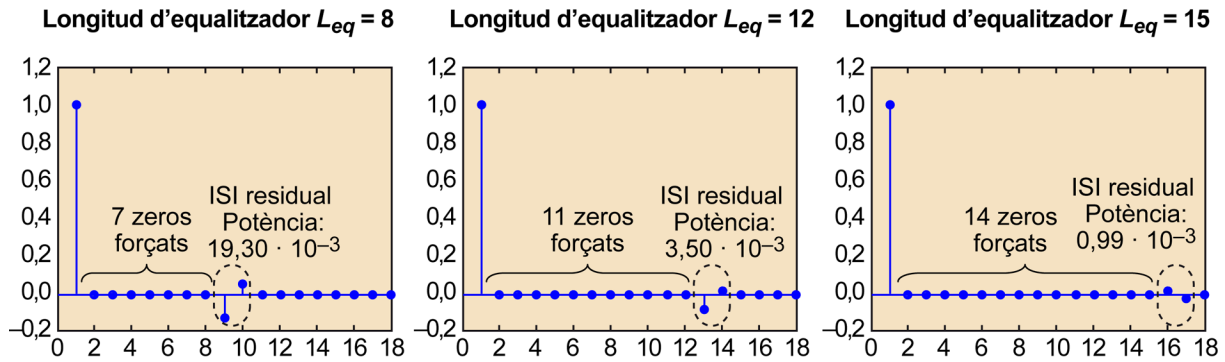
1) **L'equalitzador forçador de zeros no pot eliminar completament l'ISI a la sortida de l'equalitzador.** Per veure aquesta afirmació n'hi ha prou de veure en l'equació (9) com ha de ser la resposta en freqüència de l'equalitzador i la seva resposta impulsional associada. Si recordem el que hem estudiat en assignatures de senyals i sistemes i tenim en compte que, excepte en aplicacions molt concretes, el canal presenta una resposta impulsional finita (FIR), el filtre lineal (equalitzador) que implementi (9) hauria de ser en general un filtre de resposta impulsional infinita (IIR). Ara bé, l'equalitzador forçador de zeros s'ha dissenyat com un filtre amb L_{eq} coeficients; per tant, com un filtre FIR. Dit d'una altra manera, caldria un nombre infinit de coeficients $L_{eq} \rightarrow \infty$ per a eliminar completament l'ISI.

Aquest fet ja es podia intuir a partir del disseny que es feia en el domini del temps. Un senyal lliure d'ISI ha de complir $z_{eq}[n]=0 \forall n \neq 0$. En el disseny de l'equalitzador, es forcen $L_{eq} - 1$ zeros a la sortida de l'equalitzador $n \in [1, \dots, L_{eq} - 1]$ sense tenir cap altre tipus de control sobre el que passa fora d'aquest interval (figura 9).

A la pràctica, si el valor de L_{eq} està ben ajustat, podrem assumir que l'ISI residual fora d'aquest interval serà prou petita. En cas que no sigui així, n'hi haurà prou d'augmentar l'ordre del filtre equalitzador (augmentar el valor de L_{eq}) fins a obtenir un valor que compleixi la nostra especificació. Observem que el problema que ens podem trobar seguint aquesta política és que el nombre de coeficients de l'equalitzador sigui excessiu per a un canal concret i doni lloc a un equalitzador extremadament complex.

Exemple

La figura 9 mostra l'ISI residual i la seva potència per a l'exemple de l'equalitzador dissenyat anteriorment per a diferents longituds de l'equalitzador $L_{eq} = \{8, 12 \text{ i } 15\}$. Podem veure com l'ISI residual varia en funció del nombre de coeficients.

Figura 9. ISI residual per a diferents longituds d'equalitzador $L_{eq} = \{8, 12 \text{ i } 15\}$ 

2) **El filtre forçador de zeros emfatitza el soroll.** El principal problema del forçador de zeros és que en el seu disseny s'ignora la presència de soroll. Si ens centrem exclusivament a obtenir un senyal lliure d'ISI, no tenim en compte quin és l'efecte de l'equalitzador sobre el soroll, i quin n'és el valor a la sortida. A la pràctica, però, qualsevol canal de comunicacions presenta un terme de soroll additiu que pot ser emfatitzat en passar per l'equalitzador. En efecte, el soroll additiu, que és espectralment blanc, també és filtrat per l'equalitzador, i per tant, multiplicat per la resposta en freqüència d'aquest $H_{eq}(f)$ (9).

El problema es presentarà en els casos en què el canal presenti una forta atenuació per a alguna freqüència, $H(f) \rightarrow 0$. Vegeu que en aquest cas la resposta en freqüència de l'equalitzador tendirà a infinit. Això no serà un problema per al senyal a la sortida del canal que haurà estat fortament atenuat a aquella freqüència, però sí ho serà per al soroll, que com que no ha estat afectat per la resposta en freqüència del canal, veurà com s'amplifica fortament la seva densitat espectral de potència a aquella freqüència. La figura 8 il·lustra aquest problema. Com es pot veure, el canal presenta una forta atenuació a $F = 0,5$, i en aquesta freqüència l'equalitzador actua amplificant el senyal (i en conseqüència, també amplificarà el soroll).

Les conseqüències d'aquest problema poden ser nefastes, especialment amb canals que presenten fortes atenuacions a algunes freqüències. En aquests casos, només té sentit utilitzar l'equalitzador ZF quan no hi hagi gaire soroll, és a dir, quan l'escenari s'apropi a les suposicions fetes en el disseny (suposar que no hi ha soroll AWGN en la comunicació; a la pràctica, això vol dir que el soroll és molt petit). En la resta de casos serà necessari considerar un equalitzador que tingui en compte el terme d'ISI i també el terme de soroll en el disseny dels coeficients.

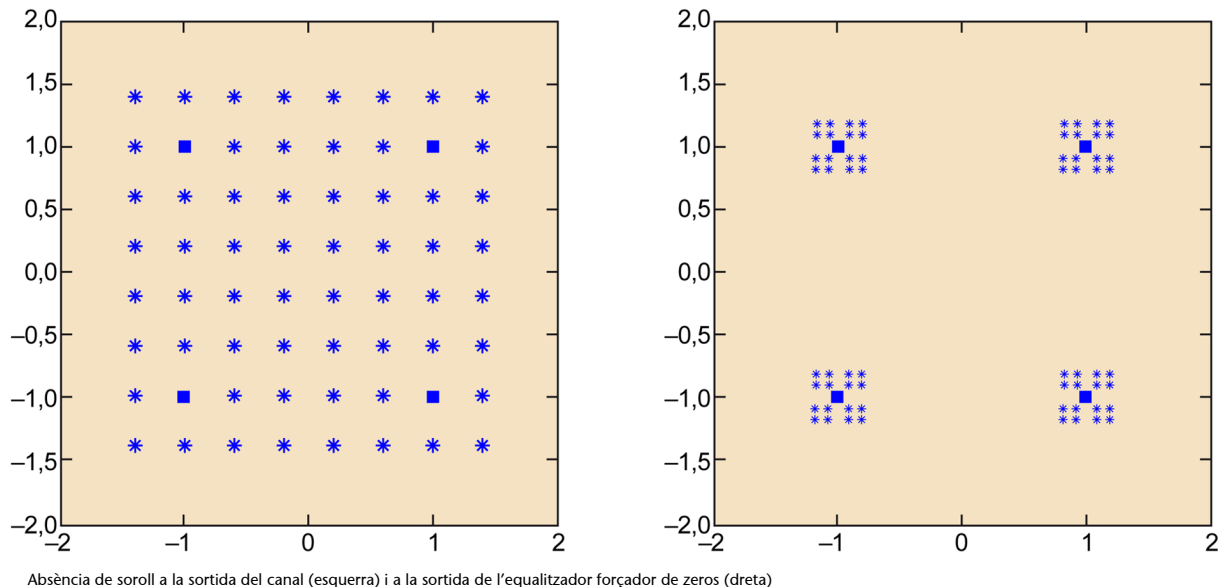
Exemple

A continuació il·lustrem els dos problemes de l'equalitzador a partir de l'anàlisi, en diferents punts de la cadena del receptor, de la constel·lació d'un senyal modulat en QPSK, transmès a través del canal utilitzat en l'exemple d'aquest apartat i equalitzat amb l'equalitzador ZF de vuit coeficients dissenyat anteriorment.

Primer, en la figura 10 mostrem les constel·lacions en absència de soroll per a apreciar l'efecte de l'ISI residual:

- La gràfica esquerra de la figura mostra la constel·lació a la sortida del canal. Com es pot veure, la constel·lació inicial (indicada amb els quatre quadrats negres) es veu fortament distorsionada per l'ISI.
- La gràfica dreta mostra la constel·lació a la sortida de l'equalitzador forçador de zeros en absència de soroll. Com es veu, la constel·lació s'apropa més a la de la QPSK (novament, els quatre quadrats negres mostren la constel·lació original, i les marques amb asterisc, les de la constel·lació equalitzada). A causa de l'ISI residual comentada anteriorment, no regenerem la constel·lació de la QPSK, sinó que s'aprecia una interferència que distorsiona els quatre punts de la QPSK.

Figura 10. Exemple de constel·lació d'un senyal QPSK en absència de soroll

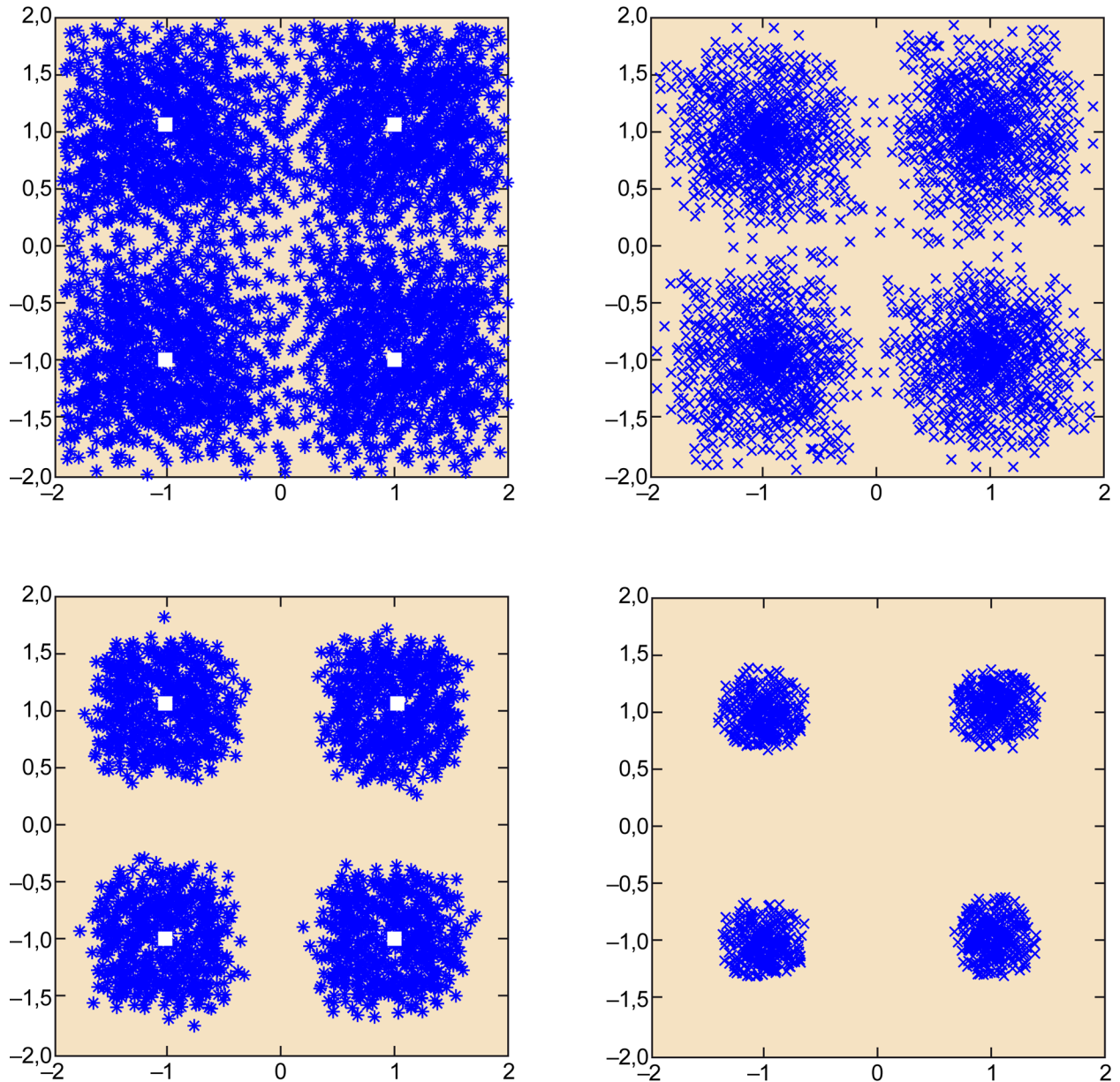


Seguidament, en la figura 11 es mostra la constel·lació del senyal equalitzat, inclòs el terme de soroll AWGN, per a apreciar l'efecte de l'emfatització del soroll. La constel·lació superior esquerra correspon al senyal equalitzat amb una $SNR = 10$ dB (valor raonable en un sistema de comunicacions, tot i que actualment la tendència és que sigui menor).

Com s'aprecia, el senyal està altament degradat pel soroll (compareu amb el que s'obtenia en el cas sense soroll). Per a poder apreciar el que es deu pròpiament al terme de soroll i el que es deu a l'emfatització del soroll provocada per l'equalitzador ZF, la gràfica superior dreta mostra la constel·lació d'una QPSK amb soroll amb una $SNR = 10$ dB, però amb canal ideal.

La diferència entre les constel·lacions, doncs, es deu a l'efecte d'amplificació del soroll provocat pel forçador de zeros. De manera similar, i per veure que l'efecte d'emfatització és menor a mesura que es redueix el soroll, la constel·lació inferior dreta correspon a un canal amb un terme additiu de soroll amb una $SNR = 20$ dB (valor massa alt en un sistema real); es veu que, tot i millorar, encara està degradada pel soroll.

Figura 11. Exemple de constel·lació d'un senyal QPSK amb soroll



Soroll a la sortida de l'equalitzador forçador de zeros (gràfiques de l'esquerra) per a una $SNR = 10$ dB (superior) i $SNR = 20$ dB (inferior). Com a referència, les constel·lacions de la dreta corresponen a un senyal QPSK amb soroll, però amb canal ideal.

2.2. Equalitzador de mínim error quadràtic mitjà (MMSE)

El principal problema que s'ha trobat en l'equalitzador forçador de zeros és que en el disseny no es té en compte el terme de soroll i per tant no es controla l'efecte que l'equalitzador provoca sobre aquest. L'alternativa serà dissenyar un equalitzador que sí que tingui en compte el terme de soroll i l'efecte que hi té l'equalitzador.

Com en el cas del forçador de zeros, aquest equalitzador seguirà l'estructura d'un equalitzador lineal i l'objectiu serà trobar el valor dels coeficients que aconseguixin que el senyal a la sortida de l'equalitzador (ara amb presència de soroll) s'assembli tant com sigui possible als símbols transmesos:

$$\text{Objectiu: } z_{eq}[n] \sim a_n \quad (10)$$

Per quantificar la diferència entre el senyal a la sortida de l'equalitzador i les dades transmeses, definim l'error i l'error quadràtic mitjà (MSE, de l'anglès: *mean-squared error*) –o potència de l'error–, respectivament, com les expressions (11) i (12):

$$e[n] = z_{eq}[n] - a_n \quad (11)$$

$$MSE = E\{|e[n]|^2\} = E\{|z_{eq}[n] - a_n|^2\} \quad (12)$$

en què l'operador $E\{\cdot\}$ correspon a l'esperança matemàtica que calcula la mitjana estadística de l'error.

Atès que volem fer el senyal tan semblant com sigui possible, establim com a criteri reduir l'error al màxim, i en conseqüència, la potència de l'error. Per tant, el disseny de l'equalitzador, com el seu nom indica, buscarà trobar el valor dels coeficients que minimitzi l'error quadràtic mitjà (MMSE, de l'anglès: *minimum mean-squared error*).

Un cop quantificat el paràmetre que s'optimitzarà en el disseny dels coeficients de l'equalitzador (q_k) i definida la funció de cost que depèn d'aquests coeficients, el disseny es redueix a resoldre un problema d'optimització clàssic (derivar la funció de cost respecte de la variable de disseny i igualar-ne la derivada a zero per a trobar el valor que optimitza la funció).

Les equacions (13) desenvolupen l'expressió de la funció de cost per a deixar-la en funció dels coeficients de l'equalitzador (q_k):

- En la primera línia, se substitueix l'error $e[n]$ per la seva expressió concreta.
- En la segona línia, el senyal a la sortida de l'equalitzador es posa en funció del senyal a l'entrada i dels coeficients de l'equalitzador (2).
- Seguidament, el terme de mòdul al quadrat de la suma es desenvolupa en tres termes i l'operador esperança passa dintre dels sumatoris, ja que l'esperança de la suma és la suma d'esperances.
- Finalment, en l'última igualtat, l'esperança sobre les dades a la sortida del canal es correspon amb l'autocorrelació de les dades a la sortida del canal $R_{zz}[k]$ i, de la mateixa manera, l'esperança sobre el producte de les dades per al senyal transmès es correspon amb la correlació creuada entre les dades a la sortida del canal i la seqüència de símbols desitjats $R_{za}[k]$.

$$\begin{aligned}
 MSE &= E\{|d[n]|^2\} = E\{|z_{eq}[n] - a_n|^2\} \\
 &= E\left\{\left|\sum_{k=0}^{L_{eq}-1} q_k z[n-k] - a_n\right|^2\right\} \\
 &= \sum_{k=0}^{L_{eq}-1} \sum_{k'=0}^{L_{eq}-1} q_k q_{k'} E\{z[n-k]z[n-k']\} \\
 &\quad - 2 \sum_{k=0}^{L_{eq}-1} q_k E\{z[n-k]a_n\} + E\{a_n^2\} \\
 &= \sum_{k=0}^{L_{eq}-1} \sum_{k'=0}^{L_{eq}-1} q_k q_{k'} R_{zz}(k-k') \\
 &\quad - 2 \sum_{k=0}^{L_{eq}-1} q_k R_{za}(k) + E\{a_n^2\}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Un cop desenvolupada l'expressió de l'error quadràtic mitjà, calculem la derivada de l'expressió i igualem a zero:

$$\min_{q_i} MSE \rightarrow \frac{\partial MSE}{\partial q_i} = 0 \quad i = 0 \dots L_{eq} - 1 \tag{14}$$

Com que hem de trobar el valor òptim per als L_{eq} coeficients (tenim L_{eq} incògnites), cal calcular L_{eq} derivades, cadascuna respecte d'un dels coeficients. El resultat final és un sistema d'equacions amb L_{eq} incògnites (els coeficients de l'equalitzador) i L_{eq} equacions (una per cadascuna de les derivades), com s'indica a continuació:

Reflexió

Com ja s'ha comentat en la introducció, perquè pugueu seguir la derivació del disseny sense haver d'incorporar notació addicional, cosa que complicaria els passos, assumim que els símbols transmesos, el canal i el senyal a la sortida són reals, i per tant, també ho seran els coeficients de l'equalitzador. En un problema real, amb una modulació passabanda i un disseny fet sobre l'equivalent passabaix, tots els termes seran complexos. Tot i assumir que el senyal i el canal són reals, els diferents passos i el resultat final seran els mateixos (modificant algun terme pel seu conjugat). En l'equació final de disseny de l'equalitzador MMSE, introduïm els termes conjugats per a donar l'expressió vàlida per al cas general complex.

$$\sum_{k=0}^{L_{eq}-1} q_k R_{zz}(k-i) = R_{zd}(i) \quad i=0 \dots L_{eq}-1 \quad (15)$$

Aquest sistema d'equacions es pot escriure de manera matricial (en què ja introduïm la notació complexa):

$$\begin{pmatrix} R_{zz}[0] & R_{zz}[1] & \dots & R_{zz}[-(L_{eq}-1)] \\ R_{zz}^*[1] & R_{zz}[0] & \dots & R_{zz}[-(L_{eq}-2)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{zz}^*[L_{eq}-1] & R_{zz}^*[L_{eq}-2] & \dots & R_{zz}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{L_{eq}-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{zd}[0] \\ R_{zd}[1] \\ \vdots \\ R_{zd}[L_{eq}-1] \end{pmatrix} \quad (16)$$

En aquesta expressió s'ha considerat que la funció d'autocorrelació complexa $R_{zz}^*[k] = R_{zz}[-k]$ – en què $R_{zz}[k-i] = E\{z[n-k]z^*[n-i]\}$ – i la funció de correlació creuada $R_{zd}[k] = E\{z[n-k]a_n^*\}$.

Observeu, doncs, que la manera de dissenyar l'equalitzador és ben senzilla. Coneguda l'autocorrelació de les dades a la sortida del canal $R_{zz}[k]$ i la correlació creuada entre les dades a la sortida del canal i la seqüència de símbols desitjats $R_{zd}[k]$, es construeixen la matriu de correlació \mathbf{R}_{zz} i el vector de correlacions creuades \mathbf{R}_{za} :

$$\mathbf{R}_{zz} = \begin{pmatrix} R_{zz}[0] & R_{zz}[1] & \dots & R_{zz}[-(L_{eq}-1)] \\ R_{zz}^*[1] & R_{zz}[0] & \dots & R_{zz}[-(L_{eq}-2)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{zz}^*[L_{eq}-1] & R_{zz}^*[L_{eq}-2] & \dots & R_{zz}[0] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{za} = \begin{pmatrix} R_{zd}[0] \\ R_{zd}[1] \\ \vdots \\ R_{zd}[L_{eq}-1] \end{pmatrix}$$

I els L_{eq} coeficients de l'equalitzador s'obtenen després d'invertir \mathbf{R}_{zz} i multiplicar-la pel vector \mathbf{R}_{za} :

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{L_{eq}-1} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{zz}^{-1} \cdot \mathbf{R}_{za} \quad (17)$$

El principal problema de l'equalitzador MMSE (que també ho és del ZF), especialment quan el nombre de coeficients de l'equalitzador és elevat, és que cal invertir la matriu de correlació \mathbf{R}_{zz} , tasca que pot resultar computacionalment complexa quan les dimensions de la matriu són grans. En el subapartat següent, es veuran formes de dissenyar l'equalitzador que no necessiten invertir la matriu.

Reflexió

Igual que en el forçador de zeros, podem relaxar el disseny de l'equalitzador i permetre un cert retard d del senyal a la sortida de l'equalitzador. En aquest cas, el càlcul de la funció de correlació creuada serà:

$$R_{zd}[k] = E\{z[n-k]a_{n-d}^*\}.$$

Reflexió

L'equalitzador de mínim error quadràtic també se l'anomena *filtre de Wiener*, proposat pel matemàtic Norbert Wiener.

Com es pot veure, el disseny de l'equalitzador MMSE depèn de l'estadística de les rebudes, que ha de ser coneguda *a priori*. Arribats en aquest punt, en què ja tenim la solució al equalitzador, ens plantejem la pregunta següent: com es coneixen els valors de l'autocorrelació $R_{zz}[k]$ i correlació creuada $R_{za}[k]$? Dit amb altres paraules, en un problema real, quan un transmissor concret transmet unes dades per un canal concret, com pot el receptor dissenyar l'equalitzador de MMSE? Per a determinar els valors de les correlacions, es poden donar dues situacions: que la resposta impulsional global sigui coneguda (com s'assumeix en el cas de l'equalitzador ZF), o que no es conegui. Això dóna lloc a dos casos amb solucions finals diferents, que veiem en els subapartats següents.

2.2.1. Cas 1: Resposta impulsional global $c[n]$ coneguda

Si es coneix la resposta del canal, es coneix el valor de les funcions de correlació. En efecte, com que el senyal a la sortida, inclòs el terme de soroll, estarà determinat per l'expressió (18), en què L denota la durada de la resposta impulsional global, l'expressió de correlacions podrà obtenir-se de manera analítica, un cop conegudes les estadístiques de primer i segon ordre dels símbols transmesos i del soroll a la sortida del filtre adaptat.

$$z[n] = \sum_{k=0}^{L-1} c[n]a_{n-k} + \bar{w}_n \quad (18)$$

Assumim, com habitualment es fa, les estadístiques següents per als símbols i el soroll:

- **Estadística dels símbols transmesos:** símbols complexos, independents i idènticament distribuïts, de mitjana zero $E\{a_n\} = 0$ i variància unitat $E\{|a_n|^2\} = 1$.
- **Estadística del soroll:** soroll complex, blanc, independent dels símbols, i amb una estadística gaussiana de mitjana zero $E\{\bar{w}_n\} = 0$ i variància $E\{|\bar{w}_n|^2\} = \sigma_w^2$.

Aleshores, la matriu de correlació \mathbf{R}_{zz} és igual a (19), en què la matriu \mathbf{C} de dimensions $(L_c + L_{eq} - 1) \times L_{eq}$ conté en les columnes versions desplaçades de la resposta impulsional global, i el vector \mathbf{R}_{za} , que també conté els elements de la resposta impulsional global, és igual al vector hermític obtingut a partir de la fila d de la matriu \mathbf{C} , en què d és el retard fixat per l'equalitzador.

$$\mathbf{R}_{zz} = (\mathbf{C}^H \mathbf{C} + \sigma_w^2 \mathbf{I}) \quad (19)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c[0] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c[1] & c[0] & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ c[L-1] & c[L-2] & \dots & c[0] & 0 \\ 0 & c[L-1] & \ddots & \vdots & c[0] \\ 0 & 0 & \dots & c[L-1] & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c[L-1] \end{pmatrix}$$

Així, si no hi ha retard: $\mathbf{R}_{za} = (c[0], 0, 0, \dots, 0)^H$; si s'admet un retard d'una mostra: $\mathbf{R}_{za} = (c[1], c[0], 0, 0, \dots, 0)^H$; i així successivament.

Reflexió

Observeu que en el disseny de l'equalitzador intervé directament la variància de soroll σ_w^2 que apareix directament en la matriu \mathbf{R}_{zz} . Resulta interessant analitzar els dos casos asimptòtics: quan no hi ha soroll (alta SNR) i quan hi ha molt de soroll (baixa SNR):

a) En el primer dels casos, encara que no resulta trivial, es pot veure que l'equalitzador MMSE tendeix a la solució de l'equalitzador ZF, fet que vol dir que l'equalitzador ZF minimitza l'error quadràtic mitjà en absència de soroll.

b) En el segon dels casos, a molt baixa SNR, $\mathbf{R}_{zz} \rightarrow \sigma_w^2 \mathbf{I}$. En aquest cas, la solució als coeficients de l'equalitzador, excepte un factor d'escala $1/\sigma_w^2$, coincideix amb el vector \mathbf{R}_{za} , cosa que vol dir que l'equalitzador tendeix a combinar de manera ponderada les mostres a la sortida del filtre adaptat. Dit d'una altra manera, podem interpretar que el senyal rebut és tan sorollós que no compensa intentar reduir l'efecte de l'ISI, ja que el soroll predomina sobre la interferència provocada pel canal (ISI).

Activitat

Us proposem com a exercici que verifiqueu el càlcul de la matriu \mathbf{R}_{zz} i del vector \mathbf{R}_{za} . Us proposem també estudiar-los asimptòticament per a un exemple senzill.

2.2.2. Cas 2. Resposta impulsional global $c[n]$ desconeguda

La manera de resoldre aquesta situació és recórrer a una estimació de les correlacions necessàries per a resoldre l'equació de disseny. Per fer-ho, el transmissor envia una seqüència de N dades coneguda a_n , $n = 1, \dots, N$ (anomenada *seqüència d'entrenament* o *seqüència de dades pilot*), i el receptor fa les operacions següents amb les dades en la sortida del canal:

$$\widehat{R}_{zz}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z[n-k]z^*[n] \quad ; \quad \widehat{R}_{za}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z[n-k]a_n^* \quad (20)$$

Com podeu veure, és necessari que el receptor conegui les dades transmeses per a poder estimar la correlació creuada entre les dades en la sortida del canal i la seqüència de símbols desitjats $\widehat{R}_{za}[k]$.

A partir de les estimacions de la correlació, es poden construir les estimacions de les matrius $\widehat{\mathbf{R}}_{zz}$ i $\widehat{\mathbf{R}}_{za}$, i a partir de les matrius estimades, es poden trobar els valors dels coeficients:

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{L_{eq}-1} \end{pmatrix} = \widehat{\mathbf{R}}_{zz}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{R}}_{za} \quad (21)$$

Si bé aquesta solució no és l'original, per a un nombre prou llarg de dades d'entrenament, N , el resultat de l'estimació de la correlació serà força bona (propera a la correlació real), i per tant, el disseny serà vàlid.

2.3. Equalitzador adaptatiu

El disseny dels equalitzadors proposats anteriorment, tant el forçador de zeros com l'equalitzador de mínim error quadràtic mitjà, presenten dos problemes:

- Necessiten invertir una matriu, fet que pot resultar computacionalment complex quan les dimensions d'aquesta siguin grans (com que les dimensions de la matriu són $L_{eq} \times L_{eq}$, parlar de les dimensions de la matriu és equivalent a parlar del nombre de coeficients de l'equalitzador).
- Requereixen un coneixement o estimació del canal (equivalentment, de les funcions de correlació $R_{zz}[k]$ i $R_{za}[k]$) com a pas previ al disseny de l'equalitzador, que ha de mantenir-se constant des del moment en què se'n fa l'estimació fins al moment en què s'aplica l'equalitzador.

El primer problema imposa una restricció en la complexitat computacional. El segon problema, potser més complex, introdueix problemes quan el canal és variant en el temps (ja hem vist que en molts casos el canal no és constant, sinó que va variant en el temps). Si el canal varia al llarg del temps, caldrà enviar un bloc de dades d'entrenament cada cert temps per a tornar a fer una estimació del canal i redissenyar l'equalitzador. Aquestes seqüències d'entrenament redueixen l'eficiència de la comunicació, ja que mentre s'envien símbols d'entrenament, no s'envien dades d'informació. Si, d'altra banda, per no penalitzar l'eficiència, s'intenta estalviar reduint l'enviament de noves seqüències d'entrenament, els coeficients de l'equalitzador no seran vàlids, i l'equalitzador no complirà correctament la seva funció.

Com ja podeu imaginar, cal trobar alguna solució que permeti fer un disseny d'equalitzadors sense necessitat d'invertir la matriu i/o de manera que siguin eficients en presència de canals variants en el temps. Aquesta solució passa pel disseny d'equalitzadors adaptatius. Un equalitzador adaptatiu, com el seu nom indica, és un equalitzador que va adaptant (corregint) el valor dels coeficients al llarg del temps.

Vegeu també

Vegeu els canals variants en el temps en el mòdul "Canal de comunicacions" d'aquesta assignatura.

L'equalitzador adaptatiu més senzill d'entendre i implementar és l'equalitzador basat en l'algoritme LMS (de l'anglès: *least-mean-square*). És la solució idònia quan el canal varia en el temps i també es pot plantejar com a solució per a canals constants si volem implementar un equalitzador MMSE que eviti invertir la matriu de correlació.

Hi ha altres solucions amb millors prestacions, com l'equalitzador basat en l'algoritme RLS (de l'anglès: *recursive least-squares*), especialment pensat per a no haver d'invertir la matriu, però més complex, que no tractarem en aquest mòdul. A continuació detallem l'equalitzador basat en l'algoritme LMS.

2.3.1. Equalitzador LMS: algoritme de gradient

L'objectiu de l'equalitzador basat en l'algoritme LMS (de l'anglès: *least-mean-square*) és el mateix que l'equalitzador MMSE: trobar el valor dels coeficients de l'equalitzador lineal q_k que minimitzin l'error quadràtic mitjà. La diferència està en la manera d'arribar a la solució òptima. Mentre que l'equalitzador MMSE recorre a una solució analítica (derivat la funció de cost respecte de la variable de disseny i igualar la derivada a zero per a trobar el valor que optimitza la funció), l'equalitzador LMS arribarà a la solució mitjançant un algoritme de gradient.

Remarquem, abans de seguir amb la derivació de l'equalitzador adaptatiu, que es pren com a funció per a optimitzar l'error quadràtic mitjà, atès l'interès d'aquesta mètrica per avaluar la semblança entre el senyal a la sortida de l'equalitzador i el senyal desitjat, tot i que podríem dissenyar altres criteris, com ara un equalitzador adaptatiu basat en el forçador de zeros (que per raons ja discutides, no ens interessarà).

Comentem a continuació, de manera bastant il·lustrativa, en què consisteix un algoritme de gradient. Per fer-ho il·lustrem el problema concret de trobar el valor dels coeficients de l'equalitzador que minimitzen la funció d'error quadràtic mitjà.

Observem que la funció que es vol optimitzar (l'MSE) té una dependència quadràtica amb la variable independent (els coeficients). Simplificant el problema per a poder-lo representar en un gràfic 2D, suposem que hi ha només un coeficient q , i per tant la funció $MSE(q)$ correspondria a una paràbola, com s'il·lustra en la figura 12. Sabem que en una paràbola hi ha un únic mínim, condició indispensable per a garantir que l'algoritme de gradient que descriurem a continuació ens acabi proporcionant la solució òptima. L'ampliació al problema de L_{eq} coeficients també complirà aquesta condició pel fet de dependre quadràticament dels coeficients.

La figura 12 il·lustra el problema i els diferents passos de l'algoritme:

Vegeu també

Vegeu els primers paràgrafs del subapartat 2.2 d'aquest mòdul didàctic.

- 0 - L'objectiu serà arribar al valor del coeficient que minimitza la funció $MSE(q)$, això és: q_{opt} .
- 1 - El problema s'inicialitza en un valor qualsevol per a q , que denotarem amb q^0 (el superíndex denotarà la iteració en què ens trobem dins de l'algoritme). Si tenim alguna informació d'on està aproximadament el mínim, prendrem un valor proper per reduir el temps necessari per a arribar al mínim; en cas contrari, qualsevol valor aleatori és vàlid.
- 2 - Avaluem el pendent de la funció $MSE(q)$ en el punt q^0 a partir del valor de la derivada de la funció MSE a q^0 . Observeu que el signe del pendent (signe de la derivada) ens indicarà si el mínim es troba a la dreta o a l'esquerra de q^0 , i el valor del pendent (valor de la derivada) ens dirà si som lluny o a prop d'aquest punt mínim.
- 3 - En la iteració següent fem un petit salt d'un cert valor en la direcció del mínim fins a arribar a q^1 . Per a obtenir q^1 , ho farem a partir de q^0 i el valor de la derivada, segons l'equació següent:

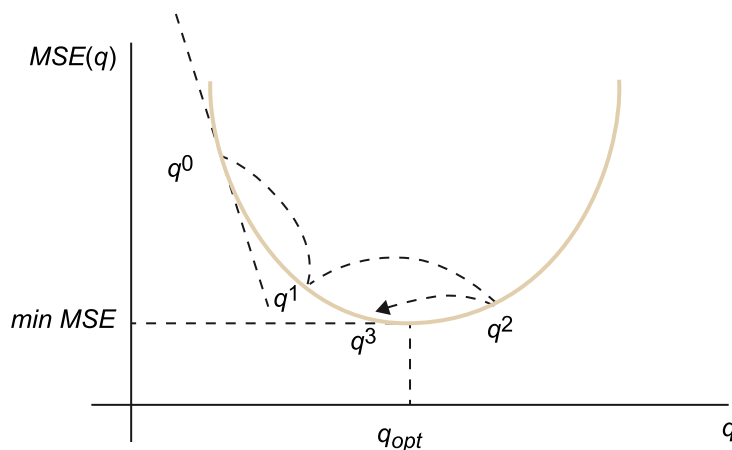
$$q^1 = q^0 - \mu \left. \frac{d \text{MSE}(q)}{dq} \right|_{q^0}$$

en què μ és un escalar anomenat *pas d'adaptació*, del qual parlarem més tard.

A partir de q^1 , repetim el mateix procediment que en 2 per determinar on es troba el mínim q_{opt} . Si el pas d'adaptació μ s'ha dissenyat correctament, q^1 estarà més a prop del mínim en el sentit que $MSE(q^1) < MSE(q^0)$.

- 4 - Iterem els passos 2 i 3 per anar-nos apropant al mínim cada cop més. Fixem-nos que, si en algun moment arribéssim al mínim exacte, com que la derivada en aquell punt és zero, l'algoritme iteratiu quedaria congelat a q_{opt} .

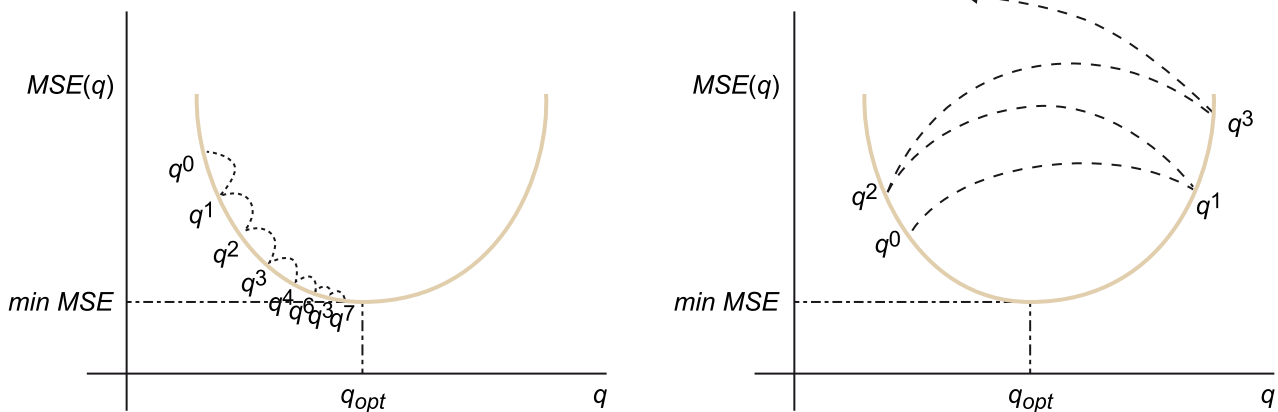
Figura 12. Esquema de l'algoritme de gradient



Observem que, a diferència de la solució analítica (que consisteix a igualar la derivada a zero i aïllar), que permet obtenir la solució directament, l'algoritme de gradient, com que es tracta d'un algoritme iteratiu, necessitarà un temps de convergència fins a arribar a la solució. El valor del pas d'adaptació μ tindrà

un paper important en el temps de convergència. Un valor de μ petit garantirà que s'arribi pas a pas al mínim de la funció, però el temps necessari per a assolir el punt òptim serà elevat. Per contra, un valor de μ excessivament gran pot tenir conseqüències desastroses si a cada iteració, en lloc d'apropar-nos al mínim, ens n'allunyem cada cop més. En el primer cas direm que l'algoritme convergeix, mentre que en el segon parlarem de divergència de l'algoritme. Trobar, doncs, el valor de μ que garanteixi la convergència i alhora no allargui excessivament el temps de convergència serà una tasca de difícil solució. La figura 13 il·lustra les dues situacions, que podem trobar en funció de μ .

Figura 13. Evolució d'un algoritme de gradient per a μ petita (esquerra) i μ gran (dreta)



Un cop descrit l'algoritme de gradient, formalitzem els passos necessaris fins a arribar a derivar l'equalitzador basat en l'algoritme LMS. Recordem que volem trobar el valor dels L_{eq} coeficients que minimitzen l'error quadràtic mitjà a la sortida de l'equalitzador. Per fer-ho, estendrem la idea formulada en l'exemple per al cas d'un sol coeficient al cas de L_{eq} coeficients. Així, si denotem per \mathbf{q} el vector que conté els L_{eq} coeficients de l'equalitzador:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{L_{eq}-1} \end{pmatrix}$$

i per \mathbf{q}^m el valor d'aquest vector de coeficients en la iteració m , l'algoritme de gradient iteratiu es pot escriure segons l'expressió (22):

$$\mathbf{q}^{m+1} = \mathbf{q}^m - \mu \cdot \nabla_{MSE}(\mathbf{q}^m) \quad (22)$$

en què $\nabla_{MSE}(\mathbf{q}^m)$ és el gradient de la funció avaluat en \mathbf{q}^m .

Recordem que la funció MSE està definida de la manera següent:

El gradient d'una funció

Recordeu que el gradient d'una funció $f(\mathbf{r})$ en un punt indica la direcció de màxim pendent i es defineix com el vector de derivades parcials respecte de cadascuna de les dimensions (o elements) de \mathbf{r} :

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_n} \right)^T$$

$$MSE = E\{e[n]^2\} = E\{z_{eq}[n] - a_n\}^2 = E\left\{\sum_{k=0}^{L_{eq}-1} q_k z[n-k] - a_n\right\}^2 \quad (23)$$

Aleshores, el seu gradient per al cas complex es pot expressar com (24):

$$\nabla_{MSE}(\mathbf{q}) = E\{e[n] \cdot \mathbf{z}^*\} \quad (24)$$

En aquesta expressió, $e[n]$, que depèn del vector de coeficients, és l'error entre el senyal desitjat i el senyal a la sortida de l'equalitzador, i el vector \mathbf{z}^* conté les mostres conjugades del senyal a l'entrada de l'equalitzador (que coincideixen amb les mostres que hi ha en la línia de retards de l'equalitzador):

$$\mathbf{z}^* = \begin{pmatrix} z[n]^* \\ z[n-1]^* \\ \vdots \\ z[n-(L_{eq}-1)]^* \end{pmatrix}$$

A la pràctica, igual que passa amb el disseny de l'equalitzador MMSE, la solució requereix el càlcul de l'esperança matemàtica, que no pot obtenir-se en el temps real, ja que necessita conèixer l'estadística del canal. La solució alternativa que s'implementa prescindeix d'aquesta esperança matemàtica i redueix la mitjana estadística al valor instantani (és a dir, sense l'esperança). Amb aquesta simplificació, que és la que dona lloc a l'algoritme LMS, en cada nova mostra es fa una nova iteració de l'algoritme de gradient, i per tant, podem unificar la variable n i l'índex m de manera que $m = n$.

Així, doncs, l'algoritme LMS s'implementa segons l'expressió (25):

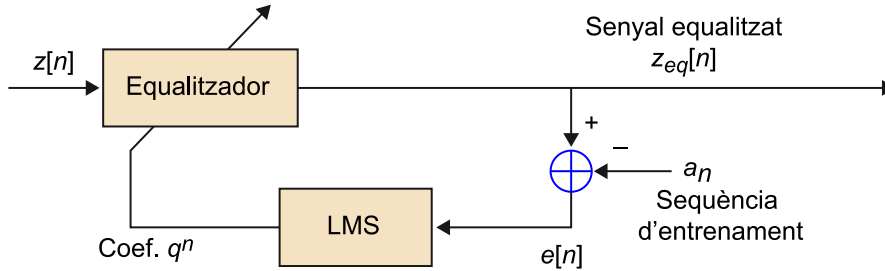
$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n - \mu e[n] \mathbf{z}^* \quad ; \quad \text{on: } e[n] = \sum_{k=0}^{L_{eq}-1} q_k^n z[n-k] - a_n \quad (25)$$

en què l'actualització depèn del vector \mathbf{z}^* que conté les mostres conjugades del senyal a l'entrada de l'equalitzador –com s'ha definit anteriorment–, de l'error comès a la sortida de l'equalització $e[n]$ en la iteració m , i del pas d'adaptació μ .

Respecte del valor que ha de prendre μ , cal fer un estudi de convergència rigorós que obviarem en aquest mòdul. Per a més detalls, us remetem a la bibliografia, on trobareu detalls sobre aquest estudi.

La figura 14 il·lustra la implementació de l'algoritme adaptatiu.

Figura 14. Esquema d'implementació d'un equalitzador adaptatiu



A continuació resumim la idea de l'equalitzador LMS:

- 1) El transmissor envia una seqüència de dades, que pel moment assumirem que són conegudes: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$. El nombre de símbols d'entrenament N ha de ser més gran o igual que el temps de convergència de l'algoritme.
- 2) L'equalitzador s'inicialitza amb un vector de coeficients qualsevol \mathbf{q}^0 . Qualsevol conjunt de valors serveix. Alguns exemples de valors que s'acostumen a prendre poden ser el primer coeficient a 1 i la resta a 0, tots els coeficients a 1, o una inicialització amb valors aleatoris.
- 3) Amb els coeficients \mathbf{q}^0 s'obté la primera dada a la sortida de l'equalitzador, que es compara amb a_0 per a obtenir el primer valor d'error $e[0]$, que òbviament serà molt gran en obtenir-se a partir d'un vector de coeficients \mathbf{q}^0 generat sense cap tipus de criteri.
- 4) A partir de \mathbf{q}^0 i de l'error $e[0]$, s'itera l'algoritme LMS per a obtenir el vector de coeficients \mathbf{q}^1 . El valor d'aquests coeficients s'introduirà en l'equalitzador i permetrà obtenir la segona dada a la sortida $z_{eq}[1]$, que, comparada amb a_1 , ens proporcionarà el valor de l'error $e[1]$.
- 5) L'algoritme continua iterant en el pas 4. A cada pas, l'error serà menor i el vector de coeficients anirà convergint a la solució MMSE.

2.3.2. Seqüència d'entrenament per a controlar l'actualització dels coeficients

Observem que per a fer l'actualització dels coeficients és necessari calcular l'error $e[n]$, i per tant, conèixer les dades transmeses. Això vol dir que un cop es deixa de transmetre la seqüència d'entrenament, l'equació que regula les iteracions, i per tant, que adapta els coeficients de l'equalitzador, ja no es pot calcular. Respecte d'aquest tema es poden proposar diferents polítiques dependent de les característiques del canal.

- 1) Canal constant (invariant en el temps)

Algoritme assistit per dades (DA, de l'anglès: *data aided*) amb seqüència d'entrenament

En aquest cas s'implementa estrictament l'algoritme descrit anteriorment amb un nombre d'iteracions N que coincideix amb la durada de la seqüència d'entrenament. Un cop passades les N iteracions, s'obté un vector de coeficients de l'equalitzador \mathbf{q} que, considerant que ha convergit a la solució final, es congela i s'aplica, sense cap nova actualització, al bloc de dades d'informació –desconegudes–, que es comencen a transmetre passats els primers N símbols d'entrenament.

Aquesta solució és vàlida quan assumim que el canal no variarà al llarg del temps, de manera que amb les primeres N dades entrenem l'equalitzador, fem que aprengui a adaptar-se al canal, i seguidament l'utilitzem per a equalitzar. Aquesta solució ens ha de proporcionar les mateixes prestacions que les obtingudes amb l'equalitzador MMSE i ens ha estalviat la necessitat d'invertir la matriu de correlació, que és un dels problemes que hem plantejat al principi d'aquest subapartat.

Reflexió

Tot i que teòricament l'equalitzador MMSE i l'equalitzador LMS tenen les mateixes prestacions ja que busquen optimitzar la mateixa funció de cost, a la pràctica l'equalitzador LMS tindrà unes prestacions lleugerament pitjors que el MMSE en el cas ideal en què la resposta del canal (o les matrius de correlació) són conegudes. Com que es tracta d'un algoritme adaptatiu controlat per l'error instantani $e[n]$ (que sempre estarà subjecte a l'existència del soroll AWGN), s'obindrà una solució propera a la de mínim error quadràtic mitjà, però sorollosa, fet que implicarà una petita pèrdua en prestacions. Respecte de la comparació de l'equalitzador LMS amb la solució de l'equalitzador MMSE per al cas 2, en què s'estimen les matrius de correlació, s'obtidran resultats similars, ja que en el procés d'estimació de les matrius de correlació també hi ha implícita una lleugera degradació en quedar aquesta subjecta a l'existència del soroll AWGN.

2) Canal variant en el temps

El segon problema que hem plantejat al principi del subapartat és que el canal pugui anar variant al llarg del temps. Com ja podeu intuir, en aquest cas la solució plantejada en el punt anterior de congelar els coeficients de l'equalitzador no és factible, ja que a mesura que el canal varia amb el temps, l'equalitzador va quedant obsolet.

Davant d'aquest problema es poden trobar dues solucions.

- **Algoritme DA amb seqüència d'entrenament + símbols pilot**

La primera solució consisteix a enviar una seqüència d'entrenament de N símbols que permeti entrenar l'equalitzador, seguidament enviar dades d'informació que seran equalitzades amb el valor de l'equalitzador calculat, i cada cert temps intercalar algun símbol conegut (que anomenarem *símbol pilot*) entre les dades d'informació, que permeti a l'equalitzador monitorar l'error d'equalització $e[n]$ i anar-se adaptant a les variacions del canal.

Cada cop que arribi un símbol pilot es podrà fer una nova iteració de l'algoritme LMS per a corregir el valor dels coeficients. La distància entre els símbols pilot estarà regulada per la velocitat de variació del canal. Així, si el canal varia molt lentament, n'hi haurà prou d'inserir un símbol pilot cada cert temps, mentre que si el canal varia més ràpidament, caldrà reduir la separació entre símbols pilot a fi d'augmentar la freqüència d'adaptació dels coeficients de l'equalitzador.

- **Algoritme assistit per decisions (DD, de l'anglès; *decision directed*)**

El principal problema dels símbols pilot és que redueixen l'eficiència de la comunicació. Com ja s'ha comentat anteriorment, mentre s'envien dades conegudes (seqüència d'entrenament o símbols pilot) no s'envien dades d'informació, i per tant es redueix la velocitat de transmissió efectiva.

Una solució per a evitar la necessitat d'inserir símbols pilot és utilitzar les pròpies decisions per a calcular l'error comès. Quan l'error a la sortida de l'equalitzador és petit, la probabilitat d'equivocar-se en el símbol a la sortida del decisor és baixa, fet que vol dir que mirant la sortida del decisor es pot saber (amb una probabilitat molt baixa d'equivocar-nos) quin ha estat el símbol transmès. Així, doncs, si sabem quin ha estat el símbol transmès sense que aquest correspongui a un símbol pilot, podem utilitzar les mateixes decisions dels símbols d'informació com si fossin dades conegudes prescindint de la necessitat d'enviar símbols pilot.

La manera de procedir en aquest cas seria la següent (vegeu la figura 15): el transmissor envia una seqüència d'entrenament de N símbols que permet entrenar l'equalitzador, i seguidament començar a enviar dades d'informació. Mentre es reben les dades de la seqüència d'entrenament, el càlcul de l'error per a adaptar el valor dels coeficients es fa a partir del coneixement de les dades transmeses. Un cop es deixa d'enviar la seqüència d'entrenament, els coeficients de l'equalitzador no es congelen, sinó que l'algoritme LMS continua iterant a raó d'una iteració per símbol transmès. La diferència és que ara el càlcul de l'error $e[n]$ es farà a partir de les decisions que es prenguin sobre les dades transmeses a la sortida mateixa de l'equalitzador.

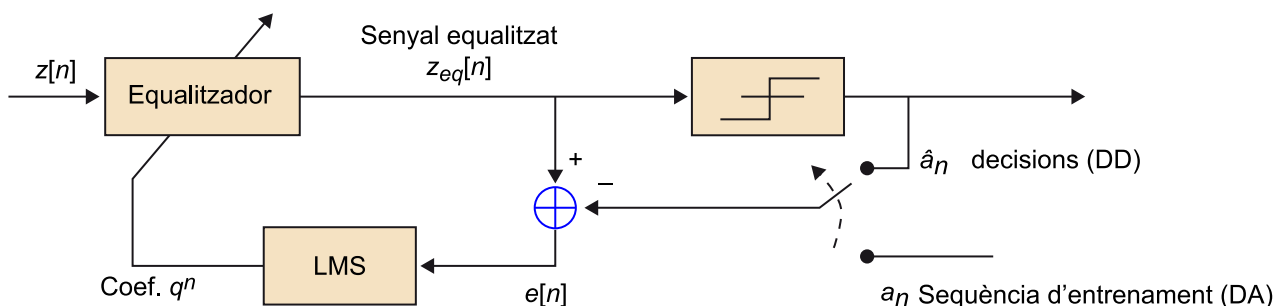
Observeu que aquesta estratègia només podrà aplicar-se quan l'error a la sortida de l'equalitzador sigui molt petit, o el que és el mateix, quan la probabilitat d'error a la sortida del decisor sigui baixa. Perquè això passi caldrà que es compleixin dues condicions: que els coeficients de l'equalitzador estiguin ben calculats, i que el nivell de soroll sigui petit. Per a resoldre el primer problema s'envia una seqüència d'entrenament de N símbols abans de commutar al mode DD, que garantirà que l'algoritme LMS hagi convergit.

A partir d'aquest moment assumirem que les variacions del canal seran prou lentes perquè en pocs símbols el canal hagi variat molt poc, de manera que l'error d'equalització continuï essent petit i l'adaptació dels coeficients de

l'equalitzador pugui anar seguint les variacions del canal. Respecte del segon problema no tindrem gaire capacitat d'actuació. Si el canal és poc sorollós (treballem a alta SNR) podrem aplicar una estratègia basada en DD, mentre que si el canal és molt sorollós (treballem a baixa SNR) les decisions no seran prou fiables per a aplicar una estratègia DD. En aquest cas, tenim dues alternatives:

- La primera és transmetre símbols pilot periòdicament per tal que l'algoritme LMS del receptor pugui actualitzar els coeficients de l'equalitzador treballant en mode DA.
- L'alternativa, que estalvia la transmissió de símbols pilot, és utilitzar un esquema anomenat *turboequalitzador* en què l'equalitzador, seguit d'un descodificador de canal, es dissenya utilitzant les decisions toves (en anglès: *soft decisions*) sobre els símbols transmesos, obtingudes del descodificador de canal. Quan en una estratègia DD decidim que el símbol enviat transmès és -1 o $+1$, estem prenent decisions dures o fermes (en anglès: *hard decisions*) sobre els símbols enviats. A baixa SNR, normalment és massa arriscat prendre aquestes decisions ja que la probabilitat d'equivocar-se és elevada. Per contra, si l'estructura que el codificador de canal proporciona a les dades permet avaluar la probabilitat que el símbol enviat sigui -1 o $+1$ i utilitzem aquesta probabilitat, evitarem el risc d'equivocar-nos. Així, el descodificador calcula la mètrica $\ln(p(a_n = +1)/p(a_n = -1))$ d'aquest símbol, que ens diu quant més probable és un valor del símbol que l'altre. Si el valor absolut d'aquesta mètrica és gran, vol dir que estem força segurs de quin ha estat el símbol transmès i utilitzarem aquest símbol per a dissenyar l'equalitzador; en canvi, si el valor absolut de la mètrica és petit a causa del soroll, no ens refiarem gaire d'aquest símbol per a dissenyar l'equalitzador i evitar que LMS divergeixi.

Figura 15. Esquema d'implementació d'un equalitzador adaptatiu amb commutació DA a DD

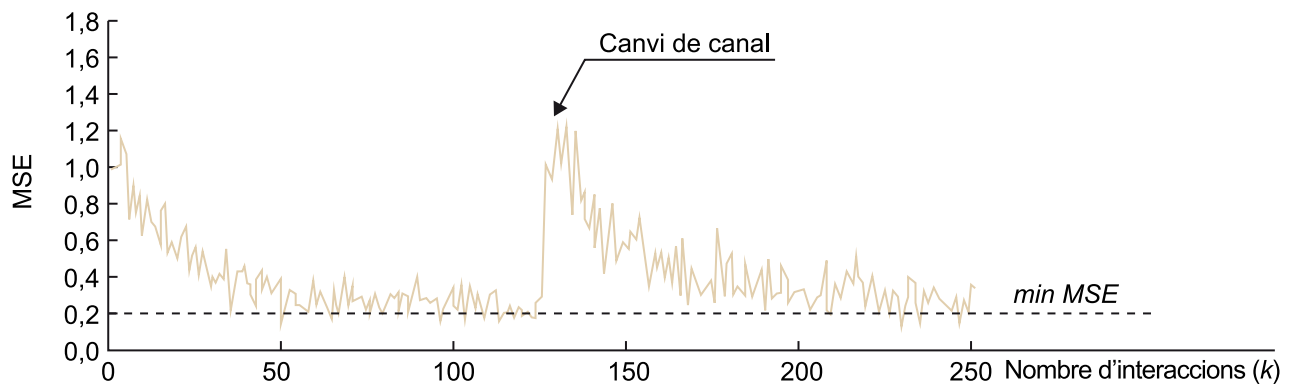


En el cas de canals variants en el temps, el valor del pas d'adaptació μ torna a prendre un paper important. Quan el canal varia en el temps, l'algoritme LMS haurà de dissenyar-se per a poder seguir les variacions del canal, i per tant el valor de la μ , que ja hem vist que és rellevant per a determinar el temps de convergència (i equivalentment, la capacitat de seguiment de les fluctuacions

del canal), haurà de fixar-se adequadament. Així, haurem de fixar un valor gran per a la μ quan el canal variï ràpidament, i una μ petita quan ho faci lentament.

La figura 16 il·lustra un exemple del valor de l'error quadràtic mitjà amb un equalitzador adaptatiu implementant l'algoritme LMS. En l'eix vertical hi ha l'error quadràtic mitjà a la sortida de l'equalitzador, i en l'eix horitzontal el nombre d'iteracions de l'algoritme. En línia discontinua hi ha el mínim error quadràtic (valor que s'assoliria amb un equalitzador MMSE).

Figura 16. Exemple de MSE mesurat a la sortida d'un equalitzador adaptatiu basat en LMS



Com es pot veure en la figura 16, al principi l'error és gran, i a mesura que l'algoritme va iterant, l'error convergeix al valor mínim, fet que indica que els coeficients de l'equalitzador han convergit cap a la solució òptima. El temps necessari per a arribar a la solució del mínim és el temps de convergència. L'algoritme treballa en mode DA fins a la iteració 50 i a partir d'aquell moment commuta a mode DD.

Per a il·lustrar la capacitat d'adaptació de l'algoritme a les variacions del canal, en la iteració 125 es força un canvi en la resposta impulsional del canal. Com es pot veure, en aquell instant de temps l'error torna a créixer, ja que l'equalitzador passa a estar "desadaptat" respecte de la solució òptima per al nou canal. Malgrat això, es veu que l'equalitzador és capaç d'adaptar-se a la nova situació i, passat un nombre d'iteracions, torna a convergir cap a la nova solució.

Heu de tenir en compte que, en general, els canvis del canal no són bruscos com s'ha forçat en l'exemple (a fi d'il·lustrar la capacitat d'adaptació de l'equalitzador), sinó que van variant lentament al llarg del temps. Per tant, no és habitual trobar aquest pic en què l'error creix bruscament, sinó que els coeficients del canal evolucionen a la mateixa velocitat que ho fan les variacions del canal.

L'algoritme LMS descrit en aquest mòdul és l'algoritme adaptatiu més senzill i dels més utilitzats en el disseny d'equalitzadors adaptatius. Això no obstant, no és l'únic algoritme que hi ha amb aquestes característiques. Una variació del l'algoritme LMS és l'algoritme NLMS (*normalized LMS*), que introdueix un terme de normalització juntament a la μ , amb el qual pretén resoldre alguns dels problemes de l'algoritme LMS (en què el valor de μ adequat és sensible a la potència del senyal rebut). Un altre algoritme iteratiu que millora la convergència l'algoritme LMS és l'algoritme RLS (*recursive least-squares*). Aquest algoritme, com l'LMS, estalvia la inversió de la matriu de correlació i, si es dissenya adequadament, també permet adaptar-se a les variacions del canal. Finalment, per acabar la llista d'alguns equalitzadors adaptatius, mereix una menció l'equalitzador basat en el filtre de Kalman perquè és la millor implementació d'un filtre lineal que minimitza l'error quadràtic mitjà.

Lectura complementària

No es tractaran en el curs cap d'aquests altres equalitzadors adaptatius (NLMS, RLS, Kalman). Se'n pot trobar informació detallada en l'obra següent:

Simon O. Haykin (2013). *Adaptive Filter Theory*. Upper Saddle River: Prentice Hall.

3. Equalitzadors no lineals

Com ja hem comentat en la introducció, un equalitzador lineal no és el millor equalitzador que es pot implementar des d'un punt de vista de voler minimitzar la probabilitat d'error en el procés de detecció de la seqüència de símbols transmesa. En un sistema de comunicacions digitals amb presència de canal amb ISI, l'algoritme òptim capaç d'estimar els símbols de la seqüència transmesa amb la mínima probabilitat d'error correspon a l'estimador que fa l'estimació dels símbols més probables, donada una seqüència de mostres rebuda. Aquest estimador, o detector, s'anomena *estimador MLSE* (de l'anglès: *maximum likelihood sequence estimator*). En aquest apartat treballarem amb detall l'estimador MLSE i presentem breument l'equalitzador DFE com un altre exemple d'equalitzador no lineal.

3.1. Estimador de màxima versemblança (MLSE)

Formalitzant matemàticament el concepte, si donada una seqüència de dades rebudes \mathbf{z} (corresponent a un vector de dades a la sortida del filtre adaptat) denotem amb $p(\mathbf{z}|\mathbf{a})$ la funció de versemblança (en anglès: *likelihood function*) de les dades rebudes condicionada a haver transmès una seqüència de símbols concreta, \mathbf{a} , l'objectiu serà trobar la seqüència de símbols transmesos que maximitzi aquesta funció:

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \max_{\mathbf{a}} p(\mathbf{z}|\mathbf{a}) \quad (26)$$

Si assumim que el soroll és gaussià, amb mostres de soroll incorrelades, i denotem amb K la longitud de la seqüència de símbols transmesos, la funció de densitat de probabilitat condicionada serà l'expressió (27) (novament assumim canal, soroll i símbols reals per simplicitat en la notació), en què σ_z^2 és la variància de les mostres del soroll blanc a la sortida del filtre adaptat, L és la durada del canal en mostres (a temps de símbol), a_{t-k} són els elements del vector \mathbf{a} corresponents als símbols transmesos, i els coeficients c_k són les mostres (a temps de símbol) de la resposta impulsional global que, com s'ha vist en l'apartat 1, correspon a la convolució del pols conformador amb la resposta impulsional del canal i amb el filtre adaptat.

$$p(\mathbf{z}|\mathbf{a}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_z^2)^{K/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_z^2} \sum_{l=1}^K \left| z[l] - \sum_{k=0}^{L-1} c_k a_{l-k} \right|^2 \right\} \quad (27)$$

Reflexió

Observeu que l'equació (26) és idèntica a la utilitzada per al disseny del sincronitzador (vegeu el subapartat 2.1 del mòdul de sincronització). En tots dos casos s'intenta determinar (estimar) un cert valor desconegut seguint un criteri que maximitzi la funció de versemblança.

Com és habitual en aquests problemes d'optimització, prenem el logaritme de la funció de versemblança (maximitzar la funció $p(\mathbf{z}|\mathbf{a})$ o el seu logaritme equivalent), i després de negligir una sèrie de constants que no depenen de la seqüència de símbols \mathbf{a} , obtenim que maximitzar la funció de versemblança és equivalent a minimitzar la suma (28):

$$\hat{\mathbf{a}} = \underset{\mathbf{a}}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{l=1}^K \left| z[l] - \sum_{k=0}^{L-1} c_k a_{l-k} \right|^2 \right) \quad (28)$$

Observeu que la suma anterior equival a la distància euclídia entre una seqüència de dades rebudes \mathbf{z} i la seqüència de símbols \mathbf{a} passada pel canal i , per tant, podem afirmar que en presència de AWGN maximitzar la funció de màxima versemblança és equivalent a minimitzar aquesta distància euclídia.

A partir de l'equació (28) podem concloure la següent manera de procedir: Donada una seqüència de dades rebudes, \mathbf{z} , es calcula la distància euclídia per a cadascuna de les seqüències possibles a la sortida del canal dependents dels símbols \mathbf{a} i s'acaba decidint com a seqüència transmesa (i per tant, la que minimitza la probabilitat d'error) la de distància mínima. La pregunta és: quina és la complexitat d'aquest algoritme? Com ja podeu intuir, la resposta és que és excessiva, i per tant resulta inacceptable la implementació de l'algoritme tal com s'ha descrit. En efecte, si els símbols transmesos pertanyen a una constel·lació de dimensió M i la seqüència transmesa és de longitud K , el nombre de seqüències possibles amb què s'ha de comparar és M^K (podeu fer algun càlcul per a una BPSK $M = 2$ o QPSK $M = 4$ i una longitud de seqüència de $K = 1.000$ símbols).

Hi ha, però, una manera computacionalment eficient de resoldre aquest problema. La solució és l'algoritme de Viterbi, que com veurem a continuació, permet resoldre el problema seguint un algoritme en què la complexitat només depèn exponencialment de la memòria del canal L , i en què la dimensió de la constel·lació M i la longitud de la seqüència transmesa K afecten linealment.

3.2. Estimador MLSE implementat amb l'algoritme de Viterbi

L'objectiu de l'algoritme de Viterbi serà trobar la seqüència de símbols que maximitza la funció de versemblança (en el cas gaussià equivalentment minimitza la distància euclídia), donada una seqüència de dades rebudes. L'algoritme de Viterbi no té només aplicació en l'estimació de màxima versemblança de seqüències transmeses en canals amb ISI, sinó que també s'utilitza àmpliament en aplicacions d'altres àrees del processament de senyal, com per exemple per a la descodificació de codis convolucionals, en alguns mètodes per al reconeixement de veu i en diversos esquemes per a la classificació de patrons. En tots aquests problemes hi ha un denominador comú: buscar un camí òptim (o el camí més probable) dins d'un diagrama de Trellis.

L'algoritme de Viterbi té un enunciat formal bastant complex i els detalls de les demostracions escapen als objectius d'aquest text. Per això presentarem l'algoritme mitjançant un exemple i posteriorment intentarem generalitzar-ne els resultats de manera que quedi clara l'essència de l'algoritme i el procediment que cal seguir per a descodificar una seqüència mitjançant aquest.

Suposem que es transmet un senyal binari $a_n \in \{-1, +1\}$ per un canal que té la mateixa resposta impulsional global que la que hem utilitzat per a dissenyar l'equalitzador ZF, això és:

$$\begin{aligned} c[0] &= +0,8 \\ c[1] &= +0,4 \\ c[2] &= -0,2 \\ c[n] &= 0 \quad n \neq 0, 1, 2 \end{aligned}$$

Per a fer l'estimació de la seqüència transmesa és necessari conèixer la resposta impulsional global $c[n]$ i elaborar un diagrama, que anomenarem **diagrama de Trellis**, que conté tots els possibles valors a la sortida del canal (sense soroll) i les combinacions de símbols a l'entrada que les generen, tal com detallarem a continuació. El valor de $c[n]$, que ens cal conèixer, es pot estimar en el període d'entrenament a partir d'enviar una seqüència de dades conegudes i observar-ne el valor a la sortida del filtre adaptat.

Observeu que la resposta global està formada per tres coeficients, $L = 3$, fet que vol dir que la memòria és $L - 1 = 2$. Aquesta informació pot veure's si calculem el senyal a la sortida del filtre adaptat en funció dels símbols a l'entrada i de la resposta impulsional global:

$$z[n] = c[0] \cdot a_n + c[1] \cdot a_{n-1} + c[2] \cdot a_{n-2} \quad (29)$$

Com es pot veure, la sortida a l'instant enèsim depèn del símbol a l'entrada en aquell instant (multiplicat per $c[0]$) més el valor dels dos símbols anteriors. Per tant, la memòria és de 2 símbols. D'aquesta memòria, en la notació de l'algoritme de Viterbi, en direm *estat* i, com es pot observar, aquest estat pot prendre en general M^{L-1} valors (en què M és la dimensió de la constel·lació). En el nostre cas, $M = 2$ i la memòria és també 2; per tant, el nombre d'estats pot ser $2^2 = 4$. Observem que per a un estat (memòria) concret, el senyal a la sortida $z[n]$ pot prendre tants valors com opcions hi hagi per al símbol actual a_n (en el nostre cas 2: $a_n \in \{-1, +1\}$). La taula següent recull totes les opcions per al cas de l'equació (29) (en el nostre cas quatre estats per a dues possibles entrades dona lloc a vuit opcions), i en la tercera columna s'indica la notació que utilitzarem en el diagrama de Trellis:

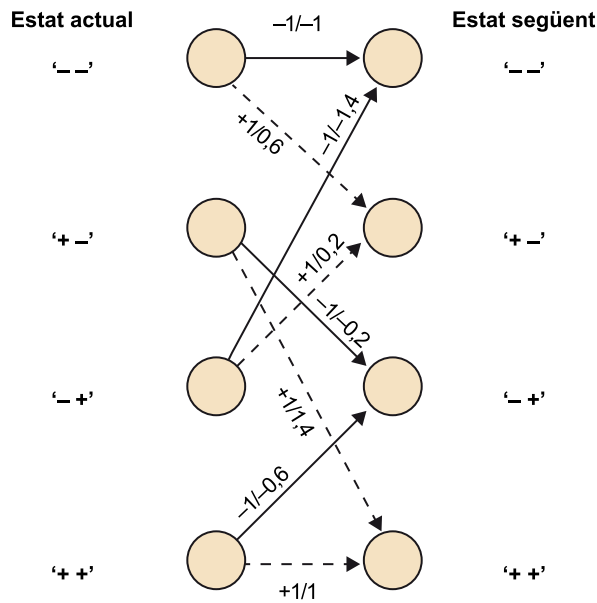
a_{n-1}	a_{n-2}	Notació en el diagrama de Trellis	a_n	$z[n]$
-1	-1	'- -'	-1	-1
			+1	0,6
+1	-1	'+ -'	-1	-0,2
			+1	1,4
-1	+1	'- +'	-1	-1,4
			+1	0,2
+1	+1	'+ +'	-1	-0,6
			+1	1

Tota la informació de la taula anterior es pot recollir en un diagrama, anomenat **diagrama de Trellis**, que contingui els diferents estats i per cada estat el nombre d'opcions que es poden donar de símbol a l'entrada amb la seva sortida $z[n]$ associada. La figura 17 correspon a aquest diagrama de Trellis. Començem a continuació com s'elabora:

- Si l'estat del canal (memòria) és '- -' i el símbol actual és també $a_n = -1$, la sortida serà $z[n] = -0,8 - 0,4 + 0,2 = -1$ i en la iteració següent estarem novament en l'estat '- -'. Tota aquesta informació es resumeix en la primera fletxa del diagrama de Trellis, que, sortint de l'estat '- -', va a l'estat '- -', i sobre la fletxa es posa la informació $a_n/z[n]$; en el nostre cas, veiem -1/-1.
- Si l'estat del canal (memòria) és '- -' i el símbol actual és $a_n = +1$, la sortida serà $z[n] = +0,8 - 0,4 + 0,2 = 0,6$ i en la iteració següent estarem en l'estat '+ -'. Tota aquesta informació es resumeix en la fletxa del diagrama de Trellis que, sortint de l'estat '- -', va a l'estat '+ -', i sobre la fletxa es posa la informació $a_n/z[n]$; en el nostre cas, veiem +1/0,6.
- Si l'estat del canal (memòria) és '+ -' i el símbol actual és $a_n = -1$, la sortida serà $z[n] = -0,8 + 0,4 + 0,2 = -0,2$ i en la iteració següent estarem en l'estat '- +'. Tota aquesta informació es resumeix en la fletxa del diagrama de Trellis, que, sortint de l'estat '+ -', va a l'estat '- +', i sobre la fletxa es posa la informació $a_n/z[n]$; en el nostre cas, veiem -1/-0,2.
- Si l'estat del canal (memòria) és '+ -' i el símbol actual és $a_n = +1$, la sortida serà $z[n] = +0,8 + 0,4 + 0,2 = 1,4$ i en la iteració següent estarem en l'estat '+ +'. Tota aquesta informació es resumeix en la fletxa del diagrama de Trellis, que, sortint de l'estat '+ -', va a l'estat '+ +', i sobre la fletxa es posa la informació $a_n/z[n]$; en el nostre cas, veiem +1/1,4.

- La resta del diagrama s’elabora de la mateixa manera (deixem que el reviseu vosaltres perquè pugueu comprovar que heu entès el procediment).

Figura 17. Exemple de diagrama de Trellis



Símbols $a_n \in \{-1, +1\}$, canal $c_0 = +0,8$, $c_1 = +0,4$, $c_2 = -0,2$. La línia contínua denota que el símbol transmès és un +1, i la discontinua, que el símbol transmès és un -1.

Un cop tenim el diagrama de Trellis, estem en condicions d'utilitzar l'algoritme de Viterbi per a trobar la seqüència de símbols transmesos a partir d'una seqüència rebuda. Una clau important per a l'estimació és que coneixem l'estat inicial del canal, és a dir, el valor dels símbols a_{-1} i a_{-2} . Per a resoldre aquest punt es pot assumir que abans d'iniciar la transmissió de símbols d'informació el transmissor envia dos símbols coneguts, per exemple $a_{-1} = -1$ i $a_{-2} = -1$ (qualsevol altra opció seria igual de vàlida), de manera que sabem que l'estat inicial del canal és '- -'.

Reflexió

També podríem considerar que la memòria del canal és buida (no s'ha enviat res), fet que voldria dir $a_{-1} = 0$ i $a_{-2} = 0$. Aquest cas, però, implicaria alguna petita modificació en els $L - 1$ primers passos del Viterbi, i per tant no la considerem, per no complicar l'explicació inicial.

Suposem que la seqüència rebuda és $z[n] = \{+0,7, +1,2, -0,5, +0,1, -0,3, +0,6\}$. Per a poder seguir l'algoritme, donem com a informació addicional que aquesta seqüència correspon a la seqüència de símbols transmesa $a_n = \{+1, +1, -1, +1, -1, +1\}$ corrompuda pel soroll AWGN del canal (la seqüència sense soroll hauria de ser $\{+0,6, +1,4, -0,6, +0,2, -0,2, +0,2\}$). Observeu, però, que tota aquesta informació addicional no està disponible en el receptor que només veu $z[n]$.

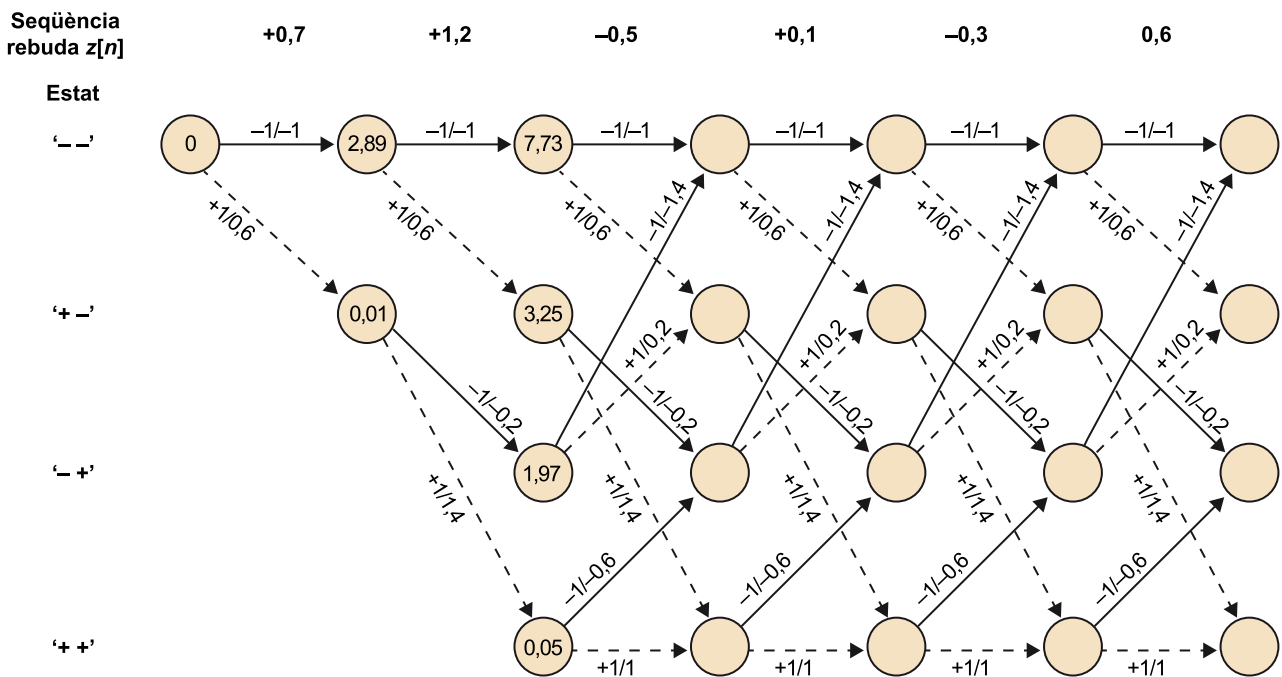
Les primeres etapes de l'algoritme, comentades a continuació, es mostren en la figura 18. Per començar amb el procés de estimació de la seqüència, veiem que des de l'estat inicial '- -' podem arribar als estats '- -' o '+ -' (depenent del valor que hagi pres a_0). En el primer cas, el senyal a la sortida del canal hauria de ser -1, i en el segon cas hauria de ser 0,6. Com veiem, el que hem rebut, $z[0] = +0,7$ no coincideix amb el que hauríem d'haver rebut, ni en un cas ni en l'altre, a causa del soroll. En tots dos casos hi ha una certa diferència. Per continuar amb el procediment d'estimació, calculem la distància euclídia entre el que hem rebut i cadascuna de les dues opcions tal com s'indica en

l'equació (28) i anotem el valor de les dues distàncies en els espais corresponents (que anomenarem *nodes*). Així, observem que $d_{Euclídia}(0,7; -1) = 2,89$ i $d_{Euclídia}(0,7; 0,6) = 0,01$.

En la segona etapa, atès que estem intentant avaluar totes les possibles seqüències transmeses, comencem a concatenar hipòtesis. Així, si partim de l'estat '- -', que succeeix si a_0 ha estat $a_0 = -1$, podem arribar als estats '- -' o '+ -' (dependent del valor que hagi pres a_1), i si partim de l'estat '+ -', que succeeix si a_0 ha estat $a_0 = +1$, podem arribar als estats '- +' o '+ +' (novament dependent del valor que hagi pres a_1). Observem que amb aquestes quatre hipòtesis ja podem haver assolit qualsevol dels quatre estats del codificador, que correspondrien a les quatre possibles maneres d'iniciar la seqüència transmesa considerant totes les opcions per a a_0 i a_1 .

Ara procedim a retolar cada node en funció de la distància euclídia. Primerament, calculem les quatre distàncies euclídies entre el que hem rebut, $z[1] = +1,2$, i el que hauríem d'haver rebut en cada cas. Un cop calculades, el valor que anotem en el node no és el valor de la distància euclídia, sinó l'acumulat de la distància des del l'estat inicial. Així, en el primer cas, si $d_{Euclídia}(1,2; -1) = 4,84$ el que anotem és $7,73 = 4,84 + 2,89$, en què $2,89$ és la mètrica acumulada fins al node anterior.

Figura 18. Dues primeres etapes de l'algoritme de Viterbi



Anàlogament, podem calcular la resta de distàncies. Aquesta manera de procedir és una implementació directa de l'equació (28), que com podem veure ens diu que hem de calcular el sumatori sobre l de totes les distàncies euclídies (ara som al pas $l = 2$) per a totes les seqüències transmeses possibles, fins ara quatre possibles valors, ja que només hem fet hipòtesis sobre a_0 i a_1 . Així, els

quatre valors que hi ha en els quatre nodes corresponents en la darrera iteració s'obtenen a partir de cadascuna de les quatre opcions per a a_0 i a_1 segons l'equació (30):

$$E = (\mathcal{Z}[0] - (c_0 a_0 + c_1 a_{-1} + c_2 a_{-2}))^2 + (\mathcal{Z}[1] - (c_0 a_1 + c_1 a_0 + c_2 a_{-1}))^2 \quad (30)$$

En aquest punt, quan ja hem assolit tots els possibles estats, és on comença l'algoritme de Viterbi pròpiament dit. Observem que si seguim procedint com fins ara, en la iteració següent tindríem vuit valors possibles de distància acumulada corresponents a les vuit opcions per a a_0 , a_1 i a_2 ; seguidament tindríem 16, 32, 64... És precisament aquest creixement exponencial el que volem evitar amb l'algoritme de Viterbi. L'algoritme de Viterbi proposa que a partir dels quatre estats presents es calculin les vuit distàncies euclídiades i que, d'entre les possibles opcions, només s'agafin les que tenen menor distància acumulada i es descartin les altres. Vegem-ho en el nostre exemple i tornem després a interpretar el que hem fet. La figura 19 il·lustra aquesta tercera etapa.

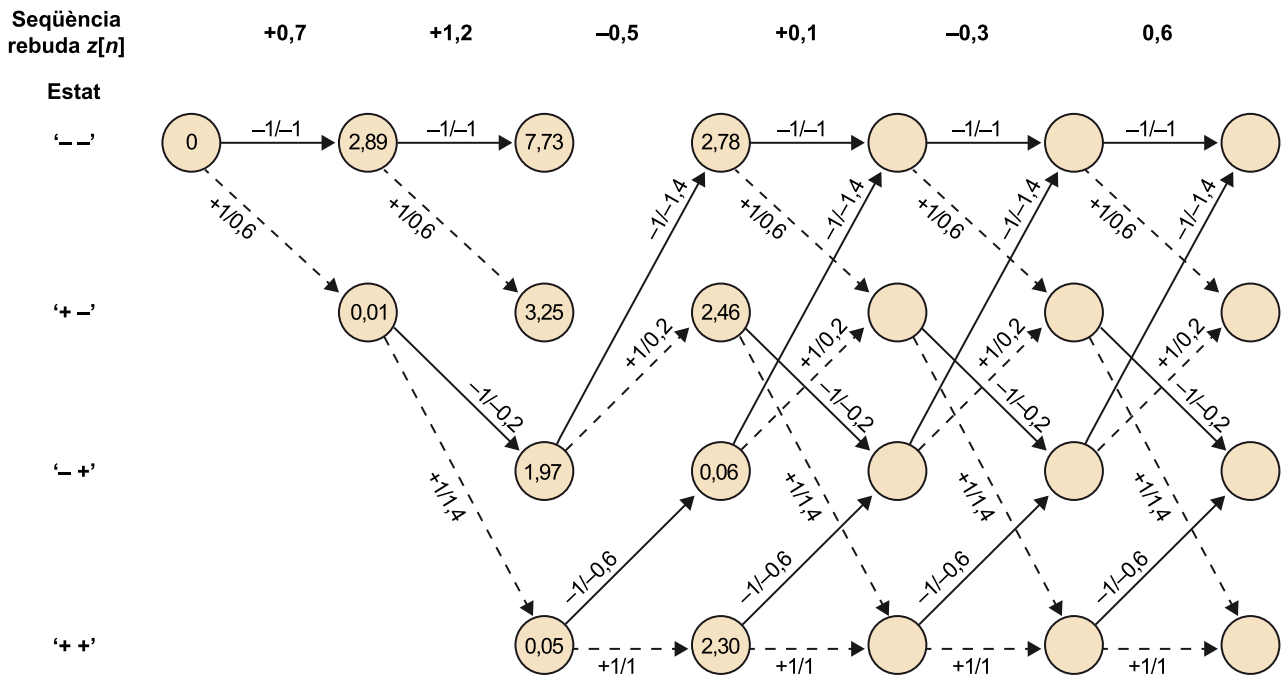
Podem arribar a l'estat '- -' en la tercera etapa a partir dels estats '- -' o '- +' en l'etapa prèvia:

- Si hi arribem des de l'estat '- -', el senyal a la sortida del canal hauria de ser -1; així, procedim a calcular la distància euclídia acumulada per aquest camí: $7,73 + d_{Euclídia}(-0,5; -1) = 7,98$.
- Anàlogament, si hi arribem des de l'estat '- +', el senyal a la sortida del canal hauria de ser -1,4; calculem igualment la distància euclídia acumulada seguint aquest segon camí: $1,97 + d_{Euclídia}(-0,5; -1,4) = 2,78$.

Observem, doncs, que si seguim el primer camí (camí que suposaria que $a_0 = -1$, $a_1 = -1$ i $a_2 = -1$), tindríem una distància euclídia acumulada de 7,98; mentre que si seguim el segon camí (camí que suposaria: $a_0 = +1$, $a_1 = -1$ i $a_2 = -1$), tindríem una distància euclídia acumulada molt més petita. És el moment, doncs, de descartar el primer camí i mantenir la hipòtesi que la seqüència transmesa és més probable que sigui la corresponent al segon camí. Com a resultat final ens quedem amb la branca procedent de l'estat '- +', i retolem el node amb la distància euclídia acumulada per aquest camí, és a dir: 2,78.

Fem la mateixa operació amb la resta d'estats de la tercera etapa amb la mateixa idea al pensament: dels dos possibles camins d'arribada a un estat, solament hem de considerar el que presenti una distància acumulada més petita, i descartar l'altre. El resultat final després d'efectuar totes aquestes operacions per a l'etapa tres es mostra en la figura 19, en què s'han eliminat les fletxes procedents dels nodes que han estat descartats.

Figura 19. Tercera etapa de l'algoritme de Viterbi



La idea bàsica de l'esquema de Viterbi és que, per a un estat en l'etapa l al qual es pot arribar des de dos estats (en un cas genèric en serien M) de l'etapa anterior ($l - 1$), hem de considerar únicament el camí que presenta la distància més petita. La demostració que aquest procediment és òptim no és evident, però se'n poden trobar els detalls en un article clàssic (Viterbi, 1967) i en alguns textos avançats de comunicacions.

Activitat

Us proposem que verifiqueu els detalls de com es van obtenint els estats en les diverses etapes de l'algoritme de Viterbi.

Tot i que la probabilitat que succeeixi és molt baixa, en alguns casos (en concret, quan es treballa amb dades quantificades) podria ocórrer que dues branques que arriben a un node ho fessin amb el mateix valor de distància acumulada. En aquest cas, l'algoritme de Viterbi permet triar arbitràriament qualsevol de les dues branques. En efecte, és possible demostrar que no hi ha manera de solucionar aquest tipus d'ambigüitats, fet pel qual les dues solucions són equivalents (igual de bones o dolentes).

En les figures 20 a 22 es mostren les etapes successives que es van obtenint en aplicar l'algoritme en les etapes 4, 5, i 6, respectivament. Es presenten de manera individual perquè pugueu comprovar que heu entès el procediment.

Figura 20. Quarta etapa de l'algoritme de Viterbi

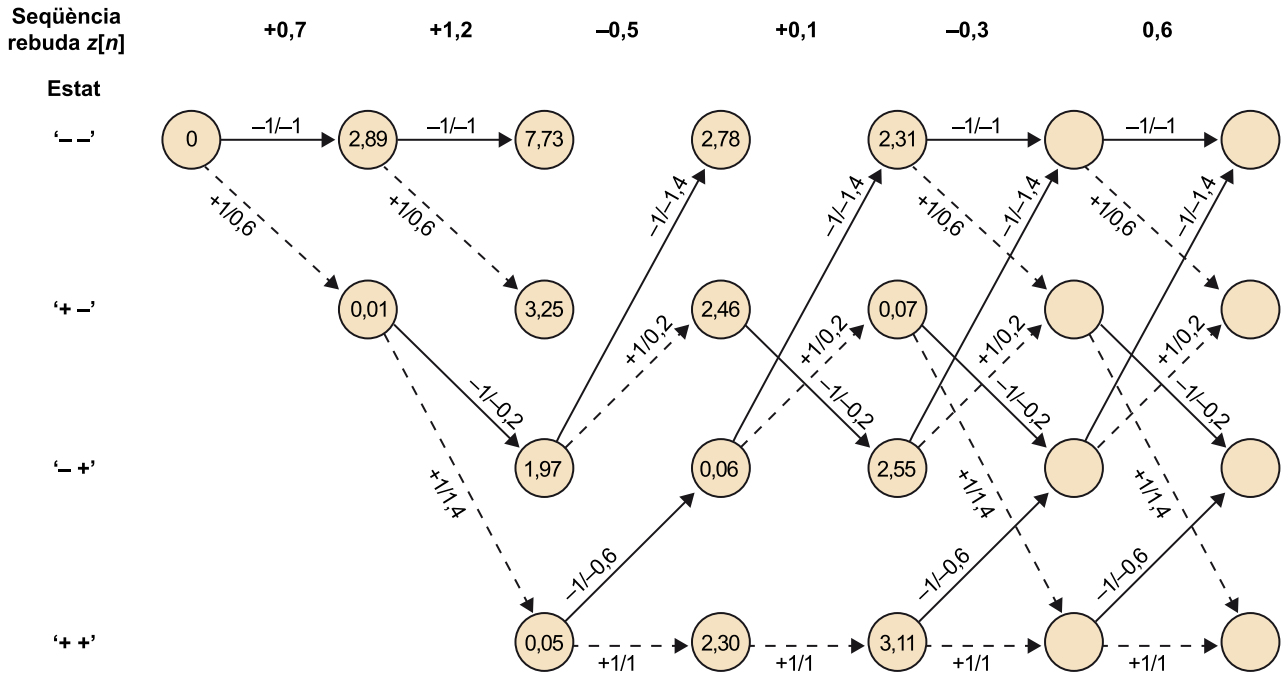


Figura 21. Cinquena etapa de l'algoritme de Viterbi

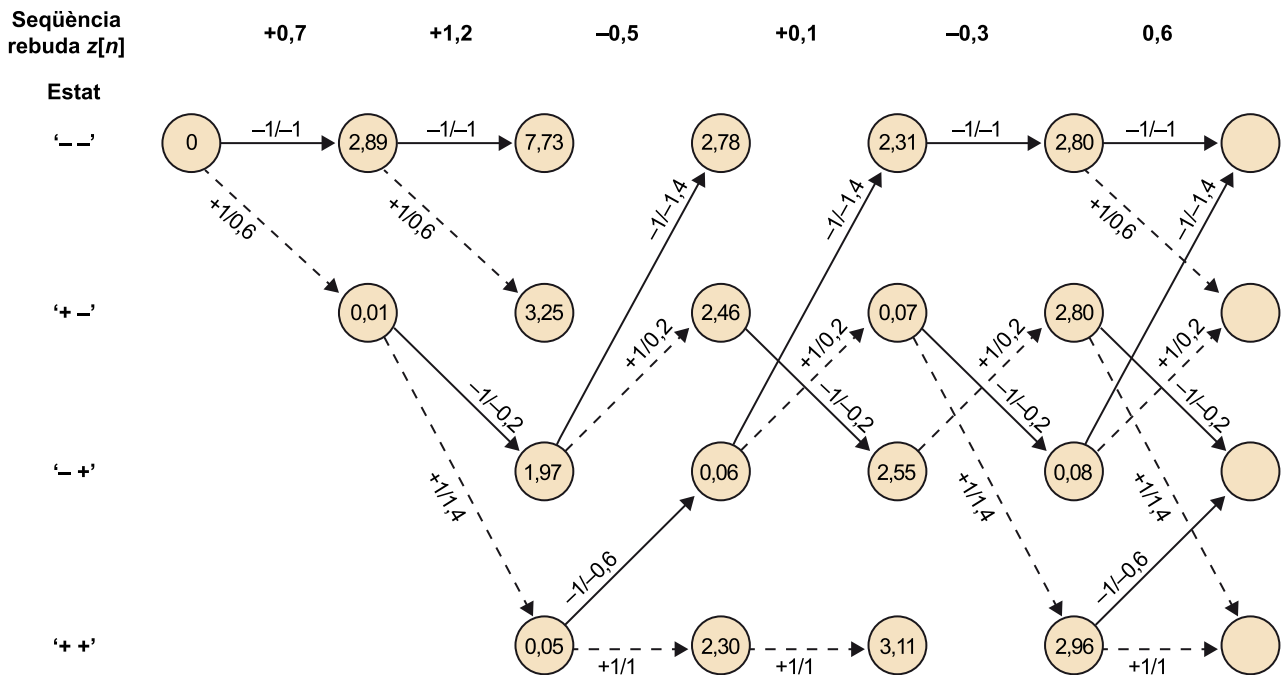
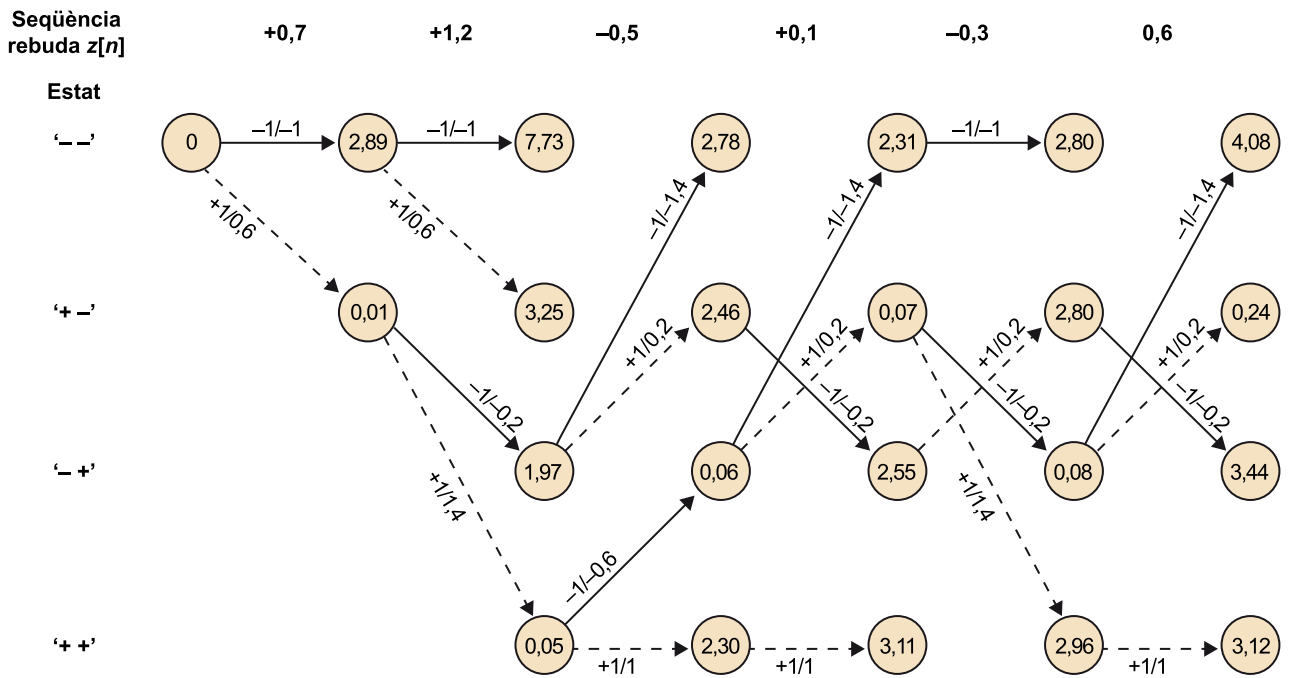
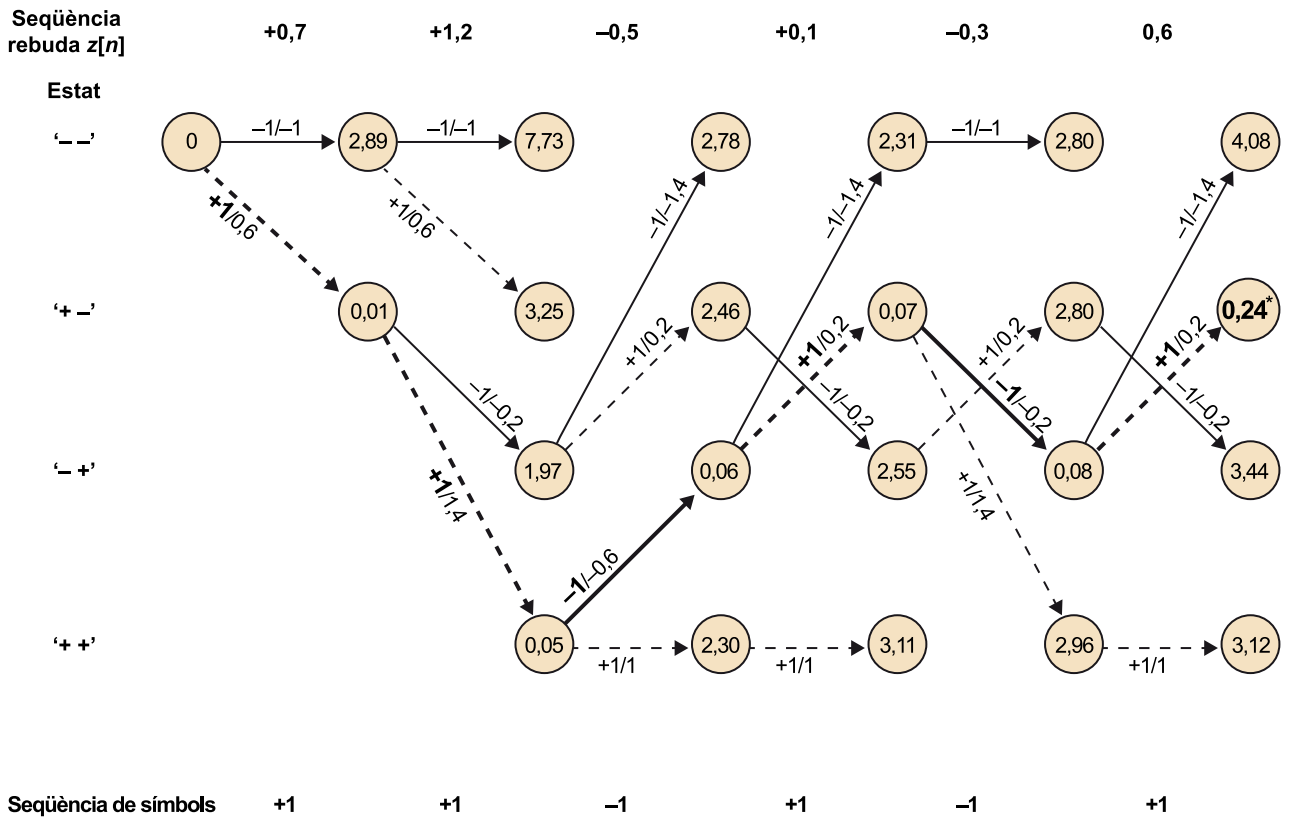


Figura 22. Sisena (i última) etapa de l'algoritme de Viterbi



Un cop s'arriba al final de la seqüència de dades rebudes, és el moment de prendre decisions sobre quina és la seqüència de símbols que s'ha transmès.

Figura 23. Decisió del camí i de la seqüència de símbols transmesa amb l'algoritme de Viterbi.



* Mínima distància euclídia acumulada.

Fixeu-vos que, tot i que en algun moment pot semblar evident quins han estat els primers símbols transmesos després d'haver avançat algunes etapes, no és fins al final de la seqüència que s'inicia el procés de decisió de la seqüència transmesa. La manera de procedir és ben senzilla: s'identifica el node de l'etapa final amb una distància euclídia acumulada més petita i es pren el camí que arriba al node com el camí "guanyador". Així, des del final es va desfent el camí fins a arribar a l'estat inicial, i un cop identificat el camí, s'identifica la seqüència de símbols a associada a aquest camí.

Reflexió

En aquest exemple d'implementació de l'algoritme de Viterbi sempre hem considerat la minimització de la distància euclídia com a paràmetre o mètrica per a fer l'optimització. Per aquesta raó, en cada etapa de l'algoritme de Viterbi hem calculat la distància euclídia entre les dades rebudes i cadascuna de les opcions que s'haurien pogut rebre, i hem anotat en els nodes els valors de les distàncies euclídies acumulades. En general, però, en la implementació de l'algoritme de Viterbi es pot treballar amb altres mètriques. Observem, per exemple, que si en l'equació (27) no haguéssim pres el logaritme de la funció de versemblança que ens ha donat lloc al problema d'optimització (28), també hauríem pogut resoldre el problema buscant la seqüència de símbols transmesa que hauria maximitzat la funció de versemblança de l'equació (27). En aquest cas, la mètrica que hauríem hagut de calcular a cada pas hauria estat la (31), i la mètrica acumulada s'hauria obtingut com el productori de mètriques, en lloc del sumatori com hem fet en l'exemple anterior (fórmula (32)):

$$\Lambda(\mathbf{z}[l] | a_l \dots a_{L-(L+1)}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_z^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_z^2} \left[\mathbf{z}[l] - \sum_{k=0}^{L-1} c_k a_{L-k} \right]^2 \right\} \quad (31)$$

$$p(\mathbf{z}[l] \dots \mathbf{z}[1] | a_l \dots a_1) = \prod_{l=1}^l \Lambda(\mathbf{z}[l] | a_l \dots a_{L-(L+1)}) \quad (32)$$

Observeu que quan arribem a l'última etapa $l = K$, l'expressió acumulada anterior coincidirà amb la funció de versemblança de l'equació (27). Un últim aspecte que hauríem de tenir en compte amb aquesta mètrica és que en aquest cas buscaríem la maximització (i no la minimització, com hem fet en l'exemple), i per tant, en cada etapa hauríem de mantenir el camí amb la mètrica màxima, i al final no seleccionar com a "guanyador" el camí amb distància mínima, sinó amb mètrica màxima.

Resumint, doncs, l'algorítmica presentada amb l'exemple anterior descriu la manera de procedir amb l'algoritme de Viterbi, que bàsicament es redueix a avaluar en cada etapa una mètrica que pot variar en funció de l'aplicació (distància euclídia, funció de versemblança, distància de Hamming, etc.), una mètrica acumulada i una selecció de camins que minimitza o maximitza (segons el cas) aquesta mètrica.

3.2.1. Inconvenients de l'algoritme de Viterbi

Tot i que l'algoritme de Viterbi és àmpliament utilitzat i en molts casos no disposa d'alternativa pràctica per a resoldre determinats problemes, podem trobar-hi alguns inconvenients que esmentem a continuació:

1) **Latència elevada.** El primer inconvenient que presenta és l'elevada latència que l'algoritme introdueix en el senyal. Com hem vist en l'exemple, fins que no es reben les K mostres (que corresponen a la seqüència completa) no s'inicia

el procés de decisió per a seleccionar la seqüència que s'ha transmès. Això introdueix un retard elevat en la comunicació, que en la majoria de casos és inacceptable (imaginem la transmissió contínua d'una conversa de veu), i quan és acceptable, implica la necessitat de disposar de molta memòria per a poder emmagatzemar tota la informació de totes les mètriques acumulades en cadascuna de les etapes: en total $K \cdot M^{L-1}$ (imaginem la transmissió d'un senyal de veu en què K seria el nombre de mostres del senyal de veu).

Com a alternativa a aquest problema, es proposa no esperar a l'última etapa per a decidir sobre el primer símbol enviat. Aquesta modificació sobre l'algoritme de Viterbi original fixa una certa longitud Q de manera que després de Q etapes es passa a decidir sobre el primer símbol transmès de la mateixa manera que es descriu en la figura 23. És important remarcar que només es decideix sobre el primer símbol, de manera que en l'etapa $Q + 1$ es decidirà sobre el segon, en la $Q + 2$ sobre el tercer, i així successivament.

Com veieu, aquesta solució fixa una "finestra lliscant" al llarg del temps amb què la latència queda reduïda al temps necessari per a rebre Q mostres i la memòria de l'algoritme també queda fixada a $Q \cdot M^{L-1}$, independentment del nombre total de símbols que es transmeten. Els valors típics de Q es determinen en funció de L i acostumen a ser de l'ordre de $Q = 6, 7$ o 9 vegades L . Com podeu imaginar, després d'aquest temps el valor del primer símbol està gairebé determinat. Ara bé, aquesta modificació de l'algoritme de Viterbi fa que deixi de ser òptim, ja que no respon fidelment a la finalitat de trobar la seqüència de màxima versemblança. Malgrat això, per a valors de Q grans, la diferència en termes de probabilitat d'error respecte de la solució òptima baixa (més petita, com més gran sigui la Q), i augmenta el benefici pel que fa a reducció de latència i memòria.

2) Complexitat d'implementació per a canals amb molta memòria. Tot i que l'algoritme de Viterbi redueix la complexitat en resultar aquesta insensible a la longitud de la seqüència transmesa K , hi continua havent el problema que la complexitat de l'algoritme creix exponencialment amb la memòria del canal $L - 1$ (recordeu que el nombre d'estats depèn de L) i del nombre de bits per símbol. Per tant, un equalitzador no lineal basat en aquest esquema només serà pràctic quan la constel·lació sigui reduïda i la memòria del canal sigui petita (L petita). Quan aquestes condicions no es compleixin, s'haurà de recórrer o bé als equalitzadors lineals o bé a altres opcions, com per exemple la que es presenta a continuació.

3.3. Equalitzador no lineal. Equalitzador amb realimentació de decisions (DFE)

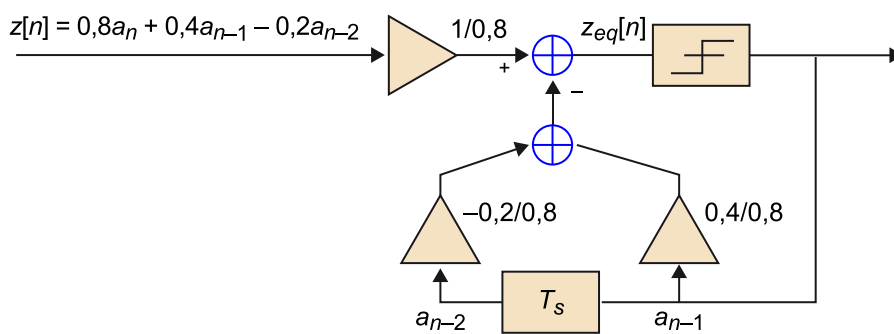
Una altre equalitzador adaptatiu no lineal que es pot plantejar com a alternativa entre l'equalitzador òptim basat en MLSE (de gran complexitat) i l'equalitzador lineal (amb prestacions menors) és l'equalitzador amb realimen-

tació de decisions (DFE, de l'anglès: *decision feedback equalizer*). No és l'objectiu d'aquest mòdul treballar aquest tipus d'equalitzador, i per tant, només hi dediquem una breu ressenya dins de l'apartat d'equalitzadors no lineals a fi de poder-lo deixar ben classificat com a solució entre l'equalitzador lineal i l'MLSE.

L'equalitzador DFE explota el fet que els símbols anteriors a un instant donat són els que principalment contribueixen al terme d'ISI (només en casos de canals no causals també els símbols futurs provoquen ISI). Per tant, si a partir de les decisions dels símbols anteriors es té coneixement de quins han estat aquests símbols, i alhora es coneix la resposta impulsional global $c(t)$, es pot regenerar (parcialment) el terme d'ISI i eliminar-lo del senyal abans de prendre la nova decisió (que idealment ja estaria lliure d'ISI).

De manera molt intuïtiva, intentem resumir la idea en l'exemple següent, que parteix del mateix canal (causal) emprat anteriorment, en què assumim un cop més que no hi ha soroll per a il·lustrar la idea:

Figura 24. Exemple d'un equalitzador DFE per al canal $c_0 = +0,8$, $c_1 = +0,4$, $c_2 = -0,2$

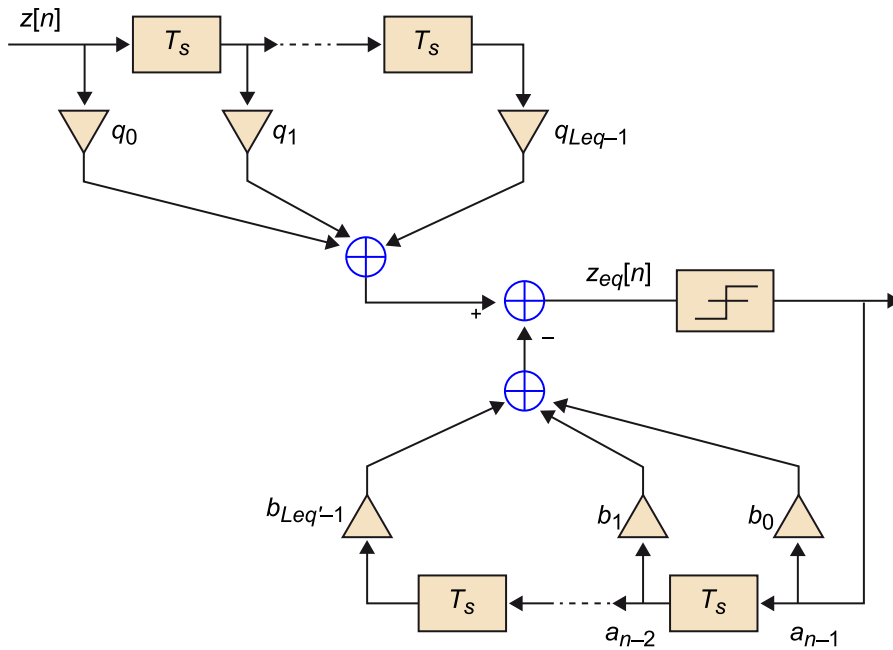


L'equalitzador és no lineal perquè la funció de decisió que decideix sobre els símbols anteriors (entre un conjunt de nivells discrets) és no lineal. Un cop s'ha decidit el símbol, una estructura de filtre lineal amb realimentació pot calcular l'efecte de l'ISI tal com mostra la figura 24. Igual que en el cas de l'equalitzador dirigit per decisions (DD), aquest equalitzador només és factible quan la probabilitat d'error és baixa, ja que en cas contrari, si les decisions són dolentes, en lloc de reduir el terme d'ISI, en intentar eliminar-lo, el que fariem seria introduir més error.

La figura 25 mostra un esquema general de l'equalitzador DFE en què es poden veure dues estructures lineals: la inferior, amb coeficients $b_0, \dots, b_{L_{eq}-1}$, té com a entrada les decisions anteriors, i per tant treballa en mode realimentat (en anglès s'anomena *feedback filter*); i la superior, amb coeficients $q_0, \dots, q_{L_{eq}-1}$ que té com a entrada la sortida del filtre adaptat, i per tant actua de la mateixa manera que els filtres lineals vistos anteriorment (en anglès s'anomena *feedforward filter*). En el cas de canals causals i sense tenir en compte el soroll, només seria necessari el filtre realimentat per a eliminar l'ISI, tal com s'ha il·lustrat en l'exemple de la figura 24. Ara bé, si el canal és no causal (no tota

l'ISI és deguda a símbols anteriors), i/o en presència de soroll, el filtre lineal superior és necessari per a reduir l'emfatització de soroll (mateix fenomen que s'havia observat per a l'equalitzador forçador de zeros).

Figura 25. Esquema d'un equalitzador DFE



Com en el cas de l'equalitzador lineal, segons el criteri que es segueixi per a trobar els coeficients de l'equalitzador, podríem estar davant un criteri forçador de zeros o un criteri MMSE. Així mateix, també es podria implementar l'equalitzador DFE adaptatiu si el criteri de disseny dels coeficients es fa mitjançant un algoritme d'aquest tipus. Com ja s'ha comentat, no és l'objectiu d'aquest mòdul entrar en més detalls sobre el disseny dels coeficients d'aquest equalitzador, i per tant deixem en aquest punt la presentació de l'equalitzador DFE.

Resum

En aquest mòdul hem estudiat el problema de l'equalització de canal tot proposant i comparant diversos tipus d'equalitzadors. Com ja s'ha discutit en un altre mòdul i s'ha remarcat a l'inici d'aquest, l'equalització de canal s'aplica en els casos en què el canal és dispersiu en el temps i la seva resposta impulsional varia de manera prou lenta per a poder identificar el canal (o la correlació del senyal a la sortida del filtre adaptat) en una primera fase i utilitzar el resultat d'aquesta identificació en una segona fase per a dissenyar l'equalitzador i processar les dades rebudes. Si el canal varia excessivament ràpid, el disseny de l'equalitzador sempre estarà desadaptat al canal real, ja que en l'interval de temps entre la fase d'identificació i la d'aplicació de l'equalitzador, el canal haurà variat massa i l'equalitzador no complirà la seva funció.

Per als casos en què el canal no varia, o ho fa de manera molt lenta per a considerar-lo constant per a un bloc de dades prou llarg, s'han presentat en el mòdul l'equalitzador forçador de zeros (ZF), l'equalitzador de mínim error quadràtic mitjà (MMSE) i l'estimador de màxima versemblança (MLSE). Per als casos en què el canal varia a una velocitat prou raonable per a poder seguir-ne les variacions, s'han presentat els equalitzadors adaptatius, i en concret l'equalitzador LMS.

A partir de la classificació dels equalitzadors que hem fet en el primer apartat, s'ha vist que aquests poden dividir-se en lineals i no lineals. La solució òptima correspon a un equalitzador no lineal que té per objectiu trobar la seqüència més versemblant a partir d'una seqüència de dades rebudes. Aquest equalitzador, presentat en l'últim apartat, correspon a l'equalitzador de màxima versemblança (MLSE). Malauradament, aquest equalitzador òptim presenta una complexitat que en alguns casos resulta inabordable malgrat que utilitza l'algoritme de Viterbi per a l'estimació de la seqüència més versemblant. També hem après el funcionament de l'algoritme de Viterbi a partir d'un exemple senzill.

Quan l'objectiu és dissenyar equalitzadors que no siguin excessivament complexos, sovint es recorre a equalitzadors lineals, molt més senzills d'implementar tot i que amb pitjors prestacions. El primer equalitzador que s'ha presentat ha estat l'equalitzador ZF. Aquest equalitzador és molt fàcil de dissenyar conceptualment, tot i que es restringeix a escenaris d'alta SNR, ja que en no haver estat dissenyat tenint en compte el terme de soroll, presenta el greu problema que amplifica el soroll a la sortida. Com a alternativa a l'equalitzador ZF s'ha introduït l'equalitzador MMSE, que resol els problemes

del forçador de zeros ja que té en compte el terme de soroll en el disseny. Com s'ha dit (i es proposa avaluar en un exercici), aquest equalitzador tendeix a la solució del forçador de zeros en absència de soroll.

Com a exemple d'algoritme adaptatiu s'ha presentat amb detall l'equalitzador LMS, que tot i que correspon al més senzill dels equalitzadors adaptatius, les prestacions són prou bones per a utilitzar-se en molts problemes reals. Aquest equalitzador, capaç de seguir les variacions del canal, només presenta el problema que el temps de convergència és llarg.

Per a completar el mòdul d'equalització s'han introduït sense gaire detall altres equalitzadors que s'utilitzen de manera comuna. Així, hem esmentat l'equalitzador basat en l'algoritme RLS i l'equalitzador basat en el filtre de Kalman, com a altres exemples d'equalitzadors adaptatius; i l'equalitzador DFE com un altre exemple d'equalitzador no lineal. Com podeu intuir, la llista d'equalitzadors no acaba en els que s'han presentat en el mòdul, si bé s'ha intentat incloure els més habituals.

No s'ha fet cap esment a altres estratègies per a lluitar contra el canal, com pot ser la precodificació de les dades en transmissió, que pot dur-se a terme quan el transmissor té coneixement de la resposta del canal. Aquests tipus de solucions requereixen que el receptor estimi i informi el transmissor (a través d'un canal de retorn) del canal que veuran les dades. El resultat són solucions que, ben dissenyades, fan un ús més eficient de la potència, ja que permeten que el transmissor conformi la forma d'ona del senyal perquè arribi al receptor en condicions òptimes.

Contràriament al que es podria pensar *a priori*, aquests esquemes no reforcen amb més potència les freqüències en les quals el canal presenta més atenuació, sinó que les tècniques òptimes de precodificació treballen en sentit contrari. La manera òptima de repartir la potència és fer-ho de manera que no s'injecti senyal en les freqüències en què el canal presenta fortes atenuacions (seria malgastar el recurs potència), i a canvi es destini aquesta potència a reforçar el senyal en les freqüències en què el canal és més benigne traient més profit de la potència.

Per acabar el mòdul, us recomanem que torneu a revisar la llista d'objectius per veure si s'han assolit, i feu les activitats que hi ha a continuació per a practicar els conceptes presentats al llarg del mòdul.

Activitats

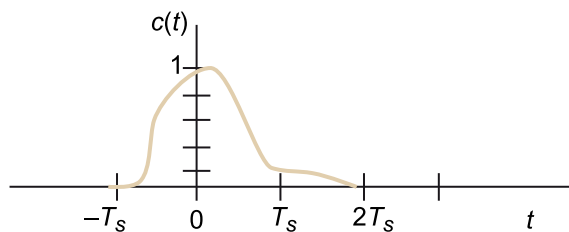
1. Sigui un sistema de comunicacions en què el pols conformador $p(t)$ és un pols rectangular de durada T_s segons.

a) Indiqueu quina serà la resposta impulsional global $c(t)$ i la seva versió mostrejada a temps de símbol $c[n]$ en cas que el canal sigui ideal (assumiu que el sistema comença a mostrear en $t = 0$).

b) Repetiu l'apartat anterior suposant que el canal té una resposta impulsional $h(t) = \delta(t) + 0,2 \cdot \delta(t - T_s)$.

2. El senyal de la figura 26 correspon a la resposta impulsional global $c(t)$ d'un sistema de comunicacions en presència de canal no ideal. Si el receptor comença a mostrear en $t = 0$, trobeu la resposta impulsional discreta $c[n]$ i dibuixeu la constel·lació que hi hauria a l'entrada de l'equalitzador en absència de soroll si els símbols transmesos corresponen a una QPSK de potència unitat.

Figura 26



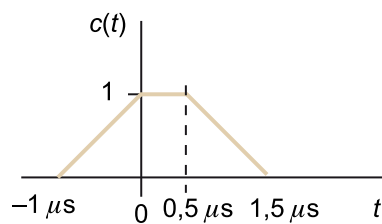
3. La figura 27 representa la resposta impulsional global d'un sistema digital a la sortida del filtre adaptat. Si la velocitat de transmissió és de $r_s = 10^6$ símbols per segon:

a) Calculeu la potència d'ISI (utilitzeu la fórmula (33)) si el senyal es comença a mostrear en $t = 0$.

$$P_{ISI} = \sum_{n \neq 0} |c_n|^2 \quad (33)$$

b) Determineu quin hauria de ser l'instant en què s'hauria d'iniciar el mostratge per a minimitzar la potència d'ISI (utilitzeu novament la fórmula (33)).

Figura 27



4. En un sistema de comunicacions amb canal no ideal es mesura la resposta impulsional global $c[n] = \delta(n) + \delta(n - 1)$.

a) Dibuixeu el mòdul de la resposta en freqüència d'un filtre equalitzador ZF ideal si sabem que la resposta global del canal és $C(F) = 2 \cdot \cos(\pi F)e^{-jnF}$.

b) Dissenyu l'equalitzador ZF de tres coeficients considerant que no es permet cap retard en el senyal a la sortida.

c) Per a aquest equalitzador ZF, trobeu el valor de l'ISI residual.

d) Per al mateix equalitzador ZF, si el soroll a l'entrada té una variància σ_w^2 , trobeu el factor d'amplificació del soroll a la sortida de l'equalitzador.

5. Per a un sistema amb resposta impulsional global $c[n]$ definit pels coeficients següents:

$$\begin{aligned}d[0] &= +0,8 \\d[1] &= +0,4 \\d[2] &= -0,2 \\d[n] &= 0 \quad n \neq 0, 1, 2\end{aligned}$$

a) Trobeu l'equalitzador ZF de quatre coeficients, si no es permet cap retard a la sortida de l'equalitzador (és a dir, forcem que l'1 estigui a la primera posició).

b) Repetiu el disseny, si ara es permeten retards de $d = 1$, $d = 2$ i $d = 3$ (dissenyu en total tres equalitzadors ZF diferents).

c) Per a cadascun dels quatre equalitzadors obtinguts entre els apartats a i b, trobeu la potència d'ISI residual (utilitzeu la fórmula (33)) i la potència de soroll, si el soroll a l'entrada té una variància $\sigma_w^2 = 1$.

d) Tenint en compte que la mesura final que ens condicionarà la probabilitat d'error serà el quocient entre potència de senyal i potència de soroll més ISI, $SINR = \frac{P_{Senyal}}{P_{Soroll} + P_{ISI}}$, indiqueu quin dels quatre equalitzadors és més apropiat.

6. Verifiqueu el càlcul de la matriu \mathbf{R}_{zz} i del vector \mathbf{R}_{za} per al cas 1: "Resposta impulsional global $c[n]$ coneguda" de l'equalitzador MMSE (subapartat 2.2.1 d'aquest mòdul didàctic).

7. Dissenyu el filtre equalitzador MMSE de vuit coeficients d'un sistema que té la resposta impulsional global $c[n]$ que s'indica en l'exercici d'autoavaluació 5 i confirmeu que en absència de soroll la solució és la mateixa que l'obtinguda per al cas de l'equalitzador ZF obtingut en l'exemple del subapartat 2.1. Utilitzeu algun tipus de suport informàtic per a trobar la solució.

8. Donat un sistema de comunicacions amb canal no ideal, quan s'envia la seqüència coneguda $a_n = \{+1, +1, -1, -1, +1\}$, s'obté, després de mostrejar la sortida del filtre adaptat, la seqüència $z[n] = \{+0,9; +1,1; -0,7; -1,1; +0,7; +0,2\}$. Calculeu les primeres iteracions d'un equalitzador adaptatiu basat en LMS, si el pas d'adaptació és $\mu = 0,1$ i l'algoritme s'inicialitza amb el vector \mathbf{q}^0 següent:

$$\mathbf{q}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

9. Verifiqueu l'algoritme de Viterbi de les figures 20 a 22.

10. Donat un sistema de comunicacions amb canal no ideal, quan s'envia la seqüència coneguda $a_n = \{+1, +1, -1, -1, +1\}$, s'obté, després de mostrejar la sortida del filtre adaptat, la seqüència $z[n] = \{+0,59; +1,21; -0,71; -1,36; +0,79\}$. Si sabem que la resposta impulsional global és $c[n] = 0,9 \cdot \delta(n) + 0,3 \cdot \delta(n-1) - 0,1 \cdot \delta(n-2)$, i que el transmissor envia els símbols $a_{-1} = -1$ i $a_{-2} = -1$ abans d'iniciar la transmissió de símbols d'informació amb la finalitat de conèixer l'estat inicial de l'algoritme de Viterbi, trobeu la seqüència transmesa aplicant l'estimador MLSE.

Bibliografia

Bibliografia bàsica

Proakis, J. G.; Salehi, M. (2002). *Communication systems engineering* (2a. ed.). Nova York: Prentice Hall.

Bibliografia complementària

Proakis, J. (2008). *Digital communications* (5a. ed.). Nova York: McGraw-Hill.

Benedetto, S.; Biglieri, E. (1999). *Principles of digital transmission*. Nova York: Kluwer Academic Press / Plenum Publishers.

Sklar, B. (2001). *Digital communications: Fundamentals and applications* (2a.ed.). Upper Saddle River: Prentice Hall.

Haykin, S. O. (2013). *Adaptive filter theory* (5a. ed.). Upper Saddle River: Prentice Hall. [També poden consultar-se versions anteriors].

Articles d'interès

Falconer, D. (2011, octubre). "History of equalization 1860-1980". *IEEE Communications magazine* (vol. 49, núm. 10).

