Comunicaciones con diversidad

Francesc Rey Micolau
Javier Villares Piera

PID_00197111

UOC
Universitat Oberta de Catalunya

Los textos e imágenes publicados en esta obra están sujetos –excepto que se indique lo contrario– a una licencia de Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 España de Creative Commons. Podéis copiarlos, distribuirlos y transmitirlos públicamente siempre que citéis el autor y la fuente (FUOC. Fundación para la Universitat Oberta de Catalunya), no hagáis de ellos un uso comercial y ni obra derivada. La licencia completa se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.es

Índice

Introducción 5

Objetivos 8

1. Motivación 9

2. Diversidad temporal 16

3. Diversidad frecuencial 19

4. Diversidad espacial 26
- 4.1. Conformación de haz 33
- 4.2. Codificación espaciotemporal 34
- 4.3. Multiplexación espacial 37
- 4.4. Antenas inteligentes 40

5. Conclusiones 43

Actividades 45

Bibliografía 49

Introducción

Tal como hemos expuesto en otro módulo, hay casos en los que el canal de comunicaciones atenúa fuertemente la señal y dificulta su recepción. Se habla en este caso de desvanecimientos o *fadings* de la señal. Este fenómeno es muy típico en comunicaciones terrestres inalámbricas por las reflexiones que la señal experimenta en el entorno del transmisor y el receptor. El objetivo de este módulo didáctico es conocer cómo podemos combatir los *fadings* del canal y mejorar la fiabilidad de la comunicación. Como indicamos en el título del módulo, vamos a aprovechar la diversidad del canal para combatir los *fadings* del canal y mejorar la fiabilidad de la comunicación. Así pues, a continuación explicamos qué entendemos por *diversidad* y cómo la podemos utilizar.

Fading en comunicaciones fijas por satélite

Si la onda se propagara en el espacio libre no se producirían *fadings*. Este es el caso de las comunicaciones fijas por satélite.

En el caso de canales variantes en el tiempo, es sabido que los *fadings* del canal duran un tiempo limitado, que coincide con el tiempo de coherencia del canal. Si nos esperamos este tiempo, es probable que el canal no tarde demasiado en salir del *fading* y el nivel de la señal recibida vuelva a ser lo bastante bueno como para recuperar correctamente el mensaje transmitido. Por lo tanto, si transmitimos la misma señal en varios instantes de tiempo suficientemente separados (más que el tiempo de coherencia del canal) y el receptor selecciona (o combina) las diversas copias de la señal recibida, conseguiremos evitar los *fadings* del canal y mejorar así la fiabilidad de la comunicación. Esta estrategia de transmisión se denomina *diversidad en el tiempo* y la vamos a explicar en el apartado 1.

Tal como hemos explicado también, la variabilidad temporal del canal es consecuencia del movimiento del transmisor, del receptor o de los objetos alrededor de los equipos transmisor y receptor. En los casos en los que esta movilidad es muy baja y el canal varía muy lentamente, hay otros mecanismos para lograr diversidad y combatir los *fadings* del canal. La primera opción que vamos a estudiar es la conocida como *diversidad frecuencial*.

Para que haya diversidad frecuencial es necesario que el canal sea dispersivo, es decir, que se reciban varias copias de la misma señal (propagación multicamino o *multipath propagation*) con retardos relativos suficientemente grandes y atenuaciones independientes. Cuando esto ocurre, se dice que el canal es selectivo en frecuencia y entonces las componentes frecuenciales de las señales experimentan *fadings* diferentes, que serán independientes siempre que la separación frecuencial sea mayor que el ancho de banda de coherencia del canal. Por lo tanto, si transmitimos la misma señal utilizando varias frecuencias lo suficientemente separadas (más que el ancho de banda de coherencia del canal) y el receptor selecciona (o combina) las diversas copias de la señal recibida, conseguiremos reducir el impacto de los *fadings* del canal y mejoraremos la fiabilidad de la comunicación. Como ya hemos dicho, esta estrategia

de transmisión se denomina *diversidad frecuencial*. En el apartado 2, vamos a explicar diferentes esquemas de comunicación que explotan la diversidad frecuencial del canal.

Otro tipo de diversidad que se puede aplicar en radiocomunicaciones cuando el canal no varía temporalmente es la diversidad espacial. La idea es observar el canal desde varias posiciones del espacio. Para hacerlo, se podría mover la antena del transmisor o del receptor para conseguir diversidad temporal o, alternativamente, se pueden utilizar varias antenas en transmisión o recepción separadas una distancia lo suficientemente grande para que los *fadings* entre cada par de antenas transmisora y receptora sean independientes. Así, pues, cuando hablamos de diversidad espacial, nos referimos a sistemas de comunicación con múltiples antenas en transmisión o en recepción.

Ejemplos de aplicación

Las mismas técnicas se pueden aplicar también en otros entornos. Por ejemplo, las comunicaciones por medio de la red eléctrica (*power line*) también se ven afectadas por la propagación multicamino debido a las reflexiones que se producen en enchufes y otras discontinuidades de la red eléctrica cuando las impedancias no están bien adaptadas. En estos sistemas se puede conseguir diversidad espacial transmitiendo o recibiendo por más de un enchufe.

Cuando los *fadings* se deben a la propagación multicamino, basta con que la separación entre antenas sea una fracción de la longitud de onda, y por lo tanto las antenas se pueden montar en general una junto a la otra en el mismo equipo transmisor o receptor.

Ved también

El *shadowing* se estudia en el subapartado 2.2 del módulo didáctico "Canal de comunicaciones" de esta asignatura.

En cambio, cuando el *fading* se debe, por ejemplo, al *shadowing*, hay que separar mucho más las antenas para explotar la diversidad espacial del canal. En este caso, estamos obligados a emplazar las antenas en lugares diferentes como, por ejemplo, en diferentes estaciones base en el caso de comunicaciones celulares. Este tipo de diversidad se denomina *macrodiversidad*. En el apartado 4, vamos a estudiar diferentes esquemas que hacen uso de la diversidad espacial del canal.

Ejemplos

***Fadings* debidos a la programación multicamino**: En el caso de un *router* wifi que trabaja a 2,4 GHz basta con que la separación de las antenas sea de unos de 6 cm ($\lambda/2$).

Fadings* debidos al *shadowing: En exteriores, la separación de las antenas para ver realizaciones independientes del *shadowing* es típicamente entre 50 y 100 metros (Goldsmith, 2005).

Un ejemplo de macrodiversidad

Una de las propuestas que se están considerando en la cuarta generación de telefonía móvil (4G), también conocida como *LTE* (*long term evolution* o evolución a largo plazo), es un esquema de macrodiversidad denominado *CoMP* (*coordinated multipoint*) en el que los terminales pueden estar conectados simultáneamente a dos estaciones base para mejorar la cobertura y facilitar el traspaso de llamadas entre celdas vecinas.

Un tipo de macrodiversidad que se ha implementado con mucho éxito en el estándar HSPA de telefonía móvil (3,5G) es la conocida como *diversidad multiusuario*, que consiste en que en cada momento transmita (o reciba) el usuario que tiene el mejor canal y permanezcan mudos el resto de usuarios, algunos de los cuales posiblemente afectados por *fadings*. La idea es aprovechar las oportunidades de transmisión que ofrece el canal a los usuarios (comunicaciones oportunistas). Es evidente que se necesita que el canal sea variante

en el tiempo para que todas las usuarios tengan la oportunidad de transmitir en algún momento. Si no fuera así, siempre transmitiría o recibiría el mismo usuario. Por lo tanto, la diversidad multiusuario requiere que el canal ofrezca diversidad espacial (usuarios en diferentes posiciones) y también temporal (canal variante en el tiempo). Se puede encontrar más información sobre este tema en las referencias incluidas en la bibliografía del módulo y en el ejercicio 1 de las actividades.

Hay un cuarto tipo de diversidad y es la diversidad de polarización. Como es bien sabido, la polarización de una onda electromagnética la define la dirección del vector campo eléctrico. Este vector se puede descomponer en dos componentes ortogonales, que son las componentes horizontal y vertical. Como en general estas componentes experimentan *fadings* diferentes cuando se propagan por el canal, se puede transmitir la señal con las dos polarizaciones (horizontal y vertical) de modo que el receptor las pueda combinar para reducir el efecto del *fading* de una de estas polarizaciones. Sin embargo, como solo hay dos polarizaciones ortogonales, la ganancia de diversidad que se puede alcanzar es 2 en el mejor de los casos. Para no alargar en exceso este módulo, no vamos a profundizar más en este tipo de diversidad.

Tal como acabamos de ver, la fiabilidad de un sistema de comunicaciones está limitada por los *fadings*, pero hay mecanismos para combatirlos. La clave es utilizar la diversidad que nos ofrece el canal para disponer en recepción de varias copias de la señal que estén afectadas por *fadings* independientes. En los próximos apartados vamos a estudiar los diferentes tipos de diversidad que hay y evaluar las ganancias que se pueden alcanzar en términos de fiabilidad (probabilidad de error).

Objetivos

Los objetivos de este módulo didáctico son los siguientes:

1. Entender el concepto de *diversidad*.

2. Saber que la diversidad permite mejorar la fiabilidad de las comunicaciones en canales con *fadings*.

3. Conocer los diferentes tipos de diversidad que puede presentar el canal de comunicaciones: temporal, frecuencial, espacial y de polarización.

4. Entender la función del entrelazado cuando el canal es variante en el tiempo.

5. Saber que los canales dispersivos presentan diversidad frecuencial.

6. Conocer diferentes maneras de usar la diversidad frecuencial del canal: ecualización, RAKE y OFDM.

7. Estudiar el origen físico de la diversidad espacial del canal.

8. Saber que se necesitan múltiples antenas en transmisión o recepción (MIMO) para utilizar la diversidad espacial del canal.

9. Conocer las técnicas de transmisión en canales MIMO: conformación del haz, codificación espaciotemporal y multiplexación espacial.

1. Motivación

En la introducción hemos presentado muy brevemente los tipos de diversidades existentes: temporal, frecuencial, espacial y polarización. En general, el canal es selectivo en estas cuatro dimensiones, es decir, la respuesta del canal varía en el tiempo (t) y depende de la frecuencia (f), la posición del transmisor (x_t), la posición del receptor (x_r) y la polarización utilizada (p). Esta selectividad del canal es la que nos ofrece la diversidad que necesitamos para combatir los *fadings*.

Formalmente, decimos que la respuesta del canal es una función de estas cinco variables:

$$H(t, f, x_t, x_r, p) \qquad (1)$$

Esta función no es más que la respuesta frecuencial (variante en el tiempo) del canal establecido entre la antena transmisora, situada en la posición x_t, y la antena receptora, situada en la posición x_r, en la polarización p.

Como la caracterización determinista del canal es muy complicada, se acostumbra a modelizar $H(t, f, x_t, x_r, p)$ como una variable aleatoria. Antes de continuar, vamos a recordar rápidamente cómo se caracteriza el canal de comunicaciones desde el punto de vista estadístico.

Ved también

La caracterización del canal se desarrolla en el módulo didáctico "Canal de comunicaciones" de esta asignatura.

Lo primero que hay que tener en cuenta es que las variables t, f, x_t y x_r son en la práctica variables discretas porque la resolución temporal (Δt), frecuencial (Δf) y espacial (Δx) del receptor es finita. Esto significa que $H(t, f, x_t, x_r, p)$ se obtiene en la práctica sumando todas las componentes de la señal recibida (rayos) dentro de los intervalos comprendidos entre $t \pm \Delta t/2$, $f \pm \Delta f/2$, $x_t \pm \Delta x/2$ y $x_r \pm \Delta x/2$. Si el número de componentes (rayos) que se suman es suficientemente grande para todos los valores de t, f, x_t, x_r y p, el teorema del límite central nos garantiza que $H(t, f, x_t, x_r, p)$ seguirá una distribución gaussiana que podremos caracterizar mediante su media y su covarianza (o correlación).

Resolución temporal y frecuencial de un receptor digital

En el ejercicio 2 de las actividades se calcula la resolución temporal y frecuencial de un receptor digital. En cuanto a la resolución espacial, en el apartado 4 se estudia cuál debe ser la separación mínima de las antenas del transmisor y del receptor (d_0) en un escenario con propagación multicamino para que cada antena observe una realización independiente del canal. La conclusión es que la separación tiene que ser superior a $\lambda/2$, donde λ es la longitud de onda.

Del mismo modo que para el canal de comunicaciones hemos definido el tiempo de coherencia T_c y el ancho de banda de coherencia B_c como los intervalos de tiempo y frecuencia en los que la respuesta del canal prácticamente no cambia (la correlación temporal es alta), podemos definir T_0, B_0 y d_0 como la separación temporal, frecuencial y espacial mínimas para obtener realizaciones incorreladas (independientes) del canal:

Ved también

El tiempo de coherencia T_c y el ancho de banda de coherencia B_c se definen, respectivamente, en los subapartados 3.4 y 3.2 del módulo didáctico "Canal de comunicaciones" de esta asignatura.

$$\begin{aligned}
&E\{H(t,f,x_t,x_r,p)H^*(t+T_0,f,x_t,x_r,p)\} \approx 0\\
&E\{H(t,f,x_t,x_r,p)H^*(t,f+B_0,x_t,x_r,p)\} \approx 0\\
&E\{H(t,f,x_t,x_r,p)H^*(t,f,x_t+d_0,x_r,p)\} \approx 0\\
&E\{H(t,f,x_t,x_r,p)H^*(t,f,x_t,x_r+d_0,p)\} \approx 0
\end{aligned} \qquad (2)$$

Consideremos ahora que nos queremos comunicar utilizando este canal, y para hacerlo transmitimos durante T segundos (duración de la trama) ocupando un ancho de banda de B hercios y utilizando una agrupación de antenas en transmisión y otra en recepción que ocupan un espacio de d_t y d_r metros, respectivamente. Asumiendo que los canales que ven las dos polarizaciones son independientes, esto significa que disponemos de N realizaciones independientes del canal:

$$N = \left\lfloor \frac{T}{T_0} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{B}{B_0} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{d_t}{d_0} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{d_r}{d_0} \right\rfloor \times 2 \qquad (3)$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es el número entero menor o igual que x. El número N establece cuál es la máxima ganancia de diversidad que podemos conseguir en este canal. El significado de N es el siguiente. Supongamos que la probabilidad de que $20 \cdot \log|H(t, f, x_t, x_r, p)|$ sea menor que –20 dB (*fading* profundo) es 0,1. Si ahora transmitimos el mismo símbolo de información N veces (código repetición) utilizando N componentes del canal que sean independientes, la probabilidad de que las N símbolos recibidos hayan experimentado un *fading* profundo se reduce a $0{,}1^N$. Por ejemplo, si N fuera 10, podríamos reducir la probabilidad de estar en un *fading* profundo de 0,1 a 10^{-10} (¡casi nunca!).

Ahora vamos a analizar con más detalle el impacto de los *fadings* y cuánto se puede ganar empleando la diversidad del canal. Para hacerlo, nos tenemos que olvidar por un momento del origen de la diversidad (tiempo, frecuencia, espacio y polarización) y considerar que tenemos N componentes independientes del canal que denominaremos $h_1, \ldots, h_N$. El esquema más sencillo de diversidad consiste en enviar el mismo símbolo de información, que denominaremos s, por medio de los N componentes independientes del canal. En el fondo, estamos utilizando un código de repetición porque el mismo símbolo lo transmitimos N veces. La clave es separar lo suficiente estas repeticiones en las cinco dimensiones del canal (t, f, x_t, x_r o p) de modo que cada repetición se vea afectada por un *fading* independiente del resto.

Para calcular la probabilidad de error, formalizaremos primero el problema. Si denominamos y_n a la muestra que se recibe a la salida de la componente n del canal, tendremos:

$$y_n = h_n s + w_n \qquad n = 1, \ldots, N \qquad (4)$$

donde w_n es el ruido gaussiano del receptor que consideraremos que tiene media cero y varianza σ_w^2 en todas las componentes. Para simplificarlo, consideraremos que $E\{|s|^2\} = E\{|h_n|^2\} = 1$ y centraremos la atención en el caso del canal Rayleigh por dos razones: es sencillo de analizar desde el punto de vista matemático, y sobre todo, es el más desfavorable en cuanto a la probabilidad y la profundidad de los *fadings*. Como sabemos, el canal Rayleigh aparece cuando no hay visibilidad directa entre el transmisor y el receptor, de modo que toda la señal recibida procede de las reflexiones de la onda transmitida en los obstáculos (*scatters*) que hay en el entorno del transmisor y el receptor.

Ved también

El canal Rayleigh se estudia en el subapartado 2.3.1 del módulo didáctico "Canal de comunicaciones" de esta asignatura.

Para calcular de manera aproximada la probabilidad de error, estableceremos las hipótesis siguientes:

- El símbolo transmitido se decide correctamente si la relación señal a ruido, *SNR* (de *signal-to-noise ratio*) es mayor que un umbral λ. Este umbral depende de la modulación y la codificación de canal utilizado.

- El símbolo transmitido se decide incorrectamente cuando la *SNR* es menor que λ. Cuando esto ocurre, decimos que se ha producido un *fading*.

Esto significa que tan solo se producirá un error de decisión cuando las N componentes del canal estén en *fading*, ya que solo con recibir uno de las componentes con suficiente *SNR* a partir de esta componente se podrá decidir correctamente el símbolo que se ha transmitido. Así pues, necesitamos calcular la *SNR* de cada componente del canal y evaluar con qué probabilidad esta *SNR* es menor que λ. Empecemos por obtener la *SNR* que hay a la salida de la componente n del canal:

$$SNR_n = \frac{|h_n|^2}{\sigma_w^2} \qquad (5)$$

Se puede demostrar con facilidad que SNR_n es una variable aleatoria con distribución exponencial de media $1/\sigma_w^2$, es decir:

$$p(SNR_n) = \sigma_w^2 e^{-\sigma_w^2 SNR_n} \qquad (6)$$

Justificación

En un canal Rayleigh, h_n es una variable aleatoria gaussiana compleja de media cero. Por lo tanto, $|h_n|^2 = Re2\{h_n\} + Im2\{h_n\}$ sigue una distribución exponencial porque es la suma del cuadrado de dos variables aleatorias gaussianas reales e independientes.

Teniendo ahora presente que los *fadings* de las *N* componentes son independientes, la probabilidad de error se puede calcular de la manera siguiente:

$$P_e = \prod_{n=1}^{N} p(SNR_n < \lambda) = \left(1 - e^{-\lambda\sigma_w^2}\right)^N \qquad (7)$$

puesto que:

$$p(SNR_n < \lambda) = \int_0^{\lambda} p(SNR)dSNR = 1 - e^{-\lambda\sigma_w^2} \qquad (8)$$

Como cabía esperar, sale que la probabilidad de error depende del nivel de ruido σ_w^2. Fijado el umbral λ, si el valor de σ_w^2 es grande (*SNR* baja), la probabilidad de *fading* se acercará a 1, mientras que si σ_w^2 es muy pequeña (*SNR* alta), la probabilidad de *fading* se podrá aproximar en serie de Taylor alrededor de $\sigma_w^2 = 0$, y obtener así que la probabilidad de error a alta *SNR* es aproximadamente igual a la expresión siguiente, donde $\overline{SNR} = E\{|h_n|^2\}/\sigma_w^2 = 1/\sigma_w^2$ es el valor medio de la *SNR* (ecuación (5)):

$$P_e \approx \left(\lambda\sigma_w^2\right)^N = \left(\frac{1}{\lambda}\overline{SNR}\right)^{-N} \qquad (9)$$

Cabe señalar que nos fijamos en lo que ocurre a alta *SNR* porque, cuando la *SNR* es alta, el ruido por sí solo no provoca errores de decisión sino que los *fadings* del canal son los responsables directos de estos errores.

Para terminar, si dibujamos la curva de la probabilidad de error en ejes logarítmicos, encontraremos que es una recta con pendiente negativa –*N* desplazada hacia la derecha en $10 \cdot \log_{10}\lambda$, es decir:

$$10 \cdot \log_{10} P_e \approx -N(\overline{NSR_{dB}} - 10\log_{10}\lambda) \qquad (10)$$

Aunque el análisis de la probabilidad de error que hemos hecho es muy simple, el resultado que hemos encontrado en las ecuaciones (9) y (10) es en general correcto y nos permite extraer las conclusiones siguientes:

1) La **ganancia de diversidad** *N* determina la pendiente de la curva de probabilidad de error a una *SNR* alta cuando la curva se representa en ejes logarítmicos (ecuación (10)). Sin diversidad, esta pendiente es –1, y por lo tanto, la probabilidad de error decae muy lentamente con la *SNR*.

2) La **ganancia de codificación** – $10 \cdot \log_{10} \lambda/\lambda_0$ determina el desplazamiento hacia la izquierda de la curva de probabilidad de error a una *SNR* alta, cuando la curva se representa en ejes logarítmicos (ecuación (10)), con respecto a un esquema de transmisión de referencia con umbral $\lambda_0 > \lambda$.

3) Esquema de transmisión. Cualquier esquema de transmisión que utilice las N componentes independientes del canal para transmitir cada uno de los símbolos de información puede conseguir la máxima ganancia de diversidad (N). Sin embargo, dependiendo del esquema de transmisión escogido, la ganancia de codificación será más o menos elevada. Por ejemplo, el código de repetición analizado no es demasiado eficiente y la ganancia de codificación se puede aumentar utilizando códigos más elaborados. En realidad, se pueden utilizar los mismos códigos que se utilizan para el canal gaussiano (como códigos bloque o códigos convolucionales). La ganancia de diversidad de estos códigos viene dada por la distancia de Hamming mínima del código (ejercicio 3 de las actividades).

4) Esquema de recepción. Para aprovechar al máximo la diversidad del canal, es necesario que el receptor conozca con exactitud la amplitud y la fase de las componentes del canal $h_1, \ldots, h_N$ y las combine coherentemente. Para el caso del código de repetición estudiado, *coherentemente* significa que hay que decidir el símbolo transmitido combinando las muestras $y_1, \ldots, y_N$ de la manera siguiente, donde w' es el término de ruido a la salida del combinador, que tiene una varianza igual a $N\sigma_w^2$:

$$z = \sum_{n=1}^{N} h_n^* y_n = N\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |h_n|^2\right)s + w' \qquad (11)$$

Este esquema de combinación se denomina **combinación de máxima relación señal-ruido (*maximal ratio combining*, *MRC*)** y requiere que el receptor efectúe una estimación de los coeficientes complejos del canal $h_1, \ldots, h_N$ antes de poder tomar decisiones fiables. Para hacer esta estimación, el transmisor suele transmitir símbolos conocidos que el receptor utiliza para hacer la estimación del módulo y la fase de las componentes del canal $h_1, \ldots, h_N$.

Hay otras maneras de combinar las componentes del canal que, aunque subóptimas, reducen la complejidad del sistema. A continuación, detallamos dos de las más utilizadas:

a) Combinación de igual ganancia (*equal gain combining*)

En este esquema, se combinan todas las componentes del canal con la misma amplitud. La salida del combinador es la siguiente, donde denotamos por $\arg\{h_n\}$ la fase del coeficiente del canal h_n, y w'' es el término de ruido de varianza $N\sigma_w^2$:

$$z = \sum_{n=1}^{N} e^{-j\arg\{h_n\}} y_n = \left(\sum_{n=1}^{N} |h_n| \right) s + w'' \qquad (12)$$

La ventaja principal de este esquema es que el receptor no ha de conocer el módulo de las componentes del canal; solo tiene que conocer sus fases para poder combinar los N símbolos recibidos coherentemente (en fase). Aunque se consigue toda la ganancia de diversidad (N), este esquema tiene una ganancia de codificación más baja que el esquema óptimo (MRC). Aun así, la pérdida no suele ser muy grande –menos de 1 dB– (ved el ejercicio 4 de las actividades).

b) Combinación por selección (*selection combining*)

En este caso, se selecciona la componente del canal con una calidad mejor (*SNR*), es decir, aquella componente con una $SNR_n = |h_n|^2 / \sigma_w^2$ máxima (ecuación (5)). Por lo tanto, el receptor solo ha de conocer el módulo de los N componentes del canal para hacer la selección. Si denotamos por n_0 la componente del canal con *SNR* máxima, la salida del combinador será:

$$z = y_{n_0} = h_{n_0} \cdot s + w_{n_0} \qquad (13)$$

A partir de z, se podrá desmodular el símbolo de información s de manera coherente, si se conoce la fase de h_{n_0}, o no coherentemente, si no se conoce. Como solo se utiliza la componente n_0 del canal, no hay que conocer la fase del resto de componentes ($n \neq n_0$), y esto simplifica enormemente la complejidad del receptor. Este esquema consigue la ganancia de diversidad esperada pero la ganancia de codificación es significativamente menor que la alcanzada con el esquema de combinación óptimo (MRC).

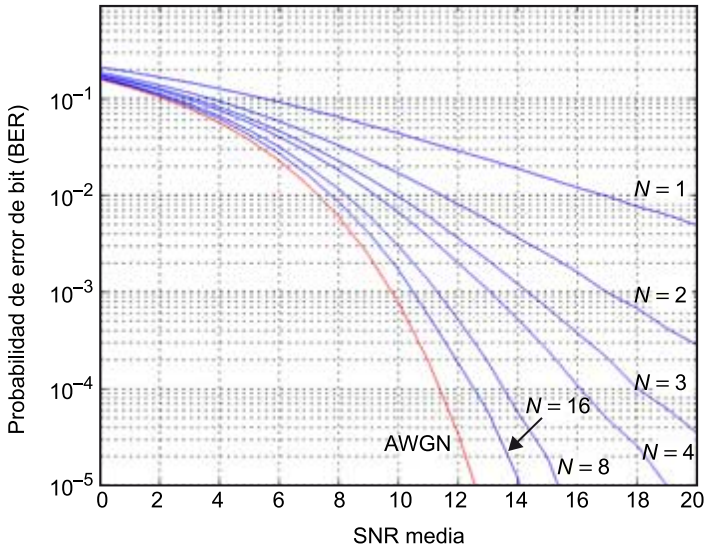
5) Ganancia de codificación con MRC. Si analizamos la ecuación (11), se puede comprobar que la relación *SNR* media a la salida del combinador es N veces mayor que a la entrada (ejercicio 4 de las actividades). La razón es que estamos recibiendo cada símbolo de información repetido N veces. Esta ganancia corresponde al factor N que aparece multiplicando el paréntesis de la ecuación (11). Si para disponer en recepción de N copias del símbolo de información hay que transmitir $N' < N$ veces más energía, habremos conseguido mejorar la *SNR* media del sistema en un factor N/N' con respecto a un sistema sin diversidad ($N = 1$) (este factor se corresponde con el factor λ / λ_0 de la ecuación (10)). Esta es la llamada **ganancia de codificación**, que depende del esquema de transmisión utilizado (factor N'), así como del esquema de com-

binación utilizado en recepción (N en el caso de MRC). Es importante destacar que esta ganancia se consigue tanto en un canal aleatorio (canal con *fadings*) como en un canal determinista ($h_n = 1$).

6) Ganancia de diversidad con MRC. Tal como se demuestra a continuación (ecuación (14)), la probabilidad de error de un canal gaussiano, representada en ejes logarítmicos, decae exponencialmente a *SNR* alta, mientras que solo decae linealmente (con más lentitud) en el caso del canal Rayleigh (ecuación (10)). La ganancia de diversidad (N) determina la pendiente en ejes logarítmicos de la curva de probabilidad de error (ecuación (10)). Cuando la ganancia de diversidad N es muy grande, se puede demostrar con facilidad que la probabilidad de error a la salida del combinador óptimo (ecuación (11)) converge hacia la probabilidad de error del canal gaussiano (ecuación (14)). Para demostrarlo, basta con darse cuenta de que el término aleatorio dentro del paréntesis de la ecuación (11) converge a 1 cuando N tiende a infinito.

$$\begin{aligned} &P_{e,awgn} = Q\left(\sqrt{\tfrac{1}{\lambda}\overline{SNR}}\right) < \exp\left(\tfrac{1}{\lambda}\overline{SNR}\right) \\ &10\log_{10}P_{e,awgn} < \frac{10\log_{10}}{\lambda}\overline{SNR} = -4{,}34\cdot 10^{\left(\overline{SNR}_{dB}-10\log_{10}\lambda\right)/10} \end{aligned} \qquad (14)$$

Figura 1. Probabilidad de error por el canal gaussiano y por el canal Rayleigh en función de la ganancia de diversidad N



Se considera un código de repetición: el mismo símbolo se transmite N veces por componentes independientes del canal. En la simulación se considera que la ganancia de codificación es 1, es decir, el combinador no mejora la SNR media del sistema; únicamente mejora la pendiente de la probabilidad de error porque reduce la aleatoriedad del canal.

2. Diversidad temporal

En el apartado anterior hemos explicado el concepto de *diversidad* en términos generales, considerando que se dispone de N componentes independientes del canal. Como hemos explicado, el origen físico de estas N componentes puede ser diverso (tiempo, frecuencia, espacio o polarización). En este apartado nos vamos a centrar en la diversidad temporal del canal.

Si denominamos T a la duración de la trama y T_0 a la separación temporal entre dos realizaciones independientes del canal, el número de realizaciones independientes del canal será:

$$N = \left\lfloor \frac{T}{T_0} \right\rfloor \qquad (15)$$

Por lo tanto, el número de símbolos necesarios para tener una realización independiente del canal vendrá dado por la expresión siguiente, donde T_s es el periodo de símbolo, es decir, cada cuánto tiempo se transmite un nuevo símbolo al canal:

$$I = \left\lceil \frac{T_0}{T_s} \right\rceil \qquad (16)$$

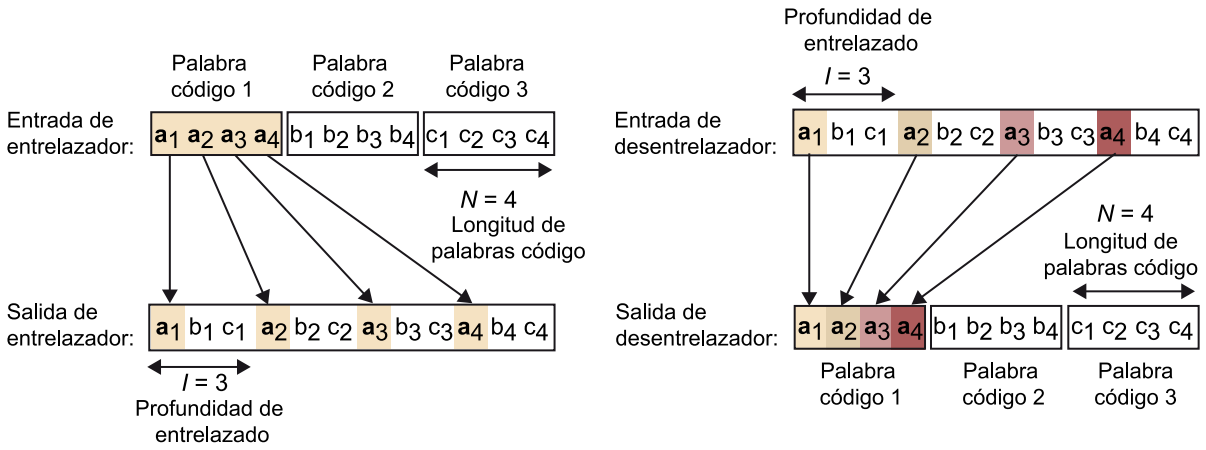
Como hemos visto en el apartado anterior, si queremos utilizar toda la diversidad que nos ofrece el canal, habrá que transmitir cada símbolo de información utilizando las N componentes independientes del canal. Como las N componentes independientes del canal no son consecutivas en el tiempo sino que están separadas temporalmente por I símbolos, hay que separar los N símbolos de cada palabra código (*codeword*) de modo que se transmitan por componentes independientes del canal. El bloque que realiza esta separación se llama *entrelazador* y recibe este nombre porque entrelaza los N símbolos de I palabras código diferentes para conseguir que la separación de los símbolos de cada palabra código sea I. El parámetro I se denomina profundidad de entrelazamiento y determina dos cosas: el número de palabras código que se entrelazan, y la mínima separación temporal de los símbolos de cada una de las palabras código entrelazadas.

En la figura 2 se explica gráficamente el funcionamiento del entrelazado para el caso de $N = 4$ e $I = 3$. Mirando la figura, se ve que los $N = 4$ símbolos de la primera palabra código (a_1, a_2, a_3 y a_4) están separados a la salida del entrelazador una distancia de $I = 3$, y por lo tanto verán realizaciones independientes del canal. Ocurre lo mismo con los símbolos de las otras dos palabras código. El receptor, por su parte, tiene que desentrelazar la trama recibida para reconstruir las tres palabras código (figura 2, derecha). Tal como se indica en la figura, los cuatro símbolos de la primera palabra código (a_1, a_2, a_3 y a_4) han experimentado *fadings* independientes, que en la figura se indican con diferentes intensidades de color. El descodificador es el encargado de combinar las $N = 4$ realizaciones independientes del *fading* para lograr la máxima ganancia de diversidad posible.

Reflexión

En el apartado 1, hemos considerado un código de repetición de tasa $1/N$. En este caso, en cada palabra código solo se transmite un símbolo de información (s) y la primera palabra código sería $a_1 = \ldots = a_N = s$. Con este código, la ganancia de diversidad es N, que es la distancia mínima del código (ved el ejercicio 3 de las actividades).

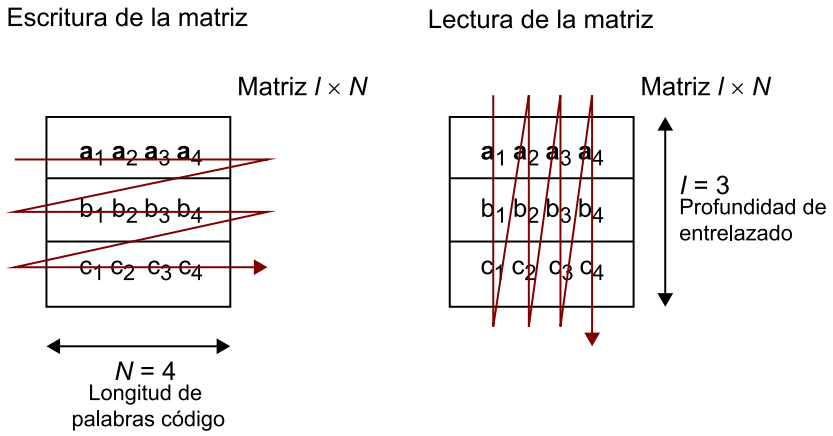
Figura 2. Ejemplo de entrelazado y desentrelazado para el caso $I = 3$ y $N = 4$



En la figura se muestra cómo el entrelazador separa los símbolos de la primera palabra código (a_1, a_2, a_3 y a_4) y el desentrelazador los vuelve a juntar. En la parte derecha de la figura, se muestra cómo los cuatro símbolos de la primera palabra código se han transmitido utilizando componentes independientes del canal, que se marcan utilizando diferentes intensidades de color.

El entrelazador de la figura se denomina *entrelazador de bloque* y se implementa escribiendo por filas en una matriz de I filas y N columnas y después leyendo el contenido de la matriz por columnas (ved la figura 3). Como cabe suponer, el desentrelazador funciona al revés: escribe por columnas y lee por filas. Hay otras maneras de hacer el entrelazamiento. En vez de hacerlo en términos de símbolo, se puede hacer en términos de bit. Asimismo, en algunos estándares se usa un entrelazador convolucional en lugar del entrelazador de bloque presentado en este apartado (ved el ejercicio 5 de las actividades).

Figura 3. Ilustración del funcionamiento del entrelazador de bloque estudiado ($N = 4$ e $I = 3$)



3. Diversidad frecuencial

En este apartado vamos a considerar que el canal es dispersivo. Eso significa que el canal dispersa temporalmente la energía de los pulsos transmitidos, y por lo tanto atenúa de manera diferente las componentes frecuenciales de la señal. Por esta razón, se dice que el canal introduce diversidad frecuencial. Si analizamos lo que ocurre en el dominio del tiempo, veremos que los pulsos presentes a la salida del filtro adaptado son el resultado de la convolución del pulso transmitido $p(t)$ con la respuesta impulsional del canal $h_c(t) \neq \delta(t)$ y con la respuesta del filtro adaptado $p(-t)$:

$$h(t) = p(t) * h_c(t) * p(-t) \qquad (17)$$

Así, pues, si muestreamos la salida del filtro adaptado $y(t)$ para cada periodo de símbolo T_s, obtendremos las muestras siguientes, donde s_k es la secuencia de símbolos transmitidos y se ha definido $h_m = h(mT_s)$ como el coeficiente m de la respuesta impulsional del sistema muestreada cada T_s:

$$y_n = y(nT_s) = \sum_k s_k h_{n-k} + w_n \qquad (18)$$

Mirando la ecuación (18), vemos que uno de los efectos negativos del canal dispersivo es la aparición de interferencia intersimbólica (ISI). Como sabemos, la ISI degrada la calidad de la comunicación y se tiene que compensar usando técnicas de ecualización de canal. Sin embargo, la dispersión del canal también tiene un efecto positivo como es introducir diversidad, que se puede aprovechar para reducir el impacto de los *fadings* del canal. A continuación vamos a explicar este nuevo tipo de diversidad, que se conoce como *diversidad frecuencial*.

Ved también

Ved la interferencia intersimbólica (ISI) en el módulo didáctico "Ecualización de canal" de esta asignatura.

Para ver con facilidad que el canal dispersivo proporciona diversidad, vamos a considerar por un momento que solo se transmite el primer símbolo s_0, y por lo tanto la ecuación (18) se puede escribir de la manera siguiente, donde N es la duración de la respuesta impulsional del canal (h_n):

$$y_n = h_n s_0 + w_n \qquad n = 1, \ldots, N \qquad (19)$$

Gracias a la dispersión temporal del canal, recibimos N veces el símbolo s_0, afectado en cada caso por un coeficiente del canal diferente. Si el coeficiente directo h_1 experimentara un *fading* profundo y no se pudiera recuperar el símbolo s_0 a partir de y_1, podríamos utilizar las otras $N - 1$ muestras $y_2, \ldots, y_N$ para detectar correctamente el símbolo transmitido. Tal como hemos explicado en el apartado 1, la máxima ganancia de diversidad se consigue cuando las

Ved también

Los obstáculos incorrelacionados se estudian en el subapartado 2.3 del módulo didáctico "Canal de comunicaciones" de esta asignatura.

N componentes del canal $h_1, ..., h_N$ son estadísticamente independientes. En comunicaciones inalámbricas, los coeficientes del canal están poco correlados cuando la señal transmitida se propaga en entornos con muchos obstáculos en los que la señal se difracta o se refleja. Cuando esto ocurre, se habla de obstáculos incorrelacionados o *uncorrelated scattering*, y es el caso que vamos a considerar en este apartado.

Hay que destacar que la ecuación (19) es idéntica a la ecuación (4), y es la misma ecuación que tendríamos si utilizáramos un código de repetición en un canal variante en el tiempo (diversidad temporal). Sin embargo, hay tres diferencias importantes:

a) En la ecuación (19) solo transmitimos una vez el símbolo s_0 y el canal es el que lo repite N veces. En cambio, cuando se utiliza un código de repetición, el codificador es el que transmite N veces el símbolo s_0, y gasta entonces N veces más energía para transmitirlo.

b) De media, la energía que se recibe del canal $E\{|h_n|^2\}$ es una función decreciente de n, y por lo tanto la contribución de las primeras componentes es más relevante que la contribución de las últimas, que están más atenuadas. En cambio, cuando h_n son realizaciones temporales del canal, podemos considerar que $E\{|h_n|^2\}$ es constante en el tiempo. Por lo tanto, con canales dispersivos, la ganancia de diversidad no es directamente N, sino que depende de la duración efectiva (decaimiento) del perfil de potencias $E\{|h_n|^2\}$ del canal.

Nota

$E\{|h_n|^2\}$ es el llamado *perfil del retardo de la potencia* o *power delay profile* (ved el apartado 3.1 del módulo didáctico 3).

c) No debemos olvidar que en la ecuación (19) hemos prescindido del término de ISI (ecuación (18)). Debido a la ISI, los símbolos transmitidos llegan mezclados al receptor, y el receptor los tiene que separar de alguna manera, por ejemplo, usando un ecualizador. El esquema de ecualización elegido tiene que eliminar la ISI, pero al mismo tiempo ha de hacer un buen uso de la diversidad del canal. De hecho, cuanto más larga es la respuesta impulsional del canal (más dispersión), dispondremos de más diversidad, pero a la vez la ISI será mayor.

Hay diferentes maneras de aprovechar la diversidad frecuencial del canal y reducir el efecto de la ISI. A continuación vamos a resumir las tres maneras más importantes de hacerlo:

1) Ecualización temporal

El esquema óptimo de ecualización se conoce como *MLSE* (*maximum likelihood sequence estimator*, estimación de secuencia de máxima verosimilitud) y consiste en encontrar la secuencia de símbolos s_k que permite reconstruir la salida del filtro adaptado, con máxima verosimilitud (mínimo error cuadrático), es decir:

$$\min_{s_k} \sum_n \left| y_n - \sum_k s_k h_{n-k} \right|^2 \qquad (20)$$

donde:

- y_n son las muestras ruidosas que tenemos a la salida del filtro adaptado, y
- $\sum_k s_k h_{n-k}$, la reconstrucción que hacemos del las mismas en función del valor de los símbolos s_k.

Como los símbolos s_k pertenecen a un alfabeto discreto de M valores (por ejemplo, cuatro valores en QPSK) y conocemos el valor de los coeficientes del canal $h_1, \ldots, h_N$ (el receptor los ha estimado antes), el término $\sum_k s_k h_{n-k}$ toma M^N valores diferentes y la secuencia s_k óptima se puede buscar aplicando el algoritmo de Viterbi sobre un diagrama de enrejado (*trellis diagram*) de M^N estados.

Este esquema de ecualización se explica con detalle en otro módulo didáctico. En el presente módulo, solo queremos destacar que el MLSE no es solamente la manera óptima de combatir la ISI sino que permite extraer toda la diversidad del canal. Hay otros esquemas subóptimos que no siempre consiguen extraer toda la diversidad del canal.

Ved también

Otros esquemas subóptimos pueden verse en el módulo "Ecualización de canal" de esta asignatura.

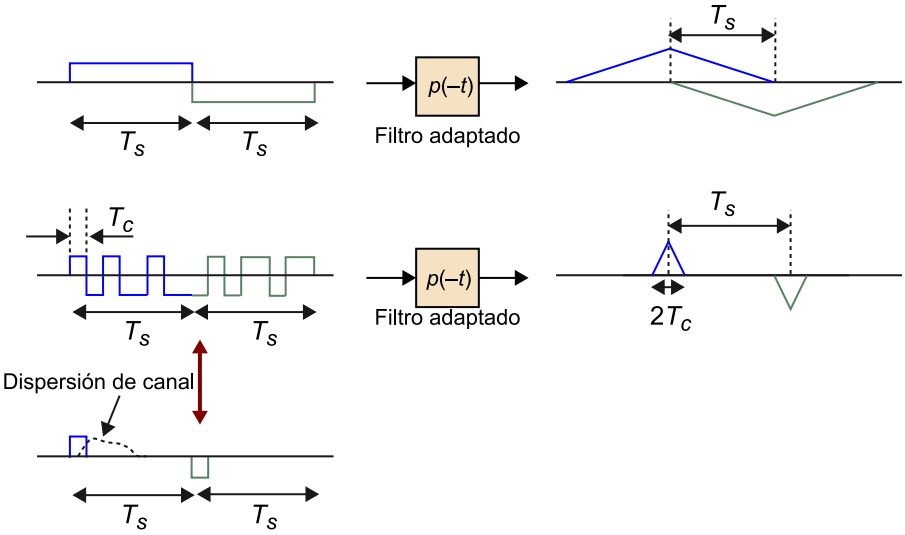
2) Receptor RAKE en comunicaciones de espectro ensanchado

Como sabemos, en un sistema DS-CDMA los usuarios transmiten cada símbolo de información modulando la amplitud de una secuencia de pulsos, llamados chips, de amplitud pseudoaleatoria (±1) y duración $T_c = T_s/SF$ segundos, donde SF es el factor de ensanchamiento espectral (*spreading factor*). En cambio, en un sistema convencional, los símbolos modulan la amplitud de un solo pulso de duración $T_s = T_c \cdot SF$ segundos. En la figura 4, se comparan los dos sistemas, un sistema de espectro ensanchado y uno convencional.

Ved también

Los sistemas DS-CDMA se ven en el módulo didáctico "Multiplexación y sistemas de acceso múltiple" de la asignatura *Sistemas de comunicación I*.

Figura 4. Comparación de sistemas de espectro ensanchado y convencional



Se muestra la entrada y la salida del filtro adaptado en el caso de un sistema convencional (parte superior) y de un sistema de espectro ensanchado (parte inferior) con $SF = 8$. Se considera que el canal es ideal, y el pulso conformador rectangular. En la parte inferior se muestra también que, en el caso de espectro ensanchado, la salida del filtro adaptado es la misma que tendríamos si se transmitieran pulsos de duración T_c cada T_s segundos y se utilizaran códigos CDMA ideales. En este caso se muestra también qué ocurre cuando el canal es dispersivo. Tal como se ve, es posible procesar toda la respuesta impulsional del canal para conseguir diversidad frecuencial sin que se produzca ISI.

Tal como se ve en la figura, la salida del filtro adaptado del sistema de espectro ensanchado es idealmente la misma que tendríamos en un hipotético sistema en el que el pulso conformador durara T_c segundos y se transmitiera un símbolo cada T_s segundos. Esto se debe a las propiedades de autocorrelación de las secuencias pseudoaleatorias utilizadas en el caso de comunicaciones CDMA asíncronas (por ejemplo, los códigos de Gold o Kasami).

Por lo tanto, si se utiliza este tipo de códigos, un sistema de espectro ensanchado no tendrá ISI siempre que la duración del canal sea más corta que T_s, y por lo tanto en este caso no será necesario ecualizar. Por otro lado, un sistema de espectro ensanchado tiene la capacidad de hacer uso de la diversidad del canal cuando la longitud de la respuesta impulsional del canal es mayor que T_c pero menor que T_s, lo que no es posible en un sistema convencional. A continuación, lo vamos a demostrar.

Si llamamos $h_n = h(nT_c)$ a la respuesta impulsional del sistema (ecuación (17)) muestreada ahora cada T_c segundos, podremos escribir la salida del filtro adaptado correspondiente a uno de los símbolos transmitidos (por ejemplo, el símbolo s_0) de la manera siguiente:

$$y_n = h_n s_0 + w_n \qquad n = 1, \ldots, N \qquad (21)$$

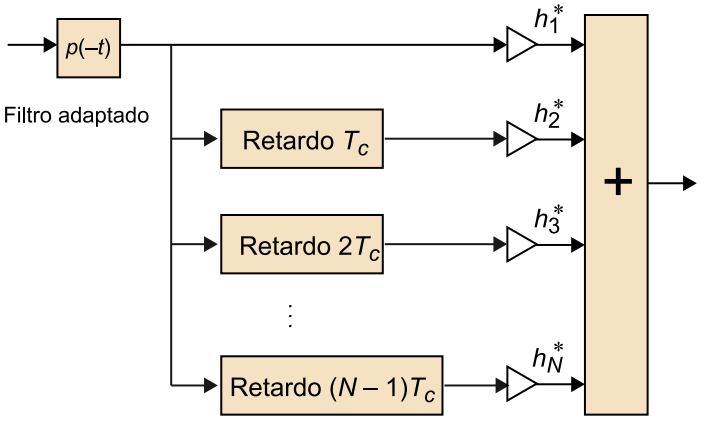
donde hemos muestreado la señal cada T_c segundos y hemos denotado por N el número de coeficientes del canal no nulos ($N < SF$).

Como se ve, obtenemos exactamente la misma expresión que en la ecuación (19), y por lo tanto podemos combinar las muestras $y_1, \ldots, y_N$, que están afectadas por coeficientes independientes del canal, para ganar diversidad. El receptor que combina las N componentes de manera óptima se denomina *RA-*

KE (*rastrillo*, en castellano) y se muestra en la figura 5. El receptor RAKE tiene que conocer los coeficientes del canal para decidir el símbolo s_0 a partir de la métrica $z = \sum_{n=1}^{N} h_n^* y_n$ presentada en la ecuación (11) (combinación de máxima relación señal-ruido).

Por lo tanto, se concluye que en un sistema de espectro ensanchado es posible explotar la diversidad (frecuencial) del canal utilizando el receptor RAKE siempre que la duración del canal sea menor que T_s. En la asignatura *Teoría de la codificación y modulaciones avanzadas* se describe con más detalle el receptor RAKE y las modulaciones de espectro ensanchado.

Figura 5. Esquema simplificado de un receptor RAKE



Cada rama es la salida del filtro adaptado retardada T_c segundos y se suele denominar *finger*, haciendo referencia a los dientes de un rastrillo (*rake*). Los *N fingers* se combinan de manera coherente utilizando los coeficientes del canal, que han sido estimados previamente.

3) Modulación OFDM (*orthogonal frequency division multiplexing*, 'multiplexado por división ortogonal de frecuencia')

La tercera manera de extraer la diversidad frecuencial de un canal es mediante la modulación OFDM. La idea fundamental de OFDM es transmitir K pulsos de duración $K \cdot T_s$ segundos multiplexados en frecuencia, en lugar de un solo pulso de duración T_s segundos. Cada uno de estos pulsos es una subportadora de ancho de banda K veces menor (figura 6). Como en la OFDM los pulsos transmitidos son mucho más largos que en un esquema convencional, no se verán prácticamente afectados por la dispersión del canal, puesto que la duración del canal será mucho menor que la duración de los pulsos ($K \cdot T_s$). Como resultado, en la OFDM no se produce ISI y no es necesario ecualizar. Además, si transmitimos el mismo símbolo de información por dos subportadoras que estén lo suficientemente separadas en frecuencia, la atenuación del canal será diferente en las dos frecuencias subportadas y tendremos diversidad frecuencial (ved el ejercicio 6 de las actividades). Esta es la razón por la que hemos denominado *diversidad frecuencial* a este tipo de diversidad.

Duración del canal

La duración del canal se acostumbra a medir mediante la dispersión del retardo o *delay spread* (ved el subapartado 3.1 del módulo didáctico "Canal de comunicaciones" de esta asignatura).

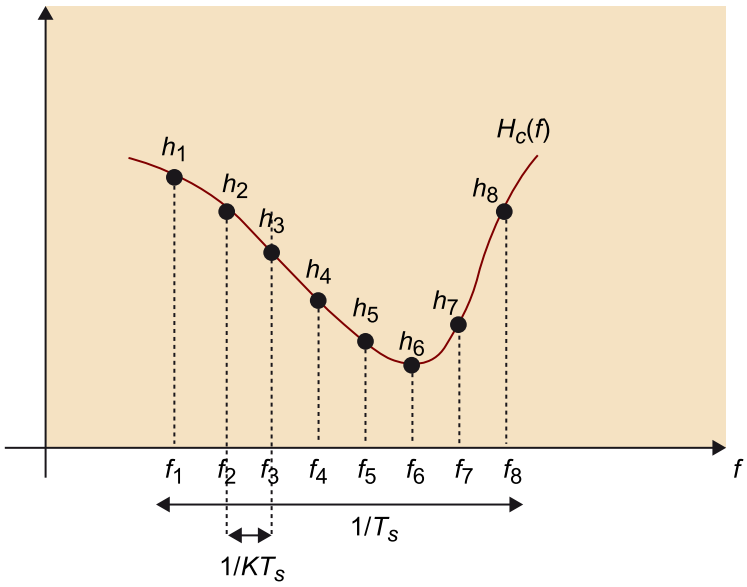
Desde el punto de vista formal, el pulso que transmitimos a frecuencia f_k experimenta una atenuación que es igual a $h_k = H_c(f_k)$, donde $H_c(f)$ es la respuesta frecuencial del canal, es decir, la transformada de Fourier de la respuesta impulsional $h_c(t)$ (17). Entonces, la salida del filtro adaptado correspondiente a la subportadora de frecuencia f_k es la siguiente (ved la figura 6):

$$y_k = h_k s_k + w_k \qquad k = 1, \ldots, K \qquad (22)$$

donde s_k es el símbolo transmitido a esta frecuencia y hemos tenido en cuenta que las K subportadoras son ortogonales, y por lo tanto no se interfieren.

Como hemos explicado en el apartado 1 de este módulo, la respuesta frecuencial del canal es estadísticamente independiente si la separación frecuencial es mayor que B_0. Por lo tanto, disponemos de $N = B/B_0$ realizaciones independientes del canal, donde $B = 1/T_s$ es el ancho de banda de la señal OFDM. Si transmitimos el mismo símbolo para estas N subportadoras, en lugar de transmitir símbolos diferentes, tendremos un código de repetición como el considerado en el apartado 1 y podremos conseguir una ganancia de diversidad igual a N. Como las componentes independientes del canal no son consecutivas en frecuencia, hay que utilizar un entrelazador frecuencial. La función de este entrelazador es la misma que la del entrelazador temporal presentado en el apartado 2, pero ahora el entrelazado se tiene que hacer entre subportadoras.

Figura 6. Representación de la señal OFDM para el caso de $K = 8$ subportadoras



En la figura se indica cómo la respuesta frecuencial del canal $H_c(f)$ modifica la amplitud de las K subportadoras.

La modulación OFDM se explica con mucho más de detalle en la asignatura *Teoría de la codificación y modulaciones avanzadas*. En este apartado, tan solo hemos querido destacar que la modulación OFDM permite transmitir por medio de un canal dispersivo sin necesidad de ecualizar la señal recibida, y ade-

más permite extraer toda la diversidad frecuencial del canal aplicando en el dominio de la frecuencia exactamente las mismas técnicas utilizadas en el caso de canales variantes en el tiempo (ved el apartado 2).

4. Diversidad espacial

En este apartado vamos a considerar que el transmisor o el receptor tienen múltiples antenas, es decir, disponen de una agrupación de antenas (*antennas array*). El uso de múltiples antenas permite dos cosas: ampliar el área física de la antena para mejorar la ganancia de antena (¡es como tener una antena más grande!), y a la vez, observar varias realizaciones del canal que, si son independientes, se podrán combinar para ganar diversidad espacial. Para alcanzar esta diversidad, hay que poder transmitir señales diferentes por las N_t antenas transmisoras y poder procesar la salida de las N_r antenas receptoras.

Por lo tanto, no solamente hay que tener múltiples antenas sino que hay que tener un transmisor completo para cada antena en transmisión y un receptor completo para cada antena en recepción (ved la figura 7). Cuando este es el caso, se dice que tenemos un canal de comunicaciones MIMO (*multiple inputs multiple outputs*, 'canal de entrada y salida múltiples') que, como indica su nombre, significa que el canal tiene N_t entradas y N_r salidas. En el caso particular de que el transmisor solo tenga una antena ($N_t = 1$), el canal se denomina SIMO (*single input multiple outputs*, 'canal de entrada única y salida múltiple') y solo disponemos de diversidad espacial en recepción. Por el contrario, si es el receptor el que solo tiene una antena ($N_r = 1$), el canal se denomina *MISO* (*multiple inputs single output*, 'canal de entrada múltiple y salida única') y disponemos de diversidad espacial en transmisión. Para terminar, cuando tenemos múltiples antenas en los dos extremos, el canal se denomina MIMO y tenemos diversidad tanto en transmisión como en recepción.

Reflexión

Cuando en este apartado hablemos de MIMO, nos referiremos a un sistema con múltiples antenas en transmisión y recepción. Sin embargo, las técnicas que vamos a explicar en este apartado son aplicables a cualquier otro sistema con múltiples entradas y múltiples salidas, como por ejemplo un sistema de comunicaciones OFDM en el que transmitimos y recibimos *N* portadoras.

Para llevar a cabo el estudio, vamos a considerar el canal MIMO equivalente de la figura 7, en el que entran N_t símbolos cada T_s segundos y del que salen N_r símbolos ruidosos cada T_s segundos, donde T_s es el periodo de símbolo. Mirando la figura, es fácil ver que la salida del canal MIMO equivalente se puede expresar en función de la entrada de la manera siguiente:

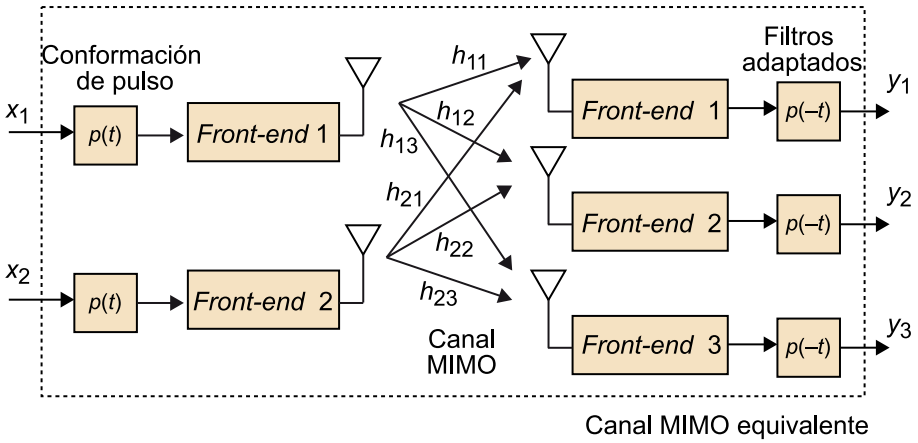
$$y_n = \sum_{k=1}^{N_t} h_{kn} x_k + w_n \quad n = 1, \ldots, N_r \qquad (23)$$

donde h_{kn} es la atenuación del canal entre la antena transmisora k y la antena receptora n.

Para simplificarlo, vamos a considerar que el canal no cambia en el tiempo (no hay diversidad temporal) y tampoco es selectivo en frecuencia (no hay diversidad frecuencial), y nos centraremos solo en la diversidad espacial de

este canal. Por otro lado, podemos considerar los términos de ruido w_1, w_2, ..., w_{Nr} estadísticamente independientes puesto que cada salida del canal MIMO tiene un cabezal de radiofrecuencia (*front-end module*) propio (figura 7).

Figura 7. Ejemplo de un canal MIMO con dos antenas en transmisión y tres en recepción



Se indica también el canal MIMO equivalente que incluye las cadenas de transmisión y recepción. En la figura, se llama *RF front-end* (cabezal de radiofrecuencia) a todo el procesamiento analógico que se hace con la señal para amplificarlo, filtrarlo y desplazarlo en frecuencia.

La ecuación (23) se suele escribir vectorialmente de la manera siguiente:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w} \qquad (24)$$

donde el vector **y** contiene las N_r muestras recibidas a la salida del canal MIMO, **x** son las N_t muestras a la entrada del canal y **H** es la llamada *matriz de canal*, que contiene los coeficientes h_{kn} del canal MIMO (ved el ejercicio 7 de las actividades).

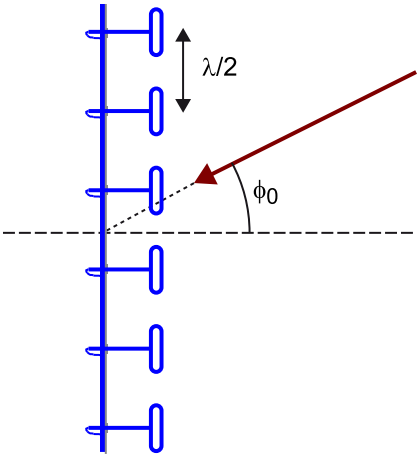
La cuestión más importante que nos hemos de plantear es qué tiene que suceder para que los $N_t \times N_r$ canales sean independientes y podamos conseguir la máxima ganancia de diversidad ($N_t \times N_r$) si combinamos correctamente las N_r salidas del canal. Para responder a esta pregunta, necesitamos entender el concepto de *resolución angular*. Para explicar este concepto de la manera más sencilla, vamos a considerar una agrupación lineal de antenas formada por N antenas omnidireccionales separadas media longitud de onda ($\lambda/2$) (ved la figura 8). Supongamos entonces que llega a la agrupación un frente de onda (rayo) con un ángulo de incidencia igual a ϕ_o (ved la figura 8). En tal caso, la respuesta angular de la agrupación querríamos que idealmente fuera una delta en la dirección ϕ_o, es decir:

$$G(\phi) = N\delta(\phi - \phi_o) = \begin{cases} N & \phi = \phi_0 \\ 0 & \phi \neq \phi_0 \end{cases} \qquad (25)$$

En cambio, como la agrupación tiene una longitud finita (N finito), la respuesta angular será en realidad una función sinc (ved el ejercicio 8):

$$G(\phi)=\frac{\left|\operatorname{sen}\left(0,5\pi N\left[\operatorname{sen}(\phi)-\operatorname{sen}(\phi_0)\right]\right)\right|}{\left|\operatorname{sen}\left(0,5\pi\left[\operatorname{sen}(\phi)-\operatorname{sen}(\phi_0)\right]\right)\right|} \qquad (26)$$

Figura 8. Agrupación de $N = 8$ antenas separadas $\lambda/2$



En la figura se define el ángulo de llegada Φ_0 con respecto a la dirección perpendicular a la agrupación.

En la figura 9, se representa $G(\phi)$ para dos ángulos de llegada: $\phi_0 = 0$ y $\phi_0 = 90$. Tal como se ve en la figura, dos rayos que lleguen al receptor con ángulos de llegada 0º y $\Delta\phi$ se podrán distinguir si su separación angular $\Delta\phi$ es mayor que $\operatorname{arcosen}(2/N)$, que es el ángulo en el que tiene lugar el primer cero de la sinc. Si la separación angular es menor que este valor, los lóbulos principales de ambas señales se superpondrán y el receptor no los podrá separar angularmente. Del mismo modo, si las dos señales llegan a la agrupación con ángulos 90º y 90º – $\Delta\phi$, la separación angular $\Delta\phi$ tendrá que ser $90 + \operatorname{arcosen}(2/N - 1)$ para poder separarlos. Si echamos cuentas, para $N = 8$ nos sale que la separación para $\phi_0 = 0$ tiene que ser 14,5º, mientras que para $\phi_0 = 90°$, tiene que ser 41,4º (figura 9). Esto significa que la agrupación es más resolutiva (directiva) para valores de ϕ_0 pequeños. En el caso general, se puede demostrar que dos rayos se pueden separar en recepción si se cumple que su separación es mayor que (27):

Separación angular

Es evidente que no pasamos del blanco al negro de manera abrupta y, cuanto más separados están los dos rayos, mejor se distinguen. Por lo tanto, la separación angular indicada se tiene que entender como un valor de referencia.

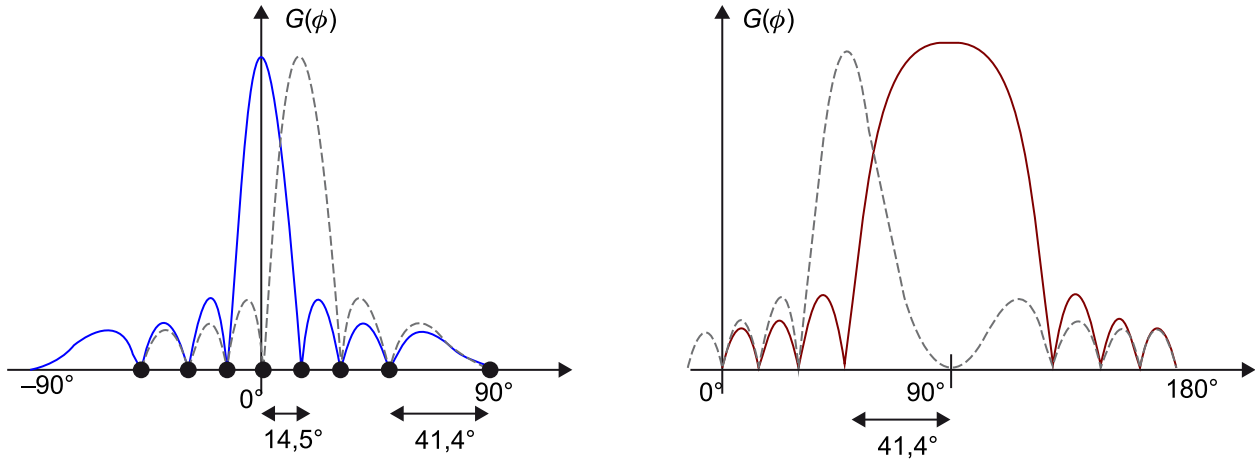
$$\Delta\phi = \phi_0 + \operatorname{arcosen}\left(2/N - \operatorname{sen}(\phi_0)\right) \qquad (27)$$

donde ϕ_0 es el ángulo de incidencia de un rayo y $\phi_0 - \Delta\phi$ es el ángulo del otro rayo (ved el ejercicio 9 de las actividades).

Basándonos en esta explicación, se define la resolución angular del receptor como la separación angular mínima ($\Delta\phi$) que deben tener dos rayos incidentes para que el receptor los pueda discriminar (separar) y no los confunda. Por el contrario, cualquier conjunto de rayos que llegue con una separación angular menor que la resolución angular del receptor será integrado por el receptor y se procesará como uno solo. Esto significa que una agrupación lineal de N elementos solo podrá discernir N ángulos de llegada diferentes, tal como se

indica en la figura 10 para el caso $N = 8$ (que son los mismos ángulos marcados con puntos en la figura 9). Como se indica en la figura, estos ángulos dividen la agrupación en $N = 8$ sectores, que hemos numerado del 1 al 8.

Figura 9. Respuesta angular de una agrupación lineal (1)



Respuesta angular de una agrupación lineal de $N = 8$ antenas a una señal que llega con inclinación $\Phi_0 = 0$ (izquierda) o $\Phi_0 = 90$ (derecha). En línea gris discontinua se indica la respuesta de la agrupación cuando se recibe una señal separada 14,5° (figura de la izquierda) o 41,4° (figura de la derecha), que corresponde a la resolución angular de la agrupación en las dos direcciones consideradas. Los puntos de la figura de la izquierda marcan los $N = 8$ ángulos que la agrupación tiene capacidad de resolver.

Antes de terminar esta explicación, hay que comentar los puntos siguientes:

a) Por reciprocidad, todo lo que hemos explicado en recepción es igualmente aplicable en transmisión. Esto significa que solo son distinguibles dos señales transmitidas por una agrupación de N elementos si se transmiten en direcciones separadas angularmente como mínimo $\Delta\phi$ (ecuación (27)).

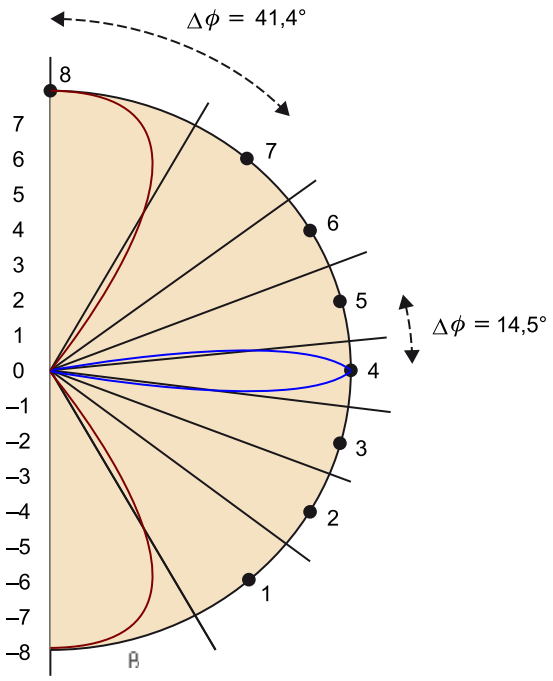
b) La resolución angular solo depende de las dimensiones de la agrupación, normalizadas con respecto a la longitud de onda λ. En el caso de la agrupación lineal estudiada con elementos separados $d_0 = \lambda/2$, la longitud (normalizada) de la agrupación es $N/2$. Por lo tanto, si aumentamos la longitud de la agrupación (N), mejoraremos la resolución angular. En cambio, se puede demostrar que si separamos más las antenas ($d_0 > \lambda/2$) pero mantenemos la longitud de la agrupación, la resolución angular no mejorará y aparecerán lóbulos principales espurios en la respuesta angular de la agrupación (ecuación (26)). Eso significa que la agrupación recibe o transmite en más de una dirección. Por el contrario, si juntamos los elementos de la agrupación ($d_0 < \lambda/2$) sin cambiar la longitud de la agrupación, tampoco lograremos mejorar la resolución angular.

c) Si hiciéramos tender la longitud de la agrupación (ecuación (26)) a infinito ($N \to \infty$), la respuesta de la agrupación $G(\phi)$ tendería a una delta (ecuación (25)) y la resolución angular se volvería 0º para cualquier ángulo de incidencia ϕ_o (ecuación (27)).

Una vez explicado el concepto de resolución angular, estamos en condiciones de calcular cuántas componentes del canal MIMO h_{kn} (figura 7) son estadísticamente independientes. Como el transmisor y el receptor solo pueden dis-

criminar N_t y N_r direcciones de llegada diferentes, podemos sectorializar las agrupaciones del transmisor y del receptor en N_t y N_r sectores, respectivamente (figura 10). Entonces, se demuestra que la ganancia de diversidad es igual al número de sectores del transmisor y del receptor que están interconectados.

Figura 10. Respuesta angular de una agrupación lineal (2)



Respuesta angular de una agrupación lineal de $N = 8$ antenas a una señal que llega con inclinación $\Phi_0 = 0°$ (azul) o $\Phi_0 = 90°$ (rojo). Solo se ha dibujado el lóbulo principal para simplificar el dibujo. Se han señalado también los $N = 8$ ángulos que la agrupación es capaz de discriminar. Por ejemplo, todos los rayos que entren dentro del sector angular marcado con el número 4 estarán integrados por la agrupación e interpretados como si llegaran con un ángulo de 0°. Hay que señalar que, por simetría, la agrupación presenta la misma respuesta por delante, $|\Phi_0| \leq 90°$, y por detrás, $|\Phi_0| > 90°$.

Para entenderlo mejor, en la figura 11 hemos planteado un escenario típico en comunicaciones móviles en el que hay diferentes obstáculos en el entorno del transmisor y el receptor en los que la señal se difracta o se refleja (propagación multicamino).

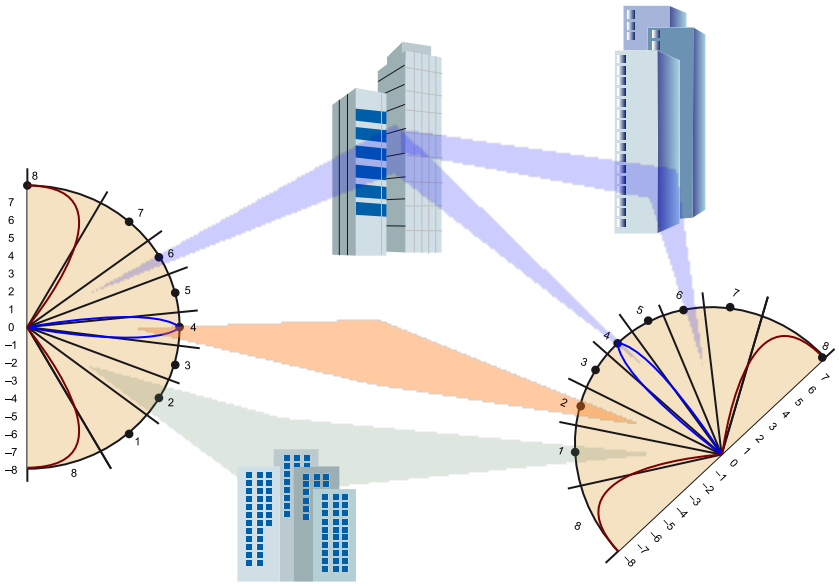
Aunque el transmisor y el receptor disponen de ocho antenas cada uno y la ganancia de diversidad potencial sería 64, la ganancia de diversidad del escenario mostrado en la figura no puede ser mayor que 4 porque solo hay cuatro conexiones entre el transmisor y el receptor. Estas cuatro conexiones son (ved la figura 11):

- Sector 6 del transmisor conectado con los sectores 4 y 6 del receptor (haces azules). Para que un sector se pueda conectar con dos sectores (como es el caso), en general es necesario que la señal se difracte en más de un obstáculo.

- Sector 4 del transmisor conectado con el sector 2 del receptor (haz naranja). Esta componente corresponde al rayo directo.

- Sector 2 del transmisor conectado con el sector 1 del receptor (haz gris).

Figura 11. Escenario de propagación multicamino con tres edificios en los que la señal se difracta o se refleja



Se considera que el transmisor y el receptor tienen ocho antenas cada uno y, por lo tanto, los diagramas de radiación presentan ocho sectores. La ganancia de diversidad depende de cuántos sectores del transmisor y el receptor están interconectados.

La conclusión más importante a la que llegamos es que la diversidad espacial de un canal MIMO depende fundamentalmente de los tres aspectos siguientes:

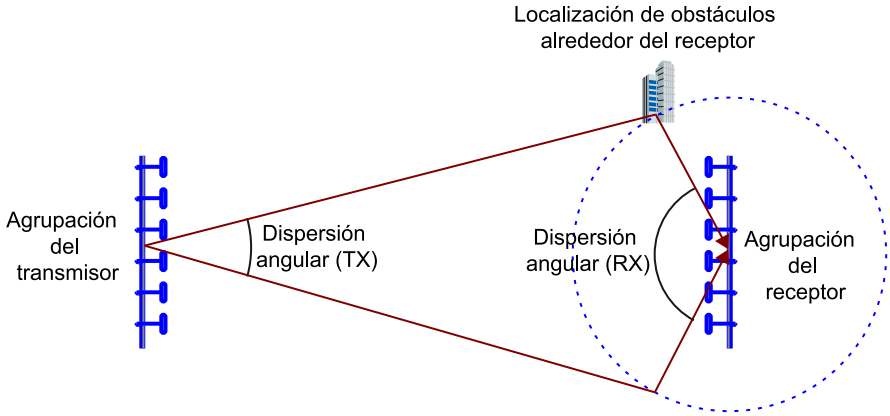
1) Dispersión angular de la señal en el transmisor y el receptor. Esta dispersión solo es posible cuando hay propagación multicamino y la señal se refleja en obstáculos que están apartados angularmente de la dirección de visión directa entre el transmisor y el receptor (LOS). Si la propagación se produjera en el espacio libre (solo el haz naranja), no habría ganancia de diversidad. En un escenario con muchos obstáculos alrededor del transmisor, la dispersión angular del transmisor sería máxima ($-90^o < \phi < 90^o$) y se conseguiría máxima diversidad espacial en transmisión (ved la figura 12). Si consideramos un escenario con muchos obstáculos alrededor del receptor, la dispersión angular en recepción será máxima ($-90^o < \phi < 90^o$) y conseguiremos la máxima diversidad espacial en recepción (ved la figura 13). Si se dan ambas condiciones, se podrá alcanzar la máxima ganancia de diversidad, que es $N_t \times N_r$.

2) Interconexión de los sectores del transmisor y del receptor. Para que la ganancia de diversidad sea grande es necesario que cada sector del transmisor esté conectado con el máximo número de sectores del receptor. Para que un sector del transmisor (o del receptor) esté conectado con más de un sector del receptor (o del transmisor) es necesario que la señal rebote en más de un objeto antes de llegar al receptor (el haz azul de la figura 11), o que el tamaño

del último (o del primer) obstáculo sea lo bastante grande como para que la dispersión angular que se genera allí supere la resolución angular del receptor (o del transmisor).

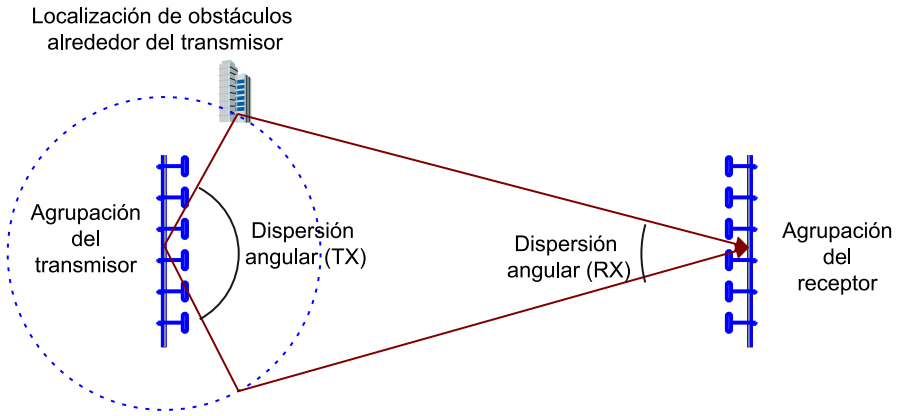
3) Independencia de *fadings*. Si la señal se refleja en obstáculos diferentes (haces azul y verde de la figura 11), podremos asumir que las señales transmitidas o recibidas por sectores diferentes experimentarán atenuaciones y retardos independientes. Además, si el número de rayos que se transmiten y se reciben entre cada par de sectores transmisor y receptor es lo bastante grande, la distribución de los coeficientes h_{kn} del canal se volverá gaussiana por el teorema del límite central.

Figura 12. Escenario de propagación en el que los obstáculos están distribuidos alrededor del receptor



En este caso, la dispersión angular en el receptor es grande y la diversidad espacial se conseguirá en recepción.

Figura 13. Escenario de propagación en el que los obstáculos están distribuidos alrededor del transmisor



En este caso, la dispersión angular en el transmisor es grande y la diversidad espacial se conseguirá en transmisión.

Una vez conocida la diversidad espacial que nos ofrece el canal MIMO, vamos a estudiar las diferentes técnicas que nos permiten hacer uso de esta diversidad. Consideraremos varios casos en función de las situaciones siguientes:

- Si la matriz de canal **H** (ecuación (24)) es conocida por el transmisor o solo por el receptor.

- Si se utiliza el canal MIMO para ganar diversidad (reducir probabilidad de error cuando hay *fadings*) o para aumentar la velocidad de transmisión (ganancia de multiplexación).

4.1. Conformación de haz

En los escenarios en los que el canal varía con mucha lentitud y hay un canal de retorno entre el receptor y el transmisor, el receptor puede estimar la matriz de canal **H** y enviar el valor de los coeficientes al transmisor para que elija de manera óptima la señal que transmite por cada antena. Si queremos conseguir toda la ganancia de diversidad que nos ofrece el canal MIMO, tenemos que transmitir cada símbolo de información utilizando las N_t antenas transmisoras. La ganancia de cada antena transmisora y receptora se tiene que ajustar en función de la matriz **H** para maximizar la *SNR* en recepción y maximizar así la ganancia de codificación (ved el apartado 1).

Enlaces bidireccionales en modo TDD

En los enlaces bidireccionales en modo *TDD* (*time division duplexing*, 'dúplex por división de tiempo'), el canal es el mismo en ambos sentidos de la comunicación y no es necesario un canal de retorno.

Si llamamos s al símbolo de información que queremos transmitir y $\mathbf{b}_{tx}$ al vector (columna) que contiene la ganancia de cada una de las N_t antenas transmisoras, el vector de símbolos que transmitiremos será:

$$\mathbf{x} = \mathbf{b}_{tx} s \qquad (28)$$

Por otro lado, el receptor tendría que combinar la señal recibida en cada una de las N_r antenas de manera coherente para decidir el valor del símbolo transmitido s con la máxima fiabilidad posible. El resultado de esta combinación es el escalar siguiente:

Superíndice *H*

El superíndice $(\ )^H$ indica transposición (cambiar columnas por filas) y conjugación (cambiar el signo de la fase).

$$z = \mathbf{b}_{rx}^H \mathbf{y} \qquad (29)$$

donde $\mathbf{b}_{rx}$ es el vector que contiene la ganancia de las N_r antenas receptoras e **y** es el vector que contiene la señal recibida en cada una (ecuación (24)). Se puede demostrar (ved el ejercicio 10 de las actividades) que los vectores $\mathbf{b}_{tx}$ y $\mathbf{b}_{rx}$ que maximizan la *SNR* de z se tienen que calcular de la manera siguiente:

1) Hay que calcular la descomposición en valores singulares (*singular-value decomposition*, *SVD*) de la matriz **H**:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H \qquad (30)$$

donde **U** es la matriz de dimensiones $N_r \times N$ que contiene los N autovectores de **H** por la izquierda ($\mathbf{u}_i$), **V** es la matriz de dimensiones $N_t \times N$ que contiene los N autovectores de **H** por la derecha ($\mathbf{v}_i$) y $\mathbf{\Sigma}$ es la matriz diagonal de dimen-

siones $N \times N$ que contiene en la diagonal los N valores singulares σ_i no nulos de la matriz **H**. La SVD permite diagonalizar cualquier matriz aunque no sea cuadrada, como es el caso de **H** cuando $N_t \neq N_r$.

2) Hay que buscar el autovector por la izquierda ($\mathbf{u}_i$) y por la derecha ($\mathbf{v}_i$) correspondientes al valor singular máximo $\sigma_{max} = \max_i \sigma_i$, que denominaremos $\mathbf{u}_{max}$ y $\mathbf{v}_{max}$, respectivamente.

Se puede demostrar que los vectores $\mathbf{b}_{tx}$ y $\mathbf{b}_{rx}$ que maximizan la *SNR* de z (ecuación (29)) son $\mathbf{b}_{tx} = \mathbf{v}_{max}$ y $\mathbf{b}_{rx} = \mathbf{u}_{max}$. Estos dos vectores se denominan *conformadores de haz* porque ajustan los diagramas de radiación del transmisor y del receptor para maximizar la transferencia de energía por medio del canal MIMO.

Ved también

En el ejercicio 11 de las actividades se propone buscar los conformadores óptimos en el caso particular de un canal MISO o de un canal SIMO.

Utilizando los conformadores de haz óptimos en transmisión y recepción, se puede demostrar que la señal z de la ecuación (29) toma el valor siguiente (ved el ejercicio 10 de las actividades):

$$z = \sigma_{\max} s + \mathbf{u}_{\max}^H \mathbf{w} \qquad (31)$$

Se puede demostrar que el esquema de diversidad presentado consigue la máxima ganancia de diversidad y la máxima ganancia de codificación (ved el apartado 1), es decir, la *SNR* de z es menor que $\sigma_{max}^2/\sigma_w^2$ para cualquier otro diseño de los conformadores de haz que hagamos.

4.2. Codificación espaciotemporal

Aunque no se conozca el canal en transmisión, se puede conseguir toda la ganancia de diversidad del canal utilizando los códigos espaciotemporales que vamos a explicar en este subapartado. Sin embargo, el precio que se paga por el hecho de no conocer el canal en transmisión es que la *SNR* que conseguiremos será menor que en el apartado anterior.

Si no conocemos la matriz de canal **H** en transmisión y queremos continuar utilizando un receptor lineal sencillo, no se podrá transmitir el mismo símbolo por todas las antenas en un solo instante de tiempo, como hemos hecho en el subapartado 4.1 en la ecuación (28), sino que se tienen que hacer $T \geq N_t$ transmisiones y en cada transmisión transmitir una combinación diferente de los símbolos de información. Si denotamos por $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_T]$ la matriz que contiene la combinación de símbolos transmitidos por las N_t antenas en los T instantes de tiempo, tendremos que la ecuación (24) nos quedará de la manera siguiente, en la que hemos añadido la dimensión temporal (columnas de **X** e **Y**) a la dimensión espacial (filas de **X** e **Y**):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{HX} + \mathbf{W} \qquad (32)$$

Si la palabra código transmitida **X** contiene $R \cdot T$ símbolos de información diferentes, se dice que la tasa del código es R ($0 < R \leq 1$). En general, siempre que sea posible, se intenta que la tasa del código sea cercana a 1, de modo que los códigos espaciotemporales no introduzcan redundancia y sea el codificador de canal el que haga ese trabajo.

Ved también

Por el contrario, el código de repetición explicado en el apartado 1 tendría una tasa igual a $1/T$. En el caso estudiado, eso significaría que las palabras código transmitidas serían de la forma $\mathbf{X} = \mathbf{B}_{tx} \cdot s$, donde s es el símbolo de información transmitido y $\mathbf{B}_{tx}$, la matriz de dimensiones $N_t \times T$.

Igual que los códigos correctores de error, los códigos espaciotemporales se clasifican en códigos de bloque (*space-time block codes*, *STBC*) y códigos convolucionales (*space-time trellis codes*, *STTC*). Para simplificar la explicación, nosotros nos vamos a centrar en los primeros y estudiaremos los llamados códigos espaciotemporales ortogonales. Cuando hablamos de ortogonales, queremos decir que las palabras código **X** se diseñan de modo que los $R \cdot T$ símbolos transmitidos se puedan separar perfectamente en el receptor mediante un esquema lineal y las decisiones se puedan tomar entonces símbolo a símbolo. Como ejemplo, vamos a explicar el código de Alamouti, que se propuso en su origen para el caso de un canal MISO con dos antenas transmisoras ($T = N_t = 2$). Este es el código espaciotemporal que más se ha utilizado porque es sencillo y lo podemos encontrar en múltiples estándares de comunicaciones con diferentes nombres como, por ejemplo, UMTS o WiMax (3G).

En el código de Alamouti, las palabras código se construyen de la manera siguiente:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix} \qquad (33)$$

donde s_1 y s_2 son los símbolos (complejos) de información transmitidos y el operador $(\ )^*$ cambia el signo de la fase (conjugación). Como se transmiten dos símbolos en dos instantes de tiempo, la tasa del código de Alamouti es $R = 1$. Se demuestra que no hay ningún otro código espaciotemporal ortogonal que logre una tasa igual a 1 si los símbolos transmitidos son complejos (por ejemplo, QPSK). En concreto, la máxima tasa que se puede conseguir es 3/4. Esto no es del todo bueno pero es el precio que se tiene que pagar para que el código sea ortogonal.

Lectura complementaria

E. G. Larsson; P. Stoica (2003). *Space-time block coding for wireless communications*. Cambridge: Cambridge University Press.

Como tenemos dos antenas transmisoras y una sola receptora, podemos expresar las muestras recibidas en los dos instantes de tiempo de la manera siguiente (ecuación (32)):

$$[y_1 \ \ y_2] = [h_1 \ \ h_2]\mathbf{X} + [w_1 \ \ w_2] \qquad (34)$$

Y, si ahora sustituimos la ecuación (33) dentro de la ecuación (34) y conjugamos la muestra recibida en el segundo instante de tiempo, se podrá demostrar (ved el ejercicio 12 de las actividades) que llegamos a la expresión siguiente:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2^* \end{bmatrix} \qquad (35)$$

Identificando términos, se llega al siguiente canal MIMO equivalente de dos entradas y dos salidas:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2^* \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \widetilde{\mathbf{w}} \qquad (36)$$

Si queremos recuperar los símbolos de información s_1 y s_2, se demuestra que el descodificador óptimo (máxima verosimilitud) se podrá implementar linealmente de la manera siguiente (ved el ejercicio 13 de las actividades):

$$\mathbf{z} = \widetilde{\mathbf{H}}^H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2^* \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbf{H}}^H \widetilde{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \widetilde{\mathbf{H}}^H \widetilde{\mathbf{w}} \qquad = \left(|h_1|^2 + |h_2|^2\right) \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \widetilde{\mathbf{H}}^H \widetilde{\mathbf{w}} \qquad (37)$$

donde hemos tenido en cuenta que, por construcción, la matriz $\widetilde{\mathbf{H}}^H \widetilde{\mathbf{H}}$ es diagonal. Por lo tanto, el código de Alamouti es una manera ingeniosa de convertir el canal MISO en un canal MIMO de 2 × 2 por el que se puedan transmitir los dos símbolos de información de modo que se puedan recuperar linealmente en recepción y a la vez se consiga toda la ganancia de diversidad que ofrece el canal, que es 2.

Es importante comentar los aspectos siguientes del código de Alamouti:

- Se consigue la misma ganancia de diversidad que obtendríamos en un canal SIMO con una sola antena transmisora y dos antenas receptoras. La ventaja principal es que movemos la complejidad que tendría el receptor hacia el lado del transmisor. Esto es muy interesante en el caso del enlace de bajada de una red celular porque permite reducir la complejidad de los terminales de los usuarios a cambio de complicar las estaciones base del operador.

- Se logra la misma ganancia de diversidad que hemos obtenido en el subapartado 4.1 sin que el transmisor tenga que conocer el canal. Sin embargo, fijada la potencia transmitida, se produce una pérdida de 3 dB de *SNR* con respecto a la del subapartado 4.1.

- Se puede utilizar también con N_r antenas en recepción (ved el ejercicio 14 de las actividades). En tal caso, se consigue una ganancia de diversidad igual a $2N_r$.

4.3. Multiplexación espacial

En este subapartado vamos a explicar una manera alternativa de utilizar la diversidad del canal. En vez de intentar mejorar la probabilidad de error como hemos hecho hasta ahora (ganancia de diversidad), el objetivo será incrementar la velocidad de transmisión multiplexando espacialmente en cada transmisión N símbolos de información diferentes. De este modo, podremos incrementar la tasa de transmisión en un factor N sin aumentar el ancho de banda del sistema. El parámetro N se conoce como *ganancia de multiplexación* (espacial) del canal MIMO.

Este descubrimiento es en realidad uno de los más importantes que se han hecho en los últimos años en el área de las comunicaciones inalámbricas. En la actualidad hay varios estándares que incorporan múltiples antenas para incrementar la velocidad de transmisión. Uno de estos estándares es el IEEE 802.11n, que permite conexiones wifi de 108 Mbps gracias al uso de dos antenas en transmisión y dos antenas en recepción, utilizando el mismo ancho de banda que en el IEEE 802.11g (20 MHz).

La primera pregunta que nos tendríamos que plantear es cuál es la ganancia de multiplexación N que podemos alcanzar. La respuesta es que depende de la matriz de canal **H** que tengamos. En concreto, se puede demostrar que la ganancia de multiplexación la determina el rango de la matriz **H** (ecuación (30)). Como **H** es una matriz de dimensiones $N_t \times N_r$, el rango de **H** no puede ser nunca mayor que $\min(N_t, N_r)$, y por lo tanto se cumple la relación siguiente:

$$N \leq \min(N_t, N_r) \qquad (38)$$

Rango de una matriz

Recordemos que el rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes. Si hacemos la descomposición SVD de la matriz, el rango será también el número de valores singulares diferentes de cero (ved el subapartado 4.1).

Aunque en muchos casos se cumple que $N = \min(N_t, N_r)$, hay situaciones en las que el rango de **H** es menor que este valor. Si recordamos la explicación que hemos dado en el apartado 4 (ved la figura 11), la ganancia de diversidad dependía del número de interconexiones entre los N_t sectores del diagrama de radiación del transmisor y los N_r sectores angulares del receptor. Por esta razón, la máxima ganancia de diversidad que se puede conseguir es $N_t \times N_r$: cada sector del transmisor conectado con cada sector del receptor. Del mismo modo, se puede demostrar que para conseguir la máxima ganancia de multiplexación debe haber $N = \min(N_t, N_r)$ sectores angulares en el transmisor que estén conectados con un mínimo de $N = \min(N_t, N_r)$ sectores diferentes del receptor. Por ejemplo, aunque en la figura 11 el transmisor y el receptor tienen ocho antenas, la ganancia de multiplexación que se podría alcanzar en este canal sería tres, en lugar de ocho.

Una vez identificada la ganancia de multiplexación que ofrece el canal MIMO, vamos a explicar cuál es el esquema de transmisión que nos permite transmitir a la máxima velocidad posible con una probabilidad de error tan pequeña como sea necesaria. La máxima velocidad de un canal MIMO en bits por segundo se conoce como *capacidad del canal*:

$$C = \max_{P_k} \sum_{k=1}^{N} B \cdot \log_2\left(1 + \frac{P_k \sigma_k^2}{\sigma_w^2}\right) \qquad (39)$$

La capacidad del canal es la suma de la capacidad de los N subcanales ortogonales en los que podemos descomponer el canal MIMO mediante la descomposición SVD estudiada en la ecuación (30).

La notación utilizada en la ecuación (39) es la siguiente: B es el ancho de banda del sistema, σ_w^2 es la varianza del ruido w_n en la ecuación (23), σ_k es el valor singular número k de la matriz de canal $\mathbf{H}$ (ecuación (30)), P_k es la potencia asignada al subcanal k, y P, definida como la expresión (40), es la potencia total transmitida, que el transmisor tiene que repartir de manera óptima entre los N subcanales:

$$P = \sum_{k=1}^{N} P_k \qquad (40)$$

Ahora que sabemos cuál es la capacidad del canal MIMO estudiado, vamos a presentar cómo hay que hacer para transmitir a una velocidad cercana a la capacidad cuando la matriz $\mathbf{H}$ es conocida por el transmisor.

1) Transmisor. En cada periodo de símbolo, el transmisor transmite por las N_t antenas el vector:

$$\mathbf{x} = \mathbf{VPs} \qquad (41)$$

donde $\mathbf{s}$ es el vector que contiene los N símbolos de información $s_1, \ldots, s_N$, $\mathbf{V}$ es la matriz de dimensiones $N_t \times N$ que contiene en las columnas los N autovectores por la derecha de la matriz $\mathbf{H}$ (ecuación (30)) y $\mathbf{P}$ es la matriz diagonal que fija las potencias transmitidas por cada uno de los N subcanales ortogonales para maximizar la capacidad del canal (ecuación (39)) fijada la potencia total transmitida (ecuación (40)):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{P_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{P_N} \end{bmatrix} \qquad (42)$$

Probabilidad de error

La probabilidad de error depende del código corrector de errores utilizado. En teoría, la probabilidad de error se puede reducir tanto como sea necesario incrementando la longitud de las palabras código.

Waterfilling

El criterio óptimo de reparto de la potencia se denomina *waterfilling* (ved el ejercicio 15 de las actividades).

2) Receptor. En cada instante, el receptor procesa la salida del canal MIMO de la manera siguiente:

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}^H \mathbf{y} \qquad (43)$$

Como resultado se obtiene una versión escalada y ruidosa del vector de símbolos transmitidos (ecuación (44)), en la que **U** es la matriz de dimensiones $N_r \times N$ que contiene los N autovectores de **H** por la izquierda, $\mathbf{\Sigma}$ es la matriz diagonal de dimensiones $N \times N$ que contiene en la diagonal los N valores singulares no nulos de **H** (ecuación (30)) y se cumple que el ruido $\mathbf{U}^H\mathbf{w}$ tiene la misma varianza que el ruido original **w**:

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Sigma P s} + \mathbf{U}^H \mathbf{w} \qquad (44)$$

Observando la ecuación (44) vemos que la SVD nos ha permitido descomponer el canal MIMO en N subcanales ortogonales por los que se puede transmitir información independiente, y aumentar de este modo la velocidad de transmisión en un factor N.

La pregunta que nos queda por responder es la siguiente: ¿se puede conseguir la misma ganancia de multiplexación sin conocer el canal en transmisión? Por fortuna, la respuesta es afirmativa y los esquemas de transmisión utilizados en este caso reciben el nombre de *BLAST* (*bell labs space-time architectures*). Como en BLAST no se conoce el canal en transmisión, cada uno de los $N = N_t$ símbolos de información se transmiten por una antena diferente, es decir, $\mathbf{x} = \mathbf{s}$. Por consiguiente, el receptor tendrá que tener $N_r \geq N$ antenas para que la ganancia de multiplexación pueda ser N. Además, como el canal es desconocido en transmisión, no es posible dividir el canal MIMO en N subcanales independientes, y por lo tanto, el receptor tendrá que ser más complicado porque tendrá que descodificar en conjunto los N símbolos transmitidos.

Una alternativa a la descodificación conjunta que se puede utilizar en algunos casos es el llamado receptor *SIC* (*successive interference cancellation*), en el que se descodifican los N símbolos secuencialmente, empezando por el más potente. En el receptor SIC, cada vez que se descodifica un símbolo se sustrae el valor de la señal $\mathbf{y}$ recibida de modo que, después de descodificar con éxito los primeros $k-1$ símbolos ($s_1, \ldots, s_{k-1}$), el símbolo s_k se descodifica utilizando una versión limpiada de la señal que solo incluye la interferencia de los símbolos todavía no descodificados ($s_{k+1}, \ldots, s_N$):

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y} - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{h}_i \hat{s}_i = \mathbf{h}_k s_k + \sum_{i=k+1}^{N} \mathbf{h}_i s_i + \mathbf{w} \qquad (45)$$

donde $\mathbf{h}_i$ es la columna i de la matriz de canal $\mathbf{H}$ y $\hat{s}_i$ es la decisión del símbolo s_i hecha sobre la base de $\hat{\mathbf{y}}_i$ en la iteración número i.

V-BLAST

Este esquema en concreto ($\mathbf{x} = \mathbf{s}$) se denomina *V-BLAST* (*vertical BLAST*). Se demuestra que V-BLAST es óptimo cuando el transmisor no conoce el canal y el canal es variante en el tiempo. Hay otra versión que funciona mejor en canales lentamente variantes en el tiempo y que se denomina *D-BLAST* (*diagonal BLAST*). El problema del V-BLAST es que no explota la diversidad espacial en transmisión del canal porque no transmite el mismo símbolo por las N_t antenas del transmisor. En D-BLAST este problema se soluciona haciendo codificación espaciotemporal (ved el subapartado 4.2) de modo que cada símbolo se transmite por las N_t antenas en instantes de tiempo diferentes.

4.4. Antenas inteligentes

En este apartado, hemos aprendido que podemos utilizar las antenas del transmisor y el receptor para aumentar la fiabilidad de la transmisión ante los *fadings* del canal (diversidad) o aumentar la velocidad de transmisión (multiplexación espacial). En este subapartado vamos a considerar una tercera manera de utilizar las antenas del transmisor y el receptor. En este caso, queremos filtrar espacialmente las señales interferentes procedentes de otros usuarios del sistema. Mediante este filtrado espacial es posible conseguir que múltiples usuarios compartan el mismo medio sin que se interfieran o el nivel de interferencia sea bastante bajo. Esta técnica de acceso múltiple o multiplexación se denomina SDM/A (*space division multiplexing / multiple-access*) y se explica en otra asignatura. A continuación, vamos a explicar cómo podemos utilizar las antenas del transmisor y del receptor en escenarios SDM/A.

Ved también

La técnica SDM/A de multiplexación se ve en el módulo didáctico "Multiplexación y sistemas de acceso múltiple" de la asignatura *Sistemas de comunicaciones I*.

Consideremos un sistema con N_u usuarios que comparten espacialmente el mismo canal de comunicaciones. El objetivo es diseñar para cada usuario un conformador de haz (*beamformer*) para el transmisor $\mathbf{b}_{tx}$ y otro para el receptor $\mathbf{b}_{rx}$ que permitan maximizar la *SNIR* en recepción del usuario con el que nos queremos comunicar sin degradar demasiado la *SNIR* de los demás $N_u - 2$ usuarios del sistema. Así pues, la interferencia que aparece en el denominador de la *SNIR* es la interferencia de acceso múltiple proveniente de los $N_u - 2$ usuarios que comparten el medio con el usuario de interés. Por lo tanto, queremos maximizar la energía que enviamos al usuario de interés a la vez que minimizamos la interferencia que se genera sobre el resto de usuarios del sistema.

Aunque en los dos casos se habla de conformación de haz (*beamforming*), el criterio adoptado en este subapartado es muy diferente del que hemos considerado en el subapartado 4.1. Si releemos el subapartado 4.1, veremos que entonces queríamos maximizar la *SNR* del receptor en un escenario sin inter-

ferencias (solo dos usuarios) usando la diversidad espacial del canal, mientras que ahora queremos maximizar la *SNIR* de los N_u usuarios del sistema en un escenario con interferencias.

La clave para diseñar los conformadores de haz del transmisor y del receptor es recordar que el diagrama de radiación de una agrupación de N antenas omnidireccionales presenta $N - 1$ nulos (ved la figura 10). Ello significa que hay $N - 1$ direcciones del espacio en las que la agrupación no transmite (ni tampoco recibe) ninguna energía. Lo más importante es que la posición de estos $N - 1$ nulos se puede fijar electrónicamente cambiando el valor de los coeficientes del conformador. Por ejemplo, si el conformador $\mathbf{b}_{tx}$ es un vector de todo unos, el diagrama de radiación será exactamente el de la figura 10 y encontraremos los cruces por cero en los ángulos $\phi_i = \text{arcosen}(2i/N)$, con i un entero entre $-N/2 + 1$ y $N/2$ ($i \neq 0$).

Si tenemos presente esto y el transmisor de un usuario sabe en qué dirección se encuentra el usuario de interés y en qué dirección se encuentran los demás $N_u - 2$ usuarios, podrá ajustar su conformador $\mathbf{b}_{tx}$ para que el lóbulo principal apunte en la dirección del usuario de interés y el diagrama de radiación tenga ceros en las $N_u - 2$ direcciones en las que están los demás usuarios. La única limitación es que el ancho angular del lóbulo principal no puede ser menor que $2\text{arcosen}(2/N_t)$, y por lo tanto el conformador no puede cancelar nunca espacialmente a los usuarios que estén separados por un ángulo de menos de $\text{arcosen}(2/N_t)$ radianes del usuario de interés, que es la resolución angular $\Delta\phi$ de la agrupación ($\Delta\phi = 14{,}5^{\circ}$ en el ejemplo de la figura 10).

Del mismo modo, si el receptor sabe en qué dirección se encuentra el transmisor de interés y en qué direcciones se encuentran los demás usuarios del sistema, podrá diseñar su conformador $\mathbf{b}_{rx}$ para que el lóbulo principal apunte en la dirección del usuario de interés y la agrupación tenga una respuesta nula en la dirección de los demás $N_u - 2$ usuarios. Otra vez, la limitación es la resolución angular del receptor, que depende del número de antenas receptoras y vale $\Delta\phi = \text{arcosen}(2/N_r)$.

En ambos casos, para diseñar los conformadores de haz es necesario que los usuarios conozcan sus posiciones angulares. Lo normal es que no se disponga *a priori* de esta información porque los usuarios en una red inalámbrica se mueven con libertad y cambian de posición. Por lo tanto, es necesario que los usuarios aprendan en qué posición (angular) se encuentran sus compañeros y monitoreen dicha posición a lo largo del tiempo. Por esta razón, en los años noventa esta tecnología recibió el nombre comercial de *antenas inteligentes* (*smart antennas*), ya que deben tener cierta inteligencia para aprender dónde están los demás usuarios y cambiar en consecuencia el propio diagrama de radiación. Para terminar, cabe comentar que en recepción se pueden aplicar técnicas de filtrado adaptativo para ajustar en cada momento los coeficientes

de $\mathbf{b}_{rx}$ que maximizan la *SNIR* del receptor en función de la señal que se recibe, que contiene información de dónde procede la interferencia y también del nivel de ruido del receptor.

5. Conclusiones

En este módulo didáctico hemos explicado un concepto que es clave en el diseño de sistemas de comunicaciones cuando el canal presenta *fadings*. Este concepto es la diversidad. Como la atenuación del canal es variante en el dominio del tiempo, de la frecuencia o del espacio, los esquemas de diversidad transmiten la información utilizando varias componentes temporales, frecuenciales o espaciales del canal. Si la atenuación de las componentes del canal utilizadas es estadísticamente independiente, lo más probable es que alguna versión de la señal transmitida se reciba con suficiente calidad para recuperar de manera correcta la información transmitida. Para garantizar que las componentes del canal utilizadas sean independientes, deben estar suficientemente separadas. En el dominio temporal, esta separación tiene que ser superior al tiempo de coherencia del canal, mientras que en el dominio frecuencial hay que utilizar frecuencias que estén más separadas que el ancho de banda de coherencia del canal. En cuanto al dominio del espacio, hay que enfocar la agrupación de antenas en direcciones con una separación angular suficiente para que la señal se refleje o se difracte en obstáculos independientes.

Según cuál sea el dominio en el que el canal es variante (selectivo), el esquema de diversidad que habrá que utilizar será diferente. Si la diversidad es temporal (canal variante en el tiempo), se podrán utilizar los códigos correctores de error clásicos acompañados de un entrelazador que separe en el tiempo los símbolos que salen del codificador de modo que estos símbolos vean realizaciones independientes del canal. Si la diversidad se da en el dominio de la frecuencia (canal selectivo en frecuencia), habrá diferentes maneras de explotar la diversidad del canal. El modo más directo es transmitiendo los símbolos que salen del codificador de canal, convenientemente entrelazados, mediante una modulación OFDM. Otra opción es dejar que sea el ecualizador del receptor el que extraiga la diversidad frecuencial del canal. En sistemas de espectro ensanchado, se puede aprovechar que los receptores tienen una alta resolución temporal para extraer la energía de las diferentes componentes del multicamino mediante el llamado receptor RAKE.

Por otro lado, hay que disponer de múltiples antenas en transmisión o recepción (MIMO) si se quiere usar la diversidad espacial del canal. Las componentes del multicamino que llegan al receptor con diferente ángulo de llegada normalmente están afectadas por atenuaciones independientes porque por el camino han rebotado en objetos diferentes. De este modo, la diversidad espacial que se puede conseguir en recepción depende de la dispersión angular con la que la señal llega al receptor y de la resolución angular del receptor,

que depende del número de antenas del receptor y de la separación entre ellas (normalmente $\lambda/2$). Por reciprocidad, todo esto es cierto también en el caso del transmisor.

La diversidad espacial se puede utilizar de dos maneras:

1) En primer lugar, se puede utilizar para transmitir con más fiabilidad (menos probabilidad de error) sin tener que reducir la velocidad de transmisión. Si queremos reducir la probabilidad de error tenemos que maximizar la *SNR* en recepción. Cuando el canal es conocido por el transmisor, este tiene que utilizar esta información para conformar angularmente la señal transmitida de manera óptima. En cambio, cuando el canal lo conoce solo el receptor, lo mejor que puede hacer el transmisor es codificar el símbolos mediante un código espaciotemporal, como por ejemplo el código de Alamouti.

2) En segundo lugar, si se usa la diversidad espacial para transmitir a más velocidad (multiplexación espacial), el esquema de transmisión óptimo requiere descomponer el canal MIMO en N subcanales independientes y repartir la potencia y los bits entre los N subcanales en función de la *SNR*. Para hacerlo, hay que conocer el canal en transmisión. Sin embargo, si no se conoce, hay esquemas de multiplexación espacial conocidos como BLAST, que no requieren conocer el canal en transmisión.

Para terminar, queremos señalar que el objetivo de este módulo no ha sido presentar todas las técnicas de diversidad existentes ni tampoco analizar las prestaciones con detalle. El objetivo es entender la necesidad de aprovechar la diversidad del canal cuando se transmite en canales con *fading*, ver las diferentes tipos de diversidad que nos ofrece el canal de comunicaciones, y finalmente, entender cómo funcionan a alto nivel algunos de los algoritmos de diversidad más importantes.

Actividades

1. La propagación multicamino no siempre es perjudicial. Con cierta probabilidad, las diferentes componentes del canal se suman coherentemente (en fase) y el nivel de señal recibida es mayor que el que tendríamos sin propagación multicamino.

a) Supongamos que, debido al multicamino, la potencia de la señal recibida sigue una distribución exponencial $f_P(P) = \exp(-P/\overline{P})/\overline{P}$, donde $\overline{P}$ es la potencia media recibida. Esta es la distribución de la potencia recibida en el llamado *canal Rayleigh*. Calculad la probabilidad de que un usuario reciba una potencia superior a dos veces la potencia media $\overline{P}$.

b) Consideremos ahora un sistema con $N = 20$ usuarios. Si la potencia que reciben los N usuarios es independiente y sigue la misma distribución exponencial, calculad la probabilidad de que alguno de los N usuarios reciba una potencia superior a $2\overline{P}$.

2. La resolución temporal de un receptor paso banda es igual a la inversa de su ancho de banda W.

a) Aplicad el teorema de muestreo y demostrad que:

- se tiene que tomar una muestra cada $1/W$ segundos.
- cada muestra se calcula integrando la señal recibida mediante un filtro $h_r(t)$ de duración efectiva $1/W$.

b) Comentad qué ocurriría si se redujera o se aumentara la frecuencia de muestreo.

c) Por dualidad, discutid cuál es la resolución frecuencial de un sistema que transmite pulsos de T segundos de duración.

3. Calculad la ganancia de diversidad que se puede conseguir en un sistema BPSK si se utiliza el siguiente código de Hamming (7,4) con matriz generadora:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

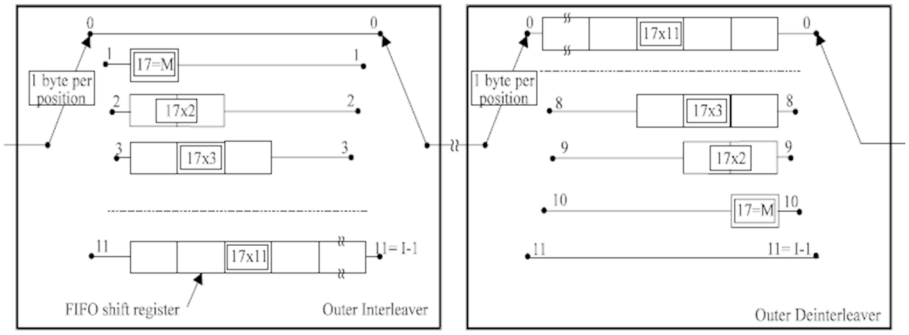
4. Comparad la *SNR* media a la salida del combinador de igual ganancia y del combinador de máxima relación señal-ruido por el canal Rayleigh. Dejad el resultado en función de N y de σ_w^2. Suponed que N es muy grande. Si lo consideráis necesario, podéis resolver numéricamente el ejercicio mediante un programa matemático.

5. En este ejercicio, se quiere estudiar el siguiente esquema de entrelazamiento, denominado convolucional, que se utiliza en la TDT (estándar DVB-T) y también en los estándares DVB-S (satélite) y DVB-C (cable).

En el estándar, cada trama de $N = 204$ bytes que sale del codificador MPEG se entrelaza utilizando $K = 12$ registros de desplazamiento de diferente longitud. En concreto, el registro de desplazamiento i tiene una longitud igual a $i \cdot N/K$ bytes con $i = 0, \ldots, K-1$. Tal como se indica en la figura, los bytes de entrada se escriben uno tras otro en los registros de desplazamiento, empezando por el registro $i = 0$. Para simplificarlo, vamos a considerar una trama más corta ($N = 12$) y un entrelazador con solo $K = 4$ ramas.

Calculad la salida del entrelazador e indicad cuál es la mínima separación de los símbolos de la trama a la salida del entrelazador (profundidad de entrelazamiento). Marcad con una cruz los símbolos correspondientes a las tramas anteriores y posteriores. Para terminar, diseñad un entrelazador de bloque que consiga la misma profundidad de entrelazamiento y comparad las ventajas e inconvenientes de ambas arquitecturas.

Figura 14. Esquema del entrelazador y desentrelazador convolucional utilizado en el estándar DVB-T



Documento ETSI EN 300 744

6. El estándar IEEE 802.11a/g (wifi) utiliza la modulación OFDM. Para canales de $B = 20$ MHz, el número de subportadoras es de 52 y la separación de las subportadoras es de 312,5 kHz. De las 52 subportadoras, se transmiten 4 subportadoras moduladas con una secuencia pseudoaleatoria conocida por el transmisor y por el receptor. Estas subportadoras se denominan *pilotos* y se usan para estimar la respuesta frecuencial del canal. Los pilotos se transmiten en las portadoras con índices –21, –7, 7 y 21.

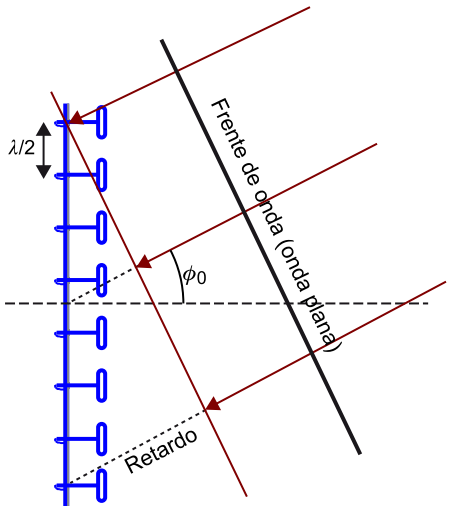
Partiendo de esta información, indicad cuál es el ancho de banda de coherencia mínima que se prevé en el estándar y cuál será la máxima ganancia de diversidad (frecuencial) que se podrá conseguir en wifi, según el diseño del estándar.

7. Determinad la matriz de canal **H** del canal MIMO de la figura 7 considerada en la ecuación (24).

8. En este ejercicio, se quiere demostrar que la respuesta angular de una agrupación lineal formada por N elementos separados $\lambda/2$ es la dada en la ecuación (26).

Suponed que llega al receptor un frente de onda plano con un ángulo ϕ_0, como se indica en la figura. Tal como también se ve en la figura, la señal llega primero a la primera antena y más tarde al resto de antenas de la agrupación.

Figura 15. Agrupación lineal de N antenas omnidireccionales a la que llega una onda plana con una inclinación ϕ_0



En la figura se indica el retardo relativo de la señal en las N antenas de la agrupación.

Si denominamos $y(t) = x(t)\exp\left(j2\pi f_0 t\right)$ a la señal paso banda recibida en la primera antena ($f_0 = c/\lambda$ es la frecuencia portadora), buscad la expresión de la señal que se recibe en la antena n de la agrupación ($n = 0, \ldots, N - 1$).

Considerad ahora que el retardo con el que llega la señal al último elemento de la agrupación prácticamente no modifica la envolvente de la señal, $x(t)$, pero sí modifica la fase de la portadora, $\exp\left(j2\pi f_0 t\right)$.

Si el receptor suma la señal presente en las N antenas y después baja la señal resultante a banda base, la señal obtenida es de la forma $g \cdot x(t)$. Se puede demostrar que el módulo de g es la respuesta de la agrupación en la dirección $\phi = 0$, es decir, $|g| = G(0)$. Buscad el módulo de g en función de N y ϕ_0. ¿Cómo lo haríais para apuntar la agrupación en la dirección ϕ_0?

9. Demostrad que la resolución angular de la agrupación estudiada en el ejercicio anterior es la indicada en la ecuación (27), que se corresponde con la distancia al primer cero de la sinc centrada en ϕ_0.

10. En este ejercicio se analiza el esquema de conformación de haz óptimo cuando la matriz de canal **H** es conocida en transmisión (ved el subapartado 4.1).

a) Buscad la expresión de la *SNR* de z a la salida del receptor (ecuación (29)) en función de $\mathbf{b}_{tx}$ y $\mathbf{b}_{rx}$.

b) Descomponed la matriz de canal mediante el SVD (ecuación (30)) y buscad el contenido de los vectores $\mathbf{b}_{tx}$ y $\mathbf{b}_{rx}$ que maximizan la *SNR* fijada la norma de estos vectores a 1, es decir, $\|\mathbf{b}_{tx}\|^2 = \|\mathbf{b}_{rx}\|^2 = 1$.

c) Demostrad que, utilizando los conformadores óptimos, la *SNR* máxima que se puede conseguir es $\sigma_{max}^2/\sigma_w^2$, donde σ_{max} es el valor singular máximo de la matriz de canal **H**.

11. Volved a resolver el ejercicio anterior en el supuesto de que el transmisor solo tiene una antena (SIMO), y por lo tanto la matriz **H** es un vector columna de longitud $N = N_r$. Repetid el ejercicio para el canal MISO, en el que la matriz **H** es un vector fila de longitud $N = N_t$.

12. Demostrad la ecuación (35).

13. En este ejercicio queremos demostrar que el desmodulador ML del código de Alamouti se puede implementar símbolo a símbolo a partir de las muestras de **z** (ecuación (37)). A partir de la ecuación (36), el desmodulador ML del vector $\mathbf{s} = [s_1, s_2]$ se puede escribir de la manera siguiente:

$$\min_s \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{H}}s\|^2$$

donde se ha definido $\tilde{\mathbf{y}}$ como:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2^* \end{bmatrix}$$

donde hemos tenido en cuenta que el vector de ruido $\tilde{\mathbf{w}}$ está formado por muestras de ruido gaussianas de media cero y varianza σ_w^2.

Demostrad que el desmodulador ML del código Alamouti también se puede escribir de la manera siguiente:

$$\min_s \|\mathbf{z} - \mu\mathbf{s}\|^2$$

donde $\mu = |h_1|^2 + |h_2|^2$, y que por lo tanto los dos símbolos s_1 y s_2 se pueden decidir por separado: $\min_{s_k} \|\mathbf{z}_k - \mu \cdot \mathbf{s}_k\|^2$ para $k = 1,2$. Tened presente que $\tilde{\mathbf{H}}^H\tilde{\mathbf{H}}$ es una matriz diagonal y los elementos de la diagonal valen μ.

14. El código de Alamouti se puede extender fácilmente para cualquier número de antenas receptoras. Las palabras código que se tienen que transmitir son las mismas que en el caso de una sola antena receptora (ecuación (33)). Si llamamos N al número de antenas receptoras, la matriz de canal será:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ \vdots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} \end{bmatrix}$$

a) Demostrad que, siguiendo el mismo procedimiento que en el caso 2 × 1 (subapartado 4.2), la ecuación (36) se puede escribir como $\tilde{\mathbf{y}}=\tilde{\mathbf{H}}s+\tilde{\mathbf{w}}$ con las definiciones siguientes:

$$\tilde{\mathbf{y}}=\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12}^* \\ y_{21} \\ y_{22}^* \\ \vdots \\ y_{N1} \\ y_{N2}^* \end{bmatrix};\ \tilde{\mathbf{H}}=\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12}^* & -h_{11}^* \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{22}^* & -h_{21}^* \\ & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} \\ h_{N2}^* & -h_{N1}^* \end{bmatrix};\qquad \mathbf{s}=\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

b) Calculad la expresión de $\mathbf{z}=\tilde{\mathbf{H}}^H\tilde{\mathbf{y}}$ para el caso de N antenas receptoras (ecuación (37)).

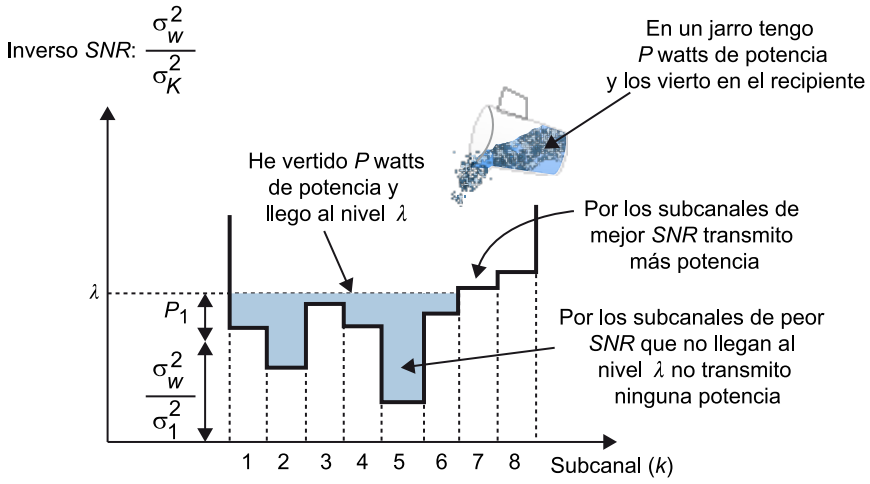
15. En este ejercicio, se estudia el criterio óptimo de asignación de potencia en canales. El objetivo es calcular las potencias P_1, ..., P_N con las que se maximiza la capacidad del canal (ecuación (39)), fijada la potencia media transmitida (ecuación (40)).

Este problema es uno de los clásicos en comunicaciones, y admite la solución siguiente, donde σ_k son los valores singulares de la matriz $\mathbf{H}$ y λ es una constante positiva que garantiza que $\sum_{k=1}^{N} P_k = P$:

$$P_k=\max\left(\lambda-\frac{\sigma_w^2}{\sigma_k^2},0\right)$$

Esta asignación de potencias se denomina *waterfilling* porque tiene una interpretación gráfica muy intuitiva: es como verter una jarra de P litros de agua y llenar un recipiente de profundidad irregular (ved la figura 16). Las partes del recipiente más profundas tendrán más agua y las partes menos profundas, tendrán menos. Para acabar de entender esta idea, en este ejercicio se propone repartir 1 W de potencia de manera óptima (*waterfilling*) entre cuatro subcanales con los siguientes valores de *SNR*: $\sigma_1^2/\sigma_w^2=10$, $\sigma_2^2/\sigma_w^2=100$, $\sigma_3^2/\sigma_w^2=2$ y $\sigma_4^2/\sigma_w^2=100$.

Figura 16. Representación gráfica del criterio de asignación de potencias óptimo llamado *waterfilling*



En la figura se marca la asignación del primer subcanal. Al resto de subcanales se les asigna la potencia del mismo modo hasta haber asignado los P vatios disponibles.

Bibliografía

Bibliografía básica

Goldsmidth, A. (2005). *Wireless communications*. Cambridge: Cambridge University Press.

Tse, D.; Viswanath, P. (2005). *Fundamentals of wireless communications*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bibliografía complementaria

Larsson, E. G.; Stoica, P. (2003). *Space-time block coding for wireless communications*. Cambridge: Cambridge University Press.